

"ESTUDIO DEL MOVIMIENTO
ENTRE LOS TROMPOS DE
KOVALEVSKAYA Y LAGRANGE"

TESIS QUE PRESENTA
ELISA GUILLAUMIN ESPAÑA

PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN FISICA

ENERO DE 1995

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA
DIVISION DE CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE FISICA

Agradecimientos

Este trabajo fué realizado en el Área de Mecánica, Departamento de Física, Universidad Autónoma Metropolitana - Izta-palapa, bajo la dirección del Dr. Eduardo Piña Garza a quien agradezco su apoyo, atención y enseñanzas, así como la discusión de los resultados y las ideas en las que se ha basado el desarrollo de esta tesis.

Quiero agradecer también a los Dres. Lidia Jiménez Lara y José Luis del Río Correa por aceptar formar parte del jurado y por la cuidadosa revisión que han hecho de este trabajo así como por sus valiosas sugerencias para mejorarlo tanto en la forma como en el contenido.

Este trabajo fué apoyado parcialmente por CONACyT.

Indice

	Introducción	1
Capítulo 1.	Obtención de las funciones de Lagrange y de Routh	3
1.1	Energía Potencial	3
1.2	Energía Cinética	6
1.3	Funciones de Lagrange y de Routh	8
Capítulo 2	Obtención del Hamiltoniano	11
Capítulo 3.	Región de Hill	18
Capítulo 4.	Líneas de Simetría en el Movimiento del Trompo	25
4.1	Involuciones y sus Propiedades	25
4.2	Líneas de Simetría	37
4.3	Puntos y Ciclos Periódicos	41
Capítulo 5.	Conclusiones	46
	Referencias	58
	Gráficas	

Introducción

La presente tesis tiene como tema de estudio comprender la dinámica que presenta el movimiento del trompo simétrico con la particularidad de que seleccionamos los momentos de inercia y la posición del punto de apoyo de tal manera que variando esta última podemos pasar de manera continua del caso de Kovalevskaya al de Lagrange. Como se sabe ambos casos son integrables analíticamente, pero los casos intermedios no lo son, sin embargo las ecuaciones de movimiento siempre se pueden integrar numéricamente para estudiar el movimiento, como es usual actualmente al enfrentar problemas no lineales. Para realizar el estudio y análisis de la dinámica de estos sistemas, en la Mecánica Clásica se cuenta con técnicas como los Mapeos de Poincaré y Líneas de Simetría, que constituyen un medio para el estudio y la visualización de las órbitas, además el uso de estas técnicas también permite la determinación de los puntos periódicos del sistema así como el análisis de la estabilidad del movimiento alrededor de dichos puntos.

Es importante señalar que el trompo en general es un problema no integrable que ha sido objeto de muchos estudios en los que se han encontrado y analizado diversos casos integrables particulares, entre los que se encuentran, como ya se ha mencionado, tanto el de Lagrange como el de Kovalevskaya. Como objetivo de este trabajo se pretende describir, hasta donde sea posible, la dinámica de un conjunto de sistemas intermedios a estos dos casos, lo cual

significa, por una parte, determinar la región de Hill, la cual nos dice, dada las constantes de movimiento del problema, que son la energía total y el momento asociado a ϕ en ángulos de Euler, cual es el conjunto de coordenadas accesible al movimiento de un sistema en particular, esto es la región de Hill nos dice en donde se efectúa el movimiento. Por otra parte también debemos decir como se mueve el sistema, lo cual implica que encontremos con qué condiciones iniciales es posible obtener órbitas periódicas, lo cual hemos realizado utilizando la técnica de las líneas de simetría en el plano de Poincaré.

En el primer capítulo de este trabajo se determinan las energías cinética y potencial de este problema y se obtienen las ecuaciones de Lagrange y de Routh. El segundo capítulo se ocupa de la obtención del Hamiltoniano y la introducción de variables adimensionales. En el capítulo tercero se lleva a cabo un estudio acerca de la Región de Hill. En el cuarto se hace primero una revisión de la teoría de Líneas de Simetría la cual ha sido desarrollada y estudiada por varios autores cuyos trabajos han sido de gran utilidad para el desarrollo de esta tesis, y después se calculan para este problema las Líneas de Simetría Γ_0 y Γ_1 para a partir de ellas obtener dos familias de Líneas de Simetría, que se complementan mutuamente y se calculan en forma numérica. También se discute cuál es el plano de Poincaré adecuado para el estudio del movimiento, y por último se concluye cuando es posible y cuando imposible encontrar las dos familias de líneas. En el quinto capítulo se analizan tres ejemplos, observando que cada uno exhibe una dinámica y una evolución muy diferente al ir cambiando la posición del punto de apoyo.

Capítulo 1

Obtención de las funciones de Lagrange y de Routh

1.1 Energía Potencial

Para un cuerpo rígido, sean \vec{r}_i y m_i , la posición y la masa de la i -ésima partícula, respectivamente, y \vec{a}_i su posición en el sistema anclado al cuerpo, entonces, para dicha partícula:

$$\vec{r}_i = R \cdot \vec{a}_i$$

donde R es la rotación que pasa del sistema anclado al sistema inercial. Por otra parte la energía potencial del cuerpo es:

$$\begin{aligned} V &= \sum_i m_i g \vec{k} \cdot \vec{r}_i \\ &= \sum_i m_i g \vec{k} \cdot R \cdot \vec{a}_i \end{aligned} \quad (1)$$

Sea \vec{a} la posición del centro de masa en el sistema anclado, entonces :

$$\sum_i m_i \vec{a}_i = M \vec{a}$$

por lo que la energía potencial también puede escribirse como:

$$V = M g \vec{k} \cdot R \cdot \vec{a}$$

El problema que nos ocupa es el estudio del movimiento del trompo simétrico, en el que se tienen dos momentos de inercia iguales y uno diferente, cuando su punto de apoyo se ubica en una posición intermedia entre el plano formado por los ejes que corresponden a los momentos de inercia iguales, al que llamaremos plano de simetría y el eje de simetría, que es el correspondiente al tercer momento de inercia. El movimiento cuando el punto de apoyo se encuentra en una u otra de las posiciones extremas está bien estudiado y corresponde a los casos de Kovalevskaya y Lagrange, respectivamente. En el caso de Kovalevskaya se tienen dos momentos de inercia iguales y el tercero igual a la mitad de los primeros, además el punto de apoyo se encuentra en el plano de simetría, i.e.:

$$I_1 = I_2 = 2D \quad (2)$$

$$I_3 = D \quad (3)$$

$$\vec{a} = (1, 0, 0) \quad (4)$$

En el caso de Lagrange el punto de apoyo se encuentra sobre el eje de simetría, i.e.:

$$I_1 = I_2 = 2D \quad (5)$$

$$I_3 = D \quad (6)$$

$$\vec{a} = (0, 0, 1) \quad (7)$$

Cabe señalar que en el Trompo de Lagrange se ha escogido el valor del tercer momento de inercia igual que en el trompo de Kovalevskaya, de manera que ambos casos se diferencian sólo en la posición del punto de apoyo. A fin de poder pasar de manera continua de un caso al otro, introducimos un nuevo parámetro α ,

el cual permite modificar el punto de apoyo desde la posición que corresponde al trompo de Kovalevskaya hasta la correspondiente al trompo de Lagrange. En función de α la posición del punto de apoyo es:

$$\vec{a} = (\cos \alpha, 0, \sin \alpha)$$

Cuando $\alpha = 0$, \vec{a} corresponde al Trompo de Kovalevskaya, mientras que si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, entonces \vec{a} corresponde al Trompo de Lagrange.

1.2 Energía Cinética

El movimiento de un cuerpo rígido, se describe normalmente en ángulos de Euler, donde ψ es el ángulo de rotación alrededor del eje z del trompo, ϕ es el ángulo de precesión alrededor de la dirección vertical, y θ es el ángulo entre el eje z y la dirección vertical.

La Energía Cinética del Trompo en dichas coordenadas es:

$$T(\phi, \theta, \psi, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}) = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi)^2 + \frac{I_2}{2}(-\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi)^2 + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 \quad (8)$$

Sustituyendo los momentos de inercia, se tiene:

$$T = D \left(\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \right)^2 + D \left(-\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \right)^2 + \frac{D}{2} \left(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right)^2 \quad (9)$$

Donde por comodidad ya no escribimos las dependencias de T . Desarrollando ahora los dos primeros términos del lado derecho de la ecuación anterior:

$$T = D \left(\dot{\theta}^2 \cos^2 \psi + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \sin^2 \psi + 2\dot{\theta}\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \sin \psi \right) + D \left(\dot{\theta}^2 \sin^2 \psi + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \cos^2 \psi - 2\dot{\theta}\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \sin \psi \right) + \frac{D}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 \quad (10)$$

Vemos que por ser iguales los momentos de inercia I_1 e I_2 los productos cruzados donde aparecen $\dot{\theta}$ y $\dot{\phi}$ se cancelan, y factorizando

las velocidades se tiene que:

$$T = D \left[\dot{\theta}^2 (\cos^2 \psi + \sin^2 \psi) \right] + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta (\sin^2 \psi + \cos^2 \psi) + \frac{D}{2} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 \quad (11)$$

simplificando por último la expresión anterior, la energía cinética queda:

$$T = D\dot{\theta}^2 + D\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \frac{D}{2} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 \quad (12)$$

1.3 Funciones de Lagrange y de Routh

Utilizando las expresiones de la energía cinética y potencial que hemos desarrollado en los párrafos anteriores escribimos a continuación el Lagrangiano para un Trompo Simétrico entre el Trompo de Kovalevskaya y el de Lagrange.

El Lagrangiano se define como:

$$L(\phi, \theta, \psi, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}) = T(\phi, \theta, \psi, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}) - V(\phi, \theta, \psi)$$

Sustituyendo explícitamente en la ecuación anterior las energías cinética y potencial, tenemos :

$$\begin{aligned} L = & D\dot{\theta}^2 + D\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \frac{D}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 \\ & - Mgl(\sin \theta \sin \psi \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha) \end{aligned} \quad (13)$$

En la ecuación anterior se observa que L es independiente de ϕ , por lo que sabemos que dicha variable es cíclica. Una forma conveniente de manejar las variables cíclicas es utilizando la Función de Routh, la cual se comporta como un Hamiltoniano para las variables cíclicas y como un Lagrangiano para las demás variables. La función de Routh no depende explícitamente de las variables cíclicas ni de sus derivadas, sino que en ella aparecen solamente los momentos asociados a dichas variables, los cuales son constantes de movimiento para el problema. Principiamos por obtener $\dot{\phi}$ en función de p_ϕ lo que permitirá que ésta no aparezca explícitamente en el Routhiano.

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \quad (14)$$

Efectuando la derivación respecto a $\dot{\phi}$, se tiene:

$$p_{\phi} = 2D\dot{\phi} \sin^2 \theta + D(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \cos \theta \quad (15)$$

Eliminando los paréntesis del segundo término:

$$p_{\phi} = 2D\dot{\phi} \sin^2 \theta + D\dot{\phi} \cos^2 \theta + D\dot{\psi} \cos \theta \quad (16)$$

Factorizando $\dot{\phi}$ tenemos

$$p_{\phi} = D\dot{\phi}(2\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + D\dot{\psi} \cos \theta \quad (17)$$

Y despejando de la última ecuación, obtenemos:

$$\dot{\phi} = \frac{p_{\phi} - D\dot{\psi} \cos \theta}{D(2\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} \quad (18)$$

Lo que también se puede escribir como:

$$\dot{\phi} = \frac{p_{\phi} - D\dot{\psi} \cos \theta}{D(1 + \sin^2 \theta)} \quad (19)$$

Por lo que:

$$\dot{\phi}^2 = \left(\frac{p_{\phi} - D\dot{\psi} \cos \theta}{D(1 + \sin^2 \theta)} \right)^2 \quad (20)$$

La función de Routh se define como :

$$R = L - p_{\phi} \dot{\phi}(p_{\phi}, \dots) \quad (21)$$

$$R = D\dot{\theta}^2 + D \left[\frac{p_{\phi} - D\dot{\psi} \cos \theta}{D(1 + \sin^2 \theta)} \right]^2 \sin^2 \theta$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{D}{2} \left(\dot{\psi} + \left[\frac{p_{\phi} - D\dot{\psi} \cos \theta}{D(1 + \sin^2 \theta)} \right] \cos \theta \right)^2 \\
& - p_{\phi} \left[\frac{p_{\phi} - D\dot{\psi} \cos \theta}{D(1 + \sin^2 \theta)} \right] \\
& - Mgl(\sin \theta \sin \psi \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha) \tag{22}
\end{aligned}$$

Simplificando la expresión anterior, tenemos:

$$\begin{aligned}
R(\theta, \psi, \dot{\theta}, \dot{\psi}, p_{\phi}) & = D\dot{\theta}^2 + \frac{D\dot{\psi}^2}{2} - \frac{D\dot{\psi}^2 \cos^2 \theta}{2(1 + \sin^2 \theta)} \\
& - \frac{p_{\phi}^2}{2D(1 + \sin^2 \theta)} \\
& - Mgl(\sin \theta \sin \psi \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha) \tag{23}
\end{aligned}$$

La forma en la que se ha expresado la energía cinética para escribir la función de Routh será utilizada más adelante en la ecuación de conservación de la energía, que es el punto de partida para el análisis de la región de Hill.

Capítulo 2

Obtención del Hamiltoniano

Para obtener el hamiltoniano de este problema, partimos de la función de Lagrange para un trompo simétrico cuyo punto de apoyo se encuentra entre las posiciones correspondientes a los casos de Lagrange y Kovalevskaya, la cual determinamos anteriormente y que reescribimos aquí:

$$\begin{aligned}
 L = & D\dot{\theta}^2 + D\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \frac{D}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 \\
 & - Mgl(\sin \theta \sin \psi \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha)
 \end{aligned} \tag{24}$$

debido a que la función de Lagrange no depende explícitamente de la variable ϕ ni del tiempo, sabemos que la energía del sistema se conserva y que ϕ es una variable cíclica (ignorable).

Para obtener el Hamiltoniano debemos expresar la energía cinética en función de los momentos canónicos, eliminando las velocidades.

$$H = p_i \dot{q}_i(\vec{q}, \vec{p}) - L(\vec{q}, \dot{q}(\vec{q}, \vec{p})) \tag{25}$$

Donde los índices repetidos indican suma $\vec{q} = (q_1, \dots, q_n)$, $\dot{\vec{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ y $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$. Derivando parcialmente la función de Lagrange con respecto a la componente θ de la velocidad, se obtiene el momento canónico asociado con la variable θ y lo denoto p_θ

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$$

$$p_\theta = 2D\dot{\theta} \quad (26)$$

despejando $\dot{\theta}$ de la ecuación anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{p_\theta}{2D} \\ \dot{\theta}^2 &= \frac{p_\theta^2}{4D^2} \end{aligned} \quad (27)$$

Del mismo modo son calculados los momentos asociados con la variables ϕ y ψ , los cuales denoto p_ϕ y p_ψ , respectivamente.

$$\begin{aligned} p_\phi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \\ &= 2D\dot{\phi} \sin^2 \theta + D\dot{\phi} \cos^2 \theta + D\dot{\psi} \cos \theta \end{aligned} \quad (28)$$

$$p_\phi = D \left[\dot{\phi}(2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + \dot{\psi} \cos \theta \right] \quad (29)$$

$$\begin{aligned} p_\psi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \\ p_\psi &= D \left[\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right] \end{aligned} \quad (30)$$

despejo $\dot{\psi}$ y $\dot{\phi}$ de la ecuación (30):

$$\dot{\psi} = \frac{p_\psi}{D} - \dot{\phi} \cos \theta \quad (31)$$

$$\dot{\phi} = \frac{p_\psi - D\dot{\psi}}{D \cos \theta} \quad (32)$$

sustituyendo $\dot{\psi}$ de (30) en (29) se obtiene $\dot{\phi}$ en función de las coordenadas y los momentos correspondientes.

$$p_\phi = D \left[\dot{\phi}(2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + \frac{p_\psi \cos \theta}{D} - \dot{\phi} \cos^2 \theta \right] \quad (33)$$

$$= 2D\dot{\phi} \sin^2 \theta + p_\psi \cos \theta \quad (34)$$

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{2D \sin^2 \theta} \quad (35)$$

Por claridad es conveniente calcular cada término de la energía cinética conforme aparece en la función de Lagrange, el primer término es entonces $D\dot{\theta}^2$, y lo escribimos a continuación:

$$D\dot{\theta}^2 = \frac{p_\theta^2}{4D^2} \quad (36)$$

el segundo término es $D\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta$, entonces, primero determinamos $\dot{\phi}^2$:

$$\dot{\phi}^2 = \left[\frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{2D \sin^2 \theta} \right]^2 \quad (37)$$

$$= \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{4D^2 \sin^4 \theta} \quad (38)$$

el segundo término de T queda:

$$D\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta = \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{4D \sin^2 \theta} \quad (39)$$

Observando que en la función de Lagrange $\dot{\psi}$ aparece únicamente en combinación con $\dot{\phi}$ en el tercer término de T , por lo que para calcular éste no es necesario conocer directamente a $\dot{\psi}$, sino que basta con determinar la suma $\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$, y esto se puede hacer fácilmente considerando la ecuación (31):

$$\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta = \frac{p_\psi}{D} \quad (40)$$

entonces:

$$\left[\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right]^2 = \frac{p_\psi^2}{D^2} \quad (41)$$

Ahora continuamos de la misma forma calculando los productos $p_\theta \dot{\theta}$, $p_\phi \dot{\phi}$ y $p_\psi \dot{\psi}$.

$$p_\theta \dot{\theta} = \frac{p_\theta^2}{2D} \quad (42)$$

$$\frac{p_\theta^2}{2D} - \frac{p_\theta^2}{4D} = \frac{p_\theta^2}{2D} \quad (43)$$

$$p_\phi \dot{\phi} = \frac{p_\phi^2 - p_\phi p_\psi \cos \theta}{2D \sin^2 \theta} \quad (44)$$

$$p_\psi \dot{\psi} = \frac{p_\psi^2}{D} - \frac{p_\psi p_\phi \cos \theta}{2D \sin^2 \theta} \quad (45)$$

en este punto nos anticipamos a simplificar la suma de $p_\phi \dot{\phi}$ y $p_\psi \dot{\psi}$:

$$p_\phi \dot{\phi} + p_\psi \dot{\psi} = \frac{p_\psi^2}{D} + \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2D \sin^2 \theta} \quad (46)$$

El Hamiltoniano es:

$$\begin{aligned} H = p_\theta \dot{\theta} + p_\phi \dot{\phi} + p_\psi \dot{\psi} - L &= \frac{p_\theta^2}{2D} - \frac{p_\theta^2}{4D} \\ &+ \frac{p_\psi^2}{D} - \frac{p_\psi^2}{2D} + \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2D \sin^2 \theta} - \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{4D \sin^2 \theta} + V \end{aligned} \quad (47)$$

$$= \frac{p_\theta^2}{4D} + \frac{p_\psi^2}{2D} + \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{4D \sin^2 \theta} + V$$

sustituyendo V el Hamiltoniano finalmente es:

$$H = \frac{p_\theta^2}{4D} + \frac{p_\psi^2}{2D} + \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{4D \sin^2 \theta} + Mgl [\sin \theta \sin \psi \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha] \quad (48)$$

Por lo que las ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_\theta} &= \frac{p_\theta}{2D} \\ &= \dot{\theta} \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial H}{\partial \theta} &= -Mgl [\cos \theta \sin \psi \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha] \\ &\quad + \frac{1}{2D} \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)(p_\phi \cos \theta - p_\psi)}{\sin^3 \theta} \\ &= \dot{p}_\theta \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_\psi} &= \frac{p_\psi}{D} - \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta) \cos \theta}{2D \sin^2 \theta} \\ &= \dot{\psi} \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial H}{\partial \psi} &= -Mgl \sin \theta \cos \psi \cos \alpha \\ &= \dot{p}_\psi \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_\phi} &= \frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{2D \sin^2 \theta} \\ &= \dot{\phi} \end{aligned} \quad (53)$$

$$-\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 = \dot{p}_\phi \quad (54)$$

por la última ecuación sabemos que p_ϕ es constante de movimiento.

Las ecuaciones anteriores pueden simplificarse escribiéndolas en términos de cantidades adimensionales, para ello definimos los siguientes parámetros, el primero de los cuales representa a la energía en forma adimensional:

$$A \equiv \frac{E}{Mgl} \quad (55)$$

el segundo es proporcional al cuadrado del momento angular p_ϕ

$$B \equiv \frac{p_\phi^2}{2DMgl} \quad (56)$$

y el tercero es un tiempo sin dimensiones

$$\tau \equiv t \sqrt{\frac{Mgl}{2D}} \quad (57)$$

En términos de estos parámetros el Hamiltoniano queda:

$$H = \frac{p_\theta^2}{2} + p_\psi^2 + \frac{(\sqrt{B} - p_\psi \cos \theta)^2}{2 \sin^2 \theta} + \sin \theta \sin \psi \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha \quad (58)$$

y ahora denotando con \bullet la derivada con respecto a τ , las ecuaciones de movimiento son:

$$\frac{\partial H}{\partial p_\theta} = p_\theta \quad (59)$$

$$= \dot{\theta} \quad (60)$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial H}{\partial \theta} &= \cos \theta \sin \psi \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha \\
&+ \frac{(\sqrt{B} - p_\psi \cos \theta)(\sqrt{B} \cos \theta - p_\psi)}{\sin^3 \theta} \\
&= \dot{p}_\theta
\end{aligned} \tag{61}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial p_\psi} &= p_\psi - \frac{(\sqrt{B} - p_\psi \cos \theta) \cos \theta}{\sin^2 \theta} \\
&= \dot{\psi}
\end{aligned} \tag{62}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial H}{\partial \psi} &= -\sin \theta \cos \psi \cos \alpha \\
&= \dot{p}_\psi
\end{aligned} \tag{63}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial p_\phi} &= \frac{\sqrt{B} - p_\psi \cos \theta}{\sin^2 \theta} \\
&= \dot{\phi}
\end{aligned} \tag{64}$$

$$-\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 = \dot{p}_\phi \tag{65}$$

Las ecuaciones de movimiento que hemos determinado, aún en los casos extremos de α , que son integrables no poseen una solución analítica sencilla, y en los casos intermedios que son no-integrables ni siquiera poseen una solución analítica, por lo que para efectuar el análisis del movimiento es necesario integrar numéricamente las ecuaciones. El propósito de nuestro estudio es determinar la estructura dinámica del problema, lo que implica conocer los puntos periódicos, estables e inestables así como sus órbitas. Para la determinación de los puntos periódicos hemos recurrido a las líneas de simetría.

Capítulo 3

Región de Hill

La región de Hill es aquella en la cual el movimiento es posible, lo que implica que la energía cinética es mayor o igual a cero. Entonces, todos aquellos puntos del espacio de configuración (ϕ, θ, ψ) , cuya energía cinética sea mayor o igual que cero constituyen la Región de Hill. Para determinar la región de Hill partimos de la ecuación de conservación de la energía:

$$E = T + V \quad (66)$$

pero para tomar en cuenta de antemano que ϕ es una variable cíclica se escribe T como en la función de Routh y entonces para nuestro problema la conservación de la energía queda:

$$\begin{aligned}
 E = & D\dot{\theta}^2 + \frac{D\dot{\psi}^2}{2} - \frac{D\dot{\psi}^2 \cos^2 \theta}{2(1 + \sin^2 \theta)} \\
 & - \frac{p_\phi^2}{2D(1 + \sin^2 \theta)} \\
 & + Mgl(\sin \theta \sin \psi \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha) \quad (67)
 \end{aligned}$$

Analizando esta expresión para la conservación de la energía se observa que en ella existe una fracción de la energía cinética que sólo depende de p_ϕ , que es una constante, y de θ que es una coordenada, entonces podemos separar dicha fracción del resto de la energía cinética y agruparla con la energía potencial. El hacer esto nos permite reducir el espacio de configuración a (θ, ψ) , que son las

variables relevantes del sistema. Denotamos por T' la fracción de la energía cinética que sí depende de las coordenadas relevantes:

$$\begin{aligned}
 T' &= E - V - f(p_\phi) \\
 T' &= E - \frac{p_\phi^2}{2D(\sin^2 \theta + 1)} - V(\theta, \psi) \\
 T' &= E - \frac{p_\phi^2}{2D(\sin^2 \theta + 1)} \\
 &\quad - Mgl(\sin \theta \sin \psi \cos \alpha - \cos \theta \sin \alpha) \quad (68)
 \end{aligned}$$

Dividiendo entre Mgl , para eliminar dimensiones, la región de Hill queda:

$$\frac{E}{Mgl} - \frac{p_\phi^2}{2DMgl(\sin^2 \theta + 1)} - (\sin \theta \sin \psi \cos \alpha - \cos \theta \sin \alpha) \geq 0 \quad (69)$$

Ahora identificamos en la desigualdad anterior los parámetros A y B , que ya hemos definido en el capítulo 2, con lo cual la región de Hill toma una expresión más sencilla:

$$A - \frac{B}{(\sin^2 \theta + 1)} - (\sin \theta \sin \psi \cos \alpha - \cos \theta \sin \alpha) \geq 0 \quad (70)$$

Es importante subrayar que las constantes Mgl , p_ϕ^2 y D , que aparecen en la definición de A y B son positivas, lo que implica que A y B son positivas, i.e.

$$A > 0 \quad (71)$$

$$B > 0 \quad (72)$$

Recordemos que los intervalos de definición de las variables θ , ψ y del parámetro α son

$$\theta \in [0, \pi] \quad (73)$$

$$\psi \in [0, 2\pi] \quad (74)$$

$$\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad (75)$$

para abreviar aún más la forma de la región de Hill, introducimos las variables u , x y z definidas como sigue:

$$u = \sin \theta \quad (76)$$

$$x = \sin \theta \sin \psi \quad (77)$$

$$z = \cos \theta \quad (78)$$

Debido a los intervalos a los que pertenecen θ y ψ , las variables u , x y z , satisfacen:

$$-1 \leq x \leq 1 \quad (79)$$

$$0 \leq u \leq 1 \quad (80)$$

$$-u \leq x \leq u \quad (81)$$

$$-1 \leq z \leq 1 \quad (82)$$

La región de Hill escrita en las nuevas variables, queda

$$A - \frac{B}{(u^2 + 1)} - x \cos \alpha - z \sin \alpha \geq 0 \quad (83)$$

o bien :

$$A - x \cos \alpha - z \sin \alpha \geq \frac{B}{(u^2 + 1)} \quad (84)$$

pero

$$\frac{B}{(u^2 + 1)} \geq 0 \quad (85)$$

porque tanto el numerador como el denominador de la fracción son positivos, entonces:

$$A - x \cos \alpha - z \sin \alpha \geq \frac{B}{(u^2 + 1)} \geq 0 \quad (86)$$

En la desigualdad anterior A está relacionada con la energía total, los términos que contienen a x y a z se relacionan con la energía potencial, mientras que el que involucra a B y a u representa la energía utilizada en el movimiento alrededor del eje vertical.

Para $\alpha = 0$, que corresponde al caso de Kovalevskaya, la desigualdad (84) queda como :

$$A - x \geq \frac{B}{(u^2 + 1)} \geq 0 \quad (87)$$

depende de ψ y de θ a través de x , pues $x = x(\theta, \psi)$

Para $\alpha = \frac{\pi}{2}$ que corresponde al trompo de Lagrange, la desigualdad (84), se reduce a:

$$A - z \geq \frac{B}{(u^2 + 1)} \geq 0 \quad (88)$$

es independiente de ψ , ya que u y z dependen únicamente de θ , por lo tanto, en el caso de Lagrange, la frontera de la región de

Hill sólo puede consistir de rectas de la forma $\theta = cte$, en el plano (θ, ψ)

$$-1 \leq x \cos \alpha + z \sin \alpha \leq 1 \quad (89)$$

$$1 \geq -x \cos \alpha - z \sin \alpha \geq -1 \quad (90)$$

El lado izquierdo de (84) está acotado por:

$$A + 1 \geq A - x \cos \alpha - z \sin \alpha \geq A - 1 \quad (91)$$

considerando que por (80) $u^2 \in [0, 1]$, el lado derecho de la desigualdad (84) está acotado por:

$$\frac{B}{2} \leq \frac{B}{(u^2 + 1)} \leq B \quad (92)$$

$$A + 1 \geq A - x \cos \alpha - z \sin \alpha \geq \frac{B}{(u^2 + 1)} \geq \frac{B}{2} \quad (93)$$

Entonces si :

$$B > 2(A + 1)$$

se viola la desigualdad (93), y en consecuencia, no hay región de Hill

El caso límite para la desigualdad (93) se da cuando se tiene la igualdad:

$$A + 1 = \frac{B}{2} \quad (94)$$

esto ocurre cuando $u^2 = 1$, lo que implica que $\theta = \frac{\pi}{2}$, entonces $\sin \theta = 1$ y $\cos \theta = z = 0$, por lo que $x \cos \alpha = \sin \psi \cos \alpha = -1$ lo que implica que $\alpha = 0$, $\sin \psi = -1$ de donde $\psi = \frac{3\pi}{2}$. Entonces el caso límite ocurre cuando estando en el trompo de Kovalevskaya la región de Hill consta solamente del punto $(\theta = \frac{\pi}{2}, \psi = \frac{3\pi}{2})$

En la frontera de la región de Hill se cumple la igualdad en (84)

$$A - x \cos \alpha - z \sin \alpha = \frac{B}{(u^2 + 1)} \quad (95)$$

para $(\theta = \frac{\pi}{2}, \psi = \frac{\pi}{2})$, se tiene que $x = 1$, $z = 0$, y $u = 1$, entonces, sustituyendo en (95), se tiene:

$$A - \cos \alpha = \frac{B}{2} \quad (96)$$

Esto se interpreta de la manera siguiente: si dados los valores de A , B y α se cumple la igualdad (96), entonces el punto $(\theta = \frac{\pi}{2}, \psi = \frac{\pi}{2})$ pertenece a la frontera de la región de Hill.

Gracias a que ambos miembros de la desigualdad (84) son positivos, la región de Hill también se puede escribir como:

$$u^2 + 1 \geq \frac{B}{(A - x \cos \alpha - z \sin \alpha)} \quad (97)$$

y la frontera se expresa por la igualdad

$$u^2 + 1 = \frac{B}{(A - x \cos \alpha - z \sin \alpha)} \quad (98)$$

por (80) sabemos que $0 \leq u^2 \leq 1$ y en consecuencia $u^2 + 1$ esta acotado entre 1 y 2, entonces:

$$1 \leq \frac{B}{(A - x \cos \alpha - z \sin \alpha)} \leq 2 \quad (99)$$

Por lo que:

$$B \geq A - x \cos \alpha - z \sin \alpha \quad (100)$$

y también

$$B \leq 2(A - x \cos \alpha - z \sin \alpha) \quad (101)$$

Si suponemos que existe la frontera de la región de Hill, se debe cumplir la igualdad en (84), pero también se debe satisfacer la desigualdad (91), por lo tanto:

$$A + 1 \geq \frac{B}{(u^2 + 1)} \geq A - 1 \quad (102)$$

Entonces para que exista la frontera de la región de Hill, se requiere que se satisfagan las siguientes desigualdades:

$$B \leq (A + 1)(u^2 + 1) \leq 2(A + 1) \quad (103)$$

$$B \geq (A - 1)(u^2 + 1) \leq (A - 1) \quad (104)$$

Por otra parte si $B < (A - 1)$, tenemos:

$$\frac{B}{(u^2 + 1)} \leq B < B - 1 \leq A - x \cos \alpha - z \sin \alpha \quad (105)$$

por las desigualdades (91) y (92) se satisface la desigualdad (97), sin embargo no puede cumplirse la igualdad, esto significa que no hay frontera de la región de Hill, de modo que todos los puntos del espacio de configuración forman parte de ella.

Capítulo 4

Líneas de Simetría en el movimiento del Trompo

La primera parte de este capítulo consiste en un resumen acerca de las involuciones y sus propiedades, algunas de las cuales demostraremos. En la segunda daremos la definición de las líneas de simetría y demostraremos sus propiedades y en la tercera especificaremos de que manera se aplica esta teoría al problema que estamos estudiando.

4.1 Involuciones y sus propiedades

Las líneas de simetría solo existen para mapeos tales que puedan escribirse como el producto (composición) de dos involuciones. Sea M el operador de evolución temporal, I_0 el operador de inversión en el tiempo y la velocidad, e I_1 es la involución que completa la factorización de M , entonces, por ser involuciones:

$$\begin{aligned} I_0 I_0 &= I_0^2 = 1 \\ I_1 I_1 &= I_1^2 = 1 \end{aligned}$$

Es fácil ver que $M^{-1} = I_0 I_1$, multiplicando primero M a la izquierda

por I_1 y luego por I_0 se obtiene la identidad.

$$\begin{aligned} M &= I_1 I_0 \\ I_1 M &= (I_1^2) I_0 = I_0 \\ I_0 I_1 M &= (I_0)^2 = 1 \end{aligned}$$

igualmente $M(I_0 I_1) = 1$.

De acuerdo con la factorización de M , también se cumple que

$$I_1 = M I_0 \tag{106}$$

En lo que sigue veremos de que manera se puede definir un grupo de operadores formado sólo por la composición repetida de M y las involuciones en las que se factoriza.

Definición uno. Sea $I_j \equiv M^j I_0$.

