

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

SOLUCIONES EXACTAS EN UNIVERSOS DE
FRIEDMANN MULTI-DIMENSIONALES
(UN INTENTO INFLACIONARIO)

TESIS
QUE PRESENTA
ABEL CAMACHO QUINTANA
PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN FÍSICA

México, D.F. Diciembre, 1990

Agradezco al Dr. Octavio Obregón Díaz haber fungido como asesor de esta tesis. Al M. en C. José S. García Díaz agradezco sus valiosos comentarios.

Agradezco el apoyo recibido por el CONACyT, a través del programa nacional de becas de posgrado, sin el cual no hubiera sido posible realizar los estudios de maestría y este trabajo de investigación.

INDICE

1. CAPITULO I. Introducción	1
2. Referencias Capítulo I	10
3. CAPITULO II Soluciones	12
4. Referencias Capítulo II	21
5. CAPITULO III Análisis de las soluciones	22
6. Referencias Capítulo III	28
7. Apéndice A	29
8. Apéndice B	30
9. Apéndice C	31

CAPITULO I

INTRODUCCION

Modelo Standard.

A) Principio Cosmológico.

El propósito de la Cosmología es estudiar las propiedades del universo y en particular tratar de entender su evolución y origen. Como consecuencia de las escalas espaciales en juego, la herramienta fundamental a emplear es una teoría gravitatoria. Por lo tanto, el primer problema que enfrentamos es escoger una teoría gravitatoria. Existen un buen número de datos experimentales [1] que permiten usar a la Teoría de la Relatividad de Einstein como teoría gravitatoria. Es importante mencionar que existen otras teorías [1] (las cuales en algunos límites se reducen a Relatividad General). En nuestro caso usaremos Relatividad General.

El Principio Cosmológico establece que el espacio es homogéneo e isotrópico. Este principio se basa en el Principio de Copérnico, el cual establece el hecho de que no somos observadores privilegiados, ésto es el universo observado desde cualquier punto se ve igual que desde la Tierra. Esta hipótesis, primero introducida como simplificación matemática, ya ha sido confirmada en cierta medida mediante observaciones. Mencionaremos brevemente algunas de ellas:

a) En 1965 se detectó una radiación de fondo [2] la cual no presenta anisotropía (la única detectada sin ninguna ambigüedad es una anisotropía dipolar, la cual puede entenderse como consecuencia de la velocidad del Sistema Solar respecto al marco de referencia en el cual la radiación en cuestión es perfectamente isotrópica). La falta de anisotropía en correlación con la geometría de la Vía Láctea insinúa que es una radiación de origen extragaláctico, la gran isotropía sobre escalas angulares pequeñas prueba su origen extragaláctico y a su vez prueba que la última superficie dispersora era extremadamente homogénea. Este hecho nos obliga a excluir todos los modelos cosmológicos [3] anisotrópicos

excepto aquellos en los cuales la anisotropía sea una perturbación [4].

b) La abundancia de elementos ligeros D, He, Li con la ayuda de un modelo de evolución anisotrópico permite limitar la anisotropía a gran escala en menos de una parte en 10^8 [5].

B) Consecuencias del Principio Cosmológico.

Es posible probar [6] que el Principio Cosmológico implica la existencia de un conjunto de coordenadas (r, θ, ϕ) en las cuales la métrica del espacio-tiempo tenga la forma:

$$d\tau^2 = -dt^2 + R(t)^2(dr^2/(1 - kr^2) + r^2 \sin^2(\theta)d\phi^2), \quad (1.1)$$

donde $R(t)$ es el llamado factor de escala y k una constante (la cual mediante una elección adecuada de unidades puede tomar los valores 0, 1, -1) denominada curvatura y representa el signo de la curvatura intrínseca. La única variable dinámica a determinar es $R(t)$. Este tipo de métrica se conoce como Friedmann-Robertson-Walker (F-R-W).

Las ecuaciones de Einstein son

$$3(\ddot{R}/R) = -4\pi G(\rho + 3p), \quad (1.2)$$

$$\ddot{R}/R + 2(\dot{R}/R)^2 + 2k/R^2 = 4\pi G(\rho - p), \quad (1.3)$$

donde el tensor de energía-momento usado es de fluido perfecto

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (1.4)$$

de (1.2) y (1.3) se obtiene el llamado parámetro de Hubble

$$H^2 = (\dot{R}/R)^2 = (8\pi G/3)\rho - k/R^2, \quad (1.5)$$

Esta expresión puede reescribirse como

$$k/R^2 = H^2(\Omega - 1), \quad (1.6)$$

siendo

$$\Omega = \rho(t)/\rho_c(t)$$

el parámetro cosmológico de densidad $\rho_c(t) = 3H^2/(8\pi G)$

Otro parámetro de importancia es el llamado parámetro de desaceleración

$$q(t) = \ddot{R}(t)/(R(t)H(t)^2), \quad (1.7)$$

En el caso en el cual $\rho + p > 0$ se tiene que $\ddot{R}/R < 0$. Por definición $R > 0$, y puesto que vemos corrimiento al rojo y no corrimiento al azul, $\dot{R}/R > 0$. Esto nos permite concluir que $R(t)$ es una función creciente de t y que $R(t)$ corta al eje t en cierto tiempo t finito en pasado. El tiempo

$$t = 0$$

se define como

$$R(t = 0) = 0$$

Empleando las ecuaciones de Einstein y las identidades de Bianchi [6] se desprende que

$$d/dR(\rho R^3) = -3pR^2, \quad (1.8)$$

Esta última expresión implica que ρ decrece con R creciente al menos como R^{-3} (si $p > 0$) y por consiguiente empleando la definición de la constante de Hubble se obtiene

$$\dot{R}^2 \rightarrow \frac{1}{R} - k$$

si $R \rightarrow \infty$.

Con este resultado podemos saber: a) Si $k = -1$, entonces $R(t) \rightarrow t$ conforme $t \rightarrow \infty$ y por lo tanto el universo se expande para siempre. b) Si $k = 0$, $R(t) \rightarrow t^a$, $a < 1$ el universo también se expande para siempre pero lo hace más lentamente que en el caso $k = -1$. c) Si $k = 1$, en el tiempo que se satisface la ecuación

$$8\pi G/3 - k/R^2 = 0$$

se tendrá que la expansión se detiene, $\dot{R} = 0$ y a partir de este momento el universo se recolapsa $\ddot{R} < 0$ y llega a una singularidad en un tiempo finito. De lo anterior es claro que la evolución del universo está determinada por la geometría. Si $k = 1$ el universo es cerrado, $k = 0$ es un universo plano finalmente el caso $k = -1$ da un modelo abierto.

