Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - IZTAPALAPA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

“Integral de Henstock Kurzweil y Transformada de Fourier”

TESIS

QUE PRESENTA

ALFREDO REYES VAZQUEZ
MATRÍCULA: 2121800817

PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

DIRECTOR DE TESIS:
DR. JUAN HÉCTOR ARREDONDO RUIZ

JURADO:

1. **DR. SLAVISA V. DJORDJEVIC**
2. **DRA. MARÍA GUADALUPE MORALES MACÍAS**
3. **DR. JULIO CÉSAR GARCÍA CORTE**
4. **Dr. CARLOS IBARRA VALDEZ**
5. **DR. JUAN HÉCTOR ARREDONDO RUIZ**

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

Iztapalapa, Ciudad de México, diciembre 2020.

A mis padres.

Índice general

Resumen

En el presente trabajo hacemos uso de la teoría de integración de Henstock-Kurzweil, que también es conocida como integración generalizada de Riemann, para extender las propiedades de la transformada de Fourier vía el método complejo de interpolación analizando las posibles diferencias entre las transformada seno y coseno de Fourier.

Para este fin, en el capítulo 2 establecemos los conceptos básicos de la integral de Henstock-Kurzweil para el caso de funciones real valuadas definidas sobre intervalos compactos y sobre toda la recta real. Además, presentamos la relación ya existente y estrecha entre las funciones integrables en este sentido con el concepto de tener variación acotada; este último hecho se conoce como teorema del multiplicador.

También hacemos énfasis en la relación de esta integral con las definiciones dadas por Georg Friedrich Bernhard Riemann y por Henri Léon Lebesgue, mostrando así que el espacio de las funciones Henstock-Kurzweil integrables sobre intervalos compactos o sobre la recta real contiene propiamente al espacio de las funciones Lebesgue integrables.

En el capítulo 3 presentamos condiciones necesarias para la existencia de la transformada de Fourier con respecto a la integral de Henstock-Kurzweil y vemos su relación con el espacio (de clases de equivalencia) de funciones Lebesgue integrables, este espacio se denota por $L^1(\mathbb{R})$. De hecho, ya existen resultados que extienden las propiedades clásicas de la transformada de Fourier definida sobre $L^1(\mathbb{R})$ al espacio de las funciones de variación acotada que se desvanecen en $\pm\infty$, el cual se denota mediante $BV_0(\mathbb{R})$. Véase [50].

En particular, en $BV_0(\mathbb{R})$ se define la transformada de Fourier mediante

$$\mathcal{F}_{HK} : BV_0(\mathbb{R}) \longrightarrow C_\infty(\mathbb{R}\backslash\{0\})$$
$$\mathcal{F}_{HK}(f)(s) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} f(x)\, dx$$

para cada $s \neq 0$, donde la integral es en el sentido de Henstock-Kurzweil. Sin embargo, existen temas pendientes a desarrollar tales como la continuidad de $\mathcal{F}_{HK}(f)(s)$ en $s = 0$ y el determinar cuando la transformada de Fourier de una función es nuevamente integrable. Para esto, se realizó un estudio por separado de las transformadas seno y coseno de Fourier encontrando comportamientos diferentes para funciones en $BV_0(\mathbb{R})$, véase Proposición 3.5. Esto muestra que el comportamiento diferente entre las dos transformadas se preserva aún para la integral de Henstock-Kurzweil. Además, el resultado principal del capítulo 3 es el Teorema 3.12 en el cual se demuestra que la transformada coseno de Fourier es un operador acotado de $BV_0(\mathbb{R})$ en el espacio de las funciones Henstock-Kurzweil integrables.

Por último en el capítulo 4 se hace uso de la teoría de interpolación para extender la transformada coseno de Fourier a espacios de funciones del tipo $L^p(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})$ con $1 \leq p \leq 2$ y en (4.17) y (4.21) establecemos el comportamiento de los espacios de Sóbolev con respecto a las transformadas seno y coseno de Fourier.

Para este objetivo, primero se realizó la construcción del espacio suma real $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})$ por medio de un espacio cociente en el producto cartesiano $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \times BV_0(\mathbb{R})$ y después se consideró la completez denotada por

$\mathcal{L}^1(\mathbb{R})\widehat{+}BV_0(\mathbb{R})$, ver Proposición 4.4. Luego se considero la complexificación de este espacio suma definido por

$$L^1(\mathbb{R},\mathbb{C}) + BV_0(\mathbb{R},\mathbb{C}) := \left(L^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})\right) + i\left(L^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})\right).$$

En este espacio, se definió el operador transformada coseno de Fourier

$$\begin{aligned} &\mathfrak{F}_1^c \colon L^1(\mathbb{R},\mathbb{C}) + BV_0(\mathbb{R},\mathbb{C}) \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}) + \widehat{HK}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \\ &\mathfrak{F}_1^c(f+g)(s) := \mathcal{F}_1^c(f)(s) + \mathcal{F}_{HK}^c(g)(s) \end{aligned}$$

con $s \neq 0$. De esta manera, se restringió de manera continua la transformada coseno de Fourier al espacio de interpolación de $L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ con $BV_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ obteniendo del Coroloario 4.1 el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} L^1 \cap BV_0 \arrow[r, hook] & {[L^1, BV_0]_\theta} \arrow[r, hook] \arrow[d, dashed, "\mathfrak{F}_1^c"] & L^1 + BV_0 \arrow[d, "\mathfrak{F}_1^c"] \\ L^\infty \cap \widehat{HK} \arrow[r, hook] & {[L^\infty, \widehat{HK}]_\theta} \arrow[r, hook] & L^\infty + \widehat{HK} \end{tikzcd}$$

Sin embargo, para la transforma seno de Fourier no se obtuvo un resultado análogo ya que este último operador no se puede extender de manera acotada al espacio de las funciones Henstock-Kurzweil integrables. Lo que se probó en la Proposición 3.5 es que la transformada seno de Fourier de una función en $BV_0(\mathbb{R})$ no necesariamente es Henstock-Kurzweil integrable. Véase [5, 6].

Capítulo 1

Introducción

El concepto de integración de una función es uno de los temas fundamentales de la matemática. Algunas de las principales teorías de integración fueron desarrolladas por Newton y Leibniz y posteriormente este tema fue estudiado por Riemann. Sin embargo, la definición dada por Riemann presenta la limitación de generar una colección "pequeña" de funciones integrables por lo que es necesario definir las integrales impropias. Más aún, la convergencia puntual de una sucesión de funciones Riemann integrables no garantiza que la función límite sea Riemann integrable.

Otro tema importante es el teorema fundamental del cálculo que establece que si f es integrable en el sentido de Riemann con $F'(x) = f(x)$ para toda $x \in [a, b]$, es decir, F es una primitiva de f, entonces

$$\int_a^x f(s)\,ds = F(x) - F(a) \qquad \forall x \in [a, b].$$

Aquí surge el problema de que no toda función Riemann integrable posee una primitiva e incluso cuando exista la primitiva de f en $[a, b]$ resulte que f no sea Riemann integrable. Considérese por ejemplo las funciones $g(x) := 1/\sqrt{x}$, para $x \in (0, 1]$ y $g(0) := 0$, la cual no es acotada en $[0, 1]$ y por lo tanto no es Riemann integrable y la función $G(x) := 2\sqrt{x}$, con $x \in [0, 1]$, entonces G es continua en $[0, 1]$ y derivable en $(0, 1]$ con $G'(x) = g(x)$ pero no existe $G'(0)$.

A finales del siglo XIX, Henri Lebesgue extendió la teoría de integración quitando las restricciones de ser f una función acotada sobre un intervalo compacto. Además, estableció condiciones para tomar límites y derivar bajo el símbolo de la integral. Sin embargo, la integral de Lebesgue presenta deficiencias con respecto al teorema fundamental del cálculo y se requiere del desarrollo de la teoría de medida, véase [70]. Por ejemplo, la función $f(x) := x^2 \operatorname{sen}\left(x^{-2}\right)$, para $x \neq 0$ y $f(0) := 0$, es diferenciable en todo $\mathbb{R}$ pero f' no es Lebesgue integrable.

Posteriormente, Arnaud Denjoy presentó en 1912 una definición de integral más general a la de Lebesgue, véase [79], la cual permite integrar todas las derivadas, además de incluir la integrale de Dirichlet:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,dx,$$

la cual no es Lebesgue integrable.

Por otra parte, de manera independiente, en 1914 Oskar Perron establece su propia definición de integral la cual resulta ser equivalente a la dada por Denjoy y en la actualidad se conoce como integral de Denjoy-Perron, véase [27, Capítulo 8]. Sin embargo, las integrales de Denjoy y Perron requieren de conocimientos avanzados en el área de análisis lo cual ha dificultado su estudio y enseñanza.

Después, entre 1957 y 1958 Jaroslav Kurzweil estableció el concepto de "gauge integral" o integral de carga recuperando la idea de Riemann al dar una definición de tipo ε - δ y sin la necesidad del concepto de medida de un conjunto. De hecho Ralph Henstock dio una definición equivalente a la de Kurzweil, véase [7], dando lugar a la integral de Henstock-Kurzweil que resulta ser equivalente a la integral dada por Denoy y Perron, véase [27, Capítulo 11]. La integral de Henstock-Kurzweil presenta las siguientes ventajas:

1) Integra todas las funciones derivada tal que esta existe salvo (posiblemente) en un conjunto numerable manteniendo válido el teorema fundamental del cálculo. En particular, integra las funciones que tienen primitiva.

2) Integra todas las funciones que son Riemann integrables.

3) Integra todas las funciones que son Lebesgue integrables.

4) Integra todas las funciones que son Denjoy-Perron integrables y en todos los casos el valor de las integrales coinciden.

5) Se generalizan los teoremas clásicos de convergencia tales como el de convergencia monótona y de convergencia dominada de Lebesgue.

En particular, dentro del análisis matemático un tema importante es la transformada de Fourier que fue desarrollado por Jean-Baptiste Joseph Fourier y es una asignación para cada $s \in \mathbb{R}$ dada por:

$$\hat{f}(s) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} f(x)\, dx$$

para funciones $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que la integral sea convergente en el sentido de Lebesgue, donde

$$e^{-isx} = \cos(sx) - i\,\mathrm{sen}(sx).$$

Una condición necesaria para la existencia de la transformada de Fourier de una función f es que esta sea Lebesgue integrable, es decir, $f \in L^1(\mathbb{R})$. Esto se sigue del hecho que los multiplicadores para el espacio de funciones Lebesgue integrables son las funciones medibles acotadas y de la propiedad:

$$\left|e^{\pm isx}\right| \leq 1.$$

Además, para cada función Lebesgue integrable se cumple que

$$\lim_{s\to\pm\infty} \hat{f}(s) = 0.$$

Este resultado es conocido como el lema de Riemann-Lebesgue, véase [28, Proposición 2.2.17]. De hecho se tienen resultados acerca de la continuidad y de la diferenciabilidad de $\hat{f}$, así como propiedades referentes a la convolución de funciones.

También, bajo ciertas condiciones se garantiza la existencia de la transformada inversa de Fourier dada por:

$$\check{f}(s) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} f(x)\, dx.$$

Sin embargo, como se menciono anteriormente, la integral de Henstock-Kurzweil generaliza a la integral de Lebesgue y en consecuencia autores como Erik Talvila han estudiado las propiedades de la transformada de Fourier y su inversa con respecto a esta integral [77, 54]. Más aún, por el teorema del multiplicador, se tiene que los multiplicadores para esta integral son las funciones de variación acotada y esto da pie a establecer un teorema de existencia de $\hat{f}$ en el sentido de la integral de Henstock-Kurzweil para funciones de variación acotada que se desvanecen en $\pm\infty$, es decir, en el espacio $BV_0(\mathbb{R})$.

Además, para una función f Henstock-Kurzweil integrable para la cual $\hat{f}$ exista, no necesariamente se satisface la conclusión del lema de Riemann Lebesgue como lo muestra E. Talvila [77].

Más aún, el problema de determinar cuándo el mapeo $s \mapsto \hat{f}(s)$ es continuo en $\mathbb{R}$ y de manera más precisa en $s = 0$ sigue siendo un problema abierto. Para este fin, E. Talvila usa el concepto de convergencia quasi-uniforme, véase [77, Teorema 5], y también se han estudiado por separado las transformada seno y coseno de Fourier definidas por:

$$\hat{f}^s(s) := \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(sx) f(x)\, dx \quad \text{y} \quad \hat{f}^c(s) := \int_{-\infty}^{\infty} \cos(sx) f(x)\, dx$$

en virtud de la descomposición de e^{-isx}.

Elijah R. Liflyand [47] ha estudiado el comportamiento de las transformadas $\hat{f}^c$ y $\hat{f}^s$ con respecto a la integral de Lebesgue en subespacios específicos de $BV_0(\mathbb{R})$. De hecho, Liflyand mostró las diferencias entre estos dos operadores al estudiar a detalle el comportamiento asintótico de $\hat{f}^s$ de una función arbitraria de variación acotada y estableció condiciones para que $\hat{f}^c$ sea Lebesgue integrable.

Además estableció la relación de la transformada de Fourier con la transformada de Hilbert, esto lo realizó estudiando el espacio de Hardy y su relación con la derivada de las funciones a través del espacio

$$\left\{ g \in L^1(\mathbb{R}) \,\middle|\, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{g}(x)|}{|x|}\, dx < \infty \right\}.$$

Es en este contexto que se demostró un resultado análogo en la Proposición 3.6.

Otro tema importante es el estudio de las ecuaciones diferenciales generalizadas e integrales con respecto a funciones valuadas en espacios de Banach que ha investigado el Dr. Milan Tvrdy con respecto a la integral de Kurzweil [57].

En este trabajo hemos demostrado que la transformada coseno $\hat{f}^c$ es Henstock-Kurzweil integrable cuando f es de variacion acotada y se desvanece en $\pm\infty$, véase Teorema 3.12. Es bajo estas condiciones que el operador

$$f \mapsto \hat{f}^c$$

se extiende vía la teoría de interpolación a espacios de funciones más generales utilizando el método complejo, el cual fue desarrollado por A. P. Calderón [16, 53], considerando la suma de los espacios de funciones Lebesgue integrables y del espacio de funciones de variación acotada que tienden a cero en $\pm\infty$. (Corolario 4.1).

Además, hemos establecido que el operador $\hat{f}^s$ no se puede extender de manera continua incluso para funciones en el espacio de Sóbolev $W^{1,1}(\mathbb{R})$ introducido por Sergéi Lvóvich Sóbolev [1]. Con lo cual, se establece un comportamiento distinto entre estas transformadas aún para funciones con un mejor "comportamiento". Estos resultados pueden consultarse en [5, 6].

También es importante mencionar que el concepto de integral dado por J. Kurzweil se generaliza a funciones valuadas en espacios de Banach y se puede aplicar al estudio de ecuaciones diferenciales generalizadas como lo muestra los trabajos de la Dra. Marcia Federson, véase por ejemplo [20, 21, 22]. De hecho, se puede consultar más aplicaciones de la integral de Henstock-Kurzweil en [82] y su relación con la ecuación de Shrödinger vía la integral de Feynman en [59, 64].

Capítulo 2

Integral de Henstock-Kurzweil

En este capítulo introducimos el concepto de integración de Henstock-Kurzweil y establecemos las propiedades básicas de esta integral y su relación con la integrales introducidas por Georg Friedrich Bernhard Riemann y Henri Léon Lebesgue.

2.1. Integración sobre intervalos compactos

Para empezar, trabajamos sobre intervalos compactos no degenerados de $\mathbb{R}$, es decir, consideramos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y hacemos $I = [a, b]$. Ahora bien, decimos que un conjunto finito de elementos en I de la forma

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

es una partición de I y escribiendo $I_j := [x_{j-1}, x_j]$, denotamos la partición de I mediante $\mathcal{P} = \{I_j : j = 1, \ldots, n\}$. Además, si en cada subintervalo I_j elegimos un elemento τ_j, entonces decimos que la colección

$$\dot{\mathcal{P}} = \left\{(I_j, \tau_j) : j = 1, \ldots, n\right\}$$

es una partición etiquetada de I.

De esta manera, a una función $f : I \to \mathbb{R}$ le asociamos la suma de Riemann correspondiente a la partición etiquetada $\dot{\mathcal{P}}$ dada por

$$S(f, \dot{\mathcal{P}}) := \sum_{j=1}^{n} f(\tau_j)\, l(I_j), \tag{2.1}$$

donde $l(I_j) := x_j - x_{j-1}$, es decir, la longitud del subintervalo.

Definición 1. *Decimos que una función $\delta : I \to (0, \infty)$ es una función medidora o carga del intervalo I. Más aún, decimos que una partición etiquetada $\dot{\mathcal{P}} = \left\{(I_j, \tau_j) : j = 1, \ldots, n\right\}$ de I es δ-fina si*

$$I_j \subset [\tau_j - \delta(\tau_j), \tau_j + \delta(\tau_j)]$$

para toda $j = 1, \ldots, n$.

El hecho de la existencia de particiones δ-finas de un intervalo compacto no degenerado $I = [a, b]$ con respecto a una función medidora δ, se debe al teorema de fineza de Pierre Cousin.

Teorema 2.1. ***(Teorema de Cousin).*** *Si $I = [a,b]$ es un intervalo compacto no degenerado de $\mathbb{R}$ y δ es una función medidora de I, entonces existe una partición etiquetada $\dot{\mathcal{P}}$ de I que es δ-fina.*

Demostración por contradicción: Supongamos que I **no** tiene particiones δ-finas, entonces elegimos $c := (1/2)[a+b]$ y consideramos los subintervalos compactos: $[a,c]$ y $[c,b]$ de I. Ahora bien, alguno de estos subintervalos no tiene particiones δ-finas ya que si ambos tuvieran, al considerar la unión de tales particiones se obtendría una partición δ-fina de I.

Sin perdida de generalidad, supongamos que $I_1 := [a,c]$ es tal subintervalo y lo renombramos como $I_1 = [a_1, b_1]$ y consideramos $c_1 := (1/2)[a_1 + b_1]$, entonces generamos los intervalos $[a_1, c_1]$ y $[c_1, b_1]$.

En consecuencia, alguno de estos intervalos no tiene particiones δ-finas, por el mismo argumento que antes, nuevamente podemos suponer que $I_2 = [a_1, c_1]$ es tal subintervalo. Por lo que renombrando I_2 como $[a_2, b_2]$ y tomando c_2 como el punto medio, obtenemos dos nuevos subintervalos.

De aquí que procediendo de esta manera, construimos una sucesión de subintervalos I_n de I tal que

$$I \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots ,$$

tales que cada I_n es compacto.

Por lo tanto, por la propiedad de la intersección finita, existe un único $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tal que

$$\bar{x} \in \bigcap_{n \geq 1} I_n.$$

Ahora bien, como δ es una función medidora, $\delta(\bar{x}) > 0$ y por la propiedad Arquimediana de $\mathbb{R}$, se tiene que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$l\left(I_p\right) = \frac{b-a}{2^p} < \delta(\bar{x}).$$

Con lo cual, $\bar{x} \in I_p \subset [\bar{x} - \delta(\bar{x}), \bar{x} + \delta(\bar{x})]$ y esto significa que $\{(I_p, \bar{x})\}$ es una partición δ-fina de I_p. Sin embargo, esto es contrario al proceso de construcción de la sucesión I_n dado que cada subintervalo I_n de I **no** contiene particiones δ-finas. □

El Teorema 2.1 es esencial para establecer el concepto de integración de Henstock-Kurzweil y los detalles de su demostración puede consultarse en [7]. Bajo los preceptos anteriores establecemos un concepto de integración más general al dado por Riemann.

Definición 2. *Decimos que una función $f : I \to \mathbb{R}$ es Henstock-Kurzweil integrable en $I = [a,b]$ si existe $A \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe una función medidora δ_ε de I tal que si $\dot{\mathcal{P}} = \left\{(I_j, \tau_j) : j = 1, \ldots, n\right\}$ es cualquier partición etiquetada de I que sea δ_ε-fina, entonces*

$$\left|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - A\right| \leq \varepsilon.$$

En tal caso, escribimos

$$A = \int_I f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

En el caso en que $a = b$, hacemos

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

y si $b < a$, entonces establecemos que

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Esta definición es consistente en el sentido de que en caso de ser integrable la función, el valor de la integral es único.

Teorema 2.2. ***(Teorema de unicidad).*** *Existe a lo mas un numero $A \in \mathbb{R}$ que satisface la propiedad dada en la Definición 2.*

Demostración. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ Henstock-Kurzweil integrable en I y supongamos que existen $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ tales que $A_1 \neq A_2$ y que satisfacen la Definición 2. Entonces tenemos que

$$\varepsilon_0 := \frac{1}{3}|A_1 - A_2| > 0.$$

Por lo que para ε_0 existen funciones medidoras δ_{1,ε_0} y δ_{2,ε_0} de I tales que si $\dot{\mathcal{P}}$ es una partición δ_{1,ε_0}-fina de I, entonces

$$\left|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - A_1\right| \leq \varepsilon_0.$$

También, si $\dot{\mathcal{P}}$ es una partición δ_{2,ε_0}-fina de I, entonces

$$\left|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - A_2\right| \leq \varepsilon_0.$$

Ahora bien, al definir

$$\delta_{\varepsilon_0}(x) := \text{mín}\,\{\delta_{1,\varepsilon_0}(x), \delta_{2,\varepsilon_0}(x)\}$$

para cada $x \in I$, obtenemos que δ_{ε_0} es una función medidora de I tal que si $\dot{\mathcal{P}}$ es una partición δ_{ε_0}-fina de I, entonces

$$|A_1 - A_2| \leq \left|A_1 - S(f, \dot{\mathcal{P}})\right| + \left|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - A_2\right| \leq 2\varepsilon_0 < |A_1 - A_2|.$$

Con lo cual, obtenemos una contradicción. Por lo tanto $A_1 = A_2$. □

Teorema 2.3. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función Riemann integrable en I, entonces f es Henstock-Kurzweil Integrable en I y los valores de las integrales son iguales.*

Demostración. Es suficiente recordar que una función $f : I \to \mathbb{R}$ acotada es Riemann integrable en I con valor A, si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$, existe una **constante** $\gamma > 0$ tal que para cualquier partición

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

y cualesquiera $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ tales que

$$x_{j-1} \leq \tau_j \leq x_j \quad \text{y} \quad x_{j-1} - x_j < \gamma$$

para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, se satisface que

$$\left|\sum_{j=1}^{n} f(\tau_j)(x_{j-1} - x_j) - A\right| < \varepsilon.$$

Así por el Teorema 2.2, de unicidad, se completa la demostración. □

Al denotar a la colección de funciones Riemann integrables en I mediante $\mathcal{R}(I)$ y a la colección respectiva a la integral de Henstock-Kurzweil por $\mathcal{HK}(I)$, obtenemos que

$$\mathcal{R}(I) \subset \mathcal{HK}(I).$$

Además, como consecuencia del Teorema 2.3, denotamos con el mismo símbolo

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

al valor de la integral de una función en $\mathcal{R}(I)$. De hecho la contención es propia como lo muestra la función de Dirichlet dada en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1.1. *En el sentido de Riemman la función característica de los racionales en* $[0, 1]$*, dada por*

$$f(x) := \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], \\ 0 & si\ x \notin \mathbb{Q} \cap [0, 1], \end{cases}$$

no *es integrable en el intervalo* $[0, 1]$*, mientras que en el sentido de Henstock-Kurzweil es integrable y el valor de la integral es igual a cero.*

Demostración. Consideremos una enumeración de $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$, digamos $\{r_k : k \in \mathbb{N}\}$ y sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Entonces definimos la función

$$\delta_\varepsilon(x) := \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{2^{k+1}} & \text{si } x = r_k, \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Ahora bien, sea $\dot{\mathcal{P}} = \left\{(I_j, \tau_j) : j = 1, \ldots, n\right\}$ una partición δ_ε-fina de $[0, 1]$. En consecuencia, si la etiqueta $\tau_j \in I_j$ es irracional, entonces $f(\tau_j) = 0$ y el respectivo sumando en $S(f, \dot{\mathcal{P}})$ es cero. Mientras que si τ_j es racional, entonces $f(\tau_j)l(I_j) = x_j - x_{j-1}$.

Por otra parte, si r_k es la etiqueta para el intervalo I_j, entonces

$$[r_k - \delta_\varepsilon(r_k), r_k + \delta_\varepsilon(r_k)] .$$

Luego, $l(I_j) \leq 2\delta_\varepsilon(r_k) = \varepsilon/2^k$. De hecho, si r_k es la etiqueta para dos subintervalos consecutivos en $\dot{\mathcal{P}}$, entonces la suma de las longitudes de estos dos subintervalos es a lo más $\varepsilon/2^k$.
En resumen, cada elemento r_k aporta a lo más $\varepsilon/2^k$ en la suma $S(f, \dot{\mathcal{P}})$. Por lo tanto,

$$S(f, \dot{\mathcal{P}}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Finalmente podemos concluir que $|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - 0| \leq \varepsilon$. Es decir,

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 0.$$

Los detalles de este ejemplo pueden ser consultados en [40, Ejemplo. 2.5]. □

Las propiedades básicas de la integral de Henstock-Kurzweil en $I = [a, b]$ son las siguientes.

Teorema 2.4. *Sean* $f, g \in \mathcal{HK}(I)$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$*, entonces*

1) $f + g \in \mathcal{HK}(I)$ *con*

$$\int_I (f + g)(x)\, dx = \int_I f(x)\, dx + \int_I g(x)\, dx.$$

2) $\lambda f \in \mathcal{HK}(I)$ *con*

$$\int_I (\lambda f)(x)\, dx = \lambda \int_I f(x)\, dx.$$

3) $f(x) \geq 0$ *para cada* $x \in I$ *implica*

$$\int_I f(x)\, dx \geq 0.$$

4) $f(x) \leq g(x)$ *para cada* $x \in I$ *implica*

$$\int_I f(x)\, dx \leq \int_I g(x)\, dx.$$

Demostración. 1) Primero hacemos

$$A = \int_I f(x)\,dx \quad \text{y} \quad B = \int_I g(x)\,dx.$$

Luego, para cada $\varepsilon > 0$, consideramos dos funciones medidoras de I, $\delta_{1,\varepsilon}$ y $\delta_{2,\varepsilon}$ tales que si

$$\dot{\mathcal{P}} = \left\{(I_j, \tau_j) : j = 1, \dots, n\right\}$$

es una partición etiquetada de I que es $\delta_{1,\varepsilon}$-fina, entonces

$$\left|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - A\right| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

y si $\dot{\mathcal{P}}$ es $\delta_{2,\varepsilon}$-fina, entonces

$$\left|S(g, \dot{\mathcal{P}}) - B\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por lo que al definir

$$\delta_\varepsilon(x) := \min\{\delta_{1,\varepsilon}(x), \delta_{2,\varepsilon}(x)\}$$

para cada $x \in I$, obtenemos que δ_ε es una función medidora de I con la propiedad de que si $\dot{\mathcal{P}}$ es δ_ε-fina, entonces es tanto $\delta_{1,\varepsilon}$-fina y $\delta_{2,\varepsilon}$-fina.

Por otra parte, tenemos que

$$\begin{aligned} S(f+g, \dot{\mathcal{P}}) &= \sum_{j=1}^{n} (f+g)(\tau_j) l\left(I_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} f(\tau_j) l\left(I_j\right) + \sum_{j=1}^{n} g(\tau_j) l\left(I_j\right) \\ &= S(f, \dot{\mathcal{P}}) + S(g, \dot{\mathcal{P}}). \end{aligned}$$

De aquí que

$$\begin{aligned} \left|S(f+g, \dot{\mathcal{P}}) - (A+B)\right| &\leq \left|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - A\right| + \left|S(g, \dot{\mathcal{P}}) - B\right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f + g$ es Henstock-Kurzweil integrable en I con

$$\int_I (f+g)(x)\,dx = A + B = \int_I f(x)\,dx + \int_I g(x)\,dx.$$

2) El resultado es claro si $\lambda = 0$. Ahora bien, para $\lambda \neq 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} \left|S(\lambda f, \dot{\mathcal{P}}) - \lambda \int_I f(x)\,dx\right| &= \left|\sum_{j=1}^{n} (\lambda f)(\tau_j) l\left(I_j\right) - \lambda \int_I f(x)\,dx\right| \\ &= \left|\lambda \sum_{j=1}^{n} f(\tau_j) l\left(I_j\right) - \lambda \int_I f(x)\,dx\right| \\ &= \left|\lambda S(f, \dot{\mathcal{P}}) - \lambda \int_I f(x)\,dx\right| \\ &= |\lambda| \left|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - \int_I f(x)\,dx\right| \end{aligned}$$

para cualquier partición etiquetada $\dot{\mathcal{P}}$ de I.

Ahora bien, como $f \in \mathcal{HK}(\mathbb{R})$, se tiene que para toda $\varepsilon > 0$ existe una medidora δ_ε de I tal que

$$\left|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - \int_I f(x)\,dx\right| \leq \frac{\varepsilon}{|\lambda|},$$

para cualquier partición δ_ε-fina.

En consecuencia,

$$\left|S(\lambda f, \dot{\mathcal{P}}) - \lambda \int_I f(x)\,dx\right| \leq \varepsilon.$$

Es decir, $\lambda f \in \mathcal{HK}(I)$ con

$$\int_I (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_I f(x)\,dx.$$

3) Como $f \in \mathcal{HK}(I)$, entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe una medidora δ_ε de I tal que

$$\left|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - \int_I f(x)\,dx\right| \leq \varepsilon.$$

En particular,

$$S(f, \dot{\mathcal{P}}) - \int_I f(x)\,dx \leq \varepsilon.$$

De hecho, por tener que $f(x) \geq 0$, para cada $x \in I$, se sigue que $S(f, \dot{\mathcal{P}}) \geq 0$. Luego,

$$0 \leq S(f, \dot{\mathcal{P}}) \leq \varepsilon + \int_I f(x)\,dx,$$

para toda $\varepsilon > 0$. Con lo cual,

$$\int_I f(x)\,dx \geq 0.$$

4) Dado que $f(x) \leq g(x)$, para cada $x \in I$, se tiene que $h(x) := g(x) - f(x) \geq 0$, para cada $x \in I$. Entonces de los incisios (1) y (2) de este teorema, se tiene que $h \in \mathcal{HK}(I)$ con

$$\int_I h(x)\,dx = \int_I g(x)\,dx - \int_I f(x)\,dx.$$

Además, por el inciso (3), sabemos que

$$\int_I h(x)\,dx \geq 0.$$

Por lo tanto,

$$\int_I g(x)\,dx \geq \int_I f(x)\,dx.$$

□

Como consecuencia del Teorema 2.4 tenemos que $\mathcal{HK}(I)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Corolario 2.1. *Si $f, |f| \in \mathcal{HK}(I)$, entonces*

$$\left|\int_I f(x)\,dx\right| \leq \int_I |f(x)|\,dx.$$

Demostración. Basta usar que para toda $x \in I$, se satisface que

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|.$$

Así por el Teorema 2.4 se tiene que

$$-\int_I |f(x)|\,dx \leq \int_I f(x)\,dx \leq \int_I |f(x)|\,dx.$$

En conclusión,

$$\left|\int_I f(x)\,dx\right| \leq \int_I |f(x)|\,dx.$$

□

Es importante mencionar que la hipótesis de que el valor absoluto de una función Henstock-Kurzweil integrable sea también integrable es esencial en el Corolario 2.1. Es por tal motivo que se dice que la integral de Henstock-Kurzweil no es absoluta a diferencia de la integral de Lebesgue, ver ejemplo 2.1.3 más adelante.

Dado que en general no se puede anticipar cual debe ser el valor de la integral de una función en $I = [a, b]$, se establece el siguiente método para probar la convegencia de la integral.

