

**DINÁMICA SIMBÓLICA EN LOS PROBLEMAS  
RECTANGULAR  
Y  
COLINEAL SIMÉTRICO DE 4 CUERPOS**

**TESIS QUE PRESENTA  
M en C. MARIO GERARDO MEDINA VALDEZ**

**PARA LA OBTENCIÓN DEL GRADO DE  
DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)**

**NOVIEMBRE DE 2006**

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA  
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA**

ANÁLISIS SIMBÓLICO EN LOS RESULTADOS  
DE LA INVESTIGACIÓN

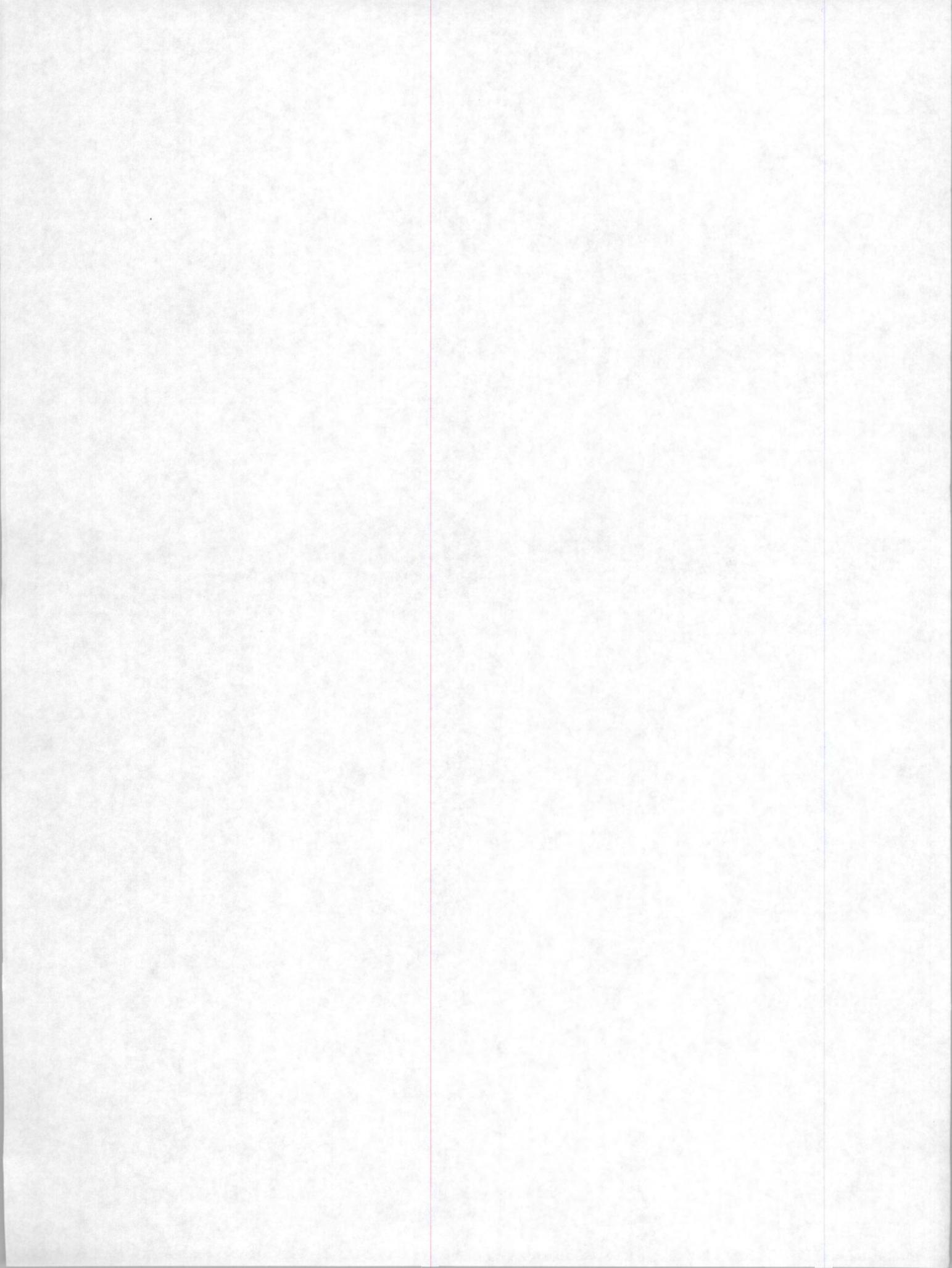
COLLEGE SIMBÓLICO DE APLICACIONES

TESIS DE REPRESENTACIÓN  
DE LA INVESTIGACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

PARA LA INVESTIGACIÓN DEL GRUPO DE  
DOCTORES EN CIENCIAS (MATERIA)

HOY FIBRA DE LANA

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA, ANÁLISIS PARA  
DIVISION DE CIENCIAS Y SIGLAS E INVESTIGACIÓN



[The page contains extremely faint and illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the document. No specific content can be transcribed.]

---

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo no hubiera sido posible sin el gran apoyo brindado a lo largo de tanto tiempo por el Dr. Ernesto A. Lacomba Zamora quien aceptó dirigir esta tesis. Sus comentarios siempre certeros cuando hacerle una pregunta primero contestaba con la frase “déjame pensar”, que sus alumnos y colegas reconocen inmediateamente, para posteriormente dar respuesta a mis inquietudes.

Los comentarios enriquecedores realizados a este trabajo por los doctores Eduardo Piña Garza y Lidia Jiménez, profesores del Departamento de Física de la UAM-I, Arturo Olvera del IIMAS (UNAM) y Carlos Villegas del IMATE-Cuernavaca (UNAM) me han permitido darle una mayor claridad a las ideas contenidas en este trabajo. Pare ellos mi más grato reconocimiento.

El Dr. Ernesto Pérez-Chavela siempre estuvo presto a platicar conmigo y sus comentarios, sin que el lo supiera ayudaron también a esclarecer algunos puntos que en cierto momento me parecían oscuros.

Mención especial debo al Dr. Joaquín Delgado con quién mi relación de amistad y trabajo han estado unidas todo este tiempo. Le agradezco el que siempre haya estado dispuesto a escuchar algunas de las ideas que fluían en el transcurso de este trabajo y cuyo apoyo ha sido importante para terminarlo.

A las personas que con su amor y cariño me lo dan todo: mi esposa Nora, su incansable aliento y respaldo han sido la base para concluir esta tesis y a nuestros pequeños hijos Mariana y Santiago.

A mis padres Sergio (*In memoriam*) y María Elena quienes hicieron que esto fuera posible.

AGRADECIMIENTOS

... el presente trabajo...  
... a la familia...  
... a los amigos...  
... a los profesores...  
... a los colegas...  
... a los directivos...  
... a los colaboradores...  
... a los lectores...  
... a los revisores...  
... a los editores...  
... a los distribuidores...  
... a los vendedores...  
... a los proveedores...  
... a los clientes...  
... a los socios...  
... a los inversionistas...  
... a los acreedores...  
... a los empleados...  
... a los voluntarios...  
... a los socios...  
... a los inversionistas...  
... a los acreedores...  
... a los empleados...  
... a los voluntarios...

---

## PROLOGO

En esta tesis se estudian dos subproblemas con dos grados de libertad de un problema que posee tres grados de libertad: el problema trapecial de cuatro cuerpos. Estos subsistemas del problema trapecial son el problema rectangular y el problema colineal simétrico de cuatro cuerpos. El problema trapecial fue estudiado por primera vez por E. Lacomba en [21], en este artículo Lacomba establece las características básicas del mismo, estudia la llamada variedad de colisión total mediante la técnica de la explosión de la colisión total, técnica que ha sido motivo de un uso extenso en la mecánica celeste. Asimismo, muestra la existencia de ocho puntos de equilibrio hiperbólicos sobre la variedad de colisión total del problema trapecial y determina la existencia de conexiones heteroclínicas entre algunos de los puntos de equilibrio. Por sí mismo el problema trapecial representa un reto, pues al tener tres grados de libertad, su dinámica resulta tan compleja como la asociada al problema plano de tres cuerpos. Este, como sabemos, también tiene tres grados de libertad y sobre su estudio se han escrito cientos de artículos de investigación, tanto en su forma general como en subproblemas como el problema isósceles o problemas restringidos planos de tres cuerpos.

Para tener una mejor comprensión de la dinámica del problema trapecial, Lacomba y Simó [28] estudian los subproblemas colineal y rectangular del problema trapecial. Debido a que estos tienen dos grados de libertad su estudio resulta más sencillo. Al estudiar estos subsistemas vuelven a usar la explosión de la colisión total para dar una descripción tanto de las variedades de colisión total como de la dinámica del flujo sobre las mismas. En el caso del problema

colineal encuentran la existencia de valores de bifurcación respecto al parámetro de masas de las partículas del sistema para la dinámica sobre la variedad de colisión total. Esta información resulta de gran ayuda en los Capítulos 2 y 3 para demostrar la existencia de familias de órbitas para los problemas rectangular y colineal que presentan dinámicas muy interesantes.

El estudio de los problemas rectangular y colineal simétrico puede ser de gran ayuda para tener una mejor comprensión de la dinámica del problema trapecial en particular y de los problemas de cuatro cuerpos en general. En esta tesis continuamos con el estudio iniciado por Lacomba y Simó [28]. Una característica del estudio que realizamos de ambos problemas es que nos restringimos al caso de energías negativas fijas.

En el capítulo 1 se formulan los problemas rectangular y colineal simétrico de cuatro cuerpos y se presentan aspectos generales de los mismos. Es de notar que las regularizaciones que se dan son regularizaciones simultáneas de las colisiones no totales de los problemas rectangular y colineal simétrico de cuatro cuerpos.

En el Capítulo 2 se prueba que para energía negativa en el problema rectangular existe una familia de órbitas de eyección-colisión, distintas de las órbita homotética, cuyos elementos presentan sucesiones de colisiones binarias simultáneas simétricas, que son las colisiones no totales del problema rectangular. La información de la dinámica sobre la variedad de colisión total y la existencia de la órbita homotética que une los dos puntos de equilibrio que se encuentran en la variedad de colisión total resultan importantes para probar la existencia de esta familia de trayectorias. Asimismo realizamos un estudio de órbitas que no necesariamente son trayectorias de eyección-colisión, pero que también presentan una sucesión finita de colisiones no totales.

En el Capítulo 3 se muestra la existencia de una dinámica muy rica en el problema colineal simétrico de cuatro cuerpos. Esto se debe a la existencia de un parámetro dependiente de las masas de las partículas del sistema. Se muestra que para valores del parámetro contenidos en ciertos intervalos abiertos existe una familia de trayectorias de eyección-colisión que presentan una sucesión finita de colisiones binarias del par interior del sistema y de colisiones binarias simultáneas simétricas. También, al igual como se hace para el problema rectangular en el Capítulo 2, se describe la dinámica de una familia de órbitas que no necesariamente son de eyección-colisión, pero también presentan una sucesión de colisiones no totales del sistema.

Para el Capítulo 4 procedemos a estudiar las órbitas de escape parabólico del problema rectangular, que son órbitas que escapan a infinito con velocidad asintótica nula. Usando técnicas de explosión se introduce el estudio de un espacio llamado variedad al infinito, en el cual todas las órbitas son periódicas. Una de ellas, la llamada órbita periódica parabólica al infinito es el conjunto límite de todas las trayectorias de escape parabólico. La órbita periódica parabólica al infinito tiene asociadas dos variedades invariantes, una estable y otra inestable. Mediante una elección adecuada de distintas secciones es posible mostrar numéricamente la intersección transversal de las variedades invariantes mencionadas y construir, en consecuencia, una dinámica simbólica para las trayectorias de escape parabólico. En el problema rectangular las ecuaciones de movimiento son completamente simétricas por lo que solamente se estudian los escapes en una de las dos direcciones posibles. Por simetría se obtienen los escapes en la otra dirección y se obtiene un buen estudio de las órbitas de escape parabólico del problema rectangular.

Finalmente, en el Capítulo 5 se realiza un estudio de trayectorias de escape en el problema colineal simétrico de cuatro cuerpos. Se considera solamente el problema de los escapes de las partículas exteriores mientras el par interior de partículas tiene un movimiento acotado debido a la geometría de la región de Hill. Consideramos la explosión del infinito al igual que en el Capítulo 4 para el problema rectangular y se obtiene también una variedad al infinito, su correspondiente órbita periódica parabólica al infinito y asociadas a ésta dos variedades invariantes, una estable y otra inestable. Posteriormente se aproximan numéricamente tales espacios invariantes y se muestra que éstos se intersectan para ciertos valores del parámetro de masas sobre una sección elegida convenientemente. La existencia de tal intersección tiene como consecuencia la existencia de movimientos oscilatorios en el problema colineal simétrico de cuatro cuerpos.

Faint, illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the page. The text is too light to transcribe accurately.

---

# INDICE

<b>AGRADECIMIENTOS</b>	<b>i</b>
<b>PROLOGO</b>	<b>iii</b>
<b>1 PROBLEMAS RECTANGULAR Y COLINEAL SIMETRICO</b>	<b>1</b>
1.1 Introducción . . . . .	1
1.2 El problema trapecial de cuatro cuerpos . . . . .	2
1.3 El problema rectangular de cuatro cuerpos . . . . .	3
1.3.1 Formulación del problema . . . . .	3
1.3.2 Explosión de la colisión total . . . . .	6
1.3.3 Regularización de colisiones binarias simultáneas simétricas. . . . .	7
1.4 Introducción al problema colineal de cuatro cuerpos . . . . .	8
1.4.1 Formulación del problema y ecuaciones de movimiento . . . . .	9
1.4.2 Explosión de la colisión total . . . . .	12
1.4.3 Regularización simultánea de colisiones no totales del problema colineal . . . . .	13
<b>2 COLISIONES EN EL PROBLEMA RECTANGULAR</b>	<b>17</b>
2.1 Introducción . . . . .	17
2.2 Flujo sobre la variedad de colisión total . . . . .	18
2.3 Orbita homotética y transversalidad a lo largo de ella. . . . .	21
2.4 Sección de Poincaré . . . . .	24
2.5 Resultados básicos . . . . .	25

2.6	Orbitas de eyección-colisión con colisiones intermedias. . . . .	35
2.7	Dinámica simbólica . . . . .	45
<b>3</b>	<b>COLISIONES EN EL PROBLEMA COLINEAL</b>	<b>51</b>
3.1	Introducción . . . . .	51
3.2	Flujo sobre la variedad de colisión total . . . . .	52
3.3	Orbita homotética y transversalidad a lo largo de ella. . . . .	57
3.4	Sección de Poincaré y resultados básicos . . . . .	59
3.5	Orbitas de eyección-colisión con colisiones intermedias . . . . .	65
3.6	Dinámica simbólica . . . . .	77
<b>4</b>	<b>ESCAPES EN EL PROBLEMA RECTANGULAR</b>	<b>83</b>
4.1	Introducción . . . . .	83
4.2	Variedad de órbitas parabólicas . . . . .	85
4.3	Descripción de la variedad al infinito . . . . .	88
4.4	Flujo sobre la variedad al infinito . . . . .	89
4.5	Dinámica cerca de la órbita parabólica al infinito . . . . .	93
4.6	Existencia de una órbita de escape parabólico . . . . .	95
4.7	Primera hipótesis de transversalidad . . . . .	101
4.8	Aproximaciones numéricas de $W^{u,s}(OPP_{\pm})$ . . . . .	102
4.9	Secciones de transversalidad. . . . .	105
4.10	Resultados numéricos . . . . .	110
4.11	Construcción de la dinámica simbólica en el problema rectangular	113
<b>5</b>	<b>ESCAPES EN EL PROBLEMA COLINEAL</b>	<b>121</b>
5.1	Introducción . . . . .	121
5.2	Variedad de órbitas parabólicas . . . . .	122
5.3	Descripción de las variedades al infinito . . . . .	125
5.4	Flujo sobre la variedad al infinito . . . . .	126
5.5	Superficie de sección. . . . .	128
5.6	Aproximaciones numéricas de $W^{u,s}(OPP)$ . . . . .	129
5.7	Transversalidad de las variedades invariantes al infinito . . . . .	132
<b>6</b>	<b>CONCLUSIONES</b>	<b>137</b>
<b>A</b>	<b>Apéndice</b>	<b>139</b>

---

---

# CAPÍTULO 1

---

## PROBLEMAS RECTANGULAR Y COLINEAL SIMETRICO

### 1.1 Introducción

El problema central de la mecánica celeste consiste en describir la dinámica de  $N$  partículas en  $\mathbb{R}^k$  interactuando mutuamente bajo la ley de atracción newtoniana.

En su *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, o simplemente sus *Principia*, publicados en 1687, Newton resolvió el problema de dos cuerpos, también conocido como el *Problema de Kepler* o *problema de fuerza central*. Usando argumentos puramente geométricos mostró que los cuerpos se mueven en órbitas cónicas. En Pollard [45], podemos encontrar una bella exposición del problema de Kepler usando la herramienta del cálculo vectorial.

El *problema de tres cuerpos* tiene una historia muy interesante y del cual resta aún mucho por escribirse; el mismo Newton llegó a decir que pensar en el problema de tres cuerpos le producía severos dolores de cabeza. Desde entonces el estudio del problema de tres cuerpos ha producido centenares de artículos y actualmente sigue siendo un área de investigación muy activa. Debido a que el problema espacial de tres cuerpos es un problema con nueve grados de libertad su estudio presenta gran dificultad, en visto de esto, se ha procedido a estudiar casos especiales del problema de tres cuerpos, como el *problema plano de tres cuerpos* o problemas de tres cuerpos donde aparecen cierto número de

simetrías, lo que reduce el problema a un problema con pocos grados de libertad. El problema plano de tres cuerpos y otras simplificaciones del problema general de tres cuerpos como los conocidos *problemas restringidos de tres cuerpos*, el *problema isósceles de tres cuerpos*, el *problema anisotrópico de Kepler* han sido estudiados por Sudman [54], Devaney [13], [14], [15], R. Moeckel [40],[41], [42], [43], C. Robinson [46], R. Easton [18], A. Chenciner y R. Montgomery [6], J. Llibre y C. Simó [30], [31], E. Lacomba [23], Lacomba y Losco [24], C. Simó [50], Simó y Susín [51], A. Susín [55], M. Alvarez y J. Llibre [4] y muchos otros.

También han sido estudiados problemas planos de cuatro cuerpos. El *problema romboidal de cuatro cuerpos* ha generado trabajos por Lacomba y Pérez-Chavela [26], [27] y Delgado y Pérez-Chavela [12], el problema romboidal es un problema con dos grados de libertad. Un caso del problema espacial de cuatro cuerpos es el llamado *problema tetraedral simétrico de cuatro cuerpos* estudiado por C. Vidal [57], [58] y Vidal y Delgado [11]; mientras el problema tetraedral simétrico con rotación estudiado inicialmente por Vidal presenta tres grados de libertad, el mismo problema sin rotación tiene dos grados de libertad. En general, no es mucho lo que se conoce sobre problemas con tres grados de libertad y problemas de cuatro cuerpos.

## 1.2 El problema trapecial de cuatro cuerpos

En [21], E. Lacomba introduce el estudio del problema trapecial de cuatro cuerpos; en éste se consideran cuatro partículas que se encuentran en los vértices de un trapecio isósceles, el cual posee un eje vertical de simetría. Las dos partículas que se encuentran en la parte superior de la configuración forman lo que llamaremos el *binario superior*, ambas partículas tienen masa igual a  $\mu$ ; mientras que las partículas que se encuentran en la parte inferior de la configuración forman el *binario inferior* y ambas partículas tienen masa igual a  $m$ , como se muestra en la Figura 1.1. Asimismo suponemos que las velocidades iniciales también son simétricas respecto al eje vertical de simetría con el fin de preservar la configuración trapecial bajo la evolución determinada por la segunda ley de Newton. Observemos que si al tiempo  $t = 0$  las partículas de masa  $\mu$  se encuentran en la parte superior de la configuración, y en consecuencia, las partículas de masa  $m$  se encuentran en la parte inferior de la configuración trapecial, puede ocurrir que al evolucionar el sistema las partículas de masa  $\mu$  pasen a estar en la parte inferior de la configuración y las partículas de masa  $m$

se encuentren en la parte superior, pero siempre conservando una configuración trapecial. Este problema presenta tres grados de libertad y su estudio fué posteriormente continuado por Lacomba [22] y Lacomba y Simó [28].

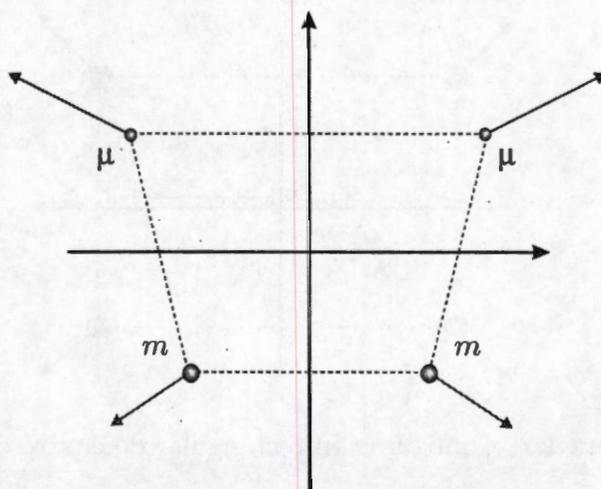


Figura 1.1: Configuración trapecial.

El problema trapecial presenta dos subproblemas con dos grados de libertad: el problema rectangular de cuatro cuerpos, el cual se obtiene cuando todas las partículas tienen la misma masa (las cuales suponemos, sin perder generalidad, unitarias) y la distancia entre las partículas del binario inferior es igual a la distancia entre las partículas del binario superior; y el problema colineal simétrico de cuatro cuerpos, que se obtiene cuando la distancia entre los centros de masa de los binarios superior e inferior se anula, por lo que las cuatro partículas resultan ser colineales.

Los artículos [21] y [22] nos muestran algo de la complejidad de la dinámica que encierra el problema trapecial. A continuación describimos los dos subproblemas del problema trapecial que son los problemas que estudiaremos en éste trabajo: el problema rectangular y el problema colineal de cuatro cuerpos.

## 1.3 El problema rectangular de cuatro cuerpos

### 1.3.1 Formulación del problema

Consideremos cuatro partículas de masa unitaria que se localizan en los vértices de un rectángulo, las cuales presentan condiciones iniciales de posición y veloci-

#### 4 PROBLEMAS RECTANGULAR Y COLINEAL SIMETRICO

dad simétricas respecto a un eje vertical (véase Figura 1.2) de tal forma que la configuración rectangular se preserva al evolucionar el sistema bajo atracción newtoniana.

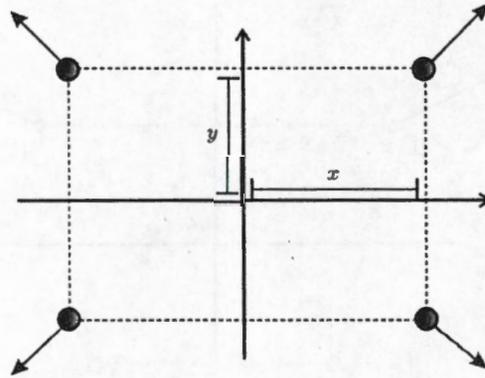


Figura 1.2: Configuración rectangular de cuatro cuerpos.

Sean  $C_1$  y  $C_2$ , respectivamente, los centros de masa de las parejas de partículas que se encuentran en la parte superior e inferior de la configuración rectangular. Denotemos por  $2x$  la longitud de la base del rectángulo y por  $2y$  la altura del mismo. Asimismo suponemos que el centro de masa se localiza en el origen.

El espacio de configuraciones del sistema está dado por el subconjunto del primer cuadrante dado por

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0\}.$$

La frontera  $\partial Q$  del espacio de configuraciones corresponde a todas las posibles configuraciones del problema rectangular donde ocurren colisiones. El conjunto de puntos  $\mathbf{q} = (0, y) \in \partial Q$  tales que  $y \neq 0$  corresponden a las configuraciones rectangulares donde ocurren colisiones binarias simultáneas simétricas de las parejas de partículas que se localizan en la parte superior e inferior de la configuración rectangular; mientras que al conjunto de puntos  $\mathbf{q} = (x, 0) \in \partial Q$  tales que  $x \neq 0$  le corresponden colisiones binarias simultáneas simétricas de las parejas de partículas que se encuentran a la derecha e izquierda de la configuración rectangular, ver Figura 1.3. Finalmente, al origen  $(x, y) = (0, 0) \in \partial Q$  le corresponde la colisión simultánea de las cuatro partículas o colisión total del sistema.

El Lagrangiano del sistema está dado por  $L = T + U$ , donde

$$T(x, y) = 2\dot{x}^2 + 2\dot{y}^2$$

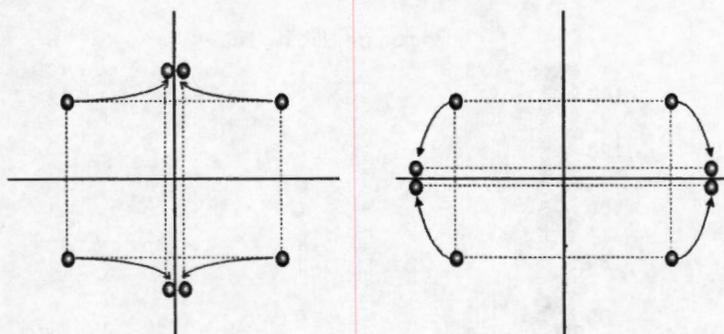


Figura 1.3: Colisiones no totales en el problema rectangular.

es la *energía cinética* y

$$U(x, y) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$$

es la *energía potencial*. Las ecuaciones de Hamilton son

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{p_x}{4}, & \dot{p}_x &= -\frac{1}{2x^2} - \frac{x}{2(x^2 + y^2)^{3/2}}, \\ \dot{y} &= \frac{p_y}{4}, & \dot{p}_y &= -\frac{1}{2y^2} - \frac{y}{2(x^2 + y^2)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

donde las dos ecuaciones a la izquierda definen los momentos generalizados del sistema y el hamiltoniano está dado por

$$H = \frac{1}{8}(p_x^2 + p_y^2) - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2y} - \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (1.2)$$

Denotamos por  $A = \text{diag}\{4, 4\}$  a la matriz de masas asociada a la energía cinética  $2T = \mathbf{p}^T A \mathbf{p}$ , donde  $\mathbf{p} = (p_x, p_y)^T$ .

Un nivel fijo de energía  $\mathbf{E}_h = \{(x, y, p_x, p_y) \in \mathbf{Q} \times \mathbb{R}^2 \mid H = h\}$  se proyecta en el espacio de configuraciones  $\mathbf{Q}$  como la región de Hill

$$\mathbf{Q}_h = \left\{ (x, y) \in \mathbf{Q} \mid \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2h \geq 0 \right\}.$$

En este capítulo estamos interesados en un nivel negativo de energía fijo. En la Figura 1.4 mostramos la región de Hill para el valor  $h = -1/16$ . Observemos que la curva de velocidad nula  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2h = 0$  es la frontera de la región de Hill y además es asintótica a las rectas  $x = -1/(2h)$  y  $y = -1/(2h)$ .

Antes de terminar esta sección observemos que para el problema general de  $n$ -cuerpos, dados dos niveles de energía  $\{H = h_1\}$  y  $\{H = h_2\}$  tales que  $h_1$

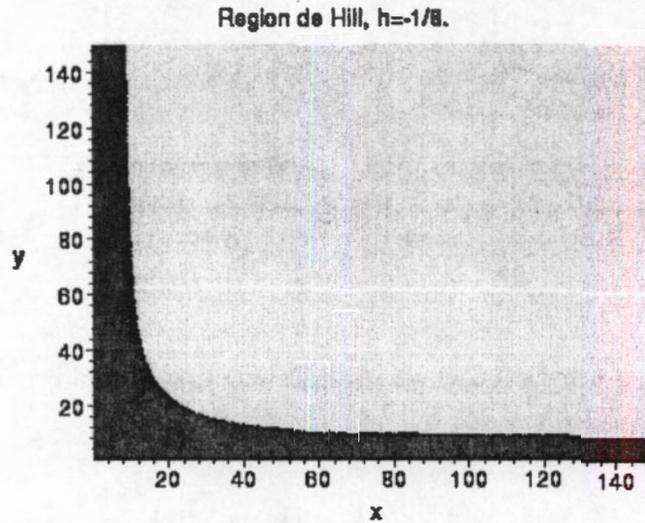


Figura 1.4: Región de Hill para  $h = -1/16$ .

y  $h_2$  tienen el mismo signo, la dinámica sobre ambos niveles de energía es la misma en el sentido de que es posible construir un difeomorfismo que mande las órbitas sobre un nivel de energía en trayectorias sobre el otro nivel de energía de manera biunívoca. Es en vista de lo anterior que al fijar un nivel negativo de energía no necesariamente estamos restringiéndonos a estudiar solamente la dinámica sobre tal nivel de energía.

### 1.3.2 Explosión de la colisión total

Con el fin de realizar la explosión de McGehee de la colisión total, introducida en [35], primero consideramos coordenadas polares

$$x = \frac{r}{2} \cos \theta, \quad y = \frac{r}{2} \sin \theta. \quad (1.3)$$

La transformación de los momentos se obtiene a través de la función generatriz

$$\Omega = x(r, \theta)p_x + y(r, \theta)p_y = \frac{rp_x}{2} \cos \theta + \frac{rp_y}{2} \sin \theta$$

y está dada por

$$p_r = \frac{\partial \Omega}{\partial r} = \frac{p_x}{2} \cos \theta + \frac{p_y}{2} \sin \theta, \quad p_\theta = \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} = -\frac{rp_x}{2} \sin \theta + \frac{rp_y}{2} \cos \theta,$$

donde la transformación inversa es

$$p_x = 2p_r \cos \theta - \frac{2p_\theta}{r} \sin \theta, \quad p_y = 2p_r \sin \theta + \frac{2p_\theta}{r} \cos \theta.$$

El hamiltoniano (1.2) se transforma en

$$H = \frac{1}{2} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) - \frac{U(\theta)}{r},$$

donde

$$U(\theta) = \frac{1}{2 \cos \theta} + \frac{1}{2 \sin \theta} + \frac{1}{2}.$$

Es de recordar que al moverse una partícula de masa  $m$  en un campo de fuerza central  $F(r) = -k/r$  el hamiltoniano asociado puede escribirse en la forma  $H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) - \frac{k}{r}$ .

La relación de energía  $H = h$  sugiere los cambios de variables

$$v = r^{1/2} p_r, \quad y \quad u = r^{-1/2} p_\theta, \quad (1.4)$$

los cuales transforman la relación de energía en

$$\frac{1}{2}(u^2 + v^2) = U(\theta) + rh. \quad (1.5)$$

Así, las ecuaciones de movimiento toman la forma clásica

$$\begin{aligned} r' &= rv, \\ v' &= u^2 + \frac{v^2}{2} - U(\theta), \\ \theta' &= u, \\ u' &= -\frac{1}{2}vu + \frac{dU(\theta)}{d\theta}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

donde ' representa la derivada respecto a la nueva variable temporal  $\tau$ , la cual se relaciona a la variable original  $t$  mediante la reparametrización del tiempo  $\frac{dt}{d\tau} = r^{3/2}$ . Las singularidades debidas a las colisiones binarias simultáneas simétricas  $\theta = 0, \pi/2$  pueden regularizarse simultáneamente mediante un cambio extra de variables.

### 1.3.3 Regularización de colisiones binarias simultáneas simétricas.

A continuación consideremos una modificación a un cambio de variable y un reescalamiento del tiempo usado en [16] al estudiar el problema isósceles de tres cuerpos y en [26] para estudiar el problema romboidal de cuatro cuerpos ; el cambio de variable que usaremos nosotros está dado por

$$w = \frac{\sin(2\theta)}{2\sqrt{W(\theta)}}u, \quad (1.7)$$

## 8 PROBLEMAS RECTANGULAR Y COLINEAL SIMETRICO

y el reescalamiento del tiempo es

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{\sin(2\theta)}{2\sqrt{W(\theta)}},$$

donde

$$W(\theta) = U(\theta) \cos \theta \sin \theta = \frac{1}{2}(\sin \theta + \cos \theta + \sin \theta \cos \theta)$$

es el potencial regularizado. Las ecuaciones, después de esta regularización de las colisiones binarias simétricas toman la forma

$$\begin{aligned} \frac{dr}{ds} &= rv \frac{\sin(2\theta)}{2\sqrt{W(\theta)}}, \\ \frac{dv}{ds} &= \sqrt{W(\theta)} \left\{ (rh - \frac{1}{4}v^2) \frac{\sin(2\theta)}{W(\theta)} + 1 \right\}, \\ \frac{d\theta}{ds} &= w, \\ \frac{dw}{ds} &= (\sin(2\theta) - w^2) \frac{\frac{dW}{d\theta}}{2W(\theta)} + \cos(2\theta) \left\{ 1 + \frac{(2rh - v^2) \sin(2\theta)}{2W(\theta)} \right\} - \frac{vw \sin(2\theta)}{4\sqrt{W(\theta)}}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

y la relación de energía está dada ahora por

$$w^2 = \frac{\sin^2(2\theta)}{4W(\theta)} (2rh - v^2) + \sin(2\theta). \quad (1.9)$$

De esta manera, hemos extendido el campo vectorial a la frontera suave del nivel de energía fijo, dada por

$$M = \left\{ (r, v, \theta, w) \mid r = 0, w^2 = \sin(2\theta) - \frac{v^2 \sin^2(2\theta)}{4W(\theta)} \right\},$$

la cual representa a la variedad de colisión total regularizada.

### 1.4 Introducción al problema colineal de cuatro cuerpos

El problema colineal simétrico de cuatro cuerpos es el segundo subproblema del problema trapecial de cuatro cuerpos y al igual que el problema rectangular, también presenta dos grados de libertad. A continuación damos las características básicas del problema colineal, características que explotaremos a lo largo de este trabajo.

### 1.4.1 Formulación del problema y ecuaciones de movimiento

Consideremos cuatro partículas en una configuración colineal, con posiciones simétricas respecto a su centro de masa, el cual se encuentra en el origen, véase Figura 1.5. Supongamos asimismo que cada una de las partículas del binario interior tienen masa unitaria y cada partícula del binario exterior tiene masa positiva igual a  $\alpha$ . Las condiciones iniciales de posición y velocidad son tales que la configuración simétrica respecto al origen se preserva a lo largo de la evolución del sistema bajo atracción newtoniana.



Figura 1.5: Configuración colineal simétrica de cuatro cuerpos.

Supongamos que las partículas del binario interior tienen posiciones  $x_1$  y  $-x_1$  y masas  $m_1 = m_2 = 1$ , respectivamente; mientras que las partículas del binario exterior tienen coordenadas  $y_1$  y  $-y_1$  y masas  $m_3 = m_4 = \alpha$ .

Consideremos el siguiente cambio de coordenadas  $x = x_1$  y  $y = \sqrt{\alpha}y_1$ , esto permitirá que podamos trabajar con un sistema donde la matriz de masas no dependa del parámetro de masas  $\alpha$ .

En consecuencia  $m_1 = m_2 = 1$  siguen siendo las masas de las partículas del binario interior, mientras que  $m_3 = m_4 = \alpha$  son las masas de las partículas exteriores de la configuración colineal y  $x = x_1$ ,  $-x = -x_1$ ,  $y = y_1/\sqrt{\alpha}$ ,  $-y = -y_1/\sqrt{\alpha}$ , respectivamente, sus coordenadas.

El espacio de configuraciones del sistema está dado por el subconjunto del primer cuadrante del plano, definido por

$$\mathbf{Q} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x, y > 0 \text{ and } \sqrt{\alpha}x < y\}$$

Observemos que el conjunto de puntos  $\mathbf{q} = (0, y) \in \partial\mathbf{Q}$  con  $y \neq 0$  corresponde a las configuraciones que presentan colisiones binarias del par de partículas interiores; mientras que el conjunto de puntos  $\mathbf{q} = (x, y) \in \partial\mathbf{Q}$  con  $y = \sqrt{\alpha}x \neq 0$  corresponde a las configuraciones que presentan colisiones binarias simétricas y el origen  $\mathbf{q} = (x, y) = (0, 0) \in \partial\mathbf{Q}$  corresponde a la configuración donde ocurre la colisión simultánea de las cuatro partículas. Véase Figura 1.6.

## 10 PROBLEMAS RECTANGULAR Y COLINEAL SIMETRICO



Figura 1.6: Colisiones no totales en el problema colineal de cuatro cuerpos.

El Lagrangiano del sistema está dado por

$$L = T + U,$$

donde

$$T(x, y) = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$$

es la energía cinética y

$$U(x, y) = \frac{1}{2x} + \frac{\alpha^{5/2}}{2y} + \frac{2\alpha^{3/2}}{y - \sqrt{\alpha}x} + \frac{2\alpha^{3/2}}{y + \sqrt{\alpha}x} = \frac{1}{2x} + \frac{\alpha^{5/2}}{2y} + \frac{4\alpha^{3/2}y}{y^2 - \alpha x^2}$$

es la energía potencial.

Los momentos generalizados están dados por

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 2\dot{y}, \quad (1.10)$$

donde  $\dot{\phantom{x}} = \frac{d}{dt}$ .

Si denotamos  $\mathbf{p} = (p_x, p_y)^t$ ,  $\mathbf{q} = (x, y)^t$  y  $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{x}, \dot{y})^t$ , el hamiltoniano se escribe como

$$\begin{aligned} H &= \mathbf{p}^t \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \\ &= \frac{1}{4}(p_x^2 + p_y^2) - \frac{1}{2x} - \frac{\alpha^{5/2}}{2y} - \frac{2\alpha^{3/2}}{y - \sqrt{\alpha}x} - \frac{2\alpha^{3/2}}{y + \sqrt{\alpha}x}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$= \frac{1}{4}(p_x^2 + p_y^2) - \frac{1}{2x} - \frac{\alpha^{5/2}}{2y} - \frac{4\alpha^{3/2}y}{y^2 - \alpha x^2}, \quad (1.12)$$

$$= \frac{1}{4}(p_x^2 + p_y^2) - U(x, y),$$

y las ecuaciones de Hamilton:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \quad (1.13)$$

que pueden reescribirse como

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \frac{p_x}{2}, \\
 \dot{y} &= \frac{p_y}{2}, \\
 \dot{p}_x &= -\frac{1}{2x^2} + \frac{8\alpha^{5/2}xy}{(y^2 - \alpha x^2)^2}, \\
 \dot{p}_y &= -\frac{\alpha^{5/2}}{2y^2} - 4\alpha^{3/2} \frac{y^2 + \alpha x^2}{(y^2 - \alpha x^2)^2}.
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

Denotemos por  $M = \text{diag}\{2, 2\}$  a la matriz de masas asociada a la energía cinética  $2T = \mathbf{p}^t M \mathbf{p}$ .

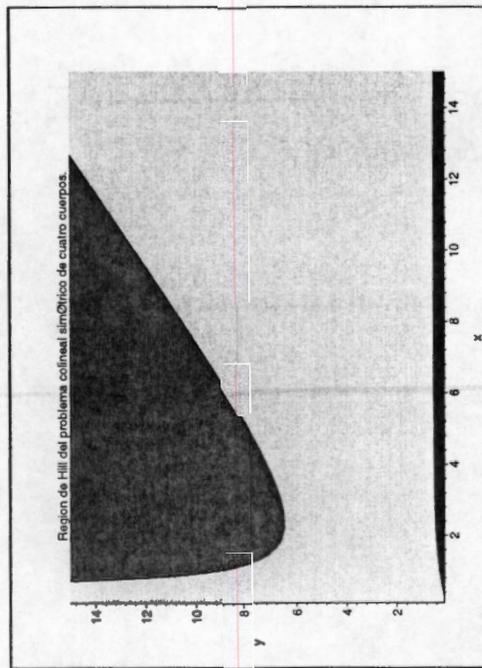


Figura 1.7: Región de Hill para el problema colineal con  $h = -1/4$ .

Un nivel fijo de energía  $\{H = h\}$  se proyecta en el espacio de configuraciones  $\mathcal{Q}$  como la región de Hill

$$\mathcal{Q}_h = \left\{ (x, y) \in \mathcal{Q} \mid \frac{1}{2x} + \frac{\alpha^{5/2}}{2y} + \frac{2\alpha^{3/2}}{y - \sqrt{\alpha}x} + \frac{2\alpha^{3/2}}{y + \sqrt{\alpha}x} + h \geq 0 \right\}$$

En este capítulo estamos interesados en un nivel negativo fijo de energía. En la Figura 1.7, mostramos la región de Hill para el valor  $h = -1/4$ . Observemos

## 12 PROBLEMAS RECTANGULAR Y COLINEAL SIMETRICO

que la curva de velocidad nula  $\frac{1}{2x} + \frac{\alpha^{5/2}}{2y} + \frac{2\alpha^{3/2}}{y-\sqrt{\alpha}} + \frac{2\alpha^{3/2}x}{y+\sqrt{\alpha}} + h = 0$  es la frontera de la región de Hill y además es asintótica a la recta  $x = -1/2h$ .

### 1.4.2 Explosión de la colisión total

Consideremos el cambio de variables

$$x = \frac{r}{\sqrt{2}} \cos \theta, \quad y = \frac{r}{\sqrt{2}} \sin \theta \quad (1.15)$$

para realizar la explosión del origen, introducida por McGehee en [35].

La transformación de los momentos la podemos obtener usando la función generatriz

$$\Omega(r, \theta, p_x, p_y) = x(r, \theta)p_x + y(r, \theta)p_y = \frac{rp_x}{\sqrt{2}} \cos \theta + \frac{rp_y}{\sqrt{2}} \sin \theta$$

la cual está dada por la expresión

$$p_r = \frac{\partial \Omega}{\partial r} = \frac{p_x}{\sqrt{2}} \cos \theta + \frac{p_y}{\sqrt{2}} \sin \theta \quad p_\theta = \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} = -\frac{rp_x}{\sqrt{2}} \sin \theta + \frac{rp_y}{\sqrt{2}} \cos \theta$$

donde la transformación inversa de los momentos está dada por

$$p_x = \sqrt{2}p_r \cos \theta - \sqrt{2}\frac{p_\theta}{r} \sin \theta \quad p_y = \sqrt{2}p_r \sin \theta + \frac{\sqrt{2}p_\theta}{r} \cos \theta.$$

El hamiltoniano (1.11) toma la forma

$$H = \frac{1}{2}(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}) - \frac{U(\theta)}{r} \quad (1.16)$$

donde

$$\begin{aligned} U(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{2} \cos \theta} + \frac{1}{\sqrt{2} \sin \theta} + \frac{2\sqrt{2}\alpha^{3/2}}{\sin \theta - \sqrt{\alpha} \cos \theta} + \frac{2\sqrt{2}\alpha^{3/2}}{\sin \theta + \sqrt{\alpha} \cos \theta} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} \cos \theta} + \frac{1}{\sqrt{2} \sin \theta} + \frac{4\sqrt{2}\alpha^{3/2} \sin \theta}{\sin^2 \theta - \alpha \cos^2 \theta}. \end{aligned}$$

De la relación de energía (1.16),  $H = h$ , se proponen los siguientes cambios de variables

$$u = r^{-1/2}p_\theta \quad v = r^{1/2}p_r \quad (1.17)$$

los cuales transforman la energía en la relación clásica para sistemas con dos grados de libertad

$$\frac{1}{2}(u^2 + v^2) = U(\theta) + rh. \quad (1.18)$$

Así las ecuaciones de movimiento toman la presentación siguiente

$$\begin{aligned}
 \dot{r} &= r^{-1/2}v, \\
 \dot{v} &= r^{-3/2}\left(u^2 + \frac{v^2}{2} - U(\theta)\right), \\
 \dot{\theta} &= r^{-3/2}u, \\
 \dot{u} &= r^{-3/2}\left(-\frac{1}{2}vu + \frac{dU(\theta)}{d\theta}\right),
 \end{aligned} \tag{1.19}$$

donde  $\dot{\phantom{x}} = \frac{d}{dt}$ , y  $\theta \in [\theta_\alpha, \pi/2]$ . Con la reparametrización del tiempo

$$\frac{dt}{d\tau} = r^{3/2}$$

las ecuaciones de movimiento se transforman en

$$\begin{aligned}
 r' &= rv, \\
 v' &= u^2 + \frac{v^2}{2} - U(\theta), \\
 \theta' &= u, \\
 u' &= -\frac{1}{2}vu + \frac{dU(\theta)}{d\theta},
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

donde  $' = \frac{d}{d\tau}$ .

Observemos que las ecuaciones de movimiento aún presentan singularidades cuando las partículas del par interior chocan o cuando se presentan colisiones binarias simultáneas simétricas; esto es, cuando  $\theta = \pi/2$  o  $\theta = \theta_\alpha$ , donde  $\tan \theta_\alpha = \sqrt{\alpha}$ .

### 1.4.3 Regularización simultánea de colisiones no totales del problema colineal

Con el fin de regularizar simultáneamente éstas singularidades, usamos ideas contenidas en [26], pero consideramos el potencial regularizado dado por  $W(\theta) =$

## 14 PROBLEMAS RECTANGULAR Y COLINEAL SIMETRICO

$U(\theta) \cos \theta (\sin \theta - \sqrt{\alpha} \cos \theta)$ , esta función está dada por

$$\begin{aligned}
 W(\theta) &= \cos \theta (\sin \theta - \sqrt{\alpha} \cos \theta) \left\{ \frac{1}{\sqrt{2} \cos \theta} + \frac{\alpha^{5/2}}{\sqrt{2} \sin \theta} \right. \\
 &\quad \left. + 2\sqrt{2}\alpha^{3/2} \left( \frac{1}{\sin \theta - \sqrt{\alpha} \cos \theta} + \frac{1}{\sin \theta + \sqrt{\alpha} \cos \theta} \right) \right\} \\
 &= \frac{\sin \theta - \sqrt{\alpha} \cos \theta}{\sqrt{2}} + \alpha^{5/2} \frac{(\sin \theta - \sqrt{\alpha} \cos \theta) \cos \theta}{\sqrt{2} \sin \theta} \\
 &\quad + 2\sqrt{2}\alpha^{3/2} \cos \theta + 2\sqrt{2}\alpha^{3/2} \frac{\cos \theta (\sin \theta - \sqrt{\alpha} \cos \theta)}{\sin \theta + \sqrt{\alpha} \cos \theta},
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

así como la nueva variable

$$w = \frac{\cos \theta (\sin \theta - \sqrt{\alpha} \cos \theta)}{\sqrt{2W(\theta)}} u \tag{1.22}$$

junto con el reescalamiento del tiempo

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{\cos \theta (\sin \theta - \sqrt{\alpha} \cos \theta)}{\sqrt{2W(\theta)}}.$$

Así, las ecuaciones de movimiento y la relación de energía se transforman, respectivamente, en

$$\begin{aligned}
 \frac{dr}{ds} &= rv \frac{\cos \theta (\sin \theta - \sqrt{\alpha} \cos \theta)}{\sqrt{2W(\theta)}}, \\
 \frac{dv}{ds} &= \frac{\sqrt{2W(\theta)}}{2} \left\{ (2rh - \frac{1}{2}v^2) \frac{\cos \theta (\sin \theta - \sqrt{\alpha} \cos \theta)}{W(\theta)} + 1 \right\}, \\
 \frac{d\theta}{ds} &= w, \\
 \frac{dw}{ds} &= (\cos \theta (\sin \theta - \sqrt{\alpha} \cos \theta) - w^2) \frac{\frac{dW}{d\theta}}{2W(\theta)} - \frac{vw \cos \theta (\sin \theta - \sqrt{\alpha} \cos \theta)}{2\sqrt{2W(\theta)}}, \\
 &\quad + \frac{(\cos(2\theta) + \sqrt{\alpha} \sin(2\theta))}{2} \left\{ 3 + \frac{2rh - v^2}{W(\theta)} \cos \theta (\sin \theta - \sqrt{\alpha} \cos \theta) \right\},
 \end{aligned} \tag{1.23}$$

y

$$w^2 = \frac{\cos^2 \theta (\sin \theta - \sqrt{\alpha} \cos \theta)^2}{2W(\theta)} (2rh - v^2) + \cos \theta (\sin \theta - \sqrt{\alpha} \cos \theta). \tag{1.24}$$

Tomando  $r = 0$  en la última ecuación, ésta puede reescribirse como

$$w^2 = \cos \theta (\sin \theta - \sqrt{\alpha} \cos \theta) - \frac{v^2 \cos^2 \theta (\sin \theta - \sqrt{\alpha} \cos \theta)^2}{2W(\theta)}. \tag{1.25}$$

De esta forma, hemos extendido el campo vectorial a las componentes determinadas por las colisiones binarias simples y las colisiones binarias simultáneas simétricas. Definimos la variedad de colisión total como el conjunto

$$M = \{(r, v, \theta, w) \mid r = 0, \text{ la ecuación (1.25) se satisface, y } \theta_\alpha \leq \theta \leq \pi/2\},$$

el cual representa la variedad de colisión total regularizada.



---

---

## CAPÍTULO 2

---

# COLISIONES EN EL PROBLEMA RECTANGULAR

### 2.1 Introducción

En este capítulo se da una descripción de un tipo especial de órbitas en el problema rectangular de cuatro cuerpos. Este corresponde a trayectorias que presentan una sucesión de colisiones binarias simultáneas simétricas, que denotamos por CBS. Las colisiones que aparecen, corresponden, como vimos en el capítulo anterior, a colisiones simultáneas de los binarios superior e inferior de la configuración rectangular; mientras que el segundo tipo de colisiones no totales que se dan son colisiones binarias simétricas de los pares de partículas que se encuentran, simétricamente, a la derecha e izquierda de la configuración rectangular. Las primeras se llamarán CBS-derechas, mientras que las segundas serán denominadas CBS-izquierdas.

Esta manera de denominarlas se debe al hecho de que para estudiar las trayectorias que pasan por sucesiones de colisiones binarias simultáneas simétricas se considerará una sección de Poincaré  $\Gamma$ , la cual consiste de la unión de dos semiplanos que se denotarán por  $\Gamma^R$  y  $\Gamma^L$ , respectivamente. Las trayectorias que presentan una colisión simultánea simétrica de los binarios superior e inferior de la configuración rectangular intersectarán la sección  $\Gamma^R$  y son éstas órbitas las que presentan lo que hemos llamado una CBS-derecha; mientras que las trayectorias que presentan una colisión simultánea simétrica de los bi-

narios derecho e izquierdo de la configuración rectangular intersectarán  $\Gamma$  en el semiplano  $\Gamma^L$  y presentarán lo que llamamos una CBS-izquierda.

La primera descripción que se da corresponde a una familia de trayectorias de eyección-colisión, distintas de la órbita homotética, que presentan una sucesión finita de CBS-derechas y/o CBS-izquierdas; recordemos que la órbita homotética no presenta colisiones binarias. Y cada una de éstas órbitas se caracterizará mediante una sucesión finita de símbolos, esta sucesión presenta la forma  $EQ_1Q_2 \dots Q_nC$ , donde los símbolos  $E$  y  $C$  denotan el hecho de que la órbita sale y termina en colisión total, mientras que los símbolos  $Q_j$  pueden ser  $R$  o  $L$ , dependiendo si la órbita presenta una CBS derecha o CBS-izquierda.

En la sección final del capítulo introducimos una dinámica simbólica asociada a trayectorias que presentan una sucesión de CBS-derechas y CBS-izquierdas y que no necesariamente son órbitas de eyección-colisión.

La naturaleza del flujo sobre la variedad de colisión total, la existencia de una única órbita homotética que conecta los puntos de equilibrio que se encuentran sobre la variedad de colisión total y la transversalidad, a lo largo de la órbita homotética, de las variedades invariantes asociadas a los puntos de equilibrio son la herramienta necesaria para obtener las caracterizaciones de las trayectorias que presentan colisiones binarias simultáneas simétricas en el problema rectangular de cuatro cuerpos.

## 2.2 Flujo sobre la variedad de colisión total

El siguiente resultado resume las propiedades del flujo (1.8) sobre la variedad de colisión total  $M$ .