Puede verse que como consecuencia de una métrica tipo F-R-W se tiene la predicción de un estado de muy alta densidad y temperatura (esta última afirmación es consecuencia de tener para modelos F-R-W [7] $t \approx 1/(g_{eff}(T)^2(K_b T)^2)$ donde K_b es la constante de Boltzmann y $g_{eff}(T)$ es el número efectivo de grados libertad a la temperatura T . La evidencia experimental sobre la existencia del mencionado estado: a) El corrimiento al rojo e isotropía de las galaxias. b) El espectro e isotropía de la radiación cósmica de fondo.

El descubrimiento de Hubble de que las galaxias distantes son: a) Muy semejantes a la Vía Láctea.

b) Isotrópicas en su distribución a gran escala sobre el cielo.

c) Caracterizadas por una relación casi lineal entre distancia-corrimento al rojo.

Fué confirmado por observaciones astronómicas subsecuentes. A pesar de la interpretación directa de que el corrimiento al rojo indica expansión, la creación de materia podría eludir la existencia de altas densidades en el pasado. Pero esta situación cambió dramáticamente con el descubrimiento en 1965 [2] de la radiación cósmica de fondo. La

única fuente factible es un gas suficientemente caliente para ser ionizado. Sin embargo, debemos notar que ésto da evidencia experimental sobre densidades de materia $\approx 10^9$ veces mayor que la densidad actual puesto que el plasma se combina en átomos a una temperatura de $\approx 4000K$.

Esto nos permite formular el modelo de BIG-BANG del universo inicial, el cual está definido mediante las suposiciones:

- 1) El universo inicial era aproximadamente uniforme e isotrópico sobre todas las escalas macroscópicas.
- 2) La interacción gravitacional está descrita por la Teoría de la Relatividad General.
- 3) El número bariónico del universo es positivo.
- 4) El número de leptones del universo es menor en valor absoluto que el número de fotones.

La evidencia que apoya a las dos primeras suposiciones ya ha sido mencionada. Los argumentos que apoyan a la tercera suposición ha sido resumidos por Steigman [8]. En el caso de que se violase el cuarto punto, se ha probado [9] que los neutrinos degenerados producirían una densidad demasiado alta para concordar con los límites de la deasaceleración del universo.

Procedamos a ver como un modelo cosmológico tipo F-R-W explica el corrimiento al rojo detectado experimentalmente. Consideremos una onda electromagnética emitida al tiempo t y recibida en T . Si el detector coincide con el origen de un sistema cómovil de coordenadas se obtiene que:

$$\int_0^r dr / \sqrt{1 - kr^2} = \int_t^T dt / R(t)$$

siendo r la coordenada radial del punto de emisión. La misma igualdad se cumple para un foton emitido en $\tau = t + \delta t$ y detectada al tiempo $\eta = t' + \delta t'$

$$\int_0^r dr / \sqrt{1 - kr^2} = \int_\tau^\eta dt / R(t), \quad (1.9)$$

si $\delta\tau = 1/\nu$ es el período de las ondas electromagnéticas al ser emitidas, entonces $\delta T = 1/\nu_0$ será su período en el detector. Las expresiones (1.8) y (1.9) implican

$$1 + z = \nu_e/\nu_0 = R(T)/R(t), \quad (1.10)$$

Donde z es el corrimiento espectral. Puesto que hasta el momento solo se han detectado corrimientos al rojo $z < 0$ lo cual implica que el universo está en expansión $R(T) > R(t)$

Cuando los puntos de emisión t detección estan muy cerca uno del otro $T \rightarrow t, r \rightarrow 0$ y $z \ll 0$. En este caso

$$1 + z \rightarrow 1 + r \times \dot{R}(T) = 1 + v_r, \quad (1.11)$$

donde v_r es la velocidad de recesión de la fuente de ondas electromagnéticas. Es decir, el corrimiento al rojo cosmológico puede entenderse como un efecto Doppler.

Puede probarse [10] que en un universo tipo F-R-W. con un tensor de energía momento de radiación ($p = \rho/3$) el espectro de la radiación cósmica de fondo satisface

$$\rho(\nu)d\nu = 16\pi^2\nu^3/(\exp(2\pi/(K_b T_0)) - 1)), \quad (1.12)$$

es decir se tiene un cuerpo negro a temperatura T_0 .

Los resultados experimentales [11,12] muestran que $T \approx 2.75K$

C)Problemas del Modelo Standard.

Como se ha visto en los párrafos anteriores, el universo está descrito con un buen grado de éxito mediante el modelo standard (para tiempos hasta del orden de $t \approx 10^{-43}$ sec, para tiempos menores los efectos cuánticos no pueden despreciarse [13]). Sin embargo existe varios hechos cosmológicos que este modelo no ha podido explicar.

I) "Flatness Problem".

Este problema está relacionado [14,15] con el hecho experimental de que la densidad de energía actual [16] es muy cercana a la densidad crítica.

$$0.01 < \rho_p / \rho_c < 2, \quad (1.13)$$

donde ρ_p y ρ_c son las densidades actual y crítica respectivamente.

De la definición de la constante de Hubble y de la hipótesis de expansión adiabática ($R \times T = cte.$) se concluye

$$|\rho - \rho_c| / \rho = 90 / \pi^2 (|k| / (RT)^2) (1 / (g_{eff} T^2)), \quad (1.14)$$

Empleando conservación de Entropía

$$|\rho - \rho_c| / \rho = (90 / \pi^2) [2\pi^2 / 45]^{2/3} g_{eff}^{-1/3} S_0^{-2/3} T^2, \quad (1.15)$$

donde S_0 es la entropía total,

Esto nos permite escribir [10]

$$|\rho - \rho_c| / \rho < 10^{-58}, \quad (1.16)$$

El problema de entender porque el universo fue creado casi plano se relaciona con el hecho de entender porque el universo es tan viejo [15].

II) Problema del horizonte. El problema del horizonte [6,15] puede resumirse en la inconsistencia de observar una radiación cósmica de fondo homogénea, pero la región en la cual se observa esta radiación es muchos órdenes de magnitud mayor que la región que pudo haber estado en contacto causal.

Consideremos un observador colocado en $r = 0$, en cierto tiempo t el observador podrá recibir señales de puntos cuyas coordenadas $r_1 > r$, en donde r_1 es la coordenada radial desde la cual señales luminosas emitidas en t_1 llegan a $r = 0$ al tiempo t .