Teorema 2.5. ***(Criterio de Cauchy).*** *Sea $f : I \to \mathbb{R}$. Entonces $f \in \mathcal{HK}(I)$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$, existe una medidora η_ε de I tal que si $\dot{\mathcal{P}}$ y $\dot{\mathcal{Q}}$ son cualesquiera particiones η_ε-finas entonces*

$$\left|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - S(f, \dot{\mathcal{Q}})\right| \leq \varepsilon.$$

Demostración. Primero supongamos que $f \in \mathcal{HK}(I)$ con

$$\int_I f(x)\,dx = A.$$

Luego, dado $\varepsilon > 0$, existe una función medidora $\delta_{\varepsilon/2}$ de I tal que si $\dot{\mathcal{P}}$ y $\dot{\mathcal{Q}}$ son particiones δ_ε-finas, entonces

$$|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - A| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |S(f, \dot{\mathcal{Q}}) - A| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En conclusión, por la desigualdad del triángulo,

$$|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - S(f, \dot{\mathcal{Q}})| \leq \varepsilon.$$

Por lo tanto, basta definir $\eta_\varepsilon(x) := \delta_{\varepsilon/2}(x)$, para cada $x \in I$.

Recíprocamente, si suponemos que existe una medidora η_ε de I tal que si $\dot{\mathcal{P}}$ y $\dot{\mathcal{Q}}$ son cualesquiera particiones η_ε-finas tal que

$$\left|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - S(f, \dot{\mathcal{Q}})\right| \leq \varepsilon.$$

Entonces en particular para cada $n \geq 1$, existe una medidora δ_n de I tal que si $\dot{\mathcal{P}}$ y $\dot{\mathcal{Q}}$ son δ_n-finas, se cumple que

$$\left|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - S(f, \dot{\mathcal{Q}})\right| \leq \frac{1}{n}.$$

Esto se asegura tomando medidoras δ_n de tal forma que $\delta_n(x) \geq \delta_{n+1}(x)$, para cada $x \in I$. Esto se cumple al considerar $\delta'_n := \text{mín}\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$.

Luego, para cada $n \geq 1$, si $\dot{\mathcal{P}}_n$ es una partición δ_n-fina entonces $m > n$ implica que tanto $\dot{\mathcal{P}}_m$ como $\dot{\mathcal{P}}_n$ son δ_n-finas y en consecuencia,

$$\left|S(f, \dot{\mathcal{P}}_n) - S(f, \dot{\mathcal{P}}_m)\right| \leq \frac{1}{n}. \tag{2.2}$$

De aquí que $\left\{S(f, \dot{\mathcal{P}}_m)\right\}_{m \geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$, por lo que existe $A \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{m \to \infty} S(f, \dot{\mathcal{P}}_m) = A.$$

Con lo cual, al tomar el límite cuando $m \to \infty$ en (2.2) obtenemos

$$\left|S(f, \dot{\mathcal{P}}_n) - A\right| \leq \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq 1.$$

Finalmente, afirmamos que

$$A = \int_I f(x)\,dx.$$

En efecto, dado $\varepsilon > 0$, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $K > 2/\varepsilon$ y si $\dot{Q}$ es una partición δ_K-fina de I, entonces por la desigualdad del triángulo,

$$\begin{aligned} |S(f,\dot{Q}) - A| &\leq |S(f,\dot{Q}) - S(f,\dot{\mathcal{P}}_K)| + |S(f,\dot{\mathcal{P}}_K) - A| \\ &\leq \frac{1}{K} + \frac{1}{K} = \frac{2}{K} \\ &< \frac{2\,\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Es decir, $f \in \mathcal{HK}(I)$ con

$$\int_I f(x)\,dx = A.$$

□

Los detalles de la demostración del criterio de Cauchy puede consultarse en [7, Teorema 3.6]. Otras propiedades de la integral de Henstocl Kurzweil están dadas a continuación.

Teorema 2.6. ***(Teorema de Aditividad).*** *Sean $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ y $c \in (a,b)$. Entonces $f \in \mathcal{HK}(I)$ si y sólo si las restricciones de f a los subintervalos $[a,c]$ y $[c,b]$ son Henstock-Kurzweil integrables. En tal caso, se cumple que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Corolario 2.2. *Sean $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ y $[c,d] \subseteq I$. Entonces la restricción de f a $[c,d]$ es Henstock-Kurzweil integrable.*

Proposición 2.1. *Sea $f \in \mathcal{HK}(I)$ con $I = [a,b]$ y consideremos $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = b$. Entonces la restricción de f a cada subintervalo $[c_{i-1}, c_i]$ es Henstock-Kurzweil integrable y se satisface que*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)\,dx.$$

La demostración de la Proposición 2.1 se sigue del Teorema 2.6 al aplicar inducción matemática. Otro aspecto importante de la integral de Henstock-Kurzweil en $I = [a,b]$ es su relación con el concepto de derivada de una función.

Definición 3. *Sean $f, F : I \to \mathbb{R}$, entonces*

1) *F es una primitiva de f en I si la derivada de F existe en cada punto de I y además, satisface que $F'(x) = f(x)$, para toda $x \in I$.*

2) *F es una a-primitiva de f en I si F es continua en I y existe un conjunto nulo E de elementos de I tal que $F'(x)$ no existe o bien $F'(x)$ existe pero $F'(x) \neq f(x)$. El conjunto E recibe el nombre de conjunto excepcional de f.*

3) *F es una c-primitiva de f en I si F es continua en I y el conjunto excepcional E de f es contable.*

4) *F es una f-primitiva de f en I si F es continua en I y el conjunto excepcional E de f es finito.*

5) *Si $f \in \mathcal{HK}(I)$ y $u \in I$, entonces la función $F_u : I \to \mathbb{R}$ definida mediante*

$$F_u(x) := \int_u^x f(s)\,ds$$

recibe el nombre de integral indefinida de f con punto base u. En el caso en que el punto base u coincida con el extremo izquierdo de I, es decir, cuando $u = a$, escribimos simplemente F en vez de F_a. Más aún, cualquier función que difiera de F_a por una constante será llamada integral indefinida de f.

Bajo las condiciones de la Definición 3 podemos establecer dos versiones del teorema fundamental del cálculo que garantizan que la derivada de cualquier función en $I = [a, b]$ es Henstock-Kurzweil integrable en I. Sin embargo, requerimos primero de un resultado técnico.

Lema 2.1. ***(Lema de Straddle).*** *Sea $F : I \to \mathbb{R}$ diferenciable en cada punto x de I. Entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_\varepsilon(x) > 0$ tal que si $u, v \in I$ satisfacen*

$$x - \delta_\varepsilon(x) \leq u \leq x \leq v \leq x + \delta_\varepsilon(x),$$

entonces

$$|F(v) - F(u) - F'(x)(v - u)| \leq \varepsilon(v - u). \tag{2.3}$$

La demostración del Lema 2.1 es consecuencia de la definición de derivación de una función y los detalles pueden ser consultados en [7, Lema 4.4].

Teorema 2.7. ***(Teorema fundamental I).*** *Si $f : I \to \mathbb{R}$ tiene una primitiva F en I, entonces $f \in \mathcal{HK}(I)$ con*

$$\int_I f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y consideramos una función medidora δ_ε dada por el Lema 2.1. Además, dada una partición $\dot{\mathcal{P}} = \{[x_{i-1}, x_i], t_i\}_{i=1}^n$ que sea δ_ε-fina de I, obtenemos por la condición (2.3) aplicada a x_{i-1} y x_i la siguiente desigualdad:

$$|F(x_i) - F(x_{i-1}) - F'(t_i)(x_i - x_{i-1})| \leq \varepsilon(x_i - x_{i-1}), \tag{2.4}$$

para cada $i = 1, \ldots, n$.

Por otra parte, sabemos que

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n F(x_i) - F(x_{i-1}).$$

En consecuencia,

$$F(b) - F(a) - S\left(f, \dot{\mathcal{P}}\right) = \sum_{i=1}^n F(x_i) - F(x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Luego,

$$\left|F(b) - F(a) - S\left(f, \dot{\mathcal{P}}\right)\right| \leq \sum_{i=1}^n |F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(t_i)(x_i - x_{i-1})|\,.$$

Con lo cual, de (2.4) concluimos

$$\left|F(b) - F(a) - S\left(f, \dot{\mathcal{P}}\right)\right| \leq \sum_{i=1}^n \varepsilon(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b - a).$$

Por lo tanto, $f \in HK(I)$ con

$$\int_I f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

ya que $\varepsilon > 0$ es arbitrario. □

El Teorema 2.7 se puede reescribir de la siguiente manera: Si $F : I \to \mathbb{R}$ es diferenciable en cada punto de I, entonces $F' \in \mathcal{HK}(I)$ y cumple que

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Teorema 2.8. ***(Teorema fundamental I*).*** *Si $f : I \to \mathbb{R}$ tiene una c-primitiva F en I, entonces $f \in \mathcal{HK}(I)$ con*

$$\int_I f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

La demostración del Teorema 2.8 puede ser consultada en [7, Teorema 4.7]. En consecuencia, si F es una c-primitiva de f en $I = [a, b]$, entonces $f \in \mathcal{HK}[a, b]$ y F es la integral indefinida de f.

Ejemplo 2.1.2. *Sea* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} & si\ x \in (0, 1], \\ 0 & si\ x = 0. \end{cases}$$

Entonces f *no es acotada en* $[0, 1]$*, ver figura 2.1, en consecuencia,* $f \notin \mathcal{R}[0, 1]$*. Sin embargo, al considerar la función* $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *con* $F(x) := 2\sqrt{x}$*, para cada* $x \in [0, 1]$ *obtenemos que* F *es continua en* $[0, 1]$ *y* F *derivable en* $(0, 1]$ *con* $F'(x) = f(x)$*, para toda* $x \in (0, 1]$*. De hecho, el conjunto excepcional de* f *es* $E = \{0\}$ *ya que* $F'(0)$ *no existe y* $f \in \mathcal{HK}[0, 1]$ *con*

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2.$$

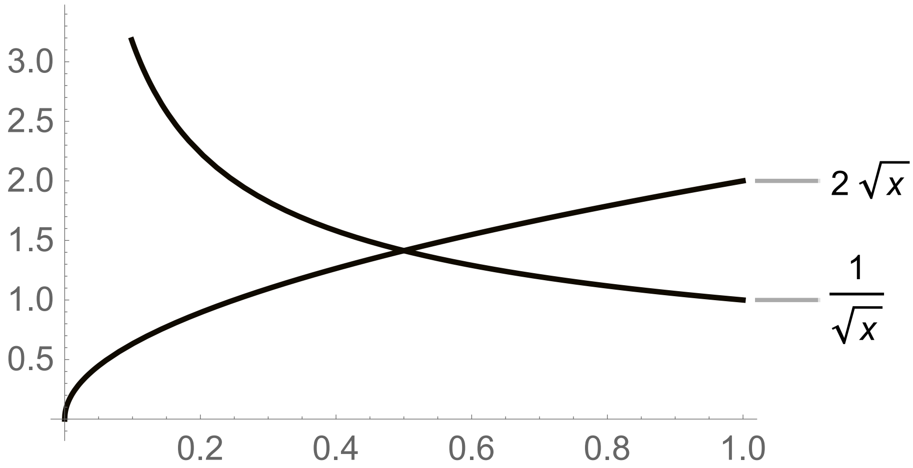

Figura 2.1: $f(x) := 1/\sqrt{x}$, para $x \in (0, 1]$ y $f(0) := 0$ y $F(x) := 2\sqrt{x}$, para $x \in [0, 1]$.

Además, tenemos la versión del teorema fundamental del calculo respecto a la “derivada de la integral”.

Teorema 2.9. ***(Teorema fundamental II).*** *Sea* $f \in \mathcal{HK}(I)$ *tal que*

$$\lim_{s \to c^+} f(s) = A \in \mathbb{R}$$

para algún $c \in [a, b)$*. Entonces la integral indefinida*

$$F_u(x) = \int_u^x f(s)\, ds$$

tiene derivada por la derecha en c *y es igual a* A*.*

Como consecuencia del teorema fundamental II tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.3. *Sea* $f \in \mathcal{HK}(I)$ *continua en* $c \in [a, b]$*. Entonces la integral indefinida* F_u *de* f *es diferenciable en* c *y* $F_u'(c) = f(c)$*.*

En conclusión, para funciones continuas tenemos el siguiente enunciado.

Corolario 2.4. *Sea* $f : I \to \mathbb{R}$ *continua en* $I = [a, b]$*. Entonces cualquier integral indefinida* F *de* f *es diferenciable en* I *y satisface que* $F'(x) = f(x)$*, para toda* $x \in I$*.*

En general para funciones en $\mathcal{HK}(I)$ con $I = [a, b]$ tenemos la siguiente versión del teorema fundamental II.

Teorema 2.10. ***(Teorema fundamental II*).*** *Sea $f \in \mathcal{HK}(I)$, entonces cualquier integral indefinida F de f es continua en I y es una a-primitiva de f en I. Es decir, existe un conjunto nulo $Z \subset I$ tal que $F'(x) = f(x)$ para toda $x \in I \setminus Z$.*

La demostración del Teorema 2.10 se puede consultar en [7, Thoerem 4.11].

Ejemplo 2.1.3. *Sea $f(x) := x\cos(\pi/x)$ para $x \in (0,1]$ y $f(0) := 0$. Entonces*

$$f'(x) = \cos(\pi/x) + (\pi/x)\,\mathrm{sen}(\pi/x), \quad \forall x \in (0,1]$$

y estableciendo que $f'(0) := 0$, obtenemos que $|f'|$ no es Henstock-Kurzweil integrable sobre $[0,1]$.

Esto se sigue de las propiedades de la función coseno ya que al considerar

$$a_k := \frac{2}{2k+1} \quad \text{y} \quad b_k := \frac{1}{k},$$

donde $k \in \mathbb{N}$, el valor de $f(a_k)$ es cero, mientras que el de $f(b_k)$ es $(-1)^k/k$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Además, $0 < a_k < b_k < a_{k-1} < b_{k-1} < 1$, para toda $k > 1$. Por lo que del Teorema fundamental I, [7, Teorema 4.5], se sigue que

$$\frac{1}{k} = |f(b_k) - f(a_k)| = \left| \int_{a_k}^{b_k} f'(x)\,dx \right| \leq \int_{a_k}^{b_k} |f'(x)|\,dx.$$

Por lo que si $|f'|$ perteneciera a $\mathcal{HK}[0,1]$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} |f'(x)|\,dx \leq \int_0^1 |f'(x)|\,dx,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo, dado que la serie armónica es divergente, concluimos que $|f'| \notin \mathcal{HK}[0,1]$, véase figuras 2.2 y 2.3. Los detalles del ejemplo 2.1.3 pueden consultarse en [7, Ejemplo 7.2(b)].

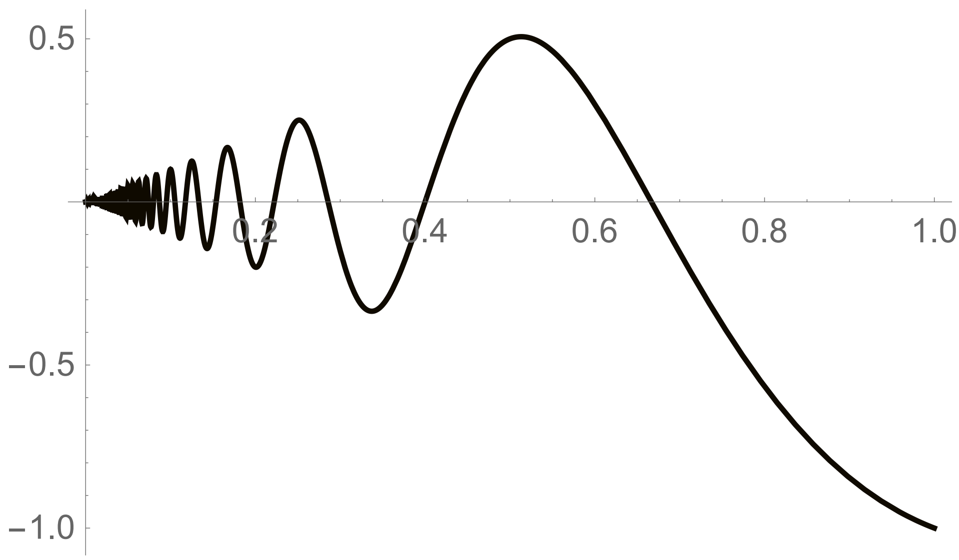

Figura 2.2: $f(x) := x\cos(\pi/x)$, para $x \in (0,1]$.

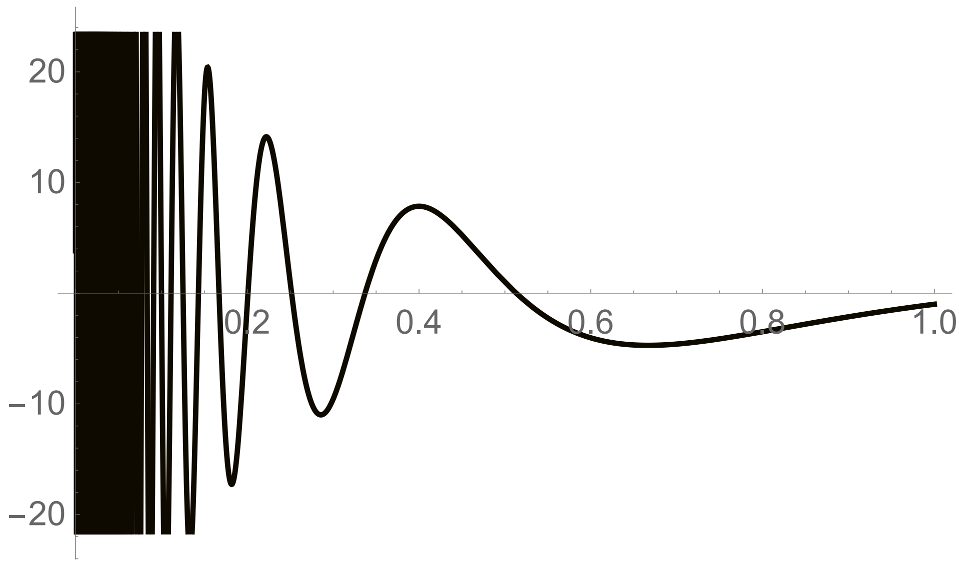

Figura 2.3: $f'(x) = \cos(\pi/x) + (\pi/x)\,\mathrm{sen}(\pi/x)$, para $x \in (0, 1]$.

Definición 4. *Decimos que $f : I \to \mathbb{R}$ es de variación acotada en $I = [a, b]$, si*

$$\mathrm{Var}(f, I) := \sup\left\{\sum_{j=1}^{n} |f(\alpha_j) - f(\alpha_{j-1})|\right\} < \infty, \tag{2.5}$$

donde el supremo es tomado sobre todas las particiones finitas $\mathcal{P} = \{[\alpha_{j-1}, \alpha_j] : j = 1, \dots, n\}$ del intervalo $I = [a, b]$. El espacio vectorial de todas las funciones de variación acotada, ver Proposición 2.2 más adelante, se denota mediante $BV(I)$, el cual es dotado con la siguiente norma

$$||f||_{BV(I)} := |f(a)| + \mathrm{Var}(f, I).$$

Es inmediato de la Definición 4 que toda función $f : I \to \mathbb{R}$ no decreciente, es decir, una función tal que

$$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \quad \forall x, y \in I,$$

es de variación acotada en I ya que para cualquier partición de I se sigue que

$$\sum_{j=1}^{n} |f(\alpha_j) - f(\alpha_{j-1})| = f(b) - f(a).$$

Con lo cual, $\mathrm{Var}(f, I) = f(b) - f(a)$.

De igual manera, se demuestra que si $f : I \to \mathbb{R}$ es no creciente, entonces f es de variación acotada con $\mathrm{Var}(f, I) = f(a) - f(b)$. Por lo tanto, toda función monótona en I es elemento del espacio $BV(I)$.

Las propiedades básicas de las funciones de variación acotada en $I = [a, b]$ están dadas a continuación.

Proposición 2.2. *Sean $f, g \in BV(I)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces*

1) $\mathrm{Var}(f, I) = 0$ *si y sólo si $f(x) = f(a)$, para toda $x \in I$.*

2) $a \leq x \leq y \leq b$ *implica* $|f(x) - f(y)| \leq \mathrm{Var}(f, [x, y]) \leq \mathrm{Var}(f, I)$.

3) $|f(x)| \leq |f(a)| + \mathrm{Var}(f, I)$*, para toda $x \in I$.*

4) $\lambda f \in BV(I)$ *con* $\mathrm{Var}(\lambda f, I) = |\lambda|\,\mathrm{Var}(f, I)$.

5) $f \pm g \in BV(I)$ *con* $\mathrm{Var}(f \pm g, I) \leq \mathrm{Var}(f, I) + \mathrm{Var}(g, I)$.

6) El producto usual de funciones $(fg)(x) := f(x)g(x)$*, para toda* $x \in I$*, pertenece a* $BV(I)$ *con*

$$\mathrm{Var}(fg, I) \leq M\Big[\mathrm{Var}(f, I) + \mathrm{Var}(g, I)\Big],$$

donde M *es tal que* $|f(x)| \leq M$ *y* $|g(x)| \leq M$*, para toda* $x \in I$.

La demostración de la Proposición 2.2 puede consultarse en [7, Capítulo 7] y en [27, Capítulo 4]. El siguiente teorema caracteriza a las funciones de variación acotadas en $I = [a, b]$.

Teorema 2.11. ***(Teorema de Camille Jordan).*** *Sea* $f : I \to \mathbb{R}$*, entonces* $f \in BV(I)$ *si y sólo si existen funciones* $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ *no decrecientes tales que* $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$*, para toda* $x \in \mathbb{R}$.

Demostración. Primero, si $f_j : I \to \mathbb{R}$ es no decreciente en I, entonces f_j pertenece a $BV(I)$ para cada $j = 1, 2$. Luego por la Proposición 2.2 obtenemos que $f_1 - f_2$ pertenece a $BV(I)$.

Ahora bien, si $f \in BV(I)$, entonces al definir $f_1 : I \to \mathbb{R}$ mediante

$$f_1(x) := \mathrm{Var}(f, [a, x]).$$

Deducimos que f_1 es no decreciente en I. Además, definimos $f_2(x) := f_1(x) - f(x)$, para cada $x \in I$, en consecuencia, $f = f_1 - f_2$.

Por último, hay que mostrar que f_2 es no decreciente en I. En efecto, si $a \leq x < y \leq b$, entonces por la Proposición 2.2, sabemos que

$$\begin{aligned} f_1(y) - f_1(x) &= \mathrm{Var}(f, [a, y]) - \mathrm{Var}(f, [a, x]) \\ &= \mathrm{Var}(f, [x, y]) \\ &\geq |f(y) - f(x)| \\ &\geq f(y) - f(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$f_1(y) - f(y) \geq f_1(x) - f(x),$$

si $a \leq x < y \leq b$. Es decir,

$$f_2(y) \geq f_2(x),$$

si $a \leq x < y \leq b$. □

Los detalles de estos resultados pueden ser consultados en [27, Teorema 4.4]. De hecho, en [57, Teorema 2.41] se tiene la siguiente descomposición de las funciones de variación acotada en $I = [a, b]$ a través del espacio de las funciones continuas $C[a, b]$ y del espacio de las funciones de paso $B[a, b]$, que definimos a continuación.

Definición 5. ***(Función de paso finito).*** *Decimos que* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es una función de paso finito si y sólo si existe una partición* $\alpha := \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ *de* $[a, b]$ *tal que* f *es constante en cada subintervalo abierto* (α_{j-1}, α_j)*, donde* $j = 1, \ldots, m$.

Definición 6. ***(Función de paso).*** *Decimos que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función de paso en $[a,b]$ si f es una función de paso finto o bien existen $c, c_0, d \in \mathbb{R}$ junto con una sucesión no repetitiva $\{s_k\}_{k\geq 1}$ en (a,b) y sucesiones $\{c_k\}_{k\geq 1}, \{d_k\}_{k\geq 1}$ en $\mathbb{R}$ tales que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| + |d_k| < \infty$$

y

$$\begin{aligned} f(x) &= c + c_0\chi_{(a,b]}(x) + d\chi_{[b]}(x) \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty}\Big(c_k\chi_{(s_k,b]}(x) + d_k\chi_{[s_k,b]}(x)\Big), \end{aligned}$$

para cada $x \in [a,b]$. El conjunto de las funciones de paso en $[a,b]$ se denota por $B[a,b]$.

La Definición 6 puede ser consultada en [57, Definición 2.36].

Teorema 2.12. *Para cada $f \in BV[a,b]$ existen funciones $f_1 \in BV[a,b] \cap C[a,b]$ y $f_2 \in B[a,b]$ tales que $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, para toda $x \in [a,b]$.*

La relación entre la integral de Henstock-Kurzweil y el concepto de variación acotada esta dada mediante el siguiente teorema.

Teorema 2.13. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ Henstock-Kurzweil integrable en $I = [a,b]$. Entonces $|f|$ es Henstock-Kurzweil integrable en I si y sólo si la integral indefinida de f,*

$$F(x) = \int_a^x f(s)\,ds \quad (x \leq b)$$

es de variación acotada en I. En tal caso,

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = \mathrm{Var}(F, [a,b]).$$

La demostración del Teorema 2.13 puede consultarse en [7, Teorema 7.5].

Ahora bien, consideramos la colección de funciones dada por

$$\mathcal{L}(I) := \left\{ f \in \mathcal{HK}(I) \;\middle|\; |f| \in \mathcal{HK}(I) \right\}.$$

Otra forma para comprobar la integrabilidad del valor absoluto de una función en $I = [a,b]$ esta dado por el siguiente criterio de comparación.

Teorema 2.14. ***(Prueba de Comparación para la Integrabilidad Absoluta).*** *Sean $f, g \in \mathcal{HK}(I)$ tales que $|f(x)| \leq g(x)$, para cada $x \in I$. Entonces $f \in \mathcal{L}(I)$ y*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Demostración. Sea

$$F(x) = \int_a^x f(s)\,ds,$$

con $x \in [a,b]$ y consideremos $\mathcal{P} = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^n$ una partición, arbitraria, de I. Entonces

$$|F(x_i) - F(x_{i-1})| = \left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(s)\,ds\right|$$

para cada $i = 1, \ldots, n$.

Con lo cual, del Teorema 2.4, se sigue que

$$|F(x_i) - F(x_{i-1})| \leq \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} g(s)\,ds$$

para cada $i = 1, \ldots, n$.
Por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{n} |F(x_i) - F(x_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} g(s)\,ds.$$

Es decir,

$$\mathrm{Var}(F, I) \leq \int_a^b g(s)\,ds.$$

Con lo cual, $F \in BV(I)$. Así por el Teorema 2.13 resulta que $|f| \in \mathcal{HK}(I)$ y se cumple que

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

□

Con lo cual se cumplen las siguientes propiedades para el conjunto $\mathcal{L}(I)$ con $I = [a, b]$.

Proposición 2.3. *Sean $f, g \in \mathcal{L}(I)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces*

1) $f + g \in \mathcal{L}(I)$.

2) $\lambda f \in \mathcal{L}(I)$.

Los elementos de $\mathcal{L}(I)$ se caracterizan de la siguiente manera.

Proposición 2.4. *Sea $f \in \mathcal{HK}(I)$. Entonces son equivalentes:*

1) $f \in \mathcal{L}(I)$.

2) Existe $\omega \in \mathcal{L}(I)$ tal que $f(x) \leq \omega(x)$, para cada $x \in I$.

3) Existe $\alpha \in \mathcal{L}(I)$ tal que $\alpha(x) \leq f(x)$, para cada $x \in I$.

Una propiedad importante de las funciones en $\mathcal{L}(I)$ es el lema de Riemann-Lebesgue el cual se mencionará en los capítulos siguientes.

Lema 2.2. ***(Lema de Riemann Lebesgue).*** *Sean $f \in \mathcal{L}[a, b]$ y $\beta \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{sen}(\alpha x + \beta)\,dx = 0.$$

Los detalles del Lema 2.2 pueden ser consultados en [7, Teorema 9.17]. Por último, hacemos mención de una colección particular de funciones de variación acotada en un intervalo compacto $I = [a, b]$.

Definición 7. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$. Decimos que f es absolutamente continua en I, si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\eta_\varepsilon > 0$ tal que*

$$\sum_{j=1}^{s} \left| f(v_j) - f(u_j) \right| \leq \varepsilon,$$

cuando $\{[u_j, v_j]\}_{j=1}^{s}$ es una subpartición finita de intervalos no traslapados de I tal que satisface

$$\sum_{j=1}^{s} |u_j - v_j| \leq \eta_\varepsilon.$$

El conjunto de funciones absolutamente continuas en I es denotado por $AC(I)$.

Las propiedades básicas del conjunto $AC(I)$ son dadas a continuación.

Teorema 2.15. *Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces*

1) $f \in AC(I)$ implica f es uniformemente continua en I.

2) $f \in AC(I)$ implica $f \in BV(I)$.

3) $f, g \in AC(I)$ implica que las funciones

   a) *λf,*

   b) *$|f|$,*

   c) *$f \pm g$,*

   d) *fg, (producto usual)*

   pertenecen a $AC(I)$.

Por lo tanto, el conjunto $AC(I)$ es un espacio vectorial real que es cerrado bajo el producto y además, satisface que $AC(I) \subset BV(I)$. De hecho, se tiene la siguiente caracterización del espacio $AC(I)$.

Teorema 2.16. ***(Teorema de Caracterización de** $AC(I)$**).*** *Sea $f : I \to \mathbb{R}$. Entonces $f \in AC(I)$ si y sólo si f es la integral indefinida de una función en $\mathcal{L}(I)$.*

El Teorema 2.16 es conocido como “caracterización descriptiva” de las funciones absolutamente integrables, dado que da condiciones necesarias y suficientes para que una función sea la integral indefinida de una función en $\mathcal{L}(I)$. Véase [7, Teorema 14.7].

Corolario 2.5. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ no decreciente en $I = [a, b]$. Entonces $f \in AC(I)$ si y sólo si*

$$\int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a).$$

Las funciones absolutamente continuas están relacionadas con la **medida de Lebesgue** y la **integral de Lebesgue** de la siguiente manera.

Proposición 2.5. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ medible en $I = [a, b]$ tal que f es acotada. Entonces f y $|f|$ pertenecen a $\mathcal{HK}(I)$.*

La demostración de la Proposición 2.5 puede ser consultada en [7, Corolario 6.10]. Los detalles del concepto de función medible y de la construcción de la integral de Lebesgue pueden ser revisados en [69, 70].

Teorema 2.17. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ Lebesgue integrable en $I = [a, b]$. Entonces*

$$F(x) = \int_a^x f(s)\, ds \quad (a \leq x \leq b)$$

pertenece al espacio $AC(I)$ y cumple que $F' = f$ en I salvo un conjunto de medida cero.

La demostración del Teorema 2.17 puede consultarse en [27, Teorema 4.12]. A manera de reciproco del Teorema 2.17 tenemos:

Teorema 2.18. *Sea $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $f \in AC(I)$. Entonces f' es Lebesgue integrable en I y cumple que*

$$\int_a^x f'(s)\, dx = f(x) - f(a),$$

para toda $x \in I$.

La demostración del Teorema 2.18 puede consultarse en [27, Teorema 4.14]. En consecuencia de los Teoremas 2.17 y 2.18 se puede definir de manera descriptiva la integral de Lebesgue. Véase [27, Teorema 4.15].

Teorema 2.19. *Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es Lebesgue integrable en $[a, b]$ si y sólo si existe $F \in AC[a, b]$ tal que $F' = f$ en $[a, b]$ salvo un conjunto de medida cero.*

Observación 1. *El Teorema 2.19 sólo es válido para intervalos compactos $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ya que por ejemplo, al considerar la función $F(x) = x$, para cada $x \in \mathbb{R}$, entonces F cumple la Definición 7 sin embargo, la derivada F'* ***no*** *es Lebesgue integrable en $\mathbb{R}$.*

Los detalles de esta sección pueden ser consultadas en [27, Capítulo 4] y por último enunciamos la relación de las funciones de paso con la integral de Henstock-Kurzweil.