**Proposición 2.2.1.** *El flujo de las ecuaciones (1.6) [respectivamente (1.8)] restringido a la variedad de colisión total  $r = 0$  es casi-gradiente respecto a la variable  $v$ . Los puntos de equilibrio  $r = 0$ ,  $v = \pm\sqrt{2(2+4\sqrt{2})}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{4}$  y  $u = 0$  [respectivamente  $w = 0$ .] son hiperbólicos. Denotamos por  $c$  ( $v < 0$ ) y  $d$  ( $v > 0$ ) los puntos críticos en cualquiera de los sistemas de coordenadas  $(r, v, \theta, u)$  o  $(r, v, \theta, w)$ . Las dimensiones de sus variedades estables e inestables están dadas en la Tabla 2.1, donde  $\overline{W}^{s,u}$  denota la variedades estable e inestable en un nivel fijo de energía  $h$  y  $W^{s,u} = M \cap \overline{W}^{s,u}$ .*

El flujo sobre la variedad de colisión total ya ha sido estudiado por Lacombe y Simó en [28]. En la Figura 2.1 mostramos el flujo sobre  $M$ . Observemos que

	Subvariedades invariantes			
	$\overline{W}^u(d)$	$\overline{W}^s(d)$	$\overline{W}^u(c)$	$\overline{W}^s(c)$
Dimensión	2	1	1	2
	$W^u(d)$	$W^s(d)$	$W^u(c)$	$W^s(c)$
Dimensión	1	1	1	1

Tabla 2.1: Dimensiones de las variedades invariantes.

el problema rectangular de cuatro cuerpos presenta las simetrías

$$(r, v, \theta, w, s) \mapsto (r, -v, \theta, -w, -s), \quad \text{y} \quad (r, v, \theta, w, s) \mapsto (r, v, \theta - \frac{\pi}{4}, -w, s).$$

Asimismo, en el flujo sobre la variedad de colisión total no existen conexiones entre los puntos de equilibrio  $c$  y  $d$ , que se encuentran sobre la variedad de colisión total. Por otra parte, es de notar que el flujo es completamente simétrico. Una de las ramas de variedad inestable  $W^u(c)$  escapa por uno de los brazos superiores de la variedad de colisión total en la dirección de la variable  $v$  debido a la naturaleza casi-gradiente del flujo sobre  $M$  y la otra rama escapa a lo largo del otro brazo superior de  $M$  de manera completamente simétrica a como lo hace la primera rama a que hemos hecho referencia, dando la misma cantidad de vueltas alrededor de  $M$  que las dadas por la primera rama, como se muestra en la Figura 2.1.

A continuación comentaremos sobre el trabajo realizado por Lacomba y Simó en [28] para estudiar el flujo sobre la variedad de colisión total. Desean determinar la existencia o no de conexiones heteroclínicas entre los puntos de equilibrio  $c$  y  $d$  que se encuentra en  $M$ . Para esto, encuentran una ecuación diferencial en el plano  $(v, \theta)$ ,  $|\frac{d\theta}{dv}| = (\sec \theta + \csc \theta + 1 + \frac{v^2}{4})^{-1/2}$ , integran la solución con condición inicial en el punto  $B_1 = (\theta_*, v_*) = (0, 0)$ , ver Figura 2.2 tomando la solución en tiempo negativo, recordemos que el flujo sobre la variedad de colisión total es casi-gradiente con respecto a la variable  $v$ , de tal forma que esta trayectoria la continúan hasta mostrar que alcanza la curva que es la intersección de la variedad de colisión total con el plano  $(\theta, v)$  a la derecha del punto de equilibrio  $c$ . Posteriormente consideran la solución de la ecuación diferencial con condición inicial  $B_2 = (\theta_{**}, v_{**}) = (\frac{\pi}{4}, 0)$  y muestran numéricamente que esta solución cruza la recta  $\theta = \frac{\pi}{4}$  por encima del punto  $c$ , como se visualiza la gráfica obtenida por ellos y que mostramos en la Figura

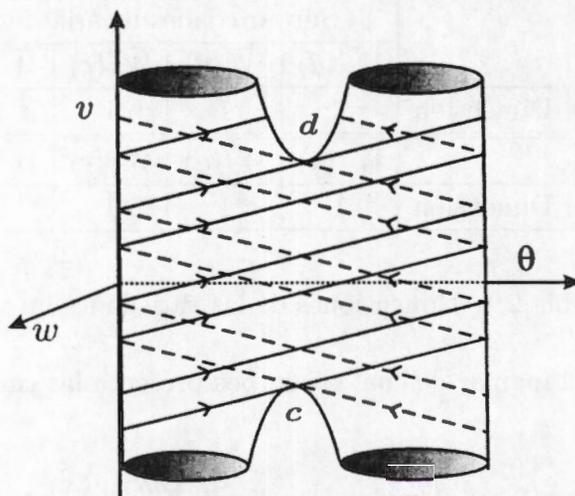


Figura 2.1: Flujo sobre la variedad de colisión total para el problema rectangular.

2.2. Usando las simetrías del problema rectangular completan el flujo al flujo sobre toda la variedad de colisión total y obtienen la gráfica a la derecha en la misma Figura 2.2. Observemos que este flujo es topológicamente el mismo que se muestra en la Figura 2.1.

Asimismo, para confirmar lo que obtienen numéricamente, prueban de manera analítica el resultado que comentamos en el párrafo anterior, para ello hacen uso de cálculos de desigualdades así como de estimaciones de funciones trigonométricas e hiperbólicas. Para mostrar que la trayectoria por el punto  $B_1$  en tiempo negativo alcanza la curva  $v = \sqrt{2U(\theta)}$  a la derecha del punto  $c$  consideran un campo vectorial  $F$  tal que  $|\frac{d\theta}{dv}| \leq F$  y muestran que la afirmación hecha respecto al punto  $B_1$  también es cierta para el campo vectorial  $F$ . Para mostrar que la solución por  $B_2$  intersecta la recta  $\theta = \frac{\pi}{4}$  por encima del punto  $c$  consideran un campo vectorial  $G$  tal que  $|\frac{D\theta}{dv}| \geq G$  y muestran que la afirmación hecha respecto a la trayectoria por  $B_2$  también es válida para este campo vectorial.

En consecuencia, obtienen justificaciones numéricas y analíticas del siguiente resultado

**Teorema L-S (Lacomba y Simó [Teorema 2.1] [28]).** *La rama inestable derecha de la variedad inestable del punto de equilibrio inferior  $c$  intersecta la recta  $v = 0$  en el plano  $\theta - v$  en  $\theta \in (0, \pi/4)$ .*

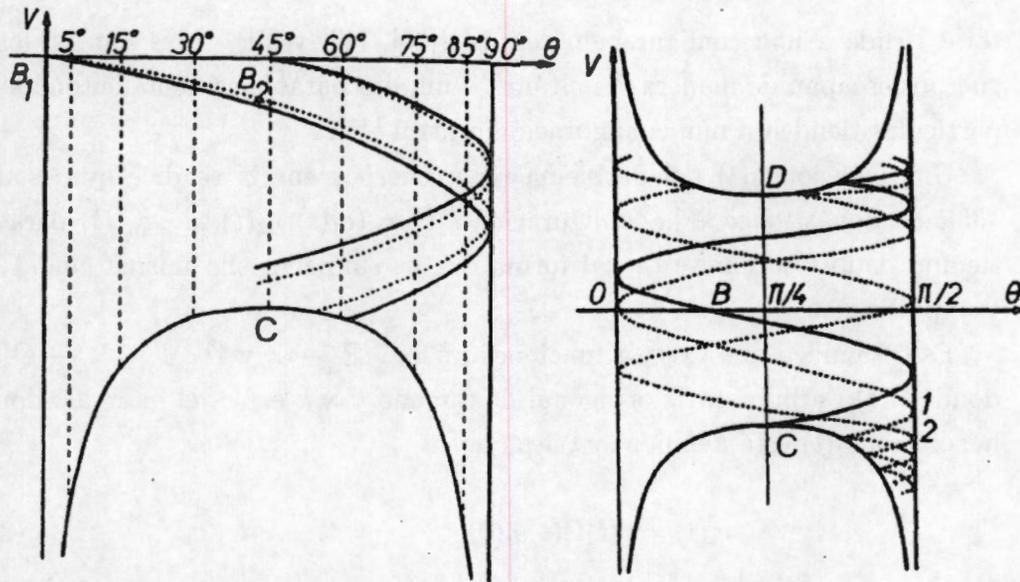


Figura 2.2: La primera intersección de la rama inestable derecha del punto de equilibrio  $c$  tiene coordenada  $v$  negativa.

## 2.3 Órbita homotética y transversalidad a lo largo de ella.

Un tipo espacial de soluciones del problema de  $n$  cuerpos está dado por las llamadas *configuraciones centrales*, que son configuraciones tales que la aceleración de cada una de las partículas es proporcional a su posición con respecto al centro de masa del sistema y la constante de proporcionalidad es independiente de la partícula; es decir,  $\ddot{\mathbf{q}}_i = -\lambda \mathbf{q}_i, i = 1, \dots, n$ . Al reemplazar el vector fuerza el anterior conjunto de ecuaciones se transforma en

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}_i} + \lambda m_i \mathbf{q}_i = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

El estudio de las configuraciones centrales juega un papel importante debido a que permiten obtener las únicas soluciones del problema de  $n$  cuerpos que pueden describirse explícitamente [59].

Recordemos que las configuraciones centrales son invariantes bajo semejanza y rotaciones; además juegan un papel central en los cambios topológicos de las variedades integrales  $I_{hc}$ , donde  $h$  es la energía y  $c$  es el momento angular ([53] y [1]). Además toda órbita que sale de colisión total o que va a colisión

total tiende a una configuración central ([35], [47] y [5]). Más aún, si los  $n$  cuerpos escapan de manera simultánea a infinito parabólicamente entonces las partículas tienden a una configuración central [48].

Una solución  $q(t)$  del problema de  $n$  cuerpos en  $\mathbb{R}^k$  se dice que es una *solución homográfica* si la configuración  $q(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t))$  para un tiempo dado  $t$  se mueve de tal forma que es similar a ella misma cuando el tiempo cambia [59].

Esto significa que existen funciones  $r : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\Omega : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow O(k)$ , donde  $\Omega(t)$  es una matriz ortogonal de tamaño  $k \times k$  e  $I$  es el intervalo donde la solución  $q(t)$  está definida, y tales que

$$q_i(t) = r(t)\Omega(t)q_i(0), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.1)$$

Un caso particular de soluciones homográficas lo obtenemos cuando la configuración se dilata al evolucionar en el tiempo, pero esta no presenta rotación alguna; estas soluciones son conocidas como *órbitas homotéticas*. Es decir, para una órbita homotética, en la ecuación (2.1),  $\Omega(t) = Id \in O(k)$ , para todo  $t \in I$  [17]. Podemos decir que una órbita homotética corresponde a movimientos en una línea recta, o un haz espacial o plano de rayos que pasan por el centro de masa y estas órbitas pueden ser vistas como órbitas heteroclínicas cuando realizamos el cambio de variables a coordenadas de McGehee junto con un reescalamiento del tiempo.

El nombre de esta órbita se debe al hecho de que es una órbita que en todo instante es una homotecia de una configuración central dada.

A continuación mostraremos la existencia de una única órbita homotética, para cada nivel de energía  $E_h$ , con  $h$  negativa, la cual está contenida en  $\overline{W}^u(d) \cap \overline{W}^s(c)$ . Esta órbita homotética une los puntos de equilibrio  $d$  y  $c$  que se encuentran en la variedad de colisión total y será de gran importancia para mostrar la existencia y dar la descripción de una familia de órbitas de eyección-colisión que presentan una sucesión finita de colisiones binarias simultáneas (simétricas), que son las colisiones no totales existentes en el problema rectangular, como hemos visto en el capítulo anterior.

Recordemos que las órbitas homotéticas se caracterizan por el hecho de que las configuraciones centrales corresponden a los puntos críticos del potencial restringido a la variedad de colisión total en las coordenadas de McGehee. Es decir, deben satisfacer  $\theta \equiv \theta_0$ , donde  $\dot{U}(\theta_0) = 0$ . Por las ecuaciones (1.6) y (1.7), cuando  $\theta \equiv \theta_0$ , entonces se tiene que  $w = 0$ , y en consecuencia, en las

ecuaciones (1.8) obtenemos

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{dw}{ds} = 0.$$

De esta forma, el plano  $r, v$  definido sobre los puntos de equilibrio  $(r, v, \theta, w) = (0, \pm v_0, \theta_0, 0)$ , con  $v_0 = \sqrt{2U(\theta_0)}$ , es invariante bajo el flujo y las ecuaciones diferenciales en este plano están dadas por

$$\begin{aligned} \frac{dr}{ds} &= rv \frac{\sin(2\theta)}{2\sqrt{W(\theta)}}, \\ \frac{dv}{ds} &= \sqrt{W(\theta)} \left\{ rh - \frac{1}{4}v^2 \frac{\sin(2\theta)}{W(\theta)} + 1 \right\} \\ &= rh \frac{\sin 2\theta}{2\sqrt{W(\theta)}}. \end{aligned}$$

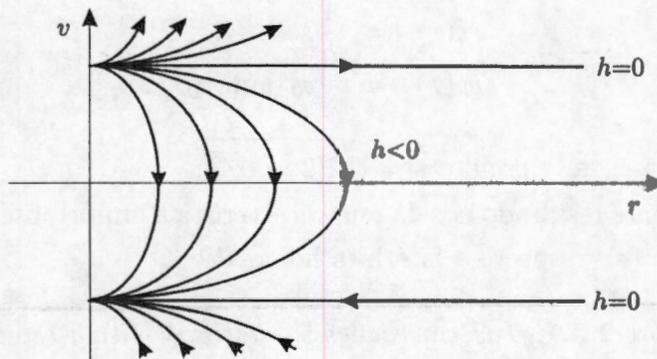


Figura 2.3: Soluciones homotéticas en el plano  $w = 0, \theta = \theta_0$ .

Así,

$$\frac{dr}{dv} = \frac{v}{h},$$

y al resolver esta ecuación obtenemos

$$v^2 = 2rh + m.$$

Esta solución la podemos ver como la restricción de la relación de energía en el plano  $w = 0, \theta = \theta_0$ , esto es,  $\frac{v^2}{2} = rh + U(\theta_0)$ . Para cada  $h < 0$ , existe una órbita homotética que sale del punto de equilibrio  $d$  (superior) y termina en el punto de equilibrio  $c$  (inferior), como se ve en la Figura 2.2. Estas órbitas homotéticas son órbitas heteroclínicas contenidas en  $\overline{W}^s(c) \cap \overline{W}^u(d)$ .

Usando (1.6) y las igualdades  $\theta \equiv \theta_0$  y  $u \equiv 0$  podemos obtener una representación paramétrica de la forma  $\phi(\tau) = (r(\tau), v(\tau))$  para la órbita homotética ya que las órbitas homotéticas no experimentan ningún tipo de colisión.

**Definición 1.** Decimos que una órbita que tiene como conjunto  $\omega$ -límite al punto  $c$  es una órbita de colisión y una órbita que tiene al punto  $d$  como conjunto  $\alpha$ -límite es una órbita de eyección.

De esta forma, órbitas que se encuentran contenidas en  $\overline{W}^u(d)$  son órbitas de eyección y las que se encuentran contenidas en  $\overline{W}^s(c)$  son órbitas de colisión. Por lo anterior, a las órbitas contenidas en la intersección  $\overline{W}^s(c) \cap \overline{W}^u(d)$  las llamaremos *órbitas de eyección-colisión*. Para cada valor de  $h$ , con  $h < 0$ , la órbita homotética correspondiente nos da un ejemplo de una órbita de eyección-colisión.

Como hemos visto, existe una única órbita homotética en cada nivel fijo de energía. Esta puede ser parametrizada por

$$\begin{aligned} r_h(\tau) &= \frac{1}{h} \operatorname{sech}^2(v_0\tau/2) \frac{v_0^2}{2}, \\ v_h(\tau) &= -v_0 \tanh(v_0\tau/2) \end{aligned}$$

y  $\theta \equiv \theta_0 \equiv \frac{\pi}{4}$ ,  $u \equiv 0$ , donde  $v_0 = \sqrt{2(2 + 4\sqrt{2})}$ .

El siguiente resultado nos da una característica importante de las variedades  $\overline{W}^u(d)$  y  $\overline{W}^s(c)$ , respecto a la órbita homotética.

**Proposición 2.3.1.** Las variedades inestable  $\overline{W}^u(d)$  y estable  $\overline{W}^s(c)$ , ambas bidimensionales, se intersectan transversalmente a lo largo de la órbita homotética.

## 2.4 Sección de Poincaré

A continuación construiremos una sección de Poincaré donde se analizará el flujo con el fin de estudiar las trayectorias que presentan colisiones no totales. Es importante recordar que para que existan colisiones no totales (colisiones binarias simultáneas simétricas) es necesario que la coordenada  $w$  se anule. Por ello definimos el conjunto

$$\Gamma = \{(r, v, \theta, w) \mid r \geq 0, \theta = 0, \pi/2, w = 0\},$$

el cual es la unión de los dos semiplanos

$$\Gamma^L = \{(r, v, \theta, w) \mid r \geq 0, \theta = 0, w = 0\},$$

y

$$\Gamma^R = \{(r, v, \theta, w) \mid r \geq 0, \theta = \pi/2, w = 0\},$$

parametrizados por las coordenadas  $(r, v) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$ . Ver Figura 2.3.

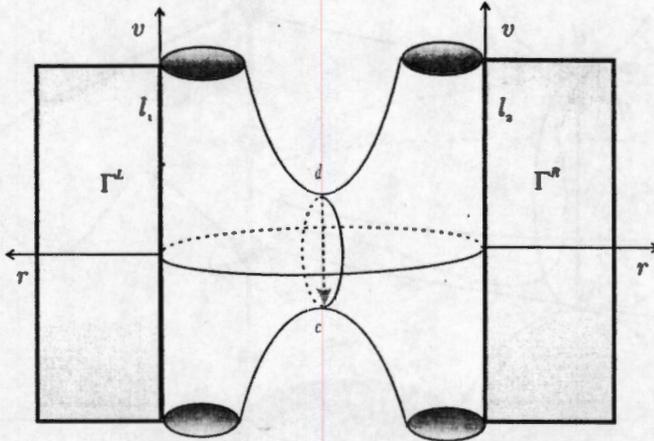


Figura 2.4: Sección de colisiones binarias simultáneas y órbita homotética.

Observemos que las rectas  $l_1$  y  $l_2$  en la Figura 2.3 corresponden a las rectas  $r = 0$  en los semiplanos  $\Gamma^L$  y  $\Gamma^R$  respectivamente.

## 2.5 Resultados básicos

A continuación obtendremos la primera intersección en tiempo positivo de  $\overline{W}^u(d)$  con  $\Gamma$ , siguiendo ideas contenidas en [3] y [20].

**Proposición 2.5.1.** *La primera intersección positiva de  $\overline{W}^u(d)$  con  $\Gamma$  está formada por dos arcos  $\sigma^{R,L}$ , contenidos en  $\Gamma^{R,L}$  con extremos en la fronteras de  $\Gamma^{R,L}$  (las rectas  $l_1$  y  $l_2$ , respectivamente).*

*Demostración.* Denotemos por  $dR_*$  el primer punto de una de las ramas de  $W^u(d)$  que está contenido en  $\Gamma^R$ . De manera análoga definimos  $dL_* \in \Gamma^L$  para la otra rama de  $W^u(d)$ . Por otra parte, sean  $cR_*$  y  $cL_*$  los primeros puntos de las ramas inestables de  $W^u(c)$  que están contenidos en  $\Gamma^R$  y  $\Gamma^L$  respectivamente.

Ahora se considera un conjunto  $\sigma$  de condiciones iniciales homeomorfo a un semicírculo, el cual está parametrizado por el ángulo  $\phi \in [0, \pi]$ , además  $\sigma$  es un subconjunto de  $\overline{W}^u(d)$ , la variedad inestable bidimensional del punto de equilibrio  $d$  y tal que  $\sigma$  consta de puntos muy cercanos al punto de equilibrio

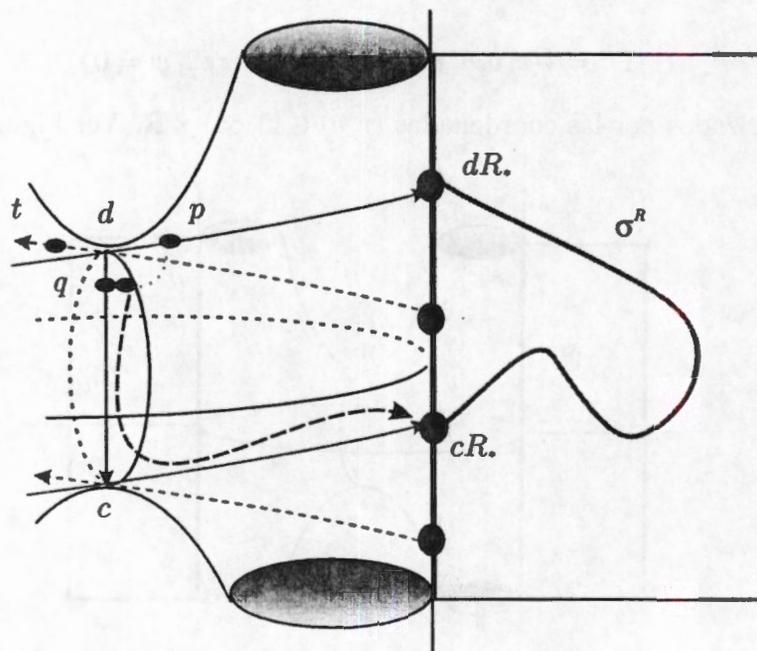


Figura 2.5: Primera intersección positiva de  $\overline{W}^u(d)$  con  $\Gamma^R$ .

hiperbólico  $d$ ; más aún,  $\phi = 0$  corresponde a un punto  $p$  de la rama inestable de  $W^u(d)$  que contiene al punto  $dR_*$  y en consecuencia, el punto  $p$  está contenido en la variedad de colisión total;  $\phi = \frac{\pi}{2}$  corresponde a un punto  $q$  en la órbita homotética y por tanto no está contenido en la variedad de colisión total, mientras que  $\phi = \pi$  corresponde a un punto  $t$  contenido en la segunda rama de la variedad inestable de  $W^u(d)$  contenida en la variedad de colisión total, rama inestable que contiene al punto  $dL_*$ . Observemos que con excepción de los puntos extremos  $p$  y  $t$  de  $\sigma$ , el conjunto de condiciones iniciales  $\sigma$  no es un subconjunto de la variedad de colisión total, pero observemos que tal conjunto de condiciones iniciales se encuentra en el nivel de energía negativa que previamente hemos fijado.

Para hallar la primera intersección positiva de  $\overline{W}^u(d)$  con  $\Gamma$ , debemos seguir bajo el flujo el semicírculo dado de condiciones iniciales. Primero consideremos el cuarto de círculo con extremos en los puntos  $p$  y  $q$  y que está parametrizado por  $\phi \in [0, \pi/2]$ . De esta manera, bajo el flujo, el punto  $p$  va al punto  $dR_* \in \Gamma^R$  y puntos sobre este cuarto de círculo cercanos al punto  $p$  van en puntos en  $\Gamma^R$ , cercanos a  $dR_*$ ; por otra parte, puntos cercanos a  $q$  pasan cerca del punto de equilibrio  $c$  y después continúan cercanos a la rama inestable de  $c$  hasta pasar

cerca de  $cR_*$ . Pero el cuarto de arco en  $\overline{W}^u(d)$ , parametrizado por  $\phi \in [0, \pi/2]$  es un arco continuo, por ello su imagen bajo el flujo debe ser un arco continuo  $\sigma^R$  en  $\Gamma^R$  con extremos  $dR_*$  y  $cR_*$ , como se muestra en la Figura 2.4. De manera análoga, se tiene que la imagen del segundo cuarto de círculo, parametrizado por  $\phi \in [\pi/2, \pi]$  también es un arco continuo  $\sigma^L$  contenido en  $\Gamma^L$ , con extremos  $dL_*$  y  $cL_*$  en la recta  $\{r = 0\} \cap \Gamma^L$ .  $\square$

Es de notar que a los puntos del arco  $\sigma^R$  les corresponden órbitas que salen de colisión total y para tiempos entre  $t = -\infty$  y menores al instante en el cual intersectan al semiplano  $\Gamma^R$  no presentan algún tipo de colisión, pero al momento de interectar  $\Gamma^R$  presentan una colisión binaria simultánea simétrica de los binarios superior e inferior de partículas que se encuentran en la configuración rectangular.

Por otra parte, el arco  $\sigma^R$ , cuya existencia hemos mostrado en el resultado anterior, podría presentar autointersecciones, como se muestra en la Figura 2.5, pero es posible considerar un subconjunto  $\tilde{\sigma}^R$  de  $\sigma^R$  el cual sea un arco continuo que no presente autointersecciones. Al segmento  $\tilde{\sigma}^R$  lo seguiremos denotando por  $\sigma^R$ . En vista de lo anterior supondremos de aquí en adelante que el arco  $\sigma^R$  no se autointersecta.

A continuación mostraremos un resultado en el cual se prueba la existencia de un segmento de condiciones iniciales en  $\Gamma^R$  y contenidas en  $\overline{W}^s(c)$  tal que las órbitas asociadas a estas condiciones iniciales no presentan algún tipo de colisión entre el instante en el cual están en  $\Gamma^R$  y  $t = \infty$ .

Para mostrar esto, consideremos  $R_*d$  y  $L_*d$  los últimos puntos de las ramas estables de  $W^s(d)$  contenidos en  $\Gamma^R$  y  $\Gamma^L$  antes de llegar a  $d$ , sin intersectar nuevamente las rectas  $l_1$  o  $l_2$ , respectivamente. De manera semejante, definiremos los puntos  $R_*c$  y  $L_*c$  como los últimos puntos de  $W^s(c)$  contenidos en  $\Gamma^R$  y  $\Gamma^L$ .

**Proposición 2.5.2.** *La última intersección de  $\overline{W}^s(c)$  con  $\Gamma$  está formada por dos arcos  $\gamma^{R,L}$ , contenidos en  $\Gamma^{R,L}$  con extremos  $R_*d$ ,  $R_*c$  y  $L_*d$ ,  $L_*c$  en la fronteras de  $\Gamma^{R,L}$  (las rectas  $l_1$  y  $l_2$ , respectivamente).*

*Demostración.* Usando una de las simetrías del problema, aquella determinada por la reversibilidad del sistema hamiltoniano original del problema rectangular



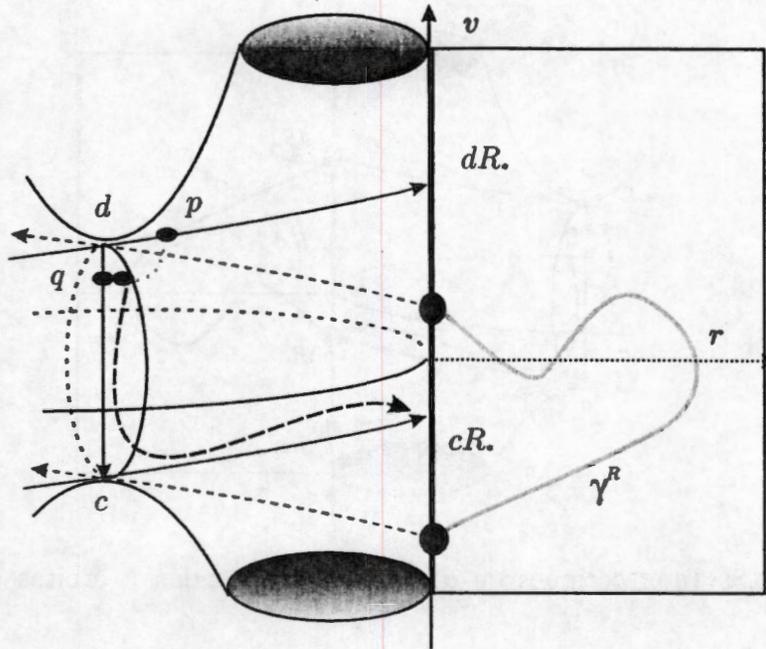


Figura 2.7: Última intersección de  $\overline{W}^s(c)$  con  $\Gamma^R$

finalmente, van directamente a colisión total sin pasar por otra CBS. Del mismo modo, a  $\gamma^L$  la denotamos por  $L_*C$ . En general, si una trayectoria interseca  $\Gamma^R$  o  $\Gamma^L$ , diremos que al momento de intersectar estos conjuntos presenta una CBS-derecha o una CBS-izquierda respectivamente.

Una pregunta que viene inmediatamente a la mente tiene que ver con el hecho de si las curvas  $\sigma^R$  y  $\gamma^R$  se intersecan o no. Para mostrar que la respuesta a esta interrogante es positiva basta justificar que los puntos  $R_*d$  y  $cR_*$  están en un orden adecuado en la recta  $l_2$  de colisiones binarias simultáneas derechas que se encuentran sobre la variedad de colisión total. Es decir, usando el orden determinado por la variable  $v$  sobre esta recta debemos justificar que  $R_*d > cR_*$ . Esto es consecuencia de un resultado demostrado por Lacombe y Simó en [28] y el cual hemos comentado en la sección correspondiente al flujo sobre la variedad de colisión total. El orden de los puntos  $R_*d$  y  $cR_*$  sobre  $l_2$  es el adecuado pues prueban que al tomar la trayectoria por  $B_1$  (con  $v = 0, \theta = 0$ ) para tiempos negativos, esta interseca a la curva  $v = \sqrt{2U(\theta)}$  en un punto a la derecha de  $c$ , mientras que al seguir la trayectoria por  $B_2$  (con  $v = 0, \theta = \pi/4$ ) para tiempos negativos esta solución interseca la recta  $\theta = \pi/4$  por encima del punto de equilibrio  $c$ , ver la gráfica que se encuentra a

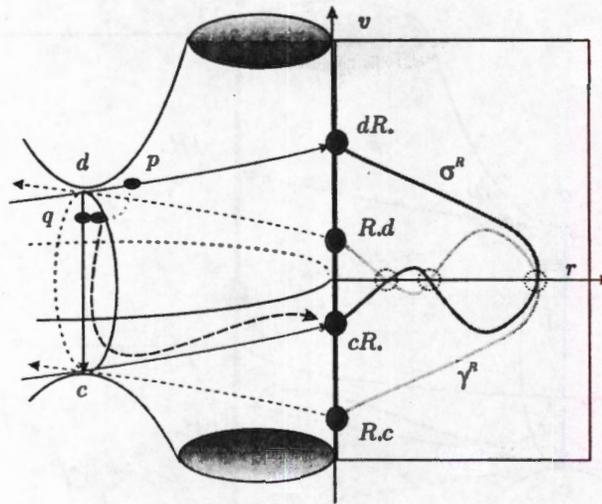


Figura 2.8: Intersecciones de  $\sigma^R$  y  $\gamma^R$  corresponden a órbitas de eyección-colisión.

la izquierda en la Figura 2.8. De esta forma se tiene que la coordenada  $v$  para el punto  $cR_*$  es negativa y por las simetrías del problema obtenemos resultados análogos: la coordenada  $v$  del punto  $cL_*$  de la rama inestable izquierda del punto de equilibrio es negativa y las coordenadas  $v$  de los puntos  $R_*d$  y  $L_*d$  son positivas. También demuestran que no hay conexiones heteroclínicas de las variedades inestable y estable asociadas respectivamente a los puntos  $c$  y  $d$ ; mas aún, las ramas inestables de  $c$  escapan por brazos distintos. Es en vista de lo anterior que el flujo sobre la variedad de colisión total presenta la dinámica que se muestra en la Figura 2.1 y en la gráfica que se encuentra a la derecha de la Figura 2.2, obtenida por Lacomba y Simó [28].

De esta manera, no es difícil mostrar que la pareja  $\sigma^R, \gamma^R \subset \Gamma^R$  se interseca en uno o varios puntos contenidos en  $\overline{W}^u(d) \cap \overline{W}^s(c)$ , ver Figura 2.7, a los cuales les corresponden, por lo tanto, órbitas de eyección-colisión con una colisión binaria simultánea derecha. Un argumento semejante prueba que a los puntos de la intersección  $\sigma^L \cap \gamma^L$  les corresponden órbitas de eyección-colisión con una colisión binaria simultánea izquierda.

El tener una trayectoria que presente una CBS-derecha o una CBS-izquierda lo interpretamos, en términos de la configuración rectangular de la siguiente manera. Al ocurrir una CBS-derecha, tenemos que  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , lo que en términos de las coordenadas de Jacobi, es equivalente a que se satisfaga la igualdad  $x = 0$ . En consecuencia, la configuración pasa por una colisión binaria simultánea

simétrica de los binarios superior e inferior de la configuración rectangular y al pasar por una CBS-izquierda se tiene que  $\theta = 0$ , y en consecuencia  $y = 0$ . Así, la trayectoria experimenta una colisión binaria simultánea simétrica de los pares de partículas que se encuentran a la derecha e izquierda de la configuración rectangular.

A órbitas de eyección-colisión con una CBS-derecha (izquierda) les asociaremos la sucesión de símbolos *ERC* (*ELC*), las que se leen como condiciones iniciales en  $\Gamma$  cuyas trayectorias salen de colisión total, pasan por una colisión binaria simultánea derecha (izquierda) y terminan en colisión total.

A continuación caracterizaremos las imágenes inversas de  $\overline{W}^s(c) \cap \Gamma$  bajo el mapeo de retorno de Poincaré

$$P : \Gamma \longrightarrow \Gamma,$$

el cual se define de la siguiente manera.

Dado un punto  $p_0$  contenido en  $\Gamma$  tal que su órbita positiva  $\phi(t, p_0)$ , con  $t > 0$ , intersecta  $\Gamma$  transversalmente al tiempo  $T$  y tal que  $\phi(t, p_0)$  no intersecta  $\Gamma$  para  $t \in (0, T)$ . Por la continuidad respecto a condiciones iniciales las trayectorias positivas de puntos en  $\Gamma$ , cercanos a  $p_0$  también vuelven a intersectar  $\Gamma$  en tiempos cercanos a  $T$ . El mapeo de Poincaré le asocia a puntos  $p$  en  $\Gamma$ , cercanos a  $p_0$  sus puntos de primer retorno a  $\Gamma$ . Para ser más precisos, para  $p$  en  $\Gamma$ , cercano a  $p_0$ ,

$$P(p) = \phi(\tau(p), p),$$

donde  $\tau(p) > 0$  es el tiempo de primer retorno a  $\Gamma$  de la órbita que pasa por  $p$ .

Los siguientes resultados que determinan las imágenes inversas de segmentos de  $\overline{W}^s(c) \cap \Gamma$  sobre  $\Gamma$  serán importantes para dar la caracterización de las órbitas del problema rectangular que son de eyección-colisión y además presentan una sucesión de colisiones binarias simultáneas simétricas (CBS-derechas y/o CBS-izquierdas).

**Proposición 2.5.3.** (1) Si  $\sigma$  es un segmento de  $\overline{W}^s(c) \cap \Gamma$  con extremos  $A$  y  $B$  en  $\{r = 0\}$  de tal forma que no intersecta a  $ER_*$ , entonces  $P^{-1}(\sigma)$  es un arco en  $\Gamma$  con extremos  $P^{-1}(A)$  y  $P^{-1}(B)$  en  $M$ .

(2) Si  $\sigma$  es un segmento de  $\overline{W}^s(c) \cap \Gamma$  con extremos  $A$  y  $B$  en  $\{r = 0\}$  de tal forma que intersecta a  $ER_*$ , entonces la imagen inversa del segmento  $\tilde{\sigma}$  en  $\sigma$

que va de  $A$  a la primera intersección de  $\sigma$  con  $ER_*$  es un segmento en  $\Gamma$  que va de  $P^{-1}(A)$  a  $R_*d$  o  $L_*d$ , dependiendo del semiplano de  $\Gamma$  donde se encuentre  $P^{-1}(A)$ .

(3) Si  $\gamma$  es un arco en  $\overline{W^s}(c) \cap \Gamma$  que contiene un subarco  $\tilde{\gamma}$  con extremos en  $ER_*$  y ningún otro punto de  $\tilde{\gamma}$  está contenido en  $ER_*$ , entonces la imagen inversa de  $\tilde{\gamma}$  es un lazo en  $\Gamma$  con extremos en: (i)  $L_*d$  si el segmento  $\tilde{\gamma}$  se jala a  $\Gamma^R$ , o (ii)  $R_*d$  si el segmento  $\tilde{\gamma}$  se jala a  $\Gamma^L$ .

*Demostración.* (1.)-Consideremos el arco  $\sigma$ , con extremos  $A$  y  $B$  en  $\{r = 0\}$ . Entonces los extremos de su imagen inversa son  $P^{-1}(A)$  y  $P^{-1}(B)$ , respectivamente. Ver Figura 2.9. Además, por continuidad, puntos de  $\sigma$  cercanos a  $A$  van en puntos cercanos a  $P^{-1}(A)$ . Surgiría un problema si ocurriese que se tuviera un punto en  $\sigma \cap ER_*$ , pues este iría a un punto de eyección, pero esto no es posible por hipótesis. Por lo tanto,  $P^{-1}(\sigma)$  es un arco en  $\Gamma$  con extremos  $P^{-1}(A)$  y  $P^{-1}(B)$ .

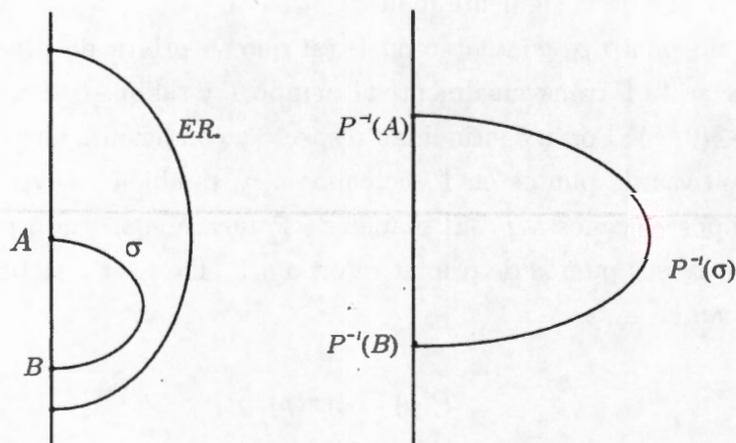


Figura 2.9: Imagen inversa de un segmento de arco para Proposición 2.5.3(1).

(2.)- Sean  $\sigma$  un segmento de  $\overline{W^s}(c) \cap \Gamma$  con extremos  $A$  y  $B$  en  $\{r = 0\}$ , que intersecta a  $\overline{W^u}(d)$  y sea  $\tilde{\sigma} \subset \sigma$  con un extremo en  $A$  y el otro en la primera intersección de  $\sigma$  con  $\overline{W^u}(d)$ . El punto  $A$  va a  $P^{-1}(A)$  y puntos de  $\tilde{\sigma}$  cercanos a  $A$  van a puntos cercanos a  $P^{-1}(A)$  y así continuamos  $\tilde{\sigma}$  hasta llegar a puntos cercanos a la intersección de  $\tilde{\sigma}$  con  $W^u(d)$ ; bajo el flujo en tiempo negativo, deben llegar suficientemente cercanos al punto de equilibrio  $d$ , por lo que deben pasar por  $\Gamma$ , suficientemente cerca de  $L_*d$  o  $R_*d$ . Por lo tanto  $P^{-1}(\tilde{\sigma})$  es un arco en  $\Gamma$  que une  $P^{-1}(A)$  con  $R_*d$  o  $L_*d$ , dependiendo del semiplano de  $\Gamma$  donde se encuentre  $P^{-1}(A)$ . Ver Figura 2.10.

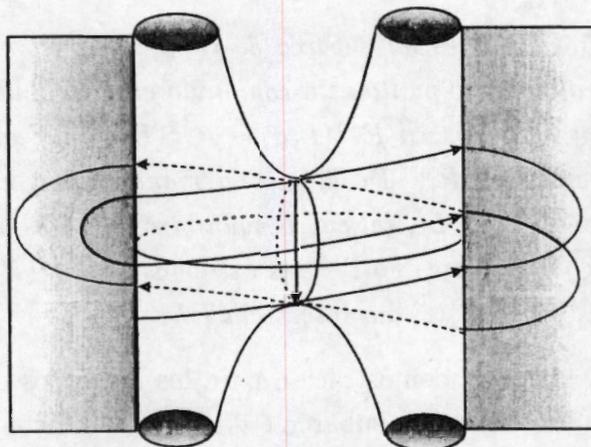


Figura 2.10: Imagen inversa de un segmento de arco para Proposición 2.5.3(2).

(3.)- Por la continuidad, la imagen inversa de todo el arco  $\tilde{\gamma}$  está contenido en uno de los semiplanos de  $\Gamma$ . Por un argumento análogo al usado en el apartado anterior, puntos de  $\tilde{\gamma}$  cercanos a  $ER_*$ , bajo el flujo, deben pasar cerca de  $d$ , por lo que sus órbitas deben intersectar  $\Gamma$  cerca de las ramas estables de  $d$  contenidas en  $M$ ; es decir, deben pasar cerca de  $R_*d$  o  $L_*d$ , pero como la imagen inversa de  $\tilde{\gamma}$  está todo en el mismo semiplano, entonces debemos tener un lazo con extremos en  $R_*d$  o en  $L_*d$ , como podemos apreciar claramente en la Figura 2.11.  $\square$

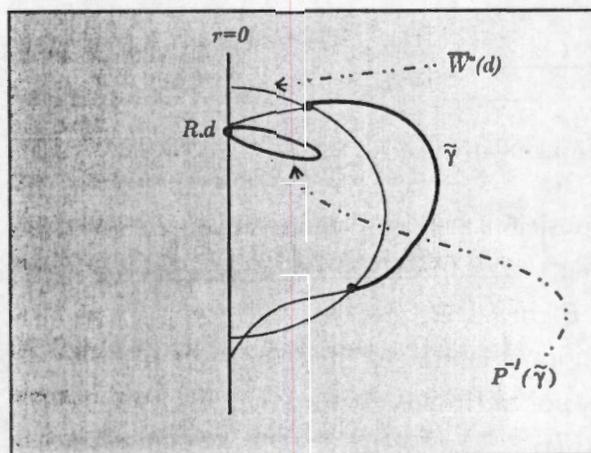


Figura 2.11: Imagen inversa de un segmento de arco para Proposición 2.5.3(3).

**Corolario 2.5.4.** Si  $\zeta$  es un subarco de  $\overline{W^s(c)} \cap \Gamma^R$  con extremos en  $R_*d$  y  $ER_*$ , tal que ningún otro punto está contenido en  $ER_*$ , entonces  $P^{-2}(\zeta)$  es un arco en  $\Gamma^R$  con extremos en  $P^{-1}(L_*d)$  y  $P^{-2}(R_*d)$  que intersecciona  $ER_*$ , pero  $P^{-1}(\zeta)$  no intersecciona  $ER_*$ . De la misma manera, si  $\tilde{\zeta}$  es un subarco de  $\zeta^L$  con extremos en  $L_*d$  y  $EL_*$ , tal que ningún otro punto está contenido en  $EL_*$ , entonces  $P^{-2}(\tilde{\zeta})$  es un arco en  $\Gamma^L$  con extremos en  $P^{-1}(R_*d)$  y  $P^{-2}(L_*d)$  que intersecciona  $EL_*$ , pero  $P^{-1}(\tilde{\zeta})$  no intersecciona  $EL_*$ .

*Demostración.* Como la demostración para los dos arcos es análoga solo probaremos el resultado para un subarco  $\zeta$  en  $\overline{W^s(c)} \cap \Gamma^R$  con extremos en  $R_*d$  y  $ER_*$  de tal manera que ningún otro punto está contenido en  $ER_*$ .

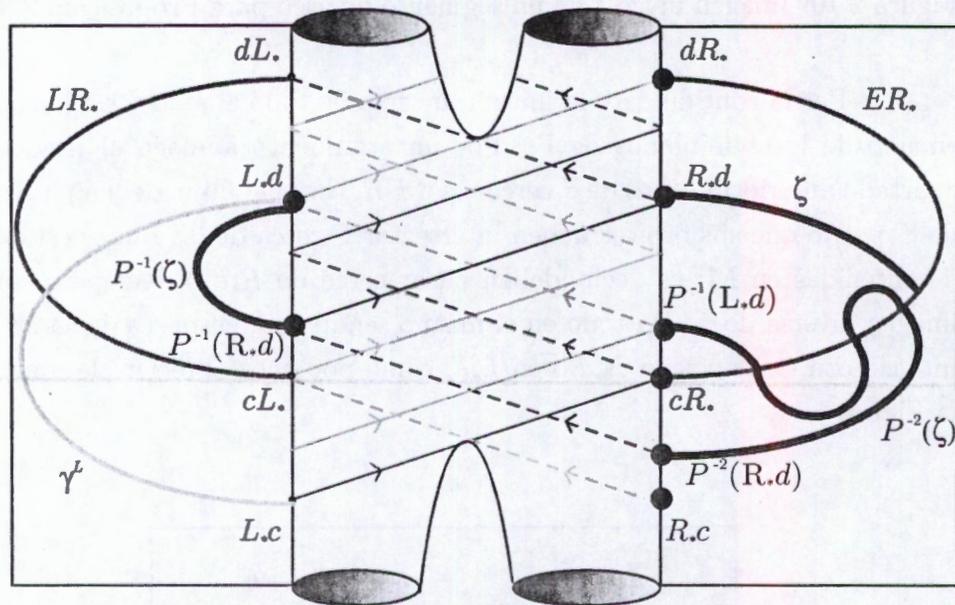


Figura 2.12: Imagen inversa de un segmento de arco  $\zeta$  en el Corolario 2.5.4.

Por la Proposición 2.4.3, la imagen inversa  $P^{-1}(\zeta)$  del arco  $\zeta$  debe ser un arco continuo en  $\Gamma^L$ , con extremos en  $P^{-1}(R_*d)$  y  $L_*d$ , el cual no intersecciona a  $EL_*$ . Véase la Figura 2.12.

Al tomar ahora el la imagen inversa de  $P^{-1}(\zeta)$  el cual como hemos visto no intersecciona  $EL_*$ , por la Proposición 2.4.3 obtenemos un arco en  $\Gamma^R$  con extremos en  $P^{-1}(P^{-1}(R_*d)) = P^{-2}(R_*d)$  y  $P^{-1}(L_*d)$ . Para mostrar que el segmento  $P^{-2}(\zeta)$  intersecciona  $ER_*$ , solo debemos observar que  $v(P^{-2}(R_*d)) < v(cR_*) < v(P^{-1}(L_*d)) < v(dR_*)$  y que  $P^{-2}(\zeta)$  y  $ER_*$  son arcos continuos en  $\Gamma^R$  con extremos en  $P^{-1}(L_*d)$ ,  $P^{-2}(R_*d)$  y  $cR_*$ ,  $dR_*$ , respectivamente.  $\square$

## 2.6 Órbitas de eyección-colisión con colisiones intermedias.

Para describir una órbita de eyección-colisión que presenta una sucesión finita de colisiones binarias simultáneas (CBS) intermedias, ya sean derechas o izquierdas, usaremos sucesiones de símbolos de la forma  $ERLRC$ , que leemos como correspondiente a una trayectoria que sale de colisión total, pasa por una CBS-derecha, posteriormente pasa por una CBS-izquierda, otra CBS-derecha y finalmente llega a colisión total.

A continuación describiremos los tipos de segmentos de  $\overline{W}^s(c) \cap \Gamma$ , que llamaremos *segmentos prototipo*, los cuales nos permitirán dar la descripción de las órbitas de eyección-colisión que presentan colisiones binarias simultáneas.

Recordemos que los arcos  $ER_*$  y  $EL_*$  dividen los semiplanos  $\Gamma^R$  y  $\Gamma^L$  en dos conjuntos, uno acotado y el otro no acotado.

**Definición 2.** A los puntos  $P^{-j}(R_*d), P^{-j}(L_*d), P^{-j}(R_*c), P^{-j}(L_*c)$  con  $j \geq 0$  que quedan en las regiones acotadas determinadas por  $ER_*$  y  $EL_*$  los llamaremos puntos interiores y aquellos que quedan en las regiones no acotadas los llamaremos puntos exteriores.

A continuación definimos seis tipos especiales de segmentos contenidos en  $\overline{W}^s(c) \cap \Gamma^R$  o en  $\overline{W}^s(c) \cap \Gamma^L$ , los cuales nos permitirán construir la familia de órbitas de eyección-colisión que presentan una sucesión finita de CBS derechas y/o CBS-izquierdas.

Al definir estos segmentos especiales a que hemos hecho referencia en el párrafo anterior y que llamaremos segmentos prototipo es conveniente considerar la Figura 2.13.

**Definición 3.** • Un segmento de  $\overline{W}^s(c) \cap \Gamma^R$  con extremos en  $R_*d$  y  $ER_*$  de tal forma que ningún punto intermedio esté contenido en  $ER_*$  diremos que pertenece a la clase de segmentos prototipo 1.

- Un segmento de  $\overline{W}^s(c) \cap \Gamma^R$  con extremos en un punto exterior y en  $ER_*$  de tal forma que ningún punto intermedio esté contenido en  $ER_*$  diremos que pertenece a la clase de segmentos prototipo 2.

- Un segmento de  $\overline{W}^s(c) \cap \Gamma^R$  con extremos en  $P^{-1}(L_*d)$  y  $ER_*$  de tal forma que ningún punto intermedio esté contenido en  $ER_*$  diremos que pertenece a la clase de segmentos prototipo 3.
- Un segmento de  $\overline{W}^s(c) \cap \Gamma^L$  con extremos en  $L_*d$  y  $EL_*$  de tal forma que ningún punto intermedio esté contenido en  $EL_*$  diremos que pertenece a la clase de segmentos prototipo 4.
- Un segmento de  $\overline{W}^s(c) \cap \Gamma^L$  con extremos en un punto exterior y en  $EL_*$  de tal forma que ningún punto intermedio esté contenido en  $EL_*$  diremos que pertenece a la clase de segmentos prototipo 5.
- Un segmento de  $\overline{W}^s(c) \cap \Gamma^L$  con extremos en  $P^{-1}(R_*d)$  y  $EL_*$  de tal forma que ningún punto intermedio esté contenido en  $EL_*$  diremos que pertenece a la clase de segmentos prototipo 6.

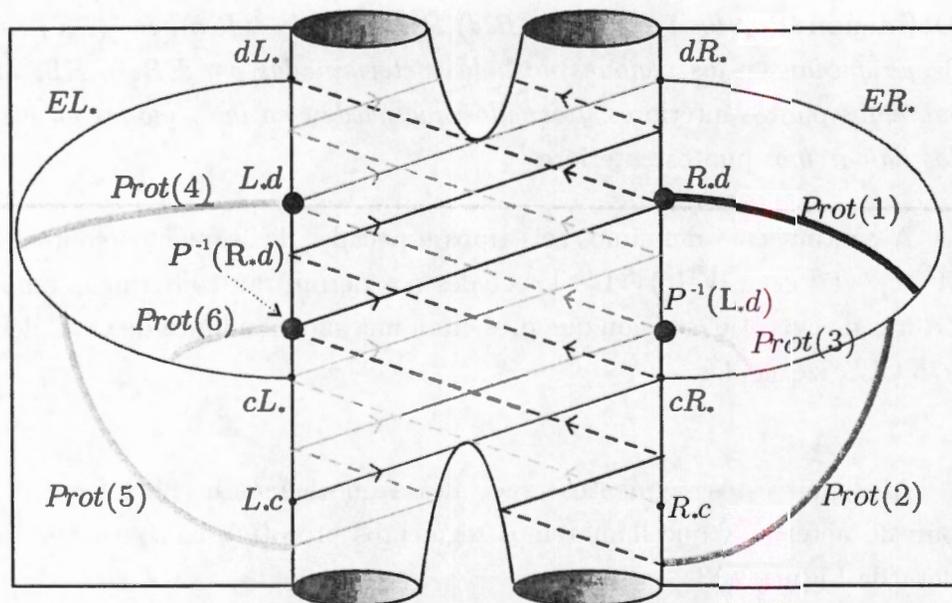


Figura 2.13: Segmentos prototipo para el problema rectangular.