La distancia física propia de este horizonte es

$$d_h = R(t) \times \int_0^t dt'/R(t'), \quad (1.17)$$

Si $R(t) \approx t^n$ entonces $d_h(t) = t/|1 - n| \approx H^{-1}$

Lo que se desea es determinar el volumen de la región que contuvo al volumen observable actualmente, denominándolo $d(t)$ se tiene que

$$(d_h(t_{pl})/d(t_{pl}))^3 \approx 10^{-89}, \quad (1.18)$$

donde t_{pl} es el tiempo de Planck. Esto implica que el universo inicial consistía de al menos $\approx 10^{83}$ regiones causalmente desconectadas.

D) Intentos de solución a los problemas anteriores.

I) Universos inflacionarios.

En 1980 [15] Guth propuso un modelo que permite resolver los dos problemas antes mencionados. En este modelo se introduce una transición de fase la cual genera producción de Entropía como consecuencia de la liberación del calor latente asociado a dicha transición. Esto permite soluciones de la forma $R \sim e^t$, lo cual permite resolver los problemas ya mencionados.

II) Teorías de Kaluza Klein.

En 1921 [17] Kaluza consiguió unificar la interacción gravitacional y la electromagnética mediante la hipótesis de un espacio-tiempo 5-dimensional. Siguiendo esta idea se han propuesto [18,19] modelos cosmológicos en los cuales el universo es 5-dimensional y la dimensión extra es topológicamente un círculo y conforme t crece esta dimensión tiende

a una constante . Es de importancia comentar que se tienen problemas como el llamado *crack of doom* [19,20] en el cual la dimensión extra alcanza su singularidad antes de que las dimensiones usuales (el espacio usual) lleguen a tener una singularidad. Sin embargo, la importancia de esta teoría respecto a la solución de algunos de los problemas cosmológicos ya señalados radica en tener producción de entropía en el espacio usual [21,22,23] como consecuencia de la compactificación de las dimensiones extras. Este problema está sin resolver por completo, ya que el intento más exitoso en este sentido [22] implica que el número de dimensiones extras sea del orden de 40. Por el número de dimensiones con el cual se ha trabajado, en supergravedad (11) dimensiones desearíamos poder tener un número menor de dimensiones extras. Es importante preguntarnos si la realidad física realmente tiene dimensiones extras como se ha propuesto ó solamente es una herramienta matemática. Se ha sugerido [24] que variaciones temporales de *constantes* fundamentales podría ser evidencia a favor de la existencia de dimensiones extras.

En los siguientes capítulos se tratará de entender mejor el papel que juega la compactificación de las dimensiones extras en la posible solución de los problemas mencionados anteriormente.

REFERENCIAS

CAPITULO I

- 1) C.M.Will:Theory and Experimentation in Gravitation Physics (Cambridge University Press,1981).
- 2) A. A. Penzia, and R. W. Wilson. Ap. J. 142 (1965) 419
- 3) M. A. H. Mc Callum, and G. F. R. Ellis. Comun. Math. Phys.19 (1976) 31 .
- 4) M. P. Ryan, and L. C. Shepley. Homogeneous Relativistic Cosmologies.(P rinceton University Press,1975)
- 5) J. D. Barrow. M. N. R. A. S. 175 (1976) 376.
- 6) S. Wienberg. Gravitation and Cosmology (J. Wiley, New York,1972).
- 7) J. Yang, M. S. Turner, G. Steigman, D. N. Schramm, and K. A. Olive. Ap . J. 281 (1984)493.
- 8) G. Steigman. Ann. Rev. Astron. Astrophys. 14 (1976) 339.
- 9) R. V. Wagoner, W. A. Fowler, and F. Hoyle. Astrophys. J. 148 (1967) 3.
- 10) R. Domínguez, and M. Quirós. An introduction to Cosmology and Particle Physics. (World Scientific,1988).
- 11) J. B. Peterson, P. L. Richards, and T. Timusk. Phys. Rev. Lett. 55 (1 985) 232.
- 12) G. F. Smoot. Ap. J. Lett. 291 (1985) L23
- 13) A. K. Raychaudhuri. Theoretical Cosmology.(Oxford Press,1979).
- 14) R. H. Dicke., and P. J. E. Peebles. General Relativity:An Einstein Ce ntenarial Survey.(Cambridge Press,1979).
- 15) A. H. Guth. Phys. Rev. D23 (1981) 347.
- 16) J. Oort. Astron. Astrophys. 7 (1970) 381 and 405.
- 17) Th. Kaluza. Setzungber Preus. Akad. Wiss. Phys
- 18) A. Chodos and S. Detweiler. Phys. Rev. D21,2167 (1980)
- 19) R.A. Matzner, and A. Mezzacappa. Phys. Rev. D32,3114 (1985).

- 20) M. Rosenbaum, M. Ryan., and L. Urrutia. Phys. Rev. D36,1032 (1987).
- 21) S. M. Barr. and L. S. Brown. Phys. Rev.D29,2779 (1984).
- 22) R. B. Abbott,S. M. Barr., and S. D. Ellis. Phys. Rev.D30,720 (1984).
- 23) E. W. Kolb,D. Lindley, and D. Seckel. Phys. Rev.D30,1205 (1984).
- 24) W. J. Marciano. Phys. Rev. Lett. 52,489 (1984).

CAPITULO II

SOLUCIONES

A) d-dimensiones no compactas y D-dimensiones compactas.

Consideremos un modelo cosmológico con d dimensiones no compactas y D dimensiones compactas. Supondremos que la curvatura de estos dos espacios ($k_d = 0, k_D = 0$) es cero. Como ya ha sido señalado (1,2) ésta es una elección poco natural y trae consigo el llamado *flatness problem*. La razón de esta de esta suposición es, como se verá posteriormente poder simplificar matemáticamente el problema.

La métrica que usaremos es de la forma:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 g_{mn}(x) dx^m dx^n + \sigma^2(t) g_{\nu\mu}(y) dy^\nu dy^\mu$$

$$m, n = 1, 2, 3, \dots, d; \nu, \mu = d+1, d+2, d+3, \dots, d+D$$

$$g_{mn}(x) \text{ y } g_{\nu\mu}(y)$$

son las métricas para los espacios d y D máximamente simétricos y

$$a(t), \sigma(t)$$

son los factores de escala respectivos. Esta es una generalización del modelo *Friedmann-Robertson-Walker* (F-R-W).