Teorema 2.20. *Sea $f \in HK[a, b]$, entonces f es el límite de una sucesión de funciones de paso salvo un conjunto de medida cero.*

La demostración del Teorema 2.20 puede consultarse en [40, Teorema 5.10]. Por lo tanto, si $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ es compacto, entonces para que una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sea tal que $|f| \in HK[a, b]$ es necesario y suficiente que su primitiva F sea absolutamente continua en $[a, b]$ y $F'(x) = f(x)$ salvo un conjunto de medida de Lebesgue cero. En consecuencia, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.21. *Toda función Lebesgue integrable en $[a, b]$ es Henstock-Kurzweil integrable en $[a, b]$ y los valores de las integrales coinciden.*

En símbolos,

$$\mathcal{L}(I) = \left\{ f : I \to \mathbb{R} \,\middle|\, f \text{ es Lebesgue integrable en } I \right\},$$

donde $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ es un intervalo **compacto**. Esto puede consultarse en el capítulo 1, sección 5 de [40] y en el capítulo 9 de [27]. Por lo tanto, del Teorema 2.3 se sigue que

$$\mathcal{R}(I) \subset \mathcal{L}(I) \subset \mathcal{HK}(I).$$

De hecho, estas relaciones de contención se mantienen para intervalos no acotados.

2.2. Integración sobre intervalos infinitos

Para definir la integral de Henstock-Kurzweil sobre intervalos infinitos, es decir, en intervalos de la forma

$$[-\infty, a], [a, \infty] \text{ ó } [-\infty, \infty].$$

Primero establecemos en el conjunto de los números reales extendidos, $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, una relación de orden mediante

$$-\infty < x < \infty,$$

para cada $x \in \mathbb{R}$. También, definimos

$$x + (\pm\infty) = \pm\infty = (\pm\infty) + x,$$

para cada $x \in \mathbb{R}$. Además,

$$\infty + \infty = \infty \quad \text{y} \quad -\infty - \infty = -\infty.$$

Más aún, para cada $x \in \mathbb{R}$, decimos que

$$0 \cdot (\pm\infty) = 0 = (\pm\infty) \cdot 0,$$

mientras que para $x > 0$, hacemos

$$x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty = (\pm\infty) \cdot x,$$

y cuando $x < 0$,

$$x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty = (\pm\infty) \cdot x.$$

Por otra parte, establecemos que la longitud de un intervalo infinito I, esta dada por $l(I) := \infty$, es decir, I tiene medida infinita y para cada función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, siempre consideramos su extensión a $\overline{\mathbb{R}}$ estableciendo que la función toma el valor *cero* en los puntos ∞ y $-\infty$.

Definición 8. *Sea $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ un intervalo infinito, decimos que una función $\delta : I \to (0, \infty)$ es una función medidora o carga del intervalo I. Además, decimos que una partición $\mathcal{P}$ del intervalo I, es una colección finita de subintervalos de I cerrados y que no se traslapan cuya unión es I, más aún, decimos que una partición etiquetada $\dot{\mathcal{P}}$ es una colección de parejas ordenadas $\dot{\mathcal{P}} = \left\{(I_j, \tau_j) : j = 1, \dots, n\right\}$ tal que $\mathcal{P} = \{I_j : j = 1, \dots, n\}$ es una partición de I con $\tau_j \in I_j$ para cada $j = 1, \dots, n$.*

De igual manera que en la sección 2.1, para una función $f : I \to \mathbb{R}$ tenemos las suma de Riemann asociada a la partición etiqueta $\dot{\mathcal{P}}$ dada por

$$S(f, \dot{\mathcal{P}}) := \sum_{j=1}^{n} f(\tau_j) l(I_j).$$

Definición 9. *Sean $I = [a, b] \subset \overline{\mathbb{R}}$ un intervalo infinito y δ una función medidora de I. Decimos que una partición etiquetada $\dot{\mathcal{P}} = \left\{(I_j, \tau_j) : j = 1, \dots, n\right\}$ de $[a, b]$ es δ-fina con respecto a los siguientes casos:*
Para $a \in \mathbb{R}$ y $b = \infty$:

1) $a = x_0, b = x_n = \tau_n = \infty$.

2) $[x_{j-1}, x_j] \subset [\tau_j - \delta(\tau_j), \tau_j + \delta(\tau_j)]$, *para cada* $j = 1, \dots, n-1$.

3) $[x_{n-1}, \infty] \subset [1/\delta(\tau_n), \infty]$.

Para $a = -\infty$ y $b \in \mathbb{R}$:

1) $a = x_0 = \tau_1 = -\infty$ *y* $b = x_n$.

2) $[x_{j-1}, x_j] \subset [\tau_j - \delta(\tau_j), \tau_j + \delta(\tau_j)]$, *para cada* $j = 2, \dots, n$.

3) $[-\infty, x_1] \subset [-\infty, -1/\delta(\tau_1)]$.

Para $a = -\infty$ y $b = \infty$:

1) $a = x_0 = \tau_1 = -\infty, b = x_n = \tau_n = \infty$.

2) $[x_{j-1}, x_j] \subset [\tau_j - \delta(\tau_j), \tau_j + \delta(\tau_j)]$, *para cada* $j = 2, \dots, n-1$.

3) $[-\infty, x_1] \subset [-\infty, -1/\delta(\tau_1)]$ *y* $[x_{n-1}, \infty] \subset [1/\delta(\tau_n), \infty]$.

En relación directa con el Teorema de Cousin 2.1, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.22. *Sean $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ un intervalo infinito y δ una función medidora de I. Entonces existe una partición etiquetada δ-fina de I. (Ver [76, Capítulo 4])*

Definición 10. *Sea $I = [a, b] \subset \overline{\mathbb{R}}$ un intervalo infinito. Decimos que $f : I \to \mathbb{R}$ es Henstock-Kurzweil integrable en I si existe $A \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe una función medidora δ_ε de I tal que si $\dot{\mathcal{P}} = \left\{(I_j, \tau_j) : j = 1, \dots, n\right\}$ es cualquier partición etiquetada de I que sea δ_ε-fina, entonces*

$$\left|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - A\right| \leq \varepsilon.$$

En tal caso, escribimos

$$A = \int_I f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Ahora bien, dado un intervalo $I \subset \overline{\mathbb{R}}$, compacto o infinito, denotamos por $\mathcal{HK}(I)$, el espacio vectorial real de las funciones Henstock-Kurzweil integrables en I. Este espacio vectorial es seminormado con respecto a

$$\|f\|_{\mathcal{HK}} = \sup\left\{\left|\int_c^d f(x)\,dx\right| : [c,d] \subset I\right\}. \tag{2.6}$$

La asignación dada en (2.6), se conoce como seminorma de Alexiewicz. Consecuentemente al considerar el espacio cociente $HK(I) := \mathcal{HK}(I)/\mathcal{W}(I)$ donde $\mathcal{W}(I)$ es el subespacio de $\mathcal{HK}(I)$ para el cual la seminorma de Alexiewicz se desvanece, obtenemos un espacio vectorial normado el cual no es de Banach, ver [10, 79], por lo que su completación es denotada mediante $\widehat{HK}(I)$.

Observación 2. *Si $f = 0$ en I salvo un conjunto de medida cero, entonces*

$$\int_I f(x)\,dx = 0.$$

Esto se sigue del Teorema 3.5 en [40]. Además, la única función constante integrable en $[-\infty, \infty]$ es la función constante cero.

Observación 3. *En el espacio $HK(I)$, existe una norma equivalente a la de Alexiewicz dada por*

$$\|f\|'_{HK} = \sup_{x \in I}\left\{\left|\int_a^x f(s)\,ds\right|\right\}. \tag{2.7}$$

De hecho, se satisface que

$$\|f\|'_{HK} \leq \|f\|_{HK} \leq 2\|f\|'_{HK},$$

para cada $f \in HK(I)$.

Observación 4. *En [62] se probo que el espacio*

$$\mathcal{B}_C = \left\{F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : F \text{ es continua en } \mathbb{R}, \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \text{ y } \lim_{x \to \infty} F(x) \in \mathbb{R}\right\}$$

con la norma del supremo es isomorfo a $\widehat{HK}(\mathbb{R})$ y en [79] fue probado que $\mathcal{B}_C$ es isomorfo al espacio de las distribuciones integrables

$$\mathcal{A}_C = \left\{f \in \mathcal{D}' : f = F', F \in \mathcal{B}_C\right\}$$

donde $\mathcal{D}'$ denota las funciones lineales continuas (también conocidas como funcionales lineales continuas) en el espacio de las funciones de prueba $\mathcal{D} = C_c^\infty(\mathbb{R})$ y una distribución f es integrable si y sólo si es la derivada distribucional de una función F en $\mathcal{B}_C$.

La caracterización de las funciones Henstock-Kurzweil integrables en $\mathbb{R}$ esta dada por el siguiente resultado que puede ser consultado en [7, Teorema 16.7].

Teorema 2.23. ***(Teorema de Hake sobre** $[-\infty, \infty]$**).** Sea $f : [-\infty, \infty] \to \mathbb{R}$. Entonces son equivalentes:*

1) *$f \in HK[-\infty, \infty]$ con integral $A \in \mathbb{R}$.*

2) *$f \in HK[a, b]$ para todo intervalo compacto $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y*

$$\lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b h(x)\,dx = A.$$

3) *Para cualquier $c \in \mathbb{R}$, la función f es elemento de $HK[-\infty, c]$ y de $HK[c, \infty]$, y*

$$\int_{-\infty}^c h(x)\,dx + \int_c^\infty h(x)\,dx = A.$$

Cabe mencionar que se tienen versiones análogas al Teorema de Hake para intervalos del tipo $[a, b], [a, \infty]$ y $[-\infty, b]$.

Como consecuencia del Teorema de Hake, se tienen los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.2.1.

1) Sea $f_r(x) := x^r$, para cada $x \in (0,1]$ y $f_r(0) := 0$. Si $r+1 > 0$, entonces la función $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) := \frac{x^{r+1}}{r+1}$$

es una c-primitiva de f con conjunto excepcional $\{0\}$ ó $\emptyset$. Por lo tanto, $f_r \in HK[0,1]$ con

$$\int_0^1 x^r\,dx = \left.\frac{x^{r+1}}{r+1}\right|_0^1 = \frac{1}{r+1}$$

para cada $r > -1$.

2) Sea $c \in (0,1)$, entonces la función $x \mapsto x^{-1}$ definida en $[c,1]$ tiene como primitiva a la función $x \mapsto \log(x)$, en $[c,1]$. Con lo cual,

$$\int_c^1 \frac{1}{x}\,dx = \log(x)\Big|_c^1 = -\log(c)$$

para cada $c \in (0,1)$. Sin embargo, dado que

$$\lim_{c\to 0^+} \log(c) = -\infty,$$

concluimos por el Teorema de Hake que la función $x \mapsto x^{-1}$ no pertenece a $HK[0,1]$.

3) Sea $r > 1$, entonces la función $x \mapsto x^r$ en $(0,1)$ satisface que $x^r < x$ y en consecuencia,

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{x^r}$$

en $(0,1)$. Por lo tanto, $x \mapsto x^{-r}$ no pertenece a $HK[0,1]$ con $r > 1$.

Ejemplo 2.2.2. *La función $f(x) = x^{-1}\operatorname{sen}(x)$, con $x \neq 0$ y $f(0) := 1$ pertenece al espacio $HK(\mathbb{R})$. De hecho,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,dx = \pi.$$

Los detalles de esta importante integral puede consultarse en [3, 7, 29, 35], mientras que la gráfica de f se muestra en la figura 2.4.

Por otro parte, en relación directa con la Definición 4 tenemos el siguiente concepto.

Definición 11. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Decimos que f es de variación acotada sobre $\mathbb{R}$, si existe el límite*

$$\operatorname{Var}(f,\mathbb{R}) := \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \operatorname{Var}(f,[a,b]).$$

Además, denotamos por $BV(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las funciones de variación acotada sobre $\mathbb{R}$, el cual es dotado con la norma

$$\|f\|_{BV(\mathbb{R})} := \operatorname{Var}(f,\mathbb{R}) + f(0).$$

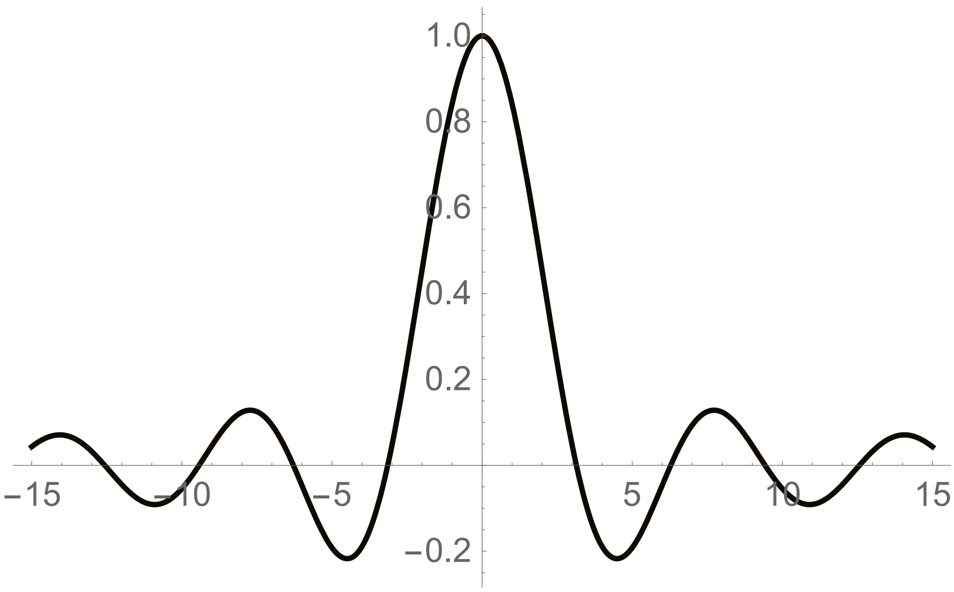

Figura 2.4: $f(x) := \dfrac{\text{sen}(x)}{x}$, para $x \neq 0$ y $f(0) := 1$.

Uno de los resultados más importantes acerca de la integral de Henstock-Kurzweil es el Teorema del Multiplicador que es símil del método de integración por partes.

Teorema 2.24. ***(Teorema del Multiplicador).*** *Si $f \in HK[a,b]$ y $\varphi \in BV([a,b])$, entonces el producto $f\varphi \in HK[a,b]$ y se satisface que*

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = F(b)\varphi(b) - \int_a^b F(x)\,d[\varphi(x)],$$

donde

$$F(s) := \int_a^s f(t)\,dt \quad y \quad \int_a^b F(x)\,d[\varphi(x)].$$

Donde la segunda integral es en el sentido de Riemann-Stieltjes.

Los detalles del Teorema del Multiplicador pueden consultarse en [17], [77, Lema 24] o bien en [7, Teorema 10.12] y la definición de la integral de Riemann-Stieltjes puede ser revisada en [7, Apéndice H].

Observación 5. *Como consecuencia del Teorema del Multiplicador, el espacio dual de $HK(\mathbb{R})$ se identifica con el espacio $BV(\mathbb{R})$, este hecho puede consultarse en [41, Capítulo 6] y en [42].*

Otro método para demostrar que el producto de funciones es Henstock-Kurzweil integrable en $[a,\infty]$ es el dado por J. Chartier [7, Teorema 16.10].

Teorema 2.25. ***(Prueba de Chartier-Dirichlet).*** *Sean $f, \varphi : [a,\infty] \to \mathbb{R}$ tales que:*

1) $f \in HK[a,c]$ para cada $c \geq a$.

2) $F(x) := \displaystyle\int_a^x f(s)\,ds$, es acotada en $[a,\infty)$.

3) φ es una función monótona en $[a,\infty)$.

4) $\varphi(x) \to 0$, cuando $x \to \infty$.

Entonces el producto $f\varphi \in HK[a,\infty]$.

Demostración. Primero observemos que $f\varphi$ pertenece al espacio $HK[a, c]$ para cada $c \in \mathbb{R}$ con $c \geq a$ en virtud del Teorema del Multiplicador 2.24.

Luego, por ser F una función acotada en $[a, \infty)$, existe $M > 0$ tal que $|F(x)| \leq M$, para cada $x \geq a$ y dado que la función φ se desvanece en ∞, para cada $\varepsilon > 0$, arbitrario, existe $K > 0$ tal que

$$|\varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4M},$$

si $a \leq K \leq x$.

En consecuencia., si $q, p \in \mathbb{R}$ satisfacen que $K \leq p < q$, entonces por [7, Teorema 12.5], existe $\xi \in [p, q]$ tal que

$$\begin{aligned}\int_p^q f(x)\varphi(x)\,dx &= \varphi(p)\int_p^\xi f(x)\,dx + \varphi(q)\int_\xi^q f(x)\,dx \\ &= \varphi(p)[F(\xi) - F(p)] + \varphi(q)[F(q) - F(\xi)].\end{aligned}$$

Con lo cual, $q > p > K$ implica

$$\left|\int_p^q f(x)\varphi(x)\,dx\right| \leq \frac{\varepsilon}{4M}2M + \frac{\varepsilon}{4M}2M = \varepsilon.$$

Dado que $\varepsilon > 0$, se sigue del criterio de Cauchy que la función producto $f\varphi \in HK[a, \infty]$. □

Ejemplo 2.2.3. *Se sigue del Teorema 2.25 al considerar las funciones*

$$f(x) := \operatorname{sen}(x) \quad y \quad \varphi(x) := \frac{1}{\log(x)},$$

para $x \geq 2$, la convergencia de la integral:

$$\int_2^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{\log(x)}\,dx.$$

La gráfica de $f(x)\varphi(x)$ se muestra en la figura 2.5.

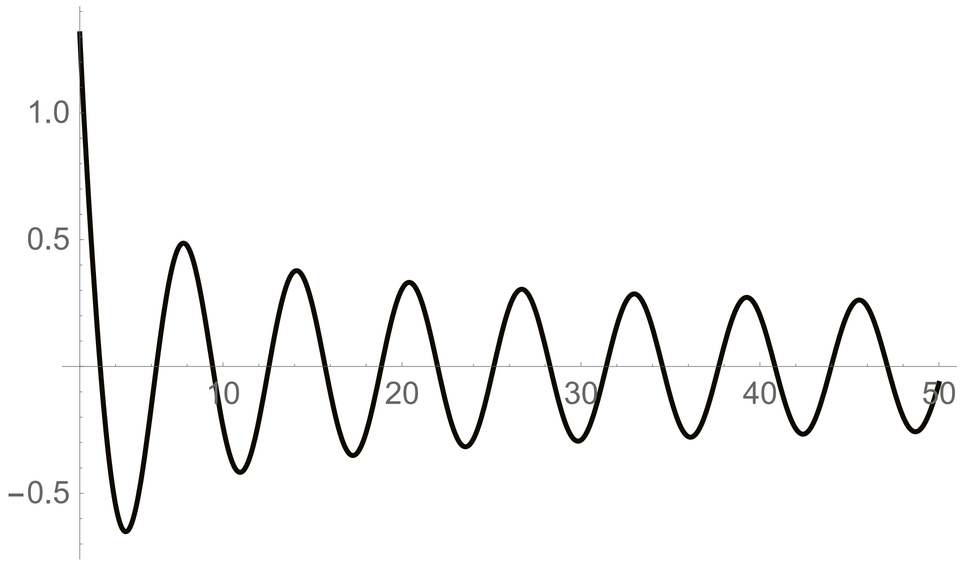

Figura 2.5: $x \mapsto \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\log(x)}$, para $x \geq 2$.

Otros criterios para determinar la convergencia de integrales del producto de funciones en $I = [a, \infty]$ son:

Teorema 2.26. ***(Prueba de Abel).*** *Sean $f, \varphi : I \to \mathbb{R}$ tales que*

1) $f \in HK(I)$.

2) φ *es acotada y monótona en* I.

Entonces el producto $f\varphi \in HK(I)$.

Teorema 2.27. ***(Prueba de Du Bois-Reymond).*** *Sean $f, \varphi : I \to \mathbb{R}$ tales que*

1) $f \in HK[a, c]$, *para toda* $c \geq a$.

2) $F(x) := \displaystyle\int_a^x f(s)\, ds$, *es acotada en* I.

3) φ *es diferenciable en* I.

4) $\varphi', |\varphi'| \in HK(I)$.

5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} F(x)\varphi(x) \in \mathbb{R}$.

Entonces el producto $f\varphi \in HK(I)$.

Observación 6. *El Teorema fundamental II* 2.10 sigue siendo valido en intervalos de la forma $I = [a, \infty]$. Por lo que si $f \in HK(I)$, entonces cualquier integral indefinida F de f es continua en I y por lo tanto es acotada en I.*

Ejemplo 2.2.4. *Se sigue tanto de la prueba de Abel como de la prueba de Du Bois-Reymond al considerar*

$$f(x) := \operatorname{sen}\left(x^2\right) \quad y \quad \varphi(x) := \frac{x}{x+1},$$

para cada $x \geq 0$, la existencia de la integral

$$\int_0^\infty \frac{x}{1+x} \operatorname{sen}\left(x^2\right) dx.$$

Sin embargo, no se puede aplicar el criterio de Chartier-Dirichlet ya que

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 1 \neq 0.$$

La gráfica de $f(x)\varphi(x)$ se encuentra en la figura 2.6.

Ejemplo 2.2.5. *Ninguno de los criterios anteriores permite probar la convergencia de la integral:*

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{x}\, dx.$$

Dado que la función $x \mapsto x^{-1}$ es no acotada en $x = 0$. De hecho se sabe que tal integral es divergente, esto puede ser consultado en [35], mientras que la gráfica se encuentra en la figura 2.7.

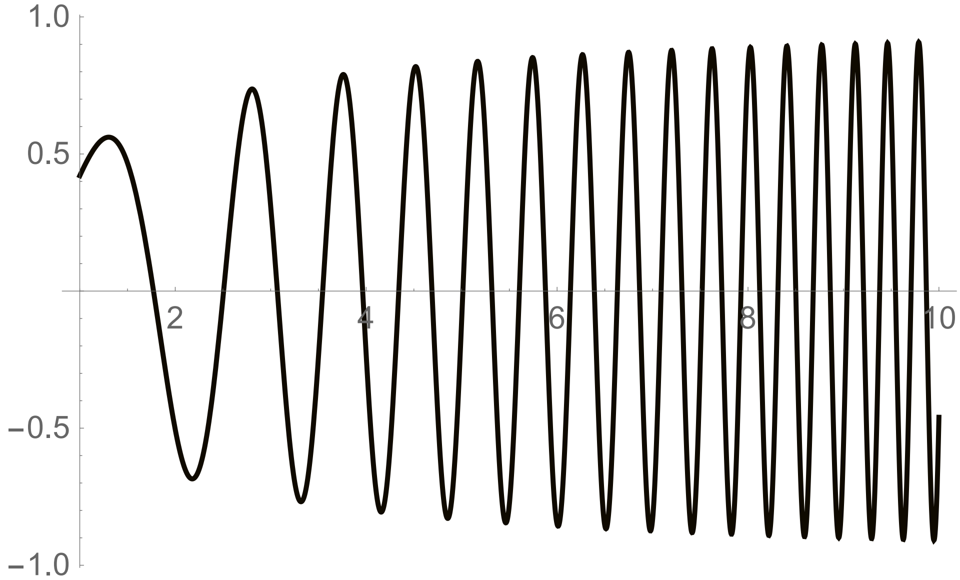

Figura 2.6: $x \mapsto \dfrac{x}{1+x}\,\mathrm{sen}\left(x^2\right)$, para $x \geq 0$.

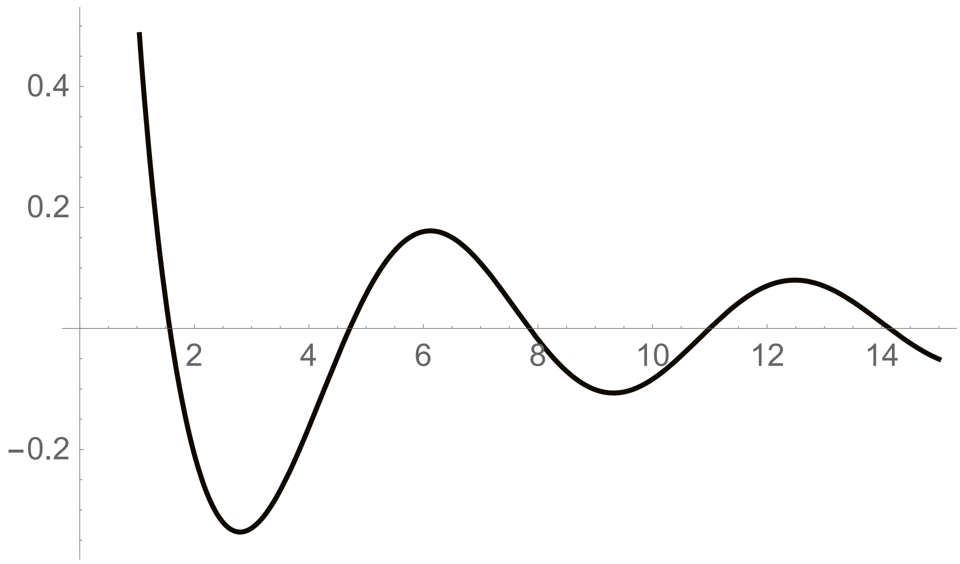

Figura 2.7: $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{x}$, para $x > 0$.

Por último, con la siguiente definición, extendemos el concepto de integración a funciones complejo valuadas, esto con el fin de estudiar la **Transformada de Fourier con respecto a la integral de Henstock-Kurzweil**. Ver [5].

Definición 12. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función con $f_1 := Re(f)$ y $f_2 := Im(f)$, entonces definimos la integral de Henstock-Kurzweil de f mediante*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx := \int_{\mathbb{R}} f_1(x)\,dx + i\int_{\mathbb{R}} f_2(x)\,dx.$$

Además, definimos el espacio

$$HK(\mathbb{R},\mathbb{C}) := \left\{ f = f_1 + if_2 \,\middle|\, f_1, f_2 \in HK(\mathbb{R}) \right\}$$

y establecemos la norma en este espacio por

$$\|f\|_{HK(\mathbb{R},\mathbb{C})} := \|f_1\|_{HK(\mathbb{R})} + \|f_2\|_{HK(\mathbb{R})}. \tag{2.8}$$

Más aún, la completación de $HK(\mathbb{R},\mathbb{C})$ es denotada por $\widehat{HK}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Es inmediato de la Definición 12 el siguiente resultado, el cual será utilizado en capítulos posteriores.

Proposición 2.6.

1) Si $f \in HK(\mathbb{R})$*, entonces* $f + i\,0 \in HK(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *con*

$$\|f + i\,0\|_{HK(\mathbb{R},\mathbb{C})} = \|f\|_{HK(\mathbb{R})}.$$

2) Si $f \in HK(\mathbb{R}, \mathbb{C})$*, entonces*

$$\|f_1 + if_2\|_{HK(R,C)} = \|f_1 - if_2\|_{HK(\mathbb{R},\mathbb{C})}.$$

Capítulo 3

Transformada de Fourier

La transformada de Fourier de una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se define para $s \in \mathbb{R}$ mediante

$$\mathcal{F}(f)(s) := \int_{\mathbb{R}} e^{-isx} f(x)\, dx \tag{3.1}$$

cuando la integral sea convergente. Así el primer tema a discutir es la existencia de la transformada para ciertos espacios de funciones.

Los espacios de funciones real medibles en el sentido de Lebesgue tales que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p\, dx < \infty, \qquad 1 \leq p < \infty,$$

los denotamos por $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, y en los cuales se tiene una seminorma dada por

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p} := \|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p\, dx \right)^{1/p}.$$

Denotamos el espacio cociente $L^p(\mathbb{R}) := \mathcal{L}^p(\mathbb{R})/\mathcal{W}_p$ donde $\mathcal{W}_p$ es el subespacio de funciones para los cuales $\|\cdot\|_p$ se desvanece. Para $p = 1$, se sigue que la transformada de Fourier dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(f)(s) &:= \int_{\mathbb{R}} e^{-isx} f(x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \cos(sx) f(x)\, dx - i \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sen}(sx) f(x)\, dx \\ &= \mathcal{F}_1^c(f)(s) - i\mathcal{F}_1^s(f)(s), \end{aligned} \tag{3.2}$$

existe para toda $s \in \mathbb{R}$, donde la integral es en el sentido de Lebesgue. Además, $\mathcal{F}_1^c$ y $\mathcal{F}_1^s$ son llamados transformada coseno y seno de Fourier respectivamente.

Mientras que para funciones $f \in L^2(\mathbb{R})$, la transformada de Fourier puede definirse mediante

$$\mathcal{F}_2(f)(s) := \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-isx} f_n(x)\, dx, \tag{3.3}$$

donde el límite es tomado en la topología de la norma del subespacio $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ y $(f_n)_{n\geq 1} \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ es una sucesión tal que $\|f_n - f\|_2 \to 0$, cuando $n \to \infty$, véase [28, 69].

De manera similar, consideramos los espacios $\mathcal{L}^p(\mathbb{R},\mathbb{C})$ y $L^p(\mathbb{R},\mathbb{C})$ que constan de funciones complejo valuadas en vez de real valuadas. En lo siguiente, también se considerará el espacio $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ que consta de todas las funciones real medibles f para las cuales su supremos esencial, $\|f\|_\infty$, es finito. Además, se tiene el espacio $L^\infty(\mathbb{R}) := \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})/\sim$, donde $f \sim g$ si y sólo si $f = g$ salvo un conjunto de medida de Lebesgue cero.

Las propiedades básicas de la transformada de Fourier pueden consultarse en [75, 70, 68, 67, 28]. Algunas de ellas están dadas a continuación.

Teorema 3.1. *Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces*

1) $\mathcal{F}_1(f) \in L^\infty(\mathbb{R})$ *con*

$$\|\mathcal{F}_1(f)\|_\infty \leq \|f\|_1.$$

2) $\mathcal{F}_1(f)(s) \to 0$*, cuando* $|s| \to \infty$*. (Lema de Riemann-Lebesgue).*

3) $\mathcal{F}_1(f) = 0$ *implica* $f = 0$ *salvo un conjunto de medida cero.*

4)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,\mathcal{F}_1(g)(s)\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_1(f)(s)\,g(s)\,ds.$$

Definición 13. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Definimos la transformada inversa de Fourier de f en $s \in \mathbb{R}$ mediante*

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(s) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} f(x)\,dx, \tag{3.4}$$

cuando la integral sea convergente.

Teorema 3.2. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{F}_1(f) \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}\mathcal{F}_1(f)(s)\,ds,$$

salvo un conjunto de medida cero.

Teorema 3.3. ***(Teorema de Plancherel).*** *Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$. Entonces $\mathcal{F}_2(f) \in L^2(\mathbb{R})$ y*

$$\|\mathcal{F}_2(f)\|_2^2 = 2\pi\,\|f\|_2^2. \tag{3.5}$$

La demostración del Teorema 3.3 puede ser consultada en [75, Teorema 0.1.11].

Observación 7. *La expresión (3.5) también se conoce como Fórmula o Identidad de Parseval. Véase [9, Capítulo 1].*

Ejemplo 3.0.1. *Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$h(t) := \begin{cases} \log(|t|) & \textit{si } t \in [-1,1] \textit{ y } t \neq 0, \\ 0 & \textit{cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Entonces $h \in L^2(\mathbb{R})$, ver figura 3.1. Con lo cual, $f(x) := \mathcal{F}_2(h)(x)$ también pertenece a $L^2(\mathbb{R})$ y satisface que

$$f(x) = 2\int_0^1 \cos(xt)\log(t)\,dt,$$

por ser h par. Además,

$$\lim_{s\to 0}\mathcal{F}_2(f)(s) = \lim_{s\to 0} 2\pi h(s) = -\infty.$$

La gráfica de f puede verse en la fígura 3.2.