A un segmento del prototipo  $i$  lo denotaremos como  $Prot(i)$ .

La Proposición 2.5.3 y su Corolario 2.5.4, nos proveen la existencia de infinidad de segmentos de  $\overline{W}^s(c) \cap \Gamma^{R,L}$  que pertenecen a las seis clases distintas de segmentos prototipo. Observemos que segmentos de los tres primeros segmentos prototipos se encuentran en  $\Gamma^R$ , mientras que los tres restantes se

encuentran en  $\Gamma^L$ . Lo anterior es reflejo, tanto de las simetrías geométricas existentes para mantener la configuración rectangular de los cuatro cuerpos, como de la simetría debida a la reversibilidad del sistema.

Es de observar que al estar contenidos en  $\overline{W}^s(c) \cap \Gamma^R$  los segmentos prototipo 1, 2 y 3, sus puntos corresponden a trayectorias que se dirigen a colisión total y al momento de intersectar el semiplano  $\Gamma^R$  presentan una colisión binaria simultánea simétrica de los pares de partículas superior e inferior de la configuración rectangular. Por otra parte como los segmentos prototipo 4, 5 y 6 son subconjuntos de  $\overline{W}^s(c) \cap \Gamma^L$  las trayectorias asociadas a puntos contenidos en estos segmentos prototipo son trayectorias que terminan en colisión total cuando  $t \rightarrow \infty$  y al instante de encontrarse en  $\Gamma^L$  presentan una colisión binaria simultánea simétrica de los pares de partículas que se encuentran a la derecha e izquierda de la configuración rectangular.

A continuación mostramos algunos ejemplos de segmentos de  $\overline{W}^s(c)$  que corresponden a los distintos tipos de segmentos prototipo que hemos definido:

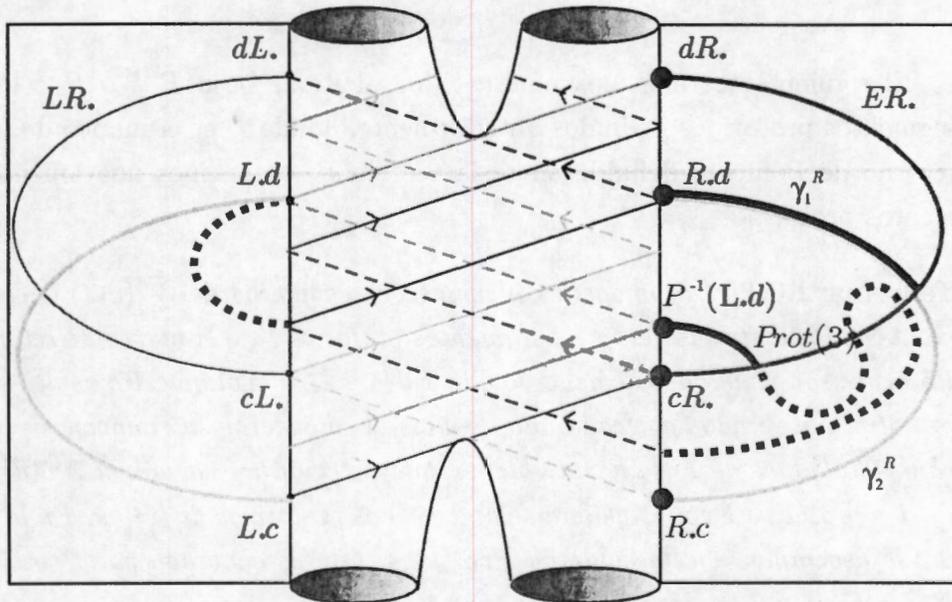


Figura 2.14: Ejemplos de segmentos prototipo 1, 2 y 3.

(i). El segmento  $\gamma_1^R$  contenido en  $\gamma^R$ , ( $\gamma^R$  es el segmento contenido en  $\Gamma^R$  simétrico a  $\sigma^R$  bajo la simetría debida a la reversibilidad del sistema) con extremos en  $R_*d$  y en la primera intersección de  $\gamma^R$  con  $ER_*$  y que no contiene puntos intermedios en  $ER_*$  es un ejemplo de un **segmento prototipo 1**. Ver

Figura 2.14.

(ii). El segmento  $\gamma_2^R$  contenido en  $\gamma^R$ , con extremos en  $R_*c$  y la primera intersección de  $\gamma^R$  con  $ER_*$ , es un ejemplo de un **segmento prototipo 2**, como se muestra en la Figura 2.14.

(iii). Para obtener un ejemplo de un **segmento prototipo 3**, consideremos, de acuerdo con el Corolario 2.5.4, el subsegmento de  $P^{-2}(\gamma_1^R)$  que va de  $P^{-1}(L_*d)$  a la primera intersección con  $ER_*$ . En la Figura 2.14 también se muestra un segmento prototipo 3.

(iv). Al segmento  $\gamma_1^L$  contenido en  $\gamma^L$ , con extremos en  $L_*d$  y la primera intersección de  $\gamma^L$  con  $EL_*$ , es un ejemplo de un **segmento prototipo 4**.

(v). Observemos que el segmento  $\gamma_2^L$  contenido en  $\gamma^L$ , con extremos en  $L_*c$  y en la primera intersección de  $\gamma^L$  con  $EL_*$ , es un **segmento prototipo 5**.

(vi). Para obtener un ejemplo de un **segmento prototipo 6**, consideremos, de acuerdo con el Corolario 2.5.4, el segmento de  $P^{-2}(\gamma_1^L)$  que va de  $P^{-1}(R_*d)$  a la primera intersección con  $EL_*$ .

El siguiente teorema nos muestra que al iterar bajo  $P^{-1}$  o  $P^{-2}$  los seis segmentos prototipos definidos anteriormente, donde  $P$  es el mapeo de primer retorno de Poincaré definido sobre la sección  $\Gamma$ , obtenemos nuevamente segmentos prototipo.

**Teorema 2.6.1.** *Las imágenes inversas de segmentos de  $\overline{W}^s(c) \cap \Gamma$  pertenecientes a las distintas clases de segmentos prototipo bajo el mapeo de retorno de Poincaré son generados de acuerdo a la Tabla 2.2, la cual muestra cuales son los prototipos generados por cada uno de ellos al considerar sus imágenes inversas bajo iteraciones de  $P^{-1}$ , hasta obtener intersección no vacía con  $\overline{W}^u(d)$ .*

*Un prototipo  $Prot(i)$  genera solamente dos prototipos distintos. En la Tabla 2.2 le asociamos 1 a la columna  $Prot(k)$  si éste es generado por  $Prot(i)$  bajo  $P^{-1}$  o  $P^{-2}$ , y 0 en caso contrario.*

*Demostración.* Debido a las simetrías, solo se probarán las afirmaciones para los tres primeros tipos de segmentos prototipos.

(1.)-Como un segmento  $Prot(1)$  es un arco en  $\Gamma^R \cap \overline{W}^s(c)$  con extremos en  $R_*d$  y  $ER_*$ , por el Corolario 2.5.4,  $P^{-1}(Prot(1))$ , es un arco en  $\Gamma^L$  con extremos en  $P^{-1}(R_*d)$  y  $L_*d$ , mientras que  $P^{-2}(Prot(1))$  es un arco que va del punto  $P^{-1}(L_*d)$  a  $P^{-2}(R_*d)$  e intersecta  $ER_*$ ; por lo que el subsegmento de este arco

	Prototipos generados					
	Prot(1)	Prot(2)	Prot(3)	Prot(4)	Prot(5)	Prot(6)
Prot(1)	0	1	1	0	0	0
Prot(2)	1	1	0	0	0	0
Prot(3)	0	0	0	1	1	0
Prot(4)	0	0	0	0	1	1
Prot(5)	0	0	0	1	1	0
Prot(6)	1	1	0	0	0	0

Tabla 2.2: Tabla de Generación de los Prototipos bajo  $P^{-1}$  o  $P^{-2}$ 

que van de  $P^{-1}(L_*d)$  a la primera intersección del arco con  $ER_*$  es un segmento prototipo 3, mientras que el subsegmento de  $P^{-2}(Prot(1))$  que va de  $P^{-2}(R_*d)$ , el cual es un punto exterior, a su primer intersección con  $ER_*$  es un segmento prototipo 2.

(2.)- Si consideramos un segmento prototipo 2,  $Prot(2)$ , el cual es un arco en  $\Gamma^R \cap \overline{W^s}(c)$  con extremos en un punto exterior  $A$  de  $ER_*$  y un punto en  $ER_*$  de tal manera que ningún otro punto de  $Prot(2)$  esté contenido en  $ER_*$ , entonces por la Proposición 2.5.3,  $P^{-1}(Prot(2))$  es un arco en  $\Gamma^R$  que une  $R_*d$  y  $P^{-1}(A)$ . En consecuencia, debe intersectar  $ER_*$ . De esta manera, el subarco de  $P^{-1}(Prot(2))$  que une  $P^{-1}(A)$ , el cual es un punto exterior, con la primer intersección de  $P^{-1}(Prot(2))$  con  $ER_*$  es un segmento prototipo 2, mientras que el subarco que va de  $R_*d$  a la primer intersección con  $ER_*$  es un segmento prototipo 1.

(3.)- Sea  $Prot(3)$  un segmento prototipo 3, que va de  $P^{-1}(L_*d)$ , el cual es un punto interior de  $ER_*$ , a un punto en  $ER_*$  de tal forma que ningún otro punto de  $Prot(3)$  esté contenido en  $ER_*$ . La Proposición 2.5.3 nos garantiza que  $P^{-1}(Prot(3))$  es un arco que une  $P^{-2}(L_*d)$  con  $R_*d$  o  $L_*d$ , pero debido a que  $P^{-2}(L_*d) \in \Gamma^L$ , entonces tal arco debe estar contenido  $\Gamma^L$ , y sus extremos están dados por  $P^{-2}(L_*d)$  y  $L_*d$ . Mientras el primer punto es un punto exterior de  $EL_*$ , el segundo es un punto interior, por lo que el arco  $P^{-1}(Prot(3))$  intersecta  $EL_*$ . No es difícil mostrar que se han generado un segmento prototipo 5 y un segmento prototipo 6.  $\square$

Antes de continuar, detengámonos un poco para explicar el tipo de información que podemos obtener de la Tabla 2.2. Al observar la línea horizontal asociada a un segmento prototipo  $Prot(1)$ , existen 1's debajo de  $Prot(2)$  y  $Prot(3)$ , por lo que al segmento  $Prot(1)$  lo relacionamos con segmentos prototipo 2 y 3, lo que significa que al considerar imágenes inversas de un segmento prototipo 1 obtenemos dos segmentos prototipo, un segmento prototipo 2 y un segmento prototipo 3; como uno de los extremos del segmento prototipo 2 obtenido se encuentra sobre  $\sigma^R$  (i.e sobre  $ER_*$ ), entonces a tal extremo le corresponde una órbita de eyección que al momento de intersectar  $\Gamma^R$  presenta una colisión binaria simultánea simétrica de los binarios superior e inferior de la configuración rectangular, pero el mismo extremo del segmento prototipo 2 obtenido se encuentra también sobre  $\overline{W}^s(c)$ , la variedad estable del punto de equilibrio  $c$ , por lo que la misma órbita es asimismo una trayectoria de colisión total. Usando la Tabla 2.2 podemos obtener observaciones análogas para el extremo del segmento prototipo 3 que se encuentra sobre  $\sigma^R \cap \overline{W}^s(c)$  así como para los otros segmentos prototipo.

También es de observar que mientras los prototipos 1 y 4 necesitan dos iteraciones de  $P^{-1}$ , el mapeo inverso del mapeo de Poincaré, para intersectar  $ER_*$  o  $EL_*$ , los demás prototipos solo necesita de una aplicación de  $P^{-1}$  para generar intersección no vacía con  $ER_*$  o  $EL_*$ . Además, no debemos olvidar que todas las imágenes inversas de los segmentos prototipos son subconjuntos de  $\overline{W}^s(c)$ .

Al considerar las imágenes inversas  $P^{-j}(Prot(k)), j = 1, 2$  (donde  $j$  es el mínimo número de iteraciones necesarias de  $Prot(k)$  bajo  $P^{-1}$  para que tenga intersección no vacía con  $ER_*$  o  $EL_*$ ) del segmento prototipo  $Prot(k), k \in \{1, \dots, 6\}$ , es posible obtener que las intersecciones de estos con  $ER_*$  o  $EL_*$  consten de más de un punto, obteniéndose intersecciones del estilo mostrado en la Figura 2.15. A todos los puntos en esta intersección corresponden trayectorias de eyección-colisión que presentan una misma sucesión de símbolos  $R$  y  $L$  entre eyección y colisión.

Supongamos que existen  $m$  puntos en esta intersección, por lo que se generan  $m - 1$  segmentos distintos en  $P^{-j}(Prot(k))$  que intersectan  $ER_*$  o  $EL_*$  solamente en sus extremos; estos segmentos contenidos en la imagen inversa  $P^{-j}(Prot(k)), j = 1, 2$  se encuentran entre dos puntos consecutivos de  $ER_*$  o  $EL_*$ , al considerar las imágenes inversas de estos  $m - 1$  segmentos; éstos, de acuerdo al Teorema 2.5.1 se transforman en lazos con extremos en  $R_*d$  o  $L_*d$  y

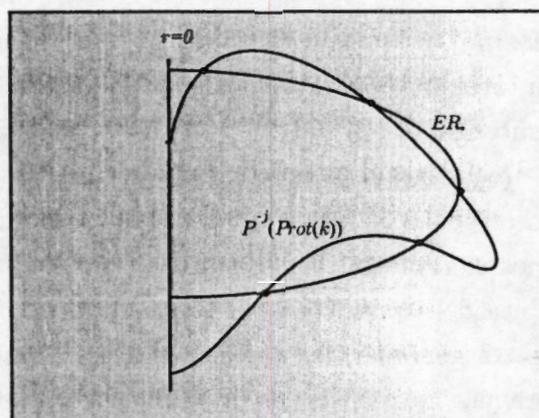


Figura 2.15: Puntos con la misma sucesión de CBS-simultáneas

a su vez las imágenes inversas de estos lazos no generan intersecciones con  $ER_*$  o  $EL_*$ . Por ello podemos suponer, sin perder generalidad, que las imágenes inversas de  $P^{-j}(Prot(k))$ , ( $j = 0$  o  $1$ ), solo intersectan  $ER_*$  o  $EL_*$  en un único punto.

**Definición 4.** Un punto  $p \in \overline{W}^s(c) \cap \overline{W}^u(d) \cap \Gamma$  es un primer punto de eyección-colisión si la trayectoria que pasa por este punto viene directamente de colisión total sin experimentar otra colisión binaria simultánea. Asimismo, decimos que un punto  $p \in \overline{W}^s(c) \cap \overline{W}^u(d) \cap \Gamma$  es un punto último de eyección-colisión si la trayectoria que pasa por este punto va directamente a colisión total sin experimentar otra colisión binaria simultánea.

A continuación se mostrará cómo usar el teorema anterior para generar una familia de órbitas de eyección-colisión que presenten una sucesión finita de colisiones binarias simultáneas. Para ello, empezaremos analizando cómo se generan este tipo de órbitas a través de las imágenes inversas de los segmentos prototipos contenidos en  $\Gamma^R$  y  $\Gamma^L$ .

Los siguientes resultados muestran la existencia de familias específicas de órbitas de eyección-colisión que presentan una cantidad finita de colisiones binarias simultáneas.

**Proposición 2.6.2.** Existen órbitas de eyección-colisión con trayectorias de tipo  $ER^n C$  y  $EL^n C$ , para toda  $n \geq 1$ .

*Demostración.* Sólo se probará el resultado para la familia  $ER^n C$ , pues la demostración para la familia de trayectorias  $EL^n C$  es completamente simétrica.

Sabemos que los puntos en la intersección  $\gamma^R \cap \sigma^R$  son puntos primeros y últimos de colisión total, los cuales tienen asociados trayectorias del tipo *ERC*. Consideremos el subsegmento  $\gamma_2^R$  de  $\gamma^R$ . El Teorema 2.5.1 garantiza que su imagen inversa  $P^{-1}(\gamma_2^R)$ , bajo el mapeo de Poincaré interseca  $ER_*$ , generando dos segmentos prototipos 1 y 2. Por lo cual al punto de intersección (recordemos que suponemos siempre que la intersección consta de un solo punto) le asociamos una órbita del tipo *ERRC*. Si consideramos la imagen inversa del segmento prototipo 2 generado en el paso anterior, generamos nuevamente, de acuerdo al teorema, dos segmentos prototipos 1 y 2. Correspondiéndole a la intersección de estos segmentos prototipos un punto al que asociamos una trayectoria del tipo *ERRRC*. Si continuamos con este procedimiento de iterar las imágenes inversas de los segmentos prototipos 2, obtenidos en cada paso, no es difícil convencerse de la existencia de trayectorias del tipo  $ER^n C$ , para toda  $n \geq 1$ .  $\square$

**Proposición 2.6.3.** *Existen órbitas de eyección-colisión con trayectorias de tipo ERLRC. Por simetría, también se obtienen trayectorias de tipo ELRLC.*

*Demostración.* Consideremos el segmento  $\gamma_1^R$  contenido en  $\gamma^R$ . De acuerdo al Teorema 2.5.1, su imagen inversa  $P^{-1}(\gamma_1^R)$  no interseca  $ER_*$  ni  $EL_*$ , tomando  $P^{-2}(\gamma_1^R)$ , éste interseca  $ER_*$  y además obtenemos dos segmentos prototipos 2 y 3, así como un primer punto de eyección-colisión. Al iterar bajo  $P$ , este primer punto de eyección-colisión, obtenemos: (i) La primera iteración nos da un punto que se encuentra en  $\Gamma^L$  y, (ii) la iteración de este punto en  $\Gamma^L$  bajo  $P$  nos proporciona un punto último de eyección-colisión contenido en  $\Gamma^R$ . Por lo que al primer punto de eyección-colisión le corresponde una trayectoria del tipo *ERLRC*.  $\square$

La siguiente proposición nos permite describir órbitas de eyección-colisión que presentan dinámicas distintas a las construidas en los dos resultados anteriores.

**Proposición 2.6.4.** *Dada una órbita de eyección-colisión con una sucesión de símbolos de la forma  $EQ_1 \dots Q_n C$  con  $Q_i \in \{R, L\}$ , existen trayectorias de*

eyección-colisión con sucesiones de símbolos asociadas que presentan la forma  $EQ_1 \dots Q_n Q_{n+1} C$  o la forma  $EQ_1 \dots Q_n Q_{n+1} Q_{n+2} C$ .

*Demostración.* Como sabemos, los arcos  $\gamma^R$  y  $\sigma^R$  en  $\Gamma^R$ , contenidos en  $\overline{W}^s(c)$  y  $\overline{W}^u(d)$ , respectivamente, se intersectan, generando dos segmentos prototipos 1 y 2:  $\gamma_1^R$  y  $\gamma_2^R$ . Estos son subsegmentos de  $\gamma^R$ , los cuales se intersectan en un punto primero y último de eyección-colisión; además la órbita que pasa por este punto es una trayectoria que sale de colisión total, presenta una CBS-derecha y termina en colisión total, a la cual le asociamos una sucesión de símbolos de la forma  $ERC$ . Por el Teorema 2.5.1, al iterar éstos dos segmentos prototipos  $\gamma_1^R$  y  $\gamma_2^R$  bajo el inverso del mapeo de Poincaré  $P$ , obtenemos cuatro segmentos prototipo, un par de segmentos que denotaremos por  $Prot(2)$  y  $Prot(3)$ , asociados al arco  $\gamma_1^R$ , así como un par de segmentos  $Prot(1)$  y  $Prot(2)$  asociados a  $\gamma_2^R$ . Observemos que  $P^{-2}(\gamma_1)$  es la unión de los segmentos prototipo  $Prot(2)$  y  $Prot(3)$ , mientras que  $P^{-1}(\gamma_2)$  es la unión de los segmentos prototipo  $Prot(1)$  y  $Prot(2)$ . Además, también obtenemos dos puntos últimos de eyección-colisión que corresponden a las intersecciones de los pares de segmentos prototipos obtenidos, un último punto de eyección-colisión corresponde a la intersección del par  $Prot(2)$  y  $Prot(3)$  y el restante último punto de eyección-colisión está asociado al par de segmentos  $Prot(1)$  y  $Prot(2)$ . Al primer punto obtenido le corresponde una trayectoria de eyección-colisión con tres colisiones binarias simultáneas, mientras que al segundo punto le corresponde una trayectoria que presenta dos colisiones binarias simultáneas. A estas órbitas les asociamos sucesiones de la forma  $ERLRC$  y  $ERRC$ , respectivamente. De esta manera podemos continuar con este proceso de iteración bajo  $P^{-1}$  para cada uno de los cuatro segmentos prototipos anteriores, lo cual es posible por el Teorema 2.5.1. Al iterar bajo  $P^{-1}$ , cada uno de los cuatro segmentos prototipo necesita de una o dos iteraciones de  $P^{-1}$  para intersectar nuevamente a  $ER_*$  o  $EL_*$ .

Así, supongamos que se ha construido una órbita la cual tiene asociada una sucesión de la forma  $EQ_1 Q_2 \dots Q_n C$ , donde  $Q_i \in \{R, L\}$ ; y además, el último símbolo  $Q_n$ , anterior a la colisión total, fué obtenido usando dos segmentos prototipos  $Prot(k)$  y  $Prot(j)$ . Entonces al iterar cualquiera de estos dos segmentos prototipos podemos obtener una nueva trayectoria que presenta un nuevo símbolo  $Q_{n+1}$  o dos nuevos símbolos  $Q_{n+1} Q_{n+2}$ , dependiendo de que se requieran de una o dos iteraciones de  $P^{-1}$  para que el segmento prototipo interseque  $ER_*$  o  $EL_*$ . En resumen, se tiene una trayectoria que presenta una

de las sucesiones de símbolos siguientes:

$$EQ_1Q_2 \dots Q_nQ_{n+1}C \quad \circ \quad EQ_1Q_2 \dots Q_nQ_{n+1}Q_{n+2}C.$$

□

Para finalizar esta sección interpretaremos las sucesiones de símbolos de la forma  $EQ_1Q_2 \dots Q_j \dots Q_mC$ , donde  $Q_j \in \{R, L\}$  asociadas a trayectorias de eyección-colisión que presentan una sucesión finita de  $m$  colisiones binarias simultáneas en términos  $x$  y  $y$ , las coordenadas originales del problema rectangular de cuatro cuerpos.

Recordemos que en las coordenadas originales  $x$  y  $y$ , las colisiones binarias simultáneas están asociadas a que  $x = 0$  ó  $y = 0$ , sin que ambas variables se anulen simultáneamente. Pero, bajo el cambio de coordenadas de McGehee, éstos valores corresponden a los valores  $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$ , respectivamente. Cuando la coordenada  $x$  se anula ( $y \neq 0$ ), significa que existen colisiones binarias simultáneas de los pares de partículas de los binarios superior e inferior y por lo tanto los choques se dan sobre puntos del eje  $y$ , simétricos respecto al origen; por otra parte  $y = 0$  (con  $x \neq 0$ ), significa que tenemos colisiones binarias simultáneas de los binarios de partículas que se encuentran a la derecha e izquierda de la configuración rectangular y por lo tanto los choques ocurren en puntos del eje  $x$  simétricos respecto al origen. Es de observarse que no consideramos el caso cuando  $x$  y  $y$  se anulan simultáneamente, puesto que en tal situación se tendría colisión total.

Por lo tanto, a un símbolo  $R$  en la sucesión  $EQ_1Q_2 \dots Q_j \dots Q_mC$ , donde  $Q_j \in \{R, L\}$  le corresponde un punto en  $\Gamma^R$  (que satisface la condición  $\theta = \pi/2$ ). Esto significa que se tiene una colisión binaria simultánea sobre puntos del plano sobre el eje  $y$ , simétricos respecto al origen y por tanto ocurre una colisión binaria simultánea simétrica de los binarios superior e inferior del rectángulo; mientras que tener un símbolo  $L$  en la misma sucesión, significa que se tiene una colisión binaria simultánea sobre puntos del plano sobre el eje  $x$  simétricos respecto al origen y en tal caso tiene lugar una colisión binaria simultánea simétrica de los binarios derecho e izquierdo de la configuración rectangular. En la Figura 2.16, mostramos órbitas de eyección-colisión que tienen asociadas sucesiones de la forma  $ELLLC$  y  $ELRLC$ .

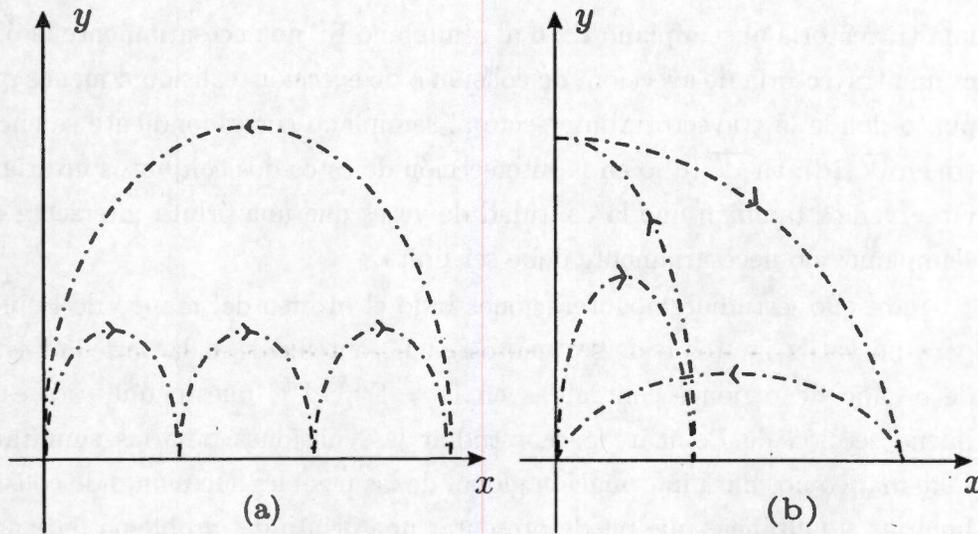


Figura 2.16: Trayectorias de eyección-colisión: (a)  $EL^3C$  y (b)  $ELRLC$

De esta manera, las sucesiones  $ER^nC$  y  $EL^nC$  de la Proposición 2.6.2 están asociadas, respectivamente, a trayectorias de eyección-colisión que presentan una sucesión de  $n$  colisiones binarias simultáneas que ocurren sobre el eje  $y$ , en el primer caso, o sobre el eje  $x$ , en el segundo. Se puede dar una interpretación semejante para las sucesiones  $ERLRC$  y  $ELRLC$  de la Proposición 2.6.3.

## 2.7 Dinámica simbólica

A continuación daremos una descripción de trayectorias, no necesariamente de eyección-colisión, que presentan sucesiones de colisiones binarias simultáneas, pero tampoco necesariamente una cantidad finita. En la sección anterior mostramos que existen órbitas de eyección-colisión a las cuales podemos asociar sucesiones finitas de la forma  $EQ_1Q_2\dots Q_nC$ , donde  $Q \in \{R, L\}$ ; es decir, trayectorias que presentan una sucesión de colisiones binarias simultáneas simétricas, ya sea de los pares superior e inferior o de los pares derecho e izquierdo de la configuración rectangular, la cual se preserva a lo largo del tiempo. Cada vez que una de tales órbitas interseca al semiplano  $\Gamma^R$  o al semiplano  $\Gamma^L$ , la trayectoria presenta una de éstas dos colisiones binarias simultáneas simétricas y le asociamos el símbolo  $R$  o el símbolo  $L$ , dependiendo de la colisión binarias simultánea simétrica que ocurra; además tal cantidad de colisiones no totales, como hemos dicho, es finita. En general, al intersectar

una trayectoria al semiplano  $\Gamma^R$  o al semiplano  $\Gamma^L$  no necesariamente la órbita es una trayectoria de eyección, de colisión o de eyección-colisión a menos que el punto donde la trayectoria intersecte al semiplano correspondiente se encuentre en  $\overline{W}^u(d)$ , en  $\overline{W}^s(c)$  o en la intersección de estos dos conjuntos invariantes. Observemos también que la cantidad de veces que una órbita intersecta estos semiplanos no necesariamente debe ser finita.

Para ello, estudiaremos iteraciones bajo el inverso del mapeo de Poincaré, pero no ya de puntos o de segmentos en  $\Gamma$  contenidos en la variedad estable de  $c$ , sino de regiones contenidas en  $\Gamma = \Gamma^R \cup \Gamma^L$ , puesto que ésta es una buena sección de Poincaré para estudiar las colisiones binarias simultáneas. Este mapeo nos dará información global de las posibles sucesiones de colisiones binarias simultáneas que puede presentar una órbita del problema rectangular de cuatro cuerpos que no es de eyección-colisión.

Definiremos ocho regiones básicas de transición. Las primeras cuatro regiones  $R_i$ ,  $i = 1 \dots 4$ , están contenidas en  $\Gamma^R$  y por simetría tendremos definidas otras cuatro regiones  $R_i$ ,  $i = 5 \dots 8$ , en  $\Gamma^L$ .

Tres de las regiones en  $\Gamma^R$  están contenidas en la parte acotada por  $\sigma^R$  (recordemos que  $\sigma^R = ER_*$ ) y  $r = 0$ , mientras que la última región de  $\Gamma^R$  corresponde a la parte no acotada de  $\Gamma^R$  determinada por  $\sigma^R$ .

La primera región  $R_1$  está acotada por el segmento contenido en  $\sigma^R$  que va de  $d_*R$  a la primera intersección de  $\sigma^R$  con  $\gamma^R$ ,  $R_1$  también está acotada por el segmento de la recta  $r = 0$  que se encuentra entre los puntos  $d_*R$  y  $R_*d$ , así como por el subsegmento  $\gamma_1^R$  de  $\gamma^R$  que va de  $R_*d$  a la primera intersección con  $ER_*$ , es decir, con  $\sigma^R$ , tal como se muestra en la Figura 2.16; la región  $R_2$  es la región que está acotada por el segmento de recta  $r = 0$  que se encuentra entre los puntos  $R_*d$  y  $P^{-1}(L_*d)$ , así como por la imagen inversa  $P^{-1}(\gamma_1^L)$ , donde  $\gamma_1^L$  es el segmento de  $\gamma^L$  que va de  $L_*d$  a la primera intersección con  $EL_*$ ; mientras que la región  $R_3$  se encuentra acotada por  $P^{-1}(\gamma_1^L)$ , el segmento de recta contenido en la recta  $r = 0$  que se encuentra entre los puntos  $P^{-1}(L_*d)$  y  $c_*R$  y además está acotado finalmente por el segmento contenido en  $\sigma^R$  que va de  $c_*R$  a la intersección de  $\gamma_1^R$  con  $ER_*$ .

Finalmente, la región  $R_4$  corresponde a la parte no acotada de  $\Gamma^R$  determinada por  $\sigma^R$ , ver Figura 2.17. De manera análoga definimos las regiones  $R_5, \dots, R_8$  en  $\Gamma^L$  como las simétricas de  $R_1, \dots, R_4$ , respectivamente. De esta manera hemos dividido  $\Gamma$  en ocho regiones, y estudiaremos la manera como se mapean una en otra bajo  $P^{-1}$ . Ver Figura 2.18.

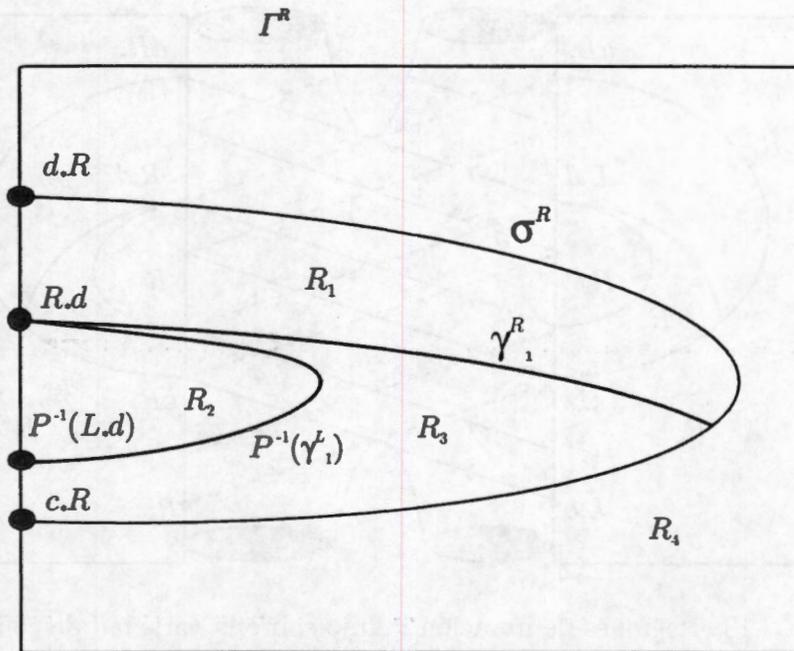


Figura 2.17: Regiones básicas de iteración en  $\Gamma^R$

Consideremos un alfabeto  $\mathcal{A} = \{R_i\}_{i=1,\dots,8}$  de ocho símbolos, cada uno de los cuales corresponde a las ocho regiones distintas  $R_i, i = 1 \dots 8$  de  $\Gamma$  definidas anteriormente. Estudiaremos cómo es la dinámica de estas regiones bajo el mapeo  $P^{-1}$ .

**Definición 5.** Una matriz de transición es una matriz  $A = (a_{ij})$  tal que  $a_{ij} = 1$  si la región  $R_i$  es mapeada a la región  $R_j$  bajo  $P^{-1}$ , y  $a_{ij} = 0$  en caso contrario.

De esta manera la matriz de transición determina todos los intercambios admisibles entre los símbolos  $R_i$ .

**Definición 6.** La gráfica de transición  $G_A$  asociada a una matriz de transición  $A$  es la gráfica dirigida que consta tanto de ocho vértices distintos, que, por simplicidad, denotaremos por  $i, i = 1, \dots, 8$ , como de flechas dirigidas. Así, tendremos una flecha dirigida que va del vértice  $i$ -ésimo al vértice  $j$ -ésimo si  $a_{ij} = 1$ ; y en caso de que  $a_{ij} = 0$ , no tendremos conexión alguna del vértice  $i$  al vértice  $j$ .

De esta manera, nuestro objetivo es determinar una matriz  $A$ , de transición para las regiones  $\{R_i\}_{i=1,\dots,8}$ , así como su respectiva gráfica de transición con

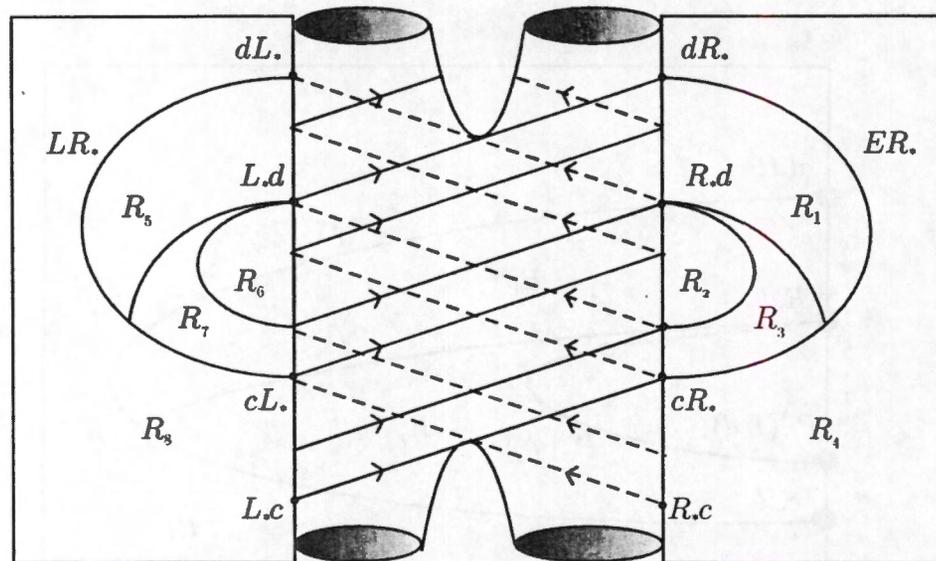


Figura 2.18: Regiones de iteración y flujo sobre la variedad de colisión total.

el fin de conocer la dinámica de las órbitas que presentan una sucesión de colisiones binarias simultáneas.

Para ello haremos uso del material desarrollado para dar la descripción de las órbitas de eyección-colisión que presentan una sucesión finita de colisiones binarias simultáneas.

**Teorema 2.7.1.** *Las matriz de transición entre las regiones está dada por*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Demostración.* Primero veremos cual es la imagen inversa de la región  $R_4$ . La imagen inversa de un punto en  $R_4$  cercano a  $cR_*$ , debe estar cercano al punto  $R_*c$ , ver Figura 2.14, y la imagen inversa de un punto en la región, cercano a la curva  $ER_* = \sigma^R$ , debe ser un punto cercano a  $R_*d$ ; de manera semejante, un punto cercano a  $dR_*$ , debe ir bajo  $P^{-1}$ , a puntos cercanos a  $R_*d$ . De

esta manera la imagen inversa de la región  $R_4$ , es la región no acotada en  $\Gamma^R$ , determinada por  $\gamma^R$ . Es decir,  $P^{-1}(R_4)$  intersecta tanto a  $R_1$  como a  $R_4$ . Las imágenes inversas de las otras regiones se determinan de manera semejante.  $\square$

**Corolario 2.7.2.** *La gráfica de transición entre las regiones está dada en la Figura 2.19.*

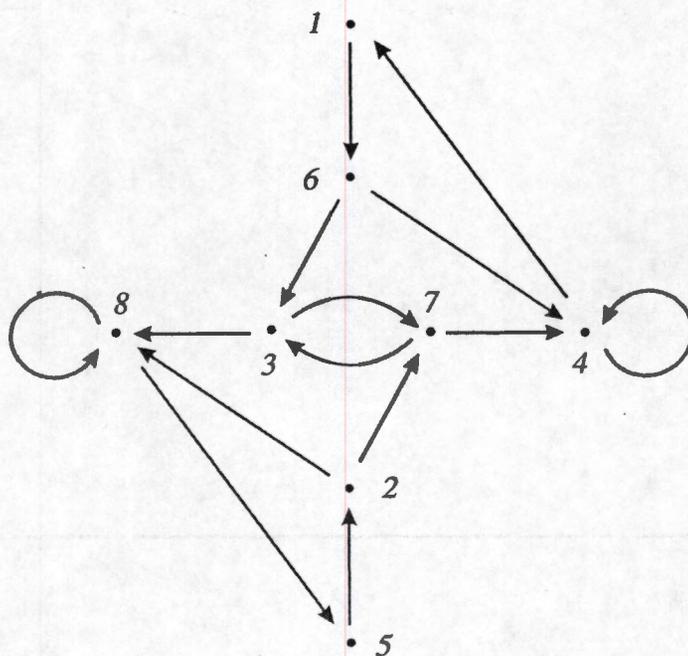
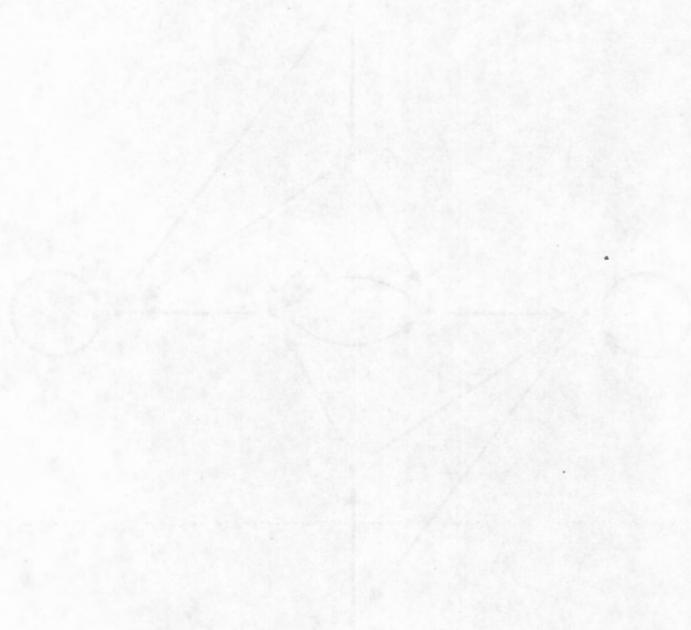


Figura 2.19: Gráfica  $G_A$  de transición entre las regiones.

*Demostración.* Se sigue del Teorema 2.7.1.  $\square$

Observemos que tanto la matriz como la gráfica de transición entre las regiones muestran los efectos de la simetrías del problema rectangular de cuatro cuerpos.



---

---

## CAPÍTULO 3

---

# COLISIONES EN EL PROBLEMA COLINEAL

### 3.1 Introducción

En este capítulo estudiamos otro problema con dos grados de libertad de la mecánica celeste, el problema colineal simétrico de cuatro cuerpos, el cual depende de un parámetro positivo determinado por las masas de las partículas del sistema. En [28], Lacomba y Simó introdujeron este problema y obtuvieron información valiosa acerca de la naturaleza de el flujo sobre la variedad de colisión total  $M$ . El flujo sobre  $M$  cambia dependiendo del valor del parámetro y topológicamente es el mismo para valores del parámetro en ciertos intervalos abiertos. En algunos de estos intervalos abiertos el flujo en  $M$  resulta bastante simétrico, como se muestra en la figura 3.1. Asimismo, las variedades inestables del punto  $c$  actúan como separatrices y escapan por brazos superiores distintos después de dar el mismo número de vueltas alrededor de  $M$ . Esta simetría del flujo sobre la variedad de colisión total, la existencia de la órbita homotética que une los puntos de equilibrio que se encuentran sobre la variedad de colisión total y la transversalidad de variedades invariantes asociadas a los puntos de equilibrio resultan fundamentales para probar la existencia de una familia de órbitas de eyección-colisión que presentan una sucesión finita de colisiones binarias del par interior y/o colisiones binarias simultáneas simétricas que aparecen en el problema colineal simétrico de cuatro cuerpos.

### 3.2 Flujo sobre la variedad de colisión total

Las propiedades del flujo asociado a las ecuaciones (1.23) sobre la variedad de colisión total  $M$  están resumidas en el siguiente resultado, el cual es análogo al que tenemos para el problema rectangular, tratado en la sección anterior.

**Proposición 3.2.1.** *El flujo de las ecuaciones (1.20) [respectivamente (1.23)] restringido a la variedad de colisión total  $r = 0$  es casi-gradiente respecto a la variable  $v$ . Los puntos de equilibrio  $r = 0$ ,  $v = \pm\sqrt{U(\tilde{\theta}_\alpha)}$ ,  $\theta = \tilde{\theta}_\alpha$  y  $u = 0$  [respectivamente  $w = 0$ .] son hiperbólicos. Denotamos por  $c$  ( $v < 0$ ) y  $d$  ( $v > 0$ ) los puntos críticos en cualquiera de los sistemas de coordenadas  $(r, v, \theta, u)$  o  $(r, v, \theta, w)$ . Las dimensiones de sus variedades estables e inestables están dadas en la Tabla 3.1, donde  $\overline{W}^{s,u}$  denota la variedades estable e inestable en un nivel fijo de energía  $h$  y  $W^{s,u} = M \cap \overline{W}^{s,u}$ .*

	Subvariedades invariantes			
	$\overline{W}^u(d)$	$\overline{W}^s(d)$	$\overline{W}^u(c)$	$\overline{W}^s(c)$
Dimensión	2	1	1	2
	$W^u(d)$	$W^s(d)$	$W^u(c)$	$W^s(c)$
Dimensión	1	1	1	1

Tabla 3.1: Dimensiones de las variedades invariantes asociadas a los puntos de equilibrio en el problema colineal.

En la Figura 3.1 se muestran distintos tipos (cualitativamente hablando) de flujos sobre  $M$ . A diferencia del caso rectangular, en este problema tenemos la existencia de un parámetro  $\alpha$  y el flujo sufre cambios cualitativos al cambiar el valor del parámetro de masas. De hecho, Lacomba y Simó [28] determinan varios valores de bifurcación  $\alpha_i$ , con  $\alpha_i < \alpha_{i+1}$ , para el parámetro  $\alpha$ , los cuales generan distintos intervalos abiertos de tal forma que el flujo es cualitativamente el mismo cuando dos valores del parámetro pertenecen a un mismo intervalo.

Notemos que la Tabla 3.1 es igual a la que aparece en el caso del problema rectangular estudiado en el capítulo anterior.

Como hemos dicho, estamos interesados en valores del parámetro contenidos en algunos intervalos abiertos de valores del parámetro para los cuales el flujo sobre la variedad de colisión total es simétrico, como se muestra en la Figura

3.1. Se excluyen de este estudio aquellos valores del parámetro que resultan ser valores de bifurcación, así como algunos intervalos abiertos del parámetro donde no es posible aplicar las ideas desarrolladas en los casos de flujo simétrico: (i) una o ambas separatrices  $W^u(c)$  coincide con una o ambas separatrices  $W^s(d)$ , o (ii) ambas separatrices  $W^u(c)$  escapan por el mismo brazo superior de la variedad de colisión total  $M$ , ver Figura 3.2. De todos los intervalos determinados en [28], pag. 61, en los cuales estamos interesados son  $(0, \alpha_1)$ ,  $(\alpha_2, \alpha_3)$  y  $(\alpha_3, \alpha_4)$ , donde  $\alpha_1 = 0.09297$ ,  $\alpha_2 = 0.36193$ ,  $\alpha_3 = 0.90788$  y  $\alpha_4 = 1.3452$ .

En los tipos de flujo sobre la variedad de colisión total que consideraremos no existen conexiones entre los puntos de equilibrio  $c$  y  $d$  sobre la variedad de colisión total y los flujos, cualitativamente, son completamente simétricos como en la Figura 3.1.

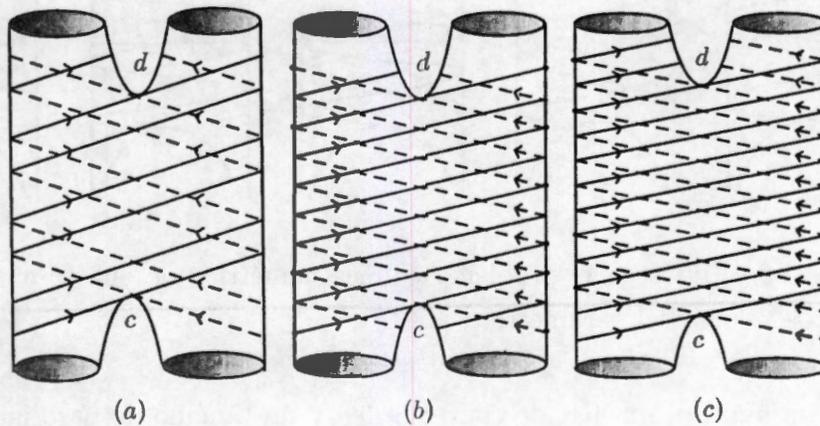


Figura 3.1: Flujo sobre la variedad de colisión total, (a)  $0 < \alpha < \alpha_1$ , (b)  $\alpha_2 < \alpha < \alpha_3$  y (c)  $\alpha_3 < \alpha < \alpha_4$ .

Es de notar que existen valores del parámetro  $\alpha$  para los cuales el flujo sobre la variedad de colisión total no resulta un flujo simétrico como en los casos en que estamos interesados. Para tales valores del parámetro, el flujo o no es simétrico, con la simetría descrita o existen conexiones de las ramas de las variedades invariantes contenidas en  $M$ , asociadas a los puntos de equilibrio de la variedad de colisión total, como se muestra en la Figura 3.2.

En [28], los autores estudian las conexiones de las variedades invariantes que salen del punto de equilibrio inferior  $c$  de la variedad de colisión total, y este estudio resulta una pieza importante para el desarrollo posterior de esta tesis. Usan un cambio de coordenadas el cual les permite estudiar numéricamente

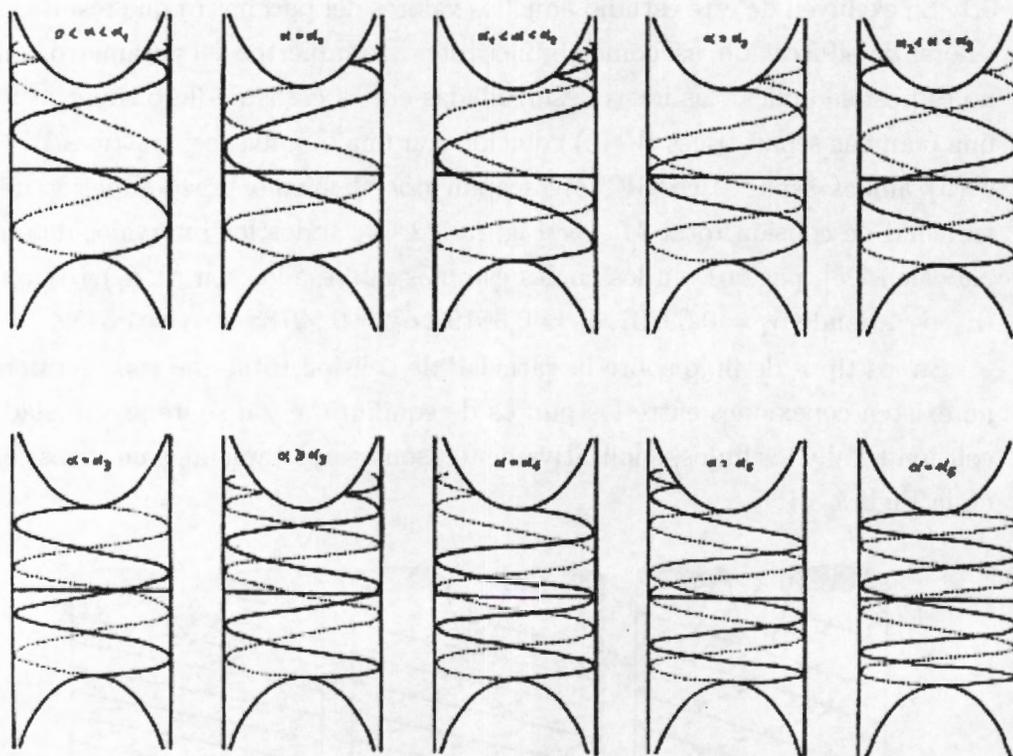


Figura 3.2: Flujos en el problema colineal simétrico de cuatro cuerpos para distintos valores del parámetro  $\alpha$  [28].

(mediante una rutina RK de cuarto orden y un tamaño de paso igual a 0.02) tales variedades invariantes, obteniendo los valores de la coordenada  $\theta$  donde las ramas derecha e izquierda de  $W^u(c)$  asociadas a los puntos de equilibrio  $c$  intersectan la recta  $v = 0$  en el plano  $(\theta, v)$ , valores de  $\theta$  a los cuales denotan respectivamente por  $\gamma_+$  y  $\gamma_-$ . En la Figura 3.3 se muestra una representación de los valores numéricos que obtienen para  $\gamma_+$  y  $\gamma_-$  como función del parámetro de masas  $\alpha$ . También muestran la existencia de una infinidad de valores del parámetro de masas  $\alpha$  para los cuales una de las ramas de  $W^u(c)$  coincide con una de las ramas de  $W^s(d)$ . De entre estos valores para el parámetro de masas hallados por ellos tenemos  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ , y  $\alpha_4$ ; los cuales resultan ser valores de bifurcación, pues para ellos existe al menos una conexión heteroclínica entre los puntos de equilibrio  $c$  y  $d$  sobre la variedad de colisión total y para valores del parámetro de masas que satisfacen las desigualdades  $0 < \alpha < \alpha_1$ ,  $\alpha_2 < \alpha < \alpha_3$ ,  $\alpha_3 < \alpha < \alpha_4$  los flujos sobre la variedad de colisión total son simétricos como se muestra en la Figura 3.2

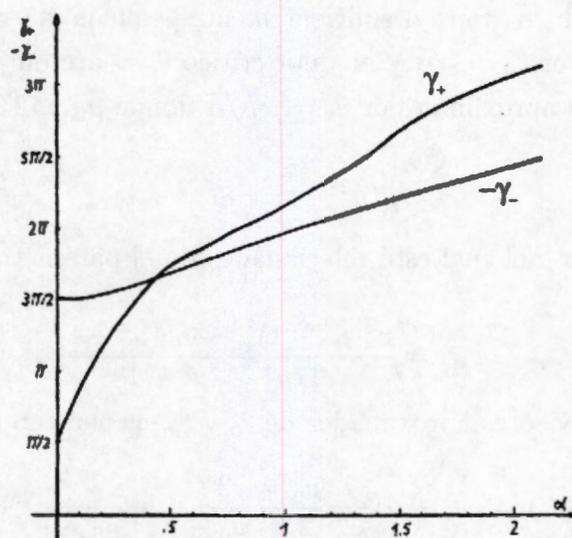


Figura 3.3: Representación gráfica de  $\gamma_{\pm}$  como función de  $\alpha$  [28].