El tensor de energía-momento lo tomaremos de la forma siguiente:

$$T_{00} = \rho$$

$$T_{mn} = -P_a \delta_{mn}; m, n = 1, 2, 3, \dots, d$$

$$T_{\nu\mu} = -P_b \delta_{\nu\mu}; \nu, \mu = d+1, d+2, d+3, \dots, d+D$$

Las ecuaciones de campo son para este caso (3,4)

$$\frac{1}{2}d(d-1)(\dot{a}/a)^2 + \frac{1}{2}(D-1)(\dot{\sigma}/\sigma)^2 + dD(\dot{a}/a)(\dot{\sigma}/\sigma) = 8\pi\rho = G_{00}, \quad (2.1)$$

$$(d-1)(\ddot{a}/a) + D(\ddot{\sigma}/\sigma) + \frac{1}{2}(d-1)(d-2)(\dot{a}/a)^2 + D(d-1)(\dot{a}/a)(\dot{\sigma}/\sigma) + \frac{1}{2}D(D-1)(\dot{\sigma}/\sigma)^2 = -8\pi P_a = G_{ii} \quad (2.2)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, d,$$

$$d(\ddot{a}/a) + d(d-1)(\dot{a}/a)^2 + (D-1)(\ddot{\sigma}/\sigma) + \frac{1}{2}(D-1)(D-2)(\dot{\sigma}/\sigma)^2 + d(D-1)(\dot{a}/a)(\dot{\sigma}/\sigma) = -8\pi P_b = G_{jj}; \quad j = d+1, d+2, d+3, \dots, d+D, \quad (2.3)$$

La ecuación de conservación de Energía es

$$\dot{\rho} + (\dot{a}/a)(\rho + P_a)d + (\dot{\sigma}/\sigma)(\rho + P_b)D = 0 \quad (2.4)$$

Consideremos como hipótesis

$$P_a = \alpha\rho, P_b = \beta\rho \quad (2.5)$$

Donde $\alpha, \beta \in R$.

Introduciendo (2.5) en las ecuaciones (2.1) -(2.3) se tiene

$$d(d-1)(\dot{a}/a)^2 + D(D-1)(\dot{\sigma}/\sigma)^2 + 2dD(\dot{a}/a)(\dot{\sigma}/\sigma) = 16\pi\rho \quad (2.6)$$

$$(\ddot{a}/a) + (d-1)(\dot{a}/a)^2 + D(\dot{a}/a)(\dot{\sigma}/\sigma) = 16\pi A\rho \quad (2.7)$$

$$(\ddot{\sigma}/\sigma) + (D-1)(\dot{\sigma}/\sigma)^2 + d(\dot{a}/a)(\dot{\sigma}/\sigma) = 16\pi B\rho \quad (2.8)$$

En donde hemos hecho las siguientes definiciones $N = d + D, A = \frac{1+D(\alpha-\beta)-\alpha}{2(N-1)}, B = \frac{1+d(\beta-\alpha)-\beta}{2(N-1)}$

Sea nuestro *ansatz*

$$a(t) = t^m, m > 0 \quad (2.9)$$

Sustituyendo (2.9) en las ecuaciones (2.6)-(2.8)

$$\frac{1}{t^2}d(d-1)m^2 + D(D-1)(\dot{\sigma}/\sigma)^2 + \frac{1}{t}2dDm(\dot{\sigma}/\sigma) = 16\pi\rho \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{t^2}m(m-1) + \frac{1}{t^2}(d-1)m^2 + \frac{1}{t}(\dot{\sigma}/\sigma)Dm = 16\pi\rho \quad (2.11)$$

$$(\ddot{\sigma}/\sigma) + (D-1)(\dot{\sigma}/\sigma)^2 + \frac{dm}{t}(\dot{\sigma}/\sigma) = 16\pi B\rho \quad (2.12)$$

La ecuación de conservación de Energía se reescribe como

$$\rho = K a^{-d(1+\alpha)} \sigma^{-D(1+\beta)} \quad (2.13)$$

K una constante

Multiplicando (2.10) por A y restando el resultado a (2.11)

$$\frac{1}{t^2}[dm^2 - m(1 + A[d^2 - d])] + \frac{1}{t}Dm(1 - 2d)(\dot{\sigma}/\sigma) - AD(D-1)(\dot{\sigma}/\sigma)^2 = 0 \quad (2.14)$$

Restando a (2.12) β veces (2.10)

$$(\ddot{\sigma}/\sigma) + (D-1)(1 - BD)(\dot{\sigma}/\sigma)^2 + \frac{1}{t}(1 - 2BD)dm(\dot{\sigma}/\sigma) = 0 \quad (2.15)$$

Propongamos a $\sigma(t)$ de la forma

$$\sigma(t) \sim t^{-n} \quad (2.16)$$

Podemos entender este *ansatz* notando que en el caso $A = 0$ la ecuación (2.11) sugiere buscar $\sigma(t) \sim t^{-n}$

Con esta suposición, las expresiones (2.14) y (2.15) se reescriben como

$$[dm^2 - m[1 + Ad(d-1)]] + (2d-1)Dmn - AD(D-1)n^2 = 0 \quad (2.17)$$

$$n(n+1) + (D-1)(1-BD)n^2 + (2BD-1)dmn = 0 \quad (2.18)$$

La expresión (2.18) nos permite expresar a n como función de m (el caso $n=0$) es físicamente irrelevante ya que implica tener $\sigma(t)=cte.$ para todo valor de t).

$$n = \frac{(1-2DB)dm - 1}{D[1+B-BD]} \quad (2.19)$$

Recuérdese que deseamos tener a $\sigma(t) \sim t^{-n}$, es decir función decreciente de t lo cual nos conduce a pedir $n > 0$.

Introduciendo (2.19) en (2.17) nos permite conocer a m como función de los parámetros d, D, α, β .

$$m = \frac{1}{2\gamma_4[\gamma_4 d + \gamma_2 \gamma_3 - \gamma_5 \gamma_4]} (\gamma_2 \gamma_4 + \gamma_1 \gamma_4^2 - 2\gamma_3 \gamma_5 \pm [(2\gamma_3 \gamma_5 - \gamma_2 \gamma_4 - \gamma_1 \gamma_4^2)^2 + 4\gamma_5(\gamma_4^2 d + \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 - \gamma_5 \gamma_4^2)]^{1/2}) \quad (2.20)$$

Donde hemos hecho las definiciones

$$\gamma_1 = 1 + Ad(d-1), \gamma_2 = D(2d-1), \gamma_3 = d(1-2DB), \gamma_4 = 1 + (D-1)(1-BD), \gamma_5 = AD(D-1)$$

Nótese que la ecuación (2.20) tiene dos posibles soluciones.