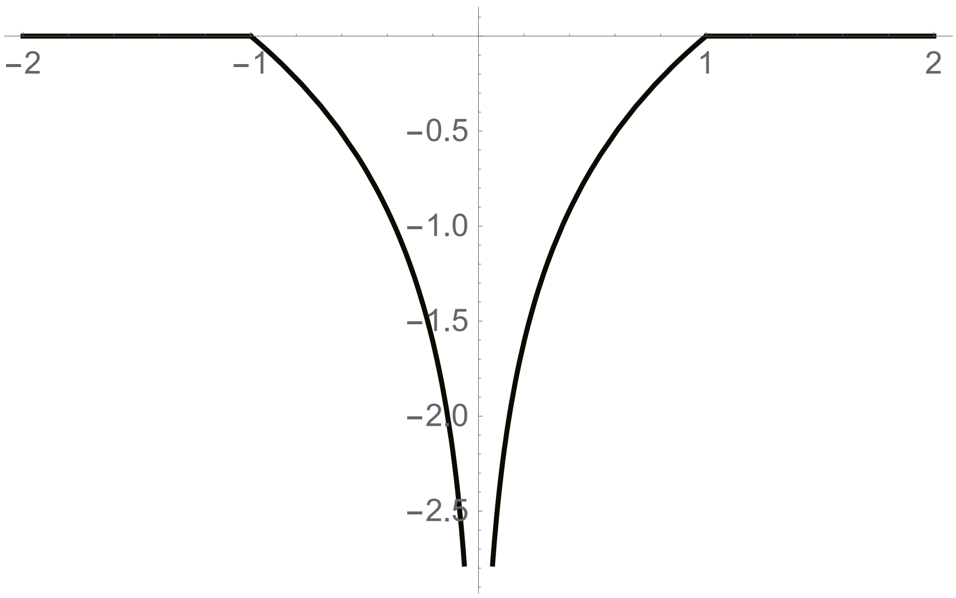

Figura 3.1: $h(t) := \log(|t|)$, si $t \in [-1, 1]\backslash\{0\}$ y $h(t) := 0$ en cualquier otro caso.

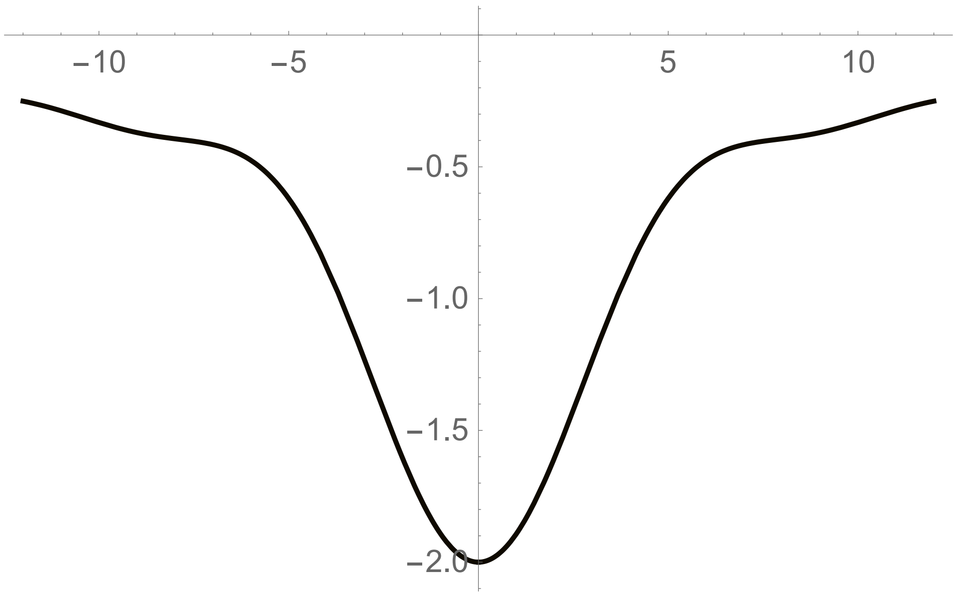

Figura 3.2: $f(x) := \mathcal{F}_2(h)(x)$.

Ahora bien, consideramos el espacio de Schwartz, $S(\mathbb{R}^n)$, que consta de funciones $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ que son infinitamente diferenciables con

$$||f||_{k,m} := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1 + |x|)^k \, |D^\alpha f(x)| < \infty,$$

donde

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

es un multi-índice,

$$D^\alpha = (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \cdots (\partial/\partial x_n)^{\alpha_n},$$

y

$$m = |\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

Espacio en el cual se satisface el siguiente resultado.

Teorema 3.4. *La transformada de Fourier $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{R})$ es un isomorfismo y tiene una representación integral dada por (3.1) y la inversa esta dada por la expresión en (3.4).*

Este hecho puede consultarse en [75, Teorema 0.1.5], [67, Proposición 2.2.10] y [28, Proposición 2. 2.11].

Teorema 3.5. *Sea $f \in S(\mathbb{R})$. Entonces*

1) $\mathcal{F}(f) \in S(\mathbb{R})$ *con*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixs}\mathcal{F}(f)(s)\,ds.$$

2)

$$2\pi\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(f)(s)|^2\,ds.$$

Los detalles del Teorema 3.5 también pueden ser consultados en [75, Teorema 0.1.8]

3.1. HK transformada de Fourier

Con respecto a la integral de Henstock-Kurzweil, definimos la HK transformada de Fourier mediante

$$\mathcal{F}_{HK}(f)(s) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} f(x)\,dx, \qquad (s \in \mathbb{R}) \tag{3.6}$$

cuando la integral sea convergente. Decimos **"HK transformada de Fourier"** para enfatizar que la integral es en el sentido de Henstock-Kurzweil. Véase [77, 54, 61, 71, 56].

En particular, consideraremos el subespacio de $BV(\mathbb{R})$ definido mediante

$$BV_0(\mathbb{R}) := \left\{ f \in BV(\mathbb{R}) \,\middle|\, \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0 \right\}.$$

Teorema 3.6. *Para cada $f \in BV_0(\mathbb{R})$, la HK transformada de Fourier, $\mathcal{F}_{HK}(f)$, existe para cada $s \neq 0$ y satisface las siguientes propiedades:*

1) $\mathcal{F}_{HK} : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ *es continuo.*

2) $\mathcal{F}_{HK}(f)(s) \to 0$, *cuando* $|s| \to \infty$. *(Lema de Riemann-Lebesgue).*

La demostración del Teorema 3.6 se sigue del Lema 3.1 y de Lema 3.2 en [54] y es básicamente consecuencia de la Prueba de Chartier-Dirichlet junto con el Teorema de Hake. Es importante notar que la transformada $\mathcal{F}_1$ esta bien definida como una integral de Henstock-Kuzweil ya que $L^1(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R})$ es denso en $L^1(\mathbb{R})$ por que contiene a las funciones de paso finito, ver [80]. Por lo que la expresión (3.2) puede ser vista como una extensión de la HK transformada de Fourier, es decir,

$$\mathcal{F}_1(f)(s) = \mathcal{F}_{HK}(f)(s) \tag{3.7}$$

para todada $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R})$ y $s \in \mathbb{R}$.

En el caso de que $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R})$, se cumple que

$$\mathcal{F}_2(f)(s) = \mathcal{F}_{HK}(f)(s) \tag{3.8}$$

salvo un conjunto de medida cero.

Para verificar (3.8), definimos para cada $n \geq 1$,

$$f_n(x) := \chi_{[-n,n]}(x) f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |x| \leq n, \\ 0 & \text{si } |x| > n. \end{cases}$$

De esta manera, obtenemos una sucesión $(f_n)_{n\geq 1} \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ tal que $\|f_n - f\|_2 \to 0$, cuando $n \to \infty$. Además,

$$\mathrm{Var}(f, [-n, n]) \leq \mathrm{Var}(f, \mathbb{R}) < \infty,$$

para cada $n \geq 1$. Es decir, $f_n \in BV_0(\mathbb{R})$.
De aquí que, para cada $n \geq 1$,

$$\mathcal{F}_1(f_n)(s) = \mathcal{F}_{HK}(f_n)(s) \quad \text{y} \quad \mathcal{F}_1(f_n)(s) = \mathcal{F}_2(f_n)(s).$$

Luego, por el Teorema de Plancherel 3.3, deducimos que

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{F}_{HK}(f_n) - \mathcal{F}_2(f)\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|\mathcal{F}_2(f_n) - \mathcal{F}_2(f)\|_2 = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2\pi}\, \|f_n - f\|_2 = 0.$$

Por lo tanto, en virtud del Teorema A.4, existe una sunsucesión de $(\mathcal{F}_{HK}(f_n))_{n\geq 1}$ que converge puntualmente salvo un conjunto de medida cero a $\mathcal{F}_2(f)$.
Más aún, por el Teorema de Hake 2.23, se sigue que para cada $s \neq 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_{HK}(f_n)(s) &= \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} e^{-isx} f(x)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} f(x)\, dx \\ &= \mathcal{F}_{HK}(f)(s). \end{aligned}$$

En conclusión,

$$\mathcal{F}_2(f)(s) = \mathcal{F}_{HK}(f)(s)$$

salvo un conjunto de medida cero, para toda $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R})$.

Observación 8. *Para $f \in BV_0(\mathbb{R})$ y $s = 0$, no necesariamente se tiene la existencia de $\mathcal{F}(f)(0)$ ya que la integral*

$$\mathcal{F}(f)(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

no tiene por que ser convergente. Por ejemplo, $f(x) := 1$, para $|x| < 1$ y $f(x) := 1/\sqrt{|x|}$, para $|x| \geq 1$, ver figura 3.3. Esto puede evitarse al considerar el subespacio $\mathcal{HK}(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R})$.

Mientras que en [77, Proposición 2], se da el siguiente enunciado que establece condiciones para la existencia de la transformada de Fourier para una función en $HK(\mathbb{R})$.

Proposición 3.1. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, entonces para que $\mathcal{F}_{HK}(f)$ exista en $s \in \mathbb{R}$ es necesario que $f \in HK[a, b]$ para cada intervalo compacto $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.*

Proposición 3.2. *Sea $f \in HK(\mathbb{R})$ y consideremos*

$$F_1(x) := \int_x^{\infty} f(t)\, dt \quad y \quad F_2(x) := \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt.$$

Entonces $\mathcal{F}_{HK}(f)$ existe en $s \in \mathbb{R}$ si y sólo si ambas integrales

$$\int_0^{\infty} e^{-isx} F_1(x)\, dx \quad y \quad \int_{-\infty}^{0} e^{-isx} F_2(x)\, dx,$$

son convergentes.

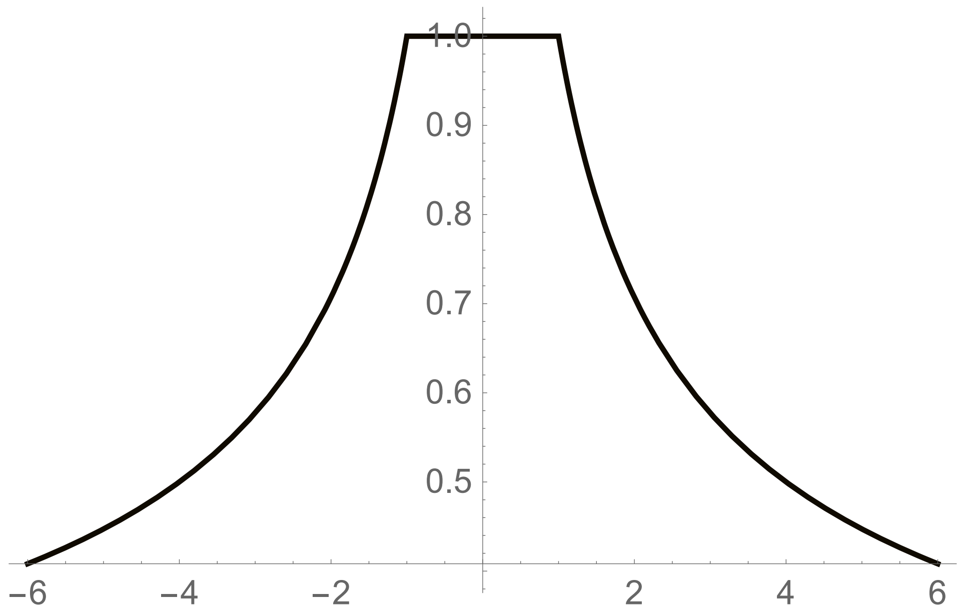

Figura 3.3: $f(x) := 1$, para $|x| < 1$ y $f(x) := 1/\sqrt{|x|}$, para $|x| \geq 1$.

Además, el tema de la continuidad de la HK transformada de Fourier es equivalente al concepto de continuidad quasi-uniformemente.

Definición 14. *Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Si*

$$F(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$$

existe en una vecindad de $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces F es continua quasi-uniformemente en x_0 si para todo $\varepsilon > 0$ y $M > 0$ existe $m \geq M$ y $\delta > 0$ tales que

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow \left| \int_{|y|>m} f(x,y)\,dy \right| < \varepsilon.$$

Teorema 3.7. *Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Entonces, $\mathcal{F}_{HK}(f)$ es continua en $s_0 \in \mathbb{R}$ si y sólo si es continua quasi-uniformemente en s_0.*

La demostración del Teorema 3.7 pueden consultarse en [77, Teorema 5]. Más aún, E. Talvila prueba que aunque $\mathcal{F}_{HK}(f)$ no necesita ser continuo, cuando la transformada existe en los puntos finales de un intervalo compacto implica $\mathcal{F}_{HK}(f)$ es integrable sobre el intervalo.

Proposición 3.3. *Sea $[a,b]$ un intervalo compacto. Si $\mathcal{F}_{HK}(f)$ existe en a y en b, entonces $\mathcal{F}_{HK}(f)$ existe en (a,b) salvo un conjunto de medida cero y es integrable en (a,b) con*

$$\int_a^b \mathcal{F}_{HK} f(s)\,ds = i \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{-ibx} - e^{-iax}\right] f(x)\,\frac{dx}{x}.$$

Además, se cuenta con un teorema de inversión, [77, Teorema 18], al considerar

$$\mathcal{F}_{HK}^{-1}(f)(s) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} f(x)\,dx.$$

Teorema 3.8. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{F}_{HK}(f)$ existe salvo un conjunto de medida cero y consideremos*

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt,$$

para $x_0 \in \mathbb{R}$.

1) $F'(x_0) = f(x_0)$ y $\mathcal{F}_{HK}^{-1}\big(\mathcal{F}_{HK}(f)\big)$ existe en x_0, implica

$$f(x_0) = \mathcal{F}_{HK}^{-1}\big(\mathcal{F}_{HK}(f)\big)(x_0).$$

2) $\mathcal{F}_{HK}^{-1}\big(\mathcal{F}_{HK}(f)\big)$ existe salvo un conjunto de medida cero, implica

$$f = \mathcal{F}_{HK}^{-1}\big(\mathcal{F}_{HK}(f)\big)$$

salvo un conjunto de medida cero.

La demostración del Teorema 3.8 puede consultarse en [77, Teorema 18]. Además, en [77, Corolario 21] se tiene el siguiente resultado.

Corolario 3.1. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Entonces $f = 0$ salvo un conjunto de medida cero si y sólo si $\mathcal{F}_{HK}(f) = 0$ salvo un conjunto de medida cero.*

Ahora bien, a partir de los espacios de funciones $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ y $BV_0(\mathbb{R})$, definimos la suma de estos espacios.

Definición 15. *Sean $p, q \geq 1$, definimos el espacio $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}) + \mathcal{L}^q(\mathbb{R})$ como el espacio vectorial de todas las funciones de la forma $f = f_p + f_q$, con $f_p \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ y $f_q \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R})$. De manera inductiva, definimos la suma finita*

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}^{p_i}(\mathbb{R}).$$

Análogamente, definimos el espacio de funciones $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})$.

Observación 9. *Los espacios de tipo "suma" dados en la Definición 15 no son suma directa ya que no se cumple la condición de que en la intersección de los conjuntos solo se tenga la función constante cero.*

Observación 10. *Se sigue del hecho de que $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ no esta contenido en $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ que*

$$\mathcal{HK}(\mathbb{R}) \not\subseteq \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}).$$

Además, se tiene que $\mathcal{HK}(\mathbb{R}) \not\subseteq \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) + \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ y para $p > 0$ con $p \neq 1$, se sabe que $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \not\subseteq \mathcal{HK}(\mathbb{R})$. En consecuencia,

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}) + \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) \not\subseteq \mathcal{HK}(\mathbb{R}).$$

De hecho, en [61] se demuestra el siguiente resultado.

Teorema 3.9.

1) $\mathcal{HK}(\mathbb{R}) \not\subseteq \mathcal{L}^p(\mathbb{R}) + \mathcal{L}^q(\mathbb{R})$ donde $0 < p, q < \infty$.

2) $\mathcal{HK}(\mathbb{R}) \not\subseteq \mathcal{L}^p(\mathbb{R}) + \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ donde $0 < p < 1$.

3) $\mathcal{HK}(\mathbb{R}) \not\subseteq \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}^{p_i}(\mathbb{R})$ donde $0 < p_i \leq \infty, i = 1, \ldots, n$ y $n \in \mathbb{N}$.

Con los espacios dados en la Definición 15, podemos extender la HK transformada de Fourier al considerar el espacio $C_\infty(X)$ de las funciones **continuas** y **complejo** valuadas en $X \subset \mathbb{R}$, que se desvanecen en infinito. Ver [61, Definición 2.10]

Definición 16. *La HK transformada de Fourier existe para cada $s \neq 0$*

$$\mathcal{F}_{HK} : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R}) \to C_\infty(\mathbb{R}\backslash\{0\})$$
$$\mathcal{F}_{HK}(f)(s) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} f(x)\, dx.$$

En lo siguiente, discutimos la continuidad en norma del operador HK transformada de Fourier.

Se desprende del Teorema 3.6 y de la Definición 16 que $\mathcal{F}_{HK}(f)(s)$ es una función continua para toda $s \neq 0$. Sin embargo, para $s = 0$, la propiedad de la continuidad sigue siendo un problema abierto.

Además, en el espacio

$$\mathcal{B} := \mathcal{HK}(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R}) = \mathcal{HK}(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R}) \tag{3.9}$$

consideramos la norma dada por

$$\|f\|_{\mathcal{B}} := \|f\|_{HK} + \|f\|_{BV}.$$

El espacio $\mathcal{B}$ es de gran interés y no tiene relación con $L^1(\mathbb{R})$, es decir,

$$\mathcal{B} \nsubseteq \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \quad \text{y} \quad \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \nsubseteq \mathcal{B}.$$

Esto puede consultarse en [55, 71].

Ejemplo 3.1.1. *Sea $f : [0,\infty] \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{x}\ \mathrm{sen}(1/x) & si\ x \in (0,1], \\ 0 & si\ x = 0\ y\ x \in (1,\infty]. \end{cases}$$

Entonces $f \in L^1[0,\infty]\backslash BV[0,\infty]$. Ver figura 3.4

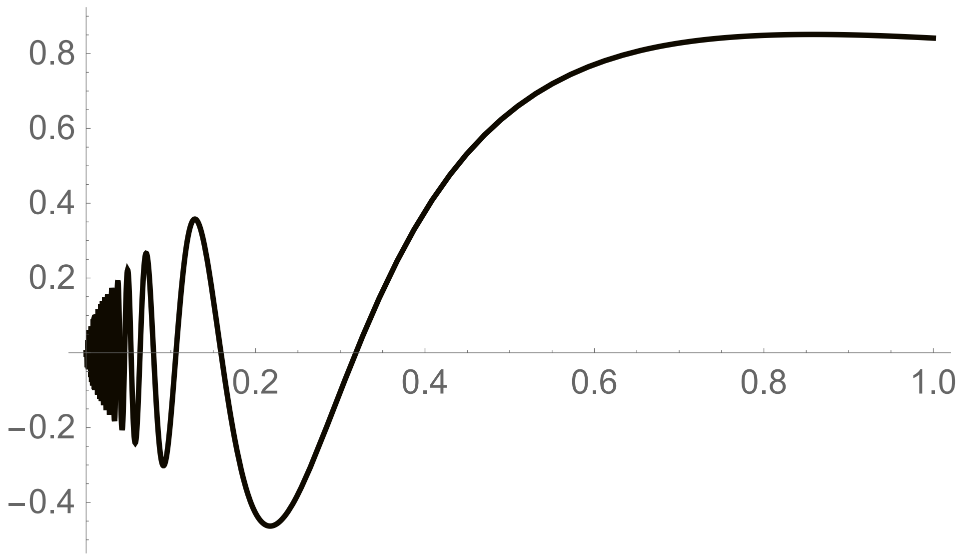

Figura 3.4: $f(x) := \sqrt{x}\ \mathrm{sen}(1/x)$, para $x \in (0,1]$ y $f(x) := 0$, para $x = 0$ y $x \in (1,\infty]$.

Ejemplo 3.1.2. *Sea $\alpha \in (0,1)$ y consideremos una función $h \in BV\left[-\pi^{1/\alpha}, \pi^{1/\alpha}\right]$. Entonces al definir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante*

$$f(x) := \begin{cases} h(x) & si\ x \in \left(-\pi^{1/\alpha}, \pi^{1/\alpha}\right), \\ \dfrac{\mathrm{sen}\,(|x|^\alpha)}{|x|} & si\ x \notin \left(-\pi^{1/\alpha}, \pi^{1/\alpha}\right), \end{cases}$$

obtenemos que $f \in \mathcal{B}\backslash L^1(\mathbb{R})$.

Los ejemplos 3.1.1 y 3.1.2 pueden ser consultados en [55]. De hecho se tiene que $\mathcal{B} \subset \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R})$, por lo que la existencia de la transformadansformada de Fourier esta garantizada. Más aún, el espacio $\mathcal{B}$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$ y en $HK(\mathbb{R})$, esto puede consultarse en [60].

Proposición 3.4. ***(Arredondo-Mendoza-Reyes).*** *El operador HK transformada de Fourier con dominio $\mathcal{B}$ y codomimio $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ es un operador acotado.*

Demostración. Se sigue del Teorema de Plancherel 3.3 que para $f \in \mathcal{B}$,

$$\|\mathcal{F}_{HK}(f)\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2.$$

Por otro lado, como consecuencia del Teorema del Multiplicador 2.24, [77, Lema 24], y de [60, Teorema 1] podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\|f\|_2^2 &\leq \|f\|_{HK}\, \|f\|_{BV} \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\|f\|_{HK}^2 + \|f\|_{BV}^2\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\|f\|_{HK} + \|f\|_{BV}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\|f\|_{\mathcal{B}}^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$2\pi \|f\|_2^2 \leq \pi\, \|f\|_{\mathcal{B}}^2.$$

Consecuentemente,

$$\|\mathcal{F}_{HK}(f)\|_2 \leq \sqrt{\pi}\, \|f\|_{\mathcal{B}}$$

para toda $f \in \mathcal{B}$. □

Ejemplo 3.1.3. ***(Arredondo-Mendoza-Reyes).*** *Consideremos la función dada por*

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [-1, 0), \\ 1 & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Entonces, $f \in \mathcal{B}$ y para cada $s > 0$, se sigue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{HK}(f)(s) &= \int_0^\infty 2\,\mathrm{sen}(sx) f(x)\, dx \\
&= \int_0^1 2\,\mathrm{sen}(sx)\, dx \\
&= 2\frac{1 - \cos(s)}{s}.
\end{aligned}$$

Es importante notar que esta función ***no*** *es un elemento de $HK(\mathbb{R})$, ver figuras 3.5 y 3.6.*

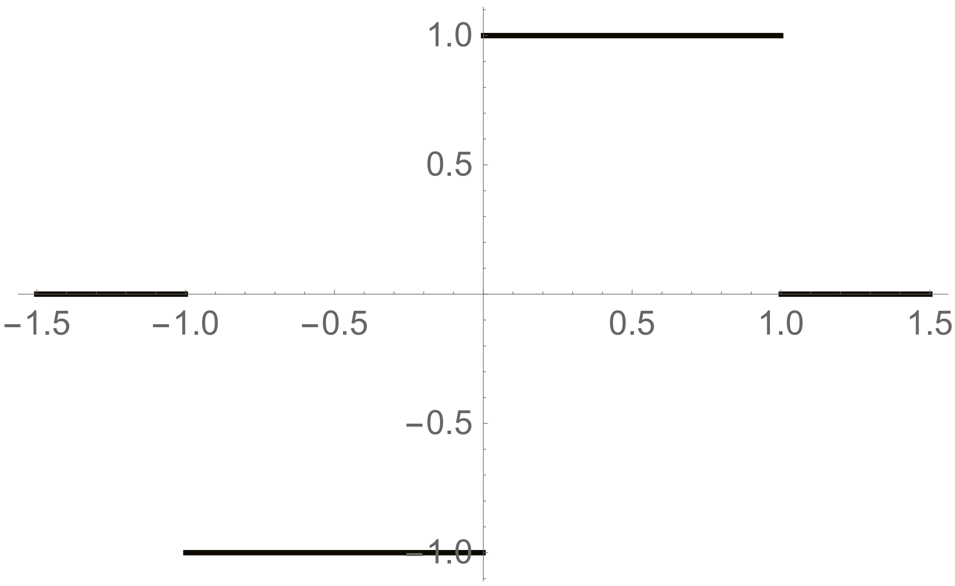

Figura 3.5: $f \in \mathcal{HK}(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R})$ con $\mathcal{F}_{HK}(f) \notin HK(\mathbb{R})$.

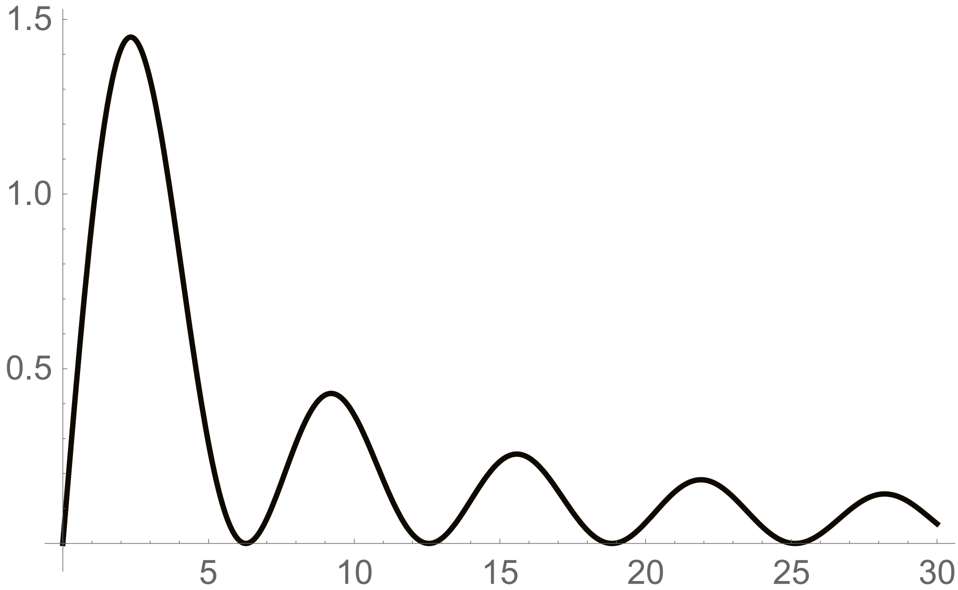

Figura 3.6: $s \mapsto 2\dfrac{1-\cos(s)}{s}$, para $s > 0$.

Ahora bien, si consideramos la **HK transformada seno de Fourier** definida mediante

$$\mathcal{F}_{HK}^{s}(f)(s) := \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(sx) f(x)\, dx. \quad (s \in \mathbb{R}) \tag{3.10}$$

cuando la integral sea convergente.

Proposición 3.5. ***(Arredondo-Mendoza-Reyes).*** *La imagen del espacio $BV_0(\mathbb{R})$ bajo la acción del operador $\mathcal{F}_{HK}^{s}$* ***no*** *esta contenida en $HK(\mathbb{R})$, es decir,*

$$\mathcal{F}_{HK}^{s}\Big(BV_0(\mathbb{R})\Big) \nsubseteq HK(\mathbb{R}). \tag{3.11}$$

Demostración. Se sigue del ejemplo 3.1.3 se sigue que la imagen del espacio $\mathcal{B}$ bajo la acción del operador $\mathcal{F}_{HK}^{s}$ no esta contenida en $HK(\mathbb{R})$, con lo cual se sigue (3.11). $\square$

3.2. HK transformada coseno de Fourier

El ejemplo 3.1.3 muestra que la HK transformada seno de Fourier no puede ser definida como un operador acotado de $BV_0(\mathbb{R})$ en $HK(\mathbb{R})$. Sin embargo, para la **HK transformada coseno de Fourier** dada por

$$\mathcal{F}^c_{HK}(f)(s) := \int_{-\infty}^{\infty} \cos(sx) f(x)\, dx \quad (s \neq 0). \tag{3.12}$$

se demostrará en el Teorema 3.12 que determina un operador continuo.

Ejemplo 3.2.1. *Consideremos la función $f(x) = \chi_{[-\pi,\pi]}(x)$, es decir la función característica del intervalo $[-\pi, \pi]$. Entonces f es una función par que pertenece al espacio $\mathcal{B}$, consecuentemente*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^c_{HK}(f)(s) &= \int_0^{\infty} 2\cos(sx)\chi_{[0,\pi]}(x)\, dx \\
&= \int_0^{\pi} 2\cos(sx)\, dx \\
&= 2\frac{\operatorname{sen}(\pi s)}{s}.
\end{aligned}$$

Donde el mapeo $s \mapsto 2s^{-1} \operatorname{sen}(\pi s)$ es un elemento del espacio $HK(\mathbb{R})$. Más aún,

$$\mathcal{F}^c_{HK}(f)(0) = 2\pi \quad y \quad \lim_{s\to 0} 2\frac{\operatorname{sen}(\pi s)}{s} = 2\pi.$$

La integrabilidad de las transformadas coseno y seno de Fourier de funciones en $BV_0(\mathbb{R})$ es un problema que ha sido analizado por Elijah Liflyand en diversos artículos [47, 48, 44, 45] en los cuales estudia la integrabilidad de estas transformadas en el sentido de Lebesgue en subespacios específicos de $BV_0(\mathbb{R})$.

Por ejemplo, en [45, Capítulo 2] y en [36] se considera la transformada de Hilbert de una función $g \in L^1(\mathbb{R})$ dada por

$$\mathcal{H}(g)(s) := \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)}{s-x}\, dx,$$

donde la integral se entiende en el sentido impropio (valor principal).

Se sabe que no necesariamente $\mathcal{H}(g)$ es Lebesgue integrable, sin embargo, cuando $\mathcal{H}(g) \in L^1(\mathbb{R})$, decimos que g pertenece al **espacio real de Hardy** denotado por $H^1(\mathbb{R})$.

En particular, cuando la función g es impar se tiene que $\mathcal{H}(g)(s)$ es igual a

$$\mathcal{H}_o(g)(s) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{xg(x)}{s^2-x^2}\, dx.$$

Así, en el caso de que $\mathcal{H}_o(g)$ sea Lebesgue integrable, escribimos que $g \in H^1_o(\mathbb{R}_+)$.

De manera similar, si g es una función par, entonces $\mathcal{H}(g)(s)$ es igual a

$$\mathcal{H}_e(g)(s) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{sg(x)}{s^2-x^2}\, dx$$

y si $\mathcal{H}_e(g)$ es Lebesgue integrable, entonces escribimos que $g \in H^1_e(\mathbb{R}_+)$.

Bajo estas condiciones junto con la hipótesis de tener una función localmente absolutamente continua en $(0, \infty)$, es decir, una función absolutamente continua en cada intervalo compacto de $(0, \infty)$, ver [7, Teorema 14.7], obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.10. *Sea $f:[0,\infty)\to\mathbb{C}$ localmente absolutamente continua en $(0,\infty)$, de vairiación acotada tal que $f(x)\to 0$, cuando $x\to\infty$.*

1) *Si $f'\in H^1_o(\mathbb{R}_+)$, entonces*
$$\int_0^\infty f(x)\cos(sx)\,dx \qquad (s\geq 0)$$
es Lebesgue integrable en $[0,\infty)$.