Asimismo realizan un estudio analítico de la naturaleza dinámica de las ramas de  $W^u(c)$  para los casos límite, es decir, cuando  $\alpha \rightarrow 0$  y  $\alpha \rightarrow \infty$  para obtener el comportamiento de  $\gamma_+$  y  $\gamma_-$ . En particular, para el primer caso límite  $\alpha \rightarrow 0$  obtienen el siguiente resultado.

**Proposición L-S (Lacomba y Simó [Proposición 6.1] [28]).** *Para  $\alpha$  suficientemente pequeño,  $\gamma_+ > \pi/2$  y  $-\gamma_- < -3\pi/2$ .*

Este resultado tiene importantes consecuencias para el posterior desarrollo de este capítulo del trabajo, pues nos permite asegurar la existencia de un continuo de valores del parámetro de masas  $\alpha$  para los cuales existirá intersección no vacía entre las variedades invariantes asociadas a los puntos de equilibrio  $c$  y  $d$  sobre la superficie de energía negativa fija.

A continuación comentaremos respecto a este resultado y las ideas que siguen Lacomba y Simó en [28] para estudiar las primeras intersecciones de las ramas inestables de los puntos  $c$  con la sección  $v = 0$ , esta información nos será útil para estudiar las primeras intersecciones de estas ramas inestables de la variedad inestable del punto  $c$  sobre la variedad de colisión total  $M$  con la sección que nosotros hemos denotado por  $\Gamma^R$  en el caso límite  $\alpha \searrow 0$ , para ver los detalles remitimos al lector a [28].

Usan aproximaciones para los distintos elementos con los que trabajan, por ejemplo, para  $\alpha > 0$  fija, sabemos que el valor más pequeño que puede tomar

$\theta$  es  $\theta_0 = \arctan \sqrt{\alpha}$ . Para  $\alpha$  suficientemente pequeña, para  $\theta_0$  toman la aproximación dada por  $\theta_0 = \sqrt{\alpha}$  y al valor crítico  $\theta_c = \arctan(\mu\sqrt{\alpha})$  para la correspondiente  $\alpha$  lo aproximan por  $\theta_c = \mu_0\sqrt{\alpha}$  donde  $\mu_0 \simeq 2.396812289$  es la raíz de la ecuación

$$\mu(\mu^2 - 1) = 8(\mu^2 + 1)$$

en el parámetro  $\mu$  el cual está relacionado con el parámetro de masas  $\alpha$  por la igualdad

$$\alpha = \frac{\mu^3(\mu^2 - 1)^2 - 8\mu^2(\mu^2 + 1)}{17\mu^4 - 2\mu^2 + 1}$$

Usando los valores aproximados de  $\theta_0$  y  $\theta_c$  encuentran que

$$U(\theta_c) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \alpha \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\mu_0^2}{2} + \frac{2^{3/2}}{\mu_0 + 1} + \frac{2^{3/2}}{\mu_0 - 1} \right) + O(\alpha^2)$$

y

$$v_c = -\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} \left( \frac{\mu_0^2}{4} + \frac{2}{\mu_0 + 1} + \frac{2}{\mu_0 - 1} \right).$$

Para este caso límite muestran que  $\gamma_+ > \frac{\pi}{2}$  y  $-\gamma_- < \frac{3\pi}{2}$ .

Un papel importante lo juega la ecuación diferencial en el plano  $(\theta, v)$  dada por

$$\frac{dv}{d\theta} = \sqrt{\frac{2U(\theta) - v^2}{4}},$$

la cual se obtiene del sistema de ecuaciones diferenciales (1.20) usando la relación de energía (1.18) con  $r = 0$ . Consideran la solución de la ecuación diferencial anterior con condición inicial dada por  $(\theta_*, v_*) = (0, \frac{\pi}{2})$  y continúan la solución en tiempo negativo, recordemos que el flujo sobre la variedad de colisión total es casigradiente con respecto a la variable  $v$ . Para mostrar que  $\gamma_+ > \frac{\pi}{2}$  realizan una serie de cálculos los cuales podemos describir de la siguiente manera. Introducen una nueva variable que denotan por  $w$  la cual está determinada por  $v = -2^{1/4}\sqrt{\cos\theta} + w$ , con  $w(\frac{\pi}{2}) = 0$ , hallan una expresión para  $\frac{dw}{d\theta}$  de la cual consideran solo los términos de primer orden y obtienen una ecuación diferencial lineal no homogénea de primer orden, la cual resuelven usando el método de variación de parámetros para obtener que el valor  $w(\theta_c) = -(\mu_0\sqrt{\alpha})^{-1/2^{5/4}} \Delta_c$ ; asimismo dan una estimación para  $\Delta_c$ , dada por  $\Delta_c = -\frac{4\alpha\mu_0}{(1-1/2^{5/4})(\mu_0^2-1)}$ , pero al tener que  $\frac{4\mu_0}{(1-1/2^{5/4})(\mu_0^2-1)} < 2^{1/4}(\frac{\mu_0^2}{4} + \frac{2}{\mu_0+1} + \frac{2}{\mu_0-1})$  valor que estiman  $\Delta_c < 2^{1/4}(\frac{\mu_0^2}{4} + \frac{2}{\mu_0+1} + \frac{2}{\mu_0-1})$  por lo que el punto  $Q$  que se encuentra en la Figura 3.2 está por encima del punto de equilibrio  $(\theta_c, v_c)$  y por

lo tanto  $\gamma_+ > \frac{\pi}{2}$ . Para mostrar que  $-\gamma_- < \frac{3\pi}{2}$  dan un argumento más simple que el dado anteriormente.

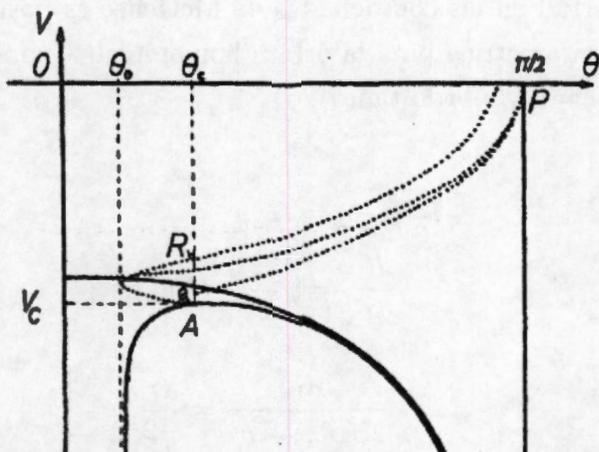


Figura 3.4: Figura 8 en [28].

Lacomba y Simó determinan el valor  $\alpha_1$  como el único valor de  $\alpha > 0$  tal que  $-\gamma_-(\alpha_1) = 3\pi/2$ ,  $\alpha_2$  tal que  $\gamma_+(\alpha_2) = 3\pi/2$ ,  $\alpha_3$  tal que  $\gamma_+(\alpha_3) - \gamma_-(\alpha_3) = 4\pi$ ; recordemos que  $a < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ .

Es de observar que el flujo sobre la variedad de colisión total correspondiente a las gráficas primera, quinta y séptima en la Figura 3.2 corresponden a los flujos que se muestran en la Figura 3.1 después de usar la simetría debida a la reversibilidad del sistema, la cual en coordenadas de McGehee se expresa por

$$(r, v, \theta, w, s) \mapsto (r, -v, \theta, -w, -s).$$

### 3.3 Órbita homotética y transversalidad a lo largo de ella.

En esta sección mostraremos la existencia de una única órbita homotética, para cada nivel de energía  $E_h$ , con  $h$  negativa, la cual está contenida en  $\overline{W}^u(d) \cap \overline{W}^s(c)$ . La órbita homotética une los puntos de equilibrio  $d$  con  $c$  que se encuentran en la variedad de colisión total. Esta órbita homotética será de gran importancia para mostrar la existencia de una familia de órbitas de eyección-colisión que presentan una sucesión finita de colisiones binarias del par interior y/o colisiones binarias simultáneas (simétricas).

Las órbitas homotéticas se caracterizan por la condición  $\theta \equiv \tilde{\theta}_\alpha$ , donde  $U'(\tilde{\theta}_\alpha) = 0$ . Usando las ecuaciones de movimiento para un problema con dos grados de libertad en las coordenadas de McGehee es posible obtener una representación paramétrica para la órbita homotética. Cuando  $\theta \equiv \tilde{\theta}_\alpha$ , entonces tenemos que  $u = 0$  y, por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\tau} &= rv, \\ \frac{dv}{d\tau} &= \frac{v^2}{2} - U(\tilde{\theta}_\alpha),\end{aligned}$$

de esta forma,

$$\frac{dv}{2U(\tilde{\theta}_\alpha) - v^2} = \frac{d\tau}{-2},$$

tomando  $v_\alpha = \sqrt{2U(\tilde{\theta}_\alpha)}$ , obtenemos

$$\tanh^{-1}\left(\frac{v}{v_\alpha}\right) = -\frac{\tau v_\alpha}{2},$$

esto es

$$v(\tau) = -v_\alpha \tanh(\tau v_\alpha/2).$$

Usando la expresión obtenida para  $v(\tau)$ , obtenemos

$$r(\tau) = -\frac{U(\tilde{\theta}_\alpha)}{h \cosh^2(\tau v_\alpha/2)}.$$

Asimismo, es posible dar una descripción geométrica de las órbitas homotéticas. Usando las ecuaciones (1.18), y la relación de energía  $\frac{1}{2}(u^2 + v^2) = U(\theta) + rh$ , con  $u = 0$ , tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\tau} &= rv, \\ \frac{dv}{d\tau} &= rh.\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales, obtenemos que

$$v^2 = 2rh + m.$$

Como en el caso del problema rectangular, estas soluciones las podemos pensar como restricciones de la relación de energía al plano  $u = 0, \theta = \tilde{\theta}_\alpha$ ; esto es,

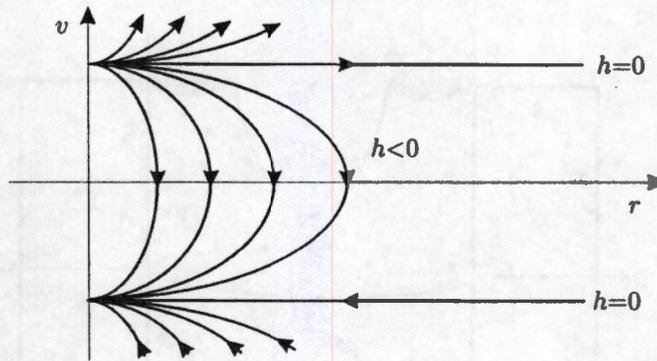


Figura 3.5: Órbitas homotéticas en el plano  $u = 0, \theta = \tilde{\theta}_\alpha$ .

$\frac{v^2}{2} = rh + U(\tilde{\theta}_\alpha)$ . Así, para cada valor negativo de  $h$ , tenemos una órbita que sale del punto de equilibrio  $d$  y termina en el punto de equilibrio  $c$ . Como lo mostramos en la Figura 3.4.

El siguiente resultado nos da una propiedad de las variedades  $\overline{W}^u(d)$  y  $\overline{W}^s(c)$ , respecto a la órbita homotética.

**Proposición 3.3.1.** *Para todos los valores del parámetro  $\alpha$ , las variedades inestable  $\overline{W}^u(d)$  y estable  $\overline{W}^s(c)$ , ambas bidimensionales, se intersectan transversalmente a lo largo de la órbita homotética.*

Recordemos que una órbita que tiene al punto  $c$  como  $\omega$ -límite es una órbita que de colisión total y análogamente, una órbita que tiene a  $d$  como  $\alpha$ -límite es una órbita de eyección

De esta forma, al igual que en el problema rectangular, todas las órbitas contenidas en  $\overline{W}^u(d)$  son órbitas de eyección total y aquellas contenidas en  $\overline{W}^s(c)$  son órbitas de colisión total. Las órbitas contenidas en  $\overline{W}^s(c) \cap \overline{W}^u(d)$  son órbitas de eyección-colisión. En particular la órbita homotética es una órbita heteroclínica de eyección colisión que no presenta ningún tipo de colisión.

### 3.4 Sección de Poincaré y resultados básicos

En esta sección construiremos una sección de Poincaré para el flujo con el fin de analizar la forma como una órbita puede pasar por una sucesión de colisiones binarias del par interior o sucesiones binarias simultáneas simétricas. Es importante no olvidar que para que este sea el caso es necesario que la coordenada  $w$  se anule.

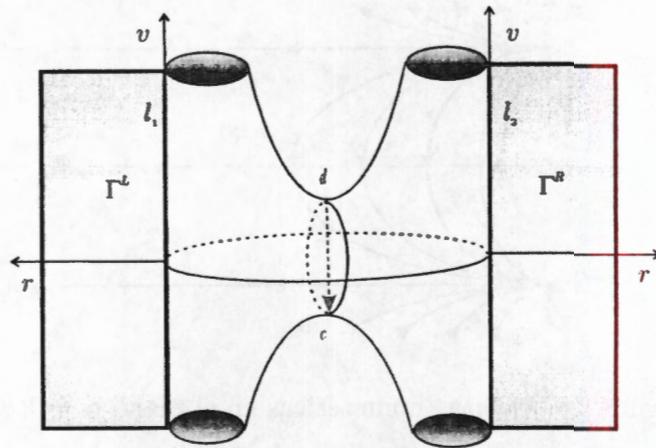


Figura 3.6: Sección de colisiones binarias y colisiones binarias simultáneas simétricas

Definimos el conjunto

$$\Gamma = \{(r, v, \theta, w) \mid r \geq 0, \theta = \theta_\alpha, \pi/2, w = 0\},$$

el cual es la unión de los semiplanos,

$$\Gamma^L = \{(r, v, \theta, w) \mid r \geq 0, \theta = \theta_\alpha, w = 0\},$$

y

$$\Gamma^R = \{(r, v, \theta, w) \mid r \geq 0, \theta = \pi/2, w = 0\},$$

los cuales están parametrizados por las coordenadas  $(r, v) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$ . Véase la Figura 3.3.

Es de observar que las rectas  $l_1$  y  $l_2$  en la Figura 3.6 corresponden a las rectas  $r = 0$ , que se encuentran contenidas en los semiplanos  $\Gamma^L$  y  $\Gamma^R$ , respectivamente.

A continuación obtendremos la primera intersección en tiempo positivo de  $\overline{W}^u(d)$  con  $\Gamma$ , siguiendo ideas contenidas en [3] y [20] y que ya hemos usado en el capítulo anterior para el problema rectangular.

Las demostraciones de los resultados de esta sección son omitidas, pues son idénticas a las dadas para los resultados correspondientes demostrados en el capítulo anterior, pues están basadas únicamente en la naturaleza topológica de la variedad de colisión total, la bidimensionalidad de las variedades  $W^u(d)$  y  $W^s(c)$ , la existencia de la órbita homotética y la transversalidad de  $W^u(d)$  y  $W^s(c)$  a lo largo de la órbita homotética. Aún cuando las siguientes tres

proposiciones son descritas y demostradas en el capítulo anterior, para que este sea autocontenido las transcribimos a continuación. Por otra parte el Corolario 3.4.4 es análogo al Corolario 2.4.4 y su demostración, salvo ciertos cambios pequeños es esencialmente la misma que la de éste.

**Proposición 3.4.1.** *La primera intersección, en tiempo positivo de  $\overline{W}^u(d)$  con  $\Gamma$  contiene dos arcos  $\sigma^{R,L}$ , contenidos en  $\Gamma^{R,L}$ , con extremos en las fronteras de  $\Gamma^{R,L}$  (rectas  $l_1$  y  $l_2$  respectivamente).*

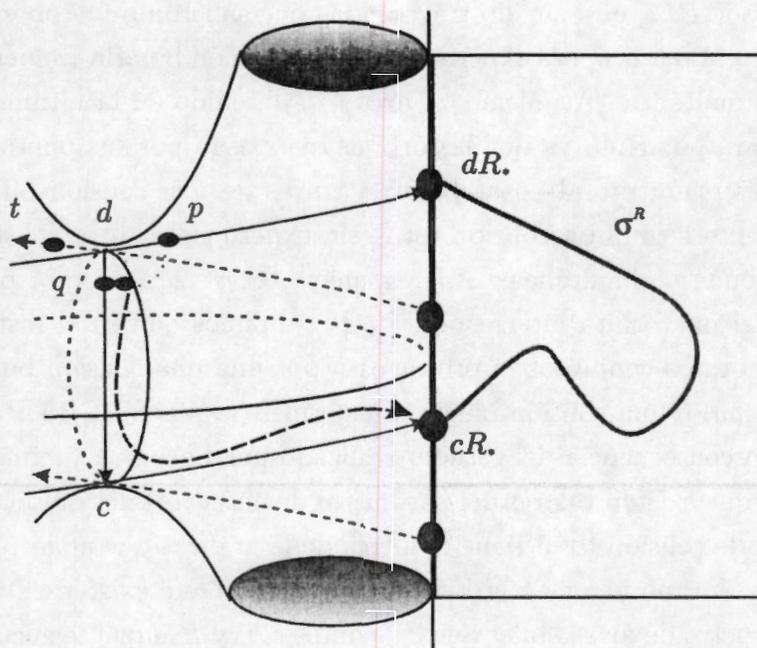


Figura 3.7: Primera intersección en tiempo positivo de  $\overline{W}^u(d)$  con  $\Gamma^R$ .

Recordemos que en capítulo anterior comentamos que es posible que la curva  $\sigma^R$  presente autointersecciones sobre  $\Gamma^R$ , y en tal caso podemos obtener un subarco  $\tilde{\sigma}^R$  de  $\sigma^R$  con extremos en  $dR_*$  y  $cR_*$  tal que no se autointersece. En consecuencia, es posible suponer sin perder generalidad que el arco  $\sigma^R$  no presenta autointersecciones.

Sean  $R_*d$  y  $L_*d$  aquellos puntos en la rama estable de  $W^s(d)$ , que están contenidos en  $\Gamma^R$  y  $\Gamma^L$  que bajo el flujo van a  $d$ , pero tal que ningún otro punto en su órbita positiva está contenido en  $\Gamma^R$  o  $\Gamma^L$ . De la misma forma definimos los puntos  $R_*c \in \Gamma^R$  y  $L_*c \in \Gamma^L$  como aquellos puntos en  $W^s(c)$ , tales que sus órbitas positivas no intersecan  $\Gamma^R$  ni  $\Gamma^L$ .

**Proposición 3.4.2.** *La última intersección, en tiempo positivo de  $\overline{W}^s(c)$  con  $\Gamma$  está dado por dos arcos  $\gamma^{R,L}$ , contenidos en  $\Gamma^{R,L}$ , cuyos extremos (de los arcos) están dados por  $R_*d$ ,  $R_*c$  y  $L_*d$ ,  $L_*c$  están contenidos en las fronteras de  $\Gamma^{R,L}$  (rectas  $l_1$  y  $l_2$ , respectivamente).*

Denotemos el arco  $\sigma^R$  por  $ER_*$ , notación que significa que todos los puntos en este arco salieron de colisión total para después intersectar  $\Gamma^R$ . Sus trayectorias son expulsadas de colisión total para alcanzar una colisión binaria derecha, i.e. del par interior de partículas. De manera semejante, denotemos el arco  $\sigma^L$  por  $EL_*$ , obteniendo trayectorias que salieron o fueron expulsadas de colisión total para después experimentar una colisión binaria izquierda o colisión binaria simultánea. Asimismo, el arco  $\gamma^R$ , obtenido en la última Proposición se denotará por  $R_*C$ , ya que las órbitas que pasan por sus puntos intersectan  $\Gamma^R$  transversalmente al pasar a través de una colisión binaria derecha y finalmente llegarán a colisión total, sin experimentar otra colisión binaria o colisión binaria simultánea. Análogamente, el  $\gamma^L$  se denotará por  $L_*C$ . En general, si una órbita intersecta  $\Gamma^R$  o  $\Gamma^L$ , diremos que en el instante cuando intersecta estos conjuntos la órbita pasa por una colisión binaria derecha (CB-drecha) o una colisión binaria simultánea izquierda (CBS-izquierda).

Como consecuencia del estudio realizado por Lacomba y Simó [28], donde prueban que existen valores del parámetro de masas  $\alpha$  tales que el flujo sobre la variedad de colisión total tiene la forma de las gráficas que aparecen en primer, quinto y séptimo lugar en la Figura 3.2, se tiene que existen entonces valores del parámetro de masas tales que los puntos  $c_*R$  y  $R_*d$  que se encuentran sobre la recta  $r = 0$  del semiplano  $(r, v)$  satisfacen la desigualdad  $c_*R < R_*d$ , usando el orden natural de la variable  $v$  sobre tal recta.

Más aún, analíticamente al estudiar el comportamiento de las ramas de  $W^u(c)$  en el caso límite  $\alpha \rightarrow 0$  muestran que existe un conjunto abierto de valores del parámetro  $\alpha$  tal que el comportamiento de las ramas de  $W^u(c)$  presentan un comportamiento semejante al mostrado por la primera gráfica de la Figura 3.2, así, usando la simetría debida a la reversibilidad del problema obtenemos la dinámica de la variedad invariante  $W^s(d)$ , por lo que el flujo sobre la variedad de colisión total para valores cercanos a cero está dada por la primera imagen de la Figura 3.1 y como se comentó en el párrafo anterior, en consecuencia tenemos que  $c_*R < R_*d$ .

De este modo, puede mostrarse que la pareja  $\sigma^{R^i}, \gamma^{R^i} \subset \Gamma^R$  se intersecta, en al menos un punto, como se muestra en la Figura 3.7, punto que se encuentra

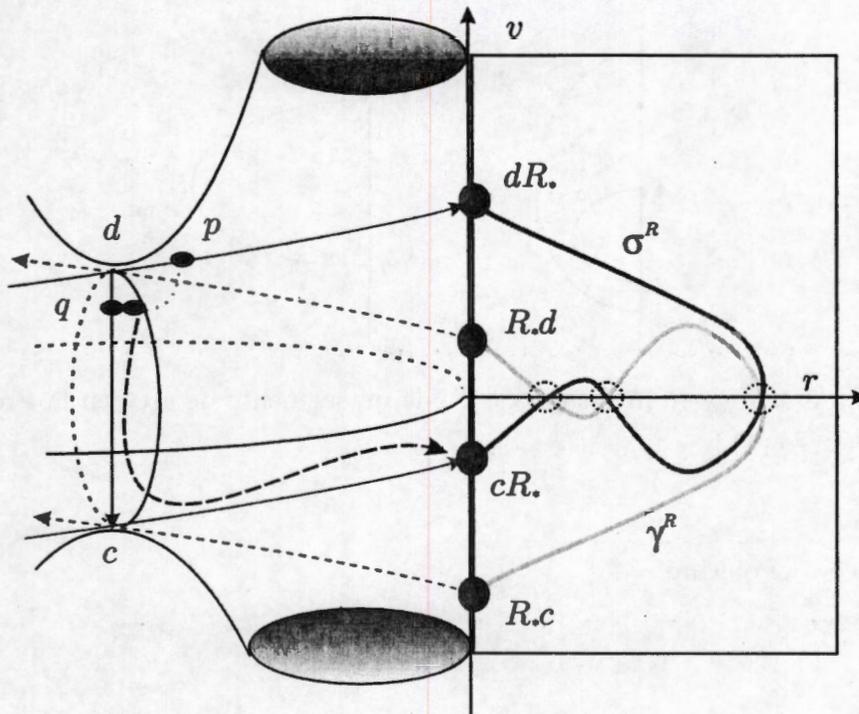


Figura 3.8: A los puntos de intersección de  $\sigma^R$  y  $\gamma^R$  les corresponden órbitas de colisión-eyección.

contenido en  $\overline{W}^u(d) \cap \overline{W}^s(c)$ . Esta intersección es no vacía debido a que las curvas  $\sigma^R$  y  $\gamma^R$  son curvas continuas con extremos en  $dR_*$  y  $cR_*$  la primera y con extremos  $R_*d$  y  $R_*c$  la segunda, y como  $c_*R < R_*d$ , entonces tales curvas deben de intersectarse al menos una vez, como se muestra la misma Figura 3.7. A tales puntos de intersección les corresponden órbitas de eyección-colisión que presentan una colisión binaria *derecha* (CB-*derecha*). Un argumento análogo muestra que a los puntos contenidos en la intersección  $\sigma^L \cap \gamma^L$  les corresponden órbitas que presentan una colisión binaria simultánea *izquierda* (CBS-*izquierda*).

A cada una de estas órbitas de eyección-colisión que presentan una CB-*derecha* (CBS-*izquierda*) les asociamos una sucesión de símbolos de la forma *ERC* (*ELC*), lo cual significa que estamos describiendo una órbita que sale de colisión total, experimenta una CB *derecha* (CBS *izquierda*) y se dirigen a colisión total sin presentar una nueva colisión binaria o alguna colisión binaria simultánea.

A continuación caracterizamos las imágenes inversas de  $\overline{W}^s(c) \cap \Gamma$  bajo el

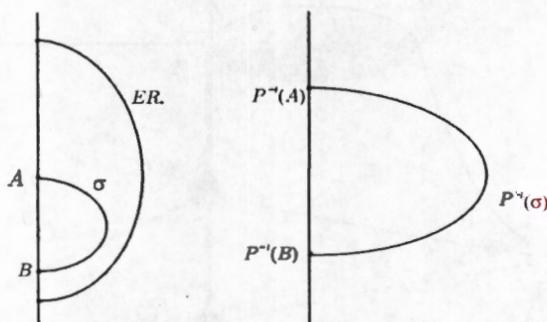


Figura 3.9: Imagen inversa, bajo  $P$ , de un segmento de arco en la Proposición 3.4.3, caso (1).

mapeo de Poincaré

$$P : \Gamma \longrightarrow \Gamma,$$

el cual definimos en el capítulo anterior.

Los siguientes resultados serán muy importantes para caracterizar las órbitas que presentan colisiones binarias del par interior o colisiones binarias simultáneas simétricas respecto al centro de masa.

**Proposición 3.4.3.** (1) Si  $\sigma$  es un subsegmento contenido en  $\bar{W}^s(c) \cap \Gamma$ , con extremos en los puntos  $A$  y  $B$  contenidos en  $\{r = 0\}$ , de tal manera que no interseca  $\bar{W}^u(d)$ , entonces  $P^{-1}(\sigma)$  es un arco contenido en  $\Gamma$  cuyos extremos están dados por los puntos  $P^{-1}(A)$  y  $P^{-1}(B)$ , pertenecientes a  $M$ .

(2) Si  $\sigma$  es un segmento en  $\bar{W}^s(c) \cap \Gamma$ , con extremos en los puntos  $A$  y  $B$ , contenidos en  $\{r = 0\}$  de tal manera que interseca  $\bar{W}^u(d)$ , entonces la imagen inversa del segmento  $\tilde{\sigma}$  contenido en  $\sigma$  que está entre  $A$  y la primera intersección de  $\sigma$  con  $\bar{W}^u(d)$  es un segmento que está contenido en  $\Gamma$ , el cual tiene extremos en  $P^{-1}(A)$  y  $R_*d$  o  $L_*d$ , dependiendo del semiplano de  $\Gamma$  donde se encuentra el punto  $P^{-1}(A)$ .

(3) Si  $\gamma$  es un arco en  $\bar{W}^s(c) \cap \Gamma$  el cual contiene un subarco  $\tilde{\gamma}$ , con extremos en  $\bar{W}^u(d)$  y tal que ningún otro punto de este subarco se encuentra en  $\bar{W}^u(d)$ , entonces la imagen inversa de  $\tilde{\gamma}$  es un lazo en  $\Gamma$  con ambos extremos en (i)  $L_*d$  si el segmento  $\tilde{\gamma}$  va a  $\Gamma^R$ , o (ii)  $R_*d$  si el segmento  $\tilde{\gamma}$  va a  $\Gamma^L$ .

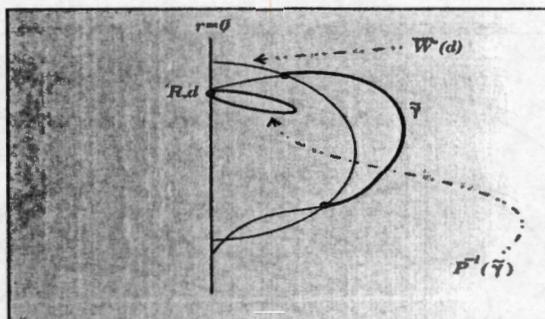


Figura 3.10: Imagen inversa, bajo el mapeo de Poincaré  $P$ , de un segmento de arco en la Proposición 3.4.3, caso (3).

**Corolario 3.4.4.** Sea  $\zeta$  un arco contenido en  $\overline{W^s}(c) \cap \Gamma^R$  con un extremo en el punto  $R_*d$  y el otro extremo contenido en el arco  $ER_*$ , de tal forma que ningún otro punto de  $\zeta$  está contenido en  $ER_*$ . Entonces

(1) Para  $0 < \alpha < \alpha_1$ ,  $P^{-2}(\zeta)$  es un arco en  $\Gamma^R$  cuyos extremos están dado por  $P^{-1}(L_*d)$  y  $P^{-2}(R_*d)$ , el arco  $P^{-2}(\zeta)$  intersecta  $ER_*$ , pero  $P^{-1}(\zeta)$  no intersecta  $EL_*$ .

(2) Para  $\alpha_2 < \alpha < \alpha_3$ ,  $P^{-3}(\zeta)$  es un arco contenido en  $\Gamma^L$  con extremos  $P^{-2}(L_*d)$  y  $P^{-3}(R_*d)$ , el cual intersecta  $EL_*$ , pero ni  $P^{-1}(\zeta)$  ni  $P^{-2}(\zeta)$  intersectan  $EL_*$  o  $ER_*$ , respectivamente.

(3) Para  $\alpha_3 < \alpha$ ,  $P^{-4}(\zeta)$  es un arco contenido en  $\Gamma^R$  con extremos en los puntos  $P^{-3}(L_*d)$  y  $P^{-4}(R_*d)$ , el cual intersecta  $ER_*$ , pero  $P^{-j}(\zeta)$ ,  $j = 1, 2, 3$  no intersectan  $ER_*$  ni  $EL_*$ .

Resultados análogos se cumplen para un arco  $\zeta$  contenido en  $\Gamma^L$ , el cual tiene un extremo en  $L_*d$  y el otro extremo es un punto contenido en  $EL_*$ , de tal manera que ningún otro punto del arco está contenido en  $EL_*$ .

### 3.5 Órbitas de eyección-colisión con colisiones intermedias

Con la finalidad de describir una órbita de eyección-colisión que presenta una sucesión finita de colisiones binarias del par interior o de colisiones binarias simultáneas usamos una sucesión de símbolos de la forma ERLRC, la cual se lee como perteneciente a una trayectoria que sale de colisión total, presenta

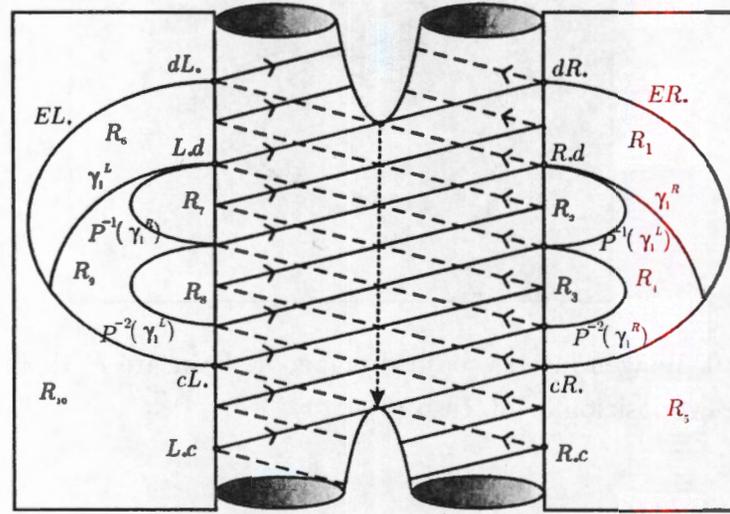


Figura 3.11: Imagen inversa, bajo  $P$ , de un segmento de arco para el Corolario 3.4.4, caso (2).

una CB-derecha, una CBS-izquierda, después otra CB-derecha y finalmente se dirige a colisión total.

Para obtener una descripción de las órbitas a las cuales les asociamos una sucesión de símbolos como la presentada en el párrafo anterior, definimos un tipo especial de segmentos contenidos en  $\overline{W^s(c)} \cap \Gamma$ , segmentos a los que llamaremos *segmentos prototipo*.

Recordemos que los arcos  $ER_*$  y  $EL_*$  dividen los semiplanos  $\Gamma^R$  y  $\Gamma^L$  respectivamente, en dos regiones, una de las cuales es una región acotada, mientras que la otra región no lo es. Denotemos por  $\Gamma_1^R$  y  $\Gamma_1^L$  a la componente acotada de  $\Gamma^R$  y  $\Gamma^L$  determinadas por  $ER_*$  y  $EL_*$ , respectivamente; y sean  $\Gamma_2^R$  y  $\Gamma_2^L$  las componentes no acotadas.

**Definición 7.** — Decimos que un punto de la forma  $P^{-j}(R_*d)$ ,  $P^{-j}(L_*d)$ ,  $P^{-j}(R_*c)$ , o  $P^{-j}(L_*c)$  con  $j \geq 0$  es un punto exterior si pertenece al complemento de la cerradura de  $\Gamma_1^R \cup \Gamma_1^L$ .

Sean

$$J = \max\{n \geq 1 \mid P^{-n}(R_*d) \in \overline{\Gamma_1^R \cup \Gamma_1^L}\}$$

y

$$K = \max\{n \geq 1 \mid P^{-n}(L_*d) \in \overline{\Gamma_1^R \cup \Gamma_1^L}\}$$

Observemos que  $J = K$ ; esto es consecuencia de la simetría del flujo sobre la variedad de colisión total.

Las definiciones siguientes, de segmentos prototipo son generalizaciones a las dadas para el problema rectangular en el Capítulo 2. Pero a diferencia del problema rectangular, donde  $J = K = 1$ , en el problema colineal simétrico de cuatro cuerpos, los valores de  $J$  y  $K$ , aunque son iguales, dependen del valor del parámetro de masas  $\alpha$ .

**Definición 8.** 1. Un segmento contenido en  $\overline{W}^s(c) \cap \Gamma^R$  con extremos en  $R_*d$  y  $ER_*$  de tal manera que ningún otro punto del segmento se encuentra en  $ER_*$ , se dice que pertenece a la clase de segmentos **prototipo-1**.

2. Un segmento contenido en  $\overline{W}^s(c) \cap \Gamma^R$ , de tal manera que uno de sus extremos es un punto exterior y el otro extremo se encuentra en  $ER_*$  de tal manera que ningún punto intermedio del segmento está contenido en  $ER_*$  se dice que pertenece a la clase de segmentos **prototipo-2**.

3. Un segmento contenido en  $\overline{W}^s(c) \cap \Gamma^R$  se dice que pertenece a la clase de segmentos **prototipo-3** si uno de sus extremos está contenido en  $ER_*$  y el otro extremo está dado por  $P^{-J}(R_*d)$  o  $P^{-J}(L_*d)$ , dependiendo de cual de ellos está contenido en la componente acotada de  $\Gamma^R$  determinada por  $ER_*$ .

4. Un segmento contenido en  $\overline{W}^s(c) \cap \Gamma^L$  se dice que pertenece a la clase de segmentos **prototipo-4** si uno de sus extremos se encuentra en el punto  $L_*d$  y el otro extremo se encuentra sobre  $EL_*$ , de tal manera que ningún otro punto del segmento está contenido en  $EL_*$ .

5. Un segmento contenido en  $\overline{W}^s(c) \cap \Gamma^L$  tal que uno de sus extremos es un punto exterior y el otro extremo se encuentra sobre  $EL_*$  de tal manera que ningún otro punto del segmento esté contenido en  $EL_*$ , se dice que pertenece a la clase de segmentos **prototipo-5**.

6. Un segmento contenido en  $\overline{W}^s(c) \cap \Gamma^L$  se dice que pertenece a la clase de segmentos **prototipo-6** si uno de sus extremos está contenido en  $EL_*$  y el otro está dado por  $P^{-J}(R_*d)$  o  $P^{-J}(L_*d)$ , dependiendo de cual de ellos está contenido en la componente acotada de  $\Gamma^L$  determinada por  $EL_*$ .

**Nota** Un segmento perteneciente a la clase de segmentos prototipo- $i$  se dice que pertenece a  $Prot(i)$  y será denotado por  $Prot(i)$ . Los segmentos  $Prot(2)$

y  $Prot(5)$  están contenidos en las componentes no acotadas, mientras que los otros segmentos están contenidos en las componentes acotadas de  $\Gamma$ .

Usando la Proposición 3.4.3 y su Corolario 3.4.4 se muestra la existencia de un número infinito de segmentos contenidos en  $\overline{W}^s(c) \cap \Gamma^{R,L}$  y que pertenecen a alguna de las seis clases de segmentos prototipo- $i$  definidos. Observemos que los segmentos pertenecientes a las tres primeras clases de segmentos prototipo son subconjuntos de  $\Gamma^R$ , mientras que los otros tres tipos de segmentos prototipo son subconjuntos de  $\Gamma^L$ . Esto refleja las simetrías geométricas del problema colineal simétrico de cuatro cuerpos, la simetría del flujo sobre la variedad de colisión total y la simetría debida a la reversibilidad del hamiltoniano del problema.

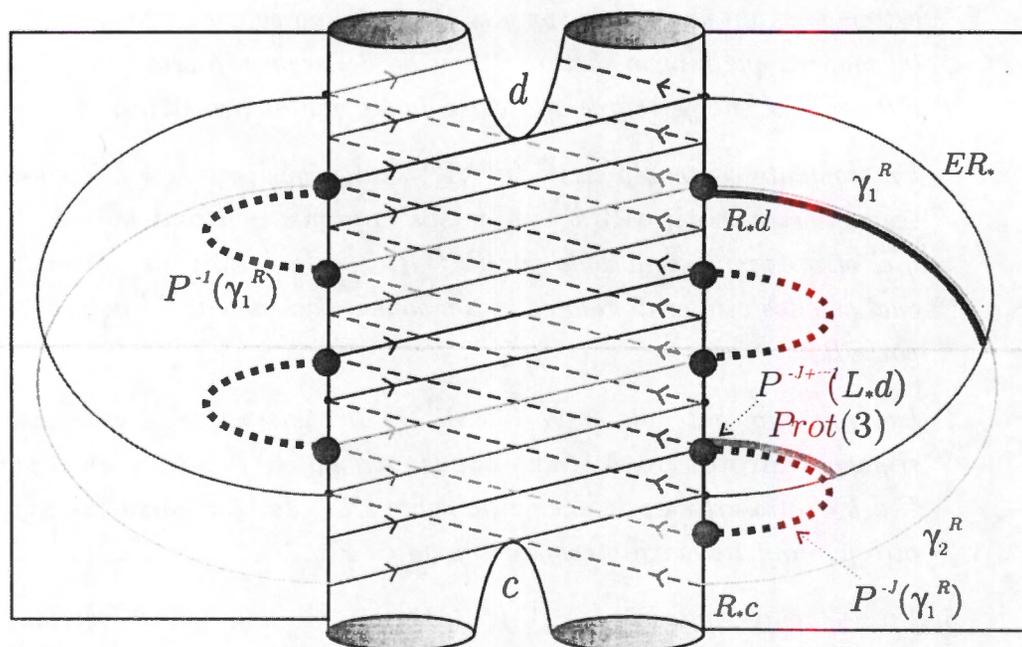


Figura 3.12: Ejemplos de segmentos prototipo 1, 2 y 3 para el problema colineal con  $\alpha \in (\alpha_2, \alpha_3)$ .

A continuación mostramos ejemplos de segmentos contenidos en  $\overline{W}^s(c)$  y pertenecientes a cada una de las clases de segmentos prototipo definidos anteriormente.

**Ejemplos.** Para los ejemplos de segmentos prototipo  $Prot(i)$ ,  $i = 1, 2$  es necesario referirse a la Figura 3.11. El segmento  $\gamma_1^R$  contenido en  $\gamma^R$ , y que tiene un extremo en el punto  $R_*d$  y el otro extremo está contenido  $ER_*$ , de tal manera

que ningún otro punto del arco está contenido en  $ER_*$ , nos provee de un ejemplo de segmento prototipo-1. Para obtener un ejemplo de segmento prototipo-2 consideremos el segmento  $\gamma_2^R$  contenido en  $\gamma^R$ , con un extremo en el punto  $R_*c$ , mientras que el segundo extremo está contenido en  $ER_*$  y ningún otro punto de  $\gamma_2^R$  está contenido en  $ER_*$ . Un ejemplo de un segmento prototipo-3 se puede construir de la siguiente manera: consideremos  $P^{-(J+1)}(\gamma_1^R)$ ; del Corolario 3.4.4 sabemos que este arco intersecta  $ER_*$ , el segmento que estamos buscando está definido por el subsegmento de  $P^{-(J+1)}(\gamma_1^R)$  que tiene un extremo en  $P^{-J}(R_*d)$  o  $P^{-J}(L_*d)$ , dependiendo de cual de éstos puntos está contenido en la componente acotada determinada por  $ER_*$ , mientras que el otro extremo del segmento es la primera intersección de  $P^{-(J+1)}(\gamma_1^R)$  con  $ER_*$  y de tal forma que ningún otro punto del segmento considerado está contenido en  $ER_*$ .

Para una representación gráfica en el caso que el parámetro  $\alpha$  satisfaga la relación, véase la Figura 3.11 y reemplace el segmento  $\zeta$  por el segmento  $\gamma_1^R$  que hemos ya definido. Los ejemplos para segmentos prototipo  $Prot(i), i = 4, 5, 6$  se definen de manera simétrica a como se definieron para los casos  $i = 1, 2, 3$ . El segmento  $\gamma_1^L$  contenido en  $\gamma^L$ , con un extremo en el punto  $L_*d$  y el segundo extremo contenido en  $EL_*$  de tal forma que ningún otro punto de  $\gamma_1^L$  está contenido en  $EL_*$  es un ejemplo de un segmento perteneciente a la clase de segmentos prototipo-4. El segmento  $\gamma_2^L$  contenido en  $\gamma^L$  con un extremo en el punto  $L_*c$  y el otro extremo siendo la primera intersección de  $\gamma^L$  con  $EL_*$ , considerada desde el punto  $L_*c$  pertenece a la clase de segmentos prototipo-5. Con el fin de obtener un ejemplo de un segmento prototipo 6 consideremos  $P^{-(J+1)}(\gamma_1^L)$ ; del Corolario 5 sabemos que este arco intersecta  $EL_*$ . El ejemplo buscado está definido por el subsegmento de  $P^{-(J+1)}(\gamma_1^L)$  que tiene un extremo en el punto  $P^{-J}(R_*d)$  o en el punto  $P^{-J}(L_*d)$ , dependiendo de cual de ellos está contenido en la componente acotada determinada por  $EL_*$ , mientras que su segundo extremo está dado por la primera intersección de  $P^{-(J+1)}(\gamma_1^L)$  con  $EL_*$ , de tal manera que ningún otro punto del segmento en cuestión esté contenido en  $EL_*$ .

**Teorema 3.5.1.** *Las imágenes inversas de las clases de segmentos prototipo contenidos en  $\overline{W^s}(c) \cap \Gamma$  definidos por el mapeo de Poincaré se generan de acuerdo a las Tablas 3.2 y 3.3, donde se muestra cómo se generan al considerar sus imágenes inversas al iterarse bajo  $P^{-1}$  el mapeo inverso de Poincaré, hasta obtener intersección no vacía con  $\overline{W^u}(d)$ . Los valores dados en las tablas dependen fuertemente de la dinámica del flujo para los distintos valores del*

Segmentos Generadores	segmentos generados					
	Prot(1)	Prot(2)	Prot(3)	Prot(4)	Prot(5)	Prot(6)
Prot(1)	0	1	1	0	0	0
Prot(2)	1	1	0	0	0	0
Prot(3)	0	0	0	1	1	0
Prot(4)	0	0	0	0	1	1
Prot(5)	0	0	0	1	1	0
Prot(6)	1	1	0	0	0	0

Tabla 3.2: Generación de segmentos prototipo para los segmentos  $\alpha \in (0, \alpha_1) \cup (\alpha_3, \alpha_4)$

Segmentos generadores	segmentos generados					
	Prot(1)	Prot(2)	Prot(3)	Prot(4)	Prot(5)	Prot(6)
Prot(1)	0	0	0	0	1	1
Prot(2)	1	1	0	0	0	0
Prot(3)	0	0	0	0	1	1
Prot(4)	0	1	1	0	0	0
Prot(5)	0	0	0	1	1	0
Prot(6)	1	1	0	0	0	0

Tabla 3.3: Generación de segmentos prototipo para  $\alpha \in (\alpha_2, \alpha_3)$

parámetro.

Para valores del parámetro  $\alpha_4 > \alpha > \alpha_3$ , se obtiene la misma tabla que para  $\alpha_1 > \alpha > 0$ , pero la diferencia que tienen es que necesitamos  $P^{-1}$  o  $P^{-4}$  para obtener una intersección no vacía con  $\overline{W}^u(d)$ , en el primer caso, mientras que en el segundo necesitamos  $P^{-1}$  or  $P^{-2}$ .

Observemos que los segmentos prototipo  $i$  generan dos segmentos, los cuales pertenecen a distintas clases de segmentos prototipo. En la tabla, le asociamos 1 o 0 al renglón  $Prot(i)$ , en la columna  $Prot(k)$ , dependiendo de si genera o no, bajo  $P^{-1}$ , un segmento en la clase  $Prot(k)$ .

*Demostración.* Probaremos solo algunos casos, ya que los otros casos se de-

muestran de manera análoga.

(i).- Caso  $\alpha_2 < \alpha < \alpha_3$ : Sea  $Prot(1)$  un arco en la clase de segmentos prototipo-1, contenido en  $\Gamma^R \cap \overline{W^s}(c)$ , donde uno de sus extremos es el punto  $R_*d$  y el otro extremo se encuentra en  $ER_*$  de tal manera que ningún otro punto del segmento se encuentra en  $ER_*$ . Observemos que  $P^{-j}(Prot(1))$ ,  $j = 1, 2$  no intersecta  $ER_* \cup EL_*$ , pero  $P^{-3}(Prot(1))$  intersecta  $EL_*$ ; por el Corolario 3.4.4, es un arco con extremos en  $P^{-2}(L_*d)$  y  $P^{-3}(R_*d)$ . En consecuencia,  $P^{-3}(Prot(1))$  intersecta  $EL_*$  en un punto y por lo tanto genera un segmento prototipo-5 y un segmento prototipo-6.

(ii) El argumento que se da para segmentos prototipo-2 es válido para cualquier valor del parámetro. Supongamos que  $Prot(2)$ , es un arco contenido en  $\Gamma^R \cap \overline{W^s}(c)$  con un extremo dado por un punto exterior, digamos  $A$  y el otro extremo contenido en  $ER_*$  de tal manera que ningún otro punto del segmento está contenido en  $ER_*$ ; por el Corolario 3.4.4,  $P^{-1}(Prot(2))$  es un arco contenido en  $\Gamma^R$ , el cual une  $P^{-1}(A)$  con  $R_*d$ , por lo que debe intersectar el arco  $ER_*$ . De esta manera hemos generado un segmento prototipo-2 y un segmento prototipo-1, puesto que supusimos que la intersección  $P^{-1}(Prot(2)) \cap ER_*$  contiene solamente un punto.

(iii) Caso  $\alpha_2 < \alpha < \alpha_3$ : Sea  $Prot(3)$  un segmento prototipo-3 que une  $P^{-2}(R_*d)$  con un punto en  $ER_*$ , de tal forma que ningún otro punto del segmento está contenido en  $ER_*$ . De acuerdo con el Corolario 3.4.4,  $P^{-1}(Prot(3))$  es un arco continuo que une  $P^{-1}(P^{-2}(R_*d)) = P^{-3}(R_*d)$ , el cual es un punto exterior que se encuentra en  $\Gamma^L$ , con  $L_*d$ . De esta manera,  $P^{-1}(Prot(3))$  debe intersectar  $EL_*$  en un punto, por lo que hemos generado un segmento prototipo-5 y un segmento prototipo-4.  $\square$

Es de observarse que la Tabla 3.2 es igual a la Tabla 2.2 del capítulo anterior, esto se debe al hecho de que la dinámica del flujo sobre la variedad de colisión total para el problema colineal cuando  $\alpha \in (0, \alpha_1)$  es topológicamente la misma que la dinámica del flujo sobre la variedad de colisión total asociada al problema rectangular, como se puede apreciar en las Figuras 2.1 y 3.1(a). En consecuencia, como veremos más adelante, tendremos la existencia de familias de órbitas de eyección-colisión que presentan las mismas sucesiones de la forma  $EQ_1 \dots Q_m C$  ( $Q_i \in \{R, L\}$ ) tanto para el problema rectangular como para el problema colineal simétrico con  $\alpha \in (0, \alpha_1)$ , pero las interpretaciones cuando aparece ya sea una  $R$  o una  $L$  en la sucesión serán distintas para los dos

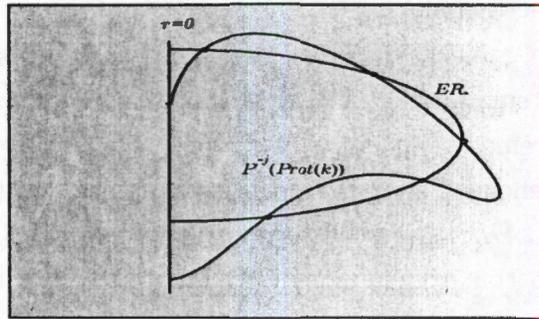


Figura 3.13: Puntos con la misma sucesión de colisiones binarias.

problemas. Asimismo es de mencionar que aún cuando las Tablas 3.2 y 2.2 son iguales para el problema colineal simétrico para  $\alpha \in (0, \alpha_1)$  y para  $\alpha \in (\alpha_3, \alpha_4)$ , las familias de órbitas de eyección-colisión que presentan una cantidad finita de colisiones no totales serán distintas, como veremos más adelante.

Por otra parte, para cualquier valor del parámetro, los segmentos en las clases de prototipos 2, 3,5 y 6 solo necesitan de una aplicación bajo  $P^{-1}$  para intersectar  $ER_*$  o  $EL_*$ , mientras que para segmentos en las clases de prototipos 1 y 4, la cantidad de iteraciones necesarias para obtener una intersección no vacía con  $ER_*$  o  $EL_*$  depende del valor del parámetro. Si  $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$  entonces los segmentos prototipo-1,4 necesitan dos aplicaciones de  $P^{-1}$ . Si  $\alpha_2 < \alpha < \alpha_3$  estos segmentos necesitan tres aplicaciones de  $P^{-1}$ , mientras que en el caso que  $\alpha_3 < \alpha$ , necesitan de cuatro aplicaciones de  $P^{-1}$ .