Como primer ejemplo obtenemos I_{-1} a partir de la definición, y comprobamos que es involución:

Ejemplo no. 0

$$\begin{aligned} I_{-1} &= M^{-1} I_0 \\ &= (I_0 I_1) I_0 \\ &= I_0 I_1 I_0 \\ &= I_0 M \end{aligned}$$

También podemos ver que I_{-1} es involución

$$I_{-1}^2 = (I_0 M)(I_0 M) = 1 \quad (107)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} (I_0 M)(I_0 M) &= [(I_0)(I_1 I_0)][(I_0)(I_1 I_0)] \\ &= I_0 I_1 \overbrace{I_0 I_0}^{=1} I_1 I_0 \\ &= I_0 \overbrace{I_1 I_1}^{=1} I_0 \\ &= I_0 I_0 = 1 \end{aligned}$$

Antes de mostrar que todas las I_j consistentes con la definición son efectivamente involuciones es ilustrativo desglosar algunos ejemplos:

Ejemplo no. 1. I_1 satisface la definición.

$$I_1 = M I_0 \quad (108)$$

Ejemplo no. 2. I_2

$$\begin{aligned} I_2 &= M^2 I_0 = (I_1 I_0)(I_1 I_0) I_0 \\ &= I_1 I_0 I_1 \\ I_2^2 &= (I_1 \overbrace{I_0 I_1}^{=1})(\underbrace{I_1 I_0}_{=1} I_1) \end{aligned}$$

$$= I_1^2 = 1$$

Ejemplo no. 3. I_3

$$\begin{aligned} I_3 &= M^3 I_0 = (I_1 I_0)(I_1 I_0)(I_1 I_0) I_0 \\ &= I_1 I_0 I_1 I_0 I_1 \\ I_3^2 &= \underbrace{(I_1 I_0 I_1 I_0 I_1)}_{=1} \underbrace{(I_1 I_0 I_1 I_0 I_1)}_{=1} \\ &= I_1^2 = 1 \end{aligned}$$

Ejemplo no. 4. I_4

$$\begin{aligned} I_4 &= M^4 I_0 = (I_1 I_0)(I_1 I_0)(I_1 I_0)(I_1 I_0) I_0 \\ &= I_1 I_0 I_1 I_0 I_1 I_0 I_1 \\ I_4^2 &= \underbrace{(I_1 I_0 I_1 I_0 I_1 I_0 I_1)}_{=1} \underbrace{(I_1 I_0 I_1 I_0 I_1 I_0 I_1)}_{=1} \\ &= I_1^2 = 1 \end{aligned}$$

Ejemplo no. 5. I_{-1} satisface la definición.

$$\begin{aligned} I_{-1} &= M^{-1} I_0 = I_0 I_1 I_0 \\ I_{-1}^2 &= \underbrace{(I_0 I_1 I_0)}_{=1} \underbrace{(I_0 I_1 I_0)}_{=1} \\ &= I_0^2 = 1 \end{aligned}$$

Ejemplo no. 6. I_{-2}

$$\begin{aligned}
I_{-2} &= M^{-2}I_0 = (I_0I_1)(I_0I_1)I_0 \\
&= I_0I_1I_0I_1I_0 \\
I_{-2}^2 &= \underbrace{(I_0I_1I_0I_1I_0)}_{=1} \underbrace{(I_0I_1I_0I_1I_0)}_{=1} \\
&= I_0^2 = 1
\end{aligned}$$

Ejemplo no. 7. I_{-3}

$$\begin{aligned}
I_{-3} &= M^{-3}I_0 = (I_0I_1)(I_0I_1)(I_0I_1)I_0 \\
&= I_0I_1I_0I_1I_0I_1I_0 \\
I_{-3}^2 &= \underbrace{(I_0I_1I_0I_1I_0I_1I_0)}_{=1} \underbrace{(I_0I_1I_0I_1I_0I_1I_0)}_{=1} \\
&= I_0^2 = 1
\end{aligned}$$

Ejemplo no. 8. I_{-4}

$$\begin{aligned}
I_{-4} &= M^{-4}I_0 = (I_0I_1)(I_0I_1)(I_0I_1)(I_0I_1)I_0 \\
&= I_0I_1I_0I_1I_0I_1I_0I_1I_0 \\
I_{-4}^2 &= \underbrace{(I_0I_1I_0I_1I_0I_1I_0I_1I_0)}_{=1} \underbrace{(I_0I_1I_0I_1I_0I_1I_0I_1I_0)}_{=1} \\
&= I_0^2 = 1
\end{aligned}$$

En los ejemplos anteriores observamos que I_j para $j > 0$ es una cadena alternada de I_1 e I_0 que empieza y termina con I_1 por lo que en ella aparecen j veces I_1 y $j - 1$ veces I_0 . Por el contrario si $j < 0$ vemos que I_j es una cadena alternada de I_0 e I_1 que empieza y termina con I_0 por lo que en ella aparecen j veces I_1 y $j + 1$ veces I_0 . Esto es:

$$I_j = I_1 I_0 \dots I_1 I_0 I_1 \quad (109)$$

contiene j veces I_1
 $j - 1$ veces I_0

$$I_{-j} = I_0 I_1 \dots I_0 I_1 I_0 \quad (110)$$

contiene j veces I_1
 $j + 1$ veces I_0

De igual manera podemos ver que M^j es una cadena donde se alternan las dos involuciones en que se factoriza, y que comienza con I_1 y termina con I_0 , mientras que M_{-j} comienza con I_0 y termina con I_1 . Esto es:

$$M^j = I_1 I_0 \dots I_1 I_0 \quad (111)$$

repetido j veces

mientras que:

$$M^{-j} = \underbrace{I_0 I_1 \dots I_0 I_1}_{j \text{ veces}} \quad (112)$$

Si aplicamos I_0 a $M^{\pm j}$ por la izquierda ,tenemos:

$$\begin{aligned} I_0 M^j &= I_0 (I_1 I_0 \dots I_1 I_0) \quad (113) \\ &\underbrace{j \text{ veces } I_1}_{j+1 \text{ veces } I_0} \\ &= I_{-j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_0 M^{-j} &= \overbrace{I_0}^{=1} (I_0 I_1 \dots I_0 I_1) \quad (114) \\ &\underbrace{j \text{ veces } I_1}_{j-1 \text{ veces } I_0} \\ &= I_j \end{aligned}$$

Pero si aplicamos I_0 a $M^{\pm j}$ tanto por la izquierda como por la derecha, tenemos:

$$\begin{aligned}
 I_0 M^j I_0 &= I_0 (I_1 I_0 \dots I_1 \overbrace{I_0}^{=1}) I_0 \\
 &= (I_0 I_1 I_0 \dots I_1) 1 \\
 &= M^{-j}
 \end{aligned} \tag{115}$$

$$\begin{aligned}
 I_0 M^{-j} I_0 &= \overbrace{I_0}^{=1} (I_0 I_1 \dots I_0 I_1) I_0 \\
 I_0 M^{-j} I_0 &= 1 (I_0 I_1 \dots I_0 I_1) I_0 \\
 &= M^j
 \end{aligned} \tag{116}$$

escribiendo lo anterior en forma más compacta se tiene:

$$I_0 M^{\pm j} I_0 = M^{\mp j} \tag{117}$$

Esto es, al realizar la operación $I_0 M^{\pm j} I_0$, en un extremo de la cadena se obtiene la identidad, que equivale a quitar una involución I_0 en ese extremo, en tanto que en el otro, simplemente se agrega

una I_0 , con lo que se obtiene $M^{\mp j}$ que es su inversa.

Por otra parte, también es fácil ver que para $j > 0$

$$I_j = MI_{j-1} = I_{j-1}M^{-1} \quad (118)$$

entonces I_j^2 puede escribirse como:

$$I_j^2 = (MI_{j-1})(I_{j-1}M^{-1}) \quad (119)$$

o bien, simplificando:

$$I_j^2 = MM^{-1} = 1 \quad (120)$$

con lo que se muestra directamente que las I_j son involuciones. En las ecuaciones (121) a la (123) asumiremos que $j > 0$ y escribiremos el signo negativo explícitamente:

Del mismo modo se tiene que:

$$I_{-j} = M^{-1}I_{-j+1} = I_{-j+1}M \quad (121)$$

entonces I_{-j}^2 puede escribirse como:

$$I_{-j}^2 = (M^{-1}I_{j-1})(I_{j-1}M) \quad (122)$$

Donde se ve claramente que:

$$I_{-j}^2 = M^{-1}M = 1 \quad (123)$$

El conjunto de los operadores M^j y las involuciones I_j , donde j puede ser tanto positivo como negativo, forman un grupo discreto infinito bajo la operación de composición.

$$\mathbf{i)} \quad I_j^2 = 1 \quad (124)$$

$$\mathbf{ii)} \quad I_l I_k = M^{l-k} \quad (125)$$

$$\mathbf{iii)} \quad M^j I_l = I_{j+l} \quad (126)$$

$$\mathbf{iv)} \quad I_l M^k = I_{l-k} \quad (127)$$

La propiedad (**i**) ya la hemos demostrado, a continuación demostraremos las demás.

Demostración de ii.

Aplicando la definición de las involuciones, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 I_l I_k &= (M^l I_0)(M^k I_0) \\
 &= M^l (I_0 M^k I_0)
 \end{aligned}
 \tag{128}$$

que por (123) es:

$$= M^l M^{-k} \tag{129}$$

simplificando los exponentes se obtiene:

$$I_l I_k = M^{l-k} \tag{130}$$

Demostración de iii.

Utilizando nuevamente la definición de involución tenemos:

$$M^j I_l = (M^j)(M^l I_0) \tag{131}$$

simplificando:

$$M^j I_l = M^{j+l} I_0 \tag{132}$$

y volviendo a la definición:

$$M^j I_l = I_{j+l} \quad (133)$$

Demostración de iv.

Aplicando la definición de involución en el miembro derecho de la ecuación 127, tenemos:

$$I_l M^k = (M^l I_0) M^k \quad (134)$$

pero como $I_0 M^k = I_{-k}$, de modo que:

$$I_l M^j = M^l I_{-k} \quad (135)$$

y utilizando la propiedad anterior:

$$I_l M^j = I_{l-k} \quad (136)$$

$$\mathbf{q.e.d.} \quad (137)$$

4.2 Líneas de Simetría

Definición :

El conjunto de todos los puntos invariantes ante la involución I_j constituyen la línea de simetría Γ_j . Es decir la línea de simetría Γ_j está formada por el conjunto de puntos fijos de la involución I_j .

$$\Gamma_j \equiv \{\vec{r} \mid I_j \vec{r} = \vec{r}\} \quad (138)$$

donde el punto $\vec{r} = (\theta, \psi, p_\theta, p_\psi)$.

Es importante conocer la manera en que se transforman las líneas de simetría cuando se les aplica el operador de evolución temporal (M). Sea \vec{r} un punto sobre la línea de simetría Γ_l i.e. :

$$I_l \vec{r} = \vec{r} \quad (139)$$

Aplicamos M a ambos miembros de la igualdad anterior:

$$M I_l \vec{r} = M \vec{r} \quad (140)$$

Multiplicamos \vec{r} por la identidad escrita en la forma $M^{-1}M$ en el miembro izquierdo de la igualdad:

$$MI_l M^{-1} M\vec{r} = M\vec{r} \quad (141)$$

Utilizando la propiedad (125) con $j = 1$, la igualdad anterior se transforma en:

$$I_{l+1} M^{-1} M\vec{r} \quad (142)$$

Simplificamos la igualdad anterior con la ayuda de la propiedad (127) con $l = l + 1$ y $k = -1$

$$\begin{aligned} I_{l+2}(M\vec{r}) &= M\vec{r} \\ \text{entonces} \quad M\vec{r} &\in \Gamma_{l+2} \end{aligned} \quad (143)$$

Entonces al aplicar el operador de evolución temporal al punto \vec{r} , perteneciente a la línea de simetría Γ_l , éste se transforma en el punto $(M\vec{r})$, el cual pertenece a la línea de simetría Γ_{l+2} i.e. la línea Γ_l se transforma en la línea Γ_{l+2} . Esto implica que todas las líneas de simetría pueden obtenerse a partir de las líneas Γ_0 y Γ_1 por iteración de las mismas.

Ahora resta analizar lo que ocurre al aplicar la involución I_l a la línea de simetría Γ_k . Sea \vec{r} un punto perteneciente a la línea de simetría Γ_k , entonces:

Por la definición de línea de simetría Γ_k es

$$\Gamma_k = \{\vec{r} \mid I_k \vec{r} = \vec{r}\} \quad (144)$$

Por estar sobre la línea Γ_k , \vec{r} satisface.

$$I_k \vec{r} = \vec{r} \quad (145)$$

Aplicamos I_l en ambos miembros de la ecuación anterior, manteniendo la igualdad

$$I_l(I_k \vec{r}) = I_l \vec{r} \quad (146)$$

Agrupamos las involuciones en el miembro izquierdo

$$(I_l I_k)(\vec{r}) = I_l \vec{r} \quad (147)$$

Considerando la propiedad (125) tenemos

$$M^{l-k}(\vec{r}) = I_l \vec{r} \quad (148)$$

Multiplicamos \vec{r} en el miembro izquierdo por la identidad, esta vez escrita como $I_l^{-1} I_l = I_l I_l$

$$M^{l-k}(I_l I_l)(\vec{r}) = I_l \vec{r} \quad (149)$$

Agrupamos en forma conveniente

$$(M^{l-k}I_l)(I_l\vec{r}) = I_l\vec{r} \quad (150)$$

Simplificamos utilizando la propiedad (126)

$$(I_{(l-k)+l})(I_l\vec{r}) = I_l\vec{r} \quad (151)$$

$$(I_{(2l-k)})(I_l\vec{r}) = I_l\vec{r} \in \Gamma_{2l-k} \quad (152)$$

i.e.

En conclusión, al aplicar la involución I_l a la línea de simetría Γ_k , ésta se transforma en la línea Γ_{2l-k} . Un caso particular de esta propiedad, pero que reviste gran importancia, es el que ocurre al aplicar la involución I_0 a la línea Γ_k . Para todo punto de la línea Γ_k , tenemos:

$$\vec{r} = I_k\vec{r} \quad (153)$$

si aplicamos I_0 :

$$I_0\vec{r} = I_0I_k\vec{r} \quad (154)$$

y utilizando (152) con $l = 0$

$$I_0\vec{r} = I_{[2(0)-k]}(I_0\vec{r}) \quad (155)$$

$$I_0\vec{r} = I_{-k}(I_0\vec{r}) \in \Gamma_{-k} \quad (156)$$

i.e. $(I_0\vec{r}) \in \Gamma_{-k}$ En forma simbólica esto es :

$$I_0\Gamma_k = \Gamma_{-k} \quad (157)$$

Es decir que la línea Γ_{-k} se puede obtener aplicando I_0 a la línea Γ_k , por lo que no es necesario calcularla de manera independiente.

4.3 Puntos y Ciclos Periódicos

En el análisis de la dinámica de un sistema uno de los aspectos más importantes es el de determinar los puntos periódicos, así como sus órbitas, las que proporcionan información importante acerca de como se desarrolla el movimiento del sistema porque exhiben el comportamiento más sencillo que pueda presentar el sistema. También se estudian las órbitas de puntos que se encuentren en una vecindad alrededor de los puntos periódicos, lo que permite saber si se trata de puntos periódicos estables o inestables. Lo que discutiremos a continuación es la relación que existe entre puntos periódicos y líneas de simetría, lo cual equivale a mostrar su utilidad y aplicación como herramienta en el estudio de sistemas complicados.

Si \vec{r} es un punto punto periódico de periodo n , entonces n es el menor número que satisfaga:

$$M^n\vec{r} = \vec{r} \quad (158)$$

El conjunto formado por \vec{r} y los primeros $n - 1$ puntos iterados de

\vec{r} forman un ciclo de n puntos periódicos, que son: \vec{r} , $M\vec{r}$, $M^2\vec{r}$, ..., $M^{n-1}\vec{r}$. Por otra parte supongamos que \vec{r}_0 es un punto en el que se intersecan las líneas de simetría Γ_l y Γ_k , entonces:

$$\Gamma_l \cap \Gamma_k = \{\vec{r} \mid I_l\vec{r} = \vec{r} = I_k\vec{r}\} \quad (159)$$

por estar \vec{r}_0 en la intersección de ambas líneas

$\vec{r}_0 \in \Gamma_l$, pero también $\vec{r}_0 \in \Gamma_k$, por lo primero sabemos que \vec{r}_0 es punto fijo de la involución I_l , y por lo segundo, que también lo es de la I_k , esto es:

$$I_l\vec{r}_0 = \vec{r}_0 \quad (160)$$

así como:

$$I_k\vec{r}_0 = \vec{r}_0 \quad (161)$$

combinando (160) y (161) tenemos:

$$I_l\vec{r}_0 = I_k\vec{r}_0 \quad (162)$$

si multiplicamos ambos miembros de (162) a la izquierda por I_l se tiene:

$$\begin{aligned} I_l I_l \vec{r}_0 &= I_l I_k \vec{r}_0 \\ I_l^2 \vec{r}_0 &= M^{l-k} \vec{r}_0 \\ \vec{r}_0 &= M^{l-k} \vec{r}_0 \end{aligned} \quad (163)$$

donde hemos utilizado las propiedades del grupo, si ahora hacemos lo mismo pero usando I_k tenemos:

$$\begin{aligned} I_k I_l \vec{r}_0 &= I_k I_k \vec{r}_0 \\ M^{k-l} \vec{r}_0 &= I_k^2 \vec{r}_0 \\ M^{k-l} \vec{r}_0 &= \vec{r}_0 \end{aligned} \quad (164)$$

La interpretación de las ecuaciones (163) y (164) es la siguiente:

Las líneas de simetría se cortan siempre en puntos periódicos, i.e. si \vec{r}_0 es un punto de intersección entre las líneas Γ_l y Γ_k , siendo l y k enteros, entonces $M^{\pm[l-k]}\vec{r}_0 = \vec{r}_0$, y el periodo n del punto \vec{r}_0 es por fuerza un divisor del valor absoluto de $l - k$, de hecho n es el menor entero divisor de $|l - k|$, para el cual se cumpla:

$$M^n \vec{r}_0 = \vec{r}_0 \quad (165)$$

Supongamos que \vec{r}_1 es un punto periódico de periodo p y \vec{r}_2 es otro punto periódico que pertenece al mismo ciclo que \vec{r}_1 , entonces:

$$M^p \vec{r}_1 = \vec{r}_1 \quad (166)$$

y para algún entero a tal que $0 < a < p$

$$M^a \vec{r}_1 = \vec{r}_2 \quad (167)$$

lo que implica que

$$M^{p-a} \vec{r}_2 = \vec{r}_1 \quad (168)$$

si además suponemos que \vec{r}_1 y \vec{r}_2 se relacionan mediante la involución I_0 , de manera que:

$$I_0 \vec{r}_1 = \vec{r}_2 \quad (169)$$

entonces tenemos que sustituyendo en la ecuación anterior \vec{r}_2 en la forma de la ecuación (167)

$$I_0 \vec{r}_1 = M^a \vec{r}_1 \quad (170)$$

multiplicando por I_0 del lado izquierdo , tenemos:

$$\vec{r}_1 = I_0 M^a \vec{r}_1 \quad (171)$$

y por la ecuación (113)

$$\vec{r}_1 = I_{-a} \vec{r}_1 \quad (172)$$

$$\text{i.e. } \vec{r}_1 \in \Gamma_{-a} \quad (173)$$

también es posible combinar (168) y (169) sustituyendo en la primera \vec{r}_2 en términos de \vec{r}_1 , con esto encontramos que:

$$M^{p-a} I_0 \vec{r}_1 = \vec{r}_1 \quad (174)$$

que por la definición uno es:

$$I_{p-a} \vec{r}_1 = \vec{r}_1 \quad (175)$$

$$\text{i.e. } \vec{r}_1 \in \Gamma_{p-a} \quad (176)$$

Por lo tanto $\vec{r}_1 \in \Gamma_{-a} \cap \Gamma_{p-a}$. Procediendo de forma recíproca para \vec{r}_2 , despejamos \vec{r}_1 de la ecuación (169), lo sustituimos en la (167), y obtenemos:

$$\vec{r}_2 = M^a I_0 \vec{r}_2 \quad (177)$$

que nuevamente por la definición uno es:

$$\vec{r}_2 = I_a \vec{r}_2 \quad (178)$$

$$\text{entonces } \vec{r}_2 \in \Gamma_a \quad (179)$$

y de igual manera multiplicando a la izquierda la ecuación 168 por I_0 obtenemos que:

$$I_0 M^{p-a} \vec{r}_2 = I_0 \vec{r}_1 \quad (180)$$

$$I_{a-p} \vec{r}_2 = \vec{r}_2() \text{ entonces } \vec{r}_2 \in \Gamma_{a-p} \quad (181)$$

De donde se concluye que $\vec{r}_2 \in \Gamma_a \cap \Gamma_{a-p}$

Capítulo 5

Conclusiones

Antes de continuar con la factorización del sistema, haremos algunas consideraciones de carácter general. Partiendo directamente del Hamiltoniano, se obtiene un sistema de seis ecuaciones diferenciales con seis incógnitas, es decir un sistema de seis grados de libertad. Gracias a que se trata de un sistema conservativo el Hamiltoniano H permanece numéricamente igual a la Energía E durante toda la evolución del sistema, esto elimina un grado de libertad. Por otra parte considerando que la única fuerza actuando sobre el trompo es la de gravedad, la cual está verticalmente dirigida hacia abajo, en dirección paralela al eje z del sistema inercial, por lo que la torca relativa al eje z es igual a cero, lo que significa que el momento angular alrededor de este eje es una constante de movimiento, esto se refleja en el hecho de que en el Hamiltoniano del sistema no aparece la variable ϕ , que es el ángulo alrededor del eje z , por lo que es el momento p_ϕ el que se conserva. Con esto nos deshacemos de dos ecuaciones de nuestro sistema ya que tenemos que $\dot{p}_\phi = 0$ y que ϕ es cíclica.

Con lo anterior el número de grados de libertad del sistema se reduce a tres, sin embargo el análisis del movimiento se realiza en la Sección de Poincaré, que es bidimensional.

Para poder calcular las Líneas de Simetría de este problema es necesario comenzar por encontrar las transformaciones de inversión en el tiempo y velocidad ante las que el Hamiltoniano es invariante.

$$\begin{aligned}
H &= \frac{p_\theta^2}{2} + p_\psi^2 + \frac{(\sqrt{B} - p_\psi \cos \theta)^2}{2 \sin^2 \theta} \\
&+ \sin \theta \sin \psi \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha
\end{aligned} \tag{182}$$

De acuerdo con la referencia [5] cualquier Hamiltoniano cuadrático en las velocidades es factorizable en dos involuciones. Para este Hamiltoniano hemos encontrado dos transformaciones de inversión temporal que dejan invariantes a las ecuaciones de movimiento, denotamos como I_0 la primera y por I_0^* la segunda:

$$I_0 \equiv \begin{cases} t & \mapsto -t \\ \theta & \mapsto \theta \\ \psi & \mapsto 3\pi - \psi \\ p_\theta & \mapsto -p_\theta \\ p_\psi & \mapsto p_\psi \end{cases} \tag{183}$$

Como p_θ aparece elevado al cuadrado, el primer término del Hamiltoniano, no se afecta con la transformación I_0 , por otra parte I_0 no modifica a p_ψ ni a θ , de modo que el segundo, el tercer, y el quinto términos tampoco se modifican con la aplicación de I_0 , sin embargo el cuarto término requiere de un análisis más cuidadoso, tenemos que al aplicar I_0 :

$$\begin{aligned}
&\psi \mapsto 3\pi - \psi \\
\text{reflexión respecto al plano } \psi &= \frac{3\pi}{2} \\
&\Rightarrow \sin \psi \mapsto \sin \psi \\
&\Rightarrow \cos \psi \mapsto -\cos \psi
\end{aligned}$$

es decir que la aplicación de I_0 introduce un cambio de signo en la derivada con respecto a ψ , pero éste se cancela con el que introduce el cambio de signo en t

La segunda transformación la definimos como sigue:

$$I_0^* \equiv \begin{cases} t & \mapsto -t \\ \theta & \mapsto \theta \\ \psi & \mapsto \pi - \psi \\ p_\theta & \mapsto -p_\theta \\ p_\psi & \mapsto p_\psi \end{cases} \quad (184)$$

El análisis de la invariancia del Hamiltoniano ante esta segunda involución es totalmente similar al que se hizo para I_0 , sin embargo es interesante notar que para el cuarto término sucede lo mismo que si aplicáramos I_0 , es decir que al aplicar I_0^* :

$$\begin{aligned} \psi & \mapsto \pi - \psi \\ \text{reflexión respecto al plano } \psi &= \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow \sin \psi & \mapsto \sin \psi \\ \Rightarrow \cos \psi & \mapsto -\cos \psi \end{aligned}$$

Esto se debe a que geoméricamente los planos $\psi = \frac{3\pi}{2}$ y $\psi = \frac{\pi}{2}$ coinciden, pero numéricamente no son lo mismo, así que representan planos diferentes en la evolución del movimiento del sistema. Si analizamos la ecuación de movimiento de p_ψ , tenemos:

$$-\dot{p}_\psi = \frac{\partial H}{\partial \psi} = \sin \theta \cos \psi \cos \alpha \quad (185)$$

Partiendo de la definición de línea de simetría, tenemos:

$$\Gamma_0 = \{\vec{r} \mid I_0\vec{r} = \vec{r}\} \quad (186)$$

Determinar la línea Γ_0 es determinar el conjunto de puntos invariantes de I_0 . Lo que significa resolver la ecuación:

$$\vec{r} = I_0\vec{r} \quad (187)$$

El punto \vec{r} es:

$$\vec{r} = (\theta, \psi, p_\theta, p_\psi) \quad (188)$$

la ecuación (187) es :

$$(\theta, \psi, p_\theta, p_\psi) = (\theta, 3\pi - \psi, -p_\theta, p_\psi) \quad (189)$$

la ecuación que tenemos es muy fácil de resolver componente por componente, para θ :

$$\theta = \theta \quad (190)$$

se satisface para cualquier θ siempre que sea consistente con la conservación de la energía. Para ψ :

$$\begin{aligned} \psi &= 3\pi - \psi \\ 2\psi &= 3\pi \\ \psi &= \frac{3\pi}{2} \end{aligned} \quad (191)$$

Para p_θ :

$$p_\theta = -p_\theta \quad (192)$$

se satisface sólo para:

$$p_\theta = 0 \quad (193)$$

Para p_ψ ocurre lo mismo que para θ :

$$p_\psi = p_\psi \quad (194)$$

se satisface para cualquier p_ψ cuyo valor sea consistente con la conservación de la energía.

Por lo tanto:

$$\Gamma_0 = \left\{ \vec{r} = \left(\theta, \psi = \frac{3\pi}{2}, p_\theta = 0, p_\psi \right) \right\} \quad (195)$$

Para satisfacer la condición de que el sistema sea conservativo se barre la variable θ de 0 a π se introduce en la ecuación de la energía con $\psi = \frac{3\pi}{2}$ y $p_\theta = 0$ y se despeja p_ψ .

Procediendo de igual forma pero usando I_0^* obtenemos Γ_0^* :

$$\Gamma_0^* = \{ \vec{r} \mid I_0^* \vec{r} = \vec{r} \} \quad (196)$$

Para determinarla debemos resolver la ecuación

$$\vec{r} = I_0^* \vec{r} \quad (197)$$

que por componentes es:

$$(\theta, \psi, p_\theta, p_\psi) = (\theta, \pi - \psi, -p_\theta, p_\psi) \quad (198)$$

Para θ y para p_ψ la única restricción es que satisfagan la conservación de la energía. Para p_θ , al igual que en el caso anterior, tenemos que :

$$\begin{aligned} p_\theta &= -p_\theta \\ \Rightarrow p_\theta &= 0 \end{aligned} \quad (199)$$

Para ψ

$$\begin{aligned} \psi &= \pi - \psi \\ 2\psi &= \pi \\ \psi &= \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (200)$$

Entonces :

$$\Gamma_0^* = \left\{ \vec{r} = \left(\theta, \psi = \frac{\pi}{2}, p_\theta = 0, p_\psi \right) \right\} \quad (201)$$

Donde para no violar la conservación de la energía se hace lo mismo que en Γ_0 .

En caso de que el movimiento del sistema sea posible, la región de Hill puede ser todo el espacio de configuración, o bien estar restringida a una porción que es determinada por su frontera. Es por ello que reescribimos la expresión (70), que representa la energía cinética y la denotamos por T'

$$T' = A - \frac{B}{(\sin^2 \theta + 1)} - (\sin \theta \sin \psi \cos \alpha - \cos \theta \sin \alpha) \geq 0 \quad (202)$$

La derivadas de T' con respecto a ψ son:

$$T'_{\psi} = -(\sin \theta \cos \psi \cos \alpha) \quad (203)$$

$$T'_{\psi\psi} = (\sin \theta \sin \psi \cos \alpha) \quad (204)$$

la primer derivada de T' se anula en $\psi = \frac{\pi}{2}$ y en $\psi = \frac{3\pi}{2}$, y considerando el signo de la segunda derivada vemos que $\psi = \frac{\pi}{2}$ corresponde a un mínimo de la energía cinética y $\psi = \frac{3\pi}{2}$ a un máximo, y es, por lo tanto en este valor de ψ donde ocurre un mínimo de la potencial. Además el valor de ψ en el mínimo de la energía potencial siempre será el mismo, independientemente del valor de α , esto significa que, de haber movimiento, las órbitas siempre atravesarán por el plano $\psi = \frac{3\pi}{2}$. Es por esto que hemos seleccionado este plano para tomar la sección de Poincaré.

No sucede igual con el plano $\psi = \frac{\pi}{2}$, pues existen muchos casos para los cuales no es posible que la variable ψ tome ese valor, lo que implica que no es conveniente tomar la sección de Poincaré en este plano.

El cálculo de las líneas de simetría pares es directo pues simplemente se itera la línea Γ_0 , que ya es conocida. Para calcular las líneas de simetría impares hacemos lo siguiente:

Sea \vec{r}^* un punto perteneciente a la línea Γ_0^* , y $T^{\frac{1}{2}}$ el operador de evolución temporal que transforma un punto sobre el plano $\psi = \frac{\pi}{2}$ a otro que se encuentre $\psi = \frac{3\pi}{2}$, además $T^{-\frac{1}{2}} = T^{\frac{1}{2}}I_0^*$ entonces:

$$\vec{r}^* = \begin{pmatrix} \theta \\ \psi = \frac{\pi}{2} \\ p_\theta = 0 \\ p_\psi \end{pmatrix}. \quad (205)$$

aplicar $T^{\frac{1}{2}}$ es integrar las ecuaciones de movimiento hasta llegar a

$\psi = \frac{3\pi}{2}$:

$$\vec{r}_+ = T^{\frac{1}{2}}\vec{r}^* = \begin{pmatrix} \theta' \\ \psi = \frac{3\pi}{2} \\ p'_\theta \\ p'_\psi \end{pmatrix}. \quad (206)$$

Si aplicamos $T^{-\frac{1}{2}}$ al mismo punto sobre Γ_0^* , tenemos:

$$\vec{r}_- = T^{-\frac{1}{2}}\vec{r}^* = \begin{pmatrix} \theta' \\ \psi = \frac{3\pi}{2} \\ -p'_\theta \\ p'_\psi \end{pmatrix}. \quad (207)$$

Si ahora integramos las ecuaciones de movimiento partiendo de \vec{r}_- hasta volver al plano $\psi = \frac{3\pi}{2}$ es claro que vamos a llegar al punto \vec{r}_+ habiendo intersectado el plano $\psi = \frac{\pi}{2}$ en el punto \vec{r}^* , esto es :

$$M\vec{r}_- = \vec{r}_+ \quad (208)$$

pero como $I_0\vec{r}_+ = \vec{r}_-$ entonces:

$$I_0M\vec{r}_- = \vec{r}_- \quad (209)$$

es decir

$$\vec{r}_- \in \Gamma_{-1} \quad (210)$$

y

$$\vec{r}_+ \in \Gamma_1 \quad (211)$$

por lo tanto la línea Γ_0^* bajo el operador $T^{\frac{1}{2}}$ se transforma en la línea Γ_1 . Considerando todo lo anterior se concluye lo siguiente:

1 : El plano adecuado para la sección de Poincaré en este trabajo es el plano $\psi = \frac{3\pi}{2}$

2 : Para que existan líneas de simetría impares en el plano $\psi = \frac{3\pi}{2}$

es necesario que la región de Hill contenga puntos con $\psi = \frac{\pi}{2}$, esto se debe a que la línea Γ_1 proviene de Γ_0^* .

3 : En el caso de Lagrange siempre es posible calcular ambas familias de líneas de simetría pues para éste la frontera de la región de Hill son rectas de la forma $\theta = cte$, lo que implica que siempre hay puntos de la región de Hill tanto sobre $\psi = \frac{3\pi}{2}$ como en $\psi = \frac{\pi}{2}$.

Análisis de los Ejemplos

En este capítulo se analiza la evolución dinámica de algunos ejemplos, en todos ellos se parte del Trompo de Kovalevskaya, donde se tiene $\alpha = 0.0$ y se incrementa gradualmente este parámetro en 0.2 excepto en el último incremento, donde se pasa de $\alpha = 1.4$ a $\alpha = 1.57 \sim \frac{\pi}{2}$, y nos encontramos muy cerca del caso de Lagrange. Para cada valor de α se calculan las líneas de simetría en la sección de Poincaré $\psi = \frac{3\pi}{2}$ y se grafican de la siguiente manera: la variable θ se mide sobre el eje horizontal, tomando valores entre cero y π , el momento p_θ se mide en el eje vertical y la escala depende del valor máximo que alcance para cada ejemplo en el Trompo de Kovalevskaya, manteniéndose la misma escala durante todos los calculos relativos a los mismos valores de A y B . En muchos casos se muestra también el mapeo de Poincaré correspondiente.

En el primer ejemplo se escogió $A = 3.0$ y $B = 0.5$, este caso no posee frontera de la región de Hill para ningún valor de α , de modo que todo el espacio de configuración es accesible al movimiento, y existen tanto las líneas de simetría pares como las impares para cualquier valor de α . La primer gráfica muestra el mapeo de Poincaré en el trompo de Kovalevskaya, se aprecia en él una estructura laminar, tal como es de esperarse, y que consta esencialmente de dos grandes regiones de movimiento en la región de la derecha se observa un punto elíptico de periodo 1, al que llamaremos punto e , y ya dentro de la otra región de movimiento se encuentra un punto hiperbólico de periodo uno, al que nos referiremos como punto h la órbita que pasa por este punto subdivide la región en dos más pequeñas centradas en los puntos elípticos que están arriba y abajo del mismo, a ellos los llamaremos $e2$ y $-e2$, respectivamente. Analizando la gráfica de las líneas de simetría pares vemos que dejan dos agujeros alrededor de estos puntos, y que de hecho estas líneas se cortan en el punto e , y en el punto h pero no pueden traspasar la órbita de este último en ningún otro punto. Examinando ahora la gráfica de la líneas impares se aprecia en ella que todas se cortan en el los puntos h , $e2$ y $-e2$ además de tener una región común con las pares que va de la órbita de h hacia afuera, pero que dejan una ventana que abarca casi toda la región derecha del mapeo. Sin embargo entre las dos familias sí abarcan todo el mapeo. Al ir incrementando α se observa para las líneas pares que indican la presencia de un periodo tres que antes no era evidente y que se doblan notoriamente alrededor la frontera de la zona que originalmente les era inaccesible penetrándola un poco pero sin abarcarla en su totalidad esto genera nuevas intersecciones con las líneas impares las que a su vez presentan nuevos dobleces alrededor de la misma frontera sólo que hacia afuera. Al siguiente

incremento las dos familias de líneas continúan ondulándose alrededor de dicha frontera pero además las impares forman una especie de estrellas en los puntos $e2$ y $-e2$ que indican la existencia de un periodo seis. Este proceso continúa, incrementándose a cada paso el número de intersecciones hasta que $\alpha = 0.6$ en el siguiente paso se nota que dicho número ha disminuído y también que los tamaños de las zonas a las que no podían llegar las líneas pares y la que dejaban las líneas impares se han reducido sensiblemente. Al pasar de $\alpha = 1.2$ se observan cambios bruscos a cada incremento hasta que en $\alpha = 1.57$ las ventanas que dejaban unas y otras líneas casi han desaparecido de modo que prácticamente comparten todo el mapeo.

En el segundo ejemplo se seleccionaron $A = 1.5$ y $B = 1.4$, y se determinó la región de Hill para cada valor de α , en la gráfica correspondiente el eje horizontal representa la variable ψ en el intervalo $[0, 2\pi]$ y el eje vertical la variable θ en el intervalo $[0, \pi]$ como puede verse, para $\alpha = 0.0$ la región de hill tiene un agujero centrado en $(\psi = \frac{\pi}{2}, \theta = \frac{\pi}{2})$, para los demás valores de α la frontera divide el espacio de configuración en dos, la parte superior constituye la región de Hill, y la inferior nunca puede ser alcanzada durante el movimiento. Debido a que la región de Hill siempre incluye puntos sobre $\psi = \frac{\pi}{2}$ siempre encontramos de ambos tipos de líneas de simetría. En las gráficas observamos que primero el mapeo de Poincaré muestra una estructura semejante a la del ejemplo anterior y denotaremos igual a los puntos con características similares. Al igual que en el ejemplo anterior se tiene que las líneas pares no aportan información sobre los puntos $e2$ y $-e2$ mientras que con las impares sería imposible determinar el punto e cuando $\alpha = 0.0$. En $\alpha = 0.2$ las líneas pares ya pasan por los puntos $e2$ y $-e2$,

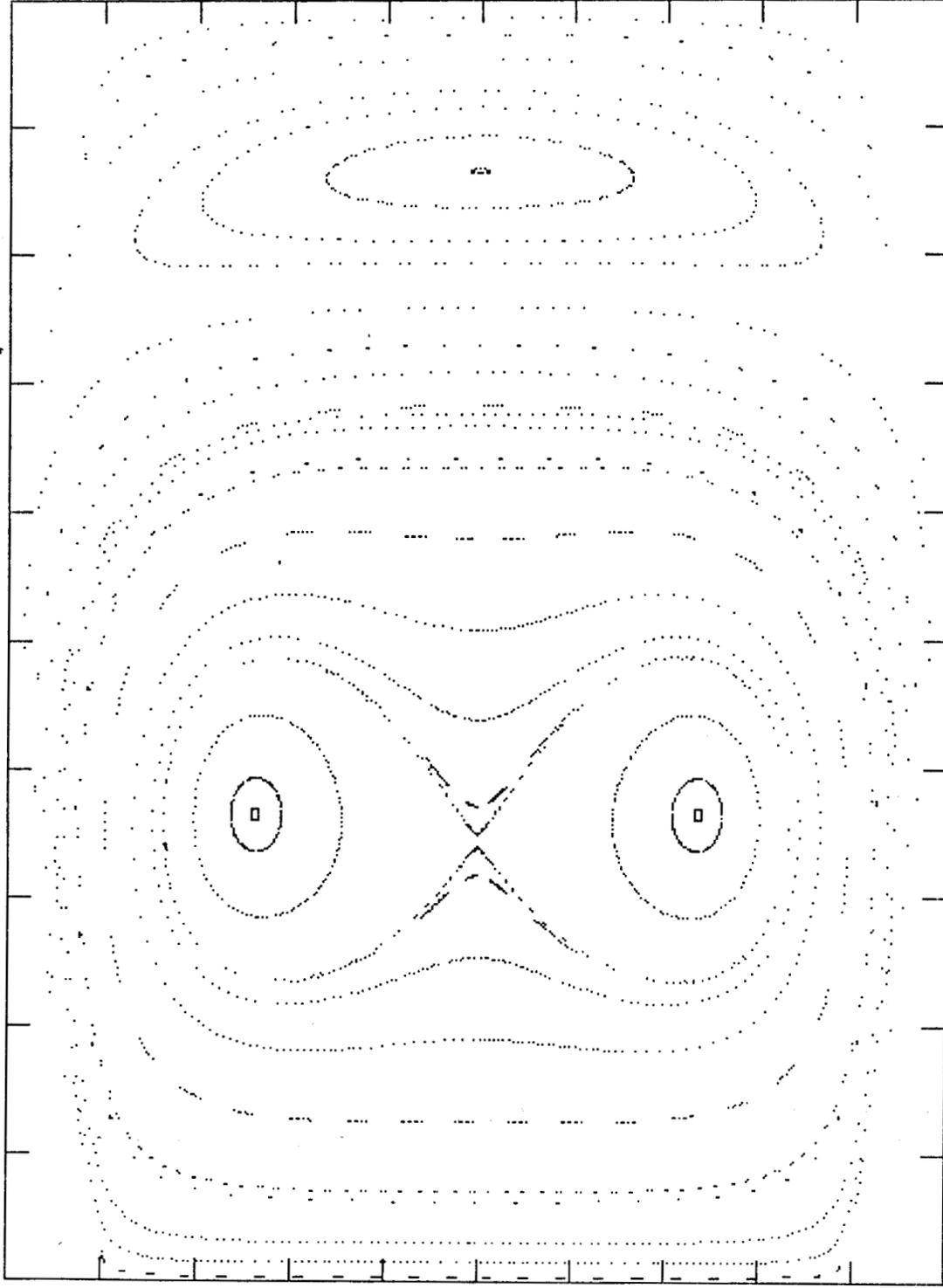
pero las impares sólo ocupan una vecindad muy pequeña alrededor de ellos sin poder cubrir una amplia región alrededor del punto e , conforme se incrementa el parámetro la región que comparten es cada vez mayor hasta que en $\alpha \sim \frac{\pi}{2}$ la ventana que dejaban las impares casi ha desaparecido. Como en el ejemplo uno se notan cambios cualitativos muy importantes en las líneas de simetría en los últimos tres valores del parámetro para los que se calcularon.