Para determinar unívocamente el valor de m se introduce (2.20) en la expresión (2.4) y ésto nos permitirá conocer cual de las dos raíces tomar.

Los valores físicamente plausibles de m y n deben satisfacer $m > 0$ y $n > 0$ ya que en este caso $a(t)$ será creciente y $\sigma(t)$ decreciente.

La ecuación (2.1) nos permite hacer la interpretación siguiente [5]

$$\frac{1}{2}d(d-1)(\dot{a}/a)^2 = 8\pi\rho_d \quad (2.21)$$

$$\frac{1}{2}D(D-1)(\dot{\sigma}/\sigma)^2 = 8\pi\rho_D \quad (2.22)$$

donde ρ_d y ρ_D son la densidad en el espacio d y D dimensional respectivamente.

La ecuación (2.2) nos proporciona la presión en el espacio d -dimensional.

$$(d-1)(\ddot{a}/a) + \frac{1}{2}(d-1)(d-2)(\dot{a}/a)^2 = -8\pi P_d \quad (2.23)$$

La presión en el espacio compacto se obtiene de (2.3)

$$(D-1)(\ddot{\sigma}/\sigma) + \frac{1}{2}(D-1)(D-2)(\dot{\sigma}/\sigma)^2 = -8\pi P_D \quad (2.24)$$

B) Consideremos el caso particular $d = 3$ y $D = 1$.

La métrica a usar es [6]

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 g_{mn}(x) dx^m dx^n + \sigma(t)^2 dy^2$$

El tensor de energía-momento lo tomaremos de la forma

$$T_{00} = \rho, T_{mn} = -\alpha\rho\delta_{mn}, T_{44} = -\beta\rho, m, n = 1, 2, 3, \alpha, \beta \in R.$$

Las ecuaciones de campo son

$$3(\dot{a}/a)^2 + 3(\dot{a}/a)(\dot{\sigma}/\sigma) = 8\pi\rho \quad (2.25)$$

$$(\ddot{\sigma}/\sigma) + 2(\ddot{a}/a) + 2(\dot{a}/a)(\dot{\sigma}/\sigma) = -8\pi\alpha\rho \quad (2.26)$$

$$3(\ddot{a}/a) + 3(\dot{a}/a)^2 = -8\pi\beta\rho \quad (2.27)$$

La ecuación de conservación de Energía es [7]

$$\dot{\rho} + 3(1 + \alpha)\rho(\dot{a}/a) + (1 + \beta)\rho(\dot{\sigma}/\sigma) = 0 \Rightarrow \rho = Aa^{-3(1+\alpha)}\sigma^{-1-\beta} \quad (2.28)$$

donde A es una constante

Multiplicando (2.25) por α y sumando a (2.27)

$$(1 + 3\alpha)(\dot{a}/a)^2 + (2 + 3\alpha)(\dot{a}/a)(\dot{\sigma}/\sigma) + (\ddot{\sigma}/\sigma) + 2(\ddot{a}/a) = 0 \quad (2.29)$$

Si ahora se multiplica (2.25) por β y se suma el resultado a (2.27)

$$(1 + \beta)(\dot{a}/a)^2 + (\ddot{a}/a) + \beta(\dot{a}/a)(\dot{\sigma}/\sigma) = 0 \quad (2.30)$$

Restando (2.30) a la expresión (2.29)

$$(3\alpha - \beta)(\dot{a}/a)^2 + (\ddot{a}/a) + (\ddot{\sigma}/\sigma) + (3\alpha - \beta + 2)(\dot{a}/a)(\dot{\sigma}/\sigma) = 0 \quad (2.31)$$

Introduciendo la ecuación (2.28) en lo encontrado en (2.27) se obtiene

$$\sigma^{-1-\beta} = \frac{-3a^{3+3\alpha}}{8\pi\beta A}[(\ddot{a}/a) + (\dot{a}/a)^2], \quad \beta \neq 0 \quad (2.32)$$

De la expresión (2.30)

$$\sigma(t) = Ba^{-(1+\beta)/\beta} \dot{a}^{-\frac{1}{\beta}} \quad (2.33)$$

donde B es una constante.

Cabe mencionar en este punto que (2.32) es consecuencia de conservación de Energía y (2.33) de las ecuaciones de campo.

Derivando (2.33) respecto al tiempo (ver apéndice A)

$$\frac{\ddot{\sigma}}{\sigma} = \frac{(1 + \beta)(1 + 2\beta)}{\beta^2}(\dot{a}/a)^2 + \frac{1 + \beta}{\beta^2}(\ddot{a}/a)^2 + \frac{(1 + \beta)(2 - \beta)}{\beta^2}(\ddot{a}/a) - \frac{1}{\beta}(\ddot{a}/\dot{a}) \quad (2.34)$$

Con estos dos últimos resultados podemos expresar lo obtenido en (2.29) de la forma (ver apéndice A)

$$\frac{1}{\beta^2}[1+\beta(\beta+1-3\alpha)](\dot{a}/a)^2 + \frac{1}{\beta^2}[2-\beta(3\alpha+1-\beta)](\ddot{a}/a) + \frac{1+\beta}{\beta^2}(\ddot{a}/\dot{a})^2 - \frac{1}{\beta}(\dot{\ddot{a}}/\dot{a}) = 0 \quad (2.35)$$

Proponiendo como *ansatz*

$$a(t) = t^m \quad (2.36)$$

Se tienen las siguientes expresiones

$$(\dot{a}/a) = \frac{m}{t} \quad (2.37)$$

$$(\ddot{a}/a) = \frac{m(m-1)}{t} \quad (2.38)$$

$$(\dot{\ddot{a}}/\dot{a}) = \frac{(m-1)(m-2)}{t^2} \quad (2.39)$$

Donde $\dot{\ddot{a}}$ es la tercera derivada de a respecto a t .

Uniendo las últimos cinco resultados encontramos la condición que debe satisfacer m como función de α y β .

$$[4 + 2\beta(\beta - 3\alpha)]m^2 + [-4 + \beta(3\alpha + 2 - \beta)]m + 1 - \beta = 0 \quad (2.40)$$

Esto nos permite, usando (2.32) conocer a $\sigma(t)$.

$$\sigma^{-1-\beta} = \frac{-3(2m^2 - m)}{8\pi\beta A} t^{3m(1+\alpha)-2} \quad (2.41)$$

Si ahora tomamos la ecuación (2.33)

$$\sigma(t) = Ct^{\frac{1-m(2+\beta)}{\beta}} \quad (2.42)$$

donde C es una constante.