Es posible que la cardinalidad del número de puntos en las intersecciones  $P^{-j}(Prot(k)) \cap ER_*$  o  $P^{-j}(Prot(k)) \cap EL_*$  sea mayor que uno. En caso de que esto suceda, las órbitas correspondientes a cada uno de estos puntos tienen asociadas la misma sucesión de símbolos de  $R$  y  $L$  entre eyección y colisión, como veremos a continuación. Supongamos que  $m$  puntos distintos se encuentran en la intersección, por lo que se tienen generados  $m - 1$  segmentos distintos en  $P^{-j}(Prot(k))$  y los extremos de estos segmentos son puntos contenidos en  $ER_*$  o  $EL_*$ ; de esta manera, la imagen inversa de cada uno de estos segmentos se transforman en lazos con extremos en  $R_*d$  o  $L_*d$ , y la imagen inversa de cada uno de estos lazos no generan nuevas intersecciones con  $ER_*$  ni con  $EL_*$ . Es decir, podemos suponer que las imágenes inversas de  $P^{-j}(Prot(k))$  intersectan  $ER_*$  o  $EL_*$  solamente en un punto, ya que no se generan nuevas sucesiones de símbolos. Véase la Figura 3.13.

**Definición 9.** Un punto  $p \in \overline{W}^s(c) \cap \overline{W}^u(d) \cap \Gamma$  se llama un primer punto de eyección-colisión si la órbita que pasa por este punto viene directamente de eyección total sin experimentar una colisión binaria del par interior o una colisión binaria simultánea antes de llegar a  $\overline{W}^s(c) \cap \overline{W}^u(d) \cap \Gamma$ . Del mismo modo, un punto  $p \in \overline{W}^s(c) \cap \overline{W}^u(d) \cap \Gamma$  se dirá que es un punto último de eyección-colisión si la órbita que pasa por este punto se dirige directamente a colisión total sin experimentar nuevas colisiones binarias o colisiones binarias simultáneas simétricas.

A continuación se mostrará como usar las Tablas 3.2 y 3.3 dadas en el Teorema 3.5.1 para generar una familia de órbitas de eyección-colisión que presentan una sucesión finita de colisiones binarias y/o colisiones binarias simultáneas simétricas. Con tal fin, empezaremos por analizar las imágenes inversas de los segmentos prototipo contenidos en  $\gamma^R$  y  $\gamma^L$  para finalmente dar una descripción de familias de órbitas de eyección-colisión que presentan dinámicas diferentes.

El siguiente resultado muestra la existencia de una familia de órbitas de eyección-colisión que presentan  $n$ -colisiones binarias consecutivas del par interior de partículas o  $n$ -colisiones binarias simultáneas simétricas consecutivas, en ambos casos para  $n \geq 1$ . Es claro que estas trayectorias son diferentes de la órbita homotética ya que esta no presenta algún tipo de colisión.

**Proposición 3.5.2.** Para cualquier valor del parámetro  $\alpha$  y cualquier  $n \geq 1$ , existe una trayectoria del tipo  $ER^nC$ , y una del tipo  $EL^nC$ .

*Demostración.* Probaremos la existencia de la familia de órbitas con sucesión de símbolos asociada dada por  $ER^nC$ , para el otro caso la existencia se prueba de manera semejante.

Sabemos que los puntos contenidos en  $\gamma^R \cap \sigma^R$  son puntos primeros y últimos de eyección colisión, por lo que sus órbitas tienen sucesiones de símbolos del tipo  $ERC$ . Al considerar el subsegmento  $\gamma_2^R$  de  $\gamma^R$ , su imagen inversa  $P^{-1}(\gamma_2^R)$  interseca  $ER_*$ , por lo que genera dos segmentos, un segmento prototipo-1 y un segmento prototipo-2; la órbita que pasa por el punto de intersección de  $P^{-1}(\gamma_2^R)$  con  $ER_*$  (recordemos nuestra hipótesis acerca de la unicidad del punto de intersección) tiene una sucesión asociada de símbolos dada por  $ERRC$ . De acuerdo al Teorema 3.5.1, el nuevo segmento prototipo-2, bajo  $P^{-1}$  interseca  $ER_*$  y genera otros dos segmentos prototipos, un segmento prototipo-1 y un segmento prototipo-2; al punto común de estos dos segmentos prototipo resultantes le corresponde una órbita con sucesión asociada de la forma  $ERRRC$ .

Iterando este proceso con los segmentos prototipo-2 obtenidos en cada paso, es posible construir la familia deseada de órbitas.  $\square$

**Proposición 3.5.3.** *Para  $0 < \alpha < \alpha_1$ , existen órbitas de eyección-colisión del tipo ERLRC. Por simetría también existen órbitas de eyección-colisión del tipo ELRLC.*

*Demostración.* Consideremos el segmento  $\gamma_1^R$  contenido en  $\gamma^R$ . Por el Teorema 3.5.1, su imagen inversa  $P^{-1}(\gamma_1^R)$ , no intersecta ni  $ER_*$  ni  $EL_*$ , pero  $P^{-2}(\gamma_1^R)$  sí intersecta  $ER_*$ , por lo que se obtienen un segmento prototipo-2 y un segmento prototipo-3; el punto común es un primer punto de eyección-colisión. Al iterar este punto bajo el mapeo de Poincaré  $P$ , se tiene que la primera iteración de este punto es un punto en  $\Gamma^L$  y la segunda iteración es un punto en  $\Gamma^R$ , es cual es un punto último de eyección-colisión. De esta manera tenemos que los tres puntos pertenecen a una órbita con sucesión asociada dada por ERLRC.  $\square$

**Proposición 3.5.4.** 1. *Para  $\alpha_2 < \alpha < \alpha_3$ , existen trayectorias de eyección-colisión con sucesiones asociadas dadas por ELRLRC, y por simetría existen trayectorias con sucesión asociada dada por ERLRC.*

2. *Para  $\alpha_3 < \alpha$ , existen trayectorias de eyección-colisión con sucesión asociada dada por ERLRLRC, y por simetría también existen trayectorias con sucesión asociada ELRLRC.*

*Demostración.* (1).- Consideremos el segmento  $\gamma_1^R$ ; contenido en  $\gamma^R$ . De acuerdo a la Tabla 2, las imágenes inversas  $P^{-1}(\gamma_1^R)$  y  $P^{-2}(\gamma_1^R)$  no intersectan ni  $ER_*$  ni  $EL_*$ , pero  $P^{-3}(\gamma_1^R)$  sí intersecta  $EL_*$ , por lo que obtenemos un segmento prototipo-5 y un segmento prototipo-6 así como un primer punto de eyección-colisión  $p$ . Al iterar este primer punto de eyección colisión bajo  $P$  se obtiene un punto en  $\Gamma^R$ ; la segunda iteración es un punto en  $\Gamma^L$  y la tercera iteración resulta un punto último de eyección-colisión en  $\Gamma^R$ . De esta forma, al punto  $p$  le asociamos una sucesión de la forma ELRLRC. La existencia de la órbita a la cual le asociamos una sucesión de la forma ERLRLC se obtiene por simetría.

(2).- La demostración de esta parte es semejante a la demostración del inciso anterior.  $\square$

**Proposición 3.5.5.** *Sea  $0 < \alpha < \alpha_1$ . Dada una órbita de eyección-colisión con una sucesión de símbolos de la forma  $EQ_1 \dots Q_n C$ , existen trayectorias*

de eyección-colisión con sucesiones de símbolos asociadas ya sean de la forma  $EQ_1 \dots Q_n Q_{n+1}$  o de la forma  $EQ_1 \dots Q_n Q_{n+1} Q_{n+2}$ , que son órbitas de eyección-colisión que presentan una sucesión de colisiones binarias del par interior y/o colisiones binarias simultáneas simétricas.

*Demostración.* Como sabemos, los arcos  $\gamma^R$  y  $\sigma^R$  en  $\Gamma^R$ , contenidos en  $\overline{W^s}(c)$  y  $\overline{W^u}(d)$ , respectivamente, se intersectan, generando dos segmentos, un segmento prototipo-1 y un segmento prototipo-2:  $\gamma_1^R$  y  $\gamma_2^R$ , los cuales son subsegmentos de  $\gamma^R$  y su punto común, el cual es único por hipótesis, es un punto primero y último de eyección-colisión. Por el Teorema 3.5.1, al iterar estos dos segmentos prototipo bajo  $P^{-1}$ , se obtienen, de acuerdo a la Tabla 2, cuatro segmentos prototipo: un *Prot*(2) y un *Prot*(3) en el caso de  $\gamma_1^R$  y, un *Prot*(1) y un *Prot*(2) para  $\gamma_2^R$ ; así como dos puntos, uno de ellos es un punto primero de eyección-colisión y el otro es un punto último de eyección-colisión, éstos están dados por los puntos comunes de los pares de segmentos prototipo obtenidos. Asimismo se obtienen dos órbitas de eyección-colisión, una de las cuales presenta tres colisiones binarias y la otra dos colisiones binarias entre eyección y colisión total, respectivamente. Este proceso de iteración de los cuatro segmentos prototipos, bajo  $P^{-1}$  puede continuarse. Esto es posible debido al Teorema 3.5.1. Cada uno de los cuatro segmentos debe iterarse una o dos veces, bajo  $P^{-1}$ , con el fin de obtener una intersección no vacía con  $ER_*$  o  $EL_*$ .

De esta forma, se puede suponer que se tiene un órbita con sucesión de símbolos asociada dada por  $EQ_1 Q_2 \dots Q_n C$ , donde  $Q_i \in \{R, L\}$ ; más aún, el último símbolo  $Q_n$  que aparece antes que suceda la colisión total se obtuvo a través de dos segmentos prototipo, digamos *Prot*( $k$ ) y *Prot*( $j$ ). Iterando uno de estos dos segmentos prototipo podemos obtener una nueva trayectoria que a los símbolos ya existentes se le añadan uno o dos nuevos símbolos  $Q_{n+1}$ , o  $Q_{n+1} Q_{n+2}$ . Esto depende de si se requieren una o dos iteraciones de los segmentos prototipo, bajo  $P^{-1}$ , para obtener una intersección no vacía con  $ER_*$  o  $EL_*$ . Así, hemos obtenido una órbita con sucesión de símbolos asociada dada por

$$EQ_1 Q_2 \dots Q_n Q_{n+1} \quad \circ \quad EQ_1 Q_2 \dots Q_n Q_{n+1} Q_{n+2}.$$

□

Para finalizar esta sección presentamos una interpretación de las sucesiones de símbolos de la forma  $EQ_1 Q_2 \dots Q_j \dots Q_m C$ , con  $Q_j \in \{R, L\}$ , sucesiones que se asocian a trayectorias de eyección-colisión que presentan un conjunto

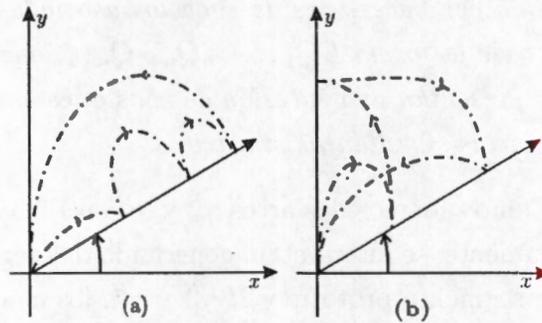


Figura 3.14: Orbitas de eyección-colisión: (a)  $EL^3C$  y (b)  $ELRLC$ .

finito de colisiones binarias del par interior y/o sucesiones binarias simultáneas simétricas en términos de las coordenadas originales  $x, y$  para el problema colineal simétrico de cuatro cuerpos.

Recordemos que a una configuración de la forma  $x = 0, y \neq 0$  le corresponde una colisión binaria del par interior, mientras que a una configuración de la forma  $y = \sqrt{\alpha}x \neq 0$  le corresponde una colisión binaria simultánea simétrica. De esta manera, cuando en coordenadas de McGehee  $\theta = \pi/2$  o  $\theta = \theta_\alpha$  se tiene una colisión binaria del par interior de partículas o correspondientemente, una colisión binaria simultánea simétrica. Observemos que el caso  $x = y = 0$  no se considera debido a que representa la colisión simultánea de las cuatro partículas.

Tomando en consideración esta información y el hecho de que al símbolo  $L$  le corresponde un punto en  $\Gamma^L$ , entonces en una órbita donde aparece un símbolo  $Q_j = L$  en su sucesión asociada  $EQ_1Q_2 \dots Q_j \dots Q_mC$ , ésta presenta una colisión binaria simultánea simétrica cuando cruza  $\Gamma^L$ . En el caso de que aparezca un símbolo  $Q_j = R$  en la sucesión, entonces ocurre una colisión binaria del par interior al momento que la órbita cruza el semiplano  $\Gamma^R$ .

De esta manera sucesiones de la forma  $ER^nC$  y  $EL^nC$  que se obtuvieron en la Proposición 3.5.2 para cualquier valor del parámetro  $\alpha$  están asociadas a órbitas de eyección-colisión que presentan ya sea una sucesión de  $n$  colisiones binarias simultáneas simétricas o una sucesión de  $n$  colisiones binarias del par de partículas interiores, respectivamente. Se puede dar una interpretación semejante a las sucesiones  $ERLRC$  y  $ELRLC$  obtenidas en el Corolario 3.5.3, como se puede ver en la Figura 3.14.

### 3.6 Dinámica simbólica

A continuación damos una descripción de órbitas, no necesariamente de eyección-colisión que presentan una sucesión de colisiones binarias o colisiones binarias simultáneas simétricas. Para lograr esto, estudiaremos las iteraciones de regiones (en lugar de segmentos) contenidas en la sección de Poincaré, bajo el mapeo inverso de Poincaré  $P^{-1}$ , de manera semejante a como se hace en [20] y [7]. Las regiones están contenidas en  $\Gamma = \Gamma^R \cup \Gamma^L$ , que ha resultado ser la sección de Poincaré adecuada para nuestros fines. El mapeo de Poincaré nos proveerá de información global acerca de las posibles sucesiones de colisiones binarias del par interior de partículas y/o colisiones binarias simultáneas simétricas que puede presentar una órbita.

Definiremos un conjunto finito de regiones  $R_i, i = 1, \dots, 2N$  ( $N = 4$  para  $0 < \alpha < \alpha_1$ ,  $N = 5$  para  $\alpha_2 < \alpha < \alpha_3$  y  $N = 6$  para  $\alpha_3 < \alpha < \alpha_4$ ); todas ellas, excepto dos, estarán contenidas en  $\overline{\Gamma_1^R} \cup \overline{\Gamma_1^L}$ . Las restantes dos regiones serán las regiones no acotadas  $\Gamma_2^R$  y  $\Gamma_2^L$ .

Definamos las primeras  $N$  regiones  $R_i, i = 1, \dots, N$ , que estarán contenidas en  $\Gamma^R$ . Las otras  $N$  regiones  $R_i, i = N + 1, \dots, 2N$  estarán contenidas en  $\Gamma^L$  y se definirán por simetría. Las primeras  $N - 1$  regiones en  $\Gamma^R$  están contenidas en  $\overline{\Gamma_1^R}$ , mientras que la última región  $R_N$  en  $\Gamma^R$  es justamente  $\Gamma_2^R$ , la región no acotada de  $\Gamma^R$  determinada por  $ER_*$ , y  $R_{2N}$  es la región no acotada  $\Gamma_2^L$ .

La región  $R_1$  es la región en  $\Gamma_1^R$ , acotada por  $ER_*$ , el segmento de la recta  $r = 0$  que se encuentra contenido entre los puntos  $dR_*$  y  $R_*d$ , y el segmento  $\gamma_1^R$ ; la región  $R_{N+1}$  es la región en  $\Gamma_1^L$ , limitada por  $EL_*$ , el segmento de recta en  $\{r = 0\}$ , que se encuentra entre los puntos  $dL_*$  y  $L_*d$  y entre el segmento  $\gamma_1^L$ . Con el fin de definir las regiones  $R_i, i = 2 \dots N - 2$ , consideraremos un conjunto finito de imágenes inversas de segmentos  $\gamma_1^R \subset \gamma^R$  y  $\gamma_1^L \subset \gamma^L$ . Definimos las regiones  $R_2$  hasta  $R_{N-2}$  y  $R_{N+2}$  hasta  $R_{2N-2}$  para cada uno de los intervalos donde se encuentra contenido el parámetro. Para esto se hace uso del Corolario 3.5.4 así como de la simetría del flujo para los valores del parámetro considerados.

1. Para  $0 < \alpha < \alpha_1$  (i.e  $N = 4$ ). Obsérvese que  $P^{-1}(\gamma_1^L) \subset \Gamma_1^R$  no interseca  $ER_*$ , pero  $P^{-2}(\gamma_1^L)$  sí interseca  $ER_*$ . Por lo que definimos la región  $R_2$  como la región en  $\Gamma_1^R$  acotada por  $P^{-1}(\gamma_1^L)$  y el segmento en  $\{r = 0\}$  que se encuentra entre los puntos  $R_*d$  y  $P^{-1}(L_*d)$ ; la región  $R_{N+2} = R_6$  es la región simétrica a  $R_2$ , contenida en  $\Gamma_1^R$ ; esto es, la región acotada por  $P^{-1}(\gamma_1^R)$  y el segmento en  $r = 0$  que se encuentra entre los puntos  $L_*d$  y

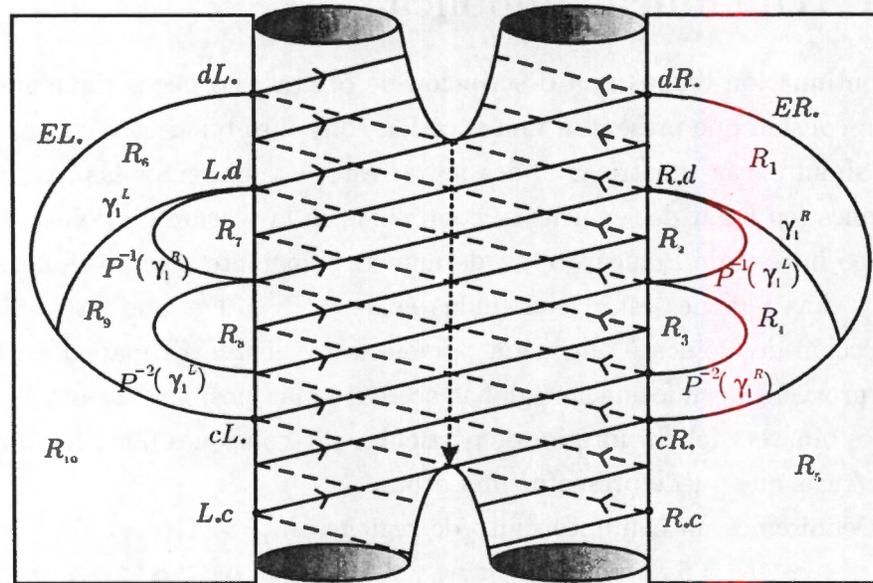


Figura 3.15: Regiones básicas  $R_i$ ,  $i = 1 \dots 10$ , en  $\Gamma$  para  $\alpha_2 < \alpha < \alpha_3$ .

$$P^{-1}(R_*d).$$

2. Para  $\alpha_2 < \alpha < \alpha_3$ , (i.e.  $N = 5$ ). Definimos las regiones  $R_2, R_{N+2}$  de la misma forma a como lo hicimos en el último caso. Observemos que  $P^{-2}(\gamma_1^R) \subset \Gamma_1^R$  y  $P^{-2}(\gamma_1^R)$  no intersectan  $ER_*$ ; de la misma manera,  $P^{-2}(\gamma_1^L) \subset \Gamma_1^L$  y  $P^{-2}(\gamma_1^L)$  no intersectan  $EL_*$ . Pero  $P^{-3}(\gamma_1^R)$  intersecta  $EL_*$  y  $P^{-3}(\gamma_1^L)$  intersecta  $ER_*$ . De este modo, definimos la región  $R_3$  como la región acotada por  $P^{-2}(\gamma_1^R)$  y  $\{r = 0\}$  y la región  $R_{N+3} = R_8$  es la región acotada por  $P^{-2}(\gamma_1^L)$  y  $\{r = 0\}$ . Ver Figura 3.15.
3. Para  $\alpha_3 < \alpha < \alpha_4$  (i.e.  $N = 6$ ), Definamos  $R_2, R_3$  y  $R_{N+2}, R_{N+3}$  como lo hicimos en el caso previo. Observe que  $P^{-3}(\gamma_1^R)$  no intersecta  $EL_*$  ni  $P^{-3}(\gamma_1^L)$  intersecta  $ER_*$ ; pero  $P^{-4}(\gamma_1^R)$  intersecta  $ER_*$  y  $P^{-4}(\gamma_1^L)$  intersecta  $EL_*$ . Así, definimos la región  $R_4$  en  $\Gamma_1^R$  como la región acotada por  $P^{-3}(\gamma_1^L)$  y la recta  $\{r = 0\}$  y la región  $R_{N+4} = R_{10}$  se define como la región en  $\Gamma_1^L$  acotada por  $P^{-3}(\gamma_1^R)$  y la recta  $\{r = 0\}$ .

La región  $R_{N-1}$  está dada por el complemento de  $\bigcup_{j=1, \dots, N-2} R_j$  en  $\Gamma_1^R$  y la región  $R_{2N-1}$  es el complemento de  $\bigcup_{j=N+1, \dots, 2N-2} R_j$  en  $\Gamma_1^L$ . Véase la Figura 3.15 para el caso  $N = 5$ . Como se estableció anteriormente, aquellas  $N$  regiones

en  $\Gamma^L$  están definidas de manera simétrica a como se definieron las regiones en  $\Gamma^R$ .

A continuación estudiamos la forma como se mapean entre sí las regiones bajo el inverso del mapeo de Poincaré  $P^{-1}$ . Para esto, consideremos un alfabeto  $\mathcal{A} = \{R_i\}_{i=1, \dots, 2N}$  de  $2N$  símbolos; a cada uno de los cuales le corresponde una de las  $2N$  regiones  $R_i, i = 1, \dots, 2N$ , anteriormente definidas. Estudiaremos cómo funciona la dinámica entre estas regiones bajo  $P^{-1}$ .

**Definición 10.** Una matriz de transición es una matriz  $A = (a_{ij}) \in M_{2N \times 2N}$ , tal que  $a_{ij} = 1$  si la región  $R_i$  es mapeada en la región  $R_j$  bajo  $P^{-1}$ , y  $a_{ij} = 0$ , en caso de que esto no ocurra.

Las matrices de transición determinan todas las transiciones admisibles entre los símbolos  $R_i$ .

**Definición 11.** La gráfica de transición  $G_A$ , asociada a una matriz de transición  $A$  es la gráfica dirigida con  $2N$  vértices distintos, los cuales, por simplicidad denotaremos  $i, i = 1, \dots, 2N$ , así como algunas flechas dirigidas. Se tendrá una flecha dirigida del vértice  $i$  al vértice  $j$  si  $a_{ij} = 1$ ; en caso que  $a_{ij} = 0$ , no habrá conexión alguna del vértice  $i$  al vértice  $j$ .

Nuestro objetivo es determinar una matriz de transición  $A$  que describa la dinámica entre las regiones  $R_i$ , para un rango dado de valores del parámetro, así como su matriz de transición asociada. Esto permitirá conocer la dinámica de una órbita con condición inicial en una de las regiones en términos de su sucesión de colisiones binarias y colisiones binarias simultáneas simétricas. Para ello haremos uso de toda la información obtenida previamente.

**Teorema 3.6.1.** Las matrices de transición para el problema colineal simétrico de cuatro cuerpos están dadas por matrices de la forma

$$A = \begin{pmatrix} C & D \\ D & C \end{pmatrix} \in M_{2N \times 2N}$$

donde

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{N \times N}$$

$N = 4$  corresponde a  $0 < \alpha < \alpha_1$ ,  $N = 5$  corresponde a  $\alpha_2 < \alpha < \alpha_3$  y  $N = 6$  corresponde a  $\alpha_3 < \alpha < \alpha_4$ .

*Demostración.* La imagen inversa de la región  $R_N$  se obtiene como sigue. El argumento es el mismo para todos los valores del parámetro en los tres intervalos considerados. Así, consideremos  $N = 4, 5$ , o  $6$ . Todos los puntos considerados se encuentran en  $R_N$ . La imagen inversa de un punto en  $R_N$ , cerca de  $cR_*$  pasa cerca de  $R_*c$  y la imagen inversa de un punto en la región, cercano a  $ER_*$ , debe estar cercana a  $R_*d$ . De manera análoga, puntos cercanos a  $dR_*$ , bajo  $P^{-1}$ , van a puntos cerca de  $R_*d$ . De esta manera hemos mostrado que  $P^{-1}(R_N)$  intersecta  $R_1$  y  $R_N$ . Las imágenes inversas para las otras regiones se encuentran de modo semejante.  $\square$

**Corolario 3.6.2.** *Las gráficas de transición entre las regiones están dadas en la Figura 3.15.*

*Demostración.* Es consecuencia directa del Teorema 3.6.1.  $\square$

Observemos que las simetrías que aparecen en todas las matrices de transición y sus gráficas de transición asociadas reflejan las simetrías geométricas de la configuración colineal y la simetría del flujo sobre la variedad de colisión total.

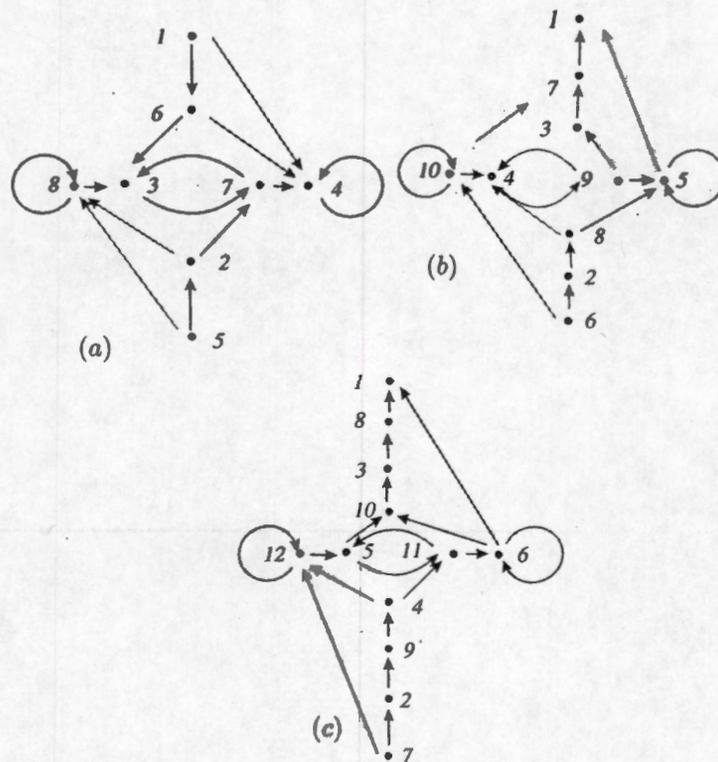


Figura 3.16: Gráficas de transición  $G_A$  entre las regiones para (a)  $0 < \alpha < \alpha_1$ , (b)  $\alpha_2 < \alpha < \alpha_3$ , y (c)  $\alpha_3 < \alpha < \alpha_4$ .



---

---

## CAPÍTULO 4

---

# ESCAPES EN EL PROBLEMA RECTANGULAR

### 4.1 Introducción

En distintos problemas de la mecánica celeste se ha probado la existencia de movimientos caóticos; en 1960 Sitnikov [52] logró esto en un caso especial del problema de tres cuerpos. Posteriormente, Alekseev [2] mostró la existencia de este tipo de movimientos usando órbitas homoclínicas o heteroclínicas. Alekseev en el trabajo antes mencionado y Moser [44] dan una caracterización de tales órbitas oscilatorias del ahora conocido como *Problema de Sitnikov*, usando dinámica simbólica. Esta técnica ha sido usada para estudiar no solamente problemas de tres cuerpos, como por ejemplo Cors y Llibre [8], [9], [10], Devaney [13], Martínez y Simó [32], Llibre y Simó [30], [31], Alvarez y Llibre [4] y Meyer y Wang [37], sino también problemas de cuatro cuerpos como en el problema romboidal estudiado por Lacombe y Pérez-Chavela en [26] y [27] y un caso especial del problema espacial de cuatro cuerpos, llamado problema tetraedral (con y sin rotación), estudiado primero por C. Vidal en [57] y [58], en el caso con rotación y en el caso sin rotación en un trabajo en colaboración con J. Delgado [11].

En este capítulo consideramos el problema rectangular plano de cuatro cuerpos, el cual es un subproblema con dos grados de libertad del problema trapecial de cuatro cuerpos en el plano. Para el problema rectangular, como hemos visto

se considera el centro de masa en el origen. Esta parte del trabajo se ha realizado desde un punto de vista analítico casi todo el tiempo y aunque no se pudo demostrar analíticamente la transversalidad de las variedades invariantes asociadas a las órbitas de escapes parabólico, se muestra evidencia numérica de que esto ocurre.

Se estudian órbitas de escape al infinito, en particular las correspondientes a escapes parabólicos; es decir, órbitas que tienden a infinito con velocidad asintóticamente nula. Por la forma de la región de Hill asociada al problema rectangular se tiene que los escapes sólo pueden darse en la dirección de los ejes coordenados  $x$  y  $y$ , con  $x, y > 0$ . Además, debido a las simetrías del problema rectangular, basta estudiar los escapes en una de las direcciones. Por ello solamente se da la descripción de los escapes parabólicos en la dirección del eje  $y$ .

Para lograr dar la descripción de estos movimientos caóticos usamos la explosión del infinito; de las ecuaciones diferenciales obtenidas se tiene que existen singularidades debidas a colisiones binarias simultáneas de los pares de partículas que se encuentran en la parte superior e inferior de la configuración rectangular, por lo que se regularizan estas singularidades. Después se procede a estudiar el flujo en una vecindad del infinito  $y = \infty$ , mostrándose la existencia de una órbita periódica al infinito que denotamos por  $OPP_+$  y que es el conjunto límite de las órbitas de escape parabólico. Esta órbita tiene asociadas dos variedades invariantes  $W^{u,s}(OPP_+)$ , formadas por las órbitas de escape/captura parabólico. Estas variedades son analíticas, excepto posiblemente sobre los puntos de  $OPP_+$ , y se calculan aproximaciones a las mismas en la sección sobre resultados numéricos.

Por las simetrías de las ecuaciones diferenciales que modelan al problema rectangular se tiene también la existencia de una órbita periódica al infinito  $OPP_-$  asociada a los escapes en la dirección del eje  $x$ , así como la existencia de variedades invariantes  $W^{u,s}(OPP_-)$  asociadas a  $OPP_-$ , que también resultan analíticas, salvo quizá, como ya se mencionó, sobre la órbita periódica parabólica al infinito.

Simulaciones numéricas muestran la existencia de órbitas homoclínicas para cada una de las órbitas periódicas al infinito  $OPP_{\pm}$ , es decir que hay intersección no vacía entre  $W^s(OPP_+)$  y  $W^u(OPP_+)$  y entre  $W^s(OPP_-)$  y  $W^u(OPP_-)$ . De la misma forma, numéricamente, también se tiene que los conjuntos  $W^u(OPP_+) \cap W^s(OPP_-)$  y  $W^u(OPP_-) \cap W^s(OPP_+)$  son no vacíos.

La existencia de éstas intersecciones no vacías nos proveen de las herramientas para demostrar la existencia de una dinámica de movimientos bastante rica y darnos los elementos necesarios para establecer el principal teorema de este capítulo.

## 4.2 Variedad de órbitas parabólicas

Las ecuaciones de movimiento que se usarán para estudiar los escapes de órbitas parabólicas existentes en el problema rectangular de cuatro cuerpos están dadas por (1.11) y el hamiltoniano (1.12).

En este capítulo estudiaremos el conjunto de órbitas de escape a infinito sobre el nivel de energía negativo fijo  $h = -1/16$ . De la forma de la región de Hill correspondiente al problema rectangular, (ver Figura 4.1), se tiene que únicamente pueden darse escapes en las direcciones de los ejes. Más aún, en el caso de escapes en la dirección del eje  $y$ , éstos pueden ocurrir después de presentar una sucesión de colisiones  $x = 0$ , como se muestra en la Figura 4.1. Un razonamiento análogo se aplica en el caso de escapes en la dirección del eje  $x$ . Todo esto se debe a la simetrías, tanto de la configuración rectangular como de las ecuaciones de movimiento (1.11). Estudiaremos el caso de órbitas parabólicas, que son trayectorias no acotadas tales que su velocidad tiende asintóticamente a cero.

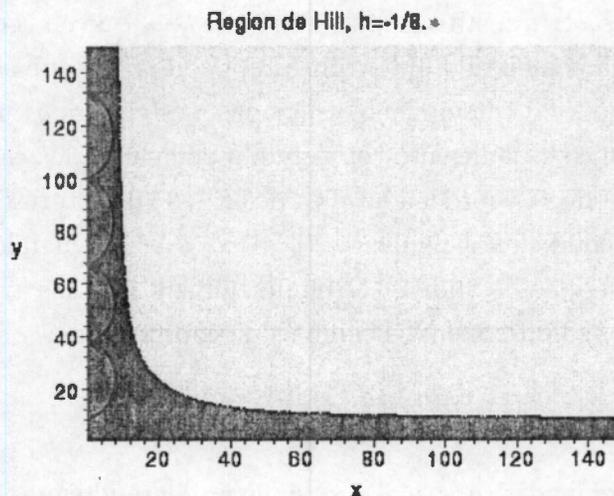


Figura 4.1: Los escapes en la dirección  $y$  pueden presentar singularidades  $x = 0$ .

**Definición 12.** Decimos que una órbita  $z(t) = (x(t), y(t))$  solución del problema rectangular de cuatro cuerpos escapa a infinito parabólicamente en dirección positiva si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty \quad y \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t) = 0,$$

o bien,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty \quad y \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{y}(t) = 0.$$

De manera análoga se definen órbitas que escapan a infinito parabólicamente en dirección negativa al reemplazar  $t \rightarrow \infty$  por  $t \rightarrow -\infty$ .

Una órbita biparabólica es una órbita que escapa parabólicamente en ambas direcciones temporales.

**Definición 13.** Decimos que una órbita  $z(t) = (x(t), y(t))$  del problema rectangular de cuatro cuerpos escapa a infinito hiperbólicamente en dirección positiva si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty \quad y \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t) = m \quad (m \text{ constante no nula}),$$

o bien,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty \quad y \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{y}(t) = m \quad (m \text{ constante no nula}).$$

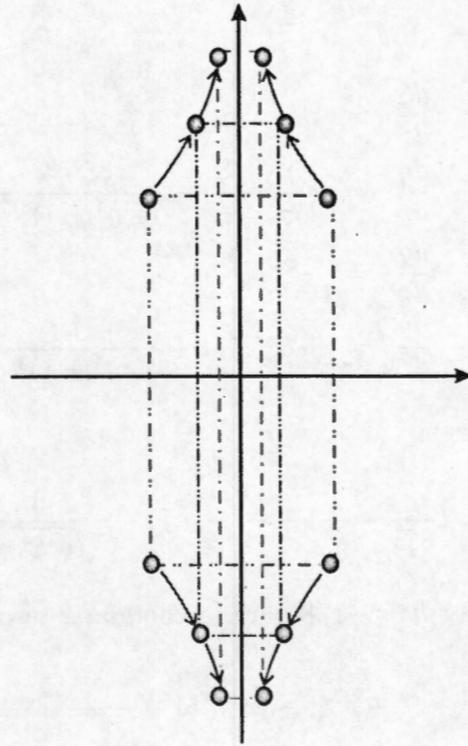
De la misma forma se definen órbitas que escapan a infinito hiperbólicamente en dirección negativa sustituyendo  $t \rightarrow \infty$  por  $t \rightarrow -\infty$  en la definición anterior.

Como se ha comentado anteriormente, debido a las simetrías del problema y de las ecuaciones de movimiento asociadas a éste, para estudiar las órbitas de escape parabólico es suficiente con estudiar solamente los escapes que ocurren en la dirección de la coordenada  $y$ , es decir, las trayectorias para las cuales se satisfacen las condiciones siguientes:  $y \rightarrow \infty$  y  $\dot{y} \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Ya que queremos estudiar el comportamiento de las trayectorias cuando  $\lim_{t \rightarrow \infty} y = \infty$ , se proponen los cambios de coordenadas

$$y = \frac{1}{q^2} \quad y \quad p = p_y. \quad (4.1)$$

En las coordenadas  $(q, x, p, p_x)$ , se sigue presentando una singularidad cuando  $x = 0$ , es decir, al chocar simultáneamente los binarios superior e inferior de partículas. Para regularizar estas colisiones simultáneas consideramos una regularización de tipo Levi-Civita

Figura 4.2: Escapes en la dirección del eje  $y$ .

$$x = \xi^2 \quad y \quad p_x = \frac{\eta}{\xi}. \quad (4.2)$$

De esta forma las ecuaciones de movimiento se transforman en

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\eta}{8\xi^2}, \\ \frac{d\eta}{dt} &= \left( \frac{\eta^2}{8\xi^3} - \frac{1}{\xi^3} \right) - \frac{\xi^3 q^6}{(\xi^4 q^4 + 1)^{3/2}}, \\ \frac{dq}{dt} &= -\frac{pq^3}{8}, \\ \frac{dp}{dt} &= -q^4 \left( 1 + \frac{1}{(\xi^4 q^4 + 1)^{3/2}} \right), \end{aligned}$$

las cuales siguen presentando singularidad cuando  $\xi = 0$ ; por ello se considera el reescalamiento del tiempo

$$\frac{dt}{dr} = 8\xi^2,$$

con lo cual las ecuaciones de movimiento están dadas por

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{d\tau} &= \eta, \\ \frac{d\eta}{d\tau} &= \left(\frac{\eta^2}{\xi} - \frac{8}{\xi}\right) - \frac{8\xi^5 q^6}{(\xi^4 q^4 + 1)^{3/2}}, \\ \frac{dq}{d\tau} &= -\xi^2 p q^3, \\ \frac{dp}{d\tau} &= -8\xi^2 q^4 \left(1 + \frac{1}{(\xi^4 q^4 + 1)^{3/2}}\right),\end{aligned}$$

con relación de energía

$$H = \left(\frac{\eta^2}{8\xi^2} - \frac{1}{\xi^2}\right) + \frac{p^2}{8} - q^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{q^4 \xi^4 + 1}}\right) = h.$$

Si fijamos el valor  $h = -1/8$  para la energía, ésta puede reescribirse como

$$\eta^2 + \xi^2 + p^2 \xi^2 - 8\xi^2 q^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + q^4 \xi^4}}\right) = 8, \quad (4.3)$$

por lo que las ecuaciones de movimiento pueden escribirse como

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{d\tau} &= \eta, \\ \frac{d\eta}{d\tau} &= -\xi \left\{1 + p^2 - 8q^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + q^4 \xi^4}}\right)\right\} - \frac{8\xi^5 q^6}{(q^4 \xi^4 + 1)^{3/2}}, \\ \frac{dq}{d\tau} &= -\xi^2 p q^3, \\ \frac{dp}{dt} &= -8\xi^2 q^4 \left(1 + \frac{1}{(\xi^4 q^4 + 1)^{3/2}}\right).\end{aligned} \quad (4.4)$$

De esta manera las ecuaciones no presentan singularidades, es decir, podemos estudiar las trayectorias para las cuales  $y \rightarrow \infty$ ,  $\dot{y} \rightarrow 0$ , pues hemos regularizado las colisiones binarias simultáneas ( $x = 0$  en las coordenadas originales y  $\theta = \pi/2$  en las coordenadas de McGehee).

### 4.3 Descripción de la variedad al infinito

Definimos la variedad al infinito de los escapes en la dirección de la coordenada  $y$  como el conjunto

$$V_\infty(y) = \{(\eta, \xi, q, p) \mid q = 0, \eta^2 + \xi^2(1 + p^2) = 8\}. \quad (4.5)$$

A continuación damos una descripción topológica de la variedad al infinito.

**Proposición 4.3.1.**  $V_\infty(y)$  es, topológicamente, una esfera menos dos puntos.

*Demostración.* Consideremos el siguiente cambio de variable

$$\tilde{\eta} = \eta \sqrt{\frac{1 - W^2}{8}},$$

entonces la segunda relación que aparece en la definición de  $V_\infty(y)$  puede reescribirse como

$$8\tilde{\eta}^2 + \xi^2(1 + p^2)(1 - W^2) + 8W^2 = 8. \quad (4.6)$$

Ahora bien, si tomamos  $W$  tal que  $|W| \neq 1$  y tal que además satisfaga la relación  $(1 + p^2)(1 - W^2) = 8$ , entonces la ecuación (4.6) toma la forma

$$\tilde{\eta}^2 + \xi^2 + W^2 = 1, \quad (4.7)$$

la cual es la ecuación de la esfera  $S^2$ . Pero no debemos olvidar que  $|W| \neq 1$ , por lo que  $V_\infty(y)$  es una esfera menos los dos polos  $(0, 0, \pm 1)$ ; es decir,  $V_\infty(y) \sim S^2 - \{(0, 0, \pm 1)\}$ .  $\square$

Por la simetría que presenta el problema rectangular, la variedad  $V_\infty(x)$  de escapes al infinito en la dirección de la coordenada  $x$  presenta la misma topología que  $V_\infty(y)$ , y por lo tanto la topología de la variedad al infinito  $V_\infty$  asociada al problema rectangular es la unión de dos esferas, menos los dos polos en cada una de ellas.

## 4.4 Flujo sobre la variedad al infinito

Cuando se considera la variedad al infinito, todo los puntos del conjunto para los cuales  $\xi = 0$  (es decir,  $x = 0$ ) satisfacen la igualdad  $\eta^2 = 8$ , y en consecuencia, la componente  $\frac{d\xi}{dt}$  del campo vectorial (4.4) no se anula. Por lo tanto, las coordenadas  $p$  y  $q$  pueden tomar cualquier valor y en consecuencia, el conjunto de colisiones binarias

$$\begin{aligned} C_{\frac{\pi}{2}} &= \{(\xi, \eta, q, p) \in E_h \mid \xi = 0\} \\ &= \{(\xi, \eta, q, p) \in E_h \mid \xi = 0, \eta^2 = 8\} \end{aligned}$$

es una variedad bidimensional (donde  $E_h$  es la superficie de energía descrita en las coordenadas  $(\xi, \eta, q, p)$ ) y sobre el conjunto  $C_{\frac{\pi}{2}}$  el campo vectorial es transverso en la dirección de la coordenada  $\xi$ . De esta manera hemos extendido el flujo al conjunto de colisiones binarias  $x = 0$ , como un flujo transverso.

Para el conjunto de órbitas parabólicas (es decir, para aquellas que satisfacen las igualdades  $p = 0$  y  $q = 0$ ) al infinito, el flujo queda determinado por el conjunto de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} &= \eta, \\ \frac{d\eta}{d\tau} &= -\xi, \\ \frac{dq}{d\tau} &= 0, \\ \frac{dp}{d\tau} &= 0, \end{aligned} \tag{4.8}$$

y consta de órbitas periódicas sobre la variedad  $V_\infty(y)$  al infinito, como lo mostramos en la Figura (4.4), mientras que la relación de energía se reduce a

$$\xi^2 + \eta^2 = 8.$$

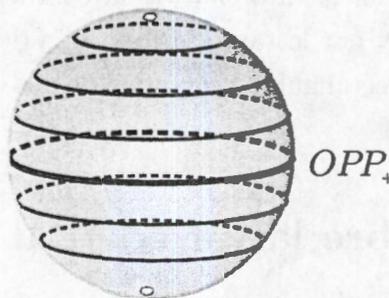


Figura 4.3: Flujo sobre la variedad al infinito.

De esta manera la única solución de (4.8), sobre el nivel de energía fijo  $E_h$  es una órbita periódica, que llamaremos *órbita periódica parabólica en el infinito*, la cual corresponde al ecuador de la esfera en la Figura 4.3 y será denotada por  $OPP_+$ . Las otras órbitas periódicas sobre la variedad al infinito corresponden a los conjuntos  $\alpha$ -límite y  $\omega$ -límite de las órbitas que llegan a infinito con velocidad no nula. La órbita parabólica periódica al infinito será

muy importante para el estudio de las órbitas parabólicas no sólo desde el punto de vista cualitativo, sino también para los estudios numéricos que realizaremos de los escapes.

Observemos que el sistema de ecuaciones (4.4) puede escribirse como

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{d\tau} &= \eta, \\ \frac{d\eta}{d\tau} &= -\xi\left\{1 + p^2 - 8q^2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + q^4\xi^4}}\right) - \frac{8\xi^4 q^6}{(q^4\xi^4 + 1)^{3/2}}\right\}, \\ \frac{dq}{d\tau} &= -\xi^2 pq^3, \\ \frac{dp}{d\tau} &= -\xi^2 q^4\left(8 + \frac{8}{(\xi^4 q^4 + 1)^{3/2}}\right),\end{aligned}\quad (4.9)$$

es decir, toma la forma

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{d\tau} &= \eta, \\ \frac{d\eta}{d\tau} &= -\xi\{1 + F_1(q, p, \xi)\}, \\ \frac{dq}{d\tau} &= -\xi^2 pq^3, \\ \frac{dp}{d\tau} &= -\xi^2 q^4(16 + F_2(q, \xi)),\end{aligned}\quad (4.10)$$

donde  $F_1(q, p, \xi) = p^2 - 8q^2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + q^4\xi^4}} + \frac{\xi^4 q^4}{(q^4\xi^4 + 1)^{3/2}}\right) = p^2 - 8q^2(1 + \Psi(q^4\xi^4))$  con  $\Psi(q^4\xi^4) = \frac{1}{\sqrt{1 + q^4\xi^4}} + \frac{q^4\xi^4}{(1 + q^4\xi^4)^{3/2}}$  y  $F_2(q, \xi) = -8 + \frac{8}{(\xi^4 q^4 + 1)^{3/2}}$  es una función de cuarto orden en  $q$  y  $\xi$ . En consecuencia, las condiciones para usar el teorema de McGehee [36] de la variedad estable para puntos fijos degenerados están satisfechas y por ser el origen  $(q, p) = (0, 0)$  un punto fijo hiperbólico degenerado, se tiene que la trayectoria  $OPP_+$  posee dos variedades invariantes asociadas, una estable y otra inestable, ambas de dimensión 2 las cuales son analíticas, excepto quizá en los puntos sobre la trayectoria  $OPP_+$ . Denotemos estas variedades estable e inestable por  $W^s(OPP_+)$  y  $W^u(OPP_+)$ , respectivamente. Ver Figura 4.4.

Introducimos coordenadas polares canónicas para  $(\xi, \eta)$  mediante los cambios de variables

$$\xi = \sqrt{2L} \cos l \quad y \quad \eta = \sqrt{2L} \sin l. \quad (4.11)$$

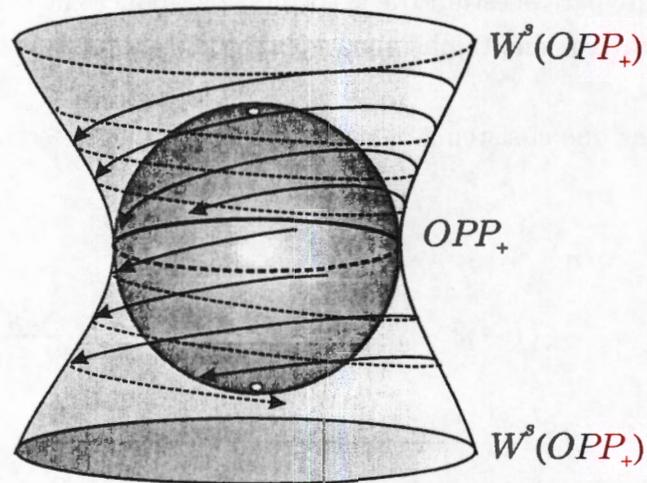


Figura 4.4: Variedad al infinito y las variedades invariantes asociadas a la trayectoria  $OPP_+$ .

A continuación se mostrará que es posible usar la coordenada  $l$  como variable independiente en una vecindad de la órbita periódica parabólica al infinito. Para mostrar esto, observemos que el sistema de ecuaciones diferenciales (4.9) se transforma en un sistema de la forma

$$\begin{aligned}\frac{dq}{d\tau} &= X(q, p, L, l), \\ \frac{dp}{d\tau} &= Y(q, p, L, l), \\ \frac{dl}{d\tau} &= -1 - F_1 \cos^2 l, \\ \frac{dL}{d\tau} &= -\xi\eta F_1,\end{aligned}\tag{4.12}$$

donde las funciones  $X, Y$  se anulan en el origen hasta cuarto orden en  $p$  y  $q$ , y  $F_1 \cos^2 l$  y  $\xi\eta F_1$  son funciones de orden al menos 2 en las coordenadas  $p$  y  $q$ . Más aún, sustituyendo las ecuaciones del cambio de coordenadas (4.11) en la relación de energía (4.3) se tiene que es posible describir  $L$  como función de las variables  $p, q$  y  $l$ . Por lo que las primeras dos ecuaciones en el sistema (4.12) son de la forma

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dl} &= X(q, p, l), \\ \frac{dp}{dl} &= Y(q, p, l),\end{aligned}\tag{4.13}$$

Observemos que se obtiene una descripción geométrica pero no dinámica de las variedades estable e inestable al infinito.

## 4.5 Dinámica cerca de la órbita parabólica al infinito

Sea  $T_+ = B_\delta(0,0) \times \mathbb{S}^1$ , una vecindad toroidal de la órbita periódica parabólica al infinito  $OPP_+$ , con  $\delta > 0$  suficientemente pequeña, vecindad parametrizada por las coordenadas  $(p, q, l)$ , donde  $(p, q) \in B_\delta(0,0)$  y  $l \in \mathbb{S}^1$ . Es posible restringir el estudio de la dinámica cerca de  $OPP_+$  al caso  $q \geq 0$  puesto que  $q = 0$  es invariante.

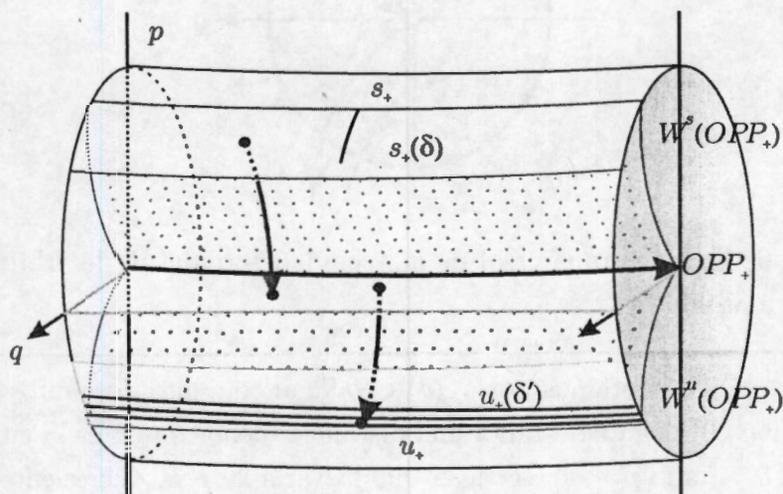


Figura 4.5: Vecindad toroidal de la órbita periódica parabólica al infinito.

Para la discusión que daremos en esta sección haremos referencia a la Figura 4.5. Definamos las curvas  $s_+$  y  $u_+$  dadas por la intersección de las variedades invariantes asociadas a  $OPP_+$  con la frontera de  $T_+$ ; es decir,

$$s_+ = W^s(OPP_+) \cap \partial T_+ \quad \text{y} \quad u_+ = W^u(OPP_+) \cap \partial T_+.$$

Observemos que debido a que para un valor fijo de  $l$ ,  $W^u(OPP_+)$  es la gráfica de una función  $q = f(p)$ , estas dos curvas simples cerradas  $s_+$  y  $u_+$  contenidas en  $\partial T_+$  dividen la frontera del toro en tres regiones disjuntas. Una de ellas es la *región elíptica* que consiste de los puntos en  $\partial T_+$  cuyas trayectorias abandonan la región toroidal tanto en tiempo positivo como en tiempo negativo. Una

segunda región consta de los puntos en  $\partial T_+$  cuyas trayectorias sólo abandonan la región toroidal en tiempo positivo, mientras que la tercer región corresponde a los puntos en  $\partial T_+$  tales que sus órbitas sólo abandonan  $T_+$  en tiempo negativo; éstos dos últimos tipos de puntos definen lo que llamaremos *región hiperbólica*; éstas regiones se muestran en la Figura 4.6, en un corte longitudinal de la vecindad toroidal de  $OPP_+$ . No debemos dejar de notar que el flujo sobre la región hiperbólica y sobre las curvas  $s_+$  y  $u_+$  es transversal.