En el último ejemplo los cálculos se hicieron, con $A = 1.0$ y $B = 3.0$. La región de Hill es interior a su frontera, en la gráfica se nota como su tamaño va reduciéndose al ir aumentando α y desaparece antes de que sea igual a 1.4. Para este caso no existen líneas impares porque ψ sólo puede tomar valores mayores que π . Se observa que para este caso las líneas de simetría varían más suavemente al incrementar el parámetro menos cuando se pasa de 1.0 a 1.4.

Referencias

1. E.T. Whittaker
A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles
and Rigid Bodies
(Cambridge University Press, London, 1965)
 2. E. Leimanis
The general Problem of the Motion of Coupled
Rigid Bodies about a Fixed Point
(Springer, 1965)
 3. V. V. Golubev
Lectures on Integration of the Equations of Motion of a
Rigid Body about a Fixed Point
(Israel Program of Scientific Translations, 1960)
 4. E. Piña
Am. J. of Phys. 51 375 (1983)
A new parametrization of the rotation matrix.
 5. E. Piña and L. Jiménez Lara
Physica 26 D (369-378)(1987)
On the Symmetry Lines of the Standard Map
 6. O. Chavoya-Aceves y E. Piña
Rev. Mex. Fis 34 (32-46)(1988)
Líneas de Simetría en el Problema Circular y Plano
de Tres Cuerpos
 7. O. Chavoya-Aceves y E. Piña
Nuovo Cimento 103 B 369 (1989)
Symmetry Lines of the Dynamics of a Heavy Rigid Body
with a Fixed Point
-