2) *Para cada $s>0$, se satisface que*
$$\int_0^\infty f(x)\operatorname{sen}(sx)\,dx = \frac{1}{s}f\left(\frac{\pi}{2s}\right)+F(s),$$
donde $F\in L^1[0,\infty)$.

La demostración del Teorema 3.10 puede consultarse en [45, Teorema 1] y en [44, Teorema 1]. La idea principal de la prueba se sigue de la fórmula de integración por partes:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(x)\cos(sx)\,dx &= \left.\frac{f(x)\operatorname{sen}(sx)}{s}\right|_0^\infty - \frac{1}{s}\int_0^\infty f'(x)\operatorname{sen}(sx)\,dx\\ &= -\frac{1}{s}\int_0^\infty f'(x)\operatorname{sen}(sx)\,dx\\ &= \theta_1\gamma_1(s),\end{aligned}$$

donde $|\theta_1|\leq C$, para alguna constante C no negativa y

$$\int_0^\infty |\gamma_1(s)|\,ds \leq \|f'\|_{H^1_0(\mathbb{R}_+)}<\infty.$$

Los detalles pueden consultarse en [46, Teorema 2]. Como consecuencia del Teorema 3.10 se tiene que hay un comportamiento distinto entre las transformadas coseno y seno de Fourier ya que para esta última sólo se asegura una fórmula para su comportamiento asintótico. De hecho, si f es una función monótona en $[0,\infty)$, entonces su transformada seno de Fourier preserva el signo mientras que su transformada coseno de Fourier no puede ser Lebesgue integrable en $\mathbb{R}$, esto puede consultarse en [50, 49].

En particular, en [44] se considera el espacio

$$\mathcal{W}=\left\{g\in L^1(\mathbb{R}):\frac{\mathcal{F}_1(g)(s)}{s}\in L^1(\mathbb{R})\right\}$$

con norma

$$\|g\|_{\mathcal{W}}:=\|g\|_1+\left\|\frac{\mathcal{F}_1(g)(s)}{s}\right\|_1$$

obtenemos la siguiente afirmación.

Teorema 3.11. *Sea $f:[0,\infty)\to\mathbb{C}$ localmente absolutamente continua en $(0,\infty)$, de variación acotada con $f(x)\to 0$, cuando $x\to\infty$. Entonces*

1) $\int_0^\infty f(x)\cos(sx)\,dx$ *es Lebesgue integrable en $[0,\infty)$, si y sólo si $f'\in\mathcal{W}$.*

2) $\int_0^\infty f(x)\operatorname{sen}(sx)\,dx$ *es Lebesgue integrable en $[0,\infty)$, si y sólo si $f'\in\mathcal{W}$.*

Demostración. Se sigue del método de integración por partes que

$$\int_0^\infty f(x)\cos(sx)\,dx = -\frac{1}{s}\int_0^\infty f'(x)\operatorname{sen}(sx)\,dx.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^\infty \left|\int_0^\infty f(x)\cos(sx)\,dx\right| ds = \int_0^\infty \left|-\frac{1}{s}\int_0^\infty f'(x)\operatorname{sen}(sx)\,dx\right| ds.$$

En consecuencia,

$$\int_0^\infty f(x)\cos(sx)\,dx$$

es Lebesgue integrable en $[0,\infty)$, si y sólo si $f' \in \mathcal{W}$.

Análogamente, al integrar por partes, obtenemos

$$\int_0^\infty f(x)\operatorname{sen}(sx)\,dx = \frac{f(0)}{s} + \frac{1}{s}\int_0^\infty f'(x)\cos(sx)\,dx.$$

Además, se tiene que $f(0) = 0$ en virtud de [48, Teorema 6]. Con lo cual,

$$\int_0^\infty f(x)\operatorname{sen}(sx)\,dx$$

es Lebesgue integrable en $[0,\infty)$, si y sólo si $f' \in \mathcal{W}$. □

Observación 11. *Se sigue de [25, Capítulo III, Corolario 7.23], la extensión de la desigualdad de Hardy que establece:*

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\mathcal{F}_1(f)(s)}{s}\right| ds \leq C\|f\|_{H^1(\mathbb{R})}$$

para alguna constante $C \geq 0$. En consecuencia, $H^1(\mathbb{R}) \subset \mathcal{W}$.

En el caso de la integral de Henstock-Kurzweil, en [5] definimos

$$\Lambda = \left\{ g \in \mathcal{B} : \frac{\mathcal{F}_{HK}(g)(s)}{s} \in HK(\mathbb{R}) \right\},$$

el cual es no vacío ya que el espacio de Schwartz $S(\mathbb{R}) \subset \Lambda$. Más aún, denotando por AC_{loc} el espacio de las funciones localmente absolutamente continuas en $\mathbb{R}$ (es decir, f en $AC[a,b]$ para cada intervalo compacto $[a,b] \subset \mathbb{R}$) obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.6. ***(Arredondo-Mendoza-Reyes).*** *Si $g \in \mathcal{B} \cap AC_{loc}$ es tal que $g' \in \Lambda$, entonces $\mathcal{F}_{HK}(g) \in HK(\mathbb{R})$.*

Demostración. Primero para la HK transformada seno de Fourier observamos que por el Teorema del Multiplicador sabemos

$$\mathcal{F}^s_{HK}(g)(s) = \int_{-\infty}^\infty \sin(sx)g(x)\,dx = \frac{1}{s}\int_{-\infty}^\infty \cos(sx)\,dg(x).$$

Ahora bien, por ser g elemento de AC_{loc}, obtenemos

$$\frac{1}{s}\int_{-\infty}^\infty \cos(sx)\,dg(x) = \frac{1}{s}\int_{-\infty}^\infty \cos(sx)g'(x)\,dx.$$

Con lo cual,

$$\mathcal{F}^s_{HK}(g)(s) = \frac{1}{s}\int_{-\infty}^\infty \cos(sx)g'(x)\,dx = \frac{\mathcal{F}^c_{HK}(g')(s)}{s}.$$

Análogamente, para la HK transformada coseno de Fourier tenemos

$$\mathcal{F}^c_{HK}(g)(s) = \frac{-1}{s}\int_{-\infty}^\infty \sin(sx)g'(x)\,dx = \frac{-\mathcal{F}^s_{HK}(g')(s)}{s}.$$

□

Por otra parte, a pesar de que para funciones $f \in BV_0(\mathbb{R})$ no necesariamente esta definido $\mathcal{F}^c_{HK}(f)(0)$, se tiene cierta regularidad. Luego, se puede extender el operador HK transformada coseno de Fourier como una transformación lineal y continua de $BV_0(\mathbb{R})$ a $HK(\mathbb{R})$ para lo cual requerimos de algunos resultados auxiliares y que a diferencia del Teorema 3.11 **no** se requieren de hipótesis adicionales para f'.

Primero en $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ definimos

$$\|f\|'_{HK(\mathbb{R}^+)} := \sup_{0 \le b < \infty} \left| \int_0^b f(x)\, dx \right|. \tag{3.13}$$

Lema 3.1. ***(Arredondo-Mendoza-Reyes).*** *Si $f \in HK(\mathbb{R})$ es una función par, entonces*

$$\|f\|_{HK(\mathbb{R})} = 2\|f\|'_{HK(\mathbb{R}^+)}.$$

La demostración del Lema 3.1 se sigue de las propiedades de la integral HK y de considerar los casos en que $a \cdot b \ge 0$ y $a \cdot b < 0$.

En relación con el ejemplo 2.2.2, consideramos la función seno integral, figura 3.7, dada por

$$\mathrm{Si}(v) := \frac{2}{\pi} \int_0^v \frac{\mathrm{sen}(y)}{y}\, dy. \tag{3.14}$$

La función seno integral satisface las siguientes propiedades:

1) $\mathrm{Si}(0) = 0$,

2) $\lim\limits_{v \to \infty} \mathrm{Si}(v) = 1$,

3) $\mathrm{Si}(v) \le \mathrm{Si}(\pi)$, para toda $v \in [0, \infty]$.

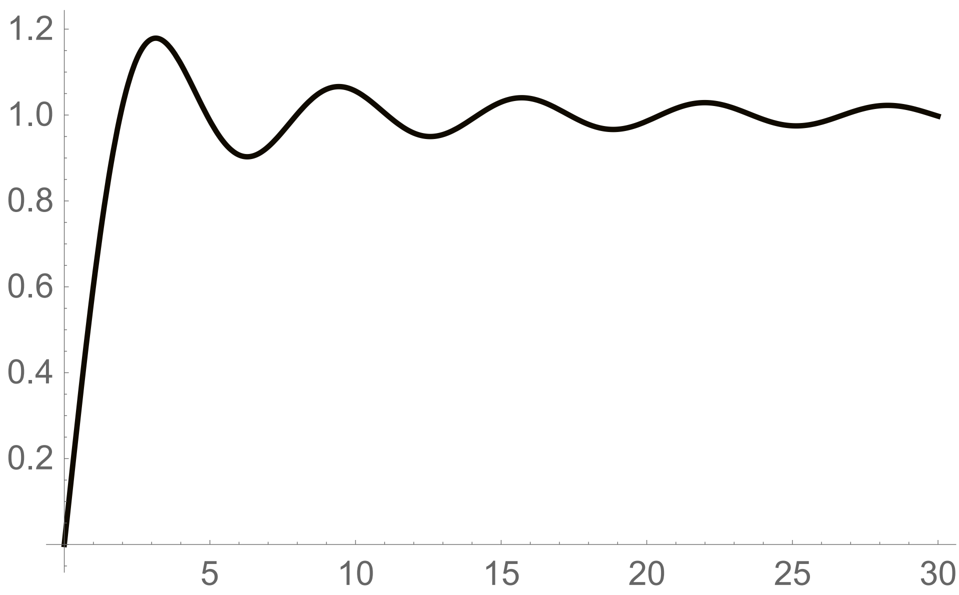

Figura 3.7: $\mathrm{Si}(v)$.

Además, consideramos la familia de funciones $\Omega := \left\{ h_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$ tales que

$$h_t(x) := \begin{cases} x^{-1}\,\mathrm{sen}(tx) & \text{si } x \neq 0, \\ t & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

De esta manera, se cumple que $h_{-t}(x) = -h_t(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$ ya que h_t es una función par. También, para cada $v \geq u \geq 0$ y $t > 0$, al hacer el cambio de variable $y = tx$, se sigue que

$$\left| \int_u^v \frac{\operatorname{sen}(tx)}{x}\, dx \right| = \left| \int_{tu}^{tv} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y}\, dy \right|.$$

Finalmente, el conjunto Ω es acotado en $HK(\mathbb{R})$ y

$$\pi \operatorname{Si}(\pi) = \sup\Big\{ \|h_t\|_{HK(\mathbb{R})} : h_t \in \Omega \Big\}. \tag{3.15}$$

Lema 3.2. ***(Arredondo-Mendoza-Reyes).*** *Si* $0 < a < b$ *y* $f \in BV(\mathbb{R})$*, entonces*

$$\left| \int_u^v \left[\frac{\sin(bx) - \sin(ax)}{x} \right] f(x)\, dx \right| \leq 4\pi \operatorname{Si}(\pi) \|f\|_{BV(\mathbb{R})}$$

para cada intervalo compacto $[u, v] \subset \mathbb{R}$*.*

Demostración. Como consecuencia del Teorema del Multiplicador sabemos que

$$\left| \int_u^v \left[\frac{\operatorname{sen}(bx) - \operatorname{sen}(ax)}{x} \right] f(x)\, dx \right| \leq 2 \left\| x^{-1} [\operatorname{sen}(bx) - \operatorname{sen}(ax)] \right\|_{HK(\mathbb{R})} \|f\|_{BV(\mathbb{R})}$$

y aplicando la desigualdad del triángulo junto con (3.15) concluimos la demostración. □

Lema 3.3. ***(Arredondo-Mendoza-Reyes).*** *Si* $f : [0, R] \to \mathbb{R}$ *es continua y no creciente con* $f(R) > 0$*. Entonces las integrales*

1) $\displaystyle\int_{b'\delta}^{bR} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} f(y/b)\, dy,$

2) $\displaystyle\int_{b'\delta}^{b'R} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} f(y/b')\, dy,$

3) $\displaystyle\int_0^{b'\delta} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} \Big[f(y/b) - f(y/b') \Big]\, dy.$

tienden a cero para $b \geq b' \gg 1$ *suficientemente grandes.*

Demostración. Para cualquier $y > 0$, se tiene para $\tilde{y} := y + \pi$ que $y < \tilde{y}$. Así por la hipótesis de que f es no creciente, concluimos que

$$f(\tilde{y}/b) \leq f(y/b).$$

En consecuencia,

$$\frac{\tilde{y}}{y} > 1 \geq \frac{f(\tilde{y}/b)}{f(y/b)} \implies \frac{|\operatorname{sen}(y)|}{y} f(y/b) > \frac{|\operatorname{sen}(\tilde{y})|}{\tilde{y}} f(\tilde{y}/b).$$

Por lo que las integrales

$$\int_{b'\delta}^{bR} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} f(y/b)\, dy \quad \text{y} \quad \int_{b'\delta}^{b'R} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} f(y/b')\, dy$$

tienden a cero para $b \geq b' \gg 1$ suficientemente grandes.

Además,

$$\int_0^{b'\delta} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y}\Big[f(y/b) - f(y/b')\Big]\,dy = \int_0^{b'\delta} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y}\Big[f(y/b) - f(0)\Big]\,dy - \int_0^{b'\delta} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y}\Big[f(y/b') - f(0)\Big]\,dy.$$

Aquí, hacemos notar que tanto $|f(y/b) - f(0)|$ como $|f(y/b') - f(0)|$ son arbitrariamente pequeños cuando $|y| \leq b'\delta$ y $\delta > 0$ es suficientemente pequeña bajo la hipótesis de que f es continua. Debido a que f es no creciente, estas dos integrales definen series alternantes con sus respectivos términos iniciales

$$\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y}\Big[f(y/b) - f(0)\Big]\,dy \quad \text{y} \quad \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y}\Big[f(y/b') - f(0)\Big]\,dy.$$

Esto demuestra que para f no creciente y continua la integral

$$\int_0^{b'\delta} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y}\Big[f(y/b) - f(y/b')\Big]\,dy$$

es arbitrariamente pequeña para $b \geq b'$ suficientemente grandes. □

Lema 3.4. ***(Arredondo-Mendoza-Reyes).*** *Sea $f \in BV[-R, R]$ y consideremos $\varepsilon > 0$. Entonces*

$$\left| \int_{|x|<R} \frac{\operatorname{sen}(bx) - \operatorname{sen}(b'x)}{x} f(x)\,dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

si $b, b' \gg 1$, son suficientemente grandes.

Demostración. Primero notemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^{R} \frac{\operatorname{sen}(bx) - \operatorname{sen}(b'x)}{x} f(x)\,dx &= \int_0^{R} \frac{\operatorname{sen}(bx)}{x} f(x)\,dx - \int_0^{R} \frac{\operatorname{sen}(b'x)}{x}\,dx \\
&= \int_0^{bR} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} f(y/b)\,dy - \int_0^{b'R} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} f(y/b')\,dy \\
&= \int_{b'\delta}^{bR} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} f(y/b)\,dy - \int_{b'\delta}^{b'R} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} f(y/b')\,dy \qquad (3.16) \\
&+ \int_0^{b'\delta} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y}\Big[f(y/b) - f(y/b')\Big]\,dy. \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

Se sigue del Lema 3.3 que las integrales en (3.16) y (3.17) son pequeñas para f no creciente y continua en $[0, R]$.

Por lo que si f es no creciente y continua en $[0, R]$, entonces

$$\int_0^{R} \frac{\operatorname{sen}(bx) - \operatorname{sen}(b'x)}{x} f(x)\,dx$$

es arbitrariamente pequeña para $b > b'$ suficientemente grandes.

De hecho, esto prueba que para toda $f \in BV[-R,R] \cap C[-R,R]$ se satisface que

$$\left| \int_{|x|<R} \frac{\operatorname{sen}(bx) - \operatorname{sen}(b'x)}{x} f(x)\, dx \right| < \varepsilon/2 \quad \text{para } b, b' \gg 1 \tag{3.18}$$

puesto que toda función de variación acotada y continua es la diferencia de dos funciones positivas, no crecientes y continuas.

Más aún, la desigualdad (3.18) sigue siendo válida para cualquier función de variación acotada en $[-R,R]$, para probar esto primero suponemos que f es una función constante a trozos (picewise constant), luego por la convergencia de

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(y)}{y}\, dy,$$

se sigue la desigualdad (3.18).

Ahora bien, si f es el límite en la norma de $BV[-R,R]$ de una sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ las cuales son constantes a trozos, entonces para cada f_n es válida (3.18) y por la convergencia hacía la función límite f, también satisface (3.18).

Por último dada f de variación acotada en $[-R,R]$, obtenemos por la descomposición de Jordan, véase [57, 34], que existen funciones f_1 y f_2 tales que:

1) $f = f_1 + f_2$,

2) $f_1 \in BV[-R,R] \cap C[-R,R]$ y

3) $\|f_2 - P_n\|_{BV} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, donde $(P_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión defunciones constantes a trozos.

En resumen, los argumentos anteriores aplicados tanto a f_1 como a f_2 implican (3.18). □

Finalmente, estamos en condiciones de probar que la HK transformada coseno de Fourier de cualquier función en $BV_0(\mathbb{R})$ resulta ser Henstock-Kurzweil integrable en $\mathbb{R}$. Véase [5, Teorema 1].

Teorema 3.12. ***(Arredondo-Mendoza-Reyes).*** *La HK transformada coseno de Fourier se puede extender a un operador lineal acotado de $BV_0(\mathbb{R})$ en $HK(\mathbb{R})$.*

Demostración. Sea $f \in BV_0(\mathbb{R})$, entonces

$$\mathcal{F}^c_{HK}(f)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(sx) f(x)\, dx = \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} \cos(sx) f(x)\, dx \qquad (s \neq 0).$$

Además, para cada $s > 0$, se tiene que el mapeo $x \mapsto \cos(sx)$ pertenece a $HK[-M,M]$ para $0 < M < \infty$. Luego, como consecuencia del Teorema del Multiplicador 2.24,

$$\left| \int_{-M}^{M} \cos(sx) f(x)\, dx \right| \leq 2\|\cos(s\cdot)\|_{HK[-M,M]} \|f\|_{BV[-M,M]}.$$

Ahora bien, para cada $s > 0$ fija, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|\cos(sx)\|_{HK[-M,M]} &= 2 \sup_{0\leq u\leq v\leq M} \left| \int_u^v \cos(sx)\, dx \right| \\
&= 2 \sup_{0\leq u\leq v\leq M} \left| \int_{su}^{sv} \frac{\cos(y)}{s}\, dy \right| \\
&= 2 \sup_{0\leq u\leq v\leq M} \left| \frac{\operatorname{sen}(sv) - \operatorname{sen}(su)}{s} \right| \\
&\leq \frac{4}{|s|}.
\end{aligned}$$

Por lo que para cada intervalo compacto $[a, b] \subset \mathbb{R}\backslash\{0\}$, del Teorema de convergencia dominada de Lebesgue A.1, se sigue que

$$\begin{aligned}\int_a^b \mathcal{F}_{HK}^c(f)(s)\,ds &= \int_a^b \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^M \cos(sx) f(x)\,dx\,ds \\ &= \lim_{M\to\infty} \int_a^b \int_{-M}^M \cos(sx) f(x)\,dx\,ds.\end{aligned}$$

Así, por el teorema de Fubini, Teoremas A.2 y A.6, obtenemos que

$$\begin{aligned}\left|\lim_{M\to\infty} \int_a^b \int_{-M}^M \cos(sx) f(x)\,dx\,ds\right| &= \left|\lim_{M\to\infty} \int_{-M}^M \int_a^b \cos(sx) f(x)\,ds\,dx\right| \\ &= \left|\lim_{M\to\infty} \int_{-M}^M \frac{\operatorname{sen}(bx) - \operatorname{sen}(ax)}{x} f(x)\,dx\right|.\end{aligned} \tag{3.19}$$

Por lo tanto, del Lema 3.2, concluimos que

$$\left|\int_a^b \mathcal{F}_{HK}^c(f)(s)\,ds\right| \le 2\left\|x^{-1}[\operatorname{sen}(bx) - \operatorname{sen}(ax)]\right\|_{HK(\mathbb{R})} \|f\|_{BV(\mathbb{R})}. \tag{3.20}$$

De hecho, por ser $\mathcal{F}_{HK}^c(f)$ una función par, sabemos que

$$\|\mathcal{F}_{HK}^c(f)\|_{HK(\mathbb{R})} = 2 \sup_{0\le b} \left|\int_0^b \mathcal{F}_{HK}^c(f)(s)\,ds\right|. \tag{3.21}$$

En consecuencia de (3.20) con $a = 0$ y de (3.21), deducimos que

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}_{HK}^c(f)\|_{HK(\mathbb{R})} &\le 4 \sup_{0\le b} \|h_b\|_{HK(\mathbb{R})} \|f\|_{BV(\mathbb{R})} \\ &= 4\pi \operatorname{Si}(\pi) \|f\|_{BV(\mathbb{R})} \\ &< \infty.\end{aligned} \tag{3.22}$$

Por otra parte, para demostrar que $\mathcal{F}_{HK}^c(f)$ pertenece al espacio $HK[0, 1]$ basta, por el Teorema de Hake, probar la existencia del límite:

$$\lim_{b\to 0^+} \int_b^1 \mathcal{F}_{HK}^c(f)(s)\,ds. \tag{3.23}$$

Para este fin, consideramos $\varepsilon > 0$ y elegimos $R > 0$ suficientemente grande tales que

$$\left|\int_{R<|x|} \frac{\operatorname{sen}(bx) - \operatorname{sen}(b'x)}{x} f(x)\,dx\right| \le 4\pi \operatorname{Si}(\pi) \|f\|_{BV(R<|x|)} \le \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.24}$$

Esto se sigue del hecho de que $f(x) \to 0$, conforme $|x| \to \infty$. Ahora bien, para tal R, se tiene que

$$\begin{aligned}\left|\int_{|x|<R} \frac{\operatorname{sen}(bx) - \operatorname{sen}(b'x)}{x} f(x)\,dx\right| &\le 2\left\|x^{-1}[\operatorname{sen}(bx) - \operatorname{sen}(b'x)]\right\|_{HK[-R,R]} \|f\|_{BV[-R,R]} \\ &\le C(b + b') \\ &\le \frac{\varepsilon}{2},\end{aligned} \tag{3.25}$$

si $b, b' < \delta$, para alguna $\delta > 0$. Mientras que C es una constante que solo depende de f y de R. Por lo que de (3.19) junto con (3.24) y (3.25) concluimos la existencia del límite en (3.23).

Para poder concluir que $\mathcal{F}_{HK}^c(f) \in HK(\mathbb{R})$, hay que probar también la convergencia del límite:

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \mathcal{F}_{HK}^c(f)(s)\,ds. \tag{3.26}$$

Primero, observamos que la estimación dada en (3.24) sigue siendo válida para cualesquiera $b, b' > 0$ y $R > 0$ suficientemente grandes. Ahora bien, para probar que la integral en (3.25) también es pequeña, usamos el Lema 3.4. Así por el Teorema de Hake concluimos que $\mathcal{F}^c_{HK}(f)$ pertenece a $HK(\mathbb{R})$, para cualquier $f \in BV_0(\mathbb{R})$. $\square$

El Teorema 3.12 tiene implicaciones con respecto a la teoría de interpolación para la transformada clásica de Fourier sobre los espacios $L^p(\mathbb{R})$ con $1 \le p \le 2$. De hecho, se sigue de la desigualdad de Hausdorff-Young [68] y de la desigualdad "sharp" Hausdorff-Young [8, 43, 74] que para toda $p \in [1, 2]$, la HK transformada coseno de Fourier es un operador lineal acotado de $L^p(\mathbb{R})$ en $L^q(\mathbb{R})$ con

$$\|\mathcal{F}^c_{HK}(f)\|_q \le \gamma_p \|f\|_p, \tag{3.27}$$

donde $1/p + 1/q = 1$ y

$$\gamma_p = \begin{cases} (2\pi)^{\frac{1}{q}} \left(\dfrac{p-1}{p}\right)^{\frac{p-1}{2p}} p^{\frac{1}{2p}} & \text{si } 1 < p \le 2, \\ 1 & \text{si } p = 1. \end{cases} \tag{3.28}$$

Ahora bien, si consideramos los espacios $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R})$ y $L^q(\mathbb{R}) \cap HK(\mathbb{R})$ con normas

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p \cap BV_0} := \|f\|_p + \|f\|_{BV} \quad \text{y} \quad \|f\|_{L^q \cap HK} := \|f\|_q + \|f\|_{HK}$$

respectivamente, donde el primer espacio consta de funciones mientras que en el segundo los elementos son clases de equivalencia, obtenemos el siguiente resultado. Véase [5, Corolario 1]

Corolario 3.2. ***(Arredondo-Mendoza-Reyes).*** *El mapeo $\mathcal{F}^c_{HK} \colon \mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R}) \to L^q(\mathbb{R}) \cap HK(\mathbb{R})$ es continuo para toda $p \in [1, 2]$ y $1/p + 1/q = 1$.*

Demostración. Se sigue de (3.27) y del Lema 3.2 que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}^c_{HK}(f)\|_{L^q \cap HK} &= \|\mathcal{F}^c_{HK}(f)\|_q + \|\mathcal{F}^c_{HK}(f)\|_{HK} \\ &\le \gamma_p \|f\|_p + 4\pi \operatorname{Si}(\pi)\|f\|_{BV} \\ &\le \text{máx}\left\{\gamma_p, 4\pi \operatorname{Si}(\pi)\right\} \|f\|_{\mathcal{L}^p \cap BV_0} \\ &= 4\pi \operatorname{Si}(\pi)\|f\|_{\mathcal{L}^p \cap BV_0}. \end{aligned}$$

Donde $\operatorname{Si}(\pi)$ esta dado por (3.14). $\square$

En conclusión, del Ejemplo 3.1.3 y del Teorema 3.12 se sigue que hay un comportamiento diferente entre las HK transformadas seno y coseno de Fourier. Sin embargo, para la HK transformada de Fourier se tiene la siguiente propiedad. Véase [5, Proposición 3]

Proposición 3.7. ***(Arredondo-Mendoza-Reyes).*** *El operador $F \colon D(F) \to HK(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, con dominio*

$$D(F) := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \,\middle|\, \mathcal{F}_2(f) \in HK(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \right\} \subset L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

definido por

$$F(f)(s) := \mathcal{F}_2(f)(s)$$

es un operador cerrado densamente definido.

Demostración. La densidad del conjunto $D(F)$ se sigue del hecho de que el espacio Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ esta contenido en $D(F)$ y es denso en $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, ver [69], de hecho, el operador $\mathcal{F}_2$ restringido a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es una biyección sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset HK(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Ahora bien, para demostrar que F es un operador cerrado consideramos una sucesión $(f_n)_{n \ge 1}$ en $D(F)$ y f en $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tales que $\|f_n - f\|_2 \to 0$, conforme $n \to \infty$ y $\|F(f_n) - \Upsilon\|_{HK} \to 0$, cuando $n \to \infty$. Por lo que debemos probar que $f \in D(F)$ junto con $F(f) = \Upsilon$.

Para lograr esto, primero notamos que $\|F(f_n) - \Upsilon\|_{HK} \to 0$, conforme $n \to \infty$ implica que Υ puede pertenecer al espacio $\widehat{HK}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, pues $HK(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ NO es un espacio de Banach, esto puede consultarse en [78, 79]

Por otra parte, sabemos que $\mathcal{F}_2$ es un operador unitario sobre $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ y para todo intervalo compacto $[s, t] \subset \mathbb{R}$ se cumple que

$$\mathcal{F}_2(f_n) \in L^2\Big([s, t], \mathbb{C}\Big) \cap L^1\Big([s, t], \mathbb{C}\Big), \qquad (\forall n \geq 1).$$

En consecuencia, por ser f_n elemento de $D(F)$, se sigue que

$$\int_s^t \Upsilon := \lim_{n\to\infty} \int_s^t F(f_n) = \lim_{n\to\infty} \int_s^t \mathcal{F}_2(f_n) = \int_s^t \mathcal{F}_2(f),$$

para cada intervalo compacto $[s, t]$.

Por último, de la desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz se infiere que $\mathcal{F}_2(f) = \Upsilon$ con $\mathcal{F}_2(f)$ elemento de $HK(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ y esto implica que $f \in D(F)$, es decir, el operador F es cerrado. □

Por otra parte, consideramos el espacio de Banach $C^1(\mathbb{R})$ de todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con derivada continua tales que $\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty < \infty$, y $B' = \mathcal{B} \cap C^1(\mathbb{R})$ donde la norma esta dada por $\|f\|_{B'} := \|f\|_{\mathcal{B}} + \|f'\|_\infty$ con $\mathcal{B}$ definido en (3.9).

Además, definimos $B_1 := AC_{loc} \cap \mathcal{B}$, donde AC_{loc} indica el conjunto de funciones absolutamente continuas en cada intervalo compacto de $\mathbb{R}$. En consecuencia de [60] sabemos que B_1 es una subálgebra cerrada de $\mathcal{B}$ y

$$B' \subset \mathcal{B} * L^1(\mathbb{R}) = \overline{B'}^{\mathcal{B}} = B_1 \subset BV_0,$$

donde $*$ denota la convolución de $\mathcal{B} \times L^1(\mathbb{R})$ a $\mathcal{B}$ definida mediante

$$f * g(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy.$$

El concepto de convolución también fue estudiado por E. Talvila en [80]. Por último, en virtud del Teorema 3.12, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.8. *Para $f \in B_1$, la fórmula*

$$\mathcal{F}^c_{HK}(f)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(sx) f(x)\,dx$$

se satisface para cada $s \neq 0$. Además, $\mathcal{F}^c_{HK}(f)$ pertenece a $HK(\mathbb{R})$ y se cumple que $\mathcal{F}^c_{HK}(f)(s) \to 0$, conforme $|s| \to \infty$.

Más aún, si $f \in \mathcal{B}$, entonces se cumple que $\mathcal{F}_{HK}(f)$ existe sobre todo $\mathbb{R}$. De hecho, si $g(x) := xf(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$ y g es elemento de $\mathcal{B}$, entonces $\mathcal{F}_{HK}(f)$ es diferenciable en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, y $\mathcal{F}'_{HK}(f)(s) = -i\mathcal{F}_{HK}(g)(s)$, para cada $s \neq 0$. Esto puede ser consultado en [71, Teorema 4.2] y [77, Proposición 8].

Consecuentemente, en este capítulo hemos mostrado que la HK transformada coseno de Fourier definida en $BV_0(\mathbb{R})$ define un operador lineal acotado con la siguiente propiedad:

$$\mathcal{F}^c_{HK}\Big(BV_0(\mathbb{R})\Big) \subset HK(\mathbb{R}).$$

Mientras que el ejemplo 3.1.3 muestra que para la HK transformada seno de Fourier se tiene un comportamiento diferente, estos hechos pueden consultarse en [5]. En el capítulo 4 extendemos el operador $\mathcal{F}^c_{HK}$ a espacios más generales utilizando la teoría de interpolación. Véase [6].

Capítulo 4

Teoría de interpolación

En este capítulo estudiamos la teoría de interpolación que ha sido utilizada para extender operadores lineales y acotados a espacios más generales y en el presente trabajo, utilizamos el método de interpolación complejo, véase por ejemplo [53, Capítulo 2], [9, Capítulo 4], [14, Ejemplo 2.6.6], [72, Capítulo 2], [73, Capítulo 4] y [16, Secciones 1 - 4].