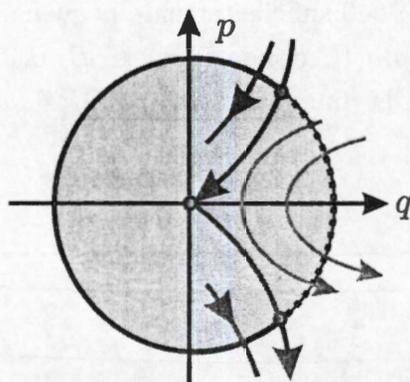


Figura 4.6: Sección transversal de la vecindad toroidal de la órbita periódica parabólica al infinito.

Para  $\delta > 0$ , denotamos por  $s_+(\delta) \subset \partial T_+$  al conjunto de puntos contenidos en la región elíptica que están a una distancia menor que  $\delta$  de la curva  $s_+$ , ver Figura 4.5. Como  $p' < 0$ , se tiene que la variable  $p$  es decreciente a lo largo de las soluciones y, en consecuencia, cuando la curva permanece en la vecindad toroidal  $T_+$ , la solución debe intersectar el plano  $\pi_0 = \{(p, q, l) \in T_+ \mid p = 0\}$ . De manera semejante, para  $\delta' > 0$ , definimos el conjunto  $u_+(\delta') \subset \partial T_+$  de puntos en la región elíptica que está a una distancia menor que  $\delta'$  de la curva  $u_+$ . Debido a la transversalidad del flujo sobre  $s_+$ , para  $\delta$  suficientemente pequeño obtenemos una función  $\vartheta : s_+(\delta) \rightarrow \pi_0$ , la cual se obtiene siguiendo la curva solución en tiempo positivo hasta intersectar el plano  $\pi_0$ ; asimismo, se define la función  $\rho : u_+(\delta') \rightarrow \pi_0$ , con  $\delta'$  suficientemente pequeña. Por lo tanto, obtenemos una función

$$\zeta : s_+(\delta) \rightarrow u_+(\delta'),$$

donde  $\zeta = \rho^{-1} \circ \vartheta$ , la cual está bien definida para  $\delta$  y  $\delta'$  suficientemente pequeñas.

**Proposición 4.5.1.** *Sea  $\sigma$  un arco de condiciones iniciales, de clase  $C^1$ , contenido en  $s_+(\delta)$  tal que toca la curva  $s_+$  transversalmente. Entonces el arco  $\zeta(\sigma) = \varrho^{-1} \circ \vartheta(\sigma)$  se enreda en espiral alrededor de la curva  $u_+$ .*

## 4.6 Existencia de una órbita de escape parabólico

En esta sección mostraremos la existencia de una órbita de eyección que tiene como conjunto  $\omega$ -límite a la trayectoria  $OPP_+$ , a esta órbita la llamaremos *órbita de escape parabólico*.

Consideremos el par de partículas que se encuentran en los vértices superiores de la configuración rectangular de la Figura 1.2 y consideramos la energía

$$h_{12} = \dot{x}^2 - \frac{1}{2x},$$

mientras que la energía restante del sistema queda determinada por

$$k = h - h_{12} = 2\dot{y}^2 - \frac{1}{2y} - \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Para esta última cantidad se tiene el siguiente resultado.

**Lema 4.6.1.** *Existen órbitas de eyección con  $k$  suficientemente grande.*

*Demostración.* Primero mostraremos que la energía  $h_{12}$  alcanza un límite cuando el binario se aproxima a colisión. La herramienta para mostrar esta afirmación está dada por el cambio de coordenadas debidas a la explosión de McGehee. En estas coordenadas expresaremos el valor de la energía  $h_{12}$ .

Recordemos que del cambio de coordenadas de McGehee propuesto en (1.3), se tiene que

$$x = \frac{r}{2} \cos \theta,$$

y de las ecuaciones clásicas de McGehee para un problema con dos grados de libertad, antes de considerar la reparametrización del tiempo sabemos que

$$\dot{r} = r^{-1/2}v \quad \text{y} \quad \dot{\theta} = r^{-3/2}u; \quad (4.14)$$

usando estas igualdades y la ecuación (1.7) se tiene que

$$\dot{x} = \frac{1}{2}r^{-1/2} \left( v \cos \theta - \frac{w \sqrt{W(\theta)}}{\cos \theta} \right).$$

De esta forma, usando la relación de energía (1.18), la energía puede escribirse como

$$h_{12} = \frac{1}{2r} \left( v^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2rh \sin^2 \theta - 2vw\sqrt{W(\theta)} + 2 \left( \frac{W(\theta) \sin \theta - 2}{\cos \theta} \right) \right).$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} W(\theta) &= U(\theta) \sin \theta \cos \theta \\ &= \cos \theta \sin \theta \left( \frac{1}{2 \cos \theta} + \frac{1}{2 \sin \theta} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\sin \theta \cos \theta + \cos \theta + \sin \theta), \end{aligned}$$

de donde

$$W(\pi/2) = 1/2 \quad \text{y} \quad W'(\pi/2) = -1.$$

Usando la regla de L'Hopital se tiene que

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi/2} \frac{W(\theta) \sin \theta - 2}{\cos \theta} = -W'(\pi/2) = 1.$$

Por otra parte, de la relación de energía se tiene que

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi/2} w = 0.$$

De esta manera,

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi/2} h_{12} = h + \frac{2 - v^2}{2r}.$$

Para terminar con la demostración hace falta justificar dos hechos: Primero, que es posible escoger una condición inicial para una órbita de tal manera que podamos tomar  $k = h - h_{12}$  suficientemente grande, y segundo, que tal órbita sea de eyección.

La primera afirmación se sigue si tomamos una condición inicial de la forma  $(r, v, \pi/2, 0)$  y una constante  $\epsilon \gg |h| = -h$  tales que

$$v^2 > 2 \quad \text{y} \quad r < \frac{v^2 - 2}{2(\epsilon + h)};$$

de esta manera podemos tomar  $k$  tal que  $k > \epsilon + h$ , es decir,  $k$  suficientemente grande.

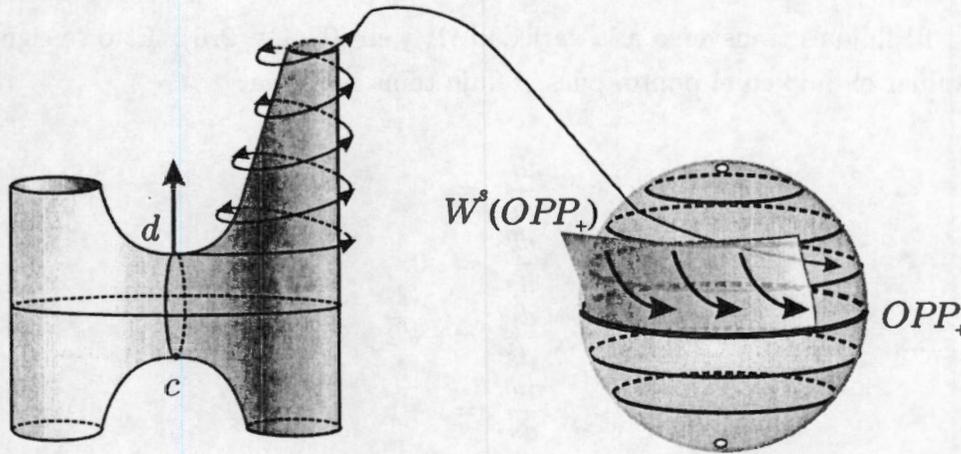


Figura 4.7: Órbita de eyección hiperbólica.

Para justificar la segunda afirmación, definamos el conjunto

$$\Omega_{\pi/2} = \{(r, v, \theta, w) \mid \theta = \pi/2 \text{ y } w^2 = \frac{\sin^2 2\theta}{4W(\theta)}(2rh - v^2) + \sin 2\theta\},$$

el cual está asociado con las colisiones simultáneas de los pares superior e inferior de partículas en configuración rectangular ( $x = 0$ ). Es de observarse que este conjunto no es un subconjunto de la variedad de colisión total. Queremos mostrar la existencia de una órbita contenida en  $\overline{W}^u(d)$  (la cual es una variedad bidimensional), con condición inicial tal que  $r$  tiende a infinito cuando  $t$  tiende a infinito, es decir, una órbita de escape.

Para mostrar lo anterior, consideremos el conjunto  $\Omega_{\pi/2}$  cuando  $r \neq 0$  y la función

$$\phi(r, v, \theta, w) = w^2 - \left(\frac{\sin^2 2\theta}{4W(\theta)}(2rh - v^2) + \sin 2\theta\right).$$

Para puntos  $(0, v_0, \pi/2, 0) \in \Omega_{\pi/2}$  se tiene que

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta}(0, v_0, \pi/2, 0) = 2 \neq 0.$$

Por el teorema de la función implícita, se tiene que el conjunto  $\Omega_{\pi/2}$  es una variedad bidimensional  $\theta(r, v, w) = \pi/2$ , localmente cerca del punto escogido. Es decir, para  $\kappa > 0$ , suficientemente pequeña, existe una función suave  $\theta = \theta(r, v, w)$  tal que para  $|r|, |v - v_0|, |w| < \kappa$  se satisface la ecuación

$$\phi(r, v, \theta(r, v, w), w) = 0.$$

El flujo es transverso a la variedad  $\Omega_{\pi/2}$  en  $(0, v_0, \pi/2, 0)$ . Esto se sigue de evaluar el flujo en el punto, pues el flujo toma la forma

$$\begin{aligned}\frac{dr}{ds} &= 0, \\ \frac{d\theta}{ds} &= 0, \\ \frac{dv}{ds} &= \sqrt{2}, \\ \frac{dw}{ds} &= -1.\end{aligned}$$

Finalmente, tomemos la condición inicial preestablecida en  $\overline{W}^u(d)$ ; esto debido a la transversalidad  $W^u(d) \cap \Omega_{\pi/2}$ . Además podemos elegir un punto en esta intersección donde  $v$  sea suficientemente grande, pero  $r$  suficientemente pequeño; es decir tal que se satisfacen las desigualdades

$$v^2 > 2 \quad \text{y} \quad r < \frac{v^2 - 2}{2(\epsilon + h)}$$

□

**Proposición 4.6.2.** *Existe una órbita hiperbólica de eyección*

*Demostración.* Supongamos que se tiene una órbita  $(x(y), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t))$ , con las características del resultado anterior; es decir, una trayectoria para la cual existe un instante  $t_0$  en el cual ésta se encuentra cerca de colisión total con

$$x(t_0) = 0, \quad y(t_0) = r(t_0),$$

y tal que además se satisfacen las desigualdades

$$v^2(t_0) > 2 \quad \text{y} \quad r(t_0) < \frac{v^2(t_0) - 2}{2(\epsilon + h)}, \quad (4.15)$$

donde  $r(t_0)$  es suficientemente pequeño al tomar  $\epsilon \gg -h$ .

Como  $y = \frac{r}{2} \sin \theta$ , al usar (4.14) y (1.7) se tiene que

$$\dot{y} = \frac{r^{-1/2}}{2} \left( v \sin \theta + \frac{\sqrt{W(\theta)}}{\sin \theta} w \right).$$

Sabemos que si  $x(t_0) = 0$  y  $y(t_0) > 0$ , entonces  $\theta(t_0) = \pi/2$ , en coordenadas de McGehee; por lo que al hacer uso de la relación de energía (1.9) se tiene que  $w(t_0) = 0$ . Por lo tanto, en el instante  $t = t_0$ ,

$$\dot{y}(t_0) = \frac{1}{2} r^{-1/2}(t_0) v(t_0) > 0.$$

Así, en vista de (4.15),  $\dot{y}(t_0)$  puede tomarse tan grande como se quiera. Al tiempo  $t_0$  se tiene una colisión binaria simultánea simétrica de los pares superior e inferior de partículas de la configuración rectangular.

Solo resta mostrar que  $\dot{y}(t) > 0$  para  $t \geq t_0$  y que la órbita es hiperbólica.

Como  $x^2 + y^2 > y^2$  y la función  $f(\gamma) = -\gamma^{-3/2}$  es una función estrictamente creciente entonces

$$-(x^2 + y^2)^{-3/2} > -(y^2)^{-3/2},$$

es decir

$$-\frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} > -\frac{1}{(y^2)^{3/2}} = -\frac{1}{y^3},$$

en consecuencia

$$-\frac{y}{4(x^2 + y^2)^{3/2}} > -\frac{y}{4y^3} = -\frac{1}{4y^2}.$$

Por lo tanto

$$-\frac{1}{4y^2} - \frac{y}{4(x^2 + y^2)^{3/2}} > -\frac{1}{2y^2}.$$

Recordemos que

$$\ddot{y} = -\frac{1}{8y^2} - \frac{y}{8(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Por lo que

$$\ddot{y} > -\frac{1}{4y^2},$$

de donde

$$\dot{y}\ddot{y} > -\frac{\dot{y}}{4y^2},$$

e integrando de  $t_0$  a  $t$ , obtenemos que

$$\frac{1}{2}(\dot{y}^2(t) - \dot{y}^2(t_0)) > \frac{1}{4} \left( \frac{1}{y(t)} - \frac{1}{y(t_0)} \right).$$

Por lo tanto,

$$\dot{y}^2(t) - \frac{1}{2y(t)} > \dot{y}^2(t_0) - \frac{1}{2y(t_0)}. \quad (4.16)$$

El que  $\dot{y}(t) \neq 0$  para  $t \geq t_0$  se sigue de (4.16) y de la condición  $\dot{y}(t_0) = \frac{1}{2}r^{-1/2}v(t_0)$ , pues debido a ambas condiciones se tiene que

$$\dot{y}^2(t) - \frac{1}{2y(t)} > \dot{y}^2(t_0) - \frac{1}{2y(t_0)} = \frac{1}{r(t_0)} \left( \frac{v^2(t_0)}{4} - 1/2 \right) > 0$$

si  $v^2(t_0) > 2$ .

Observemos que  $\dot{y}^2(t) > \dot{y}^2(t) - \frac{1}{2y(t)}$  y si tomamos  $m = \frac{1}{r(t_0)} \left( \frac{v^2(t_0)}{4} - 1/2 \right)$  entonces  $\dot{y}(t) > \sqrt{m}$  e integrando tenemos que

$$y(t) - y(t_0) > \sqrt{mt}$$

y en consecuencia

$$y(t) > y(t_0) + \sqrt{mt}.$$

Por lo que

$$y(t) \rightarrow \infty$$

cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Por otra parte, debido a que  $k = 2\dot{y}^2 - \frac{1}{2y} - \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}$  y  $k(t_0) > \epsilon + h$  entonces, en el instante  $t_0$  se tiene que  $k(t_0) = 2\dot{y}^2(t_0) - \frac{1}{y(t_0)} > \epsilon + h$ , en consecuencia se tiene que

$$\dot{y}^2(t_0) - \frac{1}{2y(t_0)} > \frac{\epsilon + h}{2}.$$

Finalmente, usando (4.16) obtenemos que

$$\dot{y}(t)^2 - \frac{1}{2y(t)} > \frac{\epsilon + h}{2}.$$

Al considerar el límite cuando  $t \rightarrow \infty$ , se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{y}(t) > 0$$

ya que  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty$ . Por lo tanto la trayectoria es hiperbólica.  $\square$

Como consecuencia de este resultado podemos probar la existencia de otro tipo de órbita.

**Proposición 4.6.3.** *Existen órbitas parabólicas tanto de eyección como de colisión, o sea, asintóticas a los puntos de equilibrio  $c$  o  $d$  de la variedad de colisión total para las cuales el escape parabólico ocurre con  $x \rightarrow \infty$ .*

*Demostración.* Por la proposición anterior, existe una órbita de eyección hiperbólica  $OEH$ . Es claro que ésta órbita pertenece a  $\overline{W}^u(d)$ , la cual, como sabemos, es una variedad bidimensional. Consideremos una curva suave contenida en  $\overline{W}^u(d)$ , con un extremo en  $OEH$  y otro extremo en la órbita homotética, como se muestra en la Figura 4.8. Para ser más precisos sea

$$\alpha : [0, 1] \rightarrow \overline{W}^u(d) \text{ tal que } \alpha(0) \in OEH \text{ y } \alpha(1) \in OH.$$

Consideremos el flujo  $\Phi_t$  asociado al sistema de ecuaciones diferenciales asociado al problema rectangular, y consideremos el valor

$$\tau^* = \sup_{\tau \in [0,1]} \{ \Phi_t(\alpha(\tau)) \text{ intersecciona } \partial T_+, \text{ pero no en tiempos anteriores} \}$$

Por hipótesis,  $\Phi_t(\alpha(0))$  intersecciona  $\partial T$  transversalmente y por continuidad respecto a las condiciones iniciales  $\tau^*$  es un número positivo bien definido. Más aún, por la misma continuidad respecto a las condiciones iniciales la trayectoria  $\Phi_t(\alpha(\tau^*))$  por  $\alpha(\tau^*)$  intersecciona la vecindad toroidal de la órbita periódica parabólica en la región elíptica, y, por lo tanto, debe existir  $\tilde{\tau} \in [0, 1]$  tal que la trayectoria  $\Phi_t(\alpha(\tilde{\tau}))$  por  $\alpha(\tilde{\tau})$  es una órbita de eyección parabólica.

Por simetría se prueba en forma análoga la existencia de órbitas de colisión parabólica.  $\square$

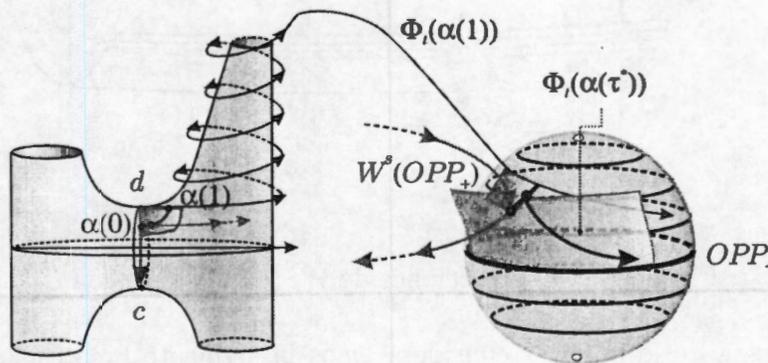


Figura 4.8: Existencia de una órbita de eyección parabólica.

## 4.7 Primera hipótesis de transversalidad

A continuación usaremos la existencia de la órbita de eyección parabólica para estudiar con mayor detalle la dinámica de las trayectorias de eyección-colisión que visitan una vecindad del infinito, estas órbitas presentan una sucesión de colisiones binarias simultáneas de los pares superior e inferior de partículas.

Por la Proposición 4.6.3 sabemos que existe una órbita de eyección parabólica que tiene al punto de equilibrio  $d$  contenido en la variedad de colisión total como conjunto  $\alpha$ -límite y a la órbita periódica parabólica al infinito como conjunto  $\omega$ -límite. Además también sabemos que el flujo es transversal a la frontera de la región toroidal construida en la sección 4.5; de esta forma existe un arco

$arc^u(d)$  de condiciones iniciales contenido en  $\bar{W}^u(d) \cap \partial T_+$  con uno de sus extremos sobre la curva  $s^+$ , la cual es la intersección de  $\partial T_+$  con  $W^s(OPP_+)$ .

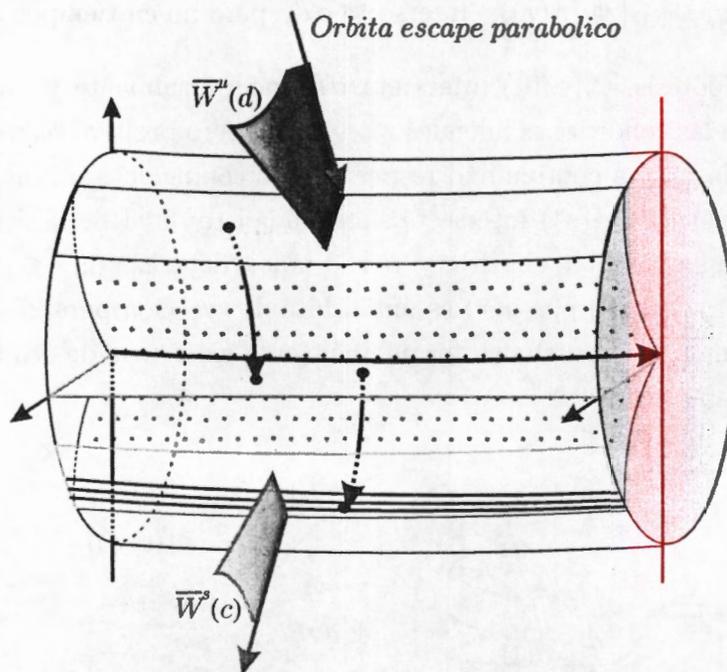


Figura 4.9: Intersecciones de  $\bar{W}^u(d)$  y  $\bar{W}^s(c)$  con  $\partial T$ .

En vista de lo anterior consideraremos la siguiente hipótesis acerca de la transversalidad entre  $\bar{W}^u(d)$ , la variedad inestable de  $d$  y  $W^s(OPP_+)$ , la variedad estable de  $OPP_+$ , ambas contenidas en la superficie de energía negativa fija que estamos considerando.

**PRIMERA HIPOTESIS DE TRANSVERSALIDAD:** La variedad inestable  $\bar{W}^u(d)$  de  $d$  interseca transversalmente a la variedad estable  $W^s(OPP_+)$  de la órbita periódica parabólica al infinito sobre  $\partial T_+$ .

## 4.8 Aproximaciones numéricas de $W^{u,s}(OPP_{\pm})$ .

En esta sección se determinarán aproximaciones numéricas para las variedades invariantes  $W^{u,s}(OPP_{\pm})$ .

Con el fin de dar la descripción del flujo de las órbitas parabólicas haremos uso de coordenadas acción-ángulo para las coordenadas  $(\xi, \eta)$ , donde

$$\xi = \sqrt{2L} \cos(l) \quad \eta = \sqrt{2L} \sin(l).$$

Recordemos que en una vecindad de la órbita parabólica al infinito es posible usar la variable  $l$  como variable independiente. Esto último, como hemos visto, es consecuencia de la relación de energía, pues al sustituir las nuevas variables en ésta, es posible expresar  $l$  en términos de las coordenadas restantes. De lo anterior, también podemos expresar la dinámica, como lo hemos dicho antes, a través de un sistema de dos ecuaciones diferenciales dado por (4.13).

De [36], se sigue que es posible representar localmente a la variedad invariante  $W^u(OPP)$  de la órbita parabólica al infinito en la forma

$$q = F(p, l) = \sum_{n=0}^N b_n(l) p^n + R_N \quad (4.17)$$

puesto que esta variedad es analítica, excepto posiblemente en los puntos contenidos en  $OPP_+$ , la órbita parabólica al infinito, donde la variedad es de clase  $C^\infty$ .

La aproximación (4.17) es una expansión de Taylor hasta un orden fijo para las variedades invariantes mencionadas.

La reversibilidad de las ecuaciones del problema rectangular siguen jugando un papel de gran importancia en nuestro estudio, pues permite que una vez obtenidos los coeficientes  $b_n(l)$  para la aproximación de  $W^u(OPP_+)$ , de manera inmediata se obtiene también una representación local de la misma forma (4.17) para la variedad invariante  $W^s(OPP_+)$ .

Como la simetría debida a la reversibilidad presenta la forma

$$(p, q, l, \tau) \mapsto (-p, q, -l, -\tau)$$

en las coordenadas  $(p, q, l, \tau)$ , se tiene que la variedad estable  $W^s(OPP_+)$  es la gráfica de la función

$$q = F(-p, -l).$$

De la invariancia de las variedades  $W^{u,s}(OPP)$  bajo el sistema de ecuaciones diferenciales (4.13) y de la igualdad  $q = F(p, l)$  se tiene que al calcular la derivada de  $q$  respecto de  $l$ , por la regla de la cadena y sustituyendo  $dq/dl$  y  $dp/dl$  como series de potencias de  $p$  en las ecuaciones (4.13) se obtienen

un sistema recursivo de ecuaciones diferenciales de las cuales se obtienen los coeficientes  $b_n(l)$ . Más específicamente, ver [26] y [4], se tiene

$$\frac{dq}{dl} = \frac{\partial F}{\partial p} \frac{dp}{dl} + \frac{\partial F}{\partial l}.$$

es decir,

$$X(F(p, l), p, l) = \frac{\partial F}{\partial p} Y(F(p, l), p, l) + \frac{\partial F}{\partial l}. \quad (4.18)$$

Esta ecuación, como hemos mencionado da origen a un sistema de ecuaciones diferenciales que se pueden resolver para calcular los coeficientes  $b_n(l)$  de la expresión (4.17) sustituyendo la expresión  $q = F(p, l) = \sum_{n=1}^{n=N} b_n(l)p^n + R_N$  y comparando los coeficientes de las mismas potencias de  $p$ . Nosotros hemos usado *Mathematica* para calcular dichos coeficientes hasta orden 13. Por tanto, la representación numérica de la variedad inestable  $W^u(OPP)$  está dada por

$$\begin{aligned} q &= F(p, l) & (4.19) \\ &= \frac{p}{4} + \frac{5}{1024}p^5 + \frac{p^8}{4096} \left\{ \frac{15}{2} \sin 2l + \frac{9}{2} \sin 4l + \frac{1}{2} \sin 6l \right\} - \frac{103}{524288}p^9 \\ &\quad - p^{11} \left\{ -\frac{1953}{1048576} + \frac{1}{65536} \left[ \frac{351}{2} \cos 2l + \frac{153}{2} \cos 4l + \frac{33}{2} \cos 6l + \frac{9}{8} \cos 8l \right] \right\} \\ &\quad + \frac{1}{1048576}p^{12} \left\{ -\frac{285}{2} \sin 2l - \frac{315}{2} \sin 4l - 80 \sin 6l - \frac{75}{4} \sin 8l - \frac{3}{2} \sin 10l \right\} \\ &\quad - \frac{565}{134217728}p^{13}, \end{aligned}$$

la cual, como hemos dicho es una aproximación de treceavo orden para la variedad inestable de la órbita parabólica periódica al infinito. En consecuencia, como ya se mencionó, nos da también una aproximación de décimotercer orden para la variedad estable de la misma órbita parabólica al infinito.

Por la simetría de las ecuaciones de movimiento del problema rectangular de cuatro cuerpos no es necesario repetir los cálculos para obtener las aproximaciones numéricas de la intersección de las variedades invariantes asociadas a la órbita parabólica asociada a los escapes en la dirección del eje  $x$  con las tres secciones determinadas en la sección 4.9. Sólo es necesario considerar las reflexiones adecuadas respecto a los ejes en cada una de las tres secciones.

Los anteriores cálculos nos ayudarán a obtener la evidencia numérica de la transversalidad de las variedades invariantes asociadas a la órbitas periódicas  $OPP_{\pm}$ .

## 4.9 Secciones de transversalidad.

En esta sección determinaremos tres superficies en las cuales, más adelante, se verificará la intersección transversal entre las variedades invariantes asociadas a las órbitas periódicas parabólicas al infinito determinadas por los escapes parabólicos en las únicas direcciones posibles, las cuales están dadas por las direcciones de los ejes  $x$  y  $y$  en las coordenadas de Jacobi.

La primera superficie de sección corresponde a la sección  $v = 0$  de la superficie de energía negativa que hemos previamente fijado, que denotaremos por  $A$ . Esta resultará un elemento importante para dar la descripción de la dinámica de los escapes en nuestro problema, pues más adelante, en este capítulo se mostrará la intersección transversal de las variedades invariantes al infinito  $W^{u,s}(OPP_{\pm})$  sobre esta sección de Poincaré. Es por lo anterior que se hace necesario dar una descripción con cierto detalle de esta sección; la cual a diferencia de las otras dos secciones que usaremos no resulta ser una sección plana, pero sigue siendo una sección bidimensional.

De la ecuación de energía (1.18) definimos el conjunto

$$A = \{(r, v, \theta, w) \mid v = 0, \theta \in [0, \pi/2], rh \sin^2(2\theta) = 2W(\theta)(w^2 - \sin(2\theta))\}. \quad (4.20)$$

En la Figura 4.10 se muestra que la gráfica correspondiente al conjunto  $A$ , que como hemos dicho es la sección  $v = 0$  de la variedad de energía negativa fijada, posee la misma geometría que la parte superior ( $v \geq 0$ ) de la variedad de colisión total  $M$ .

Observemos que la relación de energía implica que  $w = 0$  cuando  $\theta = 0$  o  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , independientemente del valor de  $r$ . En vista de esto, no es posible dar una descripción del flujo cerca de colisiones dobles usando la terna de coordenadas  $(v, \theta, w)$ , en particular usando la variedad de colisión total  $M$ , que es la sección  $r = 0$  de la superficie de energía fija en la cual estamos trabajando. En vista de esto, resulta más viable considerar las coordenadas  $(r, \theta, w)$  o las coordenadas  $(r, \theta, v)$ .

Las semirectas  $l_-$  y  $l_+$  dadas respectivamente por

$$l_- = \{(r, v, \theta, w) \mid r \geq 0, v = 0, \theta = 0, w = 0\} \quad (4.21)$$

y

$$l_+ = \{(r, v, \theta, w) \mid r \geq 0, v = 0, \theta = \frac{\pi}{2}, w = 0\} \quad (4.22)$$

contenidas en  $A$ , corresponden a las colisiones binarias simultáneas simétricas  $y = 0, x \neq 0$  y  $x = 0, y \neq 0$  dadas en coordenadas de Jacobi, y que llamamos CBS-derechas y CBS-izquierdas, respectivamente en el Capítulo 2. Notemos que éstas rectas no se encuentran sobre la variedad de colisión total  $M$  y, en consecuencia, no se confunden con puntos correspondientes a configuraciones asociadas a colisiones totales del sistema, lo que sí ocurre sobre la variedad de colisión total  $M$ .

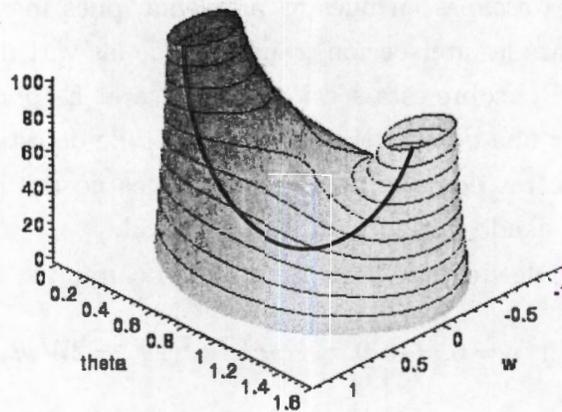


Figura 4.10: Geometría de la sección  $v = 0$  de la variedad de energía  $h = -1/16$ .

Usar la terna de coordenadas  $(r, \theta, w)$  en la superficie de energía que hemos fijado, significa que podemos considerar la sección  $v = 0$ . El flujo no es transverso a la superficie  $A$  en los puntos donde  $v' = 0$  y el conjunto de puntos de  $A$  para los cuales  $v' = 0$  consta de dos curvas simétricas respecto a la variable  $w$ ; éstas curvas son asintóticas a las rectas  $l_-$  y  $l_+$  asociadas a las colisiones binarias simultáneas simétricas del problema rectangular. Una de éstas curvas se muestra al frente de la Figura 4.10. Las curvas  $v' = 0$  sobre la superficie  $A$  la dividen en dos componentes; tales componentes corresponden a los conjuntos de puntos para los cuales  $v'$  tiene diferente signo. Denotaremos por  $A^+$  al subconjunto de puntos de  $A$  para los cuales  $v' > 0$ , mientras que por  $A^-$  denotaremos al subconjunto de puntos de  $A$  donde  $v' < 0$ . En la Figura 4.11 se muestran algunas curvas de nivel de la sección  $v = 0$  y la proyección sobre el plano  $\theta - w$  de la curva en  $A$  donde  $v' = 0$ . Como el conjunto de puntos de  $A$  donde ocurren colisiones binarias simultáneas está dado por las

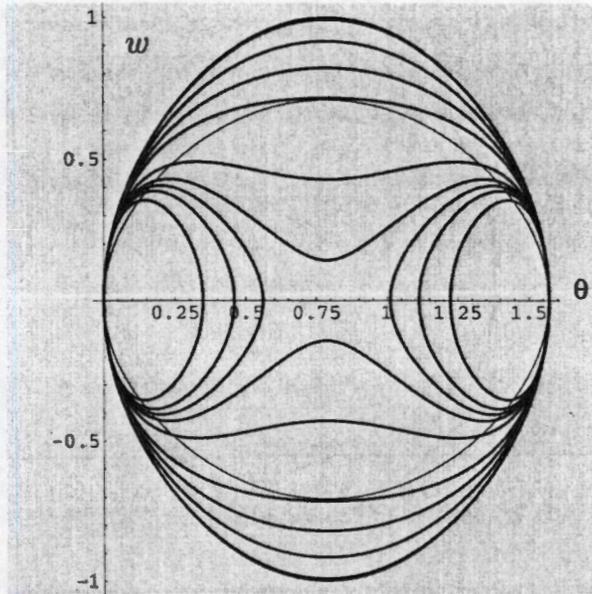


Figura 4.11: Curvas de nivel de la superficie **A** y proyección de la curva en **A** donde  $v' = 0$ .

semirectas  $l_+$  y  $l_-$ , de (4.21), (4.22) y la ecuación para  $\frac{dv}{ds}$  en (1.8) se tiene que  $\frac{dv}{ds} = \sqrt{W(\theta_0)} > 0$ , ( $\theta_0 = 0, \pi/2$ ) sobre tales rectas; por lo que **A**<sup>+</sup> es la región contenida en la superficie **A** que se encuentra acotada por la curva  $w^2 = \sin(2\theta)$  contenida en el plano  $r = 0$  y las curvas sobre **A** donde  $v' = 0$ , ver la Figura 4.10.

La proyección sobre el plano  $\theta - w$  del subconjunto de **A** donde  $v' = 0$  está dado por la curva  $2w^2 = \sin(2\theta)$ . Para mostrar esto, consideremos la relación de energía (1.9), la cual toma la forma  $w^2 = \frac{2rh \sin^2(2\theta)}{4W(\theta)} + \sin(2\theta)$  sobre la superficie **A**; es decir, cuando  $v = 0$ . Por otra parte, de la condición  $v' = 0$  y la segunda ecuación en (1.8) se tiene que  $(rh - \frac{1}{4}v^2) \frac{\sin(2\theta)}{W(\theta)} + 1 = 0$ , ecuación que sobre la sección **A** se reduce a  $rh \frac{\sin(2\theta)}{W(\theta)} + 1 = 0$ ; por lo que  $W(\theta) = -rh \sin(2\theta)$ . Sustituyendo ésta última igualdad en la expresión que la relación de energía toma sobre **A** obtenemos la ecuación deseada. La curva  $2w^2 = \sin(2\theta)$  se muestra como la curva simple cerrada interior en la Figura 4.12.

La curva simple cerrada exterior de la misma Figura 4.12 determinada por la ecuación  $w^2 = \sin(2\theta)$ , es tanto la intersección de la variedad de colisión total  $M$  con el plano  $\theta - w$ , como la intersección de la sección **A** con el mismo plano, como se muestra en la Figura 4.13.

La sección **A** es una de aquéllas secciones donde se mostrará numéricamente

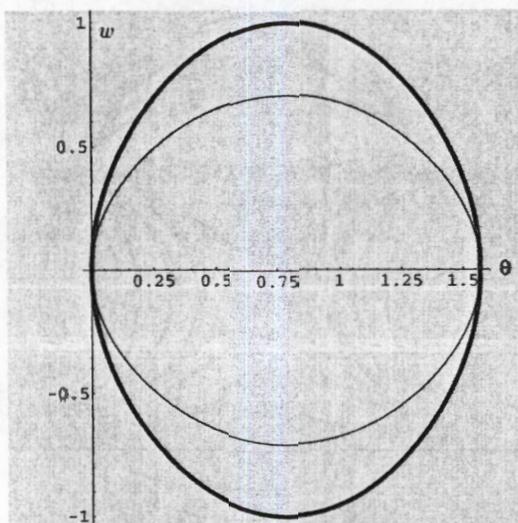


Figura 4.12: La curva exterior es la sección  $v = 0$  de la variedad de colisión total  $M$ , dada por  $w^2 = \sin 2\theta$  y la curva interior corresponde a la gráfica de la ecuación  $2w^2 = \sin 2\theta$  que resulta de proyectar sobre el plano  $(\theta, w)$  la curva en  $A$  donde  $v' = 0$ . La sección  $D$  es la región entre ambas curvas.

la intersección entre las variedades invariantes asociadas a los escapes y capturas de órbitas parabólicas del problema rectangular de cuatro cuerpos.

Para determinar la segunda sección donde verificaremos numéricamente la intersección transversal de las variedades  $W^{u,s}(OPP_{\pm})$  se considera la proyección

$$(r, \theta, w) \mapsto (\theta, w)$$

restringida a la superficie  $A$ . Recordemos que  $A$  consta de dos componentes:  $A^+$  y  $A^-$ . La proyección de  $A$  sobre el plano  $\theta - w$  consta de tres componentes conexas; la primera está dada por el interior de la curva  $2w^2 = \sin(2\theta)$ , mientras que la segunda y tercera componente están dadas por las regiones contenidas entre esta última curva y la curva  $w^2 = \sin(2\theta)$ , como se muestra en la Figura 4.12. Observemos que la semirecta  $l_-$  se proyecta al punto  $(0, 0)$  del plano  $(\theta, w)$  y la semirecta  $l_+$  se proyecta al punto  $(\frac{\pi}{2}, 0)$  del mismo plano  $(\theta, w)$ . Estas rectas están contenidas en  $A^+$  y corresponden a las configuraciones que presentan colisiones binarias simultáneas.

La segunda sección donde estudiaremos numéricamente la transversalidad de los espacios invariantes  $W^{u,s}(OPP_{\pm})$  está dada por el subconjunto  $D$  contenido en el plano  $(\theta, w)$  el cual está acotado por las curvas  $w^2 = \sin 2\theta$  y  $2w^2 = \sin(2\theta)$ ; la primera resulta de intersectar la variedad de colisión total  $M$

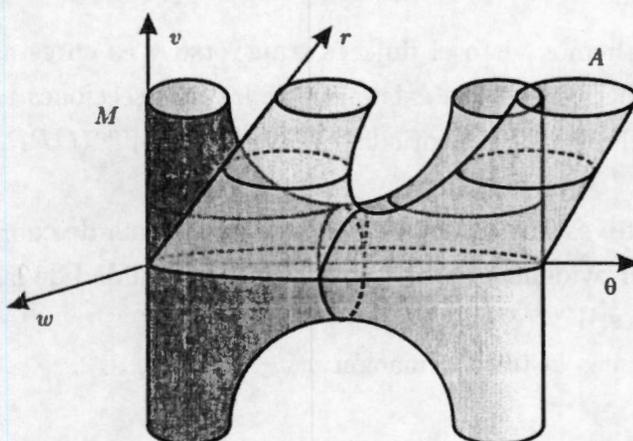


Figura 4.13: La variedad  $M$ , de colisión total y la sección  $A$  se intersectan en la curva simple cerrada  $w^2 = \sin(2\theta)$  contenida en el plano  $\theta - w$ .

con el plano  $v = 0$ , mientras que la segunda es la curva que corresponde a la proyección de las curvas en  $A$  donde  $v' = 0$ , véase la Figura 4.12.

Observemos que la curva exterior que se muestra en la Figura 4.12 determinada por las ecuaciones  $v = 0$ ,  $r = 0$ , y  $w^2 = \sin 2\theta$  que se encuentra contenida en el plano  $(\theta, w)$  es subconjunto tanto en la variedad de colisión total  $M$  como de la superficie  $A$ , ver Figura 4.13. Observemos que ésta es solamente una representación esquemática, puesto que tanto  $M$  como  $A$  son superficies contenidas en el espacio tetradimensional  $(r, v, \theta, w)$  y ambas superficies se intersectan en la curva simple cerrada  $w^2 = \sin(2\theta)$  contenida en el plano  $w, \theta$ . Asimismo es de notar que la sección  $D$  es exactamente la proyección de  $A^+$  sobre el plano  $(w, \theta)$ .

Recordemos que las rectas  $l_+, l_- \subset A^+$ , se proyectan a los puntos  $(0, \pi/2)$  y  $(0, 0)$ , respectivamente; es por ello que la proyección de  $A$  en  $D$  no resulta un difeomorfismo. Como veremos en la siguiente sección, en el conjunto  $D$  sólo podremos mostrar evidencia numérica de la existencia de intersecciones transversales heteroclínicas de las variedades invariantes asociadas a las órbitas periódicas  $OPP_{\pm}$  y es cerca de los puntos  $(0, 0)$  y  $(0, \pi/2)$  del plano  $(w, \theta)$  donde hay dificultades para entender el comportamiento de las intersecciones de éstos espacios invariantes con el plano  $(w, \theta)$ , ver Figura 4.15. Es por ello que se hace necesaria la búsqueda de otra sección donde se puedan mostrar las intersecciones homoclínicas de  $W^{u,s}(OPP_{\pm})$ . Tal sección resulta ser la superficie  $A$  ya descrita, más aún la sección adecuada es el subconjunto de  $A$  dado por  $A^+$ ,

donde, como hemos visto el flujo es transversó y es en esta sección donde se mostrará numéricamente la existencia de las intersecciones tanto homoclínicas como heteroclínicas de las variedades invariantes  $W^{u,s}(OPP_{\pm})$ , véanse las Figuras 4.16, 4.17, 4.18 y 4.19.

Finalmente, es posible usar también otro sistema de coordenadas donde se puede obtener evidencia numérica de la transversalidad de las mismas variedades invariantes  $W^{u,s}(OPP_{\pm})$ .

Consideremos la transformación

$$F : (r, \theta, w) \mapsto (X, Y)$$

dada por la composición de funciones

$$(r, \theta, w) \mapsto (\psi, \rho)$$

y

$$(\psi, \rho) \mapsto (X, Y),$$

donde

$$\psi = \arctan \frac{w}{\theta - \frac{\pi}{4}}, \quad \rho = 1 - \frac{1}{\pi} \arctan r,$$

y

$$X = \rho \cos \psi, \quad Y = \rho \sin \psi.$$

La imagen de la curva  $w^2 = \sin(2\theta)$ , que es una de las fronteras de  $A^+$ , bajo  $F$  está dada por el círculo unitario en el plano  $(X, Y)$  que se muestra en la Figura 4.20, y la imagen de  $A^+$  bajo  $F$  está contenida en el disco unitario del plano  $(X, Y)$ . La tercera sección donde estudiaremos numéricamente la intersección de las variedades  $W^{u,s}(OPP_{\pm})$  está dada precisamente por la imagen en el plano  $(X, Y)$  del conjunto  $A^+$  bajo  $F$ . Y es en ésta tercera sección donde se apreciarán mejor las intersecciones tanto heteroclínicas como homoclínicas de los espacios invariantes  $W^{u,s}(OPP_{\pm})$ .

## 4.10 Resultados numéricos

En esta sección consideraremos la transversalidad de las variedades invariantes bidimensionales al infinito. El estudio que realizaremos será un estudio numérico debido a la dificultad que representa, en general, el poder demostrar

analíticamente que las variedades invariantes  $W^{u,s}(OPP_{\pm})$  asociadas a las órbitas periódicas parabólicas al infinito  $OPP_{\pm}$  se intersectan transversalmente.

Para esto consideraremos las tres secciones determinadas en la sección anterior; por un lado el subconjunto  $A^+$  de la superficie  $A$ , por otro lado la sección  $D$  contenida en el plano  $(\theta, w)$  y finalmente un subconjunto del plano de coordenadas  $(X, Y)$  contenido en el disco unitario. En tales secciones mostraremos la existencia de intersección transversal entre distintas variedades invariantes asociadas a las órbitas periódicas parabólicas al infinito  $OPP_{+,-}$  asociadas a los escapes parabólicos.

La idea es tomar, primero, dos curvas simples cerradas de condiciones iniciales:  $u_+ \subset W^u(OPP)$  y  $s_+ \subset W^s(OPP)$ , como se muestran en la Figura 4.14, para posteriormente, dadas condiciones iniciales  $p$  en  $u_+$  (o en  $s_+$ ) considerar las trayectorias  $\Phi_t(p)$  con  $t > 0$  ( $t < 0$ ) que pasan por estas condiciones iniciales, hasta que la trayectoria por  $p$  intersekte cada una de las secciones elegidas previamente y poder mostrar, numéricamente, la transversalidad entre  $W^u(OPP_+)$  y  $W^s(OPP_+)$ . De manera análoga se consideran también curvas de condiciones iniciales en  $W^u(OPP_-)$  y  $W^s(OPP_-)$ , así como pares de curvas de condiciones iniciales en  $W^u(OPP_-)$  y  $W^s(OPP_+)$  y en el par  $W^u(OPP_+)$  y  $W^s(OPP_-)$ , se continúan tales curvas en la dirección de tiempo adecuada hasta mostrar que los pares de curvas considerados se intersectan transversalmente en las secciones elegidas.

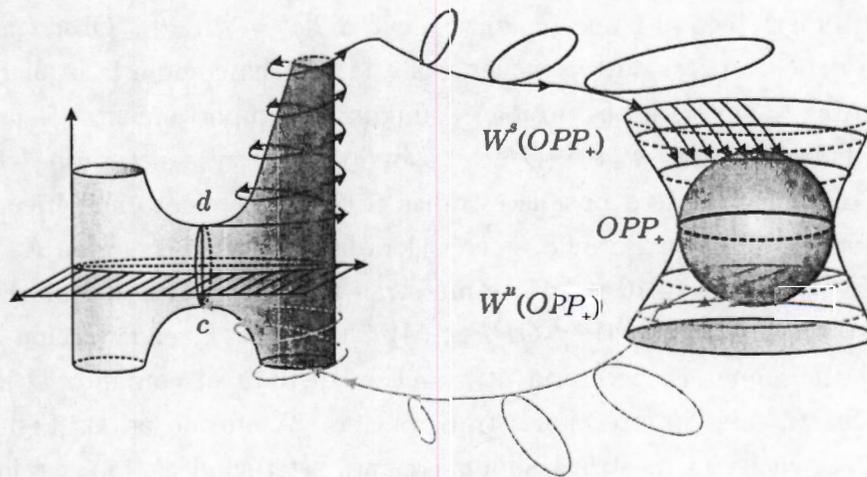


Figura 4.14: Seguimiento de círculos de condiciones iniciales hasta su intersección con una sección adecuada.

A continuación mostramos los resultados numéricos que sustentan la hipótesis de transversalidad de las variedades invariantes  $W^{u,s}(OPP_{\pm})$  asociadas a las órbitas periódicas parabólicas al infinito  $OPP_{\pm}$ . Esta hipótesis son la piedra angular para dar la descripción global del flujo en el problema rectangular de cuatro cuerpos mediante una dinámica simbólica descrita mediante una matriz de transición que se construirá en la siguiente sección en base a la información que se obtiene de las distintas intersecciones transversales de parejas de espacios invariantes  $W^{u,s}(OPP_{\pm})$ . Para los cálculos realizados con el fin de determinar la transversalidad se ha hecho un uso extensivo de la expresión (4.19).

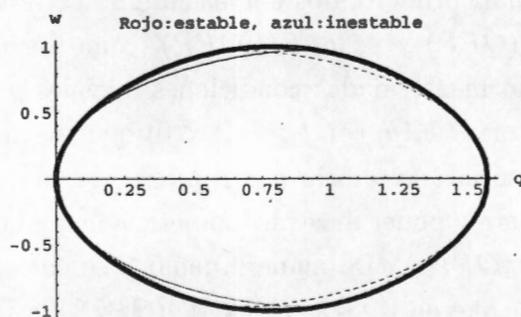


Figura 4.15: Intersección heteroclínica de  $W^{u,s}(OPP_{+})$  y  $W^{u,s}(OPP_{-})$ .

En la Figura 4.15 se muestra la intersección de las variedades invariantes con la sección  $v = 0$  en las coordenadas  $(v, w, \theta)$ . En la región  $D$  acotada por la curva  $w^2 = \sin 2\theta$  que resulta de la intersección de la variedad de colisión total  $M$  con el plano  $(\theta, w)$  y la curva  $2w^2 = \sin(2\theta)$ . Observemos que, cerca de los vértices que se encuentran a la derecha como a la izquierda de la curva  $w^2 = \sin 2\theta$ , no es posible distinguir el comportamiento de las cuatro variedades invariantes  $W^{u,s}(OPP_{\pm})$ , por lo que resulta necesario determinar otra sección donde sea posible estudiar el comportamiento numérico de tales espacios invariantes. Por ello, se considera la superficie de sección  $A$ .

En las Figuras 4.16 y 4.17 se muestran las intersecciones homoclínicas de los espacios invariantes  $W^{u,s}(OPP_{+})$  y  $W^{u,s}(OPP_{-})$ . Es en la sección  $A$  donde verificamos que era necesaria otra sección distinta al conjunto  $D$  donde se percibieran tales intersecciones transversales. Asimismo en las Figuras 4.18 y 4.19 se vuelven a mostrar las intersecciones heteroclínicas, intersecciones heteroclínicas cuya existencia se mostró en la Figura 4.15.

Por otro lado, en la Figura 4.20 se muestra una gráfica que hace explícita la intersección transversal de las variedades invariantes  $W^{u,s}(OPP_{\pm})$  en el plano

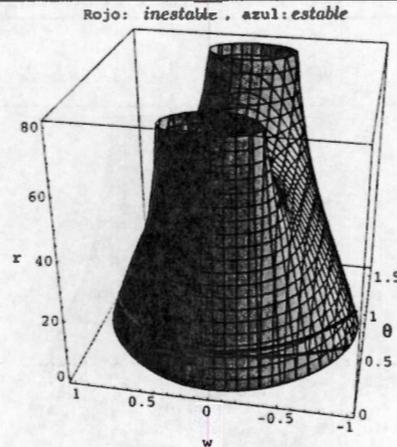


Figura 4.16: Intersección homoclínica de las variedades invariantes asociadas a  $OPP_+$ .

de coordenadas  $(X, Y)$ . Es en esta sección donde se aprecia la transversalidad de las cuatro intersecciones determinadas numéricamente.

En las Figuras 4.21 y 4.22 se muestran detalles más cercanos de las intersecciones transversales homoclínicas de los espacios invariantes  $W^{u,s}(OPP_{\pm})$ .

Finalmente, en la Figura 4.23 se muestra una representación geométrica de la información numérica acerca de las intersecciones transversales de las variedades invariantes de las órbitas periódicas parabólicas al infinito asociadas a los escapes existentes en el problema rectangular de cuatro cuerpos, donde los únicos escapes posibles se pueden dar en las direcciones de los ejes  $x$  y  $y$ .

## 4.11 Construcción de la dinámica simbólica en el problema rectangular

En esta última sección del capítulo usaremos la información dinámica que se obtiene de la existencia de la intersección transversal de las variedades invariantes asociadas a las órbitas periódicas parabólicas determinadas por los escapes parabólicos en las direcciones de los ejes  $x$  y  $y$  para el problema rectangular de cuatro cuerpos con el fin de construir una dinámica simbólica.

Para ello, consideraremos como sección a la imagen  $F(A^+)$  de  $A^+$  bajo  $F$  contenida en el disco unitario del plano  $(X, Y)$ , la cual hemos descrito antes. También tendremos en cuenta a las intersecciones con éste de las variedades

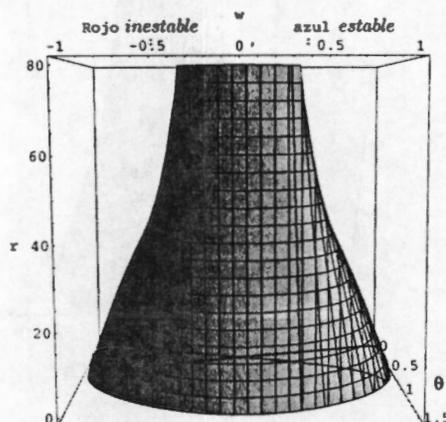


Figura 4.17: Intersección homoclínica de las variedades invariantes asociadas a  $OPP_-$ .

invariantes  $W^{u,s}(OPP_{\pm})$ , como se muestra en la Figura 4.20. Más aún, para resaltar la transversalidad de las intersecciones homoclínicas usaremos una representación geométrica (ver Figura 4.24) más *ad hoc*, esto es posible, debido a que consideraremos únicamente la continuidad de las variedades invariantes y la continuidad de las soluciones respecto a las condiciones iniciales. Es de observarse que, dinámicamente, las representaciones geométricas de las Figuras 4.23 y 4.24 son equivalentes. Pero usaremos la representación correspondiente a la Figura 4.24 para nuestro análisis de la dinámica simbólica.