Mapeo de Poincaré

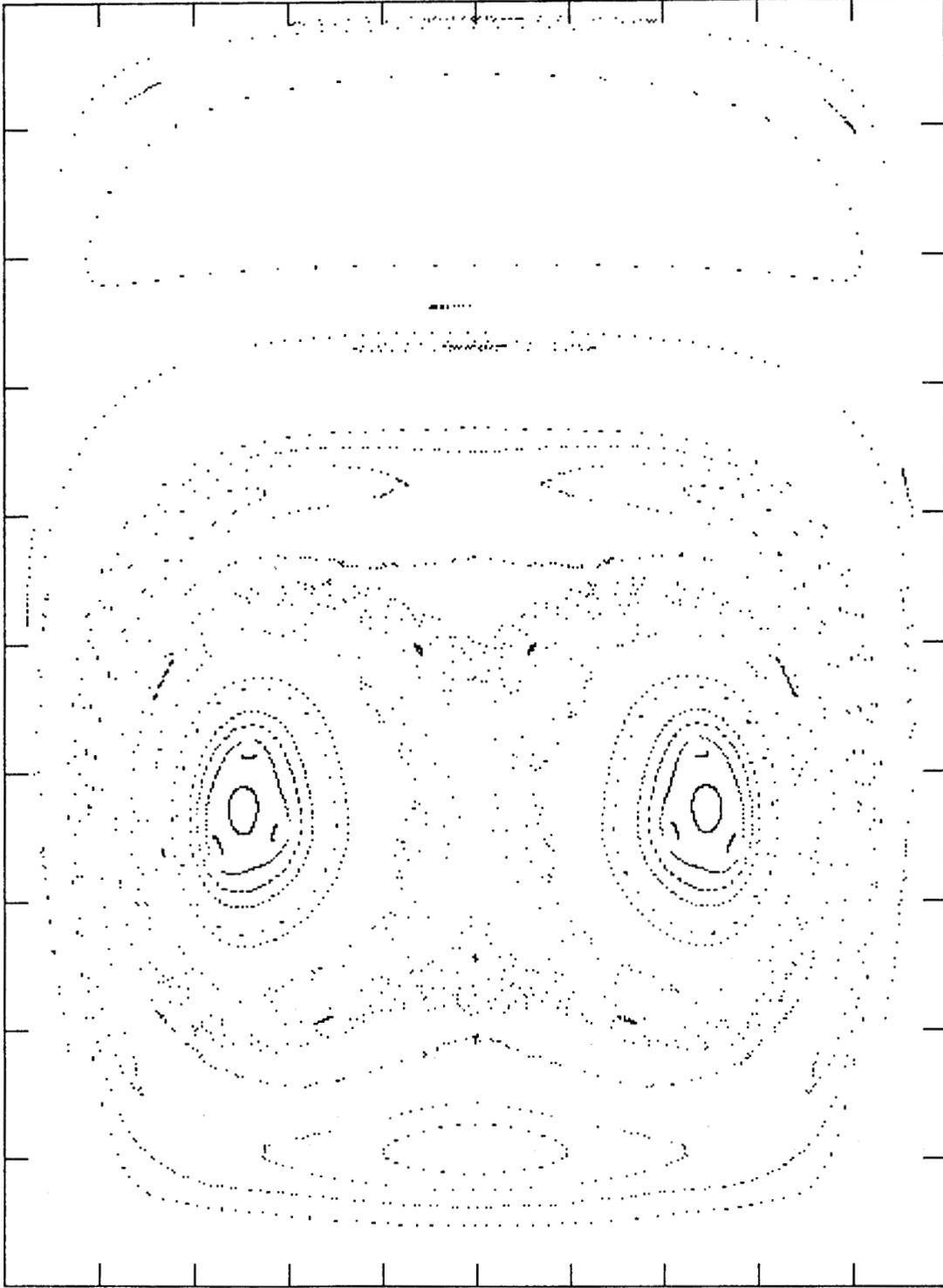


$$A = 3.0$$

$$B = 0.5$$

$$\alpha = 0.0$$

Mapeo de Poincaré

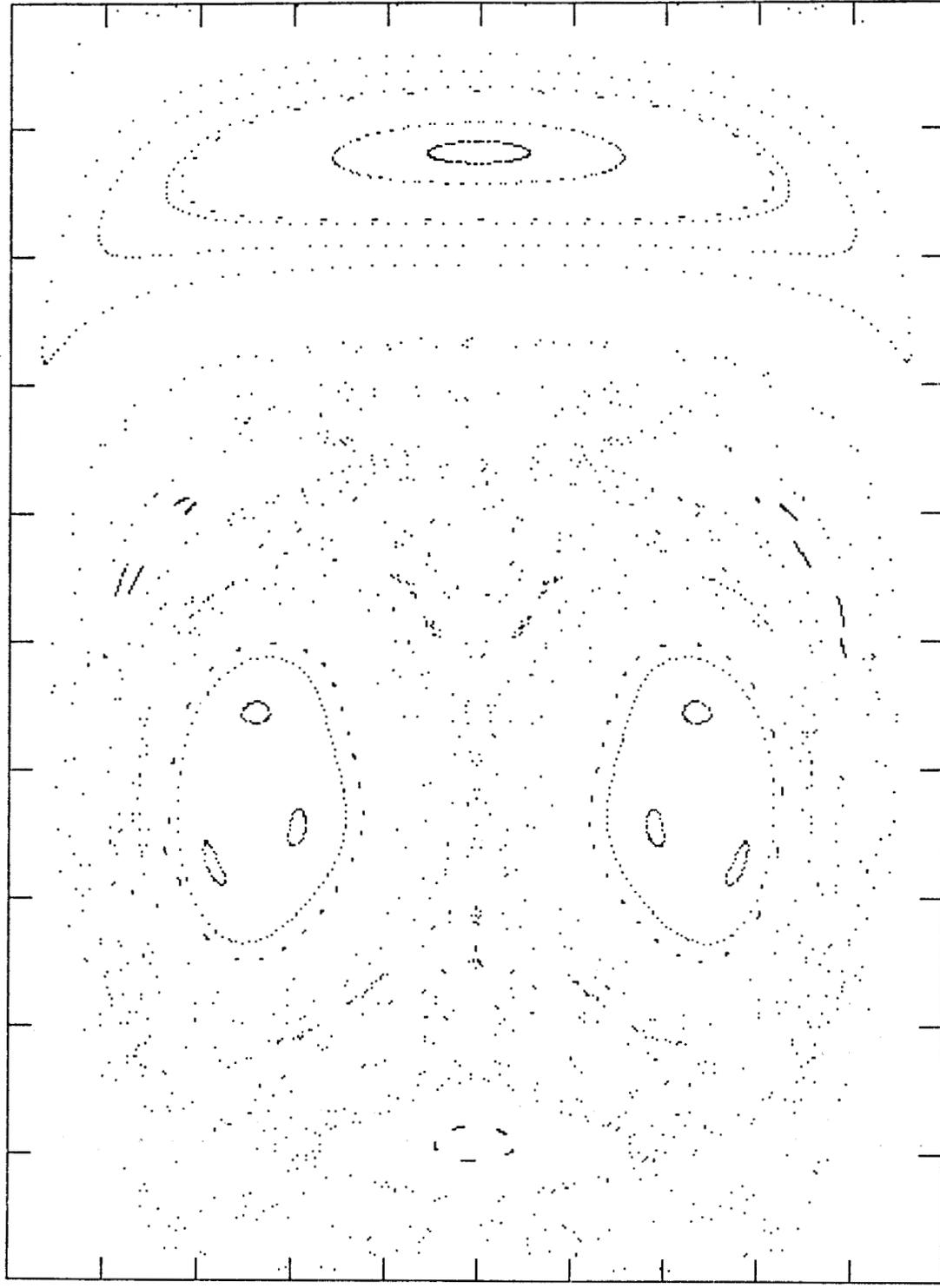


$$A = 3.0$$

$$B = 0.5$$

$$\alpha = 0.2$$

Mapeo de Poincaré

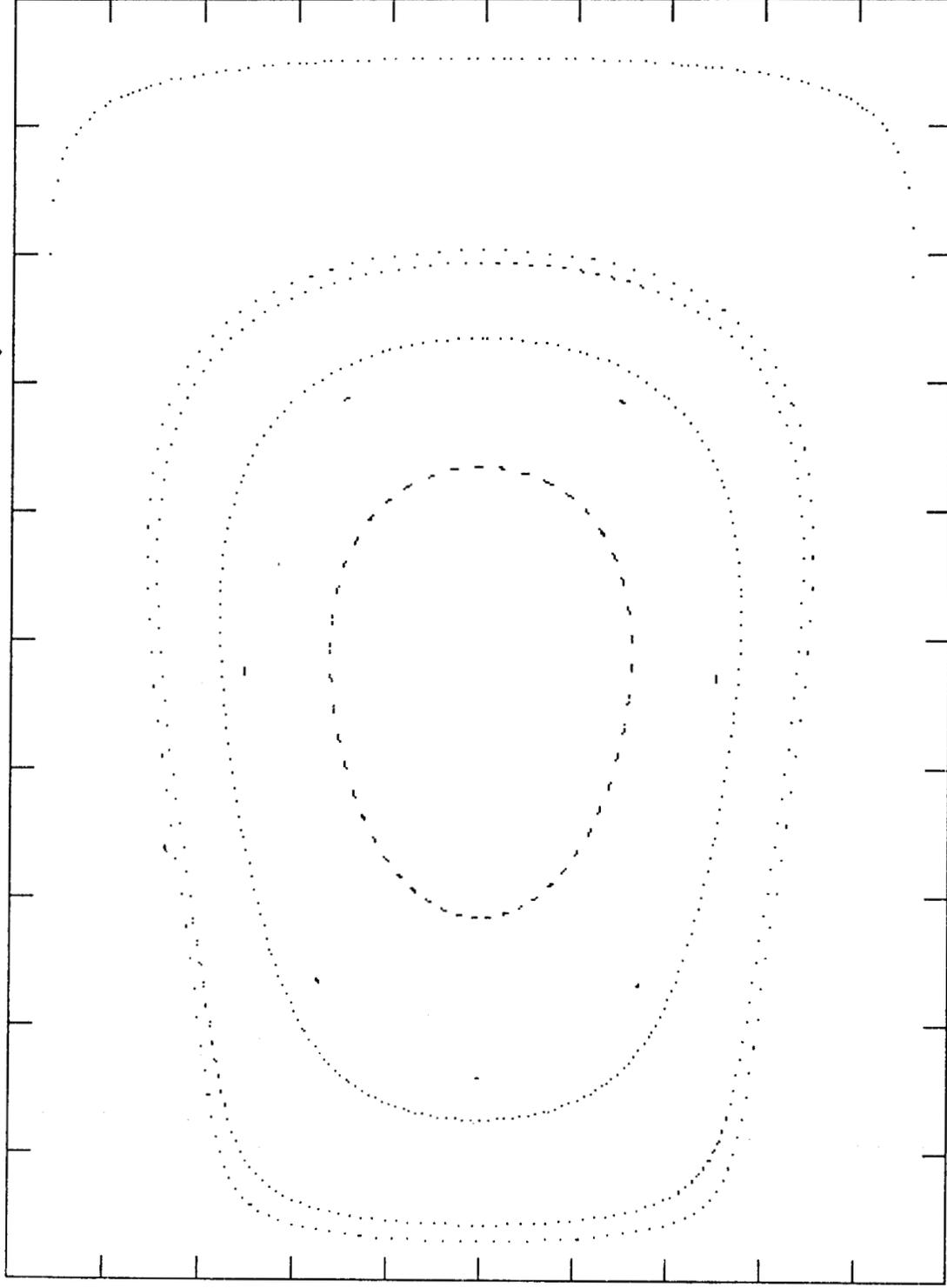


$$A = 3.0$$

$$B = 0.5$$

$$\alpha = 0.4$$

Mapeo de Poincaré



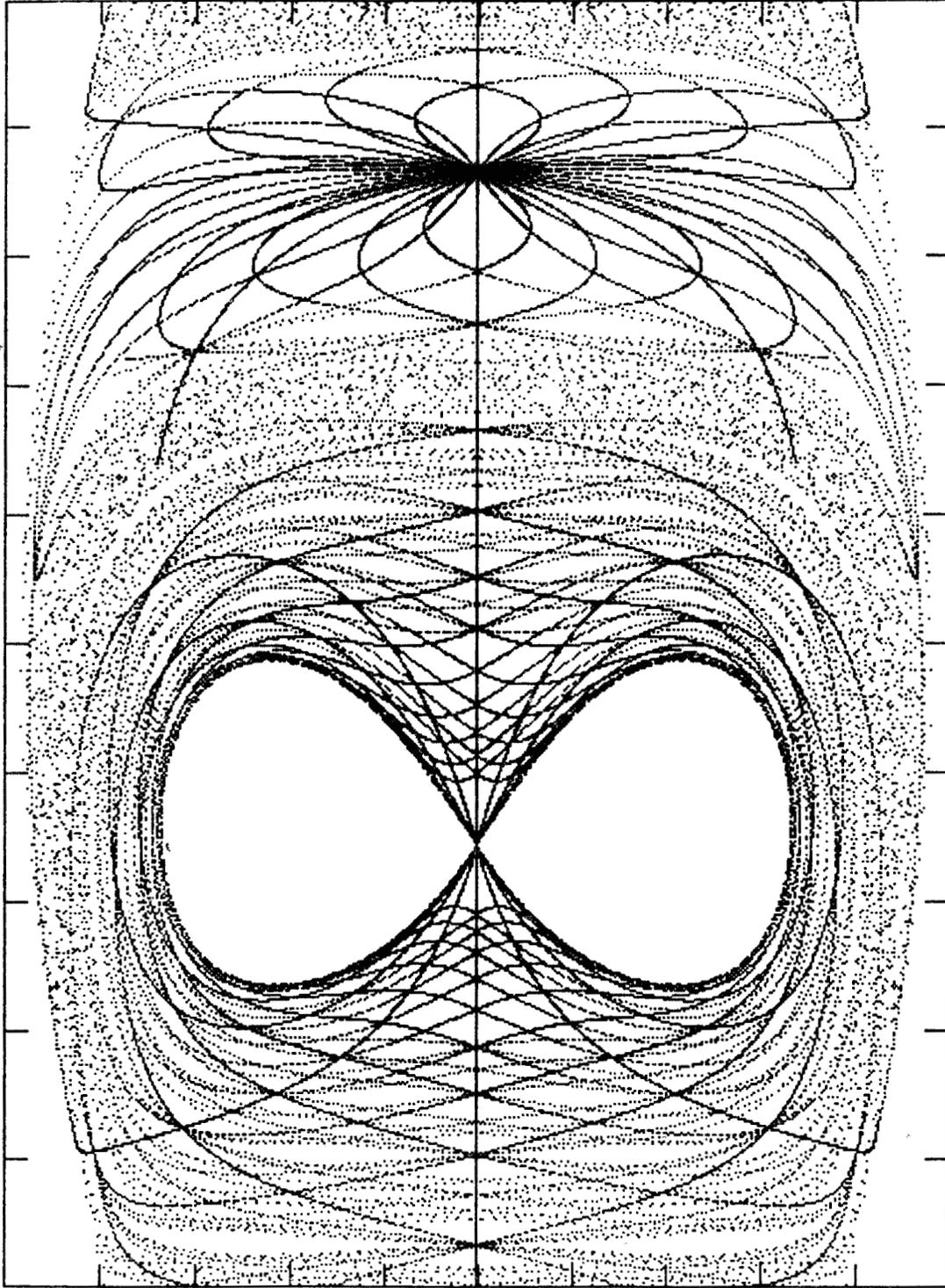
$$A = 3.0$$

$$B = 0.5$$

$$\alpha = 1.57$$

Lineas de Simetria

$\Gamma_{-20}, \dots, \Gamma_{20}$

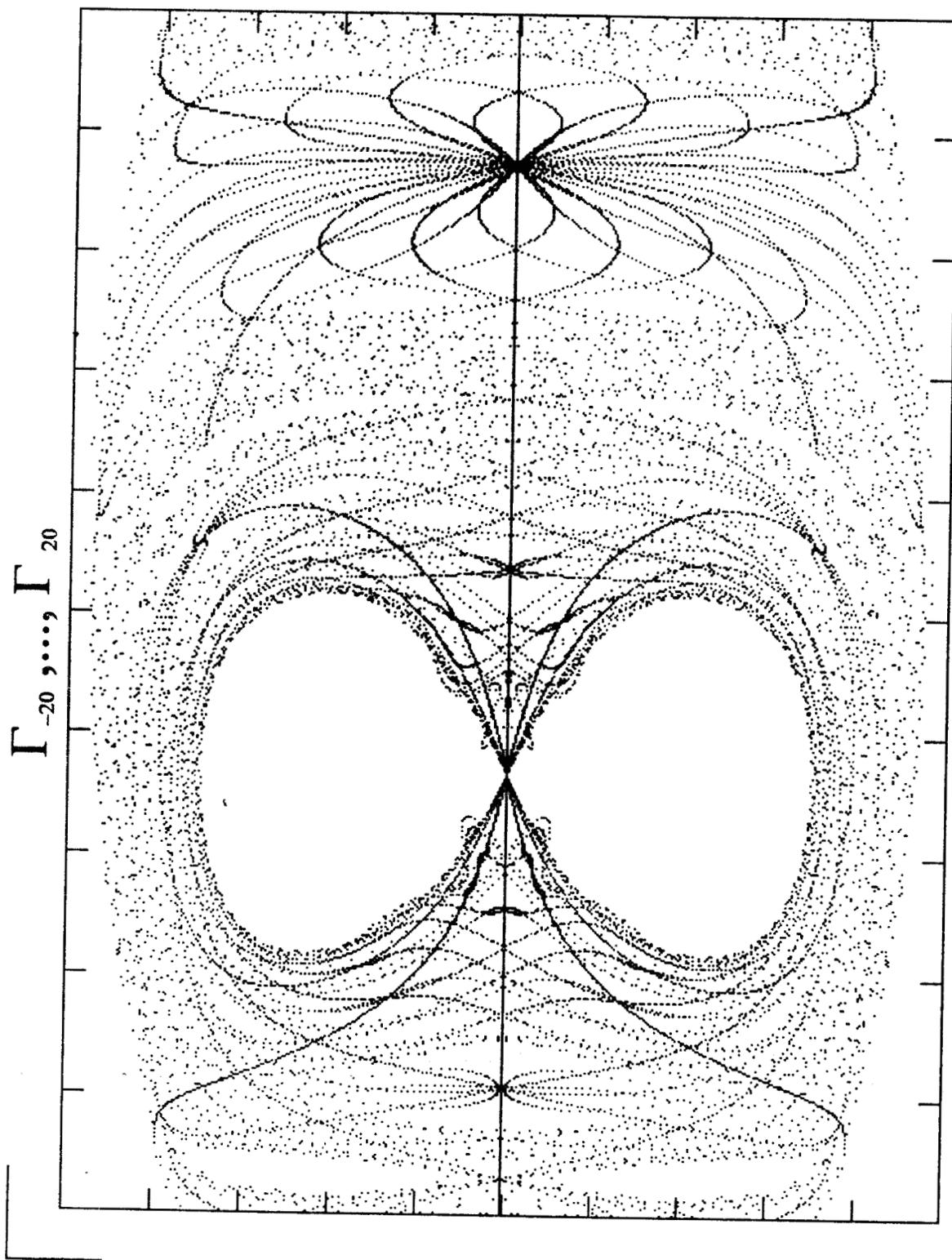


$A = 3.0$

$B = 0.5$

$\alpha = 0.0$

Líneas de Simetria



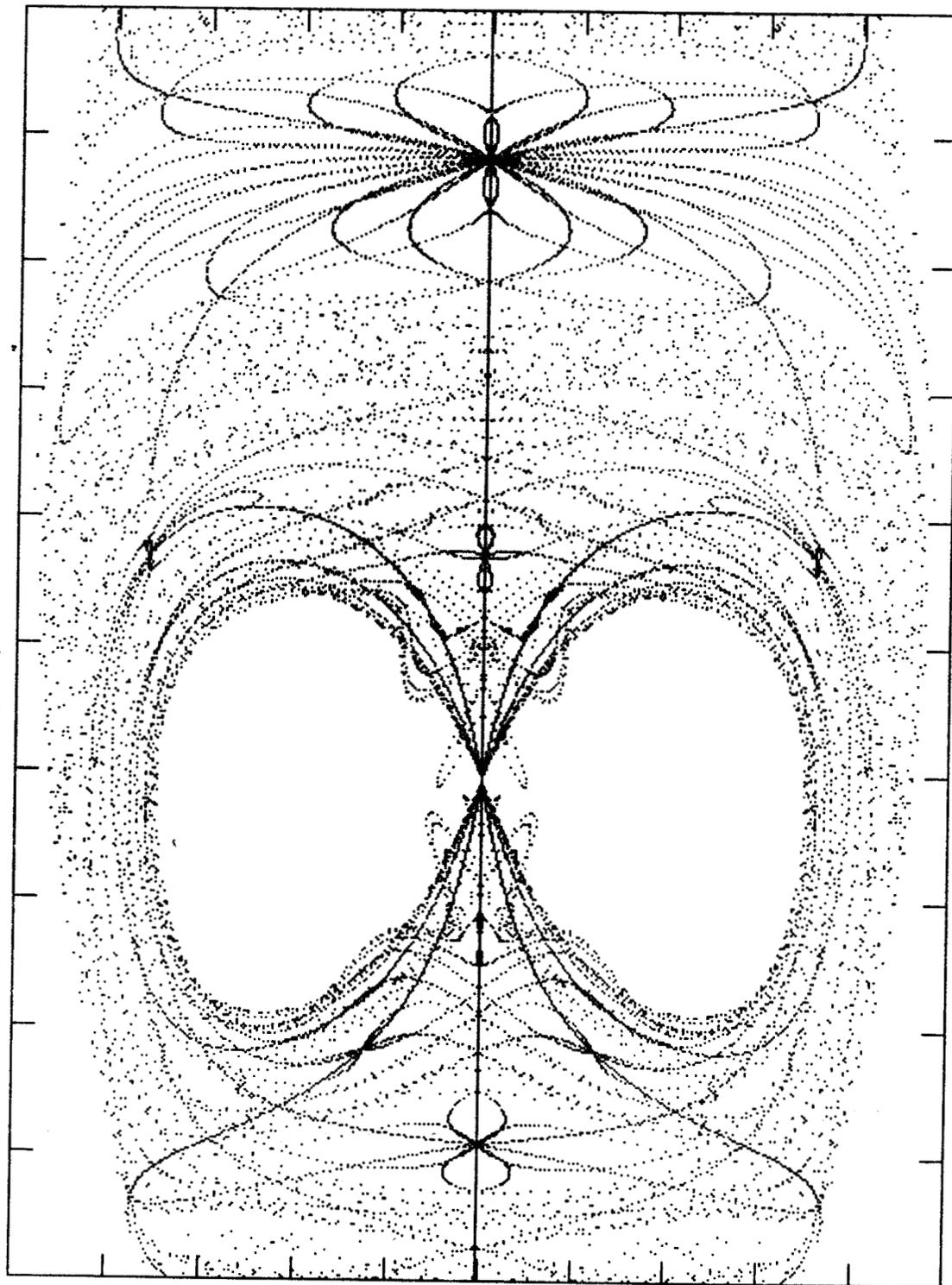
A = 3.0

B = 0.5

$\alpha = 0.2$

Lineas de Simetria

$\Gamma_{-20}, \dots, \Gamma_{20}$



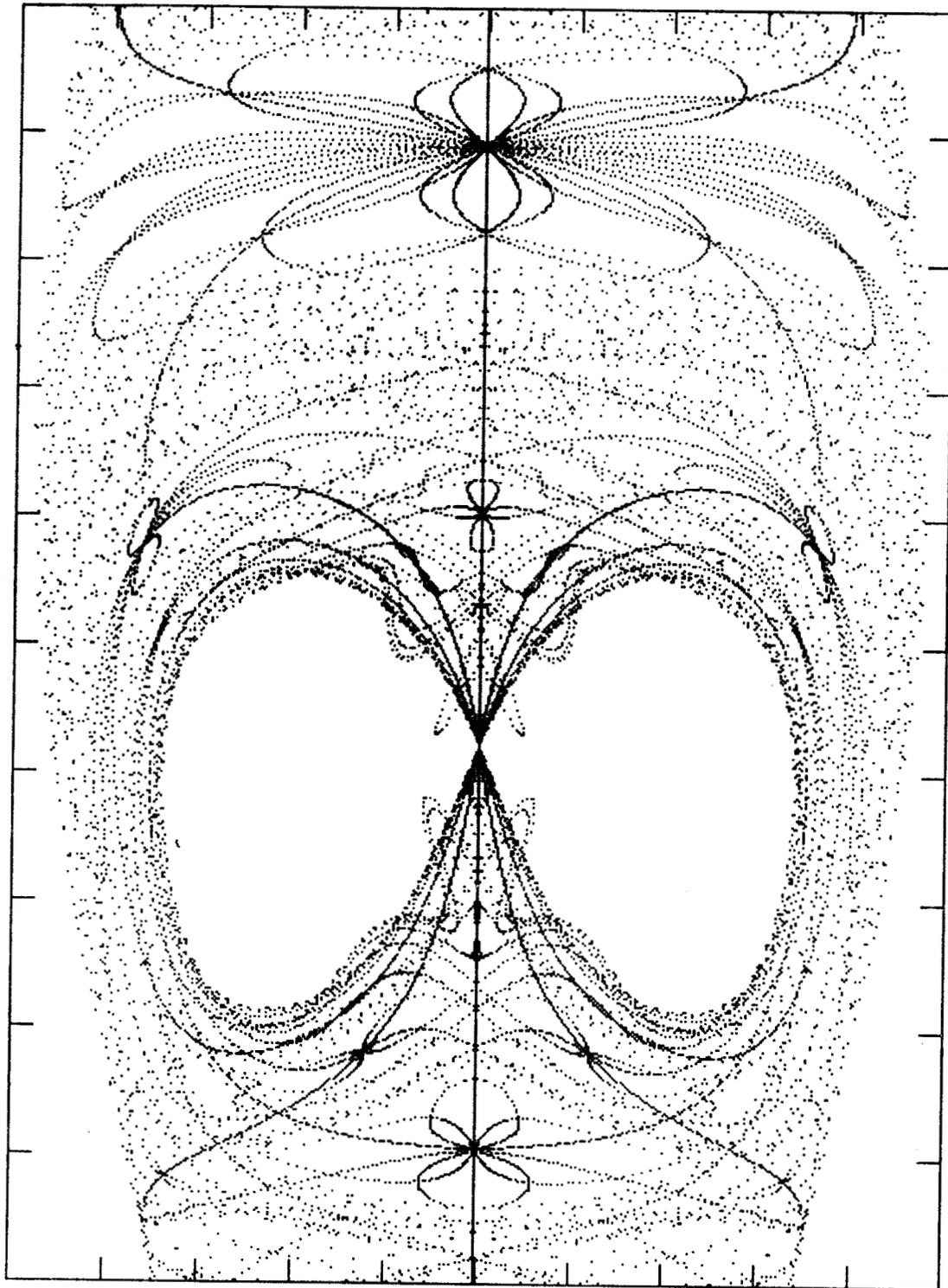
$A = 3.0$

$B = 0.5$

$\alpha = 0.4$

Lineas de Simetria

$\Gamma_{-20}, \dots, \Gamma_{20}$



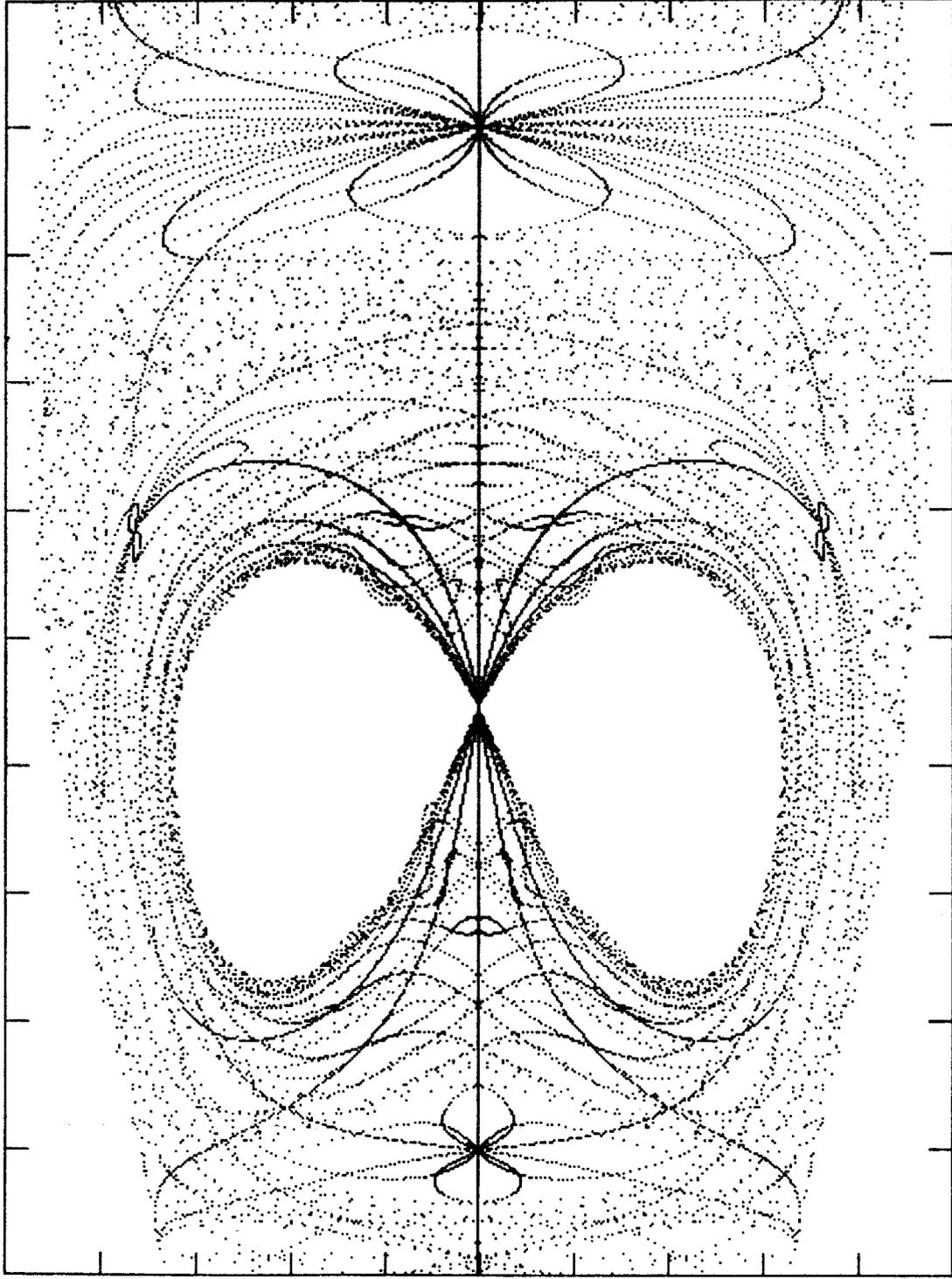
$A = 3.0$

$B = 0.5$

$\alpha = 0.6$

Lineas de Simetria

$\Gamma_{-20}, \dots, \Gamma_{20}$



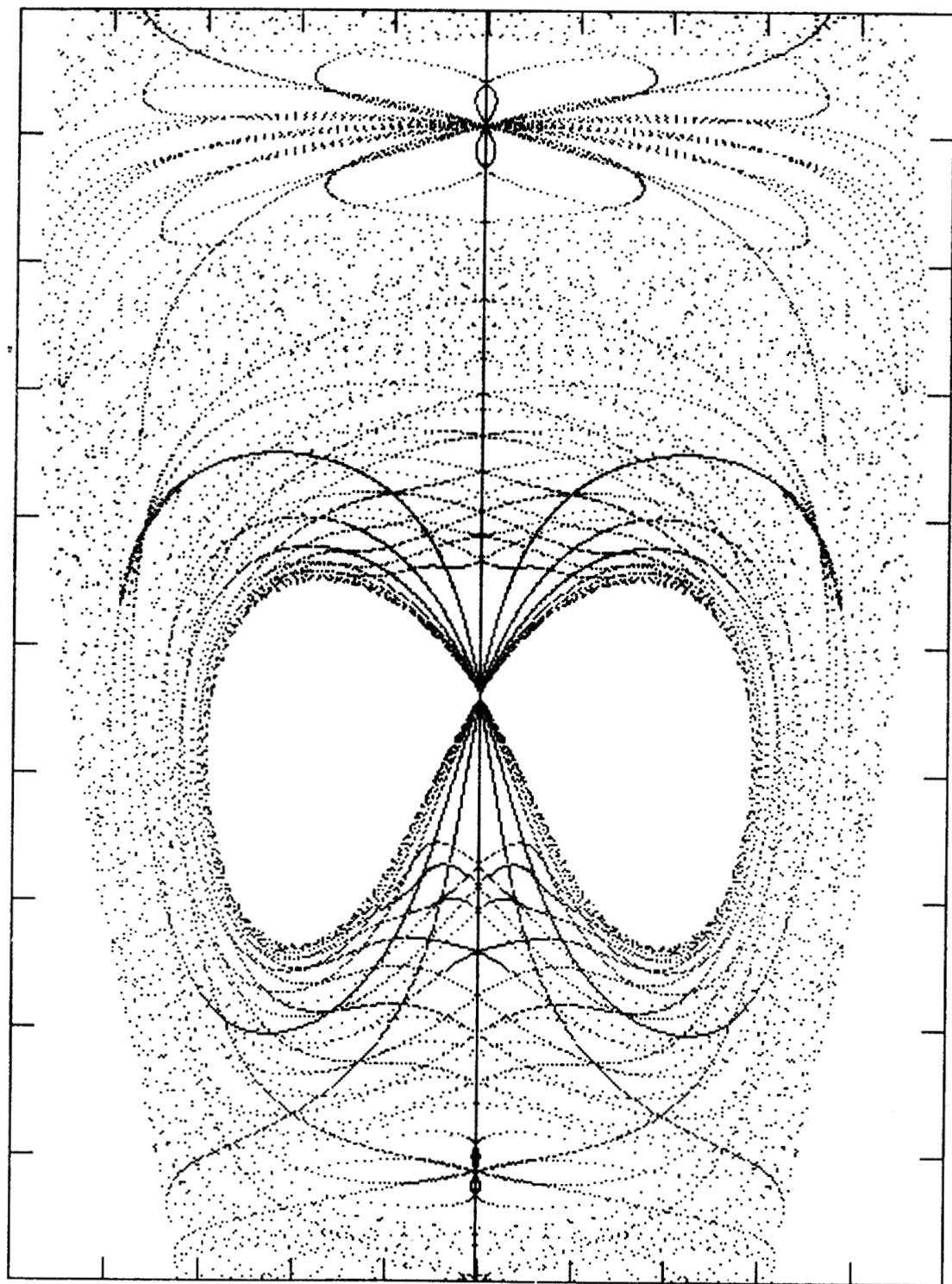
$A = 3.0$

$B = 0.5$

$\alpha = 0.8$

Líneas de Simetria

$\Gamma_{-20}, \dots, \Gamma_{20}$



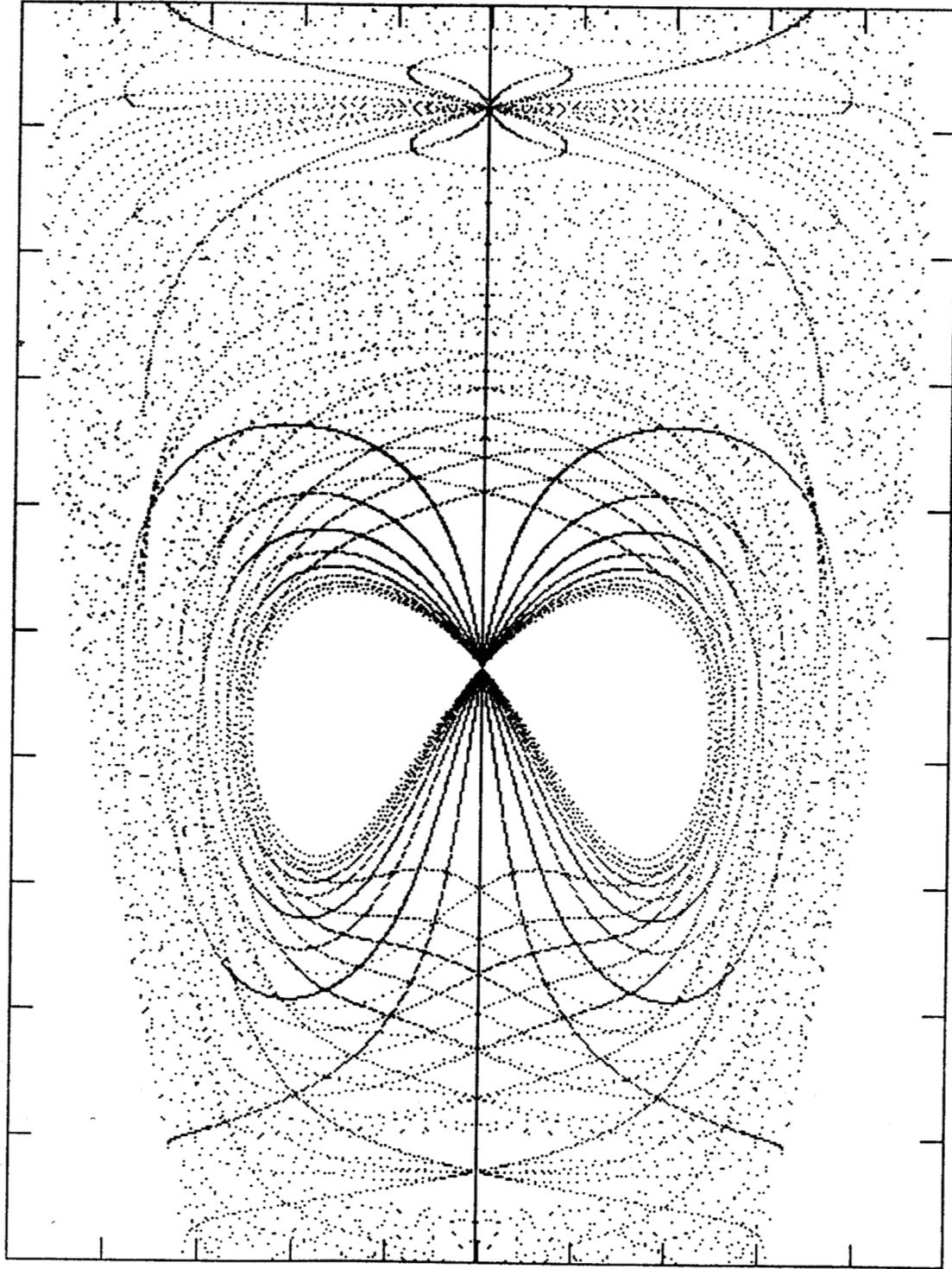
$A = 3.0$

$B = 0.5$

$\alpha = 1.0$

Lineas de Simetria

$\Gamma_{-20}, \dots, \Gamma_{20}$

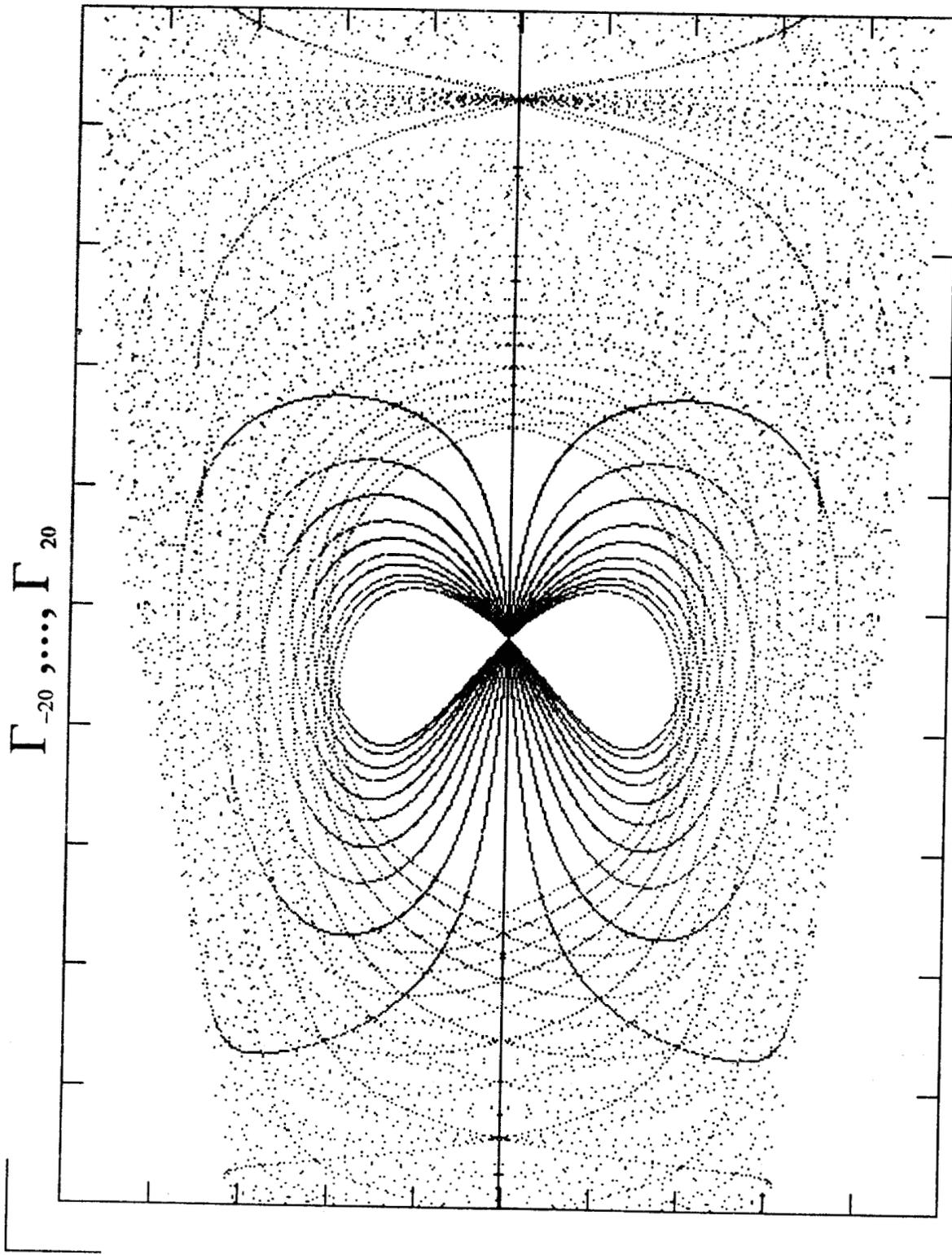


$A = 3.0$

$B = 0.5$

$\alpha = 1.2$

Lineas de simetria



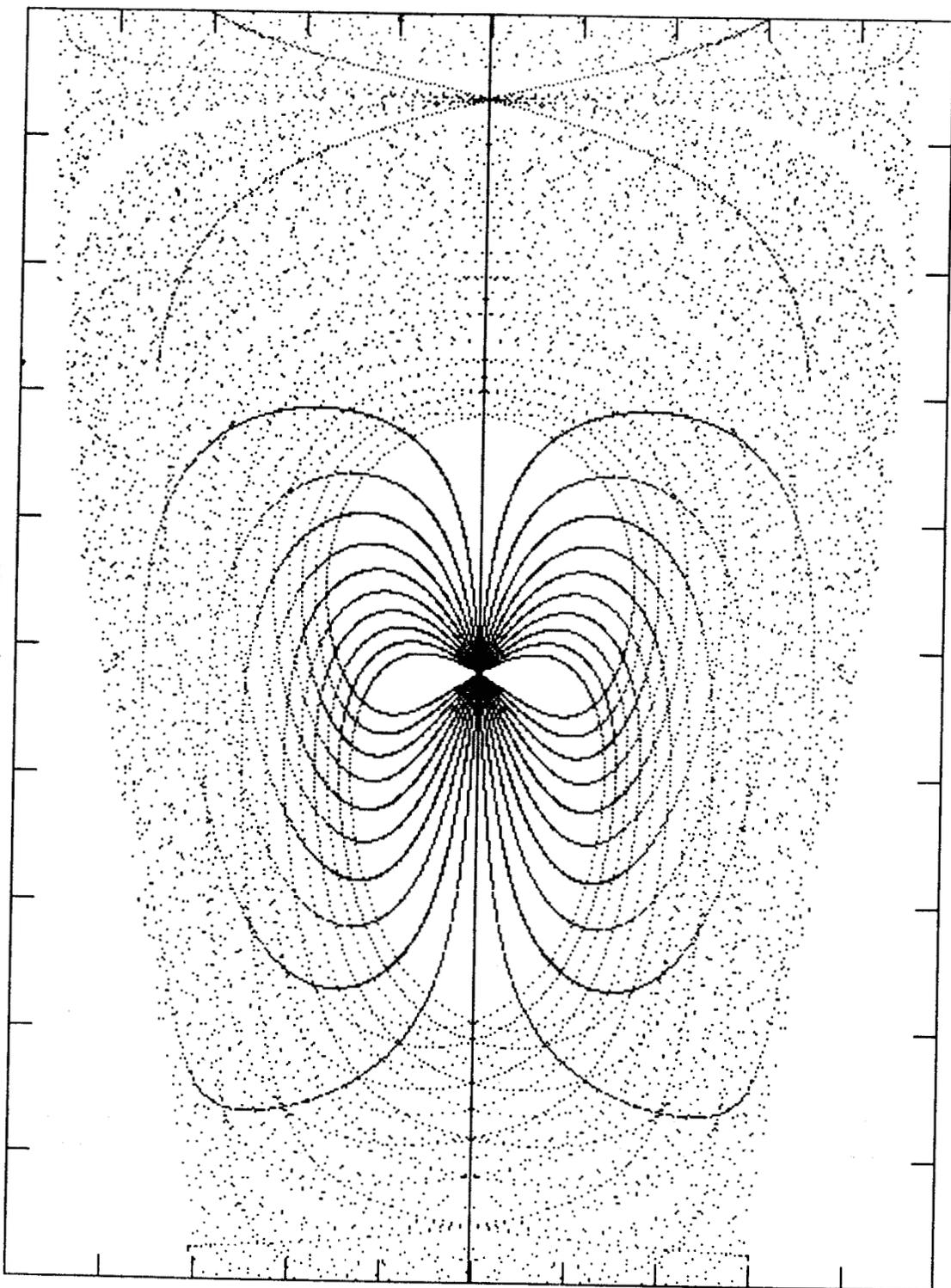