Pero es evidente que lo hallado mediante (2.42) debe ser proporcional a lo encontrado usando (2.41). Esto implica

$$\frac{2-3m(1+\alpha)}{1+\beta} = \frac{1-m(2+\beta)}{\beta}$$

Esto nos conduce a que

$$m = \frac{1-\beta}{\beta^2 + 2 - 3\alpha\beta} \quad (2.43)$$

Introduciendo este valor de m en la ecuación (2.40) (ver apéndice B) se concluye que (2.43) es una de las raíces de (2.40).

C) Tomemos ahora el caso $d = 3$ y D arbitrario y con un tensor de vacío.

Las ecuaciones de campo son

$$3(\dot{a}/a) + \frac{1}{2}DD(-1)(\dot{\sigma}/\sigma)^2 + 3D(\dot{a}/a)(\dot{\sigma}/\sigma) = 0 \quad (2.44)$$

$$2(\ddot{a}/a) + D(\ddot{\sigma}/\sigma) + (\dot{a}/a)^2 + 2D(\dot{a}/a)(\dot{\sigma}/\sigma) + \frac{1}{2}D(D-1)(\dot{\sigma}/\sigma)^2 = 0 \quad (2.45)$$

$$3(\ddot{a}/a) + 3(\dot{a}/a)^2 + (D-1)(\ddot{\sigma}/\sigma) + \frac{1}{2}(D-1)(D-2)(\dot{\sigma}/\sigma)^2 + 3(D-1)(\dot{a}/a)(\dot{\sigma}/\sigma) = 0 \quad (2.46)$$

Estas ecuaciones nos llevan a

$$(\dot{\sigma}/\sigma) = \frac{-1}{D}(\ddot{a}/\dot{a}) - \frac{2}{D}(\dot{a}/a) \quad (2.47)$$

Si consideramos una solución de la forma (2.36)

$$m = \frac{1}{6(D+3)} [6 + \sqrt{12D^2 + 24D}] \quad (2.48)$$

Nótese que si tomamos $D = 1$ la solución que se obtiene de (2.48) y (2.47) es

$$a(t) = t^{1/2}, y \sigma(t) = t^{-1/2}$$

es decir recuperamos un resultado ya conocido [7].

La densidad y presión en el espacio usual son respectivamente

$$\rho_{eff} = \frac{3m^2}{8\pi t^2} \quad (2.49)$$

$$P_{eff} = \frac{-3m^2 + 2m}{8\pi t^2} \quad (2.50)$$

Las cantidades correspondientes en el espacio D-dimensional son

$$\rho_D = \frac{3m(2m-1)}{8\pi t^2} \quad (2.51)$$

$$P_D = \frac{3m(2m-1)(3m-1)(45m^3 - 27m^2 - 3m + 1)}{8\pi(9m^2 - 6m - 1)t^2} \quad (2.52)$$

En el caso de $d = D = 3$ se tiene que

$$m = \frac{1 + \sqrt{5}}{6} \quad (2.53)$$

$$a(t) = t^{\frac{1+\sqrt{5}}{6}}, \sigma(t) = t^{\frac{1-\sqrt{5}}{6}} \quad (2.54)$$

Evidentemente no se tiene radiación.

REFERENCIAS

CAPITULO II

- 1) R. H. Dicke and P.J. Peebles, General Relativity: An Einstein Centenar y Survey.
(Cambridge University Press,Cambridge,1979).
- 2) A. Guth. Phys. Rev. D23,2482 (1981).
- 3) E. W. Kolb. D. Lindley, and D. Seckel. Phys. Rev. D23,1205 (1984).
- 4) K.Maeda. Phys. Rev. D30,2482 (1984).
- 5) R. A. Matzner, A. Mezzacappa. Phys. Rev. D32,3114 (1985).
- 6) M. Rosenbaum, M. Ryan, and L. Urrutia. Phys. Rev. D36,1032 (1987).
- 7) R. B. Mann, and D. E. Vincent. Phys. Lett. 107A,75.

CAPITULO III

ANALISIS DE LAS SOLUCIONES

A) Caso $d=3$ y $D=1$

De lo calculado en (2.49) y (2.50) se obtienen la densidad y presión 4-dimensionales.

$$\rho_{eff} = \frac{3m^2}{8\pi t^2} \quad (3.1)$$

$$P_{eff} = \frac{m(2-3m)}{8\pi t^2} \quad (3.2)$$

Es evidente de estas dos expresiones que la ecuación de estado obtenida es

$$P_{eff} = \frac{2-3m}{3m} \rho_{eff} \quad (3.3)$$

Siendo $m > 0$ es claro de (3.3) que

$$|P_{eff}| \leq |\rho_{eff}|$$

es decir la rapidez del sonido c_s [1] es menor que la rapidez de la luz ($c=1$)

Si tomamos el caso $\alpha = \frac{7}{6}$ y $\beta = 2$ empleando (2.43) se desprende que $m = 1$ y $P_{eff} = -\frac{1}{3}\rho_{eff}$, llegamos al caso de *K-matter* ya analizado [2].

Es interesante notar que si se consideran los valores de $\frac{13}{9}$ y 3 para α, β , respectivamente se tiene que $m=1$. Esto muestra que no existe una relación biunívoca entre el par (α, β) y m . Es decir se tienen varios tensores de energía-momento 5-dimensionales (cuántos de ellos depende del número de pares (α, β) que satisfagan las condiciones mencionadas en el CAPITULO II) que generan el mismo universo 4-dimensional. Un observador viviendo en un universo 4-dimensional no puede decir que tensor 5-dimensional genera su universo. Este hecho ya se conocía aunque en un contexto menos general, ya que sabemos [3,4] que los

modelos 5-dimensionales con tensor de polvo o de vacío generan un universo 4-dimensional de radiación.

Es de mencionar que si $\alpha = \frac{4}{3}$ y $\beta = 2$ se obtiene $m = \frac{1}{2}$, que ya se conoce como radiación [5]. Es decir, no solo polvo y vacío 5-dimensionales generan radiación en 4 dimensiones. Esto nos permite hablar de una degeneración entre el tensor de energía-momento 5-dimensional y la ecuación de estado 4-dimensional.

Es lógico pensar que esta degeneración que aparece en el caso $D = 1$ también surga cuando $D > 1$.

La ecuación fundamental de la Termodinámica puede escribirse como [5]

$$pdV + \rho dV + Vd\rho = TdS \quad (3.4)$$

donde S es la Entropía de la región del universo de volumen V .