Para este fin, requerimos de parejas de espacios de Banach **complejos** por lo que si X es un espacio de Banach *real*, entonces consideramos el producto cartesiano $X \times X$ junto con las operaciones:

$$\begin{aligned} (x, y) + (u, v) &:= (x + u, y + v) && \forall x, y, u, v \in X, \\ (a + ib)(x, y) &:= (ax - by, bx + ay) && \forall x, y \in X, \forall a, b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

De esta manera, el conjunto $X \times X$ es un espacio vectorial *complejo* el cual se denota mediante $\tilde{X}$. Además, si definimos el mapeo $j_X : X \to X \times X$, mediante $x \mapsto (x, 0)$ obtenemos:

1) j_X es un operador lineal, real e inyectivo de X en $\tilde{X}$.

2) El generado lineal complejo de $j_X(X)$ es igual a $\tilde{X}$.

Es por esta razón que decimos que el espacio $\tilde{X}$ es la **"complexificación"** del espacio real X y hacemos la siguiente identificación:

$$\tilde{X} = X + iX$$

y escribimos $z = x + iy$ para cualquier elemento $z = (x, y) = j(x) + i\,j(y)$ junto con $\mathrm{Re}(z) = x$ y $\mathrm{Im}(z) = y$. Además, en $\tilde{X}$ definimos la norma

$$\|x + iy\|_T := \sup_{t \in [0,2\pi]} \|x \cos(t) - y \operatorname{sen}(t)\|_X \tag{4.1}$$

Definición 17. *Sea X un espacio de Banach real. Decimos que la norma en $\tilde{X}$ es razonable si*

1) $\|j(x)\|_{\tilde{X}} = \|x\|_X$, para toda $x \in X$.

2) $\|x + iy\|_{\tilde{X}} = \|x - iy\|_{\tilde{X}}$, para toda $x, y \in X$.

En tal situación, decimos que el espacio $\tilde{X}$ es una complexificación razonable de X.

Proposición 4.1. *Sea $\tilde{X}$ la complexificación del espacio de banach real X. Entonces de entre todas las normas razonables en $\tilde{X}$, la mínima esta dada por la norma $\|\cdot\|_T$. Además, cualquier otra norma en $\tilde{X}$ es equivalente a $\|\cdot\|_T$, de hecho, para cualesquiera $x, y \in X$ se cumple*

$$\|x + iy\|_T \leq \|x + iy\|_{\tilde{X}} \leq 2\|x + iy\|_T.$$

La demostración de la Proposición 4.1 puede consultarse en [63, Proposición 3]. En el caso particular de funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, sabemos que

$$f(x) := \mathrm{Re} f(x) + i\, \mathrm{Im} f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$$

para cada $x \in \mathbb{R}$. Por lo que se satisface que

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \mathcal{L}^p(\mathbb{R}) + i\mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \quad \text{y} \quad L^p(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = L^p(\mathbb{R}) + iL^p(\mathbb{R})$$

con $1 \leq p \leq \infty$, y de manera similar tenemos que la complexificación del espacio $BV(\mathbb{R})$ esta dad mediante

$$BV(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = BV(\mathbb{R}) + iBV(\mathbb{R}).$$

Esto puede ser consultado en [27, 7]. Más aún, se sigue de la Proposición 2.6 que la norma en $HK(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dada por (2.8) es razonable y por la Proposición 4.1 concluimos que $\|\cdot\|_{HK(\mathbb{R},\mathbb{C})}$ es equivalente a $\|\cdot\|_T$.

En adelante, utilizamos el hecho de que si X, Y son espacios de Banach reales o complejos, entonces el conjunto

$$\mathcal{L}(X, Y) := \left\{ T : X \to Y \,\middle|\, T \text{ es un operador lineal y acotado} \right\}$$

es un espacio de Banach con la norma (de operadores) dada por

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} := \sup\left\{ \|T(x)\|_Y \,\middle|\, \|x\|_X \leq 1 \right\}.$$

En particular, si $X = Y$, escribimos $\mathcal{L}(X)$ en vez de $\mathcal{L}(X, X)$. Para el caso en que X, Y son espacios reales y $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, entonces existe una única extensión compleja lineal $\tilde{T} : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ dada por

$$\tilde{T}(x + iy) := T(x) + i\, T(y) \tag{4.2}$$

para cada $x, y \in X$.

Observación 12. *Sean X, Y espacios de Banach reales. Entonces definimos en $\tilde{X}$*

$$\|x + iy\|_{\tilde{X}} := \|x\|_X + \|y\|_Y.$$

Análogamente en $\tilde{Y}$ consideramos

$$\|u + iv\|_{\tilde{Y}} := \|u\|_Y + \|v\|_Y.$$

En consecuencia, si $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, entonces

$$\begin{aligned}
\|\tilde{T}(x + iy)\|_{\tilde{Y}} &= \|T(x) + iT(y)\|_{\tilde{Y}} \\
&= \|T(x)\|_Y + \|T(y)\|_Y \\
&\leq \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\, \|x\|_X + \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\, \|y\|_X \\
&= \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \Big[\|x\|_X + \|y\|_X \Big] \\
&= \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\, \|x + iy\|_{\tilde{X}},
\end{aligned}$$

para cualesquiera $x, y \in X$. Por lo tanto,

$$\|\tilde{T}\|_{\mathcal{L}(\tilde{X},\tilde{Y})} = \sup_{\|x+iy\|_{\tilde{X}} \leq 1} \|\tilde{T}(x + iy)\|_{\tilde{Y}} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}.$$

De hecho,

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|T(x)\|_Y \leq \|\tilde{T}\|_{\mathcal{L}(\tilde{X},\tilde{Y})},$$

ya que $X \hookrightarrow \tilde{X}$ mediante $x \mapsto x + i\,0$. Con lo cual

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \|\tilde{T}\|_{\mathcal{L}(\tilde{X},\tilde{Y})}. \tag{4.3}$$

En general, para simplificar la notación, escribimos T en lugar de $\tilde{T}$ para el operador dado por (4.2). Los detalles de la construcción y de las propiedades del espacio $X + iX$ pueden consultarse en [63, 52, 2].

4.1. Espacios compatibles

Definición 18. *Sean A_0 y A_1 dos espacios vectoriales topológicos reales o complejos. Diremos que A_0 y A_1 son compatibles si existe un espacio vectorial topológico Hausdorff, V, tal que $A_0 \subset V$ y $A_1 \subset V$ con inclusiones continuas.*

Bajo las condiciones de la Definición 18 dada una pareja $\bar{A} = (A_0, A_1)$ de espacios compatibles, podemos formar los subespacios

$$A_0 \cap A_1 \quad \text{y} \quad A_0 + A_1$$

de V, para los cuales se tiene el siguiente resultado que puede consultrase en [9, Lema 2.3.1].

Lema 4.1. *Supongamos que A_0 y A_1 espacios vectoriales normados compatibles. Entonces $A_0 \cap A_1$ y $A_0 + A_1$ son espacios vectoriales normados con*

$$\|a\|_{A_0\cap A_1} := \text{máx}\Big\{\|a\|_{A_0}, \|a\|_{A_1}\Big\},$$
$$\|a\|_{A_0+A_1} := \inf_{a_0+a_1=a}\Big\{\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1}\Big\}.$$

Más aún, si A_0 and A_1 son completos, entonces $A_0 \cap A_1$ y $A_0 + A_1$ también son completos.

Demostración. Para verificar que $A_0 + A_1$ es completo, usamos la siguiente caracterización de los espacios vectoriales normados completos: V es completo si y sólo si $\sum_{n\geq 1} \|a_n\|_V < \infty$ implica $\sum_{n\geq 1} a_n$ es convergente en V.
Por lo cual, suponemos que

$$\sum_{n\geq 1} \|a_n\|_{A_0+A_1} < \infty.$$

Entonces para cada $n \geq 1$, podemos encontrar una descomposición $a_n = a_n^0 + a_n^1 \in A_0 + A_1$, tal que

$$\|a_n^0\|_{A_0} + \|a_n^1\|_{A_1} \leq 2\|a_n\|_{A_0+A_1} < \infty.$$

Luego,

$$\sum_{n\geq 1} \|a_n^0\|_{A_0} < \infty \quad \text{y} \quad \sum_{n\geq 1} \|a_n^1\|_{A_1} < \infty.$$

Por ser A_0 y A_1 espacios completos, sabemos que $\sum_{n\geq 1} a_n^0$ converge en A_0 y también $\sum_{n\geq 1} a_n^1$ converge en A_1. Haciendo

$$a^0 = \sum_{n\geq 1} a_n^0,\ a^1 = \sum_{n\geq 1} a_n^1 \text{ y } a = a^0 + a^1.$$

Concluimos que $a \in A_0 + A_1$ y

$$\left\| a - \sum_{n\geq 1}^{N} a_n \right\|_{A_0+A_1} \leq \left\| a^0 - \sum_{n\geq 1}^{N} a_n^0 \right\|_{A_0} + \left\| a^1 - \sum_{n\geq 1}^{N} a_n^1 \right\|_{A_1}.$$

Por lo tanto,

$$\left\| a - \sum_{n\geq 1}^{N} a_n \right\|_{A_0+A_1} \to 0$$

cuando $N \to \infty$, es decir, $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge en $A_0 + A_1$ hacia a. □

De hecho, $\|a\|_{A_0} \leq \|a\|_{A_0+A_1}$ y $\|a'\|_{A_1} \leq \|a'\|_{A_0+A_1}$ para cada $a \in A_0, a' \in A_1$, así tanto A_0 como A_1 están encajados continuamente en $A_0 + A_1$. En adelante, el símbolo $\bar{A}$ denotará una pareja de espacios vectoriales normados compatibles (A_0, A_1).

A continuación, mostramos que el espacio $A_0 + A_1$ es isométrico a un espacio cociente en el producto cartesiano $A_0 \times A_1$ con norma dada por $\|(x, y)\|_{A_0\times A_1} := \|x\|_{A_0} + \|y\|_{A_1}$.

Proposición 4.2. *El espacio $A_0 + A_1$ es isométrico al espacio $(A_0 \times A_1)/D$, donde $D := \left\{(d, -d) \,\middle|\, d \in A_0 \cap A_1\right\}$.*

Demostración. Sean $z = x + y \in A_0 + A_1$, entonces $(x, y) \in A_0 \times A_1$ y

$$[z] = \{z' \in A_0 \times A_1 : z - z' \in D\}.$$

También, $z' \in A_0 \times A_1$ si y sólo si $z' = (x', y')$ con $x' \in A_0, y' \in A_1$, luego $z - z' \in D$ si y sólo si $y - y' = x' - x$ con $x - x' \in A_0 \cap A_1$.
Por lo que definiendo $d = x - x'$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\|z\|_{A_0+A_1} &= \inf_{x'+y'=z} \|x'\|_{A_0} + \|y'\|_{A_1} \\
&= \inf_{x'+y'=z} \|x - (x - x')\|_{A_0} + \|y - (y - y')\|_{A_1} \\
&\leq \inf_{(d,-d)\in D} \|x - d\|_{A_0} + \|y + d\|_{A_1} \\
&= \left\|[z]\right\|_{(A_0\times A_1)/D}.
\end{aligned}$$

Finalmente, para cada $(x, y) \in A_0 \times A_1$ tal que $x + y = z$, podemos tomar $d = 0 \in A_0 \cap A_1$, de aquí que $z = (x-d)+(y+d)$ y

$$\left\|[z]\right\|_{(A_0\times A_1)/D} \leq \|z\|_{A_0+A_1}.$$

□

La Proposición 4.2 puede ser consultada en [53, 9, 37].

Definición 19. *Decimos que un espacio vectorial real o complejo E es un espacio intermedio con respecto a una pareja de espacios compatibles $\bar{A} = (A_0, A_1)$, si*

$$A_0 \cap A_1 \subset E \subset A_0 + A_1$$

con inclusiones continuas.

Definición 20. *Decimos que un espacio intermedio E con respecto a la pareja $\bar{A}$ es un espacio de interpolación si para cada operador $T \in \mathcal{L}(A_0) \cap \mathcal{L}(A_1)$, es decir, para cada operador lineal y acotado $T : A_0 + A_1 \to A_0 + A_1$ tal que su restricción a A_0 pertenece a $\mathcal{L}(A_0)$ y su restricción a A_1 pertenece a $\mathcal{L}(A_1)$,implica que la restricción de T a E pertenece a $\mathcal{L}(E)$.*

Se sigue de la Definición 20 el siguiente resultado.

Lema 4.2. *Sea E un espacio de Banach tal que es espacio de interpolación con respecto a una pareja de espacios de Banach compatibles $\bar{A} = (A_0, A_1)$, entonces existe $C > 0$ tal que para cualquier operador $T : A_0 + A_1 \to A_0 + A_1$ con la restricción de T a A_0 que pertenece a $\mathcal{L}(A_0)$ y la restricción de T a A_1 pertenece a $\mathcal{L}(A_1)$ se satisface que*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E)} \leq C \max\left\{\|T\|_{\mathcal{L}(A_0)}, \|T\|_{\mathcal{L}(A_1)}\right\}.$$

La demostración del Lema 4.2 puede consultarse en [53, Lema 0.1] y en [37, Lema 4.2].

4.2. Método complejo de interpolación

El método de interpolación *complejo* se debe a los trabajos de A. P. Calderon [15, 16] y es una abstracción y generalización del método utilizado en la prueba del teorema de interpolación Riesz-Thorin, que mostramos a continuación y pueden consultarse en [9, 53].

Sea (U, μ) un espacio de medida, denotamos por $L^p(U, d\mu)$ el espacio de clases de equivalencia de las funciones $f\colon U \to \mathbb{C}$ que son μ-medibles tales que

$$\|f\|_{L^p}^p := \int_U |f(x)|^p \, d\mu < \infty,$$

con $1 \leq p < \infty$. Además, consideramos $L^\infty(U, d\mu)$ el espacio de clases de equivalencias de funciones $f\colon U \to \mathbb{C}$ que son μ-medibles y acotadas. Además, hacemos

$$\|f\|_{L^\infty} := \sup_{x \in U} |f(x)|.$$

Teorema 4.1. ***(Teorema de interpolación de Riesz-Thorin).*** *Supongamos que $p_0 \neq p_1, q_0 \neq q_1$ y consideremos $T\colon L^{p_0}(U, d\mu) \to L^{q_0}(V, d\nu)$ lineal y acotado con norma M_0, junto con $T\colon L^{p_1}(U, d\mu) \to L^{q_1}(V, d\nu)$ lineal y acotado con norma M_1. Entonces $T\colon L^p(U, d\mu) \to L^q(V, d\nu)$ es un operador lineal y acotado con norma*

$$M \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta},$$

siempre que $0 < \theta < 1$ *y*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Se sigue del teorema de Riesz-Thorin, al considerar $U = V = \mathbb{R}^n$ y $d\mu = d\nu = dx$ la medida de Lebesgue al definir T como la transormada de Fourier, es decir,

$$(Tf)(\xi) := \mathcal{F}_p(f)(\xi) = \int_U e^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x)\, dx, \tag{4.4}$$

donde $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ y $\langle x, \xi\rangle$ denota el producto punto de $\mathbb{R}^n$, que la transformada de Fourier se extiende de $L^p(\mathbb{R}^n, dx)$ a $L^q(\mathbb{R}^n, dx)$ con

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{2}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Consecuentemente, al eliminar θ, obtenemos que $1/p = 1 - 1/q$, es decir, $q = p'$ donde $1 < p < 2$ y se tiene la siguiente estimación de la norma de la transformada de Fourier.

Teorema 4.2. ***(Desigualdad de Hausdorff-Young).*** *Si $1 \leq p \leq 2$, entonces*

$$\|\mathcal{F}_p(f)\|_{p'} \leq (2\pi)^{n/p'} \|f\|_p,$$

para cada $f \in L^p(\mathbb{R}^n, dx)$.

Los detalles de la desigualdad de Haussdorff-Young pueden consultarse en [9, Teorema 1.2.1] y [75, Teorema 0.1.12].

En general, dada una pareja de espacios **complejos** de Banach compatibles (X, Y) definimos el espacio de funciones $\mathbb{F}(X, Y)$ que consta de todos los mapeos f de la banda del plano complejo $\mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, 0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1\}$ en $X + Y$ que sean holomorfas en el interior de la banda $\mathbb{S}$ y continuos hasta la frontera y tales que las funciones $t \mapsto f(it)$ y $t \mapsto f(1 + it)$, sean continuas de $\mathbb{R}$ en X y Y respectivamente con

$$\|f\|_{\mathbb{F}(X,Y)} := \text{máx}\left\{\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(it)\|_X, \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(1+it)\|_Y\right\} < \infty. \tag{4.5}$$

De esta manera, el conjunto $\mathbb{F}(X, Y)$ es un espacio de Banach con la norma dada por la asignación en (4.5).

Definición 21. *Para cada $\theta \in [0,1]$, definimos el espacio complejo $[X,Y]_\theta$ que consta de todos los elementos $a \in X+Y$ para los cuales $a = f(\theta)$ para alguna $f \in \mathbb{F}(X,Y)$ y la norma en $[X,Y]_\theta$ esta dada mediante*

$$\|a\|_{[\theta]} := \text{ínf}\left\{\|f\|_{\mathbb{F}(X,Y)} \,\middle|\, f(\theta) = a, f \in \mathbb{F}(X,Y)\right\}.$$

Observación 13. *El espacio $X \cap Y$ es denso en $[X,Y]_\theta$ y $[X,Y]_\theta$ es isomorfo al espacio cociente $\mathbb{F}(X,Y)/\mathfrak{N}_\theta$, donde $\mathfrak{N}_\theta$ es el subconjunto de $\mathbb{F}(X,Y)$ que consta de todas las funciones que se desvanecen en $z = \theta$. Además, $\mathfrak{N}_\theta$ es cerrado y en consecuencia, el espacio cociente es un espacio de Banach y $[X,Y]_\theta$ lo es también.*

Teorema 4.3. *Sea $\theta \in (0,1)$. Entonces*

$$X \cap Y \subset [X,Y]_\theta \subset X + Y$$

con inclusiones continuas.

Observación 14. *Se sigue de [53, Corolario 2.8, Proposición 2.10] que para cada $\theta \in (0,1)$,*

$$(X,Y)_{\theta,1} \subset [X,Y]_\theta \subset (X,Y)_{\theta,\infty},$$

donde los espacios $(X,Y)_{\theta,p}$ se definen por el método real de interpolación. Ver también [9, Teorema 4.7.1].

En general, la teoría de interpolación no está dedicada a caracterizar todos los espacios de interpolación con respecto a la pareja (X,Y), sino mas bien para construir familias de espacios de interpolación adecuados y estudiar sus propiedades, este el caso de los espacios $[X,Y]_\theta$ y en particular se tiene el siguiente resultado para los espacios $L^p(\Omega,\mathbb{C})$.

Lema 4.3. *Si $0 < p_0 < p < p_1$, entonces*

$$L^{p_0}(\mathbb{R}) \cap L^{p_1}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R}) \subset L^{p_0}(\mathbb{R}) + L^{p_1}(\mathbb{R}).$$

La demostración del Lema 4.3 puede ser consultada en [67, Capítulo 3].

Proposición 4.3. *Sea (Ω,Σ,μ) un espacio de medida con μ una medida σ-finita sobre Σ y consideremos $1 \le p_0, p_1 \le \infty$ y $0 < \theta < 1$. Entonces*

$$\left[L^{p_0}(\Omega,\mathbb{C}), L^{p_1}(\Omega,\mathbb{C})\right]_\theta = L^p(\Omega,\mathbb{C}), \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1},$$

y sus normas coinciden. (En el caso de que $p_0 = \infty$ ó bien $p_1 = \infty$, el enunciado es correcto si establecemos que $1/\infty = 0$, como es usual).

A continuación, establecemos el teorema de interpolación para los espacios complejos $[X,Y]_\theta$ con $0 < \theta < 1$.

Teorema 4.4. *(**Teorema de interpolación**). Sean $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2)$ parejas de espacios de Banach complejos compatibles. Si T pertenece a $\mathcal{L}(X_1,X_2) \cap \mathcal{L}(Y_1,Y_2)$, entonces la restricción de T a $[X_1,Y_1]_\theta$ pertenece a*

$$\mathcal{L}\Big([X_1,Y_1]_\theta, [X_2,Y_2]_\theta\Big)$$

para cada $\theta \in (0,1)$. De hecho, se satisface que

$$\|T\|_{\mathcal{L}([X_1,Y_1]_\theta,[X_2,Y_2]_\theta)} \le \|T\|^{1-\theta}_{\mathcal{L}(X_1,X_2)}\|T\|^{\theta}_{\mathcal{L}(Y_1,Y_2)}.$$

La demostración del Teorema 4.4 puede consultarse en [53, Teorema 2.6] y este se ilustra en el diagrama (4.6).

$$\begin{tikzcd}
X_1 \cap Y_1 \arrow[r, hook] & {[X_1,Y_1]_\theta} \arrow[r, hook] \arrow[d, dashed, "T"] & X_1 + Y_1 \arrow[d, "T"] \\
X_2 \cap Y_2 \arrow[r, hook] & {[X_2,Y_2]_\theta} \arrow[r, hook] & X_2 + Y_2
\end{tikzcd} \tag{4.6}$$

Ahora bien, para poder aplicar el Teorema de interpolación 4.4 en el contexto de la HK transformada coseno de Fourier requerimos de algunos resultados técnicos que aparecen en [6].

4.2.1. Método complejo de interpolación: caso L^1

Para esto, en el espacio de funciones $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R})$ consideramos

$$\|\cdot\|_{\mathcal{L}^1\cap BV_0} := \text{máx}\Big\{\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_{BV}\Big\}.$$

Lema 4.4. *(**Arredondo-Reyes**). Para cualquier sucesión de Cauchy $(f_n)_{n\geq 1}$ en $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R})$, existe $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R})$ tal que $\|f_n - f\|_{\mathcal{L}^1\cap BV_0} \to 0$, conforme $n \to \infty$.*

Demostración. Dado que $BV_0(\mathbb{R})$ es un espacio de Banach, se tiene que para cualquier sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})\cap BV_0(\mathbb{R})$ existe $f \in BV_0(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f_n - f\|_{BV} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Más aún,

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \|f_n - f\|_{BV} \qquad (\forall n \geq 1).$$

Por lo cual, la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a f. También por ser $(f_n)_{n\geq 1}$ de Cauchy, existe $[\tilde{f}] \in L^1(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f_n - \tilde{f}\|_{L^1} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

En consecuencia, existe una subsucesión $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(f_n)_{n\geq 1}$ que converge puntualmente salvo un conjunto de medida cero a f, ver [13, 70]. Se sigue entonces de la convergencia uniforme de $(f_n)_{n\geq 1}$ a f que $f = \tilde{f}$, salvo un conjunto de medida cero.

Por lo tanto, $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ con

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|\, dx = 0.$$

□

Ahora bien, en el espacio producto $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \times BV_0(\mathbb{R})$ con norma $\|(f,g)\|_{\mathcal{L}^1\times BV_0} := \|f\|_{\mathcal{L}^1} + \|g\|_{BV}$, consideramos el espacio cociente $\Big(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \times BV_0(\mathbb{R})\Big)/D$ donde

$$D := \Big\{(f, -f) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \times BV_0(\mathbb{R}) : f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R})\Big\},$$

y definimos el espacio suma

$$\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R}) := \Big(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \times BV_0(\mathbb{R})\Big)/D.$$

Así, tenemos que $a \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})$ si y sólo si

$$a := f + g = (f, g) + D$$

con

$$\|a\|_{\mathcal{L}^1+BV_0} := \inf_{(h,-h)\in D} \|f - h\|_{\mathcal{L}^1} + \|g + h\|_{BV}. \tag{4.7}$$

De aquí que, si $a \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})$ es tal que $\|a\|_{\mathcal{L}^1+BV_0} = 0$, entonces existe una sucesión $(h_n)_{n\geq 1}$ en $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R})$ y una subsucesión $(h_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(h_n)_{n\geq 1}$ tal que

$$0 = \|a\|_{\mathcal{L}^1+BV_0} \leq \|f - h_{n_k}\|_{\mathcal{L}^1} + \|g + h_{n_k}\|_{BV} < \frac{1}{k}.$$

Así, la sucesión $(-h_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a g y $(h_n)_{n\geq 1}$ converges a f salvo un conjunto de medida cero.

Por lo tanto, $g(x) = -f(x)$ y la función g pertenece a $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R})$, luego $a = (f, -f)$ con $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R})$, con lo cual la fórmula (4.7) es una norma en el espacio real $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})$ y la completación de este espacio la denotamos por $\mathcal{L}^1\widehat{(\mathbb{R}) + B}V_0(\mathbb{R})$.

Por otra parte, en el producto cartesiano $L^1(\mathbb{R}) \times BV_0(\mathbb{R})$ consideramos

$$D' = \left\{\left([f], -f\right) \in L^1(\mathbb{R}) \times BV_0(\mathbb{R}) : f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R})\right\}$$

y definimos

$$L^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R}) := \left(L^1(\mathbb{R}) \times BV_0(\mathbb{R})\right)/D'$$

cuyos elementos son clases de equivalencia de la forma

$$\bar{a} := [f+g] = \left([f], g\right) + D'.$$

Sin embargo, nos limitaremos a escribir

$$\bar{a} = f + g.$$

Se sigue del hecho del Lema 4.4, que D' es cerrado en $L^1(\mathbb{R}) \times BV_0(\mathbb{R})$, por lo que $L^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})$ es un espacio de Banach real.

La relación entre los espacios suma $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})$ y $L^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})$ esta dada en la siguiente proposición.

Proposición 4.4. *(**Arredondo-Reyes**). El espacio $L^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})$ es isométrico a $\widehat{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) + B}V_0(\mathbb{R})$.*

Demostración. Dada $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, tenemos que $[f] \in L^1(\mathbb{R})$ con $\|f\|_{\mathcal{L}^1} = \|[f]\|_{L^1}$. Recíprocamente, si $[f]$ pertenece a $L^1(\mathbb{R})$, entonces existe $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ tal que $f = \tilde{f}$ salvo un conjunto de medida cero.

Luego, para cada $a = (f, g) + D \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})$ definimos $\bar{a} = ([f], g) + D' \in L^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})$. Así, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\|(f,g) + D\|_{\mathcal{L}^1 + BV_0} &= \inf_{(h,-h)\in D} \|f - h\|_{\mathcal{L}^1} + \|g + h\|_{BV} \\
&= \inf_{([h],-h)\in D'} \|[f - h]\|_{L^1} + \|g + h\|_{BV} \\
&= \|([f], g) + D'\|_{L^1 + BV_0}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el mapeo $a \mapsto \bar{a}$ de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})$ en $L^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})$, tiene rango denso ya que $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ es denso en $L^1(\mathbb{R})$. De aquí que este mapeo se puede extender a una isometría de $\widehat{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) + B}V_0(\mathbb{R})$ en $L^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})$, con lo cual se implica el resultado. □

Del mismo modo, consideramos la pareja de espacios de Banach reales $\left((L^\infty(\mathbb{R}), \widehat{HK}(\mathbb{R})\right)$, donde en ambos espacios los elementos son clases de equivalencia de funciones $[f]$ pero como es usual solo escribimos f, y definimos la suma $L^\infty(\mathbb{R}) + \widehat{HK}(\mathbb{R})$.

Por lo tanto, hemos construido el espacio real $L^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})$ y ahora también consideramos su complexificación dada por

$$L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) + BV_0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) := \left(L^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})\right) + i\left(L^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})\right) \tag{4.8}$$

y también consideramos la complexificación de $L^\infty(\mathbb{R}) + \widehat{HK}(\mathbb{R})$ dada por

$$L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) + \widehat{HK}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) := \left(L^\infty(\mathbb{R}) + \widehat{HK}(\mathbb{R})\right) + i\left(L^\infty(\mathbb{R}) + \widehat{HK}(\mathbb{R})\right). \tag{4.9}$$

A partir de este punto, consideraremos solo espacios complejos, salvo que se especifique lo contrario, y por ende omitiremos el símbolo $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Así, en relación directa con la Definición 20 tenemos para las parejas complejas de espacios (L^1, BV_0) y $(L^\infty, \widehat{HK})$ que un operador arbitrario T de (L^1, BV_0) en $(L^\infty, \widehat{HK})$ es **lineal y acotado** si y sólo si

$$T \in \mathcal{L}\left(L^1 + BV_0, L^\infty + \widehat{HK}\right)$$

con $T \in \mathcal{L}\left(L^1, L^\infty\right)$ y $T \in \mathcal{L}\left(BV_0, \widehat{HK}\right)$.

En este caso, obtenemos que

$$\begin{aligned}\|T((f,g)+D)\| &\leq \|T(f-h)\|_{L^\infty} + \|T(g+h)\|_{HK} \qquad (h \in \mathcal{L}^1 \cap BV_0)\\ &\leq \|T\|_{\mathcal{L}(L^1,L^\infty)}\|f-h\|_{L^\infty} + \|T\|_{\mathcal{L}(BV_0,\widehat{HK})}\|g+h\|_{BV_0}\\ &\leq \text{máx}\left\{\|T\|_{\mathcal{L}(L^1,L^\infty)}, \|T\|_{\mathcal{L}(BV_0,\widehat{HK})}\right\}(\|f-h\|_{L^\infty} + \|g+h\|_{BV_0}).\end{aligned}$$

Por lo tanto, para la norma de $T : (L^1, BV_0) \to (L^\infty, \widehat{HK})$, concluimos que

$$\|T\|_{\mathcal{L}(L^1+BV_0, L^\infty+\widehat{HK})} \leq \text{máx}\left\{\|T\|_{\mathcal{L}(L^1,L^\infty)}, \|T\|_{\mathcal{L}(BV_0,\widehat{HK})}\right\}.$$

De manera análoga,

$$\|T\|_{\mathcal{L}(L^1\cap BV_0, L^\infty\cap\widehat{HK})} \leq \text{máx}\left\{\|T\|_{\mathcal{L}(L^1,L^\infty)}, \|T\|_{\mathcal{L}(BV_0,\widehat{HK})}\right\}.$$

Más aún, decimos que dos espacios complejos $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son **espacios intermedios** de (L^1, BV_0) y $(L^\infty, \widehat{HK})$ si y sólo si

$$\mathcal{L}^1 \cap BV_0 \subset \mathfrak{A} \subset L^1 + BV_0 \quad \text{y} \quad L^\infty \cap \widehat{HK} \subset \mathfrak{B} \subset L^\infty + \widehat{HK}$$

con inclusiones continuas. De hecho, decimos que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son **espacios de interpolación** con respecto a (L^1, BV_0) y $(L^\infty, \widehat{HK})$ si y sólo si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son espacios intermedios con la siguiente propiedad:

$$T \in \mathcal{L}\left(L^1 + BV_0, L^\infty + \widehat{HK}\right) \text{ implica que la restricción de } T \text{ a } \mathfrak{A} \text{ pertenece a } \mathcal{L}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}).$$

Ahora bien, consideramos los espacios

$$\mathbb{F}(L^1, BV_0) \quad \text{y} \quad \mathbb{F}(L^\infty, \widehat{HK})$$

con la norma dada en (4.5) y en consecuencia tenemos los espacios de interpolación *complejos*

$$[L^1, BV_0]_\theta \quad \text{y} \quad [L^\infty, \widehat{HK}]_\theta$$

para cada $\theta \in (0, 1)$.