La sección  $F(A^+)$  del plano  $(X, Y)$ , junto con el mapeo de Poincaré definido sobre  $F(A^+)$  nos permitirá construir una dinámica simbólica para los movimientos oscilatorios del problema rectangular de cuatro cuerpos. Consideremos la sección  $F(A^+)$ , como se muestra en la Figura 4.24, para mostrar la existencia de un conjunto invariante  $\Lambda \subset F(A^+)$  en el cual el mapeo de Poincaré es topológicamente conjugado al shift de Bernoulli definido sobre el conjunto de sucesiones doblemente infinitas definidas sobre un conjunto finito de símbolos.

La forma de obtener tal conjunto invariante es continuar una curva de condiciones iniciales  $s_+$ , contenida en la variedad inestable  $W^u(OPP_+)$  de la curva periódica parabólica al infinito. Esta curva  $s_+$  al ser continuada bajo el flujo, en tiempo positivo, interseca transversalmente la sección  $F(A^+)$  en una curva continua que denotaremos por  $\sigma_+^u$ . Más aún, denotaremos por  $\sigma_{+,-}^{u,s}$  a las intersecciones de  $W^{u,s}(OPP_{+,-})$  con la sección  $F(A^+)$ . No debemos olvidar la existencia de una órbita parabólica de eyección, la cual interseca transver-

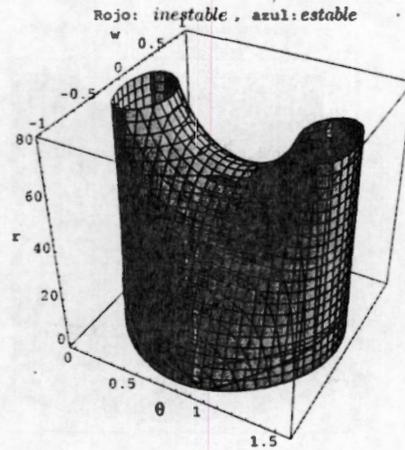


Figura 4.18: Primera intersección transversal heteroclínica entre variedades invariantes.

salmente a  $s_+$ , la curva de condiciones iniciales elegida.

Recordemos que si tomamos una vecindad toroidal  $T$  de radio suficientemente pequeño alrededor de  $OPP_+$ , se tiene que existe un arco  $arc_+^u(d) \subset \bar{W}^u(d) \cap \partial T_+$  el cual tiene uno de sus extremos en la curva  $s_+$ , y para el cual su imagen bajo el flujo se enreda en espiral alrededor de  $u_+ = W^u(OPP_+) \cap \partial T_+$  y además se tiene también la existencia de un segmento  $arc_+^s(c) = \text{symm1}(arc_+^u(d))$ , que es la imagen de  $arc_+^u(d)$  bajo la simetría  $\text{Symm1}$  debida a la reversibilidad. El arco  $arc_+^s(c)$  tiene uno de sus extremos en la curva  $u_+$  obtenida de la intersección de  $W^u(OPP_+)$  con  $\partial T_+$  y su imagen bajo  $\Phi^{-1}$  también se enreda en espiral alrededor de  $W^s(OPP_+) \cap \partial T_+$ .

**SEGUNDA HIPOTESIS DE TRANSVERSALIDAD:** Los pares de curvas (a)  $\sigma_+^u$  y  $\sigma_+^s$ , (b)  $\sigma_-^u$  y  $\sigma_-^s$ , (c)  $\sigma_+^u$  y  $\sigma_-^s$ , y (d)  $\sigma_-^u$  y  $\sigma_+^s$  se intersectan transversalmente sobre  $F(\mathbf{A}^+)$ .

Consideremos los cuatro puntos en  $F(\mathbf{A}^+)$  que resultan de las intersecciones transversales entre los pares siguientes de variedades invariantes: (a)  $W^u(OPP_+)$  y  $W^s(OPP_+)$ , (b)  $W^u(OPP_-)$  y  $W^s(OPP_-)$ , (c)  $W^u(OPP_+)$  y  $W^s(OPP_-)$ , y (d)  $W^u(OPP_-)$  y  $W^s(OPP_+)$ . Sean  $p_1$  un punto contenido en la intersección  $\sigma_+^u \cap \sigma_+^s$  y  $p_2$  un punto contenido en la intersección  $\sigma_+^u \cap \sigma_-^s$ ; es decir,  $p_1$  es un punto homoclínico parabólico asociado a la órbita  $OPP_+$  y  $p_2$  es

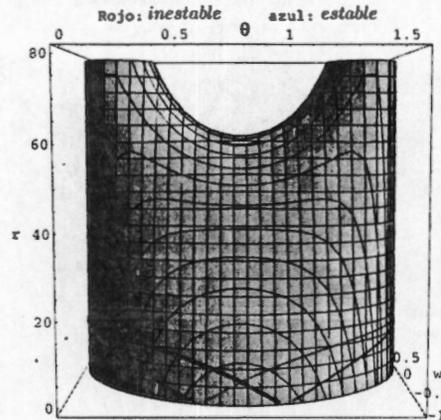


Figura 4.19: Segunda intersección transversal heteroclínica entre variedades invariantes.

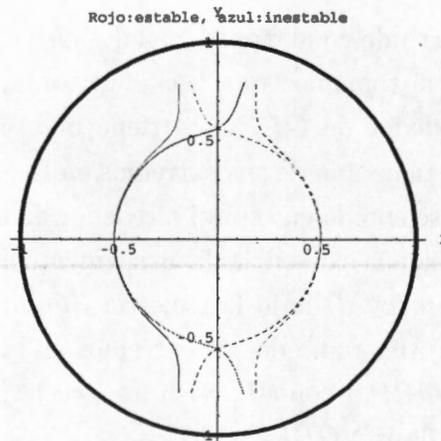


Figura 4.20: Intersecciones transversales en el plano  $(X, Y)$ .

un punto heteroclínico, el cual tiene a la órbita  $OPP_+$  como conjunto  $\alpha$ -límite y a la trayectoria  $OPP_-$  como conjunto  $\omega$ -límite. Consideremos también los puntos  $p_3$  en  $\sigma_-^s \cap \sigma_-^u$  y  $p_4$  en  $\sigma_+^s \cap \sigma_-^u$ , como mostramos en la Figura 4.24.

A continuación construiremos cuatro rectángulos  $R_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , donde cada uno de los rectángulos  $R_i$  tiene por uno de sus vértices al punto  $p_i$ . Primero haremos la construcción del rectángulo  $R_1$  y los restantes serán construidos de forma análoga.

Debido a la hipótesis de transversalidad y a que las variedades invariantes asociadas a  $OPP_+$  son analíticas podemos construir un pequeño rectángulo  $R_1$  con un vértice en  $p_1$ , uno de sus lados contenido en  $\sigma_+^u$ , un segundo lado

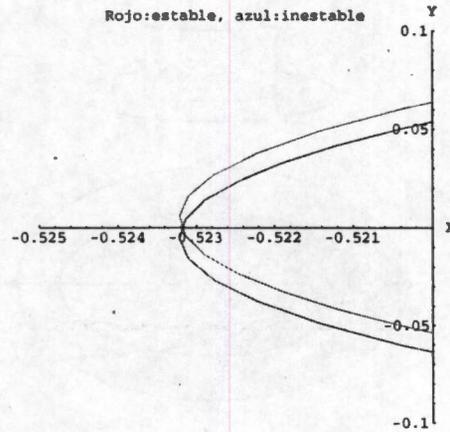


Figura 4.21: Primera intersección transversal homoclínica.

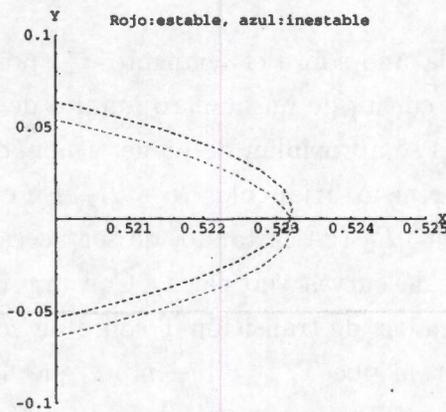


Figura 4.22: Segunda intersección homoclínica.

contenido en  $\sigma_+^s$  y los otros dos lados son segmentos paralelos a  $\sigma_+^s$  y  $\sigma_+^u$ . Como ya lo mencionamos, los tres rectángulos restantes son construidos de manera semejante. Aquellos lados de un rectángulo que sean paralelos a los segmentos de variedades inestables  $\sigma_{\pm}^u$  los llamaremos *lados verticales* de un rectángulo, mientras que los *lados horizontales* serán los lados del rectángulo que sean paralelos a los segmentos de variedades estables  $\sigma_{\pm}^s$ . De la misma manera definiremos *curvas o bandas verticales* y *curvas o bandas horizontales*.

Consideremos un punto  $p \in F(A^+)$  y tomemos  $\Phi_{t(p)}(p)$  (donde  $t(p) = \inf\{t > 0 \mid \Phi_t(p) \in F(A^+)\}$ ) el siguiente punto en la trayectoria positiva por  $p$  que se encuentra en  $F(A^+)$ . Si consideramos rectángulos suficientemente pequeños, la transformación de Poincaré sobre  $F(A^+)$  cerca de los puntos  $p_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , está bien definida. Debido a que el rectángulo  $R_1$  tiene dos lados

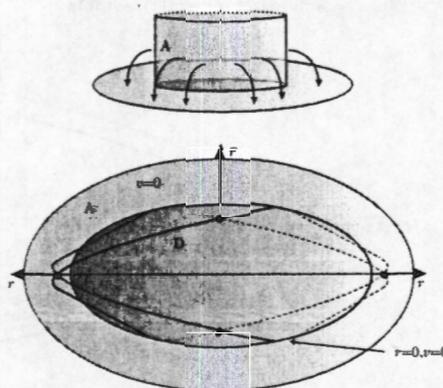


Figura 4.23: Representación geométrica de la información numérica sobre las secciones  $D$  y  $A$ .

con un extremo cada uno sobre el segmento  $\sigma_+^s$ , por la Proposición 4.5.1 su imagen bajo el flujo consta de un número infinito de bandas de tal forma que además éstas bandas se aproximan de manera monótona al segmento  $\sigma_+^u$ ; por lo que deben intersectar los triángulos  $R_1$  y  $R_2$ . En consecuencia, se tiene que  $\Phi(R_1) \cap R_1$  y  $\Phi(R_1) \cap R_2$  (descartando, de ser necesario, una cantidad finita de bandas) constan de curvas verticales. Con argumentos semejantes podemos construir una matriz de transición  $T$  sobre un conjunto de cuatro índices  $\{1, 2, 3, 4\}$  de tal forma que  $T_{i,j} = 1$  siempre que  $\Phi(R_i) \cap R_j$  es no vacía y  $T_{i,j} = 0$  si la intersección anterior es el conjunto vacío, para  $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} R_1 & R_2 & R_3 & R_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (4.23)$$

De esta manera hemos demostrado el siguiente resultado

**Teorema 4.11.1.** *La matriz de transición entre los cuatro rectángulos  $R_i, i = 1, 2, 3, 4$  está dada por (4.23).*

Es de notar el hecho de que  $T^t$  la matriz transpuesta de  $T$  es precisamente la matriz de transición asociada a  $\Phi^{-1}$ , donde la entrada  $(i, j)$  de la matriz obtenida es igual a 1 si la intersección  $\Phi^{-1}(R_j) \cap R_i$  es no vacía y en caso contrario dicha entrada se anula.

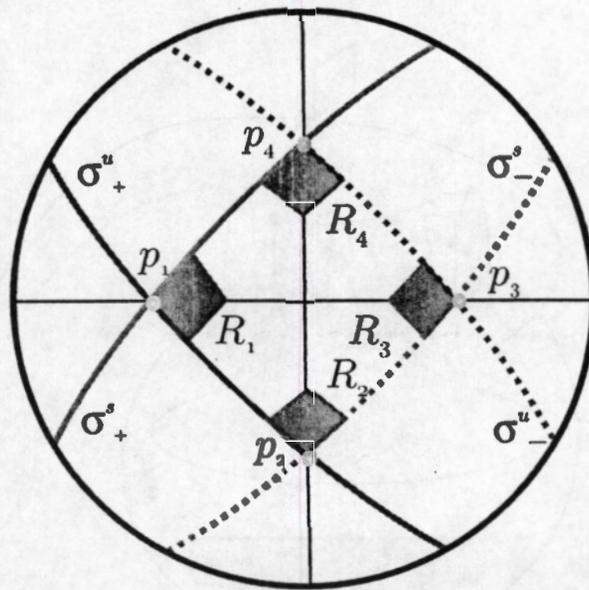


Figura 4.24: Representación geométrica de la información numérica sobre el plano  $(X, Y)$ .

En la Figura 4.26 se muestra el comportamiento dinámico del flujo global asociado a los escapes en el problema rectangular de cuatro cuerpos.

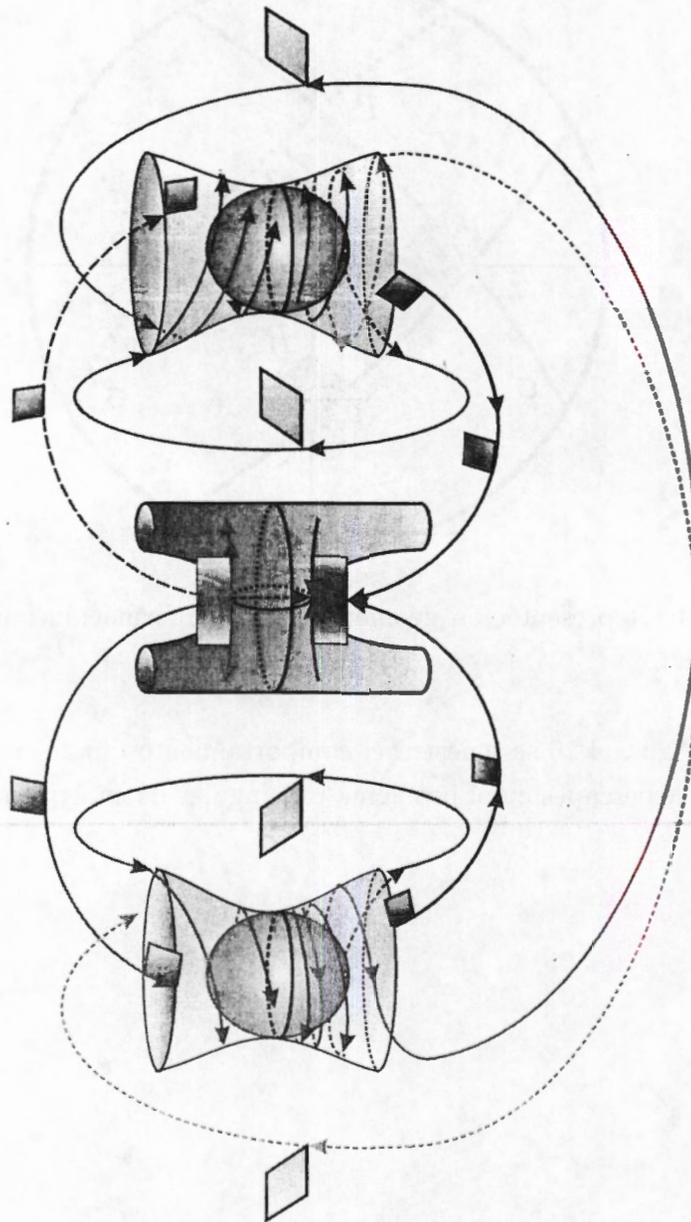


Figura 4.25: Flujo del problema rectangular de cuatro cuerpos. En la parte superior e inferior se muestran las variedades al infinito asociadas a los escapes parabólicos en las direcciones  $y$  y  $x$ , respectivamente, mientras que al centro se muestra la variedad de colisión total, así como la conexión entre los puntos de equilibrio dada por la órbita homotética. Recordemos que en el capítulo 2 demostramos también la existencia de una familia infinita de órbitas conectando los puntos de equilibrio sobre la variedad de colisión total.

---

---

## CAPÍTULO 5

---

# ESCAPES EN EL PROBLEMA COLINEAL

### 5.1 Introducción

El problema colineal simétrico de cuatro cuerpos y el problema rectangular son los únicos subsistemas del problema trapecial de cuatro cuerpos y que además poseen dos grados de libertad. El interés en el estudio del problema colineal simétrico ha surgido nuevamente después de varios años debido a la aparición de dos artículos, en los cuales se ha retomado su estudio. En los artículos [49] y [56], los estudios del problema colineal que se realizan son numéricos, restringiéndose al caso en el cual todas las partículas del sistema son unitarias; mostrando aún en este caso la gran complejidad que encierra la dinámica asociada a este problema. En el primero de ellos se plantea como un problema abierto la existencia de movimientos oscilatorios en el problema colineal. Sweetman, en [56] establece que el problema de cuatro cuerpos aparece físicamente como la interacción entre dos sistemas de estrellas binarias. Por otra parte, en [38] y [39] también se estudia numéricamente la interacción entre pares de estrellas binarias. En este capítulo, en el cual seguimos también una dirección numérica en el estudio del problema, se considera el estudio de la dinámica de los movimientos de escape en el problema colineal simétrico de cuatro cuerpos y se muestra la existencia de movimientos oscilatorios para ciertos valores del parámetro de masas.

## 5.2 Variedad de órbitas parabólicas

En esta sección estudiamos el conjunto de órbitas de escape a infinito sobre el nivel de energía  $h = -1/4$ . De la forma de la región de Hill correspondiente al problema colineal, ver Figura 1.7, se tiene que únicamente pueden darse escapes en las direcciones del eje  $y$  o de la recta  $y = \sqrt{\alpha}x$ . Más aún, en el caso de escapes en la dirección del eje  $y$ , éstos pueden ocurrir, después de presentar una sucesión de colisiones  $x = 0$ . Estudiaremos el caso de órbitas parabólicas, que son trayectorias no acotadas tales que su velocidad tiende asintóticamente a cero.

En el capítulo anterior hemos definido órbitas de escape parabólico y órbitas de escape hiperbólico. Como el problema colineal es un problema con dos grados de libertad al igual que el problema rectangular y debido a que usamos las mismas variables  $x$  y  $y$  para modelarlos, las definiciones permanecen inalteradas.

En este capítulo estudiaremos los escapes parabólicos que ocurren en la dirección de la coordenada  $y$ , es decir,  $y \rightarrow \infty$  y  $\dot{y} \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , mientras que  $x$  permanece acotado. Véase Figura 5.1. Esto resulta análogo a lo que hicimos en el capítulo anterior para el problema rectangular de cuatro cuerpos.

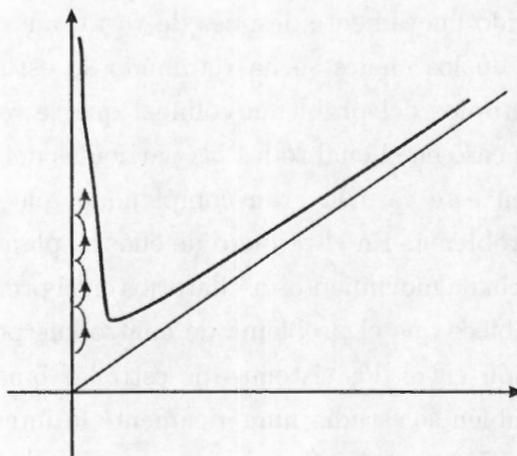


Figura 5.1: Escapes en la dirección del eje  $y$ .

Ya que queremos estudiar el comportamiento de las trayectorias cuando  $\lim_{t \rightarrow \infty} y = \infty$ , se proponen los cambios de coordenadas

$$y = \frac{1}{q^2} \quad \text{y} \quad p = p_y, \quad (5.1)$$

En las coordenadas  $(q, x, p, p_x)$ , se sigue presentando una singularidad cuando  $x = 0$ , es decir, al chocar el binario interior de la configuración colineal, como lo muestra el conjunto de ecuaciones diferenciales dado por

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{p_x}{2}, \\ \frac{dq}{dt} &= -\frac{q^3 p}{4}, \\ \frac{dp_x}{dt} &= -\frac{1}{2x^2} + 2\alpha^2 q^4 \left\{ \frac{1}{1 - \sqrt{\alpha x q^2}} - \frac{1}{1 + \sqrt{\alpha x q^2}} \right\}, \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\alpha^{5/2} q^4}{2} - 2\alpha^{3/2} q^4 \left\{ \frac{1}{1 - \sqrt{\alpha x q^2}} + \frac{1}{1 + \sqrt{\alpha x q^2}} \right\}, \end{aligned}$$

las cuales pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{p_x}{2}, \\ \frac{dq}{dt} &= -\frac{1}{4} q^3 p, \\ \frac{dp_x}{dt} &= -\frac{1}{2x^2} + \frac{8\alpha^{5/2} x q^6}{(1 - \alpha x^2 q^4)^2}, \\ \frac{dp}{dt} &= -\alpha^{3/2} q^4 \left( \frac{\alpha}{2} + 4 \frac{1 + \alpha x^2 q^4}{(1 - \alpha x^2 q^4)^2} \right). \end{aligned}$$

Estas ecuaciones, como hemos dicho, presentan singularidades cuando  $x = 0$ ; es decir, al darse choques del par interno de partículas del sistema. Para regularizar estas colisiones binarias simples consideramos una regularización de tipo Levi Civita dada por el cambio de variables

$$x = \xi^2 \quad \text{y} \quad p_x = \frac{\eta}{\xi}. \quad (5.2)$$

De esta forma las ecuaciones de movimiento se transforman en

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= \frac{\eta}{4\xi^2}, \\ \frac{d\eta}{dt} &= \left( \frac{\eta^2}{4\xi^3} - \frac{1}{2\xi^3} \right) + 2\alpha^2 \xi q^4 \left( \frac{1}{(1 - \sqrt{\alpha\xi^2 q^2})^2} - \frac{1}{(1 + \sqrt{\alpha\xi^2 q^2})^2} \right), \\ \frac{dq}{dt} &= -\frac{pq^3}{4}, \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\alpha^{5/2} q^4}{2} - 2\alpha^{3/2} q^4 \left( \frac{1}{(1 - \sqrt{\alpha\xi^2 q^2})^2} + \frac{1}{(1 + \sqrt{\alpha\xi^2 q^2})^2} \right),\end{aligned}$$

que aún presentan singularidad cuando  $\xi = 0$ , por ello se considera el reescalamiento del tiempo

$$\frac{dt}{d\tau} = 4\xi^2,$$

con lo cual las ecuaciones de movimiento están dadas por

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{d\tau} &= \eta, \\ \frac{d\eta}{d\tau} &= \left( \frac{\eta^2}{\xi} - \frac{2}{\xi} \right) + 8\alpha^2 \xi^3 q^4 \left( \frac{1}{(1 - \sqrt{\alpha\xi^2 q^2})^2} - \frac{1}{(1 + \sqrt{\alpha\xi^2 q^2})^2} \right), \\ \frac{dq}{d\tau} &= -\xi^2 p q^3, \\ \frac{dp}{d\tau} &= -2\alpha^{5/2} \xi^2 q^4 - 8\alpha^{3/2} \xi^2 q^4 \left( \frac{1}{(1 - \sqrt{\alpha\xi^2 q^2})^2} + \frac{1}{(1 + \sqrt{\alpha\xi^2 q^2})^2} \right),\end{aligned}$$

con relación de energía

$$H = \left( \frac{\eta^2}{4\xi^2} - \frac{1}{2\xi^2} \right) + \frac{p^2}{4} - \frac{1}{2}\alpha^{5/2} q^2 - 2\alpha^{3/2} q^2 \left( \frac{1}{1 - \sqrt{\alpha\xi^2 q^2}} + \frac{1}{1 + \sqrt{\alpha\xi^2 q^2}} \right).$$

Si fijamos el valor  $H = -1/4$  para la energía, ésta toma la forma

$$\frac{\eta^2}{\xi} - \frac{2}{\xi} = -\xi \left( 1 + p^2 - 2\alpha^{5/2} q^2 \xi - 8\alpha^{3/2} q^2 \xi^2 \left( \frac{1}{1 - \sqrt{\alpha\xi^2 q^2}} + \frac{1}{1 + \sqrt{\alpha\xi^2 q^2}} \right) \right) \quad (5.3)$$

por lo que las ecuaciones de movimiento pueden escribirse como

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{d\tau} &= \eta, \\ \frac{d\eta}{d\tau} &= -\xi \left( 1 + p^2 - 2\alpha^{5/2} q^2 \xi - 8\alpha^{3/2} q^2 \xi^2 \left( \frac{1}{1 - \sqrt{\alpha} \xi^2 q^2} + \frac{1}{1 + \sqrt{\alpha} \xi^2 q^2} \right) \right) \\ &\quad + 8\alpha^2 \xi^3 q^4 \left( \frac{1}{(1 - \sqrt{\alpha} \xi^2 q^2)^2} - \frac{1}{(1 + \sqrt{\alpha} \xi^2 q^2)^2} \right),\end{aligned}\quad (5.4)$$

$$\begin{aligned}\frac{dq}{d\tau} &= -\xi^2 p q^3, \\ \frac{dp}{d\tau} &= -2\alpha^{5/2} \xi^2 q^4 - 8\alpha^{3/2} \xi^2 q^4 \left( \frac{1}{(1 - \sqrt{\alpha} \xi^2 q^2)^2} + \frac{1}{(1 + \sqrt{\alpha} \xi^2 q^2)^2} \right),\end{aligned}$$

mientras que la relación de energía (5.3) toma la forma

$$2 = \eta^2 + \xi^2(1 + p^2) - 2\alpha^{5/2} q^2 \xi^2 - 8\alpha^{3/2} q^2 \xi^2 \left( \frac{1}{1 - \sqrt{\alpha} \xi^2 q^2} + \frac{1}{1 + \sqrt{\alpha} \xi^2 q^2} \right). \quad (5.5)$$

Notemos que la singularidad  $\xi = 0$  ha desaparecido debido a que estamos sobre un nivel de energía negativo fijo, con  $h = -1/4$ , y hemos usado la relación de energía (5.3) para mostrar que sobre este nivel fijo de energía la singularidad  $\xi = 0$  desaparece. De esta manera las ecuaciones no presentan singularidades y podemos estudiar las trayectorias para las cuales  $y \rightarrow \infty$ ,  $\dot{y} \rightarrow 0$ , ya que hemos regularizado las colisiones binarias simultáneas ( $x = 0$  en las coordenadas originales).

Para terminar esta sección notemos que aún habiendo fijado un valor negativo para la energía ( $h = -1/4$ ), los resultados que siguen no son válidos solamente para el nivel de energía bajo consideración, sino que siguen siendo ciertos para cualquier nivel de energía siempre que este siga siendo negativo, puesto que las dinámicas son las mismas sobre los niveles de energía para  $h$  con mismo signo.

### 5.3 Descripción de las variedades al infinito

Definimos la variedad al infinito de los escapes en la dirección de la coordenada  $y$  como el conjunto

$$V_\infty(y) = \{(\eta, \xi, q, p) \mid q = 0, \eta^2 + \xi^2(1 + p^2) = 2\}. \quad (5.6)$$

A continuación se describe la topología de la variedad al infinito.

**Proposición 5.3.1.**  $V_\infty(y)$  es, topológicamente, una esfera menos dos puntos.

*Demostración.* Consideremos el siguiente cambio de variable

$$\tilde{\eta} = \eta \sqrt{\frac{1 - W^2}{2}},$$

entonces la segunda relación que aparece en la definición  $V_\infty(y)$  puede reescribirse como

$$2\tilde{\eta}^2 + \xi^2(1 + p^2)(1 - W^2) + 2W^2 = 2. \quad (5.7)$$

Ahora bien, tomamos  $W$  tal que  $|W| \neq 1$  y que además satisfaga la relación  $(1 + p^2)(1 - W^2) = 2$ ; es decir, tomemos  $W = \sqrt{\frac{p^2 - 1}{1 + p^2}}$ . Entonces la ecuación (5.7) toma la forma

$$\tilde{\eta}^2 + \xi^2 + W^2 = 1, \quad (5.8)$$

la cual es la ecuación de la esfera  $S^2$ . Pero no debemos olvidar que  $|W| \neq 1$ , por lo que  $V_\infty(y)$  es una esfera menos los dos polos  $(0, 0, \pm 1)$ ; es decir,  $V_\infty(y) \sim S^2 - \{(0, 0, \pm 1)\}$ .

□

## 5.4 Flujo sobre la variedad al infinito

Cuando se considera la variedad al infinito, todo los puntos del conjunto para los cuales  $\xi = 0$  (es decir,  $x = 0$ ) satisface la igualdad  $\eta^2 = 2$ , y en consecuencia, la componente  $\frac{d\xi}{dt}$  del campo vectorial (5.4) no se anula. Por lo tanto las otras coordenadas pueden tomar cualquier valor. Por lo que el conjunto de colisiones binarias

$$\begin{aligned} C &= \{(\xi, \eta, q, p) \in E_h \mid \xi = 0\} \\ &= \{(\xi, \eta, q, p) \in E_h \mid \xi = 0, \eta^2 = 2\} \end{aligned}$$

es una variedad de dimensión igual a 2. Sobre este conjunto el campo vectorial es transversal en la dirección de la coordenada  $\xi$ . De esta manera hemos extendido el flujo al conjunto de colisiones binarias como un flujo transversal.

Si buscamos ahora órbitas parabólicas al infinito ( $p = 0, q = 0$ ), el flujo queda determinado por el conjunto de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}
 \frac{d\xi}{d\tau} &= \eta, \\
 \frac{d\eta}{d\tau} &= -\xi, \\
 \frac{dq}{d\tau} &= 0, \\
 \frac{dp}{d\tau} &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{5.9}$$

mientras que la relación de energía queda dada por

$$\xi^2 + \eta^2 = 2.$$

De esta manera la única solución de (5.9), es una órbita periódica. Esta órbita será llamada *órbita periódica parabólica en el infinito* y simplemente será denotada por *OPP*. Esta trayectoria será muy importante para el estudio de órbitas parabólicas, pero no solamente desde el punto de vista cualitativo, sino también para los estudios numéricos que realizaremos de los escapes.

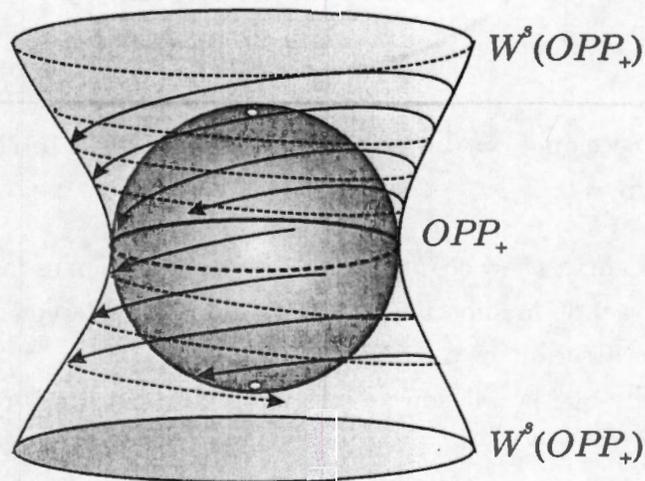


Figura 5.2: Variedad al infinito y las variedades invariantes asociadas a la trayectoria *OPP*.

Por el teorema de McGehee [36], la trayectoria *OPP* tiene asociadas dos variedades invariantes, una estable y otra inestable, ambas de dimensión 2 y las cuales son analíticas, excepto quizá en los puntos sobre la trayectoria *OPP*. Denotemos estas variedades estable e inestable por  $W^s(OPP)$  y  $W^u(OPP)$ , respectivamente.

## 5.5 Superficie de sección.

La superficie de sección que usaremos para estudiar numéricamente la transversalidad de las variedades invariantes asociadas a la órbita periódica parabólica al infinito  $OPP$  la describimos en términos de dos de las coordenadas de McGehee  $(r, v, \theta, w)$  y está dada por la región acotada por la sección  $v = 0$  de la variedad de colisión total, región contenida en el plano  $(w, \theta)$ . La sección  $v = 0$  de  $M$  está dada por la curva cuya ecuación es  $w^2 = \cos \theta (\sin \theta - \sqrt{\alpha} \cos \theta)$ . En la Figura 5.3 se muestra la curva para el valor  $\alpha = 0$ .

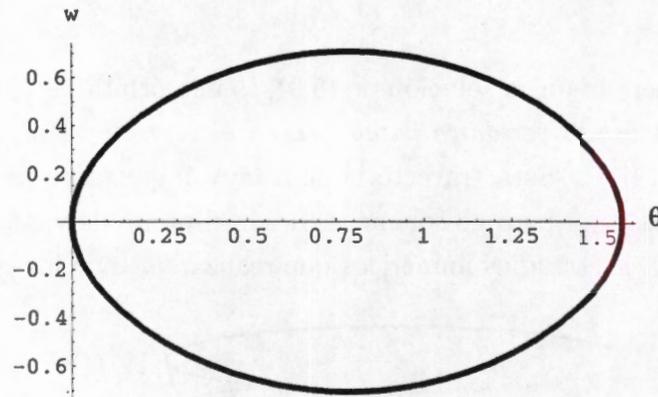


Figura 5.3: Sección  $v = 0$ , de la variedad de colisión total en el problema colineal para  $\alpha = 0$ .

La misma curva  $w^2 = \cos \theta (\sin \theta - \sqrt{\alpha} \cos \theta)$  también es la sección  $r = 0$  de la sección  $v = 0$  de la superficie de energía con energía constante  $h = -1/4$ , superficie que describimos a continuación.

Observemos que la relación de energía (1.24), con  $v = 0$  puede reescribirse como

$$W(\theta) \{w^2 - \cos \theta (\sin \theta - \sqrt{\alpha} \cos \theta)\} = \cos^2 \theta \{\sin \theta - \sqrt{\alpha} \cos \theta\}^2 r h, \quad (5.10)$$

de esta forma la sección  $v = 0$  de la superficie de energía constante  $h = -1/4$  está dada por

$$A = \{(r, v, \theta, w) \mid v = 0, \theta \in [\theta_\alpha, \pi/2], \text{ y (5.10) se satisface.}\} \quad (5.11)$$

Observemos que para  $\theta = \theta_\alpha, \pi/2$  se obtiene que  $w = 0$ , independientemente del valor de  $r$  y tales conjuntos que resultan ser dos semirectas corresponden a

las colisiones binarias simultáneas simétricas y a las colisiones binarias del par interior de partículas, respectivamente.

En la Figura 5.4 se muestra que la geometría de la superficie **A** es la misma que la de la parte superior de la variedad de colisión total  $M$ , mientras que en la Figura 5.5 se muestran algunas de las curvas de nivel de la superficie **A** para al valor  $\alpha = 1$ .

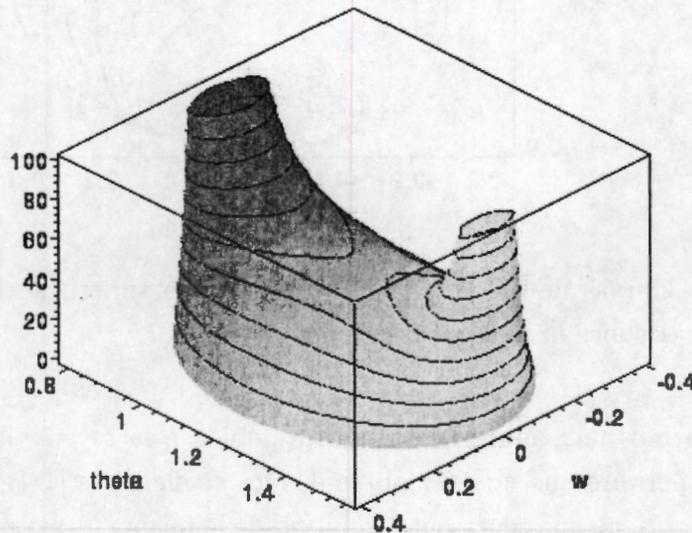


Figura 5.4: Sección  $v = 0$  de la superficie de energía  $H = -1/4$  con  $\alpha = 1$ .

## 5.6 Aproximaciones numéricas de $W^{u,s}(OPP)$

Al igual que se hizo en la sección 4.8 en esta sección hallaremos aproximaciones numéricas para las variedades invariantes asociadas a la órbita  $OPP$ . Para ello usamos también coordenadas polares canónicas de la forma

$$\psi = \sqrt{2L} \cos(l), \quad \eta = \sqrt{2L} \sin(l)$$

y se encuentra una representación local para  $W^u(OPP)$  de la forma

$$q = F(p, l) = \sum_{n=0}^N b_n(l) p^n + R_N.$$

Por la reversibilidad del sistema se obtiene de manera inmediata una representación semejante para  $W^s(OPP)$ .

Proyección sobre  $v=0$  de la variedad de energía en el problema colineal

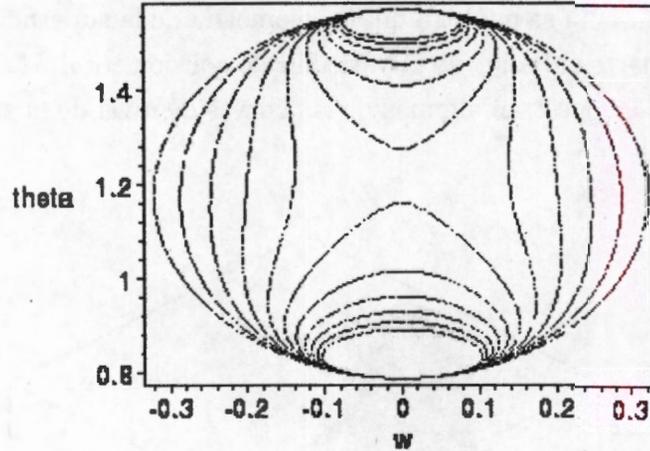


Figura 5.5: Curvas de nivel de la proyección de la superficie de energía  $H = -1/4$  y  $\alpha = 1$  sobre la sección  $v = 0$ .

Como hemos mencionado, la simetría debida a la reversibilidad es importante pues permite que una vez obtenidos los coeficientes  $b_n(l)$ , de manera inmediata se obtiene una representación local de la misma forma para  $W^s(OPP)$ .

La reversibilidad se describe mediante

$$(p, q, l, \tau) \mapsto (-p, q, -l, -\tau)$$

y se obtiene del hecho que la energía cinética en sus coordenadas originales es una forma cuadrática en función de las velocidades. La variedad estable es la gráfica de la función

$$q = F(-p, -l).$$

De la invariancia de las variedades  $W^{u,s}(OPP)$  bajo el sistema de ecuaciones diferenciales (4.13), se obtiene la ecuación de invariancia (4.18). Esta ecuación se puede resolver hasta un cierto orden resolviendo de manera recursiva un sistema de ecuaciones diferenciales para obtener los valores de los coeficientes  $b_n(l)$ . Nosotros hemos usado *Mathematica* para calcular dichos coeficientes hasta treceavo orden. Por lo que la representación numérica de la variedad inestable  $W^u(OPP)$  está dada por

$$\begin{aligned}
q &= F(p, l) \\
&= p \frac{1}{\sqrt{2\alpha^{3/2}(8+\alpha)}} - 5p^5 \frac{1}{2\sqrt{2}\alpha^2(8+\alpha)^3\sqrt{\alpha^{3/2}(8+\alpha)}} \\
&\quad + 3p^7 \frac{-64+67\alpha}{64\sqrt{2}\alpha^2(8+\alpha)^4\sqrt{\alpha^{3/2}(8+\alpha)}} \\
&\quad + p^8 \frac{\sqrt{\alpha^{3/2}(8+\alpha)}\cos^3(l)(6\sin(l)+\sin(3l))}{\sqrt{2}\alpha^5(8+\alpha)^5} \\
&\quad - p^9 \frac{-5960+630\alpha+18432\alpha^2-16512\alpha^3+5352\alpha^4+963\alpha^5}{320\sqrt{2}\alpha^4(8+\alpha)^6\sqrt{\alpha^{3/2}(8+\alpha)}} \\
&\quad - p^{10} \frac{\sqrt{\alpha^{3/2}(8+\alpha)}\cos^3(l)}{40\sqrt{2}\alpha^5(8+\alpha)^6} \{736-628\alpha-8(-94+37\alpha)\cos(2l) \\
&\quad + 3(128+\alpha)\cos(4l)+48\cos(6l)+6\alpha\cos(6l)\} \\
&\quad + p^{11} \frac{1}{2048\sqrt{2}\alpha^5(8+\alpha)^7\sqrt{\alpha^{3/2}(8+\alpha)}} \{359424-123008\alpha-159632\alpha^2 \\
&\quad -455024\alpha^3+387584\alpha^4-88640\alpha^5+27288\alpha^6+5667\alpha^7 \\
&\quad -24(8+\alpha)^2(468\cos(2l)+204\cos(4l)+44\cos(6l)+3\cos(8l))\} \\
&\quad - p^{12} \frac{1}{1120\sqrt{2}\alpha^7(8+\alpha)^8} \{\sqrt{\alpha^{3/2}(8+\alpha)}\cos^3(l)(-146160+13580\alpha \\
&\quad +839168\alpha^2-547264\alpha^3+112752\alpha^4+24284\alpha^5+8(-1540+945\alpha \\
&\quad +129152\alpha^2-67936\alpha^3+2778\alpha^4+1661\alpha^5)\cos(2l) \\
&\quad -2(-5880-735\alpha-295936\alpha^2+103168\alpha^3+18496\alpha^4 \\
&\quad +122\alpha^5)\cos(4l)+1120\cos(6l)+140\alpha\cos(6l)+249344\alpha^2\cos(6l) \\
&\quad -1472\alpha^3\cos(6l)-8024\alpha^4\cos(6l)-493\alpha^5\cos(6l) \\
&\quad +74240\alpha^2\cos(8l)+18880\alpha^3\cos(8l)+1240\alpha^4\cos(8l)+5\alpha^5\cos(8l) \\
&\quad +7680\alpha^2\cos(10l)+2880\alpha^3\cos(10l)+360\alpha^4\cos(10l) \\
&\quad +15\alpha^5\cos(10l))\sin(10l) \\
&\quad + p^{13} \frac{1}{4300800\sqrt{2}\alpha^6(8+\alpha)^9\sqrt{\alpha^{3/2}(8+\alpha)}} \{-75(10361344-852632448\alpha \\
&\quad -1937877152\alpha^2-889600000\alpha^3+274288440\alpha^4-392356249\alpha^5 \\
&\quad +39235156\alpha^6+3502080\alpha^7+5157120\alpha^8+1981056\alpha^9 \\
&\quad +150978\alpha^{10})-28\alpha(8+\alpha)^3(-3600(-1500+767\alpha)\cos(2l) \\
&\quad -600(-5836+2029\alpha)\cos(4l)+1647200\cos(6l)-251450\alpha\cos(6l) \\
&\quad +521760\cos(8l)+645\alpha\cos(8l)+94176\cos(10l)+7722\alpha\cos(10l) \\
&\quad +6240\cos(12l)+780\alpha\cos(12l))\}
\end{aligned}$$

la cual, como hemos dicho es una aproximación de treceavo orden para la variedad inestable de la órbita parabólica periódica al infinito. En consecuencia, como ya se mencionó, obtenemos también una aproximación de treceavo orden para la variedad estable de la misma órbita parabólica al infinito.

Los cálculos anteriores nos proveerán de una herramienta muy útil para mostrar la intersección transversal de las variedades invariantes  $W^{u,s}(OPP)$  asociadas a la órbita parabólica periódica en el infinito para ciertos valores del parámetro de masas  $\alpha$  y en consecuencia mostrar la existencia de movimientos oscilatorios en el problema colineal simétrico de cuatro cuerpos para esos valores del parámetro de masas.

## 5.7 Transversalidad de las variedades invariantes al infinito

En esta sección consideraremos la cuestión acerca de la transversalidad de las variedades invariantes bidimensionales al infinito asociadas a la órbita  $OPP$ . El estudio que realizaremos será un estudio numérico. Para su realización debemos elegir una buena sección transversal donde se muestre que efectivamente ambas variedades se intersectan transversalmente. Esta sección de Poincaré ha sido descrita en la sección 5.5.

La idea es considerar dos curvas simples cerradas de condiciones iniciales:  $\gamma^u \subset W^u(OPP)$  y  $\gamma^s \subset W^s(OPP)$ . Considerar el flujo  $\Phi_t(\gamma^u)$  con  $t > 0$  y  $\Phi_t(\gamma^s)$ , con  $t < 0$  de estos conjuntos de condiciones iniciales hasta que éstos intersecten la sección de Poincaré que hemos elegido. Se mostrará, numéricamente, que las variedades invariantes  $W^{u,s}(OPP)$  se intersectan transversalmente sobre la sección elegida para esos valores del parámetro de masas  $\alpha$ .

En las Figuras 5.6, 5.7 y 5.8 se muestra que para algunos valores del parámetro de masas  $\alpha$  las variedades invariantes  $W^{u,s}(OPP)$  no se intersectan, mientras que en caso de existir intersección no vacía, como ocurre para otros valores de  $\alpha$ , la intersección puede constar de uno, dos, tres o cuatro puntos.

La existencia de al menos un punto en la intersección de las variedades invariantes  $W^u(OPP)$  y  $W^s(OPP)$  tiene como consecuencia la existencia de órbitas oscilatorias en el problema colineal simétrico de cuatro cuerpos, dando una respuesta afirmativa al problema planteado en la introducción de este capítulo.

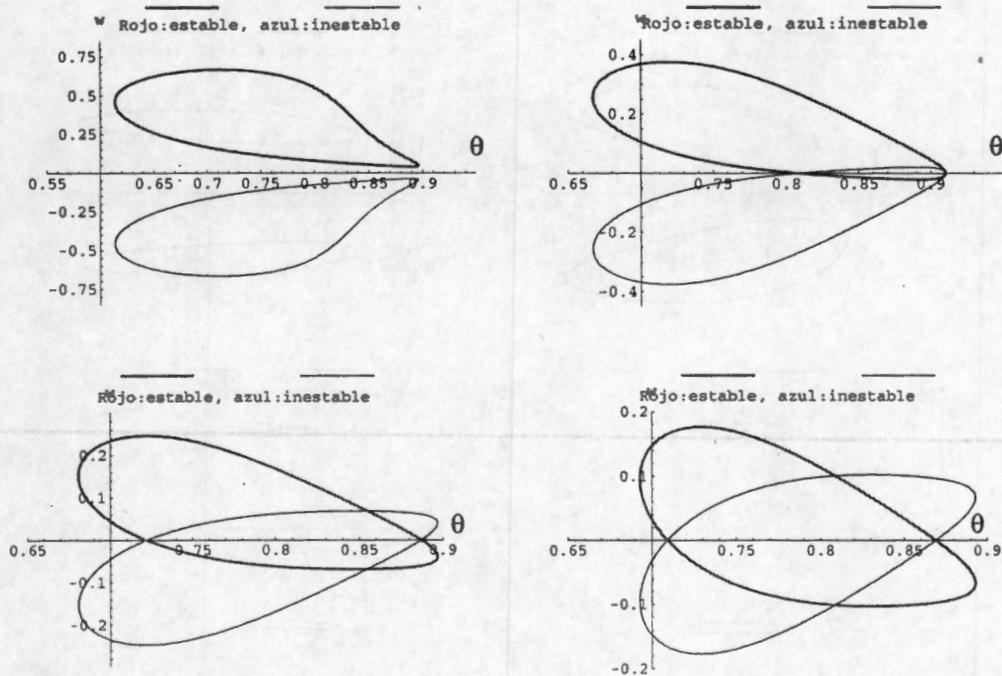


Figura 5.6: Intersecciones de  $W^{u,s}(OPP)$  para  $\alpha = 0.3, 0.42, 0.45$  y  $0.58$ .

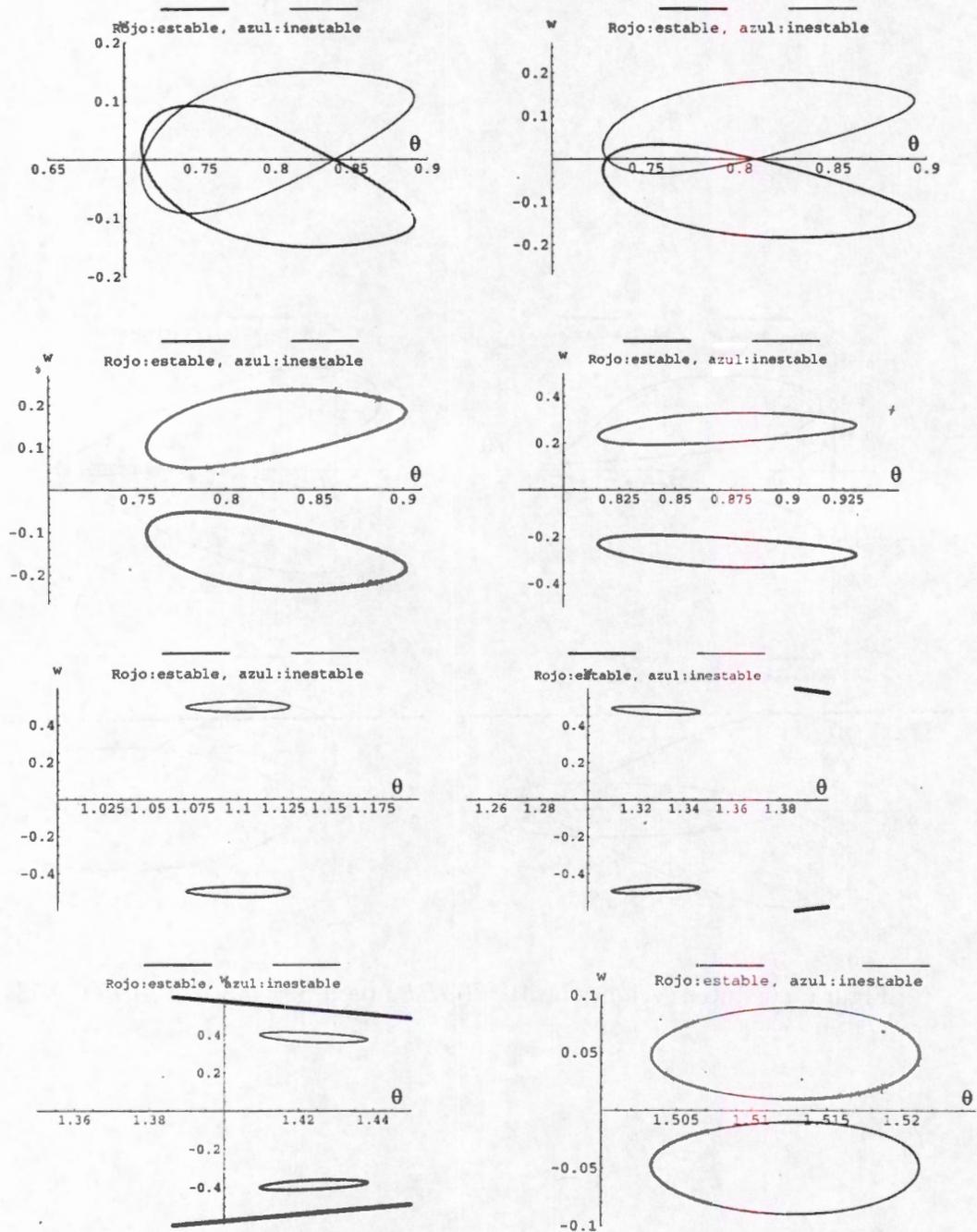


Figura 5.7: Intersecciones de  $W^{u,s}(OPP)$  para  $\alpha = 0.62, 0.65, 0.7, 0.8, 1.2, 1.6, 1.8$  y  $2.13$ .