Empleando (3.1) y (3.2) se tiene que [6]

$$TdS = 0 \quad (3.5)$$

Lo cual nos dice que el espacio usual es isentrópico. Siendo S_T la Entropía del espacio $(d + D)$ -dimensional lo anterior (bajo la hipótesis de que el universo $(d + D)$ -dimensional es isentrópico) implica que no existe flujo de Entropía entre los dos espacios

Las ecuaciones (3.5) y (2.36) nos permite afirmar que no podemos resolver el problema del horizonte [7].

De lo calculado en (2.27) se puede ver que la presión en el espacio compacto P_1 es nula, no así la presión en el espacio usual.

Por la forma de la solución obtenida

$$a(t) = t^m$$

$$\sigma(t) = t^{-n}$$

es claro que no se tiene *crack of doom* [3,4] (se presenta en el límite $t \rightarrow \infty$).

B) Caso $d = 3$, D arbitrario y tensor de energía-momento de vacío.

Se ha propuesto [9] a la diferencia en Topología entre el espacio usual y el espacio que se compactifica como responsable de la separación entre éstos dos espacios. En donde, por diferencia en Topología se quiere dar a entender no solo, diferencia en la curvatura entre los dos espacios, sino también en su número de dimensiones. De ser cierto este argumento podría esperarse que el caso en el cual las diferencias entre los dos espacios no existan fuese *patológico* (por ejemplo no fuese posible encontrar una solución con $a(t)$ creciente y $\sigma(t)$ decreciente). Sin embargo, hemos resuelto el caso $d=D=3$ con los dos espacios planos. Esto sugiere que existe otra razón adicional, a las dos mencionadas para explicar la separación de los dos espacios.

Empleando (2.48) es fácil ver que $\lim_{D \rightarrow \infty} m = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Por consiguiente, podemos afirmar que en el caso de un modelo con $(d+D)$ -dimensiones espaciales y un tensor de energía-momento de vacío se tienen soluciones de la forma $\sim t^m$ para las dimensiones no compactas, donde $m \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$. Además, esto nos hace ver que de todos los modelos múltiple-dimensionales (con tensor de energía-momento de vacío) únicamente el caso $D = 1$ genera en el espacio usual una ecuación de estado de radiación: $P_{eff} = \frac{1}{3}\rho_{eff}$, la compactificación de las extras 2,3,4,...etc. tiene consecuencias en el espacio 4-dimensional.

De (2.50) y (2.52) se tiene que (ver apéndice C).

$$P_{eff} > P_D$$

Es decir, la presión en el espacio usual siempre es mayor que la presión del espacio compacto.

Las ecuaciones (2.21) y (2.23) nos llevan a una ecuación de estado en el espacio no

compacto de la forma

$$P_{eff} = \gamma \rho_{eff} \quad (3.6)$$

Esta es la ecuación de estado que resulta de resolver el modelo $(d+D+1)$ -dimensional con un tensor de energía-momento de la forma

$$T_{00} = \rho$$

$$T_{mn} = -\alpha \rho \delta_{mn} , m, n = 1, 2, 3, \dots, d$$

$$T_{\mu\nu} = -\beta \rho \delta_{\mu\nu} , \mu, \nu = d+1, d+2, \dots, d+D$$

La solución del mismo problema pero con un tensor de vacío nos conduce a una ecuación de estado de la forma

$$P_{eff} = \epsilon \rho_{eff} \quad (3.7)$$

Estos dos hechos nos permiten interpretar a (3.6) de la forma siguiente

$$P_{eff} = (\gamma - \epsilon) \rho_{eff} + \epsilon \rho_{eff} \quad (3.8)$$

Donde el primer término del lado derecho se puede entender como la influencia en el espacio usual del tensor $(d+D+1)$ -dimensional propuesto y el segundo término es la manifestación en el espacio usual de las dimensiones compactas.

C) Conclusiones.

Kolb *et al* [10] han probado que en una métrica tipo F-R-W. con d -dimensiones no compactas (la curvatura de este espacio es nula $k_d = 0$) y D -dimensiones compactas (la curvatura no es nula $k_D = 1$) y un tensor de fluido perfecto

$$T_{mn} = \rho g_{mn} + (\rho + p)u_m u_n$$

donde u_m es la $(d+D)$ -velocidad del fluido, se tiene en el espacio no compacto producción de Entropía, pero no es suficiente para resolver el problema del horizonte.

Por otro lado Abbott *et al* [11] estudiaron un problema similar al de Kolb con la única diferencia de $k_d \neq 0$. Llegan a la conclusión de que se tiene suficiente producción de Entropía si $D \sim 40$.

Lo hecho en el CAPITULO II puede resumirse de la siguiente manera:

En una métrica tipo F-R-W. con d -dimensiones no compactas y D -dimensiones compactas y un tensor de la forma

$$T_{00} = \rho$$

$$T_{mn} = -\alpha \rho \delta_{mn} \quad m, n = 1, 2, 3, \dots, d$$

$$T_{\mu\nu} = -\beta \rho \delta_{\mu\nu} \quad \mu, \nu = d+1, d+2, \dots, d+D$$

con ambos espacios planos se encuentran soluciones las cuales no permiten resolver el problema del horizonte.

Podemos entonces afirmar:

1) La curvatura del espacio no compacto (k_d) juega un papel fundamental en obtener soluciones que permitan resolver el problema del horizonte

2) La curvatura del espacio compacto (k_D) parece no tener tanta importancia, en el sentido anterior, como k_d .

3) El precio a pagar en el intento más exitoso es [11] $D \geq 40$. Sin embargo, quisiéramos soluciones en las cuales $D < 40$.

Para conseguir lo mencionado en el punto (3) proponemos resolver el problema:

En una métrica tipo F-R-W. con d -dimensiones no compactas y D -dimensiones compactas, ambos espacios no planos ($k_d \neq 0$ y $k_D \neq 0$), introducir un tensor de energía-momento de la forma (3.9).

Sabemos [12] que en un tensor de esta forma se presenta flujo de Energía como consecuencia de presentarse viscosidad. Es posible que este flujo de Energía se manifieste como producción de Entropía en el espacio no compacto de tal forma que $D < 40$.

Respecto a la hipótesis (3.9) se puede formular la crítica de que se tiene un fluido no perfecto. Sin embargo, podemos argumentar a favor de ella que si bien es el espacio usual el que parece obedecer a un tensor de fluido perfecto este hecho no descarta que el espacio $(d+D)$ -dimensional pudiese tener asociado un tensor de fluido no perfecto.