A = 3.0

B = 0.5

$\alpha = 1.4$

Lineas de Simetria

$\Gamma_{-20}, \dots, \Gamma_{20}$



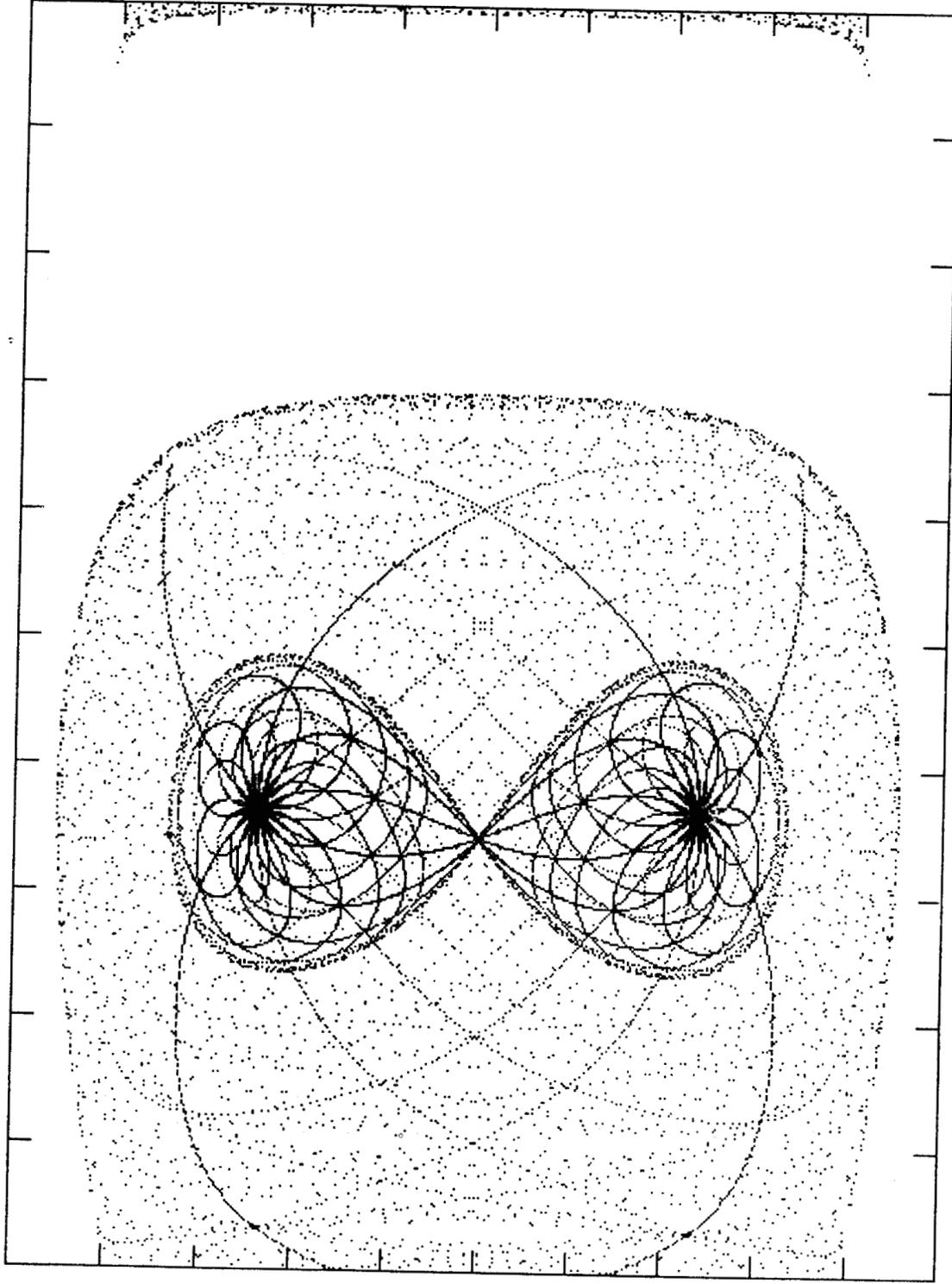
$A = 3.0$

$B = 0.5$

$\alpha = 1.57$

Lineas de Simetria

$\Gamma_{-19}, \dots, \Gamma_{19}$



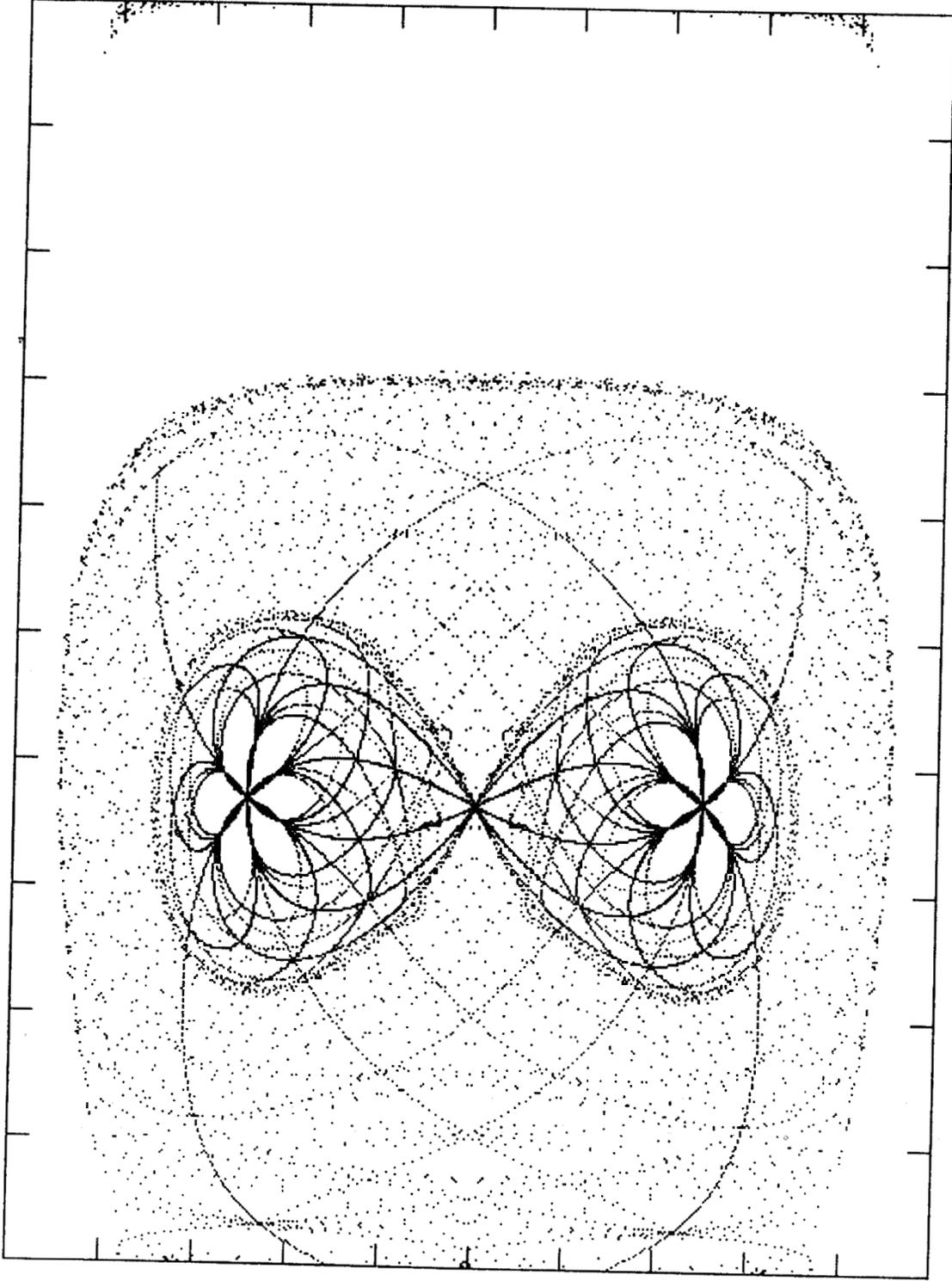
A = 3.0

B = 0.5

$\alpha = 0.0$

Líneas de Simetria

$\Gamma_{-19}, \dots, \Gamma_{19}$



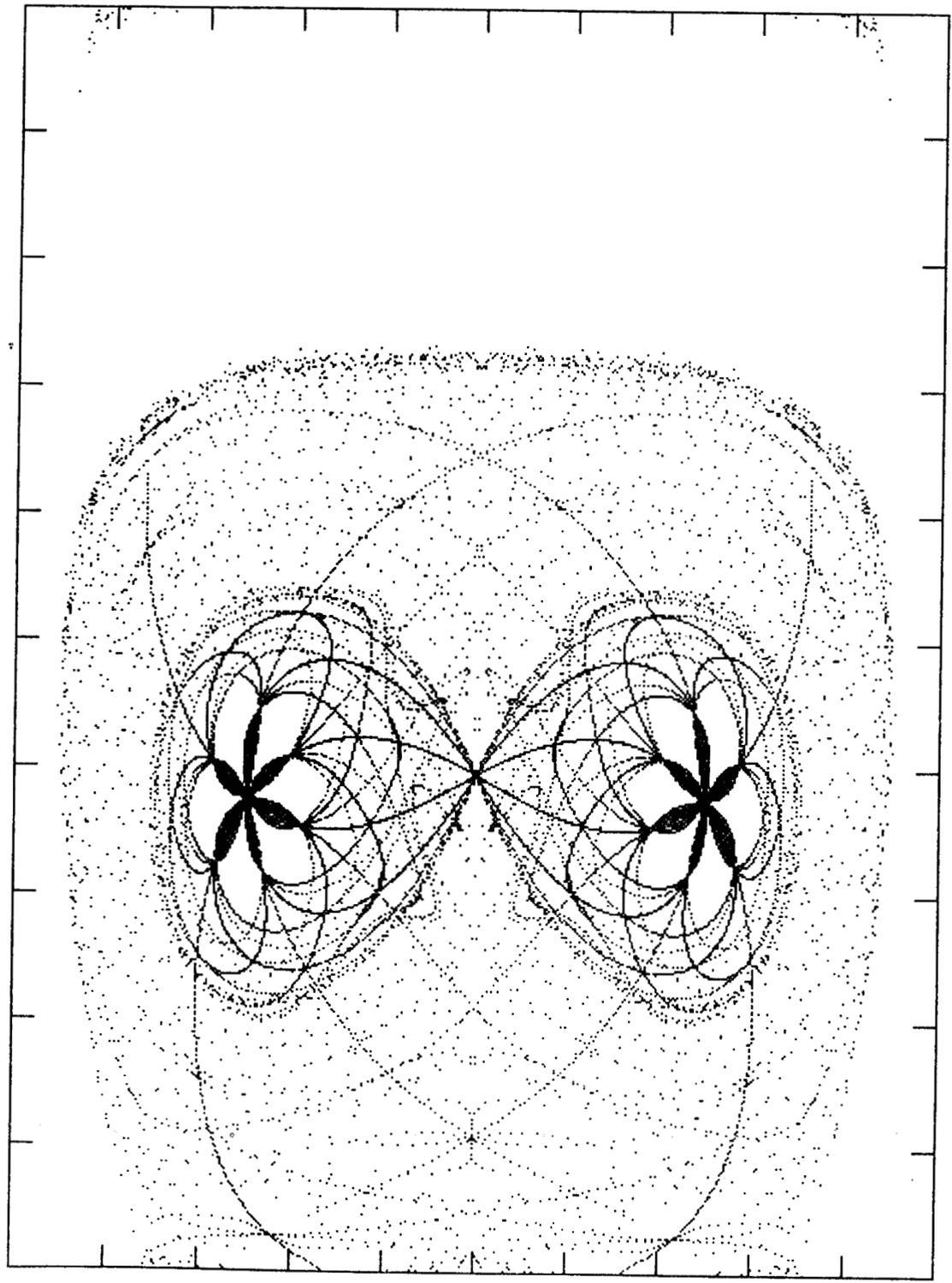
A = 3.0

B = 0.5

$\alpha = 0.2$

LINHAS DE SIMETRIA

$\Gamma_{-19}, \dots, \Gamma_{19}$



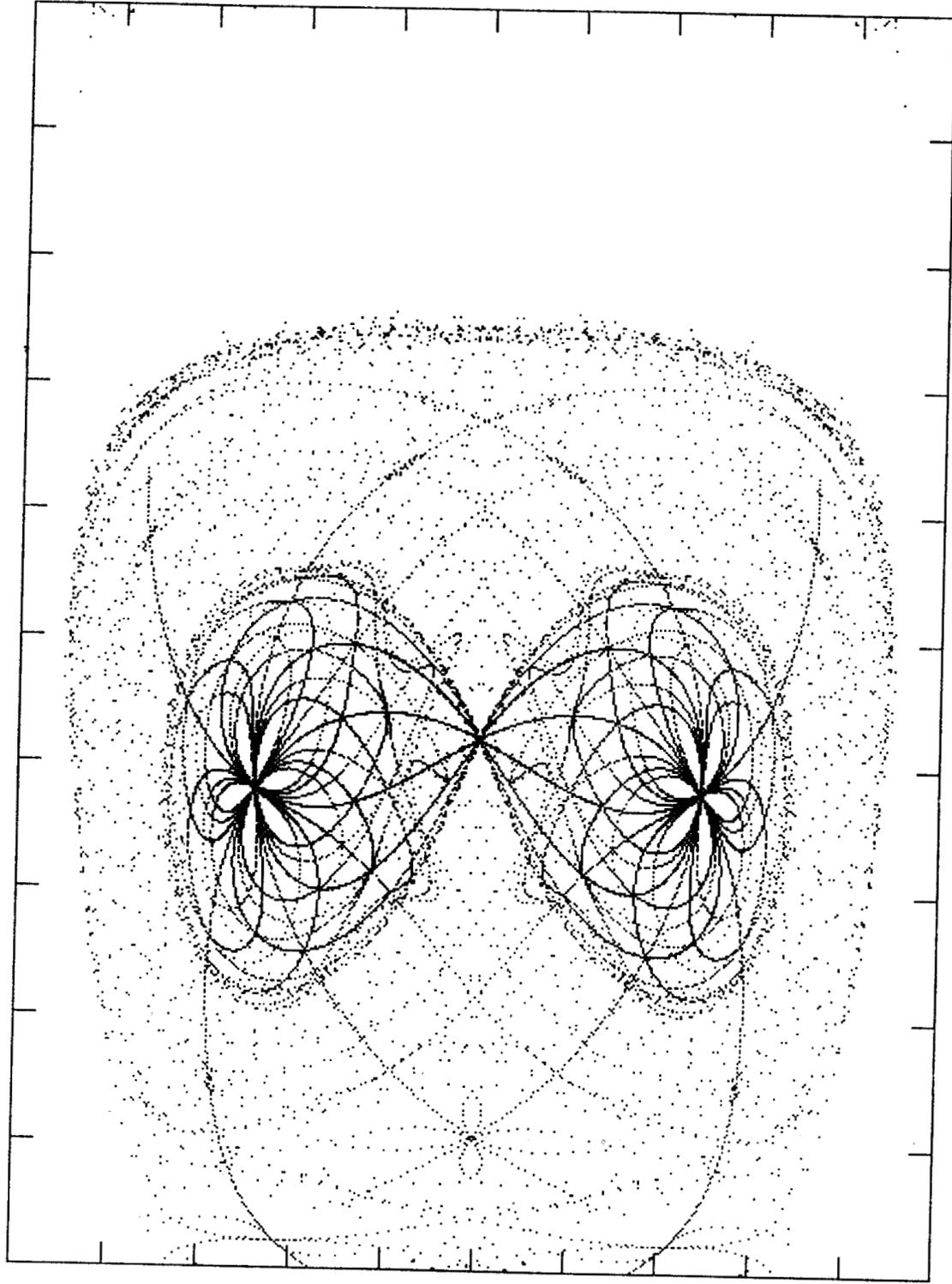
A = 3.0

B = 0.5

$\alpha = 0.4$

Lineas de Simetria

$\Gamma_{-19}, \dots, \Gamma_{19}$



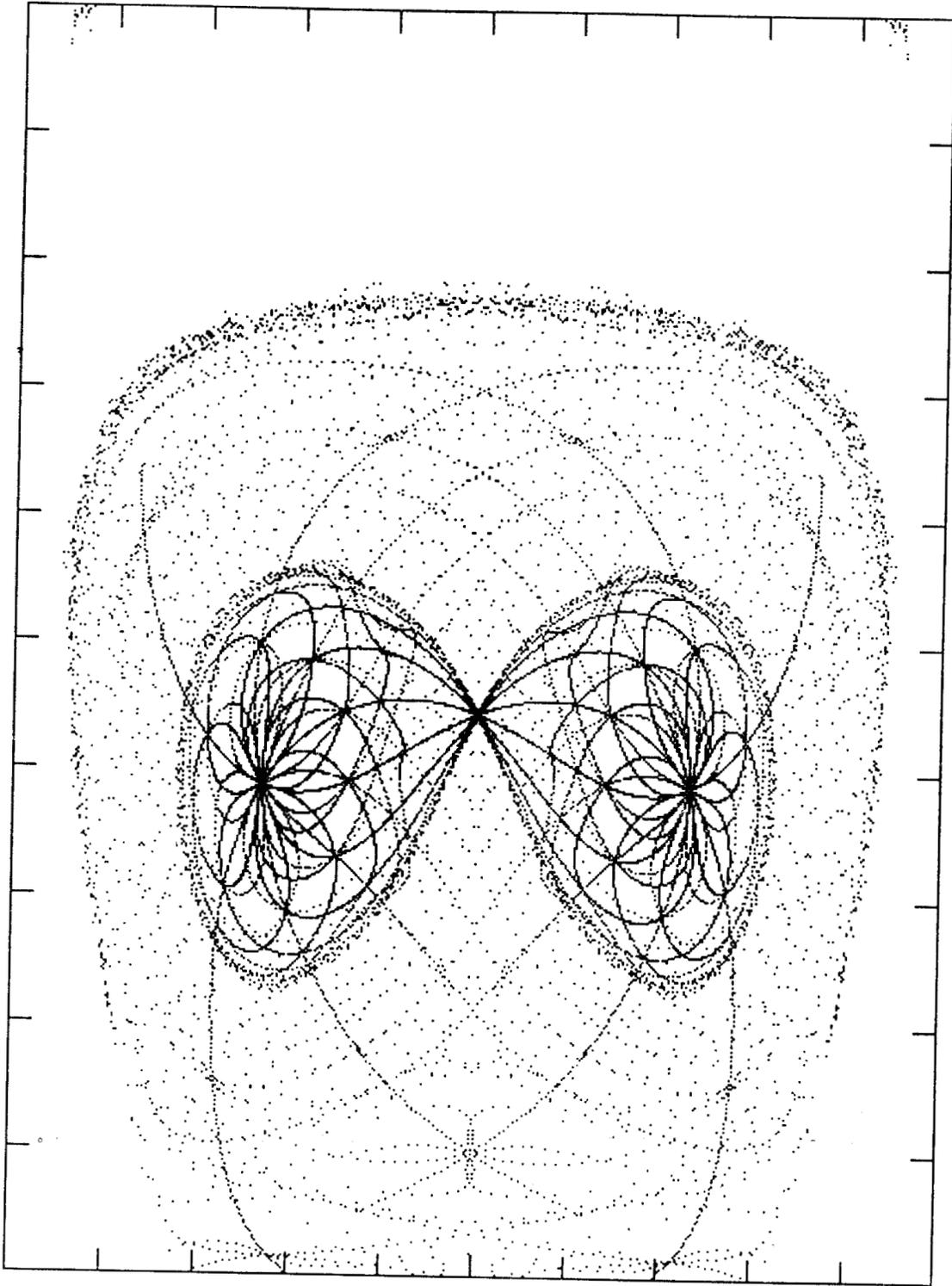
$A = 3.0$

$B = 0.5$

$\alpha = 0.6$

Lineas de Simetria

$\Gamma_{-19}, \dots, \Gamma_{19}$



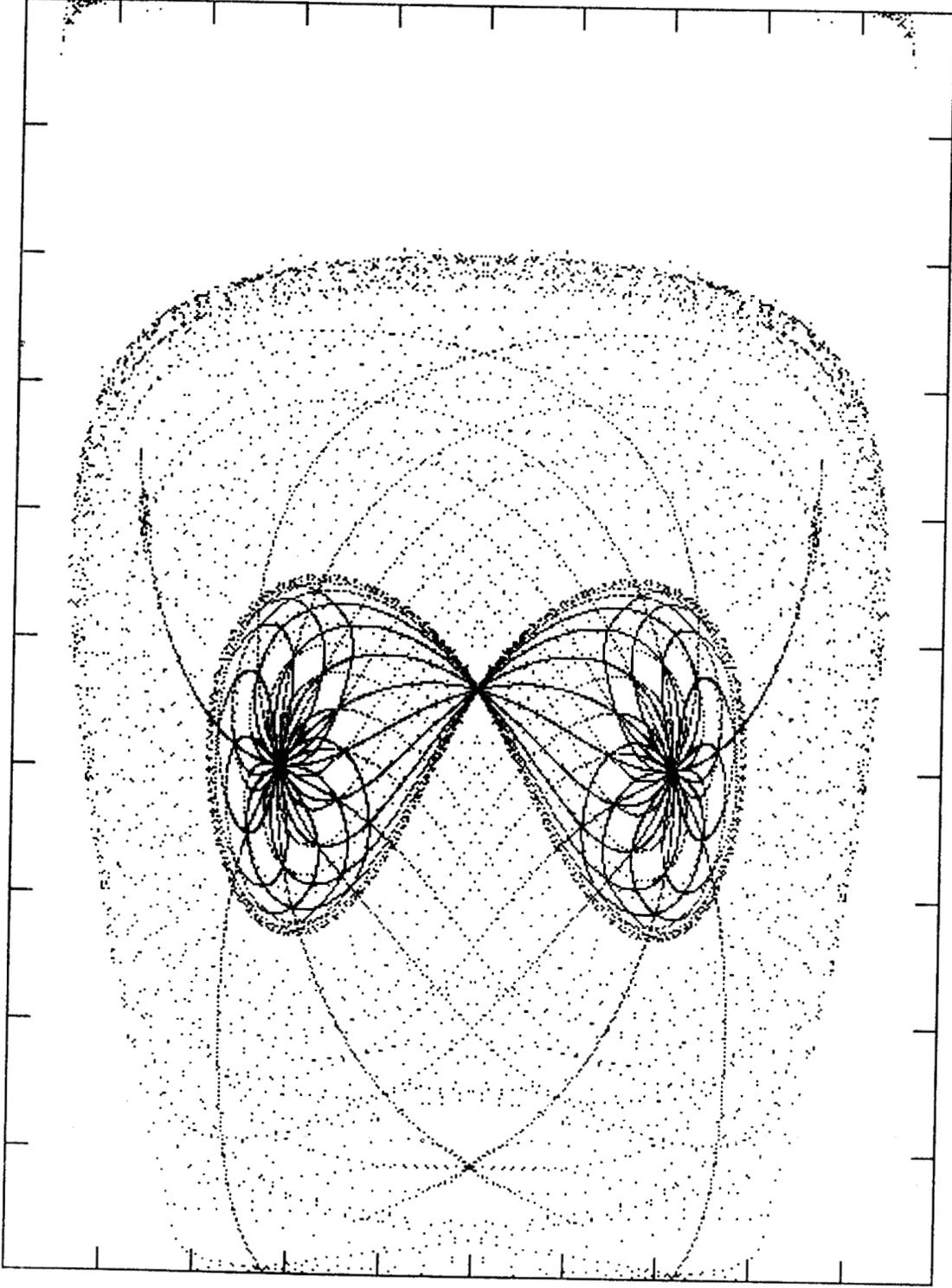
$A = 3.0$

$B = 0.5$

$\alpha = 0.8$

Lineas de Simetria

$\Gamma_{-19}, \dots, \Gamma_{19}$



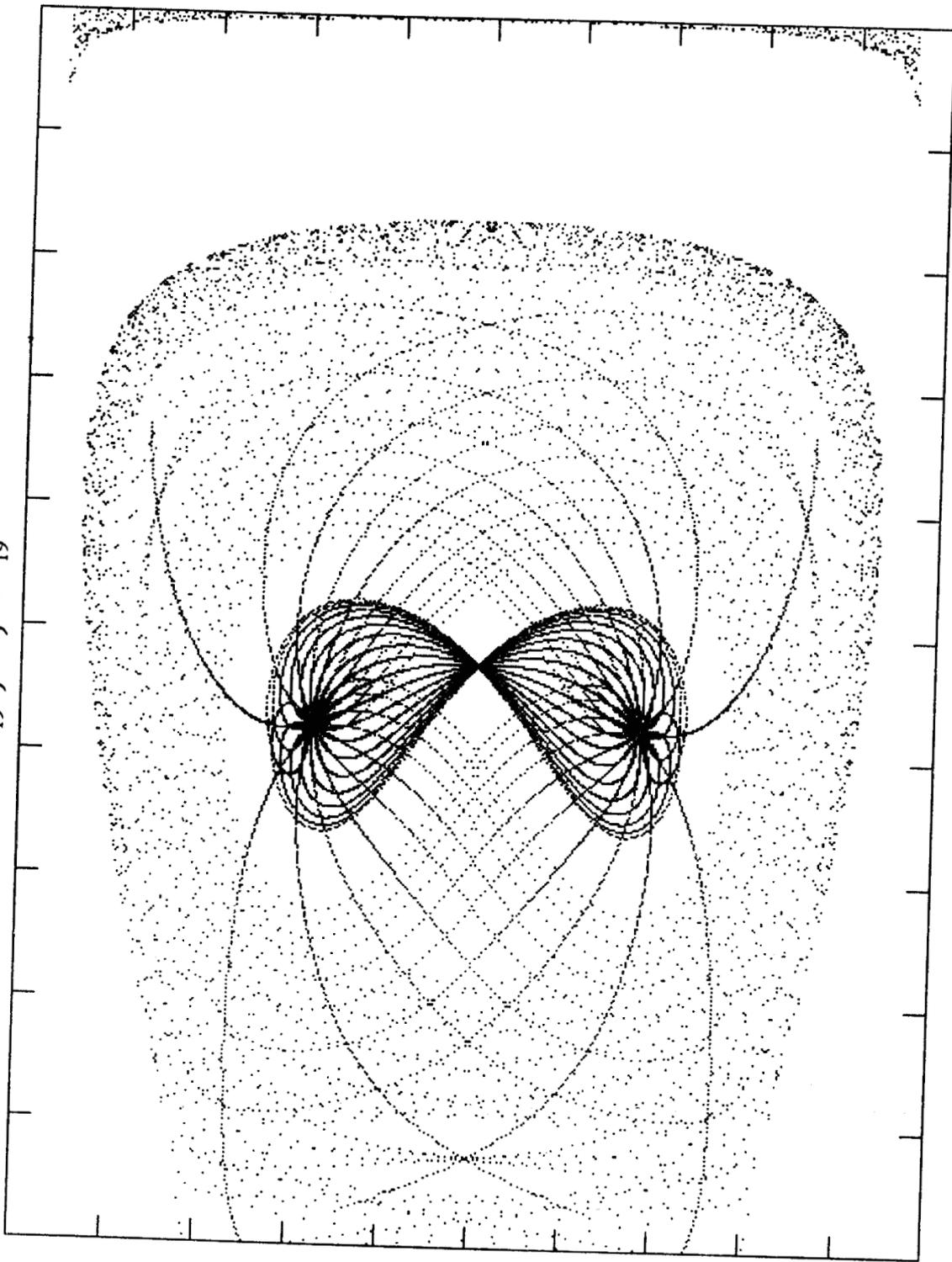
$A = 3.0$

$B = 0.5$

$\alpha = 1.0$

Lineas de Simetria

$\Gamma_{-19}, \dots, \Gamma_{19}$



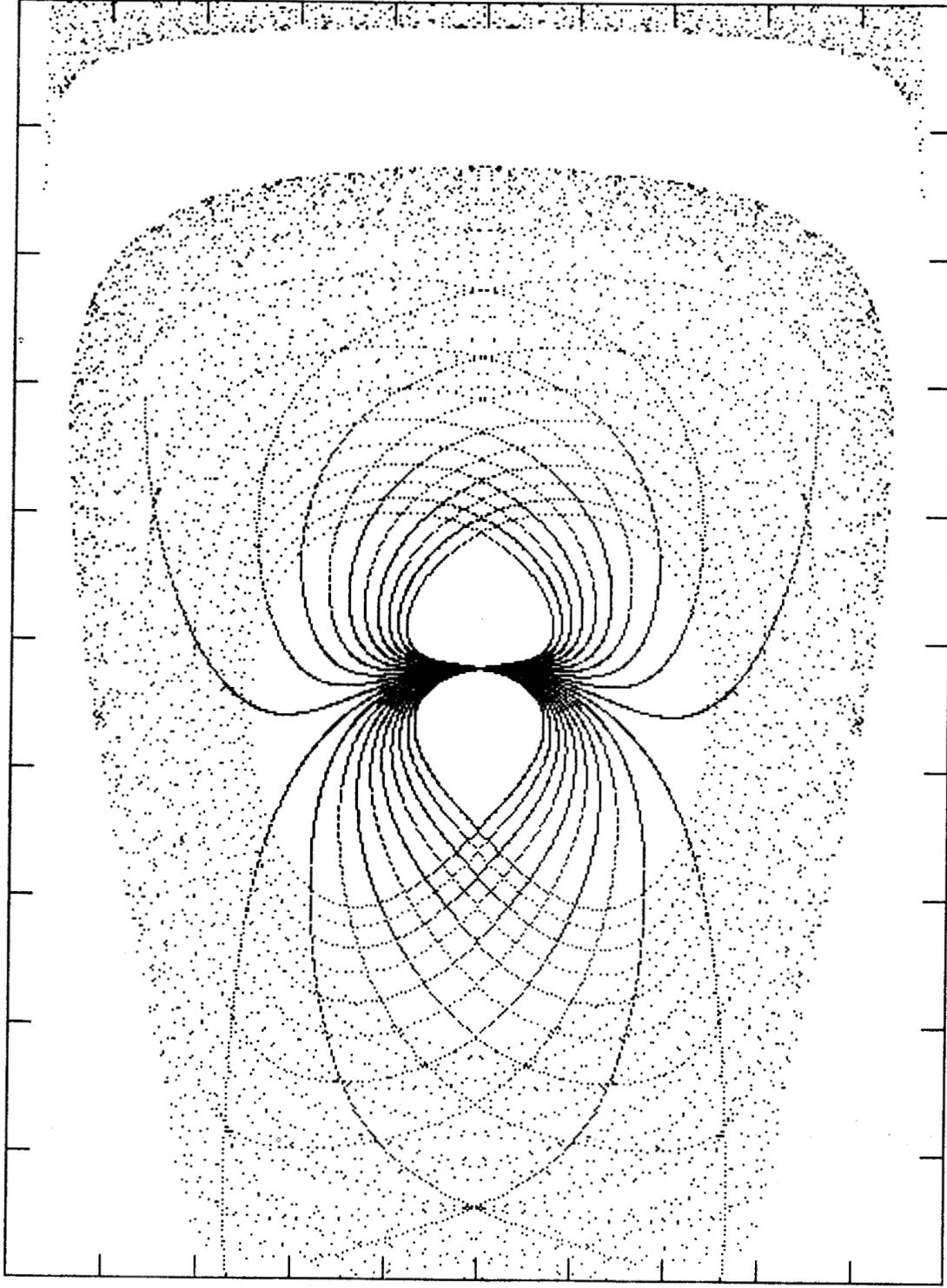
$A = 3.0$

$B = 0.5$

$\alpha = 1.2$

Lineas de Simetria

$\Gamma_{-19}, \dots, \Gamma_{19}$



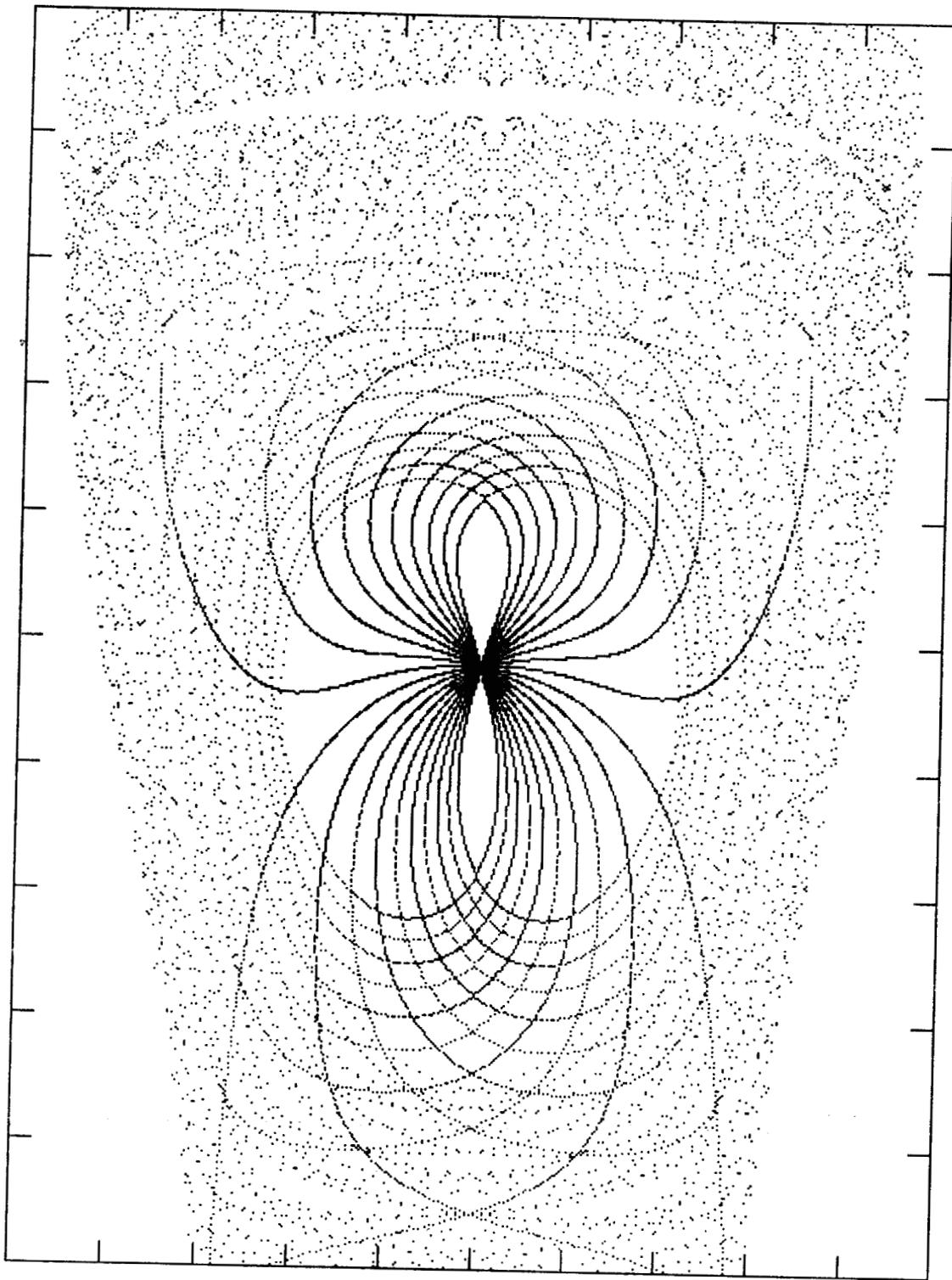
$A = 3.0$

$B = 0.5$

$\alpha = 1.4$

Lineas de Simetria

$\Gamma_{-19}, \dots, \Gamma_{19}$

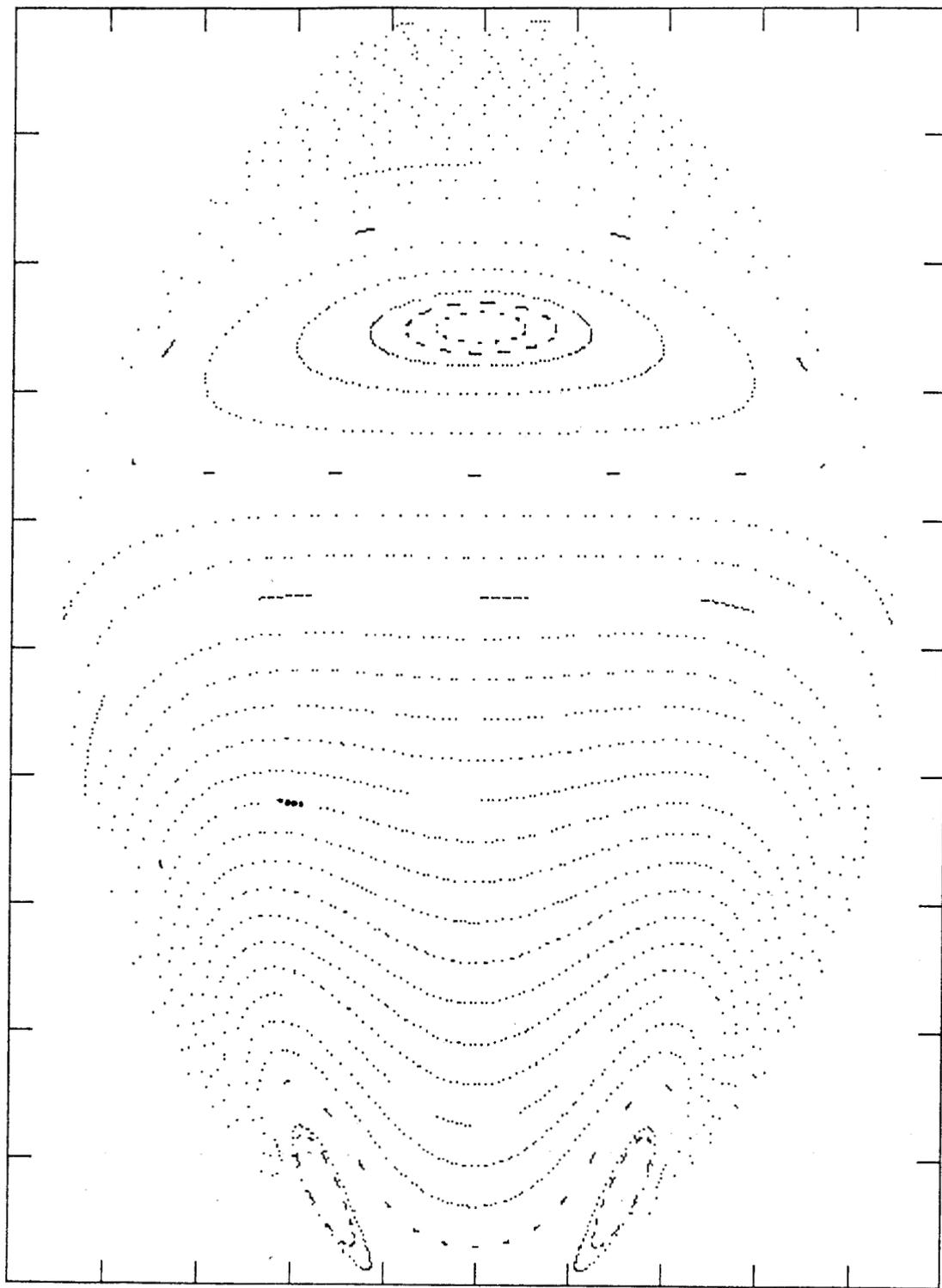


$A = 3.0$

$B = 0.5$

$\alpha = 1.57$

Mapeo de Poincaré