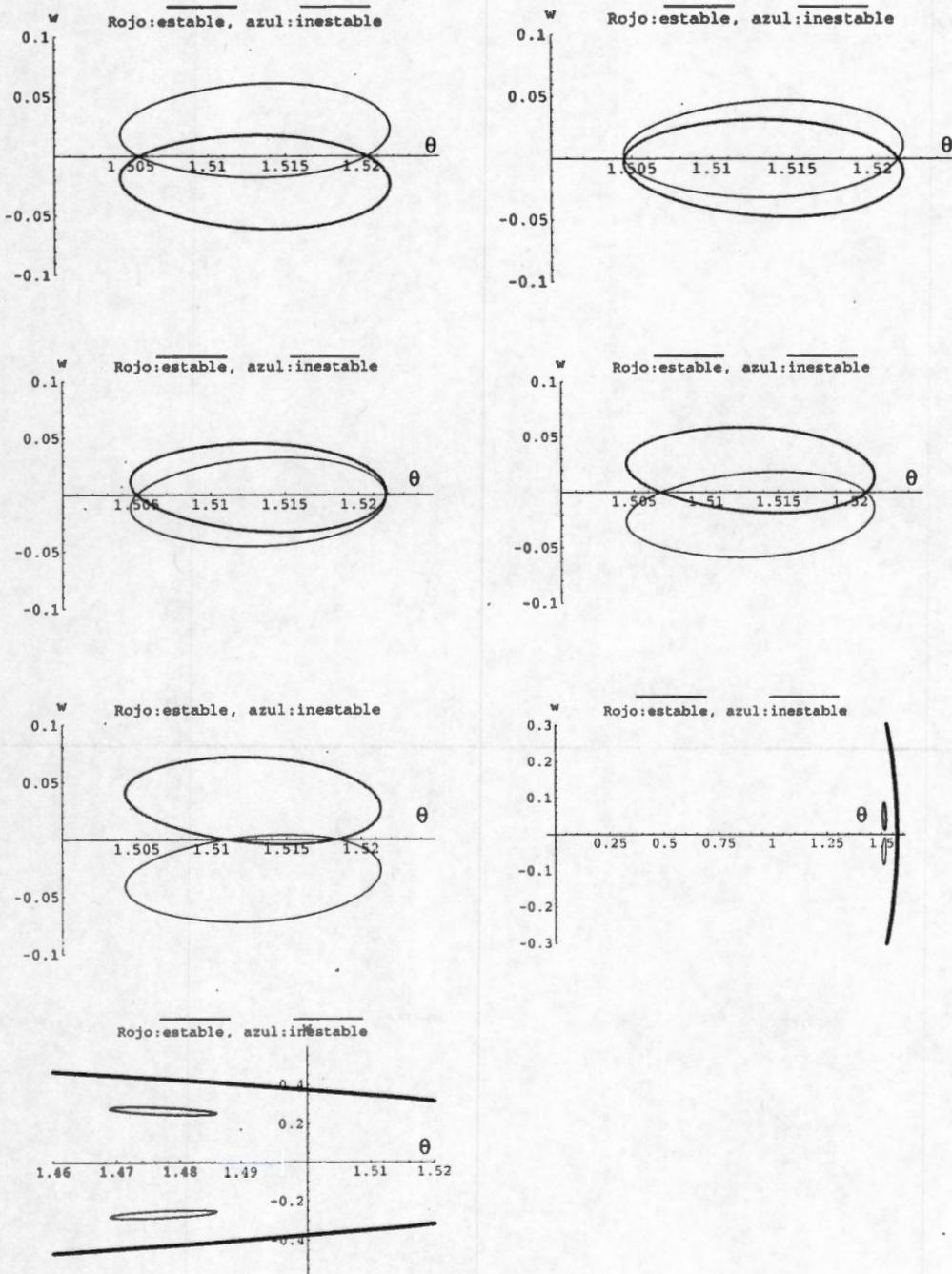


Figura 5.8: Intersecciones de  $W^{u,s}(OPP)$  para  $\alpha = 2.15, 2.16, 2.17, 2.18, 2.19, 2.24$  y  $2.4$ .



---

---

## CAPÍTULO 6

---

### CONCLUSIONES

Este trabajo muestra que la dinámica del problema trapecial de cuatro cuerpos es muy rica, pues a través del estudio de sus dos subproblemas, el problema rectangular y el problema colineal simétrico de cuatro cuerpos se ha probado la existencia de dinámicas simbólicas que representan esta riqueza de movimientos existentes en ellos.

En el problema rectangular se ha mostrado la existencia de dos dinámicas simbólicas. La primera de ellas sale a relucir al estudiar las intersecciones de las variedades invariantes asociadas a los puntos de equilibrio que se encuentran sobre la variedad de colisión total. Mientras que la segunda dinámica simbólica corresponde a la intersección transversal entre algunos pares de las cuatro variedades invariantes asociadas a las dos órbitas periódicas parabólicas al infinito, dos variedades para cada una de estas órbitas periódicas. Cada una de las órbitas periódicas parabólicas al infinito está asociada a una de las dos posibles direcciones de escape parabólico. Por otra parte, el estudio de las intersecciones de las distintas variedades invariantes se ha realizado sobre secciones de Poincaré distintas. La existencia de la órbita de escape parabólico en cada una de las direcciones posibles muestra, por un lado, que la intersección entre  $W^u(d)$ , la variedad inestable del punto de equilibrio  $d$  y la variedad estable  $W^s(OPP_+)$  de la órbita periódica parabólica al infinito es no vacía, y por otra parte lo mismo sucede para la intersección  $W^s(c) \cap W^u(OPP_+)$ . Queda como problema abierto el mostrar analíticamente la existencia de una sección de Poincaré donde sea posible determinar otras intersecciones, transversales o

no, entre las variedades invariantes  $W^{u,s}(OPP\pm)$ ,  $W^u(d)$  y  $W^s(c)$ . Recordemos que numéricamente mostramos que sobre algunas secciones existe intersección transversal entre las cuatro variedades invariantes asociadas a los escapes del problema rectangular.

Al realizar los estudios numéricos para determinar posibles intersecciones entre las variedades invariantes  $W^{u,s}(OPP)$  asociadas a la órbita periódica parabólica al infinito, la cual está asociada a los escapes de las partículas exteriores en el problema colineal simétrico de cuatro cuerpos se han tenido problemas numéricos para valores del parámetro cercanos a cero, por lo que resultaría interesante estudiar un caso especial del problema colineal simétrico de cuatro cuerpos, aquel en el cual las partículas exteriores tienen masa nula e intentar extender el comportamiento para valores pequeños del parámetro usando técnicas de perturbaciones.

Con el fin de tener una mejor comprensión de la dinámica en el problema colineal simétrico resulta de interés realizar un estudio de los escapes de los pares de partículas de masas distintas y determinar posibles intersecciones entre las cuatro variedades invariantes asociadas a los escapes existentes.

Así, con la información obtenida de los subproblemas del problema trapecial de cuatro cuerpos, se tiene más información, aunque todavía parcial de este último.

Otros de los problemas que se podrían atacar en un futuro respecto al problema trapecial son, por una parte, el concerniente a la posible existencia de órbitas periódicas en el problema trapecial de cuatro cuerpos usando técnicas variacionales y por otra, realizar estudios acerca de la existencia de otras conexiones heteroclínicas entre los puntos de equilibrio que se encuentran sobre la variedad de colisión total, distintas a las halladas por E. Lacombe.

---

---

# APÉNDICE A

---

## Apéndice

En esta última parte de la tesis mostraremos la manera en que se realizaron los cálculos para el problema rectangular de cuatro cuerpos con los que se verifica numéricamente que las variedades invariantes  $\overline{W}^u(OPP)$  y  $\overline{W}^s(OPP)$  asociadas a la órbita periódica parabólica al infinito  $OPP$  se intersectan transversalmente tanto sobre la sección  $\Sigma$  dada por la sección  $v = 0$  de la superficie de energía constante considerada y en el interior de la curva que resulta de intersectar la variedad de colisión total con el plano  $(w, \theta)$ . Con el fin de hacer autocontenida esta sección reescribiremos todas las expresiones y cambios de variables que se han usado para calcular las intersecciones de las variedades invariantes a que hemos hecho mención. No debemos dejar de observar que las simulaciones numéricas se realizaron usando el procesador simbólico *Mathematica*.

El Lagrangiano del sistema está dado por  $L = T + U$ , donde

$$T(x, y) = 2\dot{x}^2 + 2\dot{y}^2$$

es la *energía cinética* y

$$U(x, y) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$$

es la *energía potencial*. Las ecuaciones de Hamilton son

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{p_x}{4}, & \dot{p}_x &= -\frac{1}{2x^2} - \frac{x}{2(x^2 + y^2)^{3/2}}, \\ \dot{y} &= \frac{p_y}{4}, & \dot{p}_y &= -\frac{1}{2y^2} - \frac{y}{2(x^2 + y^2)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

y el hamiltoniano está dado por

$$H = \frac{1}{8}(p_x^2 + p_y^2) - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2y} - \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (\text{A.2})$$

Recordemos que estamos considerando un nivel negativo de energía fijo.

Al realizar la explosión de McGehee de la colisión total, consideramos coordenadas polares

$$x = \frac{r}{2} \cos \theta, \quad y = \frac{r}{2} \sin \theta. \quad (\text{A.3})$$

La transformación de los momentos que se obtiene a través de la función generatriz

$$\Omega = x(r, \theta)p_x + y(r, \theta)p_y = \frac{rp_x}{2} \cos \theta + \frac{rp_y}{2} \sin \theta \quad (\text{A.4})$$

está dada por

$$p_r = \frac{\partial \Omega}{\partial r} = \frac{p_x}{2} \cos \theta + \frac{p_y}{2} \sin \theta, \quad p_\theta = \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} = -\frac{rp_x}{2} \sin \theta + \frac{rp_y}{2} \cos \theta, \quad (\text{A.5})$$

con transformación inversa

$$p_x = 2p_r \cos \theta - \frac{2p_\theta}{r} \sin \theta, \quad p_y = 2p_r \sin \theta + \frac{2p_\theta}{r} \cos \theta. \quad (\text{A.6})$$

El hamiltoniano (A.2) se transforma en

$$H = \frac{1}{2} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) - \frac{U(\theta)}{r},$$

donde

$$U(\theta) = \frac{1}{2 \cos \theta} + \frac{1}{2 \sin \theta} + \frac{1}{2}. \quad (\text{A.7})$$

Los cambios de variables

$$v = r^{1/2} p_r, \quad y \quad u = r^{-1/2} p_\theta, \quad (\text{A.8})$$

transforman la relación de energía en

$$\frac{1}{2}(u^2 + v^2) = U(\theta) + rh,$$

y las ecuaciones de movimiento (A.1) toman la forma clásica

$$\begin{aligned} r' &= rv, \\ v' &= u^2 + \frac{v^2}{2} - U(\theta), \\ \theta' &= u, \\ u' &= -\frac{1}{2}vu + \frac{dU(\theta)}{d\theta}, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

donde ' representa la derivada respecto a la nueva variable temporal  $\tau$ , la cual se relaciona a la variable original  $t$  mediante la reparametrización del tiempo  $\frac{dt}{d\tau} = \tau^{3/2}$ . Las singularidades debidas a las colisiones binarias simultáneas simétricas  $\theta = 0, \pi/2$  se regularizan simultáneamente mediante el cambio de variables.

$$w = \frac{\sin(2\theta)}{2\sqrt{W(\theta)}}u, \quad (\text{A.10})$$

junto con el reescalamiento del tiempo

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{\sin(2\theta)}{2\sqrt{W(\theta)}},$$

donde

$$W(\theta) = U(\theta) \cos \theta \sin \theta = \frac{1}{2}(\sin \theta + \cos \theta + \sin \theta \cos \theta) \quad (\text{A.11})$$

es el potencial regularizado.

Las ecuaciones de movimiento (A.9) toman la forma

$$\begin{aligned} \frac{dr}{ds} &= rv \frac{\sin(2\theta)}{2\sqrt{W(\theta)}}, \\ \frac{dv}{ds} &= \sqrt{W(\theta)} \left\{ (rh - \frac{1}{4}v^2) \frac{\sin(2\theta)}{W(\theta)} + 1 \right\}, \\ \frac{d\theta}{ds} &= w, \\ \frac{dw}{ds} &= (\sin(2\theta) - w^2) \frac{\frac{dW}{d\theta}}{2W(\theta)} + \cos(2\theta) \left\{ 1 + \frac{(2rh - v^2) \sin(2\theta)}{2W(\theta)} \right\} - \frac{vw \sin(2\theta)}{4\sqrt{W(\theta)}}, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

con relación de energía

$$w^2 = \frac{\sin^2(2\theta)}{4W(\theta)}(2rh - v^2) + \sin(2\theta). \quad (\text{A.13})$$

De esta manera, se extendió el campo vectorial a la frontera suave del nivel de energía fijo, dada por la variedad de colisión total regularizada

$$M = \left\{ (r, v, \theta, w) \mid r = 0, w^2 = \sin(2\theta) - \frac{v^2 \sin^2(2\theta)}{4W(\theta)} \right\}.$$

Posteriormente, al considerar las trayectorias de escape parabólico; es decir, aquellas órbitas para las cuales  $y \rightarrow \infty$  y  $\dot{y} \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  se propusieron los cambios de coordenadas

$$y = \frac{1}{q^2} \quad y \quad p = p_y. \quad (\text{A.14})$$

junto con una regularización de tipo Levi-Civita

$$x = \xi^2 \quad y \quad p_x = \frac{\eta}{\xi}. \quad (\text{A.15})$$

y el reescalamiento del tiempo

$$\frac{dt}{d\tau} = 8\xi^2,$$

con lo cual las ecuaciones de movimiento (A.1) se transforman en

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} &= \eta, \\ \frac{d\eta}{d\tau} &= \left( \frac{\eta^2}{\xi} - \frac{8}{\xi} \right) - \frac{8\xi^5 q^6}{(\xi^4 q^4 + 1)^{3/2}}, \\ \frac{dq}{d\tau} &= -\xi^2 p q^3, \\ \frac{dp}{d\tau} &= -8\xi^2 q^4 \left( 1 + \frac{1}{(\xi^4 q^4 + 1)^{3/2}} \right), \end{aligned}$$

con relación de energía

$$H = \left( \frac{\eta^2}{8\xi^2} - \frac{1}{\xi^2} \right) + \frac{p^2}{8} - q^2 \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{q^4 \xi^4 + 1}} \right) = h. \quad (\text{A.16})$$

Con el valor prefijado de  $h$  para la energía, (A.16) puede reescribirse como

$$\eta^2 + \xi^2 + p^2 \xi^2 - 8\xi^2 q^2 \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{1 + q^4 \xi^4}} \right) = 8, \quad (\text{A.17})$$

por lo que las ecuaciones de movimiento se transforman en

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi}{d\tau} &= \eta, \\
\frac{d\eta}{d\tau} &= -\xi\{1 + F_1(q, p, \xi)\}, \\
\frac{dq}{d\tau} &= -\xi^2 pq^3, \\
\frac{dp}{d\tau} &= -\xi^2 q^4(16 + F_2(q, \xi)),
\end{aligned}
\tag{A.18}$$

donde  $F_1(q, p, \xi) = p^2 - 8q^2(1 + \frac{1}{\sqrt{1+q^4\xi^4}} + \frac{\xi^4 q^4}{(q^4\xi^4+1)^{3/2}}) = p^2 - 8q^2(1 + \Psi(q^4\xi^4))$  con  $\Psi(q^4\xi^4) = \frac{1}{\sqrt{1+q^4\xi^4}} + \frac{q^4\xi^4}{(1+q^4\xi^4)^{3/2}}$  y  $F_2(q, \xi) = -8 + \frac{8}{(\xi^4 q^4 + 1)^{3/2}}$  es una función de cuarto orden en  $q$  y  $\xi$ . En consecuencia, las condiciones para usar el teorema de McGehee [36] de la variedad estable para puntos fijos degenerados están satisfechas y por ser el origen  $(q, p) = (0, 0)$  un punto fijo hiperbólico degenerado, se tiene que la trayectoria  $OPP_+$  posee dos variedades invariantes asociadas, una estable y otra inestable, ambas de dimensión 2 las cuales son analíticas, excepto quizá en los puntos sobre la trayectoria  $OPP_+$ . Denotemos estas variedades estable e inestable por  $W^s(OPP_+)$  y  $W^u(OPP_+)$ , respectivamente.

El sistema de ecuaciones (A.18) no presenta singularidades, es decir, podemos estudiar las trayectorias para las cuales  $y \rightarrow \infty$ ,  $\dot{y} \rightarrow 0$ , pues hemos regularizado las colisiones binarias simultáneas ( $x = 0$  en las coordenadas originales y  $\theta = \pi/2$  en las coordenadas de McGehee).

Asimismo, se introdujeron coordenadas polares canónicas para  $(\xi, \eta)$  mediante los cambios de variables

$$\xi = \sqrt{2L} \cos l \quad y \quad \eta = \sqrt{2L} \sin l. \tag{A.19}$$

La siguiente parte consiste en expresar las coordenadas de McGehee  $(r, v, \theta, w)$  en términos de las coordenadas en una vecindad del infinito dadas por  $(q, p, L, l)$ . Esto en vista de que usaremos un conjunto de condiciones iniciales en estas últimas coordenadas; así, las coordenadas de McGehee se expresan en términos de  $(q, p, L, l)$ , y son las ecuaciones diferenciales en coordenadas de McGehee las cuales procederemos a integrar para mostrar numéricamente la intersección transversal de las variedades invariantes asociadas a la órbita  $OPP$ .

Al expresar las coordenadas originales  $(x, y, p_x, p_y)$  para el problema rectangular en coordenadas polares mediante las ecuaciones (A.3) obtenemos que

$$r^2 = 4(x^2 + y^2), \quad (\text{A.20})$$

usando (A.14) y (A.15) se tiene

$$\cos \theta = \frac{2x}{r} = \frac{2\xi^2}{r} \quad \text{y} \quad \sin \theta = \frac{2y}{r} = \frac{2}{rq^2}, \quad (\text{A.21})$$

también de las ecuaciones (A.14) y (A.15) tenemos que

$$r^2 = 4(x^2 + y^2) = 4\left(\xi^4 + \frac{1}{q^4}\right) = 4\left(\frac{\xi^4 q^4 + 1}{q^4}\right), \quad (\text{A.22})$$

es decir

$$r = 2\sqrt{\xi^4 + \frac{1}{q^4}} = 2\sqrt{\frac{\xi^4 q^4 + 1}{q^4}} = \frac{2\sqrt{\xi^4 q^4 + 1}}{q^2}. \quad (\text{A.23})$$

por lo que  $r$  está descrito en términos de  $\xi$  y  $q$ .

A continuación mostramos, a partir de (A.8) que es posible escribir las coordenadas  $(u, v)$  en términos de las variables  $r, \xi, \eta, p, q$ . Por (A.23) tendremos que  $u$  y  $v$  se pueden escribir en términos solamente de las variables  $\xi, \eta, p, q$ .

$$\begin{aligned} u &= r^{-\frac{1}{2}} p_\theta \\ &= r^{-\frac{1}{2}} \frac{r}{2} (-p_x \sin \theta + p_y \cos \theta) \\ &= \frac{r^{\frac{1}{2}}}{2} \left(-\frac{\eta}{\xi} \sin \theta + p \cos \theta\right) \\ &= \frac{r^{\frac{1}{2}}}{2} \left(-\frac{\eta}{\xi} \frac{2}{rq^2} + p \frac{2}{r} \xi^2\right) \\ &= \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}} \left(-\frac{\eta}{\xi q^2} + p \xi^2\right) \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

y

$$\begin{aligned} v &= r^{\frac{1}{2}} p_r \\ &= \frac{r^{\frac{1}{2}}}{2} (p_x \cos \theta + p_y \sin \theta) \\ &= \frac{r^{\frac{1}{2}}}{2} \left(\frac{\eta}{\xi} \cos \theta + p \sin \theta\right) \\ &= \frac{r^{\frac{1}{2}}}{2} \left(\frac{\eta}{\xi} \frac{2\xi^2}{r} + p \sin \theta\right) \\ &= \frac{r^{\frac{1}{2}}}{2} \left(2\frac{\eta\xi}{r} + p \sin \theta\right) \\ &= \frac{1}{2r^{1/2}} (2\eta\xi + pr \sin \theta). \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Al estar  $w$  definida por

$$w = \frac{\sin 2\theta}{2\sqrt{W(\theta)}}u$$

donde  $W(\theta) = U(\theta) \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}(\sin \theta + \cos \theta + \sin \theta \cos \theta)$ , de (A.14), (A.15), (A.23) y (A.24) la coordenada  $w$  toma la expresión siguiente

$$\begin{aligned} w &= \frac{\sin 2\theta}{2\sqrt{W(\theta)}}u \\ &= \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{2\sqrt{W(\theta)}}u && \text{(A.26)} \\ &= \frac{\sin \theta}{\sqrt{W(\theta)}} \cos \theta \left\{ \frac{r^{1/2}}{2} \left( -\frac{\eta}{\xi} \sin \theta + p \cos \theta \right) \right\} \\ &= \frac{\sin \theta}{\sqrt{W(\theta)}} \frac{r^{1/2}}{2} \left\{ -\frac{\eta}{\xi} \sin \theta \cos \theta + p \cos^2 \theta \right\} \\ &= \frac{\sin \theta}{2\sqrt{W(\theta)}} r^{1/2} \left\{ -\frac{\eta}{\xi} \frac{2\xi^2}{r} \sin \theta + p \cos^2 \theta \right\} \\ &= \frac{\sin \theta}{2\sqrt{W(\theta)}} r^{1/2} \left\{ -\frac{2\eta\xi \sin \theta}{r} + p \cos^2 \theta \right\} \\ &= \frac{\sin \theta}{2\sqrt{W(\theta)}} r^{-1/2} \left\{ -2\eta\xi \sin \theta + rp \cos^2 \theta \right\}. \end{aligned}$$

Recordemos que  $\sin \theta$  y  $\cos \theta$  se pueden escribir en términos de  $r$ ,  $\xi$  y  $q$ , pero  $r$  puede expresarse como función de  $\xi$  y  $q$ . Por lo que  $u$ ,  $v$  y  $w$  pueden expresarse en términos de las coordenadas  $\eta$ ,  $\xi$ ,  $p$  y  $q$  como afirmamos.

Notemos que del cambio a coordenadas polares para  $\xi$  y  $\eta$  dado por (A.19), tenemos que estas coordenadas se expresan en términos de  $L$  y  $l$ . Por lo que las coordenadas  $u$ ,  $v$ ,  $w$  están descritas en términos de  $p$ ,  $q$ ,  $L$  y  $l$ . Además por (A.3), (A.14), (A.15)

$$\tan \theta = \frac{1}{q^2 \xi^2},$$

por lo que la coordenada  $\theta$  también se puede escribir en términos de  $q$ ,  $L$  y  $l$ .

De esta manera hemos visto que es posible expresar las coordenadas  $(r, v, \theta, w)$  de McGehee en términos de  $q, p, L, l$ .

Ahora observemos que se cuenta con una aproximación numérica de las variedades invariantes asociadas a la órbita periódica parabólica al infinito OPP

en la forma  $q = F(p, l)$  dada por

$$\begin{aligned}
 q &= F(p, l) && \text{(A.27)} \\
 &= \frac{p}{4} + \frac{5}{1024}p^5 + \frac{p^8}{4096} \left\{ \frac{15}{2} \sin 2l + \frac{9}{2} \sin 4l + \frac{1}{2} \sin 6l \right\} - \frac{103}{524288}p^9 \\
 &\quad - p^{11} \left\{ -\frac{1953}{1048576} + \frac{1}{65536} \left[ \frac{351}{2} \cos 2l + \frac{153}{2} \cos 4l + \frac{33}{2} \cos 6l + \frac{9}{8} \cos 8l \right] \right\} \\
 &\quad + \frac{1}{1048576}p^{12} \left\{ -\frac{285}{2} \sin 2l - \frac{315}{2} \sin 4l - 80 \sin 6l - \frac{75}{4} \sin 8l - \frac{3}{2} \sin 10l \right\} \\
 &\quad - \frac{565}{134217728}p^{13}.
 \end{aligned}$$

Posteriormente se tomó un conjunto de  $N = 207$  puntos con  $p = 1$  y el mismo número de puntos para la variable  $l$  dados por  $l = \frac{2\pi k}{N}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$  para después obtener los valores de  $q$  usando la ecuación  $q = F(p, l)$ . A partir de (A.19),  $\xi$  y  $\eta$  se expresan en términos de  $L$  y  $l$ , y de la relación de energía (A.17) se puede obtener  $L$  en términos de  $p, q, l$ . Es así como mediante este procedimiento que es posible obtener como salida listas  $\xi$ list,  $\eta$ list,  $p$ list,  $q$ list, donde  $q$ list =  $F(p$ list,  $l$ ), para  $\xi, \eta, p, q$  sobre la variedad estable de la órbita periódica parabólica al infinito, listas que se usarán más adelante para dirigir las numéricamente.

Con este conjunto de 207 puntos se tiene una lista de igual número de condiciones iniciales en la variedad inestable  $W^u(OPP)$  de la órbita periódica parabólica al infinito  $OPP$ , lista que como hemos visto se puede transformar a las coordenadas regularizadas  $(r, v, \theta, w)$  de McGehee, además se tiene también una lista de valores para  $W(\theta)$  y  $W'(\theta)$ , lista que junto con las condiciones iniciales se usan para integrar el sistema de ecuaciones diferenciales (A.12). Para cada una de las 207 condiciones iniciales se usa un tamaño de paso igual a  $h = -0.01$  hasta obtener la primera intersección de la órbita por ella con el plano  $(v, \theta)$ ; el signo del tamaño de paso se debe al hecho de que el conjunto de condiciones iniciales se encuentran en la variedad estable de la órbita periódica parabólica al infinito y estamos integrando las ecuaciones regularizadas de MacGehee (A.12). A continuación presentamos un extracto de la rutina en *Mathematica* usada para tal efecto.

(\* Se dan listas para los valores  $r, \cos \theta, \sin \theta, v$  y  $w$  que se usarán posteriormente \*)

INPUT:  $\xi$ list,  $\eta$ list,  $p$ list,  $q$ list, listas de tamaño  $N=np$ .

OUTPUT: valores de  $r, v, \theta, w$  sobre  $W^s(OPP) \cap \{v = 0\}$ .

$$rlist = 2 * \text{Sqrt}[\xi list^4 + 1/q list^4]; (*A.23*)$$

$$c\theta list = 2 * \xi list^2 / rlist; (*A.21*)$$

$$s\theta list = 2 / (rlist * q list^2); (*A.21*)$$

$$\theta list = \text{ArcTan}[c\theta list, s\theta list];$$

$$Wlist = 1/2 * (s\theta list + c\theta list + c\theta list s\theta list); (*A.11*)$$

$$vlist = 0.5 * (rlist)^{-1/2} * (2 * \eta list * \xi list + rlist * plist * s\theta list); (*A.25*)$$

$$wlist = 0.5 * s\theta list * Wlist^{-1/2} * (rlist)^{-1/2} (-2 * \eta list * \xi list * s\theta list + rlist * plist * c\theta list^2); (*A.26*)$$

(\* Se introduce el sistema de ecuaciones diferenciales A.12\*)

$$\text{along} = \text{Thread}[\{r, v, \theta, w\} \rightarrow \{r[s], v[s], \theta[s], w[s]\}];$$

$$W[\theta] = \frac{1}{2}(\text{Sin}[\theta] + \text{Cos}[\theta] + \text{Cos}[\theta]\text{Sin}[\theta]);$$

$$dW[\theta] = \frac{1}{2}(\text{Cos}[\theta] + \text{Cos}[\theta]^2 - \text{Sin}[\theta] - \text{Sin}[\theta]^2);$$

$$e = -0.125;$$

$$\text{system} = \{$$

$$r'[s] == (0.5 r v \text{Sin}[2\theta] / \text{Sqrt}[W[\theta]] / .\text{along}),$$

$$v'[s] == (\text{Sqrt}[W[\theta]]((re - 0.25v^2)(\text{Sin}[2\theta] / W[\theta]) + 1) / .\text{along}),$$

$$\theta'[s] == (w / .\text{along}),$$

$$w'[s] == (($$

$$0.5(\text{Sin}[2\theta] - w^2)(dW[\theta] / W[\theta]) + \text{Cos}[2\theta](1 + 0.5(2re - v^2)(\text{Sin}[2\theta] / W[\theta])) - 0.25vw \text{Sin}[2\theta] / \text{Sqrt}[W[\theta]] / .\text{along});$$

(\* Función de corte  $v = 0$ \*)

$$\text{GradientFunction}[\{r, v, \theta, w\}] = v;$$

(\* Condiciones iniciales \*)

$$\text{initUnstable} = \text{Table}[\{rlist[[i]], vlist[[i]], \theta list[[i]], wlist[[i]]\}, \{i, 1, np\}];$$

(\* Se considera un tamaño de paso negativo pues se van a seguir las condiciones iniciales sobre la variedad estable bajo el flujo en sentido negativo del tiempo\*)

$$h = -hstep * 10^{-2};$$

(\* Valor de corte  $v = \text{Cnst}$  \*)

$$\text{Cnst} = 0;$$

(\* Lista de valores de la sección de Poincaré \*)

$$\text{Pvalues} = \{ \};$$

(\* Inicia ciclo \*)

$$\text{For}[k = 1, k \leq np, k++,$$

```

Print[k];
σ = 0;
{Vr, Vv, Vθ, Vw} = initUnstable[[k]];
test = 1; (* Valor de prueba para detectar cruce de v = 0 *)
While[test > Cnst,
vi = GradientFunction[{Vr, Vv, Vθ, Vw}]; (* valor de v en σ *)
sol = Flatten[NDSolve[Join[System, Thread[{r[σ], v[σ], θ[σ], w[σ]} == {Vr, Vv, Vθ, Vw}]],
{r[s], v[s], θ[s], w[s]}, {s, σ + h, σ}]]; (* Resuelve en [σ + h, σ] *)
σ += h; (* σ = σ + h *)
{Vr, Vv, Vθ, Vw} = ({r[s], v[s], θ[s], w[s]}/.sol)/.s → σ; (* valor de σ después
de simular en [σ + h, σ] *)
vf = GradientFunction[{Vr, Vv, Vθ, Vw}]; (* valor de v en σ + h *)
test = vi * vf; (* ver si hay cambio de signo en v *)
];

Print[test];
sc = Flatten[
FindRoot[
Cnst == GradientFunction[{r[s], v[s], θ[s], w[s]}/.sol], {s, σ, σ - h}
]
]; (* se interpola el valor de s donde v(s) = 0 *)

{Vr, Vv, Vθ, Vw} = ({r[s], v[s], θ[s], w[s]}/.sol)/.sc; (* valores en instante s = sc *)

Pvalues = Join[Pvalues, {{Vr, Vv, Vθ, Vw}}]; (* puntos del mapeo de Poincaré *)
]

```

Así obtenemos los puntos en el plano  $(w, \theta)$  contenidos en la región acotada por la curva donde la variedad de colisión total del problema rectangular interseca al plano  $(w, \theta)$  y que pertenecen a la variedad inestable de la órbita periódica parabólica al infinito. Usando las simetrías del problema rectangular podemos obtener también la intersección de la variedad estable de la órbita periódica parabólica al infinito con el mismo plano  $(w, \theta)$ . Ambas intersecciones se muestran en la siguiente Figura A.1, la cual se muestra en el Capítulo 4 como Figura 4.15.

Observemos que para obtener la gráfica de este apéndice se hizo uso del valor  $p = 1$ . Para verificar que este es un valor conveniente también se realizaron cálculos usando valores de  $p$  positivos menores a 1 con los que se obtuvo la misma gráfica, con la diferencia solo en el tiempo de cómputo requerido para realizar los cálculos.

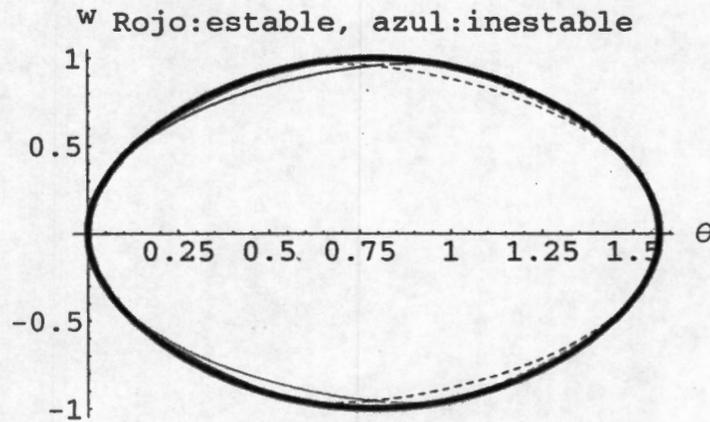
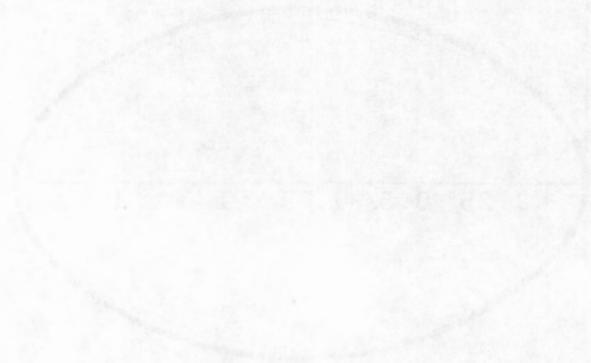


Figura A.1: Intersección de las variedades estable e inestable de OPP sobre el plano  $(w, \theta)$ .



---

## LISTA DE FIGURAS

1.1 Configuración trapecial. . . . .	3
1.2 Configuración rectangular de cuatro cuerpos. . . . .	4
1.3 Colisiones no totales en el problema rectangular. . . . .	5
1.4 Región de Hill para $h = -1/16$ . . . . .	6
1.5 Configuración colineal simétrica de cuatro cuerpos. . . . .	9
1.6 Colisiones no totales en el problema colineal de cuatro cuerpos. . . . .	10
1.7 Región de Hill para el problema colineal con $h = -1/4$ . . . . .	11
2.1 Flujo sobre la variedad de colisión total para el problema rectangular. . . . .	20
2.2 La primera intersección de la rama inestable derecha del punto de equilibrio $c$ tiene coordenada $v$ negativa. . . . .	21
2.3 Soluciones homotéticas en el plano $w = 0, \theta = \theta_0$ . . . . .	23
2.4 Sección de colisiones binarias simultáneas y órbita homotética. . . . .	25
2.5 Primera intersección positiva de $\overline{W}^u(d)$ con $\Gamma^R$ . . . . .	26
2.6 El segmento $\sigma^R$ puede presentar autointersecciones. . . . .	28
2.7 Última intersección de $\overline{W}^s(c)$ con $\Gamma^R$ . . . . .	29
2.8 Intersecciones de $\sigma^R$ y $\gamma^R$ corresponden a órbitas de eyección-colisión. . . . .	30
2.9 Imagen inversa de un segmento de arco para Proposición 2.5.3(1). . . . .	32
2.10 Imagen inversa de un segmento de arco para Proposición 2.5.3(2). . . . .	33
2.11 Imagen inversa de un segmento de arco para Proposición 2.5.3(3). . . . .	33

2.12	Imagen inversa de un segmento de arco $\zeta$ en el Corolario 2.5.4.	34
2.13	Segmentos prototipo para el problema rectangular. . . . .	36
2.14	Ejemplos de segmentos prototipo 1, 2 y 3. . . . .	37
2.15	Puntos con la misma sucesión de CBS-simultáneas . . . . .	41
2.16	Trayectorias de eyección-colisión: (a) $EL^3C$ y (b) $ELRLC$ . . . . .	45
2.17	Regiones básicas de iteración en $\Gamma^R$ . . . . .	47
2.18	Regiones de iteración y flujo sobre la variedad de colisión total. . . . .	48
2.19	Gráfica $G_A$ de transición entre las regiones. . . . .	49
3.1	Flujo sobre la variedad de colisión total, (a) $0 < \alpha < \alpha_1$ , (b) $\alpha_2 < \alpha < \alpha_3$ y (c) $\alpha_3 < \alpha < \alpha_4$ . . . . .	53
3.2	Flujos en el problema colineal simétrico de cuatro cuerpos para distintos valores del parámetro $\alpha$ [28]. . . . .	54
3.3	Representación gráfica de $\gamma_{\pm}$ como función de $\alpha$ [28]. . . . .	55
3.4	Figura 8 en [28]. . . . .	57
3.5	Orbitas homotéticas en el plano $u = 0, \theta = \tilde{\theta}_{\alpha}$ . . . . .	59
3.6	Sección de colisiones binarias y colisiones binarias simultáneas simétricas . . . . .	60
3.7	Primera intersección en tiempo positivo de $\overline{W}^u(d)$ con $\Gamma^R$ . . . . .	61
3.8	A los puntos de intersección de $\sigma^R$ y $\gamma^R$ les corresponden órbitas de colisión-eyección. . . . .	63
3.9	Imagen inversa, bajo $P$ , de un segmento de arco en la Proposición 3.4.3, caso (1). . . . .	64
3.10	Imagen inversa, bajo el mapeo de Poincaré $P$ , de un segmento de arco en la Proposición 3.4.3, caso (3). . . . .	65
3.11	Imagen inversa, bajo $P$ , de un segmento de arco para el Corolario 3.4.4, caso (2). . . . .	66
3.12	Ejemplos de segmentos prototipo 1, 2 y 3 para el problema col- ineal con $\alpha \in (\alpha_2, \alpha_3)$ . . . . .	68
3.13	Puntos con la misma sucesión de colisiones binarias. . . . .	72
3.14	Orbitas de eyección-colisión: (a) $EL^3C$ y (b) $ELRLC$ . . . . .	76
3.15	Regiones básicas $R_i, i = 1 \dots 10$ , en $\Gamma$ para $\alpha_2 < \alpha < \alpha_3$ . . . . .	78
3.16	Gráficas de transición $G_A$ entre las regiones para (a) $0 < \alpha < \alpha_1$ , (b) $\alpha_2 < \alpha < \alpha_3$ , y (c) $\alpha_3 < \alpha < \alpha_4$ . . . . .	81
4.1	Los escapes en la dirección $y$ pueden presentar singularidades $x = 0$ . . . . .	85

4.2	Escapes en la dirección del eje $y$ .	87
4.3	Flujo sobre la variedad al infinito.	90
4.4	Variedad al infinito y las variedades invariantes asociadas a la trayectoria $OPP_+$ .	92
4.5	Vecindad toroidal de la órbita periódica parabólica al infinito.	93
4.6	Sección transversal de la vecindad toroidal de la órbita periódica parabólica al infinito.	94
4.7	Órbita de eyección hiperbólica.	97
4.8	Existencia de una órbita de eyección parabólica.	101
4.9	Intersecciones de $\overline{W}^u(d)$ y $\overline{W}^s(c)$ con $\partial T$ .	102
4.10	Geometría de la sección $v = 0$ de la variedad de energía $h = -1/16$ .	106
4.11	Curvas de nivel de la superficie $A$ y proyección de la curva en $A$ donde $v' = 0$ .	107
4.12	La curva exterior es la sección $v = 0$ de la variedad de colisión total $M$ , dada por $w^2 = \sin 2\theta$ y la curva interior corresponde a la gráfica de la ecuación $2w^2 = \sin 2\theta$ que resulta de proyectar sobre el plano $(\theta, w)$ la curva en $A$ donde $v' = 0$ . La sección $D$ es la región entre ambas curvas.	108
4.13	La variedad $M$ , de colisión total y la sección $A$ se intersectan en la curva simple cerrada $w^2 = \sin(2\theta)$ contenida en el plano $\theta - w$ .	109
4.14	Seguimiento de círculos de condiciones iniciales hasta su intersección con una sección adecuada.	111
4.15	Intersección heteroclínicas de $W^{u,s}(OPP_+)$ y $W^{u,s}(OPP_-)$ .	112
4.16	Intersección homoclínica de las variedades invariantes asociadas a $OPP_+$ .	113
4.17	Intersección homoclínica de las variedades invariantes asociadas a $OPP_-$ .	114
4.18	Primera intersección transversal heteroclínica entre variedades invariantes.	115
4.19	Segunda intersección transversal heteroclínica entre variedades invariantes.	116
4.20	Intersecciones transversales en el plano $(X, Y)$ .	116
4.21	Primera intersección transversal homoclínica.	117
4.22	Segunda intersección homoclínica.	117

4.23	Representación geométrica de la información numérica sobre las secciones $D$ y $A$ . . . . .	118
4.24	Representación geométrica de la información numérica sobre el plano $(X, Y)$ . . . . .	119
4.25	Flujo del problema rectangular de cuatro cuerpos. En la parte superior e inferior se muestran las variedades al infinito asociadas a los escapes parabólicos en las direcciones $y$ y $x$ , respectivamente, mientras que al centro se muestra la variedad de colisión total, así como la conexión entre los puntos de equilibrio dada por la órbita homotética. Recordemos que en el capítulo 2 demostramos también la existencia de una familia infinita de órbitas conectando los puntos de equilibrio sobre la variedad de colisión total. . . . .	120
5.1	Escapes en la dirección del eje $y$ . . . . .	122
5.2	Variedad al infinito y las variedades invariantes asociadas a la trayectoria $OPP$ . . . . .	127
5.3	Sección $v = 0$ , de la variedad de colisión total en el problema colineal para $\alpha = 0$ . . . . .	128
5.4	Sección $v = 0$ de la superficie de energía $H = -1/4$ con $\alpha = 1$ . . . . .	129
5.5	Curvas de nivel de la proyección de la superficie de energía $H = -1/4$ y $\alpha = 1$ sobre la sección $v = 0$ . . . . .	130
5.6	Intersecciones de $W^{u,s}(OPP)$ para $\alpha = 0.3, 0.42, 0.45$ y $0.58$ . . . . .	133
5.7	Intersecciones de $W^{u,s}(OPP)$ para $\alpha = 0.62, 0.65, 0.7, 0.8, 1.2, 1.6, 1.8$ y $2.13$ . . . . .	134
5.8	Intersecciones de $W^{u,s}(OPP)$ para $\alpha = 2.15, 2.16, 2.17, 2.18, 2.19, 2.24$ y $2.4$ . . . . .	135
A.1	Intersección de las variedades estable e inestable de $OPP$ sobre el plano $(w, \theta)$ . . . . .	149

---

## REFERENCIAS

- [1] Albouy A., Chenciner A., *The  $n$ -body problem and mutual distances*. Invent. Math., **131**, 1998, 151-184.
- [2] Alekseev, V.M., *Quasirandom dynamical systems III, II, I. Quasirandom vibrations of one-dimensional oscillators*. (Russian) Mat. Sb. (N.S.) **78** (120) (1969) 3-50, 545-601, **76**(118) (1968) 72-134.
- [3] Alvarez-Ramírez M., Delgado J. *Blow-up of the planar 3-body problem with an infinitesimal mass* Discrete and Continuous Dynamical Systems, Vol **9**, Number **5**, September 2003, 1149-1173.
- [4] Alvarez M. y Llibre J., *Heteroclinic orbits and Bernoulli shift for the elliptic collision restricted three body problem*. Arch. Rational Mech. Anal. **156** (2001) 317-357.
- [5] Chenciner A., *Collisions totales, mouvements complètement paraboliques et réduction des homothéties dans le problème des  $n$  corps*, Regular and chaotic Dynamics **3**, 1998, 93-106
- [6] Chenciner A., Montgomery R., *A remarkable periodic solution of the three body problem in the case of equal masses*, Annals of Math. **152**, (2000), 881-901.
- [7] Chesley S., Zare K., *Order and chaos in the planar isosceles three body problem*. In chaos and irreversibility (Budapest, 1997). Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science Vol **8**(2),(1998), 475-494.

- [8] Cors, J. y Llibre J., *The global flow of the hyperbolic restricted three body problem*. Arch. Rational. Mech. Anal. **131** (1995), 335-358.
- [9] Cors, J. y Llibre J., *Qualitative study of the parabolic collision restricted three body problem*. 1-19, Contemp. Math., 198, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
- [10] Cors, J. y Llibre J., *Qualitative study of the hyperbolic collision restricted three body problem*. Nonlinearity **9** (1996) 1299-1316.
- [11] Delgado J. y Vidal C., *The tetrahedral four body problem*. Journal of Dynamics and Differential Equations. Vol 11, No. 4, 735-780, 1999.
- [12] Delgado J. y Pérez-Chavela R., *The rhomboidal four body problem Global flow on the total collision manifold*. In The geometry of Hamiltonian Systems, Ed. T. Ratiu. Springer-Verlag (1991), 97-110.
- [13] Devaney R., *Triple collision in the planar isosceles three body problem*. Invent. Math. **60** (1980) 260-267.
- [14] Devaney, R., *Nonregularizability of the anisotropic Kepler problem*. J. Differential Equations **29** (1978), no. 2, 252-268.
- [15] Devaney, R., *Collision orbits in the anisotropic Kepler problem*. Invent. Math. **45** (1978), no. 3, 221-251.
- [16] Devaney, R., *Motions near total collapse in the planar isosceles three-body problem*. Celestial Mechanics **28**, (1982) 25-36.
- [17] Diacu, F. *Singularities of the n-body problem. An introduction to celestial mechanics*, Les Publications CRM, Université de Montréal, 1992.
- [18] Easton, R. W., *Parabolic orbits in the planar three body problem*. Journal of Differential Equations **52**, 116-134, 1984.
- [19] Gerver J.L., *Non collision singularities. Do four bodies suffice?*. Experimental Mathematics **12**, No. 2 2003, 187-198.
- [20] Kaplan, S., *Symbolic dynamics of the collinear three body problem*, In Geometry and topology in dynamics (Winston-Salem, NC, 1998/San Antonio, TX). Contemporary Mathematics, (1999), 246,143-162.

- [21] Lacomba E. A., *Quadruple collision in the trapezoidal 4-body problem*, In Classical Mechanics and Dynamical Systems. Ed. R. L. Devaney Z. Nitecki. Marcel Dekker (1981), 109-122.
- [22] Lacomba E. A., *Mouvements voisins de collision quadruple dans le probleme trapezoidal des 4 corps*, Celestial Mechanics, **31**, (1983), 23-41.
- [23] Lacomba, E. A. *Regularization by surgery in the restricted three-body problem*. J. Differential Equations 24 (1977), no. 2, 240-252.
- [24] Lacomba, E. A., Losco L. *Triple collision in the isosceles 3-body problem*. Bull. Amer. Math. Soc. **32**, (1983), 221-240.
- [25] Lacomba, E. A., Medina, M. *Symbolic dynamics in the symmetric collinear four-body problem*. Qualitative Theory of Dynamical Systems **5**, 2004, 75-100.
- [26] Lacomba E. A., Pérez-Chavela E., *Motions close to escape in the rhomboidal four body problem*. Celestial Mech. Dynam. Astronom. **57** (1993), no. 3, 411-437.
- [27] Lacomba, E. A., Pérez-Chavela, Ernesto, *A compact model for the planar rhomboidal 4-body problem*. Celestial Mech. Dynam. Astronom. **54** (1992), no. 4, 343-355.
- [28] Lacomba E. A., Simó C., *Analysis of some degenerate quadruple collisions*. Celestial Mechanics **28**, (1982)49-62.
- [29] Lacomba E. A., Simó C., *Regularization of simultaneous binary collisions in the n-body problem*. J. Differential Equations **98** (1992), no. 2, 241-259.
- [30] Llibre J. y Simó C., *Oscillatory solutions in the planar restricted three body problem*. Math. Ann. **248** (1980), 153-184.
- [31] Llibre J. y Simó C., *Some homoclinic phenomena in the three body problem*. J. Differential Equations **33** (1980) 444-465.
- [32] Martínez R. y Simó C., *Qualitative study of the planar isosceles three body problem*. Celes. Mech., **41** (1988) 179-251.
- [33] Martínez R. y Simó C., *Simultaneous Binary Collisions in the Planar Four Body Problem* Nonlinearity **12** No. 4 (Julio 1999) 903-930.

- [34] Martínez R. y Simó C., *The degree of differentiability of the regularization of simultaneous binary collisions in some N-body problems* Nonlinearity **13** No. 6 (Noviembre 2000) 2107-2130.
- [35] McGehee, R., *Triple collision in the collinear three body problem*. Invent. Math. **27**, 1974, 191-227.
- [36] McGehee, R., *A stable manifold theorem for degenerate fixed points with applications to celestial mechanics*. J. Diff. Eq. **14**, 70-88, (1973).
- [37] Meyer K. y Wang Q.D., *Global phase structure of the restricted isosceles three body problem with positive energy*. Trans. Amer. Math. Soc. **338** (1993) 311-336.
- [38] Mikkola S., *Encounters of binaries I, Equal energies*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **203** (1983) 1107-1121.
- [39] Mikkola S., *Encounters of binaries II, Unequal energies*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **207** (1984) 115-126.
- [40] Moeckel, R., *Orbits near triple collision in the three body problem*. Indiana Univ. Math. Jour **32**, (1983), 221-240.
- [41] Moeckel, R., *Chaotic dynamics near triple collision*. Arch. Rat. Mechanics and Analysis. **107**, (1989), 37-70.
- [42] Moeckel, R., *Orbits of the three body problem which pass infinitely close to triple collision*. Amer. Journal of Math. **103**, (1981), 1323-1341.
- [43] Moeckel, R., *Heteroclinic phenomena in the isosceles three body problem*. Siam J. Math. Anal. **15**, (1984), 857-876.
- [44] Moser J., *Stable and random motions in dynamical systems*. Number 77, Princeton University Press, Princeton N.J., 1973.
- [45] Pollard H., *Celestial Mechanics*, The Carus Mathematical Monographs, **18**, Mathematical Association of America, 1976.
- [46] Robinson C., *Homoclinic orbits and oscilation for the planar three body problem*. Journal of Differential Equations **52**, 356-377, 1984.

- [47] Saari D., *On the role and properties of central configurations*, In Proceedings of the Sixth Conference on Mathematical Methods in Celestial Mechanics, Part I, Math. Forschungsinst, Oberwolfach. Celestial Mechanics, **21**, 1980, 9-20.
- [48] Saari, D., Hulkower N.D., *On the manifolds of total collapse orbits and of completely parabolic orbits for the  $n$  body problem*, J. Diff. Equations, **41**, (1981), 27-43]
- [49] Sekigushi M., Tanikawa K., *On the symmetric collinear four-body problem* Publ. Astron. Soc. Japan **56**, (2004),235-251.
- [50] Simó C. *Analysis of triple collision in the isosceles problem*. In Classical Mechanics and Dynamical Systems. Ed. R. L. Devaney-Z. Nitecki. Marcel Dekker (1981), 203-224.
- [51] Simó C., Susín A. *Connections between critical points in the collision manifold of the planar 3-body problem*. In The geometry of Hamiltonian Systems, Ed. T. Ratiu. Springer-Verlag (1991), 497-517.
- [52] Sitnikov K.A., *The existence of oscillatory motions in the three body problem*. Soviet Physics Dokl, **5** (1960), 647-650.
- [53] Smale S., *Topology and mechanics II*, Invent Math.,**11**, 45-64.
- [54] Sundman K.F., *Mémoire sur le problème des trois corps*. Acta Mathematica, **36** (1912), 105-179.
- [55] Susín, A. *The triple collision planar problem*, Tesis Doctoral, Universidad de Barcelona, 1993.
- [56] Sweatman W.L., *The symmetrical one-dimensional newtonian four-body problem: A numerical investigation* Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy **82**, No.2 (2002), 179-201.
- [57] Vidal C. *O problema tetraedral simétrico com rotação*. Tesis Doctoral (1999), Universidade Federal de Pernambuco.
- [58] Vidal C. *The tetrahedral 4-body problem with rotation*. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy **71**, (1999), 15-33.

- 
- [59] Wintner, A. *The analytical foundations of Celestial Mechanics*, Princeton, Math. Series, Vol 5, Princeton Univ. Press, N.J., 1941
- [60] Xia, Z. *The Existence of Noncollision Singularities in Newtonian Systems*. *The Annals of Mathematics* 2nd Ser., **135**, No. 3 (May, 1992), pp. 411-468.