REFERENCIAS

CAPITULO III

- 1) M. Ryan, and L. Shepley, Homogeneous Relativistic Cosmologies.(Princeton University Press 1975)
- 2) E. W. Kolb. Preprint. Fermilab. Pub-89/13A.
- 3) R. A. Matzner, and A. Mezzacappa. Phys. Rev. D32, 3114 (1984)
- 4) M. Rosenbaum, M. Ryan, and L.Urrutia. Phys. Rev. D36, 1032 (1987).
- 5) C. Misner,K. Thorne, and J. A. Wheeler, Gravitation (Freeman,San Francisco 1973).
- 6) H. Honl. Gen. Rel. Grav. 11 (1977) 647.
- 7) A. H. Guth. Phys. Rev. D23, 347 (1981)
- 8) A. Chodos, and S. Detweiler. Phys. Rev. D21, 2167 (1980).
- 9) H. I. Ishihara. Prog. Theor. Phys. 72 (1984) 376.
- 10) E. W. Kolb, D. Lindley, and D. Seckel. Phys. Rev. D30, 1205 (1984).
- 11) R. Abbott, S. Barr, and D. Ellis. Phys. Rev. D30, 720 (1984).
- 12) L. D. Landau, and E. Lifshitz. Fluid Mechanics (Pergamon Press (1975)).

APENDICE A

De (2.33) se tiene la expresión

$$\text{a.1)} \dot{\sigma}/\sigma = -\frac{1}{\beta}[(1+\beta)\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\ddot{a}}{a}] \Rightarrow \ddot{\sigma} = \frac{1}{\beta}[(1+\beta)\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\ddot{a}}{a}]^2 \frac{\sigma}{\beta} - \frac{\sigma}{\beta}[(1+\beta)\frac{\ddot{a}}{a} - (1+\beta)(\frac{\dot{a}}{a})^2 +$$

$$\frac{\dot{a}}{a} - (\frac{\ddot{a}}{a})^2] \Rightarrow \frac{\ddot{\sigma}}{\sigma} = \frac{(1+\beta)(1+2\beta)}{\beta^2}(\frac{\dot{a}}{a})^2 + \frac{1+\beta}{\beta^2}(\frac{\ddot{a}}{a})^2 + \frac{(1+\beta)(2-\beta)}{\beta^2} \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{\beta} \frac{\dot{a}}{a}$$

Esta última expresión es idéntica a (2.34).

La ecuación (2.29) es

$$\text{a.2)} (1+3\alpha)(\frac{\dot{a}}{a})^2 + (2+3\alpha)\dot{a}\ddot{\sigma} + \frac{\ddot{\sigma}}{\sigma} + 2\frac{\ddot{a}}{a}$$

Empleando lo calculado en (a.1) se tiene que (a.2) se transforma en

$$(1+3\alpha)(\frac{\dot{a}}{a})^2 + (2+3\alpha)\frac{\dot{a}}{a}[-\frac{1}{\beta}(1+\beta)\frac{\dot{a}}{a} - \frac{1}{\beta}\frac{\ddot{a}}{a}] + 2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{(1+\beta)(1+2\beta)}{\beta^2}(\frac{\dot{a}}{a})^2 + \frac{(1+\beta)}{\beta^2}(\frac{\ddot{a}}{a})^2 +$$

$$\frac{(1+\beta)(2-\beta)}{\beta^2} \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{\beta} \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1+\beta(\beta+1-3\alpha)}{\beta^2}(\frac{\dot{a}}{a})^2 + \frac{2-\beta(3\alpha+1-\beta)}{\beta^2} \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1+\beta}{\beta^2}(\frac{\ddot{a}}{a})^2 - \frac{\dot{a}}{a}$$

Es claro que la última ecuación es idéntica a (2.35)

APENDICE B

$$\text{b.1)} \frac{1+\beta(\beta+1-3\alpha)}{\beta^2} m^2 + \frac{2-\beta(3\alpha+1-\beta)}{\beta^2} m(m-1) + \frac{1+\beta}{\beta^2} (m-1)^2 - \frac{1}{\beta} (m-1)(m-2) =$$

$$[4 + 2\beta^2 - 6\alpha\beta]m^2 + [-4 - \beta^2 + 2\beta + 3\alpha\beta]m + 1 - \beta$$

Se obtuvo un resultado idéntico al señalado en (2.40)

Si ahora consideramos

$$\text{b.2)} m = \frac{1-\beta}{\beta^2+2-3\alpha\beta}$$

e introducimos (b.2) en (b.1)

$$\begin{aligned} \text{b.3)} (1-\beta)[4 + 2\beta^2 - 6\alpha\beta - 4\beta - 2\beta^3 + 6\alpha\beta^2 - 4\beta^2 - 8 + 12\alpha\beta + 2\beta^3 + 4\beta - 6\alpha\beta^2 + 3\alpha\beta^3 + \\ 6\alpha\beta - 9\alpha^2\beta^2 - \beta^4 - 2\beta^2 + 3\alpha\beta^3 + \beta^4 + 4 + 9\alpha^2\beta^2 + 4\beta^2 - 6\alpha\beta^3 - 12\alpha\beta] = 0 \end{aligned}$$

Esto prueba que (b.2) es una raíz de (b.1).

APENDICE C

Usando las expresiones (2.50) y (2.52) para P_{eff} y P_D respectivamente definamos

$$P_r(m) = \frac{P_D}{P_{eff}}$$

Dándole valores a m en el intervalo $[\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$

se tiene

$$P_r(m = \frac{1}{2}) = 0 \quad (1)$$

$$P_r(m = 0.50774) = 0.04704 \quad (2)$$

$$P_r(m = 0.51548) = 0.10240 \quad (3)$$

$$P_r(m = 0.52322) = 0.16681 \quad (4)$$

$$P_r(m = 0.53096) = 0.24102 \quad (5)$$

$$P_r(m = 0.53870) = 0.32578 \quad (6)$$

$$P_r(m = 0.54644) = 0.42202 \quad (7)$$

$$P_r(m = 0.55418) = 0.52953 \quad (8)$$

$$P_r(m = 0.56192) = 0.65025 \quad (9)$$

$$P_r(m = 0.56966) = 0.78342 \quad (10)$$

$$P_r(m = \frac{1}{\sqrt{3}}) = 0.92819 \quad (11)$$

(Hemos redondeado hasta la quinta cifra decimal y la partición hecha del intervalo

$[\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ es de 10).

Esto prueba que para

$$m \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$$

se satisface la desigualdad

$$0 \leq P_r(m) < 1$$