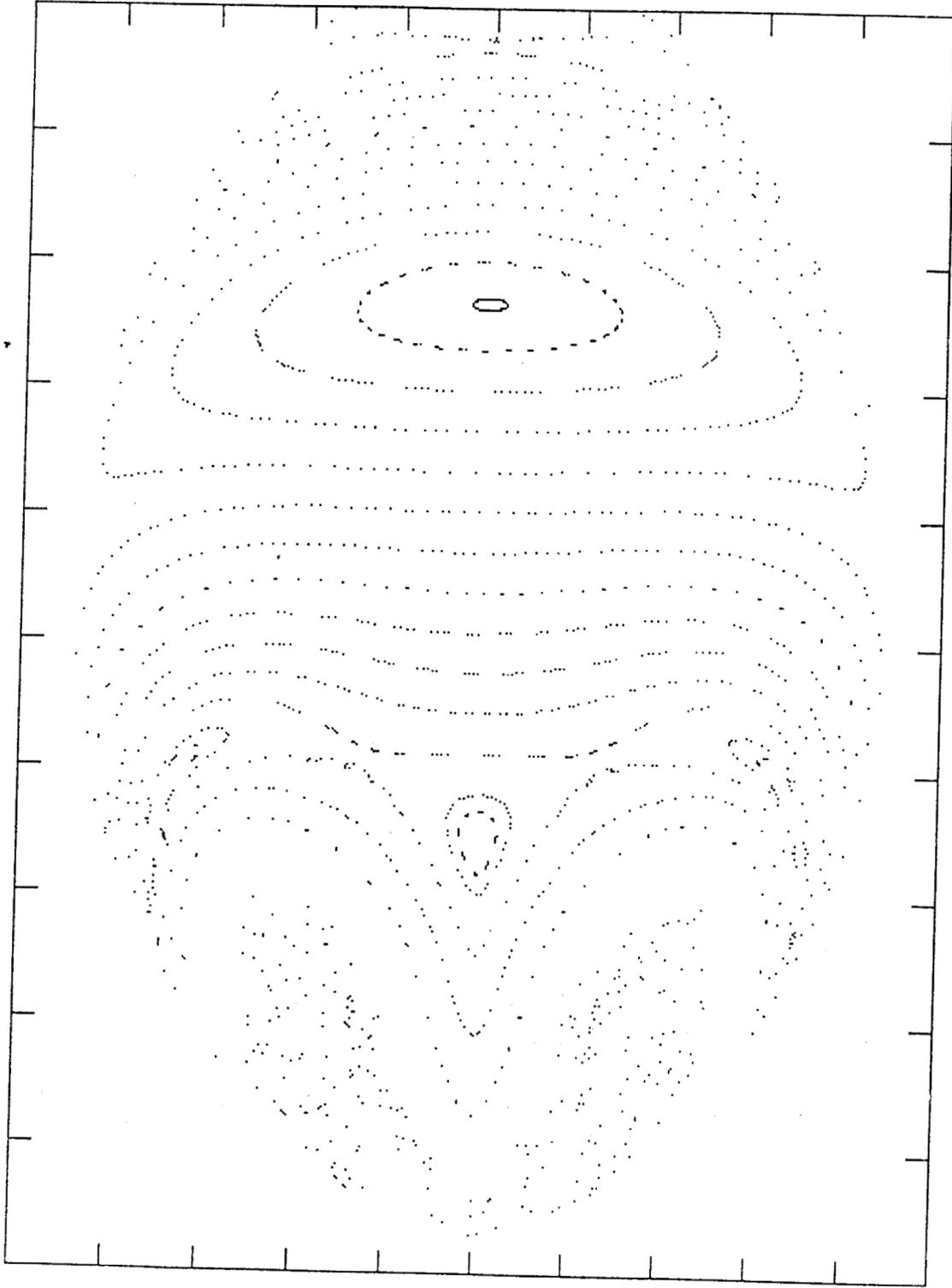


A = 1.5

B = 1.4

$\alpha = 0.0$

Mapeo de Poincaré

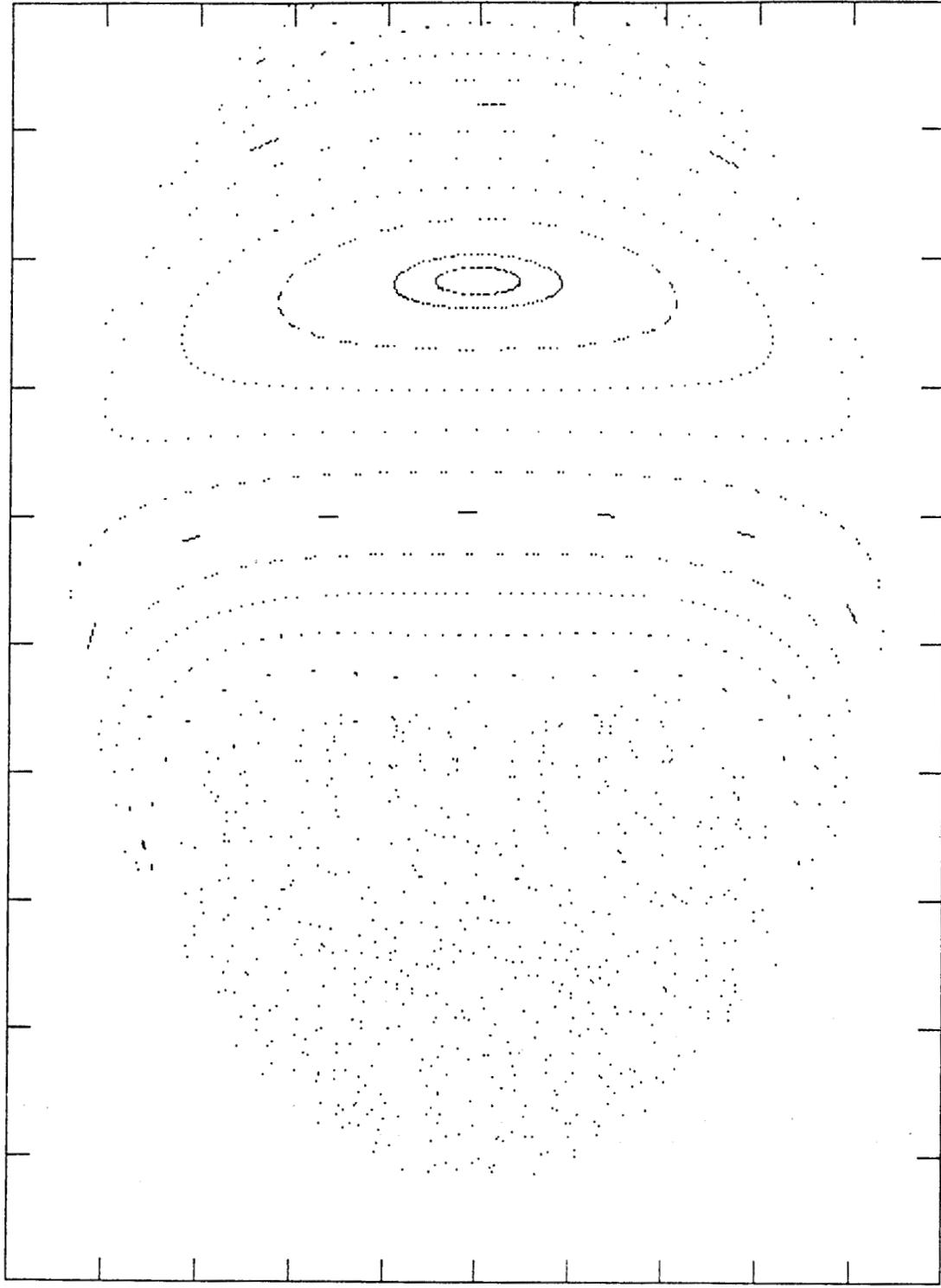


$$A = 1.5$$

$$B = 1.4$$

$$\alpha = 0.2$$

Mapeo de Poincaré

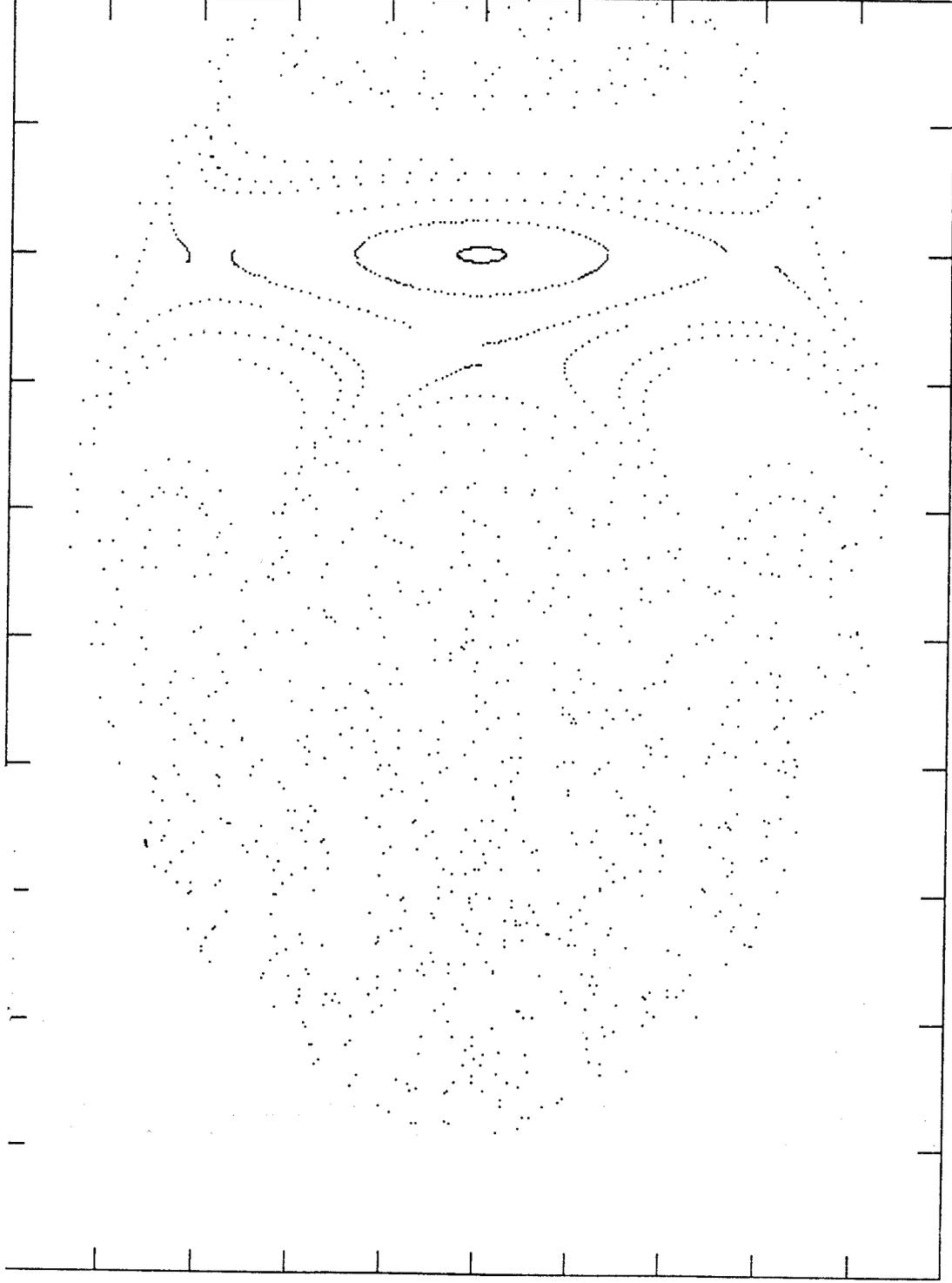


$$A = 1.5$$

$$B = 1.4$$

$$\alpha = 0.4$$

Mapeo de Poincaré

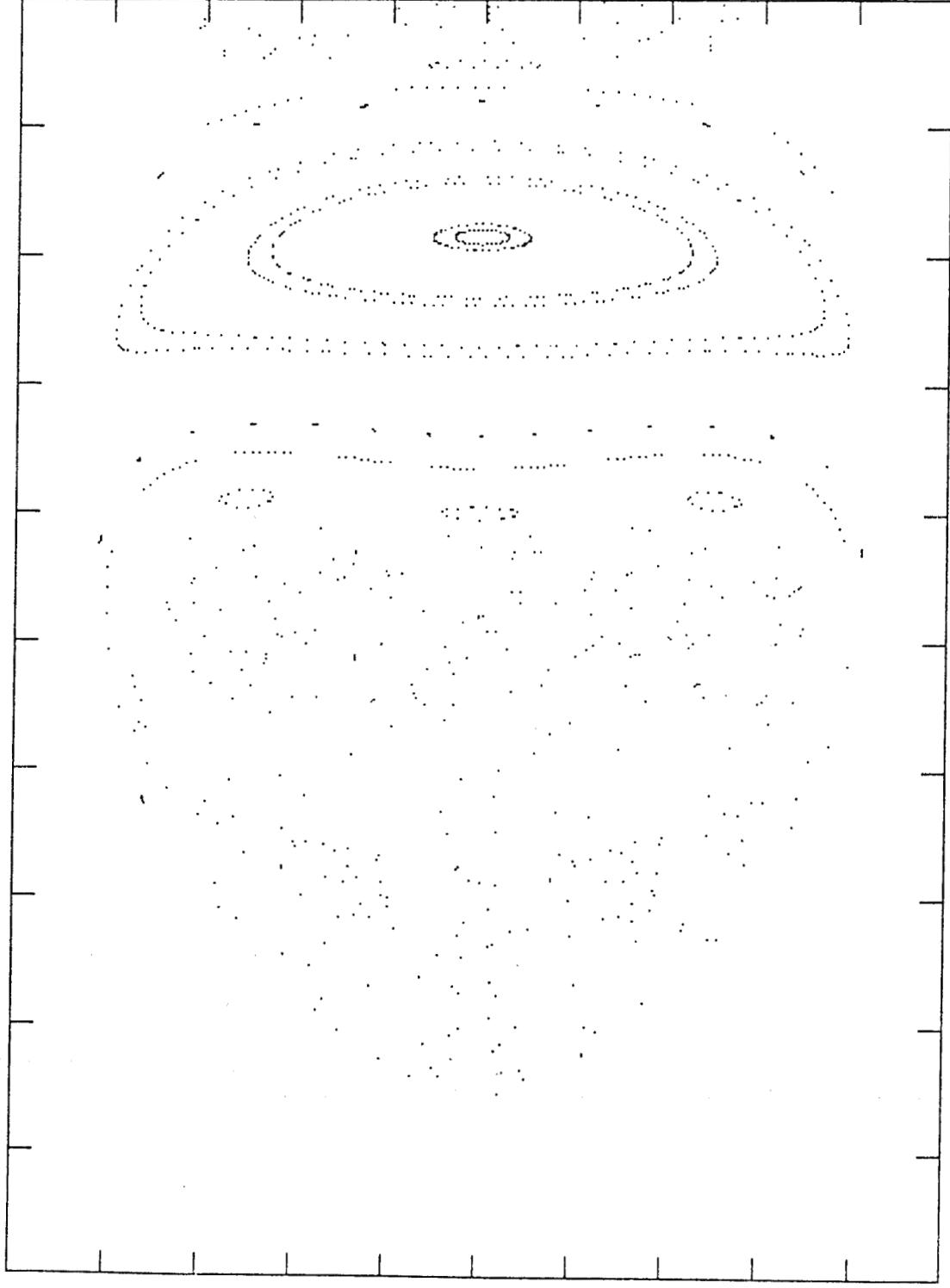


$$A = 1.5$$

$$B = 1.4$$

$$\alpha = 0.6$$

Mapeo de Poincaré



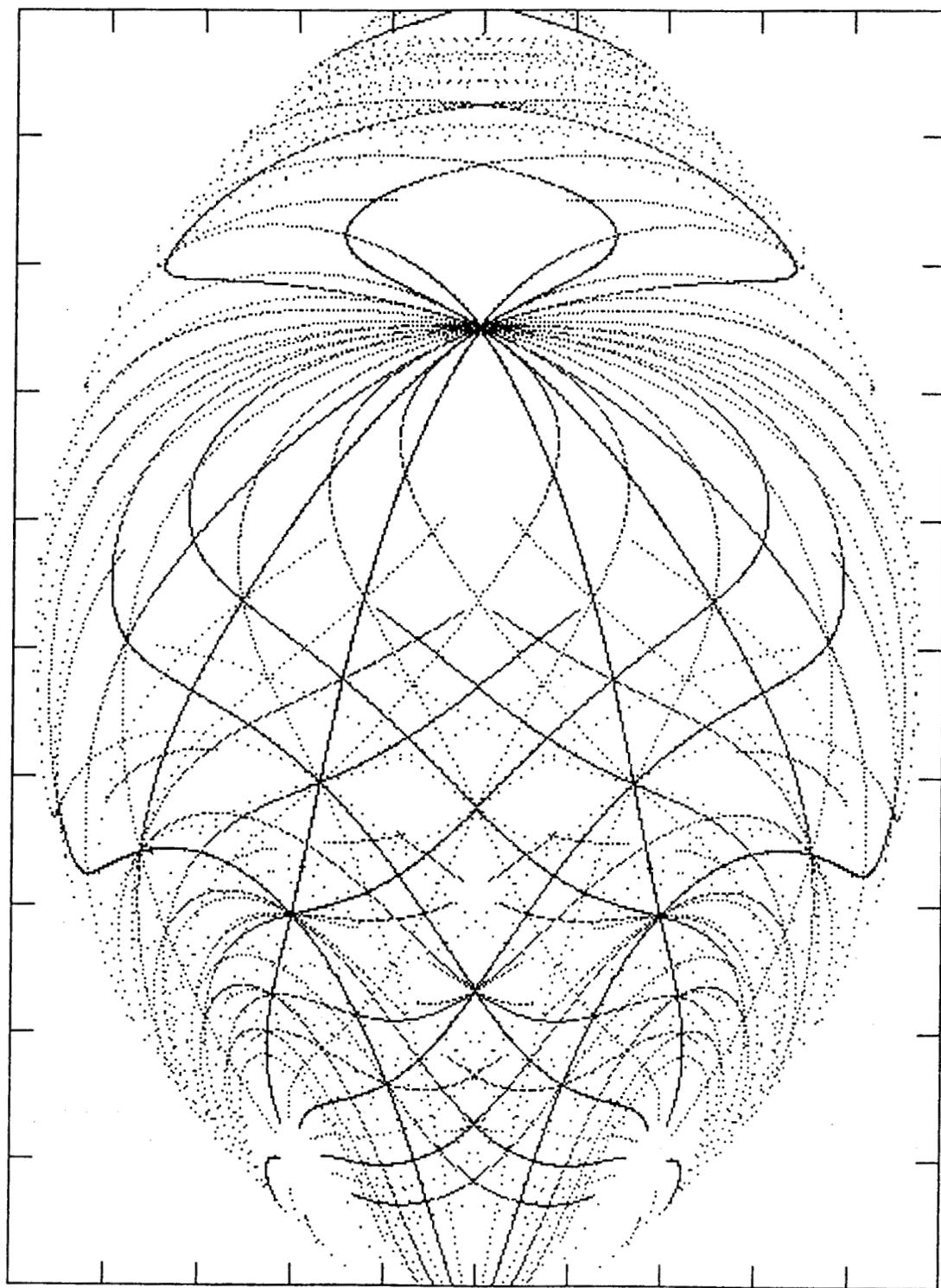
$$A = 1.5$$

$$B = 1.4$$

$$\alpha = 0.8$$

Lineas de Simetria

$\Gamma_0, \dots, \Gamma_{t20}$



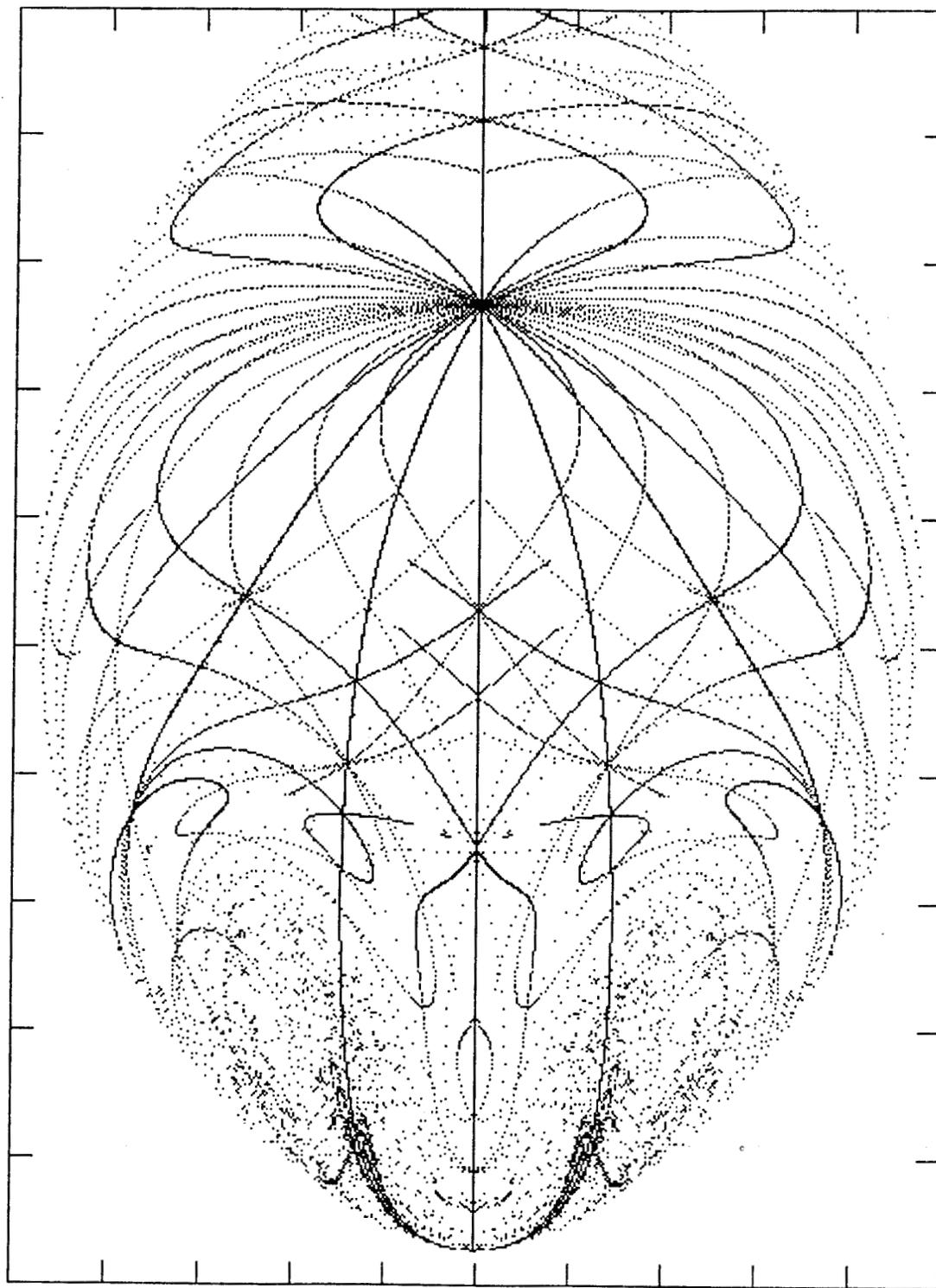
A = 1.5

B = 1.4

$\alpha = 0.0$

Lineas de Simetria

$\Gamma_0, \dots, \Gamma_{+20}$



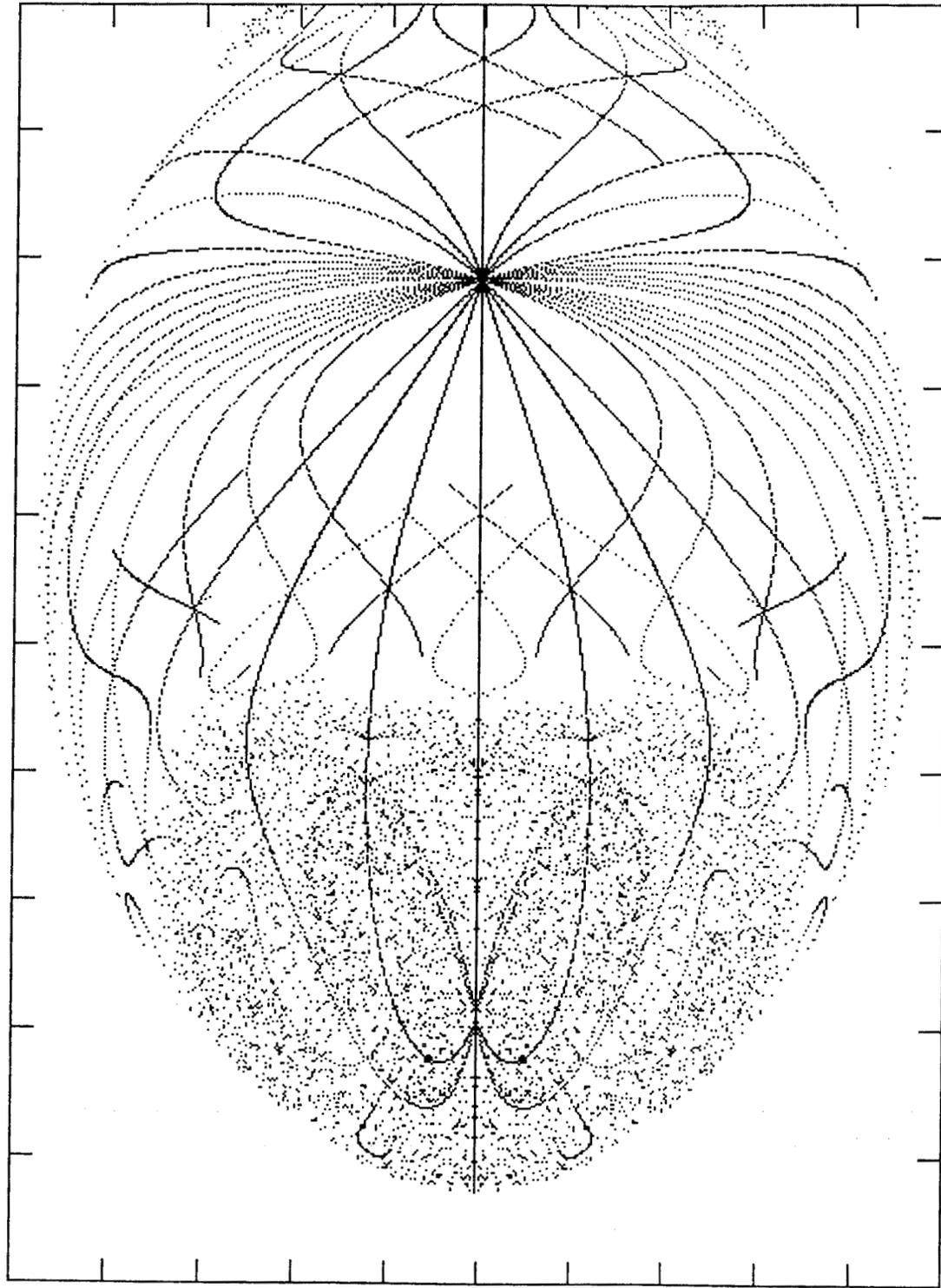
A = 1.5

B = 1.4

$\alpha = 0.2$

Lineas de Simetria

$\Gamma_0, \dots, \Gamma_{\pm 20}$



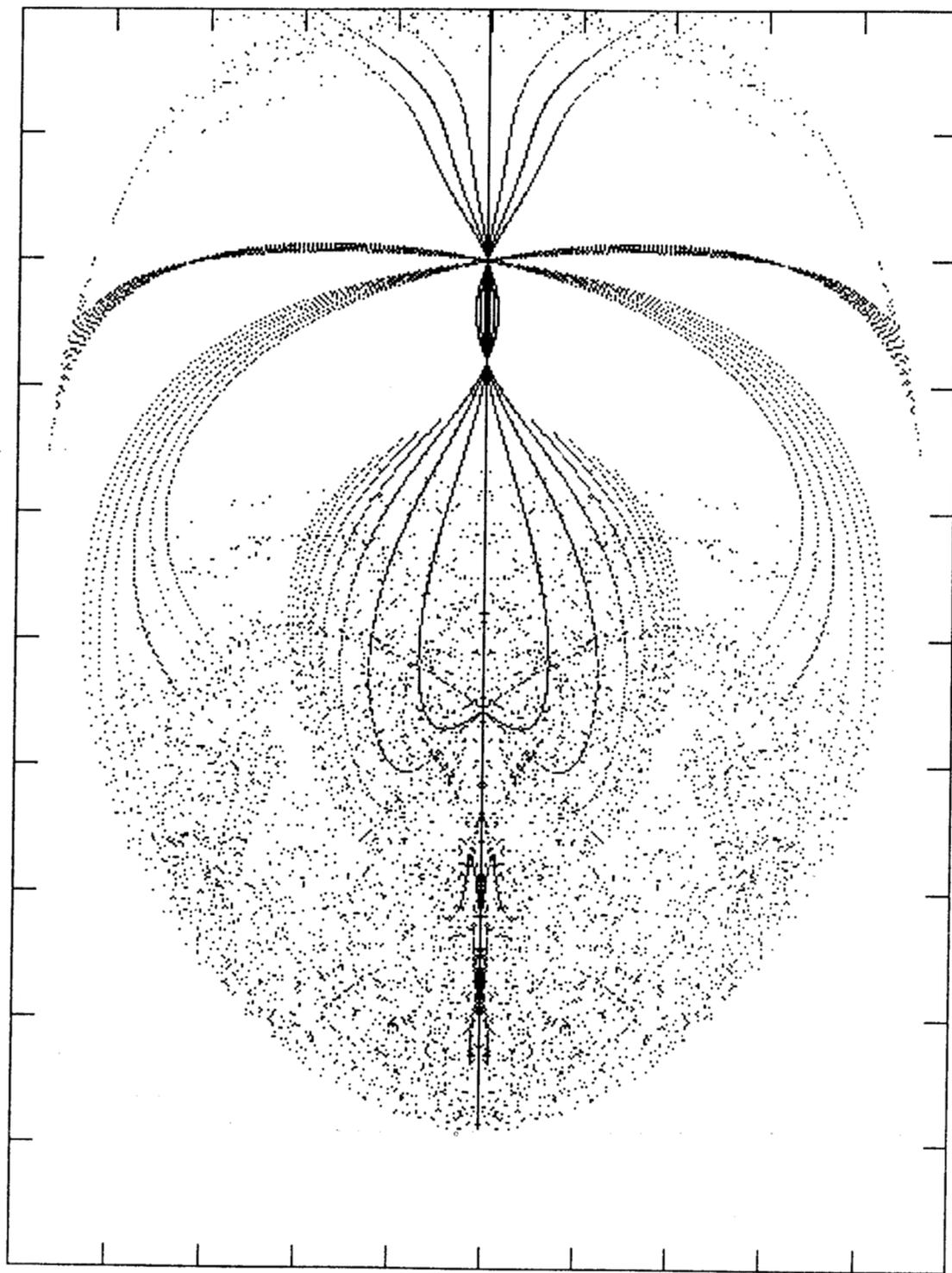
A = 1.5

B = 1.4

$\alpha = 0.4$

Lineas de Simetria

$\Gamma_0, \dots, \Gamma_{\pm 20}$



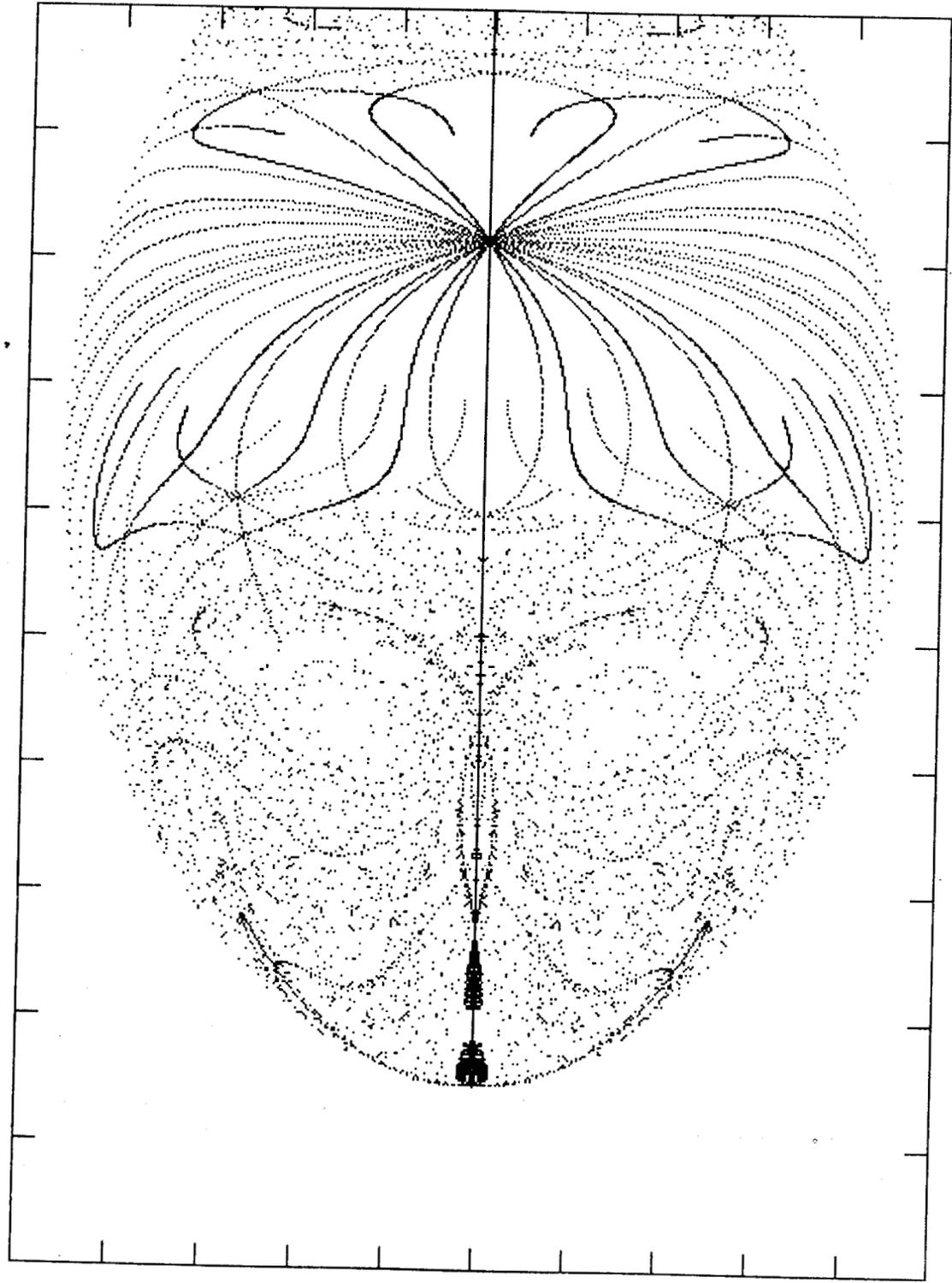
$A = 1.5$

$B = 1.4$

$\alpha = 0.6$

Lineas de Simetria

$\Gamma_0, \dots, \Gamma_{20}$



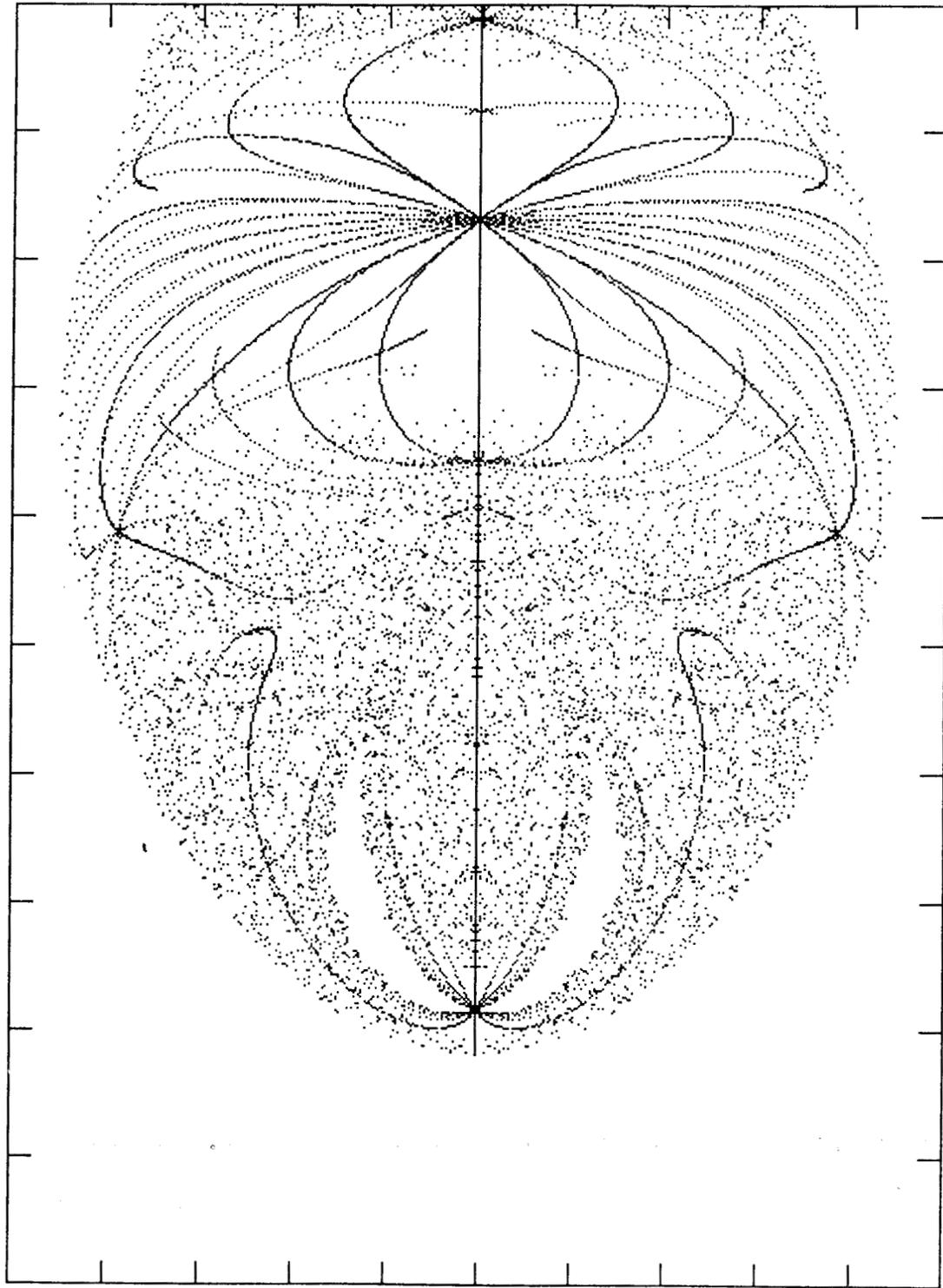
A = 1.5

B = 1.4

$\alpha = 0.8$

Lineas de Simetria

$\Gamma_0, \dots, \Gamma_{20}$



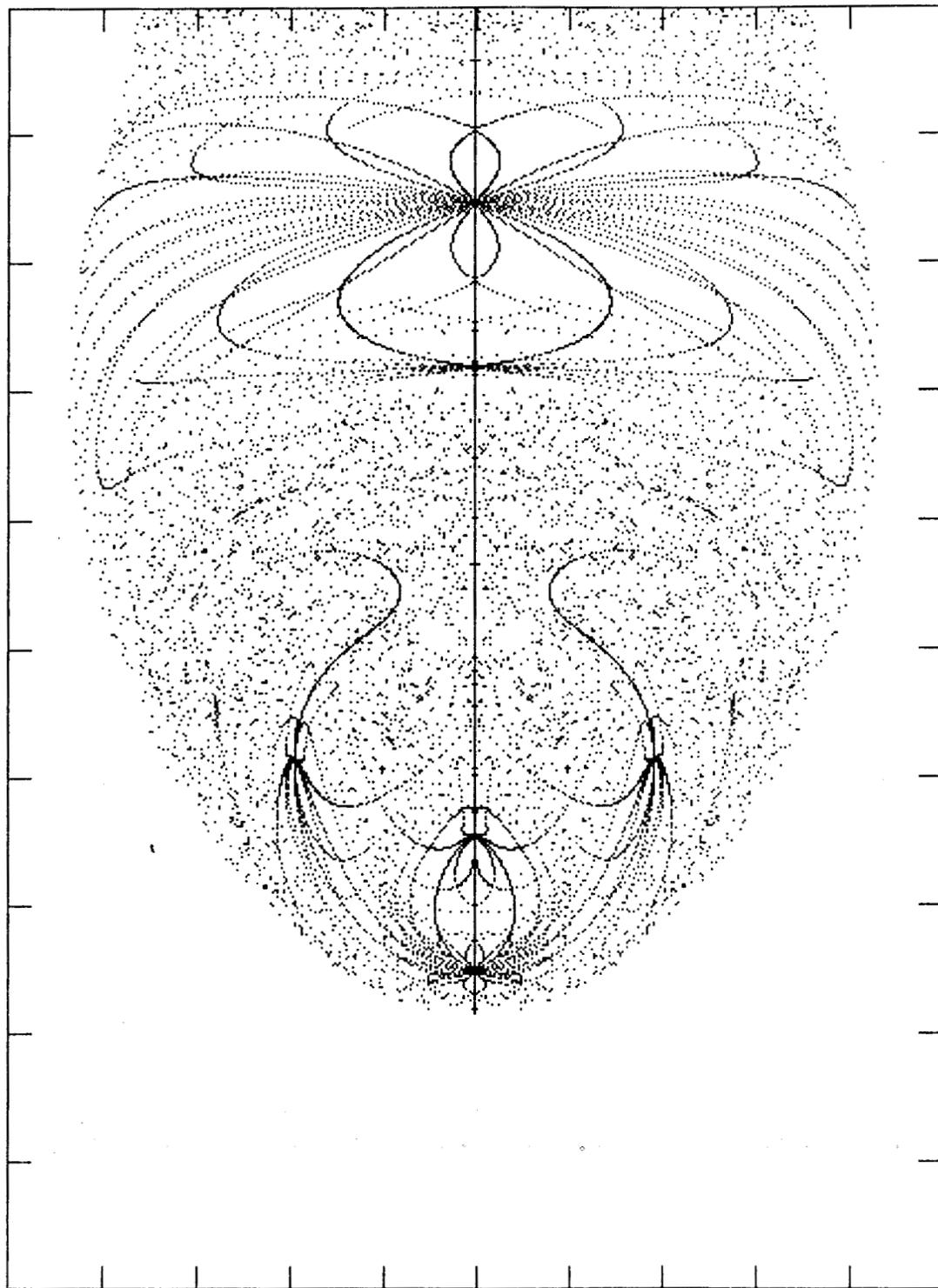
$A=1.5$

$B=1.4$

$\alpha=1.0$

Lineas de Simetria

$\Gamma_0, \dots, \Gamma_{20}$



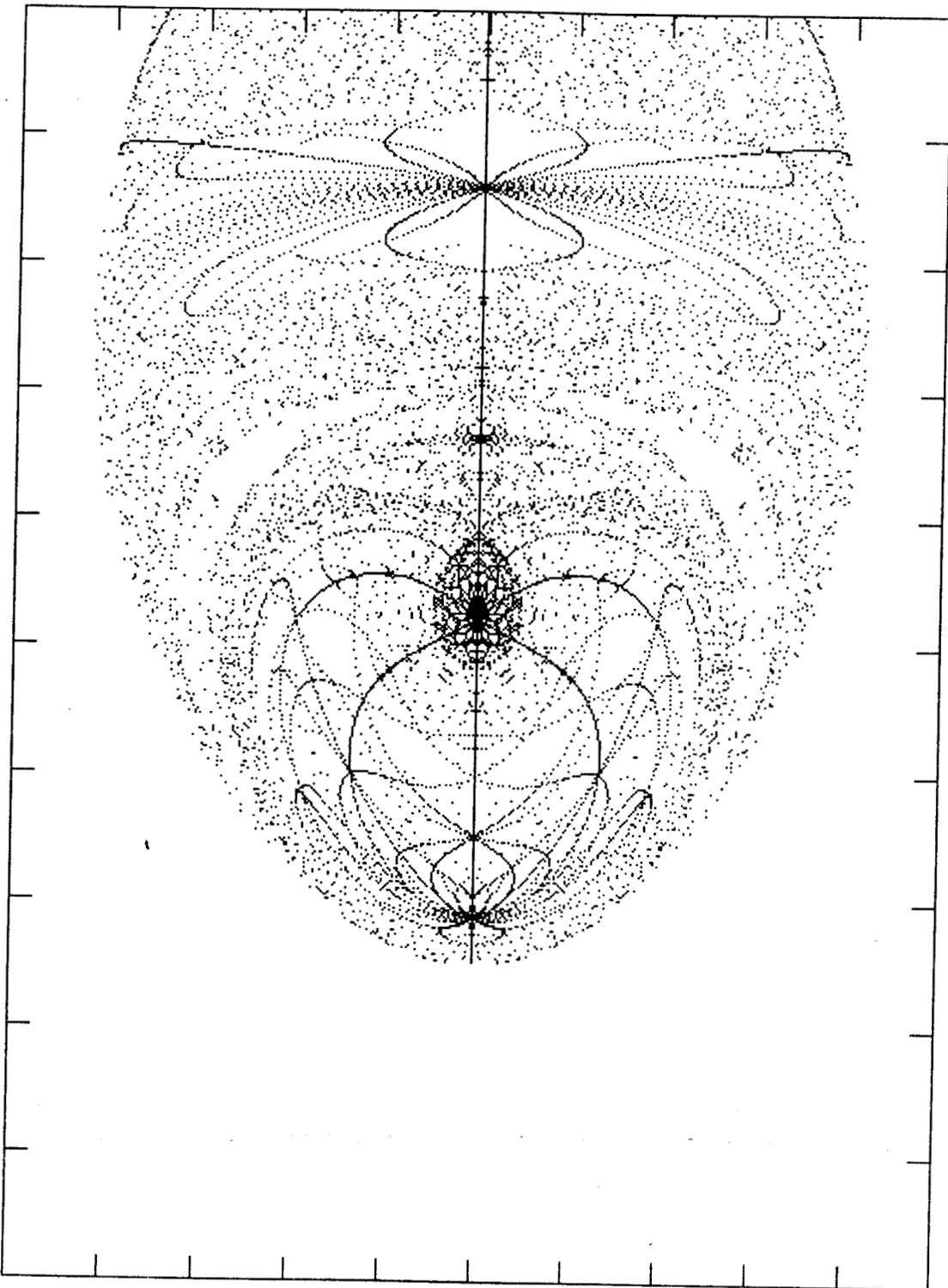
$A = 1.5$

$B = 1.4$