Así en virtud de (4.2), al considerar el operador extendido

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}_1^c : L^1(\mathbb{R},\mathbb{C}) \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})\\ &\mathcal{F}_1^c(f_1 + if_2)(s) := \mathcal{F}_1^c(f_1)(s) + i\mathcal{F}_1^c(f_2)(s)\end{aligned} \tag{4.10}$$

para cada $s \in \mathbb{R}$, definido a partir de (3.2), se cumple por (4.3) que

$$\|\mathcal{F}_1^c\|_{\mathcal{L}\left(L^1(\mathbb{R},\mathbb{C}),L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})\right)} = \|\mathcal{F}_1^c\|_{\mathcal{L}\left(L^1(\mathbb{R}),L^\infty(\mathbb{R})\right)} = 1.$$

Análogamente, el operador extendido

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}_{HK}^c : BV_0(\mathbb{R},\mathbb{C}) \longrightarrow \widehat{HK}(\mathbb{R},\mathbb{C})\\ &\mathcal{F}_{HK}^c(f_1 + if_2)(s) := \mathcal{F}_{HK}^c(f_1)(s) + i\mathcal{F}_{HK}^c(f_2)(s)\end{aligned} \tag{4.11}$$

para cada $s \neq 0$, definido a partir de (3.12), satisface que

$$\|\mathcal{F}_{HK}^c\|_{\mathcal{L}\left(BV_0(\mathbb{R},\mathbb{C}),\widehat{HK}(\mathbb{R},\mathbb{C})\right)} \leq 4\pi\,\mathrm{Si}(\pi).$$

Definición 22. *(**Arredondo-Reyes**). A partir de los operadores* (4.10) *y* (4.11) *definimos la transformada coseno en* $L^1 + BV_0$ *mediante*

$$\begin{aligned}&\mathfrak{F}_1^c : L^1(\mathbb{R},\mathbb{C}) + BV_0(\mathbb{R},\mathbb{C}) \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}) + \widehat{HK}(\mathbb{R},\mathbb{C})\\ &\mathfrak{F}_1^c(f+g)(s) := \mathcal{F}_1^c(f)(s) + \mathcal{F}_{HK}^c(g)(s)\end{aligned} \tag{4.12}$$

con $s \neq 0$.

Corolario 4.1. *(**Arredondo-Reyes**). La restricción del operador $\mathfrak{F}_1^c$ dado en (4.12) al subespacio $[L^1, BV_0]_\theta$, satisface que*

$$\mathfrak{F}_1^c \in \mathcal{L}\Big([L^1, BV_0]_\theta, [L^\infty, \widehat{HK}]_\theta\Big).$$

con la siguiente estimación para su norma

$$\|\mathfrak{F}_1^c\|_{\mathcal{L}([L^1,BV_0]_\theta,[L^\infty,HK]_\theta)} \leq \|\mathcal{F}_1^c\|^{1-\theta}_{\mathcal{L}(L^1,L^\infty)} \|\mathcal{F}_{HK}^c\|^{\theta}_{\mathcal{L}(BV_0,HK)} \leq \mathfrak{C}^\theta,$$

para cada $\theta \in (0,1)$, donde

$$\mathfrak{C} = 4\pi\,\mathrm{Si}(\pi) \quad y \quad \mathrm{Si}(x) := \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\mathrm{sen}(y)}{y}\,dy, \tag{4.13}$$

El Corolario 4.1 es consecuencia del Teorema de interpolación 4.4 y del Teorema 3.12. De manera que obtenemos el diagrama 4.14

$$\begin{tikzcd}
L^1 \cap BV_0 \arrow[r, hook] & {[L^1, BV_0]_\theta} \arrow[r, hook] \arrow[d, dashed, "\mathfrak{F}_1^c"] & L^1 + BV_0 \arrow[d, "\mathfrak{F}_1^c"] \\
L^\infty \cap \widehat{HK} \arrow[r, hook] & {[L^\infty, \widehat{HK}]_\theta} \arrow[r, hook] & L^\infty + \widehat{HK}
\end{tikzcd} \tag{4.14}$$

Proposición 4.5. *(**Arredondo-Reyes**). La fórmula (4.12) está bien definida sobre el espacio $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})$ y por teoría de interpolación, $\mathfrak{F}_1^c$ es extendido a todo $L^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})$ para cada $s \neq 0$.*

Demostración. Esto se sigue del hecho de que para toda sucesión de Cauchy $(a_n)_{n\geq 1}$ en $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})$, existe $a \in L^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})$ tal que $\|a - a_n\|_{\mathcal{L}^1+BV_0} \to 0$, cuando $n \to \infty$. Luego de (4.7), se sigue que para cada $n \geq 1$, existe $h_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R})$ tal que

$$\begin{aligned}
\|a - a_n\|_{\mathcal{L}^1+BV_0} &\leq \|f - f_n - h_n\|_{\mathcal{L}^1} + \|g - g_n + h_n\|_{BV} \\
&\leq \|a - a_n\|_{\mathcal{L}^1+BV_0} + \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Por lo que al tomar el límite cuando $n \to \infty$, obtenemos que $(f - f_n - h_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ y $(g - g_n + h_n)_{n\geq 1}$ también es una sucesión de Cauchy en $BV_0(\mathbb{R})$. Con lo cual,

$$\lim_{n\to\infty} f_n + h_n = f \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} g_n - h_n = g.$$

□

Además,

$$\sup_{s\neq 0}\left|\mathcal{F}_1^c(f_m + h_m)(s) - \mathcal{F}_1^c(f_n + h_n)(s)\right| \leq \underbrace{\|(f_m + h_m) - (f_n + h_n)\|_{\mathcal{L}^1}}_{\xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0}.$$

y para $s > a > 0$ fija, obtenemos de [54, Lema 3.1] que

$$\left|\int_a^\infty \cos(sx)\Big[(g_m - h_m)(x) - (g_n - h_n)(x)\Big]\,dx\right| \leq \frac{2}{s}\underbrace{\mathrm{Var}\Big(g_m - h_m - [g_n - h_n], [a,\infty]\Big)}_{\xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0}.$$

Además, se sigue de la Observación 14 la siguiente relación

$$(L^1, BV_0)_{\theta,1} \subset [L^1, BV_0]_\theta \subset (L^1, BV_0)_{\theta,\infty}$$

para cada $\theta \in (0,1)$.

Proposición 4.6. *(**Arredondo-Reyes**). Para $f \in [L^1, BV_0]_\theta$, la fórmula*

$$\mathfrak{F}_1^c(f)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(sx) f(x)\, dx$$

se cumple puntualmente salvo un conjunto de medida cero y $\mathfrak{F}_1^c(f)(s) \to 0$, conforme $|s| \to \infty$.

Demostración. Si $f = f_1 + f_0 = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_0 \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) + BV_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, entonces

$$(f_1 - \tilde{f}_1, f_0 - \tilde{f}_0) \in D'.$$

Por lo cual, $f_1 - \tilde{f}_1 = \tilde{f}_0 - f_0$ con $f_1 - \tilde{f}_1 \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ y $\tilde{f}_0 - f_0 \in BV_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Ahora bien, dado que los operadores $\mathcal{F}_1^c$ y $\mathcal{F}_{HK}^c$ coinciden en el subespacio $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap BV_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ en virtud de (3.7) y por la linealidad de ambos, podemos concluir que

$$\mathcal{F}_1^c(f_1) + \mathcal{F}_{HK}^c(f_0) = \mathcal{F}_1^c(\tilde{f}_1) + \mathcal{F}_{HK}^c(\tilde{f}_0).$$

Consecuentemente, el valor de $\mathfrak{F}_1^c(f)(s)$ no depende de la representación de $f \in [L^1, BV_0]_\theta$, para cada $\theta \in (0, 1)$.

Por lo tanto, del Teorema 4.4, se sigue que para cada $f \in [L^1, BV_0]_\theta$, el elemento $\mathfrak{F}_1^c(f) \in [L^\infty, \widehat{HK}]_\theta$ y además, existen $f_1 \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ y $f_0 \in BV_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tales que $f = f_1 + f_0$, por lo que para cada $s \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}_1^c(f)(s) &= \mathfrak{F}_1^c(f_1 + f_0)(s) \\
&= \mathcal{F}_1^c(f_1)(s) + \mathcal{F}_{HK}^c(f_0)(s) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(sx) f_1(x)\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} \cos(sx) f_0(x)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(sx)(f_1(x) + f_0(x))\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(sx) f(x)\, dx.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Se sigue de la igualdad (4.15) que la HK transformada coseno de Fourier definida en $[L^1, BV_0]_\theta$ tiene una representación integral y por último, del Teorema 3.6, deducimos que $\mathfrak{F}_1^c(f)(s) \to 0$, conforme $|s| \to \infty$. □

4.2.2. Método complejo de interpolación: caso $W^{1,1}$

En [1, 13], se definen los espacios clásicos de Sóbolev $W^{1,p}(\mathbb{R})$ con $1 \leq p < \infty$, mediante

$$W^{1,p}(\mathbb{R}) := \left\{ u \in L^p(\mathbb{R}) \,\middle|\, \text{existe } g \in L^p(\mathbb{R}) \text{ tal que } \int_{-\infty}^{\infty} u\varphi' = -\int_{-\infty}^{\infty} g\varphi,\ \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}) \right\}.$$

Donde, para cada $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$, hacemos $u' = g$ y definimos la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} := \|u\|_p + \|u'\|_p. \tag{4.16}$$

Por lo que al considerar la complexificación del espacio de Sóbolev dada por $W^{1,p}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) := W^{1,1}(\mathbb{R}) + iW^{1,1}(\mathbb{R})$, obtenemos el siguiente resultado.

Lema 4.5. *(**Arredondo-Reyes**). Para cada $\theta \in (0, 1)$, se cumple*

$$W^{1,1}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \subset [L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}), BV_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})]_\theta$$

con inclusión continua.

Demostración. Primero notemos que $W^{1,1}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R})$ y por el Teorema 7.5 en [7] tenemos que

$$\begin{aligned} ||u||_{L^1 \cap BV_0} &:= \max\{||u||_{L^1}, ||u||_{BV}\} \\ &\leq ||u||_{L^1} + ||u||_{BV} \\ &= ||u||_{L^1} + ||u'||_{L^1} \\ &= ||u||_{W^{1,1}}. \end{aligned}$$

Por lo que si $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, entonces por [53, Proposición 2.4], se sigue que

$$||u||_{[\theta]} \leq \max\{||u||_{L^1}, ||u||_{BV}\} \leq ||u||_{W^{1,1}(\mathbb{R},\mathbb{C})},$$

para cada $\theta \in (0, 1)$. □

Observación 15. *Se sigue del hecho de que $W^{1,1}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R})$ y del Teorema 3.12 que el rango del operador HK transformada coseno de Fourier sobre el espacio de Sóbolev esta contenido en $HK(\mathbb{R})$, en símbolos,*

$$\mathcal{F}^c_{HK}\Big(W^{1,1}(\mathbb{R})\Big) \subset HK(\mathbb{R}) \tag{4.17}$$

y por lo tanto

$$\mathfrak{F}^c_1\Big(W^{1,1}(\mathbb{R}, \mathbb{C})\Big) \subset HK(\mathbb{R}, \mathbb{C}). \tag{4.18}$$

Ahora bien, para la HK transformada seno de Fourier se tiene un comportamiento distinto, como se menciono en el ejemplo 3.1.3. Más aún, el siguiente ejemplo muestra que esta diferencia se mantiene aun para funciones en el espacio de Sóbolev $W^{1,1}(\mathbb{R})$.

Ejemplo 4.2.1. *(**Arredondo-Reyes**). Consideremos*

$$h(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{2 - \log(x)} & si\ x \in (0, 1], \\ 0 & x > 1. \end{cases}$$

Así, $h(x) \to 0$ conforme $x \to 0^+$, luego h es continua en $(0, 1]$. Además, para cada $x \in (0, 1)$, tenemos que

$$h'(x) = \frac{1}{x[2 - \log(x)]^2}$$

con

$$\int_0^1 |h'(x)|\, dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{(2 - y)^2}\, dy = \frac{1}{2 - y}\bigg|_{-\infty}^0 = \frac{1}{2}.$$

Esto se ilustra en las figuras 4.1 y 4.2.

Luego, extendiendo la función h a toda la recta real de manera impar y considerando $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ una función (de tipo campana) tal que $0 \leq \varphi(x) \leq 1$, con $\varphi(x) = 1$, si $|x| \leq 1/2$, y $\varphi(x) = 0$, si $|x| \geq 1$.

Consecuentemente, obtenemos que la función

$$f(x) := h(x)\varphi(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

es impar, pertenece a $W^{1,1}(\mathbb{R})$ y satisface que

$$\mathcal{F}^s_{HK}(f)(s) = 2\int_0^\infty \operatorname{sen}(sx) f(x)\, dx,$$

para toda $s \geq 0$.

La función del ejemplo 4.2.1 es una variación de un mapeo considerado en `https://math.stackexchange.com`

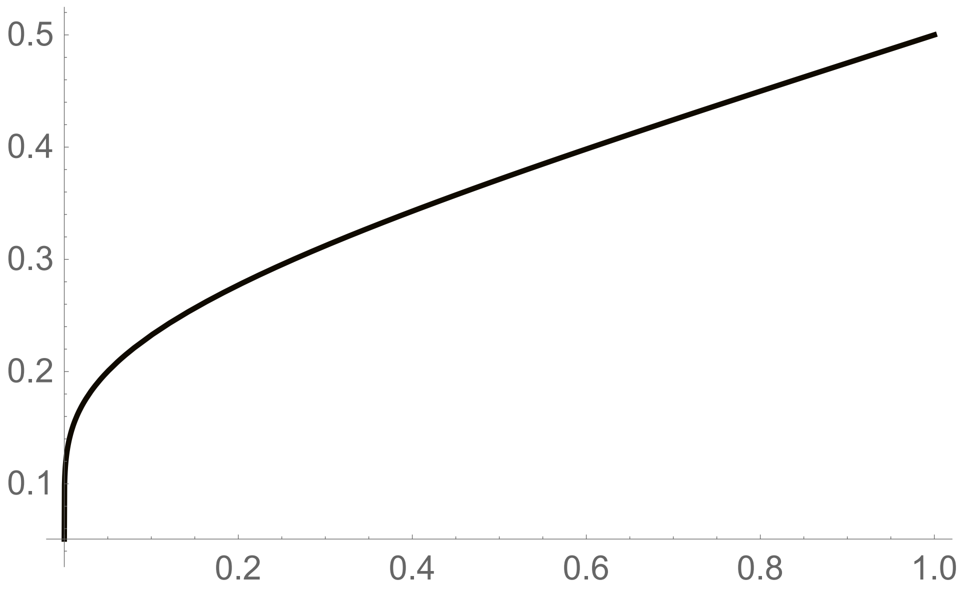

Figura 4.1: $h(x) := \dfrac{1}{2 - \log(x)}$, para $x \in (0, 1]$.

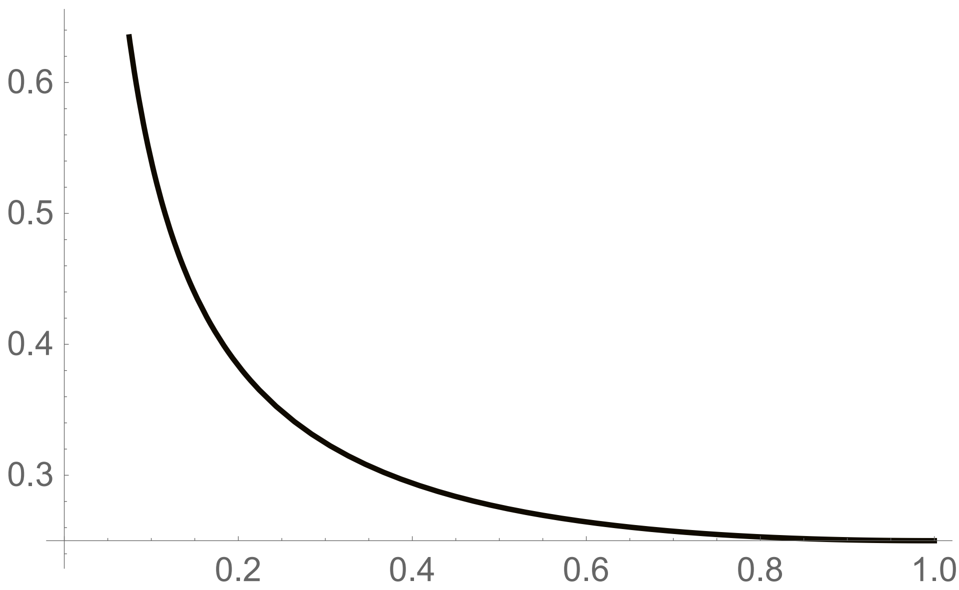

Figura 4.2: $h'(x) = \dfrac{1}{x[2 - \log(x)]^2}$, para $x \in (0, 1)$.

Proposición 4.7. *(**Arredondo-Reyes**).* $\mathcal{F}^s_{HK}\Big(W^{1,1}(\mathbb{R})\Big) \not\subseteq HK(\mathbb{R})$.

Demostración. Consideremos la función del Ejemplo 4.2.1, así por el Teorema de Hake 2.23 basta demostrar que **no** existe el límite

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b \mathcal{F}^s_{HK}(f)(s)\, ds. \tag{4.19}$$

Además,

$$\int_0^\infty \operatorname{sen}(sx) f(x)\, dx = \lim_{M\to\infty} \int_0^M \operatorname{sen}(sx) f(x)\, dx.$$

Así, para cualquier $s > 0$, fija el mapeo $x \mapsto \operatorname{sen}(sx)$ pertenece a $HK[0, M]$ para $0 < M < \infty$,

$$\begin{aligned}\|\operatorname{sen}(s\cdot)\|_{HK[0,M]} &= \sup_{0<u<v<M}\left|\int_u^v \operatorname{sen}(st)\,dt\right| \\ &= \sup_{0<u<v<M}\left|\int_{su}^{sv}\frac{\operatorname{sen}(y)}{s}\,dy\right| \\ &= \sup_{0<u<v<M}\left|\frac{\cos(su)-\cos(sv)}{s}\right| \\ &\leq \frac{2}{s}.\end{aligned}$$

Así, por el Teorema del Multiplicador 2.24

$$\left|\int_0^M \operatorname{sen}(sx)f(x)\,dt\right| \leq \|\operatorname{sen}(s\cdot)\|_{HK[0,M]}\|f\|_{BV[0,M]} < \infty.$$

Entonces para $0 < b < \infty$, como consecuencia del teorema de convergencia dominada de Lebesgue A.1 y del Teorema de Fubini A.2, obtenemos que

$$\begin{aligned}\int_0^b\int_0^\infty \operatorname{sen}(sx)f(x)\,dx\,ds &= \int_0^b \lim_{M\to\infty}\int_0^M \operatorname{sen}(sx)f(x)\,dx\,ds \\ &= \lim_{M\to\infty}\int_0^b\int_0^M \operatorname{sen}(sx)f(x)\,dx\,ds \\ &= \lim_{M\to\infty}\int_0^M \frac{1-\cos(bx)}{x}f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\int_0^M \frac{1-\cos(bx)}{x}f(x)\,dx &= \int_0^1 \frac{1-\cos(bx)}{x}f(x)\,dx \\ &= \int_0^b \frac{1-\cos(y)}{y}f(y/b)\,dy.\end{aligned}$$

Por lo que con $\delta = 1/4$, se cumple:

$$\int_0^b \frac{1-\cos(y)}{y}f(y/b)\,dy = \int_0^\delta \frac{1-\cos(y)}{y}f(y/b)\,dy + \int_\delta^b \frac{1-\cos(y)}{y}f(y/b)\,dy. \tag{4.20}$$

Como $f(y/b) \to 0$ conforme $b \to \infty$, entonces

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^\delta \frac{1-\cos(y)}{y}f(y/b)\,dy = 0.$$

Esto se sigue del hecho de que

$$\left|\int_0^\delta \frac{1-\cos(y)}{y}f(y/b)\,dy\right| \leq \int_0^\delta |f(y/b)|\;dy \leq \delta\|f\|_{L^\infty} < \infty,$$

para cada $b > 0$; ya que si $y > 0$,

$$\begin{aligned}\frac{1-\cos(y)}{y} \leq 1 &\Leftrightarrow 1-\cos(y) \leq y \\ &\Leftrightarrow -\cos(y) \leq y-1 \\ &\Leftrightarrow \cos(y) \geq 1-y \\ &\Leftrightarrow y+\cos(y) \geq 1\end{aligned}$$

y la función $g(y) := y + \cos(y)$ es no decreciente en $[0, \infty)$ con $g(0) = 1$, y $f(y/b) \to 0$, conforme $b \to \infty$.

Por lo tanto, para la segunda integral en la parte derecha de (4.20), tenemos

$$\int_\delta^b \frac{1-\cos(y)}{y} f(y/b)\,dy = \int_\delta^b \frac{f(y/b)}{y}\,dy + \int_\delta^b \frac{-\cos(y)}{y} f(y/b)\,dy = I_1 + I_2.$$

Integrando por partes, concluimos

$$\begin{aligned} I_2 = \int_\delta^b \frac{-\cos(y)}{y} f(y/b)\,dy &= \frac{-\operatorname{sen}(b)f(1)}{b} - \frac{-\operatorname{sen}(\delta)f(\delta/b)}{\delta} \\ &\quad - \int_\delta^b -\operatorname{sen}(y)\left(\frac{b^{-1}yf'(y/b) - f(y/b)}{y^2}\right) dy. \end{aligned}$$

Por lo que

$$\lim_{b\to\infty} I_2 = \lim_{b\to\infty} -\int_\delta^b -\operatorname{sen}(y)\left(\frac{b^{-1}yf'(y/b) - f(y/b)}{y^2}\right) dy$$

ya que

$$\frac{-\operatorname{sen}(b)f(1)}{b} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{b\to\infty} \frac{-\operatorname{sen}(\delta)f(\delta/b)}{\delta} = 0.$$

Además,

$$\int_\delta^b \operatorname{sen}(y)\left(\frac{b^{-1}yf'(y/b) - f(y/b)}{y^2}\right) dy = \int_\delta^b \frac{\operatorname{sen}(y)f'(y/b)}{by}\,dy - \int_\delta^b \frac{\operatorname{sen}(y)f(y/b)}{y^2}\,dy.$$

Donde

$$\int_\delta^b \frac{\operatorname{sen}(y)f'(y/b)}{by}\,dy = \int_{\delta/b}^1 \frac{\operatorname{sen}(bt)}{bt} f'(t)\,dt$$

y

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(bt)}{bt} f'(t)\right| \le |f'(t)|, \qquad \forall t \neq 0.$$

En consecuencia,

$$\left|\int_{\delta/b}^1 \frac{\operatorname{sen}(bt)}{bt} f'(t)\,dt\right| \le \left|\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(bt)}{bt} f'(t)\,dt\right| \le \int_0^1 |f'(t)|\,dt < \infty.$$

Así, por el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue A.1, deducimos que

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(bt)}{bt} f'(t)\,dt = 0.$$

Es decir,

$$\lim_{b\to\infty} \int_\delta^b \frac{\operatorname{sen}(y)f'(y/b)}{by}\,dy = 0.$$

Ahora, analizamos

$$\int_\delta^b -\frac{\operatorname{sen}(y)}{y^2} f(y/b)\,dy.$$

Para cada $b > 0$, tenemos

$$\left|-\frac{\operatorname{sen}(y)}{y^2} f(y/b)\right| \le \left|\frac{f(y/b)}{y^2}\right| \le \frac{\|f\|_{L^\infty}}{y^2}, \quad \forall y \neq 0.$$

Luego,

$$\left|\int_{\delta}^{b} -\frac{\text{sen}(y)}{y^2} f(y/b)\,dy\right| \leq \|f\|_{L^\infty} \int_{\delta}^{b} \frac{1}{y^2}\,dy \leq \|f\|_{L^\infty} \int_{\delta}^{\infty} \frac{1}{y^2}\,dy < \infty.$$

Como

$$\lim_{b\to\infty} \frac{f(y/b)}{y^2} = 0,$$

entonces por el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue, Teorema A.1,

$$\lim_{b\to\infty} \int_{\delta}^{b} -\frac{\text{sen}(y)}{y^2} f(y/b)\,dy = 0.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{b\to\infty} I_2 = 0.$$

Mientras que para I_1, tenemos que

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\delta}^{b} \frac{f(y/b)}{y}\,dy = \int_{\delta/b}^{1} \frac{f(u)}{u}\,du = \int_{\delta/b}^{1} \frac{\varphi(u)}{u[2-\log(u)]}\,du \\ &= \int_{\delta/b}^{1/2} \frac{1}{u[2-\log(u)]} + \int_{1/2}^{1} \frac{\varphi(u)}{u[2-\log(u)]}\,du \end{aligned}$$

con

$$\int_{1/2}^{1} \frac{\varphi(u)}{u[2-\log(u)]}\,du \in \mathbb{R},$$

pero

$$\lim_{b\to\infty} \int_{\delta/b}^{1/2} \frac{1}{u[2-\log(u)]}\,du = \int_{0}^{1/2} \frac{1}{u[2-\log(u)]}\,du$$

la cual no es convergente debido a

$$\int_{0}^{1/2} \frac{1}{u[2-\log(u)]}\,du = \int_{-\infty}^{\log(1/2)} \frac{1}{2-y}\,dy = -\log(2-y)\Big|_{-\infty}^{\log(1/2)}$$

De aquí que

$$\lim_{b\to\infty} I_1 + I_2 = \infty.$$

Consecuentemente, el límite en (4.19) **no** existe, lo cual implica que $\mathcal{F}^s_{HK}(f)$ **no** es Henstock-Kurzweil integrable sobre $\mathbb{R}$. □

Observación 16. *En virtud de la Proposición 4.7, concluimos que el rango del espacio de Sóbolev $W^{1,1}(\mathbb{R})$ bajo la acción del operador HK transformada seno de Fourier **no** esta contenido en el espacio de las funciones Henstock-Kurzweil integrables, es decir,*

$$\mathcal{F}^s_2\big(W^{1,1}(\mathbb{R})\big) = \mathcal{F}^s_1\big(W^{1,1}(\mathbb{R})\big) = \mathcal{F}^s_{HK}\big(W^{1,1}(\mathbb{R})\big) \not\subseteq HK(\mathbb{R}). \tag{4.21}$$

*Por lo que la HK transformada seno de Fourier sigue siendo un operador **no** acotado en contraste con (4.17).*

4.2.3. Método complejo de interpolación: caso L^2

Ahora, hacemos el mismo análisis para el espacio $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, así que tenemos que considerar los espacios complejos $X_1 = X_2 = L^2$, $Y_1 = BV_0$ y $Y_2 = \widehat{HK}$. Entonces definimos los espacios suma

$$L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) + BV_0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \quad \text{y} \quad L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) + \widehat{HK}(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

Así por el Teorema 4.3 sabemos

$$L^2 \cap BV_0 \subset [L^2, BV_0]_\theta \subset L^2 + BV_0 \quad \text{y} \quad L^2 \cap \widehat{HK} \subset [L^2, \widehat{HK}]_\theta \subset L^2 + \widehat{HK}$$

para cada $\theta \in (0, 1)$.

De esta manera, consideramos los operadores extendidos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2^c &: L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \\ \mathcal{F}_2^c(f_1 + if_2) &:= \mathcal{F}_2^c(f_1) + i\mathcal{F}_2^c(f_2) \end{aligned} \tag{4.22}$$

dado a partir de (3.3), junto con

$$\mathcal{F}_{HK}^c : BV_0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \longrightarrow \widehat{HK}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

dado en (4.11). Por lo tanto, se cumple que

$$\|\mathcal{F}_2^c\|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} = \sqrt{2\pi} \quad \text{y} \quad \|\mathcal{F}_{HK}^c\|_{\mathcal{L}(BV_0,\widehat{HK})} \leq \mathfrak{C},$$

en virtud de (4.3)

Definición 23. *(**Arredondo-Reyes**). A partir de los operadores (4.22) y (4.11) definimos la transformada coseno en $L^2 + BV_0$ mediante*

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_2^c &: L^2 + BV_0 \longrightarrow L^2 + \widehat{HK} \\ \mathfrak{F}_2^c(f + g) &:= \mathcal{F}_2^c(f) + \mathcal{F}_{HK}^c(g) \end{aligned} \tag{4.23}$$

Corolario 4.2. *(**Arredondo-Reyes**). La restricción del operador $\mathfrak{F}_2^c$ dado en (4.23) al subespacio $[L^2, BV_0]_\theta$ satisface que*

$$\mathfrak{F}_2^c \in \mathcal{L}\Big([L^2, BV_0]_\theta, [L^2, \widehat{HK}]_\theta\Big)$$

con la siguiente estimación para su norma

$$\|\mathfrak{F}_2^c\|_{\mathcal{L}([L^2,BV_0]_\theta,[L^2,\widehat{HK}]_\theta)} \leq \|\mathcal{F}_2^c\|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)}^{1-\theta} \|\mathcal{F}_{HK}^c\|_{\mathcal{L}(BV_0,\widehat{HK})}^{\theta} \leq (2\pi)^{\frac{1-\theta}{2}} \mathfrak{C}^\theta$$

para cada $\theta \in (0, 1)$ y $\mathfrak{C}$ dada por (4.13).

La demostración del Corolario 4.2 es inmediata del Teorema de interpolación 4.4 y del Teorema 3.12. Sin embargo, a diferencia de la Proposición 4.6, **no** se tiene una representación integral ya que en L^2 la transformada de Fourier se define mediante un proceso de límite.

4.2.4. Método complejo de interpolación: caso L^p

En general, para $1 < p < 2$, definimos la suma de espacios complejos:

$$L^p(\mathbb{R},\mathbb{C}) + BV_0(\mathbb{R},\mathbb{C}) \quad \text{y} \quad L^q(\mathbb{R},\mathbb{C}) + \widehat{HK}(\mathbb{R},\mathbb{C}),$$

donde $1/p + 1/q = 1$. En consecuencia, por el Teorema 4.3, tenemos

$$L^p \cap BV_0 \subset [L^p, BV_0]_\theta \subset L^p + BV_0 \quad \text{y} \quad L^q \cap \widehat{HK} \subset [L^q, \widehat{HK}]_\theta \subset L^q + \widehat{HK},$$

para cada $\theta \in (0,1)$.

Así, al considerar los operadores extendidos

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}_p^c : L^p(\mathbb{R},\mathbb{C}) \longrightarrow L^q(\mathbb{R},\mathbb{C}) \\ &\mathcal{F}_p^c(f_1 + if_2) := \mathcal{F}_p^c(f_1) + i\mathcal{F}_p^c(f_2), \end{aligned} \tag{4.24}$$

junto con

$$\mathcal{F}_{HK}^c : BV_0(\mathbb{R},\mathbb{C}) \longrightarrow \widehat{HK}(\mathbb{R},\mathbb{C}).$$

Definición 24. *(**Arredondo-Reyes**). A partir de los operadores (4.24) y (4.11) definimos la transformada coseno en $L^p + BV_0$ mediante*

$$\begin{aligned} &\mathfrak{F}_p^c : L^p + BV_0 \longrightarrow L^q + \widehat{HK} \\ &\mathfrak{F}_p^c(f) := \mathcal{F}_p^c(f_p) + \mathcal{F}_{HK}^c(g), \end{aligned} \tag{4.25}$$

donde $f = f_p + g$ con $1/p + 1/q = 1$, el cual es una generalización del mapeo dado en el Corolario 3.2.

Corolario 4.3. *(**Arredondo-Reyes**). La restricción del operador $\mathfrak{F}_p^c$ dado en (4.25) al subespacio $[L^p, BV_0]_\theta$ satisface que*

$$\mathfrak{F}_p^c \in \mathcal{L}\Big([L^p, BV_0]_\theta, [L^q, \widehat{HK}]_\theta\Big),$$

para cada $\theta \in (0,1)$ y la siguiente estimación para su norma en virtud de (4.3)

$$\|\mathfrak{F}_p^c\|_{\mathcal{L}([L^p,BV_0]_\theta,[L^q,\widehat{HK}]_\theta)} \leq \|\mathcal{F}_p^c\|_{\mathcal{L}(L^p,L^q)}^{1-\theta} \|\mathcal{F}_{HK}^c\|_{\mathcal{L}(BV_0,\widehat{HK})}^{\theta} \leq \gamma_p^{1-\theta}\mathfrak{C}^\theta,$$

donde γ_p esta dada por (3.28) y $\mathfrak{C}$ por (4.13).