$\alpha = 1.2$

Lineas de Simetria

$\Gamma_0, \dots, \Gamma_{20}$



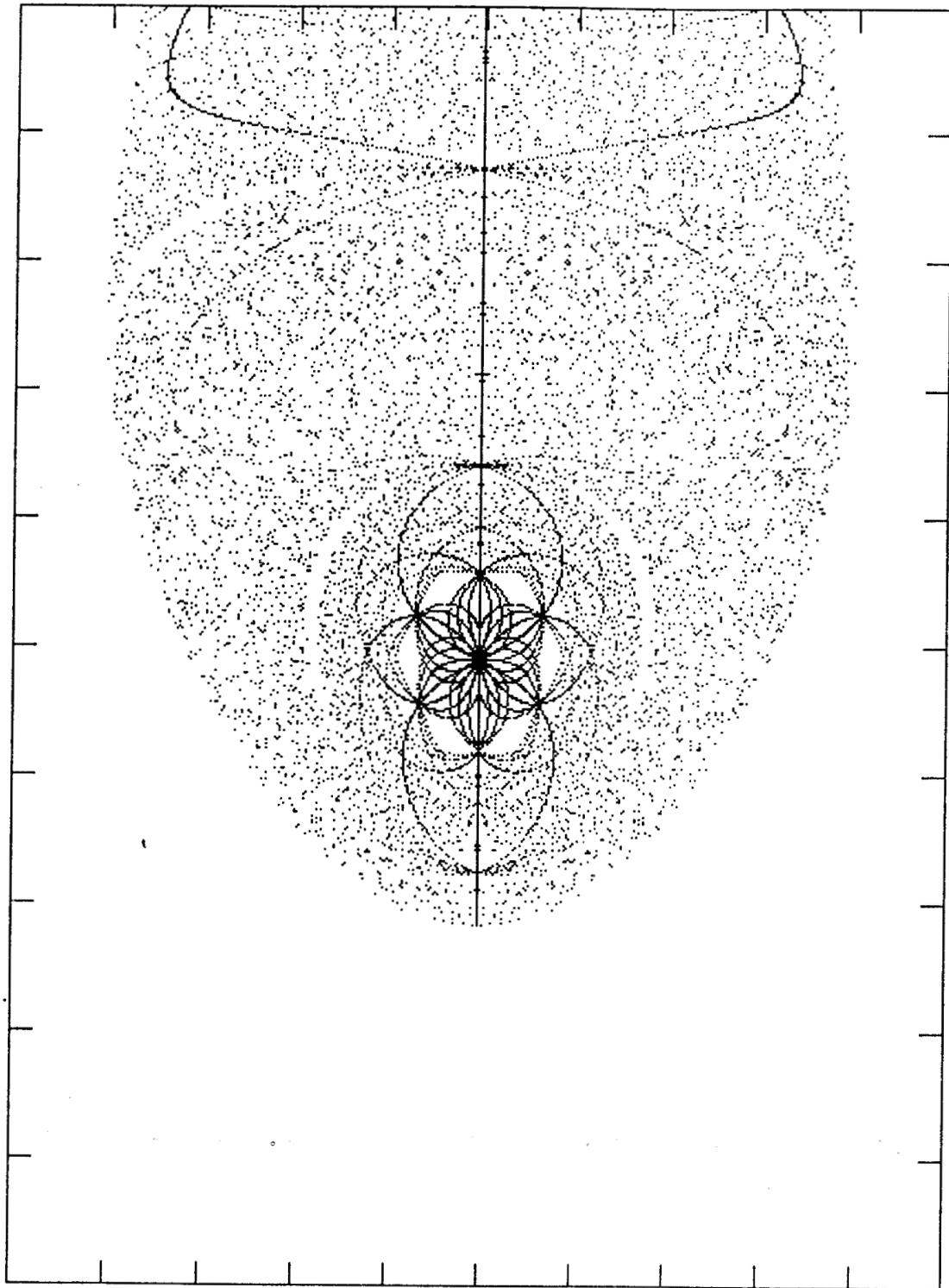
A=1.5

B=1.4

$\alpha=1.4$

Lineas de Simetria

$\Gamma_0, \dots, \Gamma_{20}$



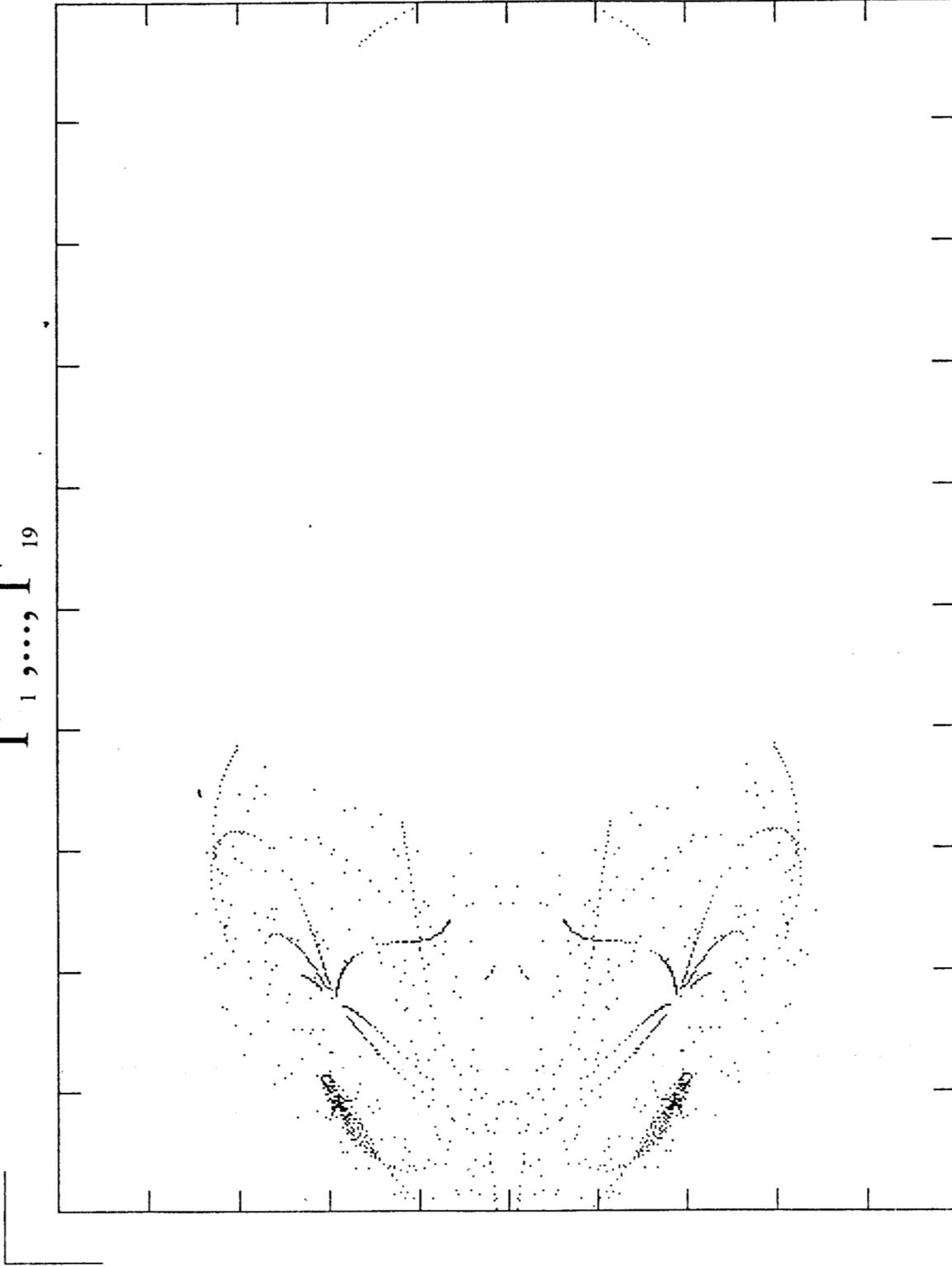
$A = 1.5$

$B = 1.4$

$\alpha = 1.57$

Líneas de Simetria

$\Gamma_1, \dots, \Gamma_{19}$



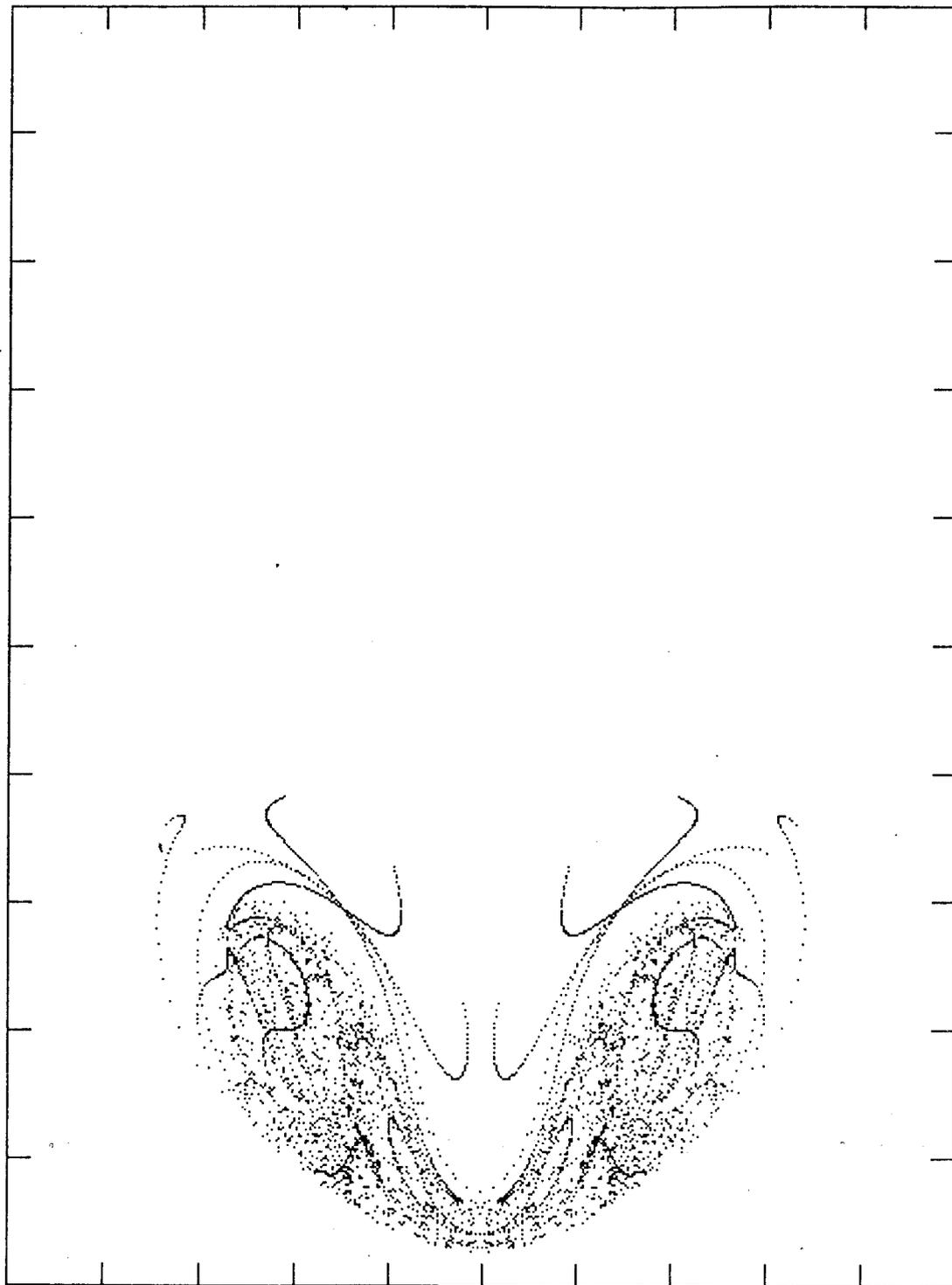
$A = 1.5$

$B = 1.4$

$\alpha = 0.0$

Lineas de Simetria

$\Gamma_{-1}, \dots, \Gamma_{-19}$

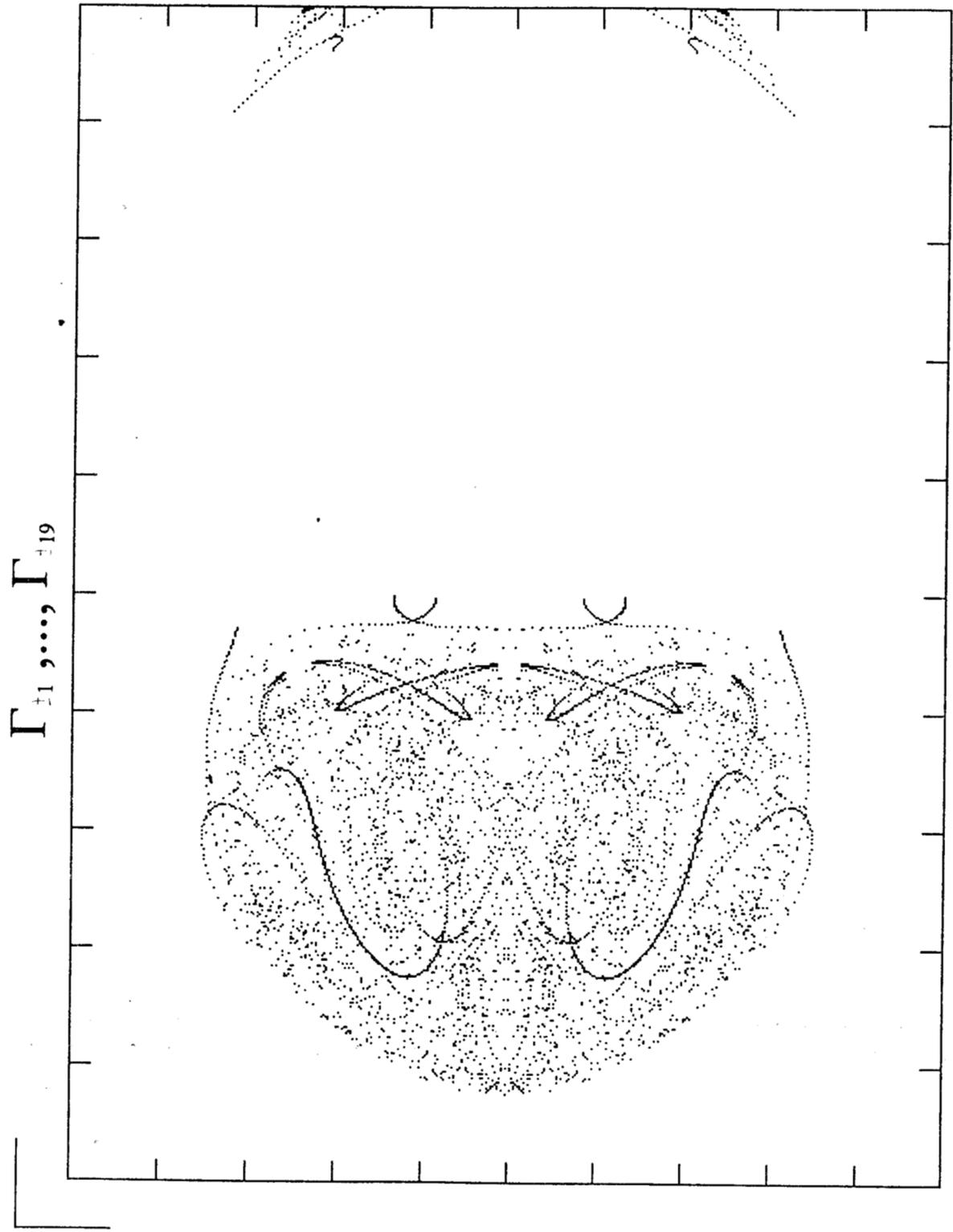


A = 1.5

B = 1.4

$\alpha = 0.2$

Lineas de Simetria

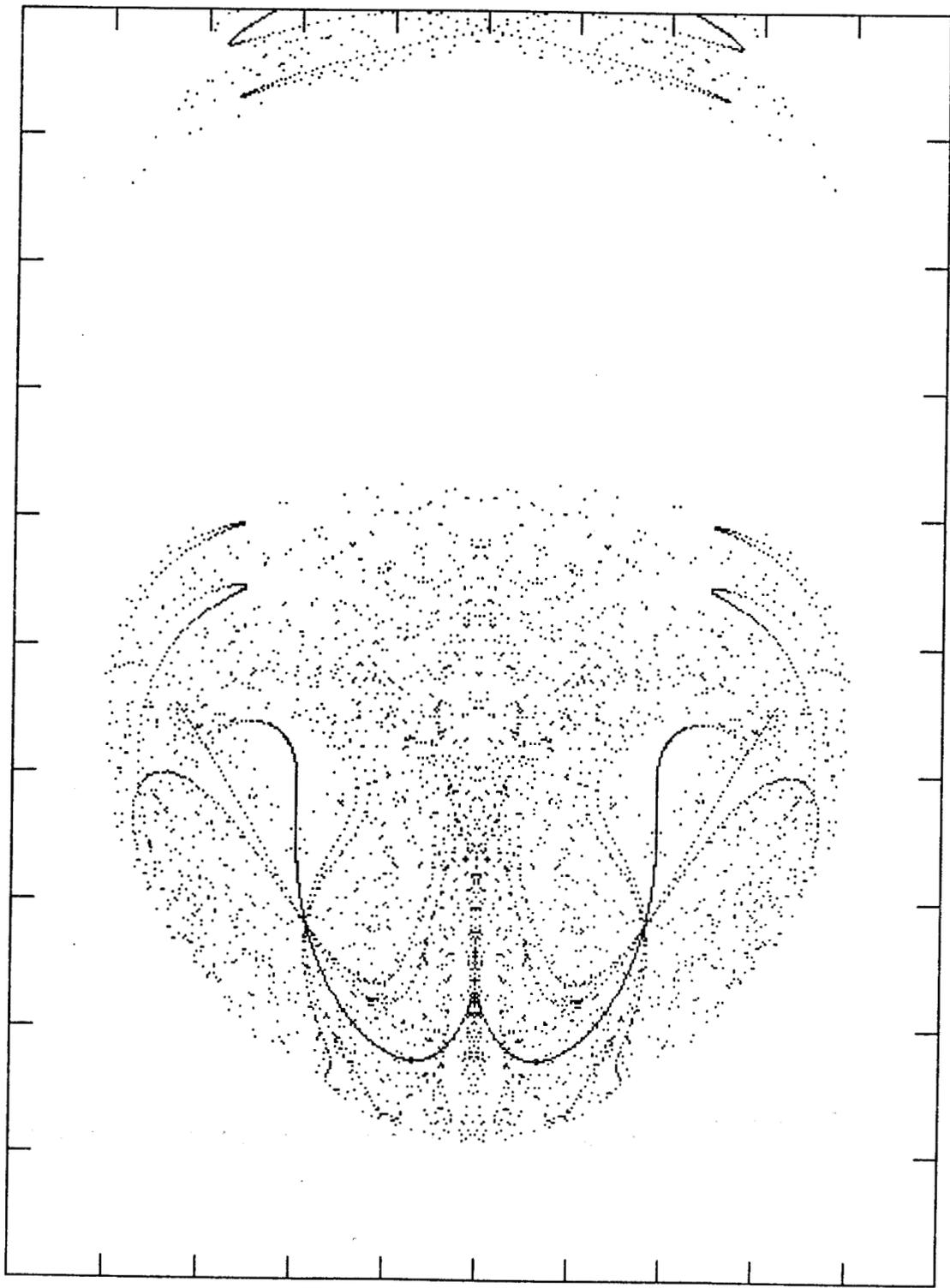


A = 1.5
B = 1.4

$\alpha = 0.4$

Lineas de Simetria

$\Gamma_{\neq 1}, \dots, \Gamma_{\neq 19}$



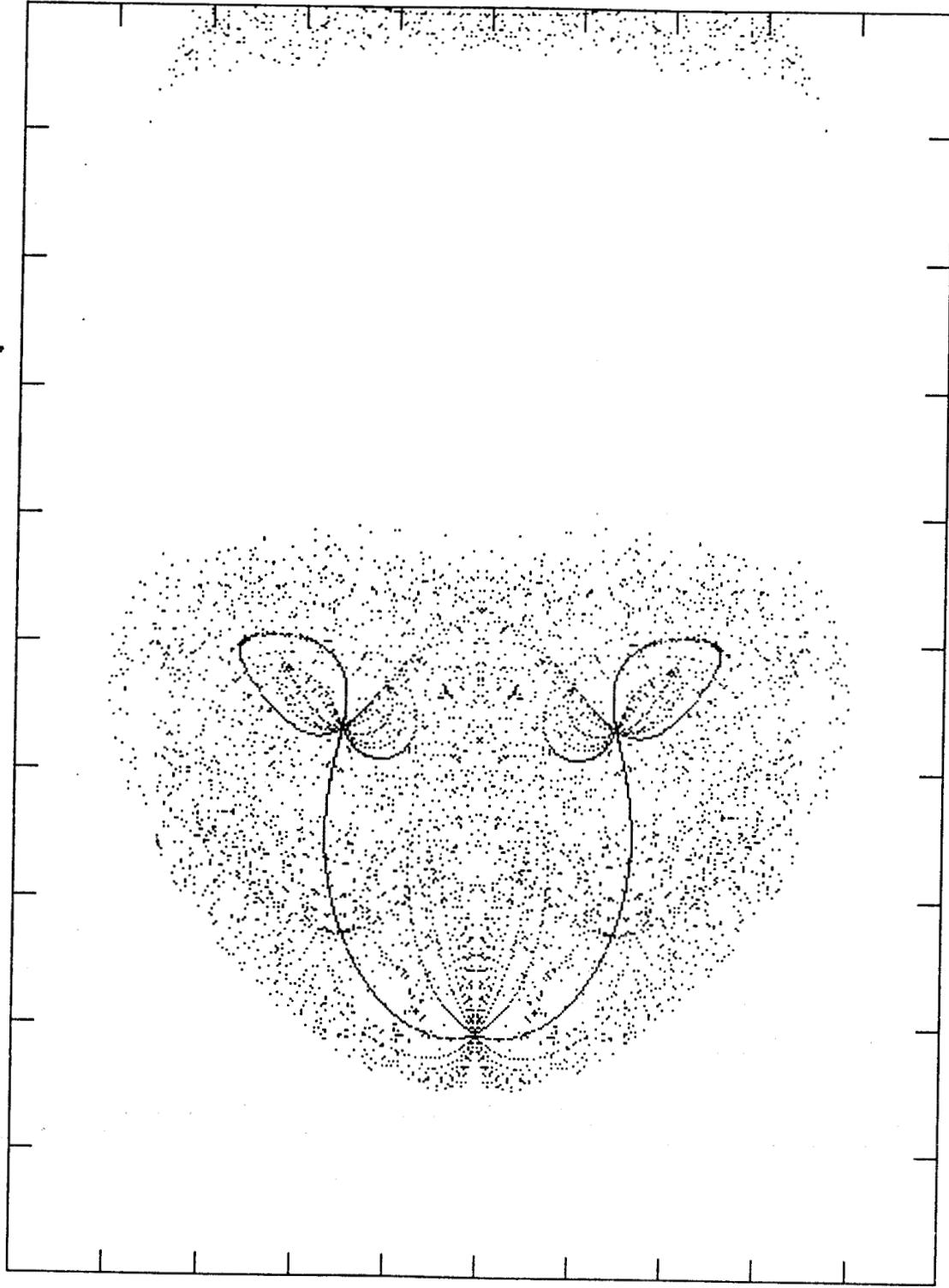
$A = 1.5$

$B = 1.4$

$\alpha = 0.6$

Lineas de Simetria

$\Gamma_{\pm 1}, \dots, \Gamma_{\pm 19}$



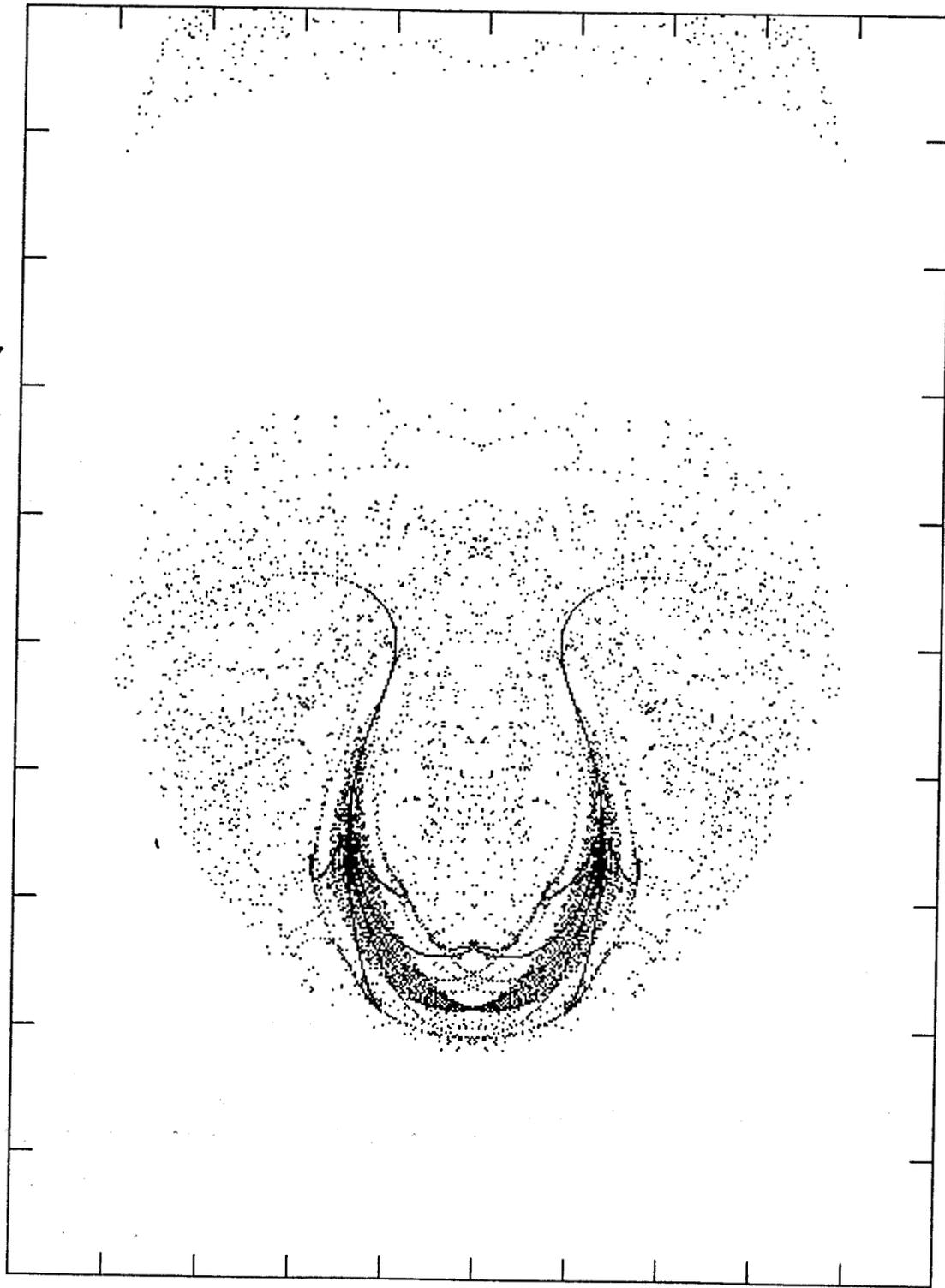
A = 1.5

B = 1.4

$\alpha = 0.8$

Lineas de Simetria

$\Gamma_{-1}, \dots, \Gamma_{+19}$



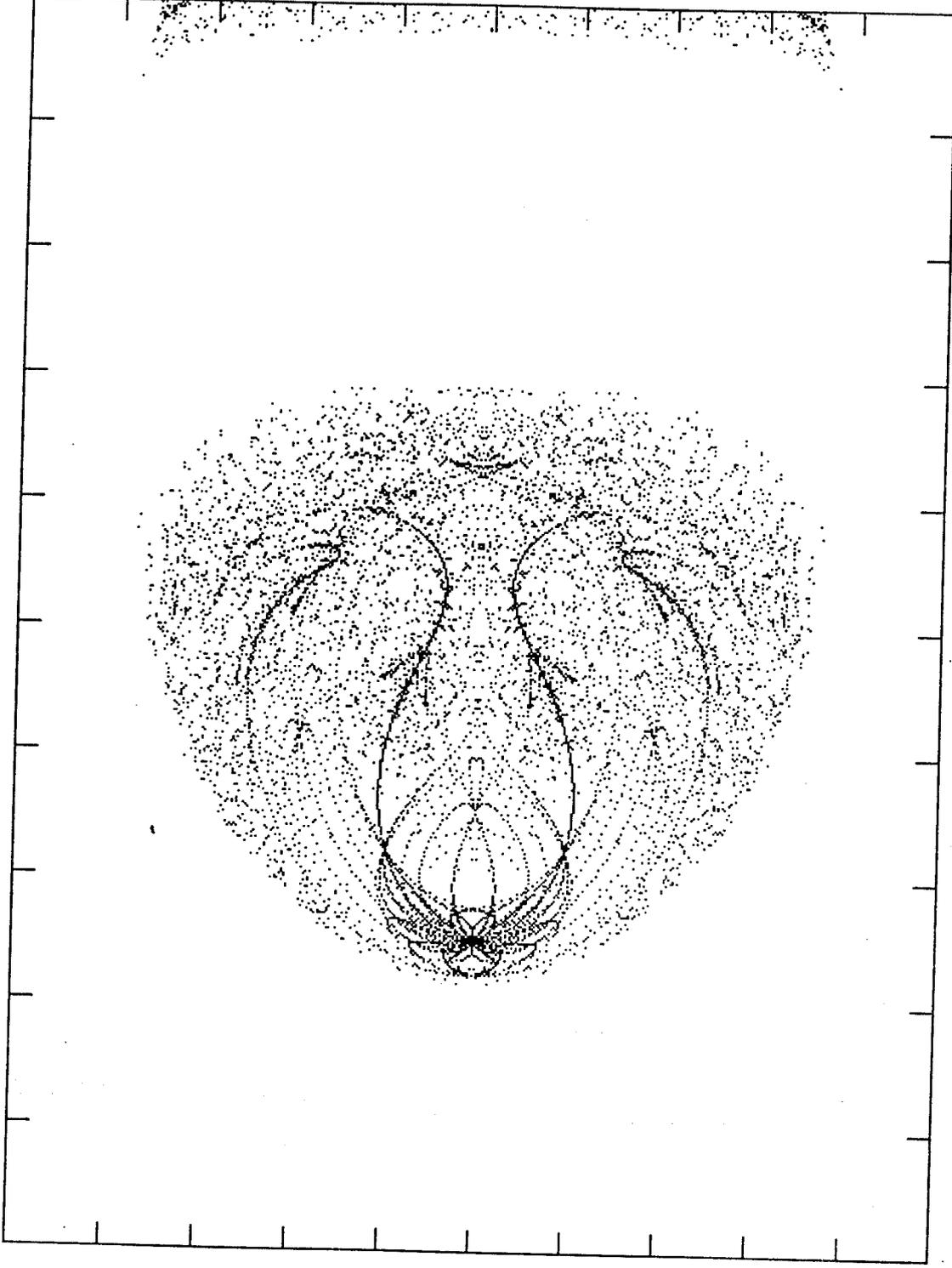
A = 1.5

B = 1.4

$\alpha = 1.0$

Lineas de Simetria

$\Gamma_1, \dots, \Gamma_{19}$



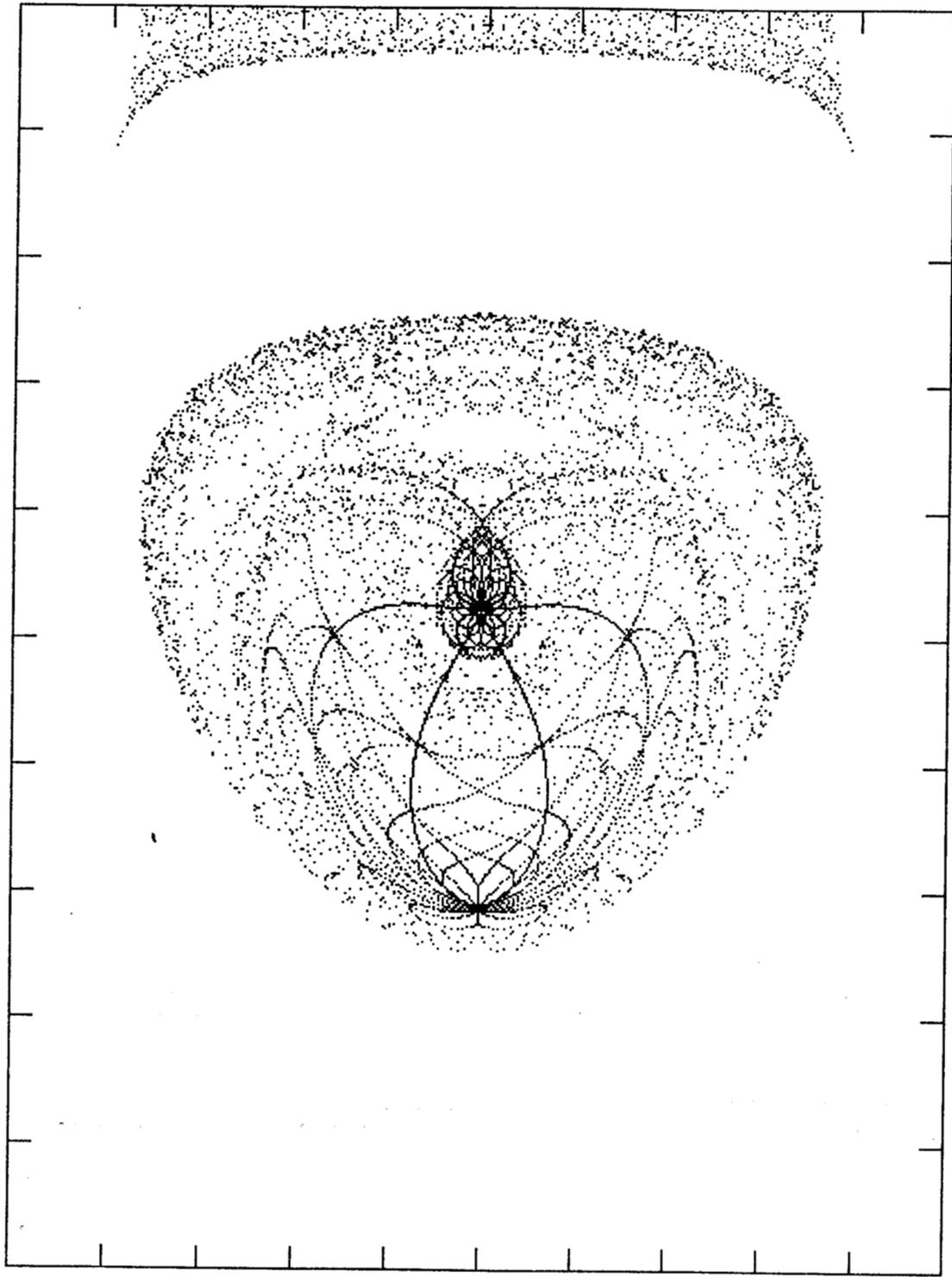
A = 1.5

B = 1.4

$\alpha = 1.2$

Lineas de Simetria

$\Gamma_{-1}, \dots, \Gamma_{+19}$



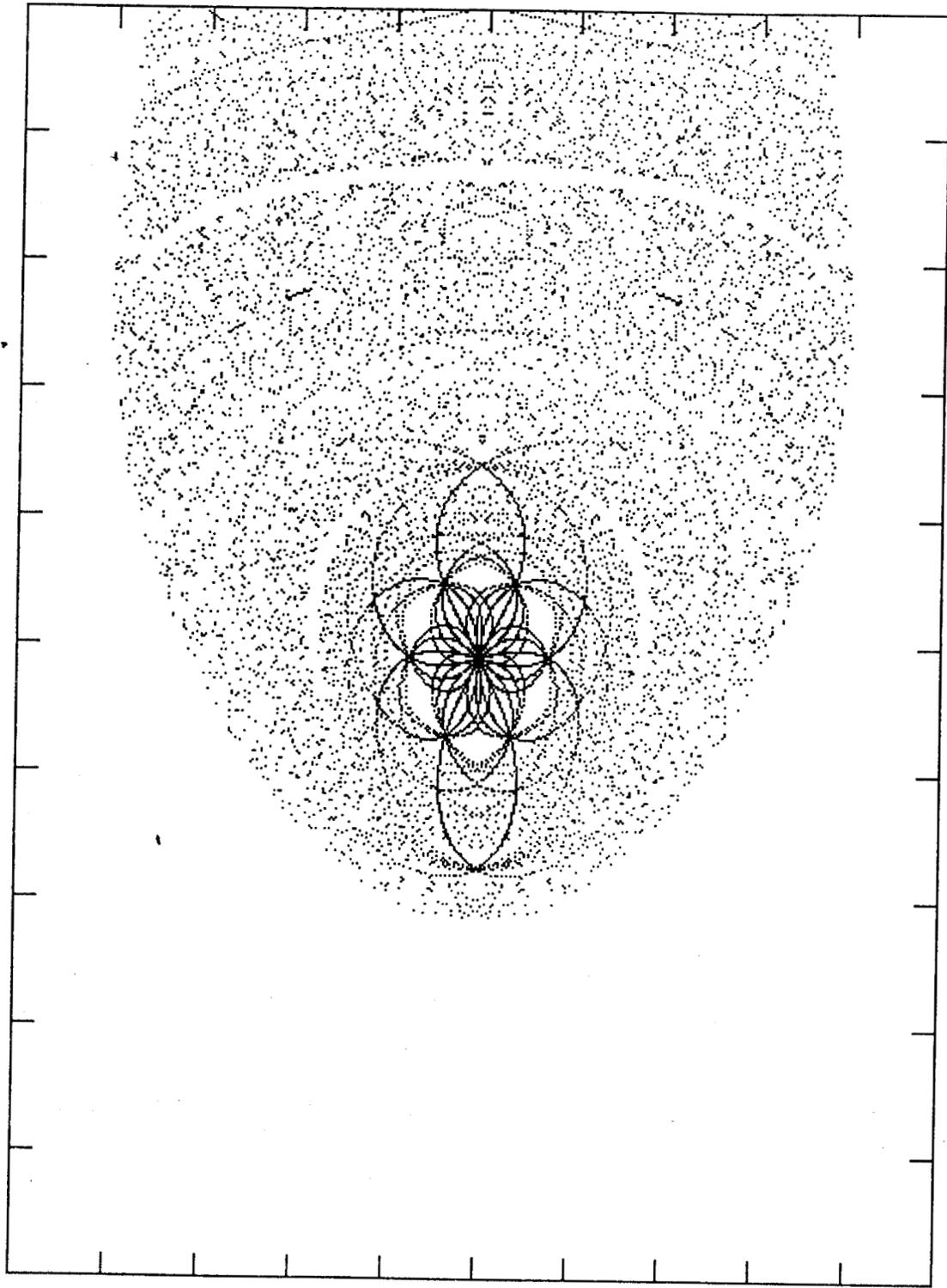
$A=1.5$

$B=1.4$

$\alpha=1.4.$

Lineas de Simetria

$\Gamma_1, \dots, \Gamma_{19}$

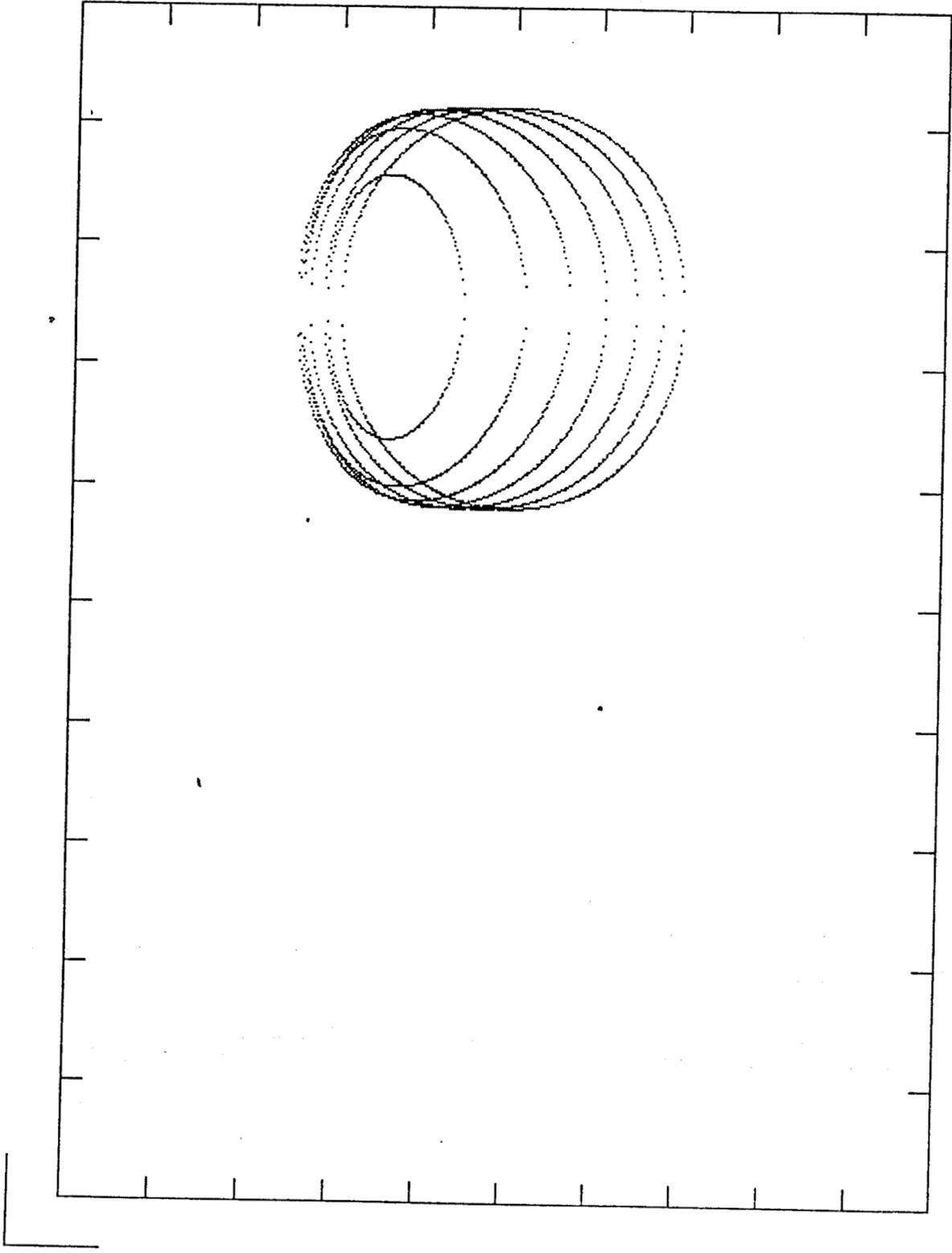


$A = 1.5$

$B = 1.4$

$\alpha = 1.57$

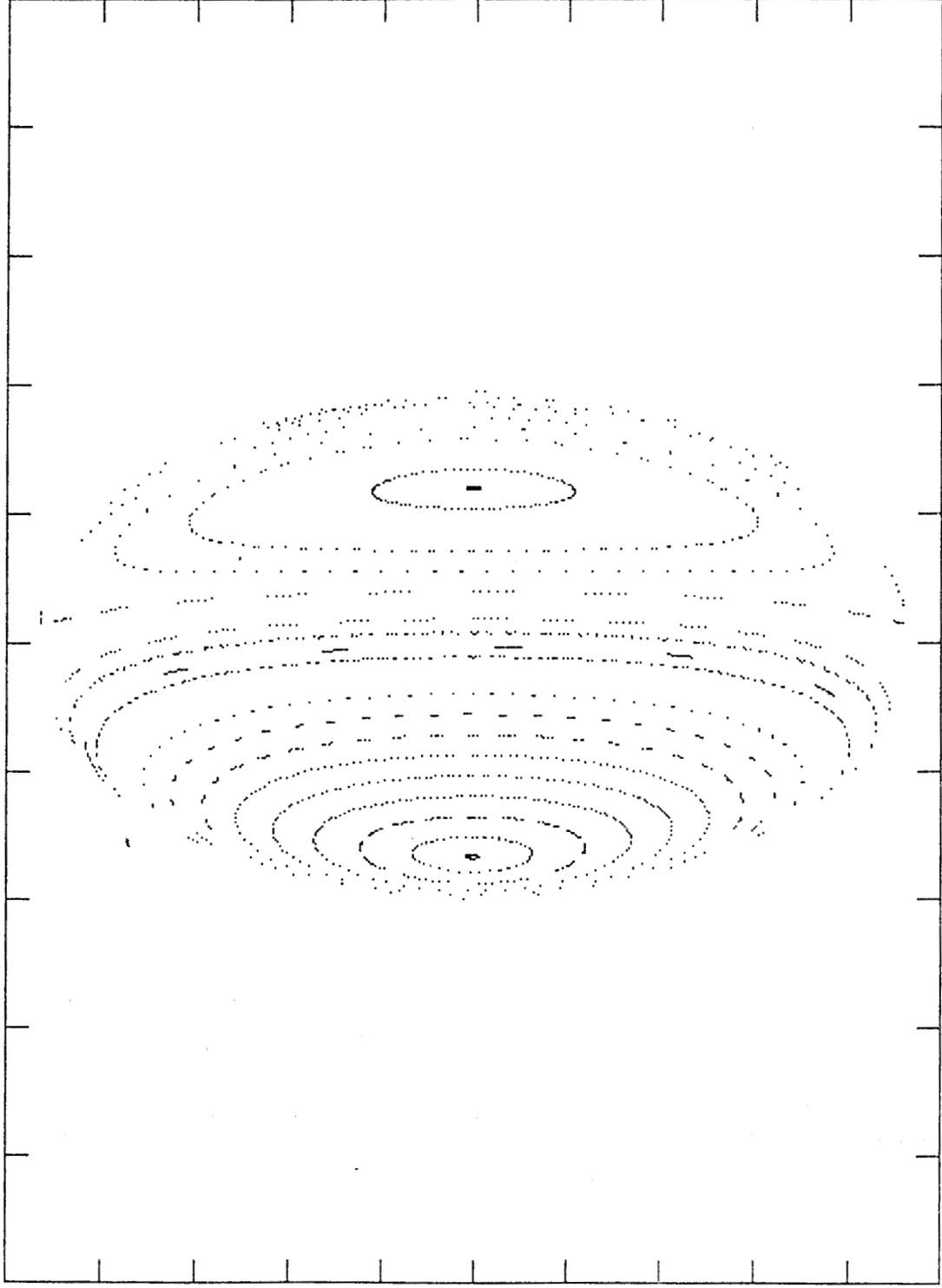
Region de Hill



$A = 1.0$

$B = 3.0$

Mapeo de Poincaré



t_0

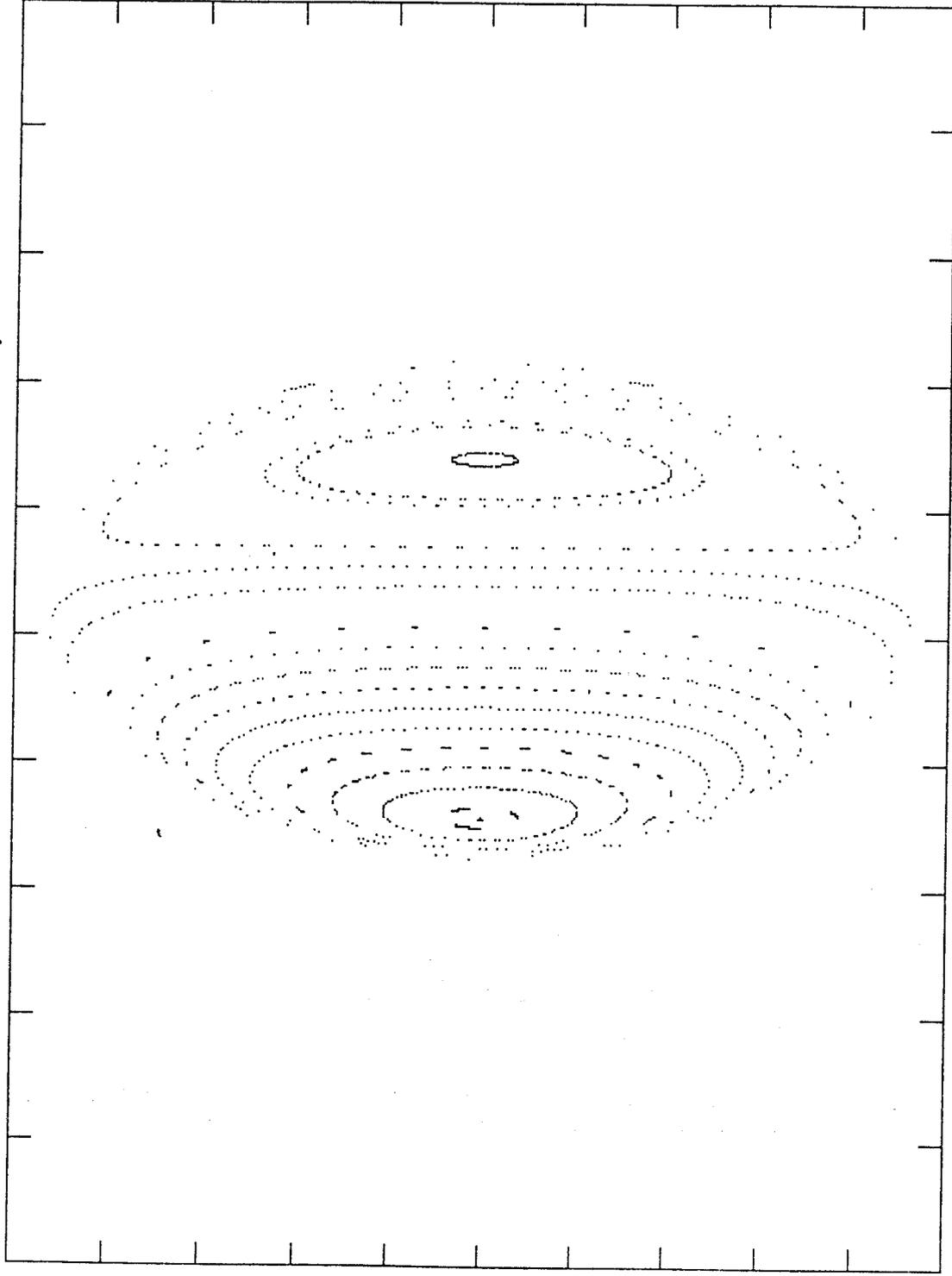
t_0

$$A = 1.0$$

$$B = 3.0$$

$$\nu = 0.0$$

Mapeo de Poincaré

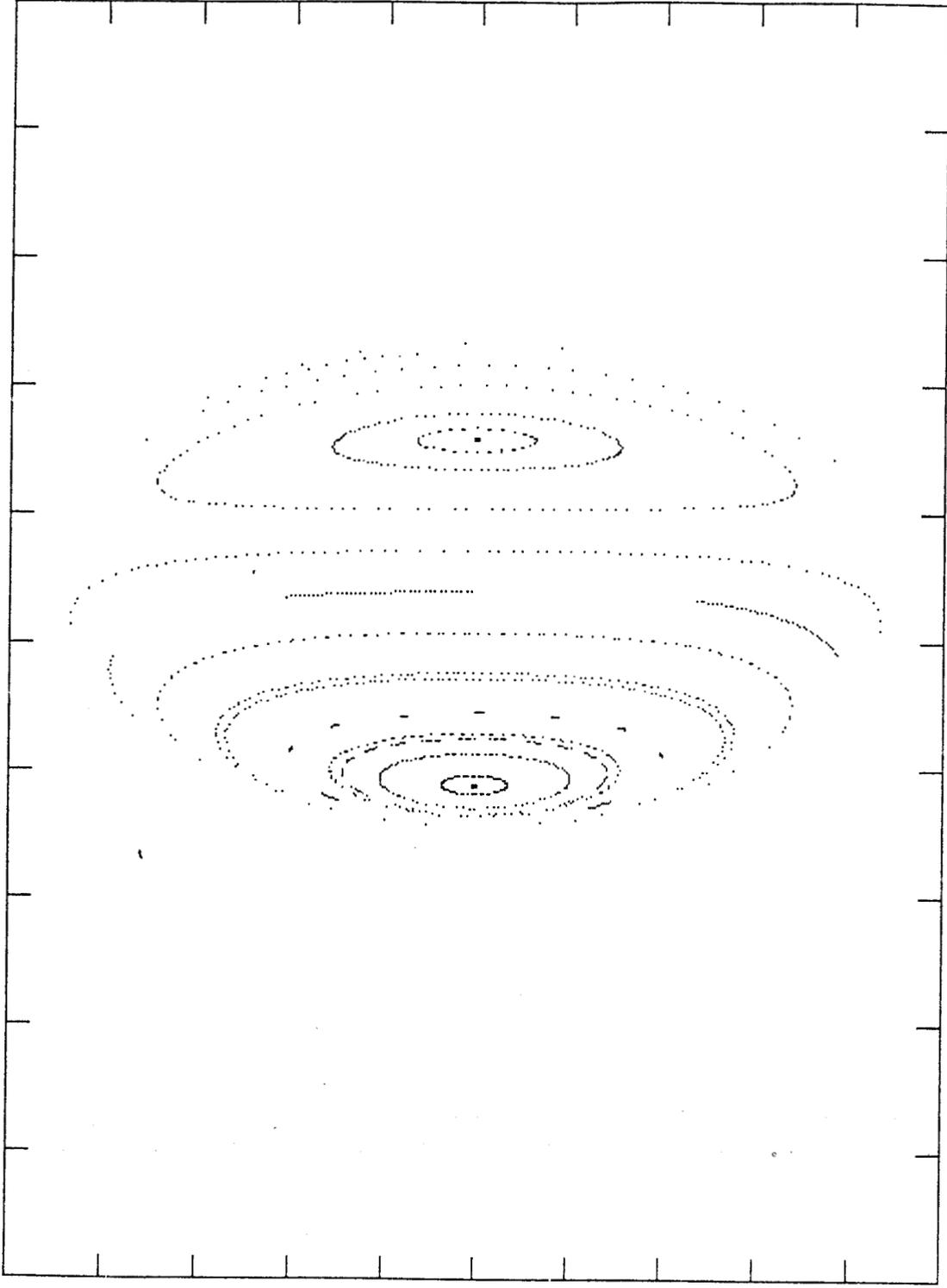


$$A = 1.0$$

$$B = 3.0$$

$$\alpha = 0.2$$

Mapeo de Poincaré

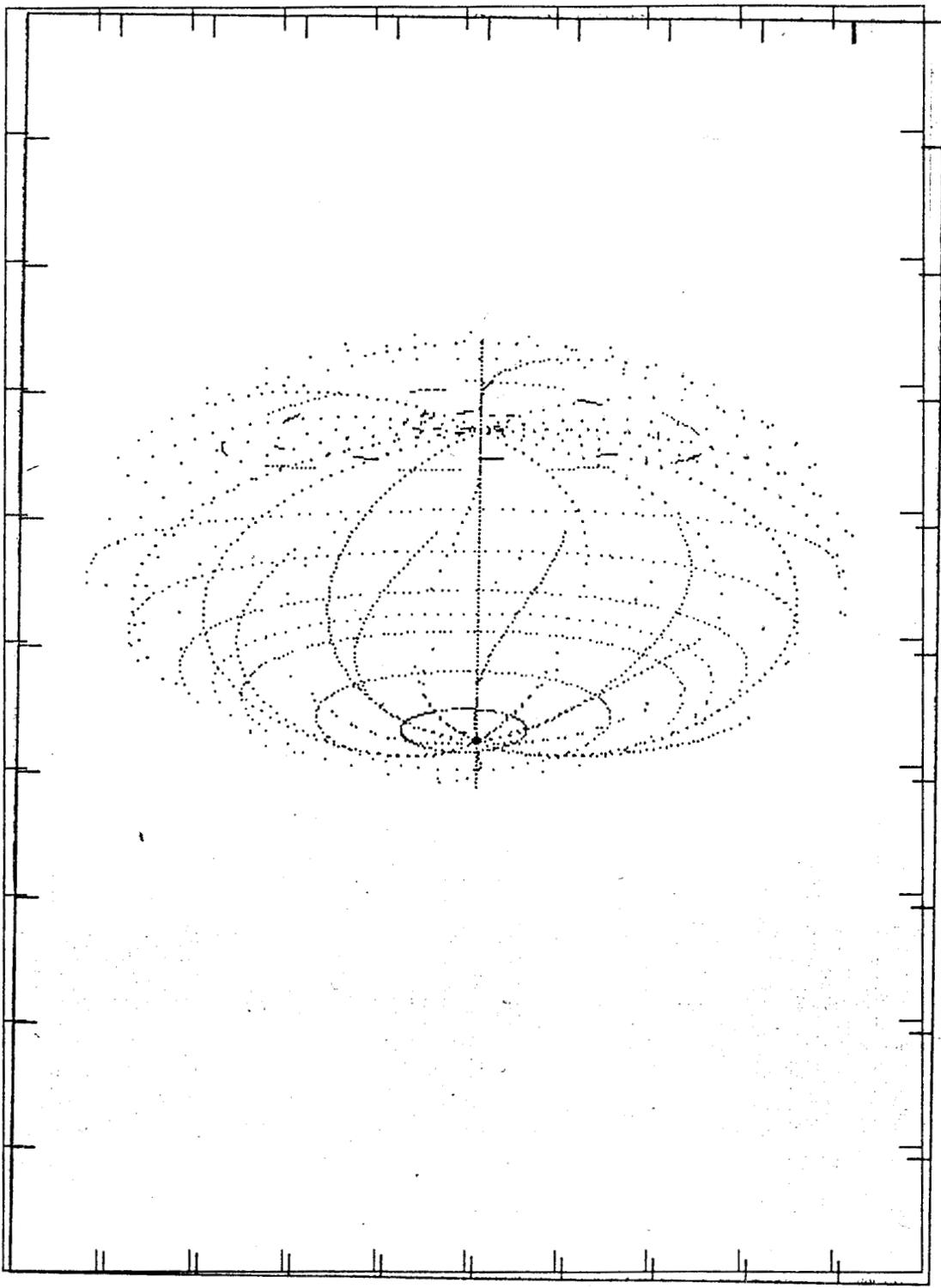


A = 1.0

B = 3.0

$\alpha = 0.4$

Mapeo de Poincaré



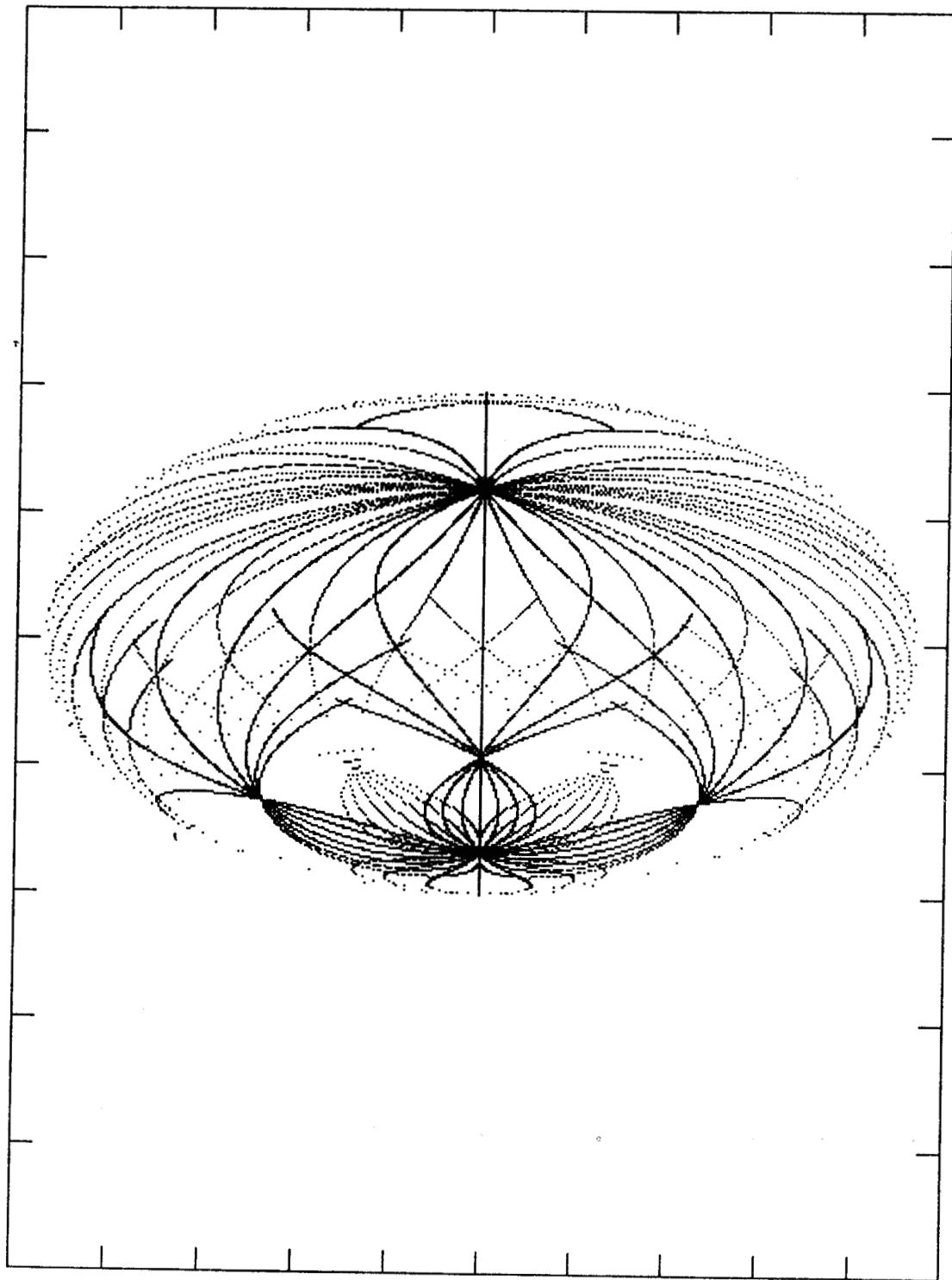
A = 1.0

B = 3.0

$\alpha = 0.6$

Líneas de Simetria

$\Gamma_{-20}, \dots, \Gamma_{20}$



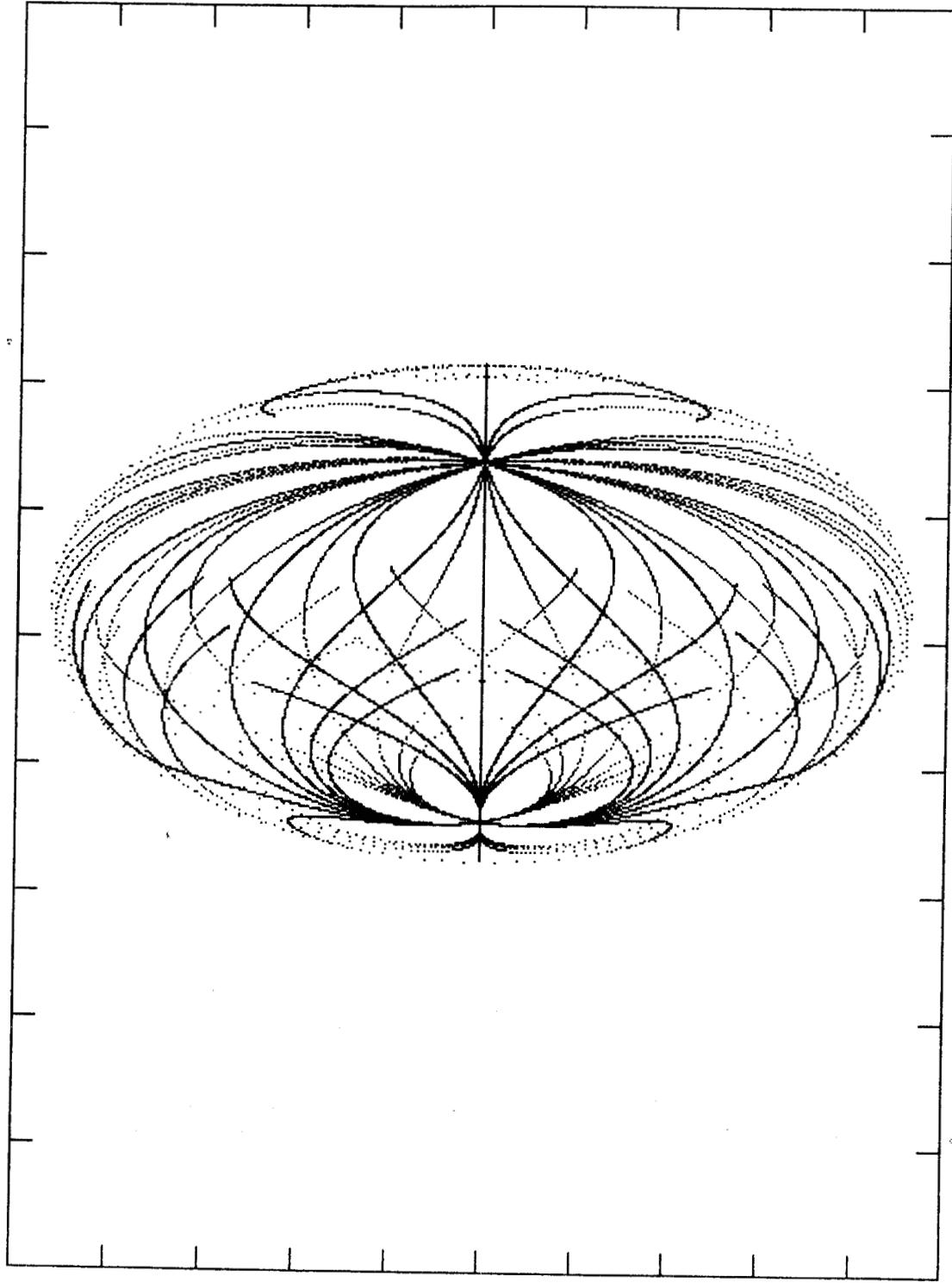
A = 1.0

B = 3.0

$\alpha = 0.0$

Líneas de Simetria

$\Gamma_{-20}, \dots, \Gamma_{20}$



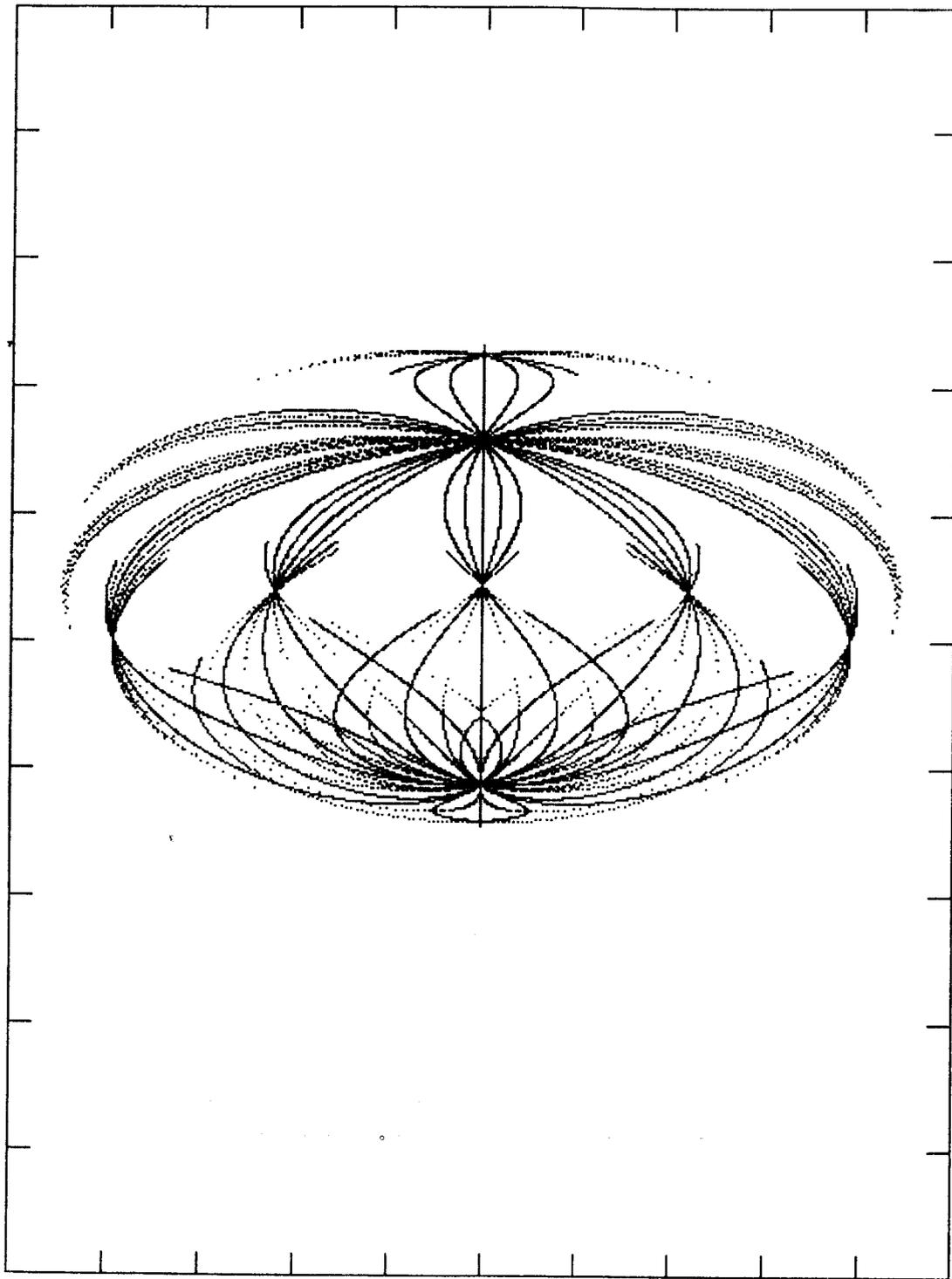
A = 1.0

B = 3.0

α = 0.2

Líneas de Simetria

$\Gamma_{-20}, \dots, \Gamma_{20}$



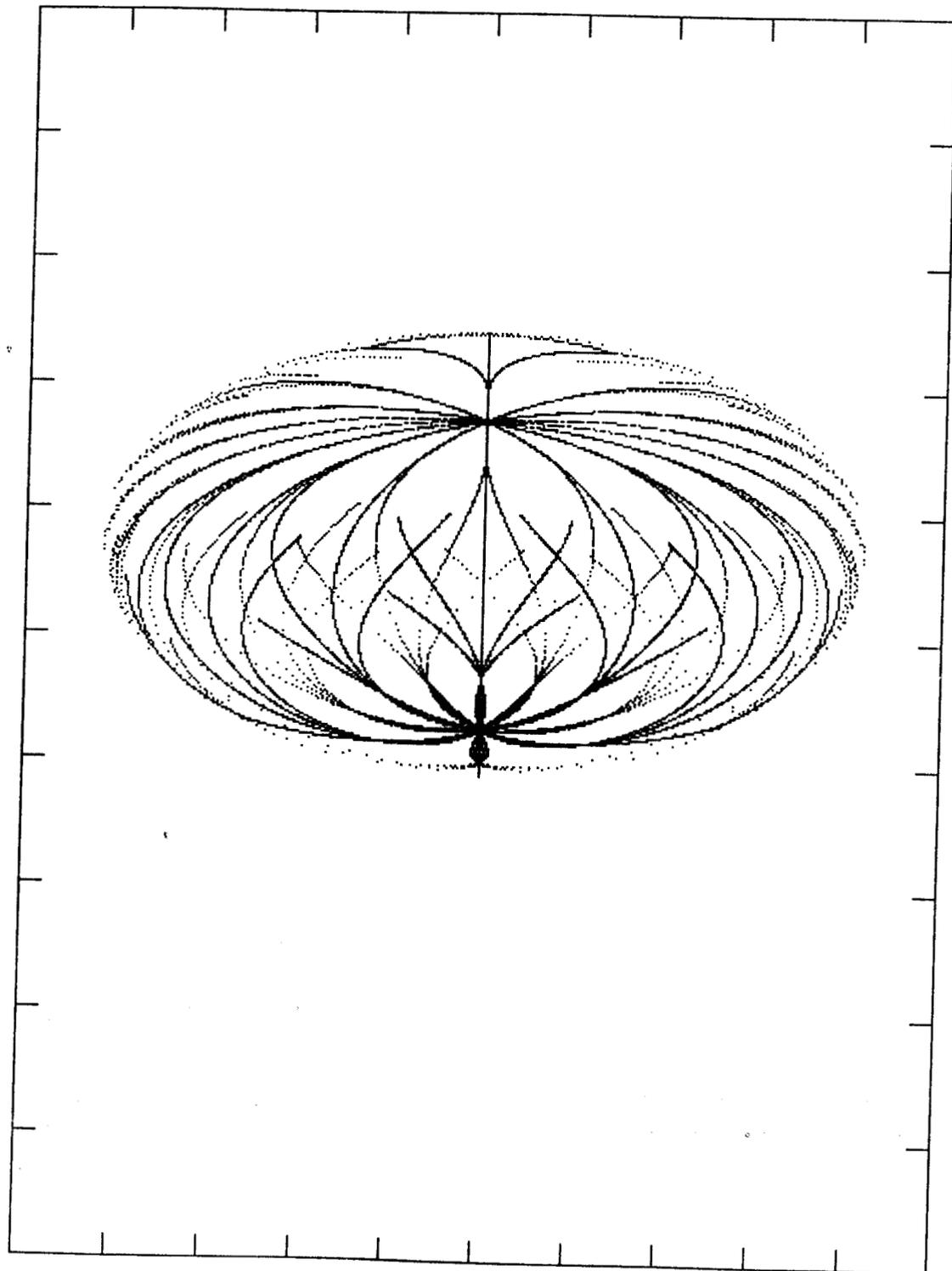
A = 1.0

B = 3.0

$\alpha = 0.4$

Lineas de Simetria

$\Gamma_{-20}, \dots, \Gamma_{20}$



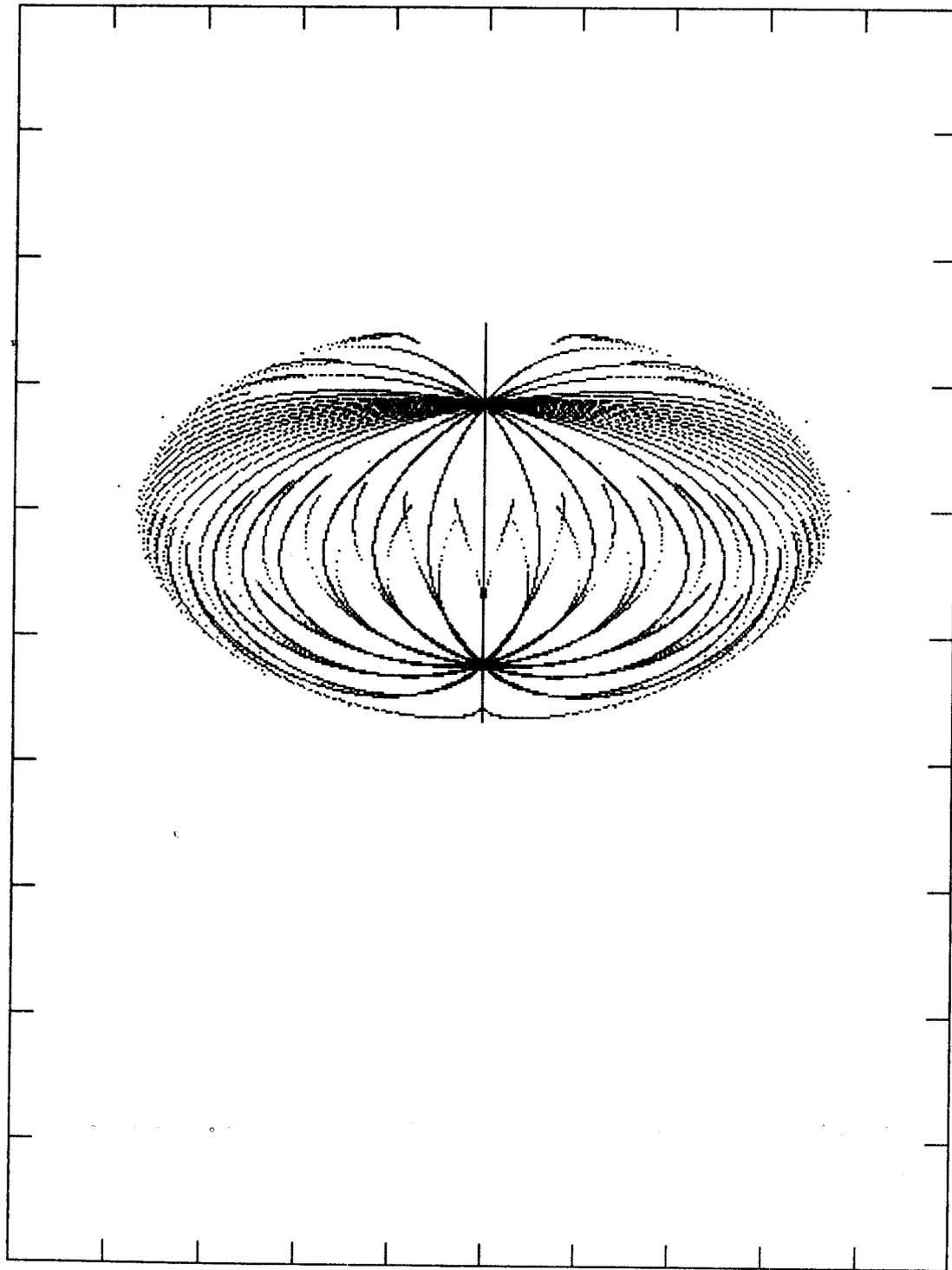
$A = 1.0$

$B = 3.0$

$\alpha = 0.6$

Lineas de Simetria

$\Gamma_{-20}, \dots, \Gamma_{20}$



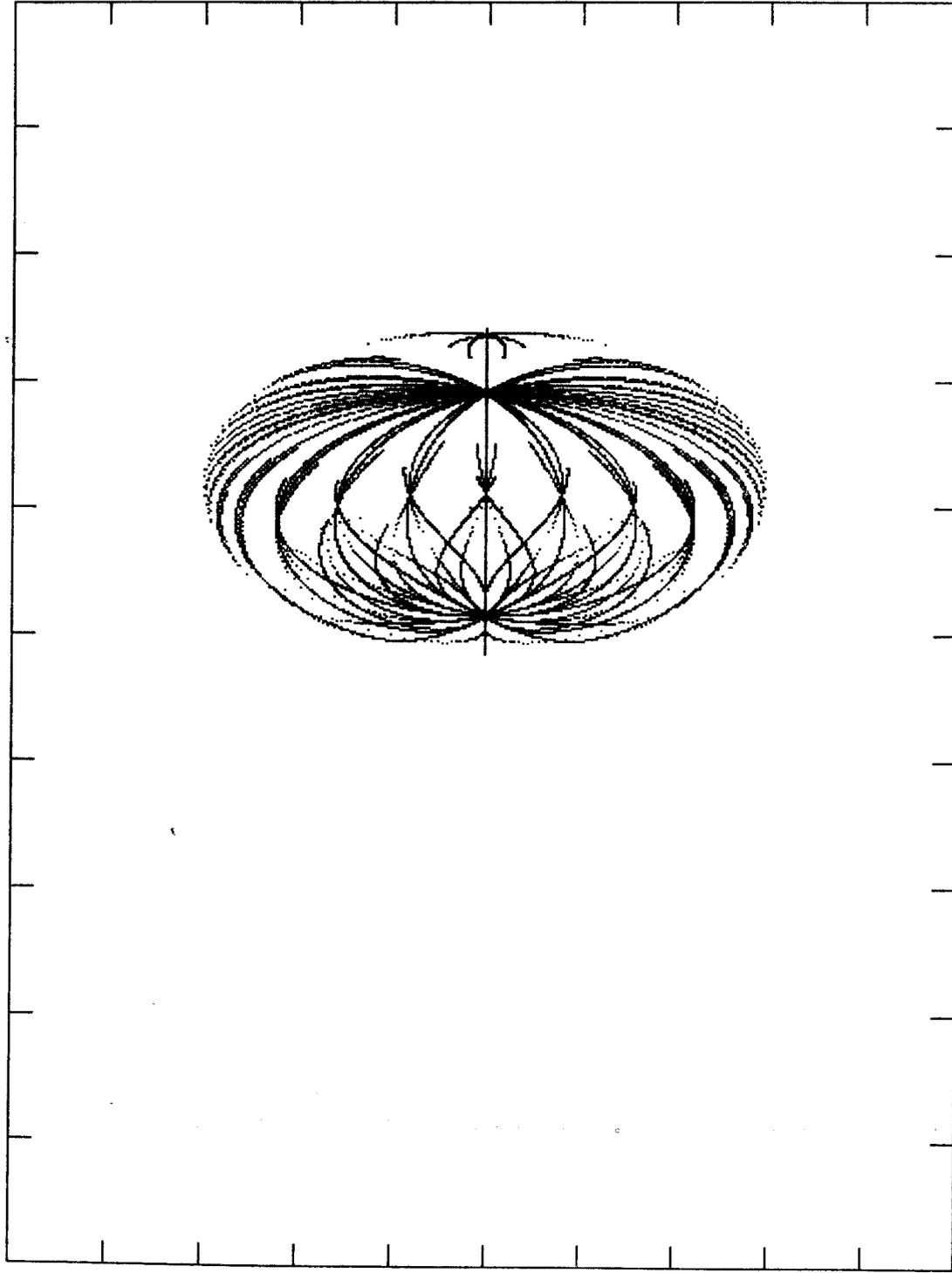
A = 1.0

B = 3.0

$\alpha = 0.8$

Lineas de Simetria

$\Gamma_{-20}, \dots, \Gamma_{20}$



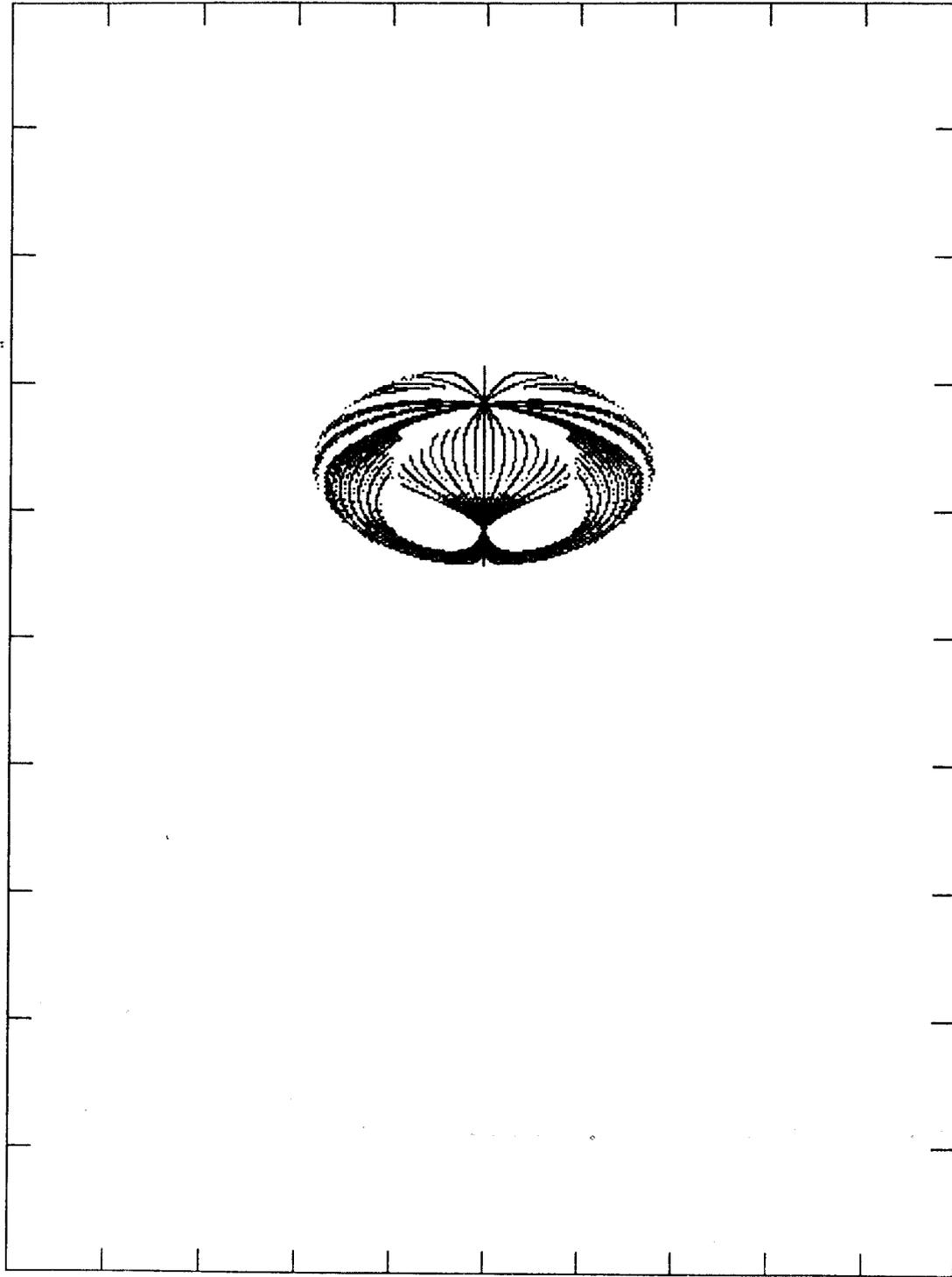
A = 1.0

B = 3.0

$\alpha = 1.0$

Lineas de Simetria

$\Gamma_{-20}, \dots, \Gamma_{20}$



A = 1.0

B = 3.0

$\alpha = 1.2$