Proposición 4.8. *(**Arredondo-Reyes**). La fórmula (4.25) está bien definida sobre el espacio $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})$.*

Demostración. Esto se sigue de la descomposición de $L^p(\mathbb{R})$ dada en [61] mediante

$$L^p(\mathbb{R}) = L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R}) + L^2(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R}),$$

donde $1 < p < 2$, pues dada $f \in L^p(\mathbb{R})$, el conjunto $E := \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > 1\}$ tiene medida de Lebesgue finita, en símbolos: $m(E) < \infty$. Por lo que al definir

$$f_1(x) := f(x)\chi_E(x) \quad \text{y} \quad f_2(x) := f(x) - f_1(x),$$

para cada $x \in \mathbb{R}$, deducimos que

$$\begin{aligned} \|f_1\|_{L^1} &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)\chi_E(x)|\, dx \\ &\leq m(E)^{1/q}\|f\|_{L^p} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

donde $1/p + 1/q = 1$.

Además, $|f(x)| \leq 1$, para toda $x \in E^c$ y en consecuencia

$$\begin{aligned}
\|f_2\|_{L^2}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(x)|^2\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f_1(x)|^2\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f(x)\chi_E(x)|^2\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)\chi_{E^c}(x)|^2\, dx \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)\chi_{E^c}(x)|^p\, dx \\
&= \int_{E^c} |f(x)|^p\, dx \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p\, dx \\
&= \|f\|_{L^p}^p \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Con lo cual, $f_1 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ y $f_2 \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ con $f = f_1 + f_2$.

De aquí que si $(f_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión no decreciente en $L^p(\mathbb{R})$ tal que converge a una función no negativa $f \in L^p(\mathbb{R})$, es decir, $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$ cuando $n \to \infty$, se tiene que los conjuntos $E_n = \{x \in \mathbb{R} : |f_n(x)| > 1\}$ satisfacen que $m(E_n) < \infty$.

Luego, las funciones

$$f_{1,n}(x) := f_n(x)\chi_{E_n}(x) \quad \text{y} \quad f_{2,n}(x) := f_n(x) - f_{1,n}(x)$$

con $x \in \mathbb{R}$, satisfacen que

$$\begin{aligned}
\|f_{1,n}\|_{L^1} &= \int_{-\infty}^{\infty} |f_{1,n}(x)|\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)\chi_{E_n}(x)|\, dx \\
&\leq m(E_n)^{1/q}\, \|f_n\|_{L^p} \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

con $1/p + 1/q = 1$. De esta manera, $f_{1,n} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ para toda $n \geq 1$.

Análogamente,

$$\begin{aligned}
\|f_{2,n}\|_{L^2}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f_{1,n}(x)|^2\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)\chi_{E_n^c}(x)|^2\, dx \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)\chi_{E_n^c}(x)|^p\, dx \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)|^p\, dx \\
&= \|f_n\|_{L^p}^p \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $f_{2,n} \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$, para cada $n \geq 1$.

Más aún,

$$\begin{aligned}\|f_1 - f_{1,n}\|_{L^p} &= \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(x) - f_{1,n}(x)|\, dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)\chi_E(x) - f_n(x)\chi_{E_n}(x)|\, dx.\end{aligned}$$

Donde

$$f_1(x) - f_{1,n}(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in E\backslash E_n,\\ -f_{1,n}(x) & \text{si } x \in E_n\backslash E,\\ f_1(x) - f_{1,n}(x) & \text{si } x \in E \cap E_n,\\ 0 & \text{si } x \notin E \text{ y } x \notin E_n.\end{cases}$$

Además, por el Teorema A.4, existe una subsucesión $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(f_n)_{n\geq 1}$ tal que

$$f_{n_k}(x) \to f(x), \qquad (k \to \infty)$$

salvo un conjunto de medida cero.
Así para cada $x \in E_{n_k}$

$$1 < f_{n_k}(x) \leq f_{n_{k+1}}(x) \leq f(x).$$

De aquí que,

$$E_{n_k} \subset E_{n_{k+1}} \subset E.$$

Entonces,

$$f_1(x) - f_{1,n_k}(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{if } x \in E\backslash E_{n_k},\\ f_1(x) - f_{1,n_k}(x) & \text{if } x \in E \cap E_{1,n_k}.\end{cases}$$

Por lo tanto,

$$|f_1(x) - f_{1,n_k}(x)| \leq |f_1(x)|,$$

salvo un conjunto de medida cero.

Así, por el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue A.1,

$$\|f_1 - f_{1,n_k}\|_{L^1} \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Mientras que

$$\begin{aligned}\|f_2 - f_{2,n}\|_{L^2}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(x) - f_{2,n}(x)|^2\, dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)\chi_{E^c} - f_n(x)\chi_{E_n^c}(x)|^2\, dx.\end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned} f_2(x) - f_{2,n_k}(x) &= \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in E^c\backslash E_{n_k}^c\\ -f_{n_k}(x) & \text{si } x \in E_{n_k}^c\backslash E^c\\ f(x) - f_{n_k}(x) & \text{si } x \in E^c \cap E_{n_k}^c\\ 0 & \text{si } x \notin E^c \text{ y } x \notin E_{n_k}^c\end{cases}\\ &= \begin{cases} -f_{n_k}(x) & \text{si } x \in E_{n_k}^c\backslash E^c\\ f(x) - f_{n_k}(x) & \text{si } x \in E^c \cap E_{n_k}^c\\ 0 & \text{si } x \notin E^c \text{ y } x \notin E_{n_k}^c\end{cases}\\ &= \begin{cases} -f_{n_k}(x) & \text{si } x \in E_{n_k}^c\backslash E^c\\ f(x) - f_{n_k}(x) & \text{si } x \in E^c\\ 0 & \text{si } x \notin E^c \text{ y } x \notin E_{n_k}^c,\end{cases}\end{aligned}$$

Esto se sigue del hecho de que
$$E^c \subset E^c_{n_{k+1}} \subset E^c_{n_k}.$$
Se sigue entonces que para $x \in E^c$,
$$|f_2(x) - f_{2,n_k}(x)|^2 \leq |f(x)|^2 \leq |f(x)|^p,$$
pues
$$0 \leq f_{n_k}(x) \leq f_{n_{k+1}}(x) \leq f(x) \leq 1.$$
Para $x \in E^c_{n_k} \backslash E^c$, deducimos que $x \in E$. Luego,
$$|f_2(x) - f_{2,n_k}(x)|^2 \leq |f_{n_k}(x)|^2 \leq 1$$
con
$$m(E^c_{n_k} \backslash E^c) \leq m(E) < \infty.$$
Finalmente,
$$|f_2(x) - f_{2,n_k}(x)|^2 \leq \text{máx}\Big\{|f(x)|^p, \chi_E(x)\Big\} \qquad \text{c. t. p. en } \mathbb{R}.$$
En conclusión, el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue A.1,
$$\|f_2 - f_{2,n_k}\|_{L^2} \to 0 \qquad (k \to \infty).$$
En resumen, $f_{1,n_k} \to f_1$ en $L^1(\mathbb{R})$ y $f_{2,n_k} \to f_2$ en $L^2(\mathbb{R})$.
De lo anterior, se sigue que si $f = f_p + g \in L^p + BV_0$, entonces
$$f = f_p + g = (f_1 + f_2) + g = \underbrace{(f_1 + g)}_{L^1+BV_0} + \underbrace{f_2}_{L^2} = \underbrace{f_1}_{L^1} + \underbrace{(f_2 + g)}_{L^2+BV_0}$$
con $f_1 \in L^p \cap L^1$ y $f_2 \in L^p \cap L^2$.
Por lo tanto
$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}^c_p(f) &= \mathfrak{F}^c_p(f_p + g)\\
&= \mathfrak{F}^c_p(f_1 + f_2 + g)\\
&= \mathcal{F}^c_p(f_1 + f_2) + \mathcal{F}^c_{HK}(g)\\
&= \mathcal{F}^c_p(f_1) + \mathcal{F}^c_p(f_2) + \mathcal{F}^c_{HK}(g)\\
&= \mathcal{F}^c_1(f_1) + \mathcal{F}^c_2(f_2) + \mathcal{F}^c_{HK}(g)\\
&= \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}^c_1(f_{1,n}) + \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}^c_1(f_{2,n}) + \mathcal{F}^c_{HK}(g)\\
&= \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}^c_1(f_{1,n}) + \mathcal{F}^c_{HK}(g) + \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}^c_1(f_{2,n})\\
&= \mathcal{F}^c_1(f_1) + \mathcal{F}^c_{HK}(g) + \mathcal{F}^c_2(f_2)\\
&= \mathfrak{F}^c_1(f_1 + g) + \mathfrak{F}^c_2(f_2).
\end{aligned}$$
□

Esta manera de definir la transformada coseno de Fourier en $L^p + BV_0$ es similar a la definición de la transformada de Fourier en L^p dada en [61, Definición 2.8] y en [28, Capítulo 2.2.4].

En el espacio de Sóbolev $W^{1,p}(\mathbb{R})$, con $1 < p \leq 2$, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.9. *(**Arredondo-Reyes**). Si $f \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ con $1 < p \leq 2$, entonces la fórmula*
$$\mathcal{F}_p(f')(s) = is\mathcal{F}_p(f)(s)$$
se satisface puntualmente salvo un conjunto de medida de Lebesgue cero.

Demostración. Si $f \in W^{1,p}(\mathbb{R})$, entonces tanto f como f' pertenecen a $L^p(\mathbb{R})$ y se satisface que $f(x) \to 0$, cunado $|x| \to \infty$, ver [13, Corolario 8.10].
Luego, para cada $n \geq 1$, definimos las funciones

$$\varphi_n(x) := \chi_{[-n,n]}(x)f(x) \quad \text{y} \quad \gamma_n(x) := \chi_{[-n,n]}(x)f'(x),$$

para cada $x \in \mathbb{R}$.
De esta manera, obtenemos que $\|\varphi_n - f\|_{L^p} \to 0$, cuando $n \to \infty$, además, existe una subsucesión $(\varphi_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ tal que $\mathcal{F}_p(\varphi_{n_k})(s) \to \mathcal{F}_p(f)(s)$, cuando $n \to \infty$, salvo un conjunto de medida cero.
Por lo tanto,

$$\mathcal{F}_p(f)(s) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{F}_p(\varphi_{n_k})(s) = \lim_{k\to\infty} \int_{-n_k}^{n_k} e^{-isx} f(x)\, dx$$

salvo un conjunto de medida cero.
De aquí que al integrar por partes, [13, Corolario 8.10], para cada $k \geq 1$ concluimos que

$$\int_{-n_k}^{n_k} e^{-isx} f'(x)\, dx = e^{-isx} f(x)\Big|_{-n_k}^{n_k} - \int_{-n_k}^{n_k} -ise^{-isx} f(x)\, dx.$$

Con lo cual,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_p(f')(s) &= \lim_{k\to\infty} \mathcal{F}_p(\gamma_{n_k})(s) \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{-n_k}^{n_k} e^{-isx} f'(x)\, dx \\
&= is \lim_{k\to\infty} \int_{-n_k}^{n_k} e^{-isx} f(x)\, dx \\
&= is\,\mathcal{F}_p(f)(s)
\end{aligned}$$

salvo un conjunto de medida cero. □

Proposición 4.10. *(**Arredondo-Reyes**). Para $f \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ con $1 < p \leq 2, \mathcal{F}_p(f) \in L^1(\mathbb{R})$.*

Demostración. Primero notemos que para cada $f \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ con $1 < p \leq 2$, se satisface que $\mathcal{F}_p(f)$ pertenece a $L^q(\mathbb{R})$, con $1/p + 1/q = 1$ y en consecuencia en el conjunto $A = \{s \in \mathbb{R} : |s| \geq 1\}$, obtenemos por la Proposición 4.9 y la desigualdad de Hölder, Teorema A.3:

$$\int_A \left|\mathcal{F}_p(f)(s)\right| \, ds = \int_A \left|\frac{1}{s} \mathcal{F}_p(f')(s)\, ds\right| \leq \|1/(\cdot)\|_{L^p(A)} \, \|\mathcal{F}_p(f')\|_{L^q(A)} < \infty.$$

Además, en $\mathbb{R}\backslash A$, se cumple que

$$\int_{-1}^{1} |\mathcal{F}_p(f)(s)|\, ds < \infty.$$

Por lo tanto, $\mathcal{F}_p(f) \in L^1(\mathbb{R})$. □

Como consecuencia de la Proposición 4.10, el rango de $W^{1,p}(\mathbb{R})$ con $1 < p \leq 2$, bajo la acción de la transformada de Fourier esta contenida en $L^1(\mathbb{R})$, es decir,

$$\mathcal{F}_p\Big(W^{1,p}(\mathbb{R})\Big) \subset L^1(\mathbb{R}) \subsetneq HK(\mathbb{R}). \tag{4.26}$$

Este comportamiento, contrasta con el establecido en (4.21). Así, hemos extendido el operador HK transformada coseno de Fourier a espacios más generales vía el método complejo de interpolación aplicado a los espacios L^p y BV_0. Mientras que para el operador $\mathcal{F}^s_{HK}$ enfatizamos la diferencia que mantiene con el operador $\mathcal{F}^c_{HK}$.

Estos resultados pueden consultarse en [6] que fue recientemente aceptado para su publicación.

Capítulo 5

Conclusiones y perspectivas

Para la realización de este trabajo, se hizo un estudio de la teoría de integración de Henstock-Kurzweil sobre la recta real y de la teoría de interpolación de espacios de Banach para poder extender las propiedades de la transformada de Fourier encontrando los siguientes hechos:

1) La importancia del espacio de funciones de variación acotada que se desvanecen en $\pm\infty$, $BV_0(\mathbb{R})$, permite definir la HK transformada de Fourier de manera puntual excepto para $s \neq 0$, véase Teorema 3.6. Obteniendo así una representación integral,

$$\mathcal{F}_{HK}(f)(s) := \int_{\mathbb{R}} e^{-isx} f(x)\, dx,$$

tal que

$$\lim_{s\to\pm\infty} \mathcal{F}_{HK}(f)(s) = 0.$$

Con lo cual se tiene que $\mathcal{F}_{HK}$ es un operador lineal de $BV_0(\mathbb{R})$ a $C_\infty(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ y dado que en el espacio $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R})$ se encuentran las funciones de paso finito, se puede construir la transformada de Fourier clásica, $\mathcal{F}_1$, a partir de la integral de Henstock-Kurzweil. Véase [54]

2) Se analizaron las propiedades de las transformada seno y coseno de Fourier, encontrando comportamientos distintos. A saber, en el Teorema 3.12 se demostró que para cualquier $f \in BV_0(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{F}^c_{HK}(f)(s) := \int_{\mathbb{R}} \cos(sx) f(x)\, dx \qquad (s \neq 0)$$

es una función Henstock-Kurzweil integrable sobre todo $\mathbb{R}$. Motivo por el cual $\mathcal{F}^c_{HK}$ resulta ser un operador lineal acotado de $BV_0(\mathbb{R})$ en $HK(\mathbb{R})$. Mientras que el Ejemplo 3.1.3 muestra que para la transformada seno de Fourier existen funciones f en $BV_0(\mathbb{R})$ tales que

$$\mathcal{F}^s_{HK}(f)(s) := \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sen}(sx) f(x)\, dx \qquad (s \neq 0)$$

no son Henstock-Kurzweil integrables en $\mathbb{R}$. Estos hechos fueron publicados en [5].

3) Además, en el Corolario 3.2 se probó la continuidad del operador

$$\mathcal{F}^c_{HK} : \mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R}) \to L^q(\mathbb{R}) \cap HK(\mathbb{R}),$$

con $1 \leq p \leq 2$ y $1/p + 1/q = 1$. Donde las normas están dadas mediante

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p\cap BV_0} := \|f\|_p + \|f\|_{BV} \quad \text{y} \quad \|f\|_{L^q\cap HK} := \|f\|_q + \|f\|_{HK}.$$

Este resultado fue publicado en [5].

4) También en la Proposición 3.4 se demostró que el operador $\mathcal{F}_{HK}$ es acotado de $\mathcal{B} := \mathcal{HK}(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R})$ a $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, donde el espacio $\mathcal{B}$ no guarda relación de contención con $L^1(\mathbb{R})$, es decir,

$$L^1(\mathbb{R})\backslash\mathcal{B} \neq \emptyset \quad \text{y} \quad \mathcal{B}\backslash L^1(\mathbb{R}) \neq \emptyset.$$

De hecho, se sabe que $\mathcal{B}$ esta contenido en $L^2(\mathbb{R})$ como consecuencia del Teorema del Multiplicador. Véase [5, 60].

5) En la Proposición 3.6 se establecieron condiciones necesarias para que la HK transformada de Fourier de una función en $\mathcal{B}$ sea HK integrable a través del espacio

$$\Lambda = \left\{ g \in \mathcal{B} : \frac{\mathcal{F}_{HK}(g)(s)}{s} \in HK(\mathbb{R}) \right\}.$$

Esto se realizó siguiendo la línea de investigación de E. Liflyand. Véase [44, 49, 50].

6) En la Sección 4.2.1, se procedió a la construcción del espacio $L^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})$ mediante un espacio cociente en $L^1(\mathbb{R}) \times BV_0(\mathbb{R})$ y se analizo su relación con $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})$. Esto con el objetivo de aplicar el método de interpolación compleja al operador $\mathcal{F}^c_{HK}$, para lo cual se consideró también el proceso de complexificación de espacios de Banach reales obteniendo así el espacio $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) + BV_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ y se definió en (4.12) el operador

$$\begin{aligned} &\mathfrak{F}^c_1 : L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) + BV_0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) + \widehat{HK}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \\ &\mathfrak{F}^c_1(f + g)(s) := \mathcal{F}^c_1(f)(s) + \mathcal{F}^c_{HK}(g)(s) \end{aligned}$$

para cada $s \neq 0$. Véase [6].

7) Como consecuencia del teorema de interpolación en el Corolario 4.1 se concluyó que $\mathfrak{F}^c_1$ es un operador lineal y continuo entre los espacios de interpolación

$$[L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}), BV_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})]_\theta \quad \text{y} \quad [L^\infty(R, C), \widehat{HK}(R, C)]_\theta,$$

con $0 < \theta < 1$. Además, en la Proposición 4.6 se estableció que $\mathfrak{F}^c_1$ tiene una representación integral y $\mathfrak{F}^c_1(f)(s) \to 0$, conforme $|s| \to \infty$, para toda f en

$$[L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}), BV_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})]_\theta,$$

para cada $\theta \in (0, 1)$. Véase [6].

8) Más aún, en la Sección 4.2.3 se hizo un análisis similar para los espacios $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ y $BV_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ al tomar en cuenta el operador

$$\begin{aligned} &\mathfrak{F}^c_2 : L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) + BV_0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) + \widehat{HK}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \\ &\mathfrak{F}^c_2(f + g) := \mathcal{F}^c_2(f) + \mathcal{F}^c_{HK}(g). \end{aligned}$$

Obteniendo que $\mathfrak{F}^c_2$ es un operador lineal y continuo de $[L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}), BV_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})]_\theta$ en $[L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \widehat{HK}(\mathbb{R}, \mathbb{C})]_\theta$, con $0 < \theta < 1$, véase Corolario 4.2. Sin embargo, para este caso no se estableció una representación integral debido a que $\mathcal{F}^c_2$ se define mediante un proceso de límite en la norma de L^2, véase [6].

9) Siguiendo esta lógica, en (4.25) se definió el operador

$$\begin{aligned} &\mathfrak{F}^c_p : L^p(\mathbb{R}, \mathbb{C}) + BV_0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \longrightarrow L^q(\mathbb{R}, \mathbb{C}) + \widehat{HK}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \\ &\mathfrak{F}^c_p(f_p + g) := \mathcal{F}^c_p(f_p) + \mathcal{F}^c_{HK}(g) \end{aligned}$$

con $1 < p < 2$ y $1/p + 1/q = 1$. Más aún, en el Corolario 4.3 se probo la continuidad entre los respectivos espacios de interpolación. Véase [6].

10) El Ejemplo 4.2.1 se utilizó para señalar las diferencias entre las transformadas coseno y seno de Fourier para espacios de Sóbolev.

11) En (4.17), (4.21) y (4.26) se estableció la relación de los espacios de Sóbolev, $W^{1,p}(\mathbb{R})$, con respecto a la transformada de Fourier en $L^p(\mathbb{R})$ para $1 \leq p \leq 2$ determinando que:

   a) $\mathcal{F}^c_{HK}\Big(W^{1,1}(\mathbb{R})\Big) \subset HK(\mathbb{R})$.

   b) $\mathcal{F}^s_{HK}\Big(W^{1,1}(\mathbb{R})\Big) \not\subseteq HK(\mathbb{R})$.

   c) $\mathcal{F}_p\Big(W^{1,p}(\mathbb{R})\Big) \subset L^1(\mathbb{R}) \subsetneq HK(\mathbb{R})$, para $1 < p \leq 2$.

Estos resultados pueden consultarse en el artículo **"On the norm continuity of the HK-Fourier transform"** en la revista Electronic Research Announcements [5] y en el artículo **"Interpolation theory for the HK-Fourier transform"** que ha sido aceptado para su publicación en la Revista de la Unión Matemática Argentina [6].

5.1. Perspectivas

Esta línea de investigación es muy amplia ya que se tienen distintos problemas a estudiar, por ejemplo:

I) Por un lado se sabe que existen funciones $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R})$ tales que $\mathcal{F}_{HK}(f)(s)$ son discontinuas en $s = 0$, mientras que para $f \in HK(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R})$, se tiene que $\mathcal{F}_{HK}(f)(s)$ existe para cada $s \in \mathbb{R}$ y es continua en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ pero aún falta determinar la continuidad en $s = 0$.

II) Dado el comportamiento diferente entre los operadores $\mathcal{F}^c_{HK}$ y $\mathcal{F}^s_{HK}$ definidos en $BV_0(\mathbb{R})$, el tema de la integrabilidad de $\mathcal{F}^s_{HK}(f)$ requiere un análisis más profundo. En particular, hay que explorar la relación entre las transformadas de Fourier y de Hilbert para funciones $f \in BV_0(\mathbb{R})$ y con derivada f' en espacios de Hardy, es decir, en $H^1(\mathbb{R})$. Además de analizar el comportamiento asintótico de estos operadores en el contexto de la integral de Henstock-Kurzweil siguiendo la línea de investigación dada en [47] con respecto a la integral de Lebesgue.

III) Enfatizar la relación de la integral de Henstock-Kurzweil con el espacio de Hardy $H^1(\mathbb{R})$ y su espacio dual $BM0$. Véase [23].

IV) Estudiar el problema de la inversión puntual para la transformada de Fourier ya que en general si $f \in BV_0(\mathbb{R})$ no se sabe si $e^{isx}\mathcal{F}_{HK}(f)$ pertenece a $HK(\mathbb{R})$. Este problema surge de lo establecido en [54].

V) Relacionar la transformada de Fourier de una función de variación acotada con la integrabilidad de la serie trigonométrica con coeficientes generados por la función.

VI) El estudio de otras transformadas integrales con respecto a la integral de Henstock-Kurzweil como lo es la transformada de Laplace, la transformada de Hartley [12] y la transformada de Hilbert [48].

VII) A partir del hecho de que el espacio dual de HK se puede identificar con el espacio BV surge la pregunta de caracterizar el espacio dual de BV. Esto con el fin de aplicar los resultados existentes de la teoría de interpolación para caracterizar el espacio dual de $HK \cap BV$ y el espacio dual de $HK + BV$.

VIII) Estudiar la diferenciabilidad del operador $\mathcal{F}_{HK}$ en diversos espacios tales como $\mathcal{L}^1 + BV_0$ haciendo un estudio más profundo de las propiedades de la derivada del operador, esto en virtud de los resultados publicados en [4].

IX) Extender las propiedades de la transformada de Fourier a funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ usando el concepto de integración en varias variables. Véase [24].

X) Profundizar en el estudio de la integral generalizada de Kiurzweil definida para funciones definidas en $[a, b] \subsetneq \mathbb{R}$ y valuadas en espacios de Banach X, véase [19]. Además, se tiene la extensión de la integral de Kurzweil para funciones definidas en rectángulos $R \subsetneq \mathbb{R}^n$ y valuadas en X, véase [18].

xi) Relacionar el tema de ecuaciones diferenciales con la integral de Henstock-Kurzweil, en particular, ya se tiene un estudio sobre la ecuación de calor en una dimensión en [81, 31].

xii) Continuar con el estudio de ecuaciones diferenciales e integrales generalizadas y ecuaciones con impulsos definidas en espacios de Banach, ver [58].

xiii) Relacionar las ecuaciones diferenciales ordinarias generalizadas con el tema de la dependencia continua de un parámetro como lo muestra Jaroslav Kurzweil en [38].

xiv) También se puede considerar el desarrollo de la teoría de ecuaciones diferenciales funcionales retardadas con la integral de Kurzweil-Stieltjes. Véase [22].

xv) Utilizar la relación entre las integrales de Henstock y Kurzweil con la integral de Feynmann en problemas de ecuaciones generalizadas siguiendo los trabajos dados en [66, 26, 11].

xvi) Estudiar la aplicación de teoremas de puntos fijos para establecer la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales e integrales que contienen funciones Henstock-Kurzweil integrables. Véase [30].

xvii) Profundizar en la generalización de la integral de Henstock a partir de [33].

Apéndice

Apéndice A

Resultados clásicos sobre integración

En esta parte, enunciamos algunos resultados clásicos sobre la integral definida por Henri Léon Lebesgue para funciones medibles $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Estos teoremas pueden ser consultados en [13, 70].

Teorema A.1. ***(Teorema de convergencia dominada de Lebesgue).*** *Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones en $L^1(\mathbb{R})$ tal que satisface:*

I) $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$*, salvo un conjunto de medida cero en* $\mathbb{R}$.

II) Existe $g \in L^1(\mathbb{R})$ con la propiedad de que para toda $n \geq 1$,

$$|f_n(x)| \leq g(x)$$

salvo un conjunto de medida cero en $\mathbb{R}$.

Entonces $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $\|f_n - f\|_{L^1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Teorema A.2. ***(Teorema de Fubini).*** *Sea $F\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $F \in L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. Entonces*

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} F(x,y)\, dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} F(x,y)\, dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} F(x,y)\, d(x,y).$$

Teorema A.3. ***(Desigualdad de Hölder).*** *Sean $f \in L^p(\mathbb{R})$ y $g \in L^q(\mathbb{R})$ con $1 \leq p \leq \infty$ y $1/p + 1/q = 1$. Entonces $fg \in L^1(\mathbb{R})$ y además se satisface que*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

Teorema A.4. *Sean $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $L^p(\mathbb{R})$ y $f \in L^p(\mathbb{R})$ con $1 \leq p \leq \infty$, tales que $\|f_n - f\|_{L^p} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Entonces existen una subsucesión $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(f_n)_{n\geq 1}$ y $h \in L^p(\mathbb{R})$ tales que*

I) $f_{n_k}(x) \xrightarrow{k\to\infty} f(x)$*, salvo un conjunto de medida cero en* $\mathbb{R}$.

II) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$*, para toda $k \geq 1$, salvo un conjun to de medida cero en* $\mathbb{R}$.

A continuación mostramos el teorema de convergencia dominada con respecto a la integral de Henstock-Kurzweil, [7, Teorema 20.14].

Teorema A.5. ***(Teorema de Convergencia Dominada HK).*** *Supongamos que* $(f_n)_{n\geq 1}$ *es una sucesión de Cauchy en medida en* $HK(\mathbb{R})$*, es decir, para cada* $r > 0$*,*

$$m\Big(\Big\{\big|f_j - f_k\big| > r\Big\}\Big) \to 0 \qquad (j, k \to \infty).$$

Si existen $\alpha, \omega \in HK(\mathbb{R})$*, tales que para cada* $n \geq 1$*,*

$$\alpha(x) \leq f_n(x) \leq \omega(x)$$

salvo un conjunto de medida cero en $\mathbb{R}$*. Entonces existe* $f \in HK(\mathbb{R})$ *tal que* $\|f - f_n\| \to 0$*, cuando* $n \to \infty$*.*

Otras versiones del Teorema A.5 pueden consultarse en [65, Capítulo 13] y en [51, Teorema 3.1]. Además, un resultado importante que permite intercambiar el orden de integración es el siguiente.

Teorema A.6. *Sean* $I = [a, b]$ *y* $T = [c, d]$ *intervalos compactos de* $\mathbb{R}$*. Si* $f : I \times T \to \mathbb{R}$ *es continua en* $I \times T$*, entonces la función*

$$F(t) := \int_a^b f(x, t)\, dx \qquad \forall t \in T,$$

es continua en T*. Más aún,*

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, t)\, dx\right) dt = \int_c^d F(t)\, dt = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, t)\, dt\right) dx.$$

El Teorema A.6 puede ser consultado en [7, 12.U]. Además, existen versiones del teorema de Fubini que pueden consultarse en [39] y en [32].

Índice de figuras

Lista de símbolos

Símbolo	Descripción	Definición
$\mathcal{P} = \{I_j : j = 1, \ldots, n\}$	Partición de un intervalo compacto I	Pag. 7
$\dot{\mathcal{P}} = \left\{(I_j, \tau_j) : j = 1, \ldots, n\right\}$	Partición etiquetada de un intervalo compacto I	Pag. 7
$S(f, \dot{\mathcal{P}}) := \sum_{j=1}^{n} f(\tau_j)\, l(I_j)$	Suma de Riemann	Pag. 7
$\delta : I \to (0, \infty)$	Medidora o carga de un intervalo compacto I	Pag. 7
$\mathcal{R}(I)$	Conjunto de funciones Riemann integrables en un intervalo compacto I	Pag. 9
$\mathcal{HK}(I)$	Conjunto de funciones Henstock-Kurzweil integrables en un intervalo compacto I	Pag. 9
$\mathcal{L}(I)$	$\left\{f \in \mathcal{HK}(I) : \lvert f\rvert \in \mathcal{HK}(I)\right\}$	Pag. 20
$\mathrm{Var}(f, I)$	Variación total de una función f en un intervalo compacto I	Pag. 18
$BV(I)$	Espacio de funciones de variación acotada en unn intervalo compacto I	Pag. 18
$S[a, b]$	Conjunto de funciones de paso finito en $[a, b]$	Pag. 19
$B[a, b]$	Conjunto de funciones de paso en $[a, b]$	Pag. 20
$AC(I)$	Espacio de funciones absolutamente continuas en un intervalo compacto I	Pag. 21
$\lVert \cdot \rVert_{\mathcal{HK}}$	Seminorma de Alexiewicz	Pag. 25
$HK(I)$	Espacio de clases de equivalencia de funciones Henstock-Kurzweil integrables en un intervalo I	Pag. 25
$\widehat{HK}(I)$	Completación del espacio $HK(I)$	Pag. 25
$\mathcal{B}_C$	Espacio de funciones $F \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas tales que $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) \in \mathbb{R}$	Pag. 25
$\mathcal{A}_C$	Espacio de distribuciones integrables	Pag. 25
$\mathrm{Var}(f, \mathbb{R})$	Variación total de una función sobre la recta real	Pag. 26
$BV(\mathbb{R})$	Espacio de las funciones de variación acotada sobre $\mathbb{R}$	Pag. 26
$HK(\mathbb{R}, \mathbb{C})$	Espacio de funciones $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Henstock-Kurzweil integrables	Pag. 30
$\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$	Espacio de funciones $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue medibles tales que $$\int_{\mathbb{R}} \lvert f(x)\rvert^p \, dx < \infty,$$ con $1 \le p < \infty$	Pag. 33
$L^p(\mathbb{R})$	Espacio de clases de quivalencia de funciones en $\mathcal{L}^p$, con $1 \le p < \infty$	Pag. 33
$\mathcal{F}_1$	Transformada de Fourier en L^1	Pag. 33
$\mathcal{F}_1^c$	Transformada coseno de Fourier en L^1	Pag. 33

Símbolo	Descripción	Definición
$\mathcal{F}_1^s$	Transformada seno de Fourier en L^1	Pag. 33
$\mathcal{F}_2$	Transformada de Fourier en L^2	Pag. 33
$\mathcal{L}^p(\mathbb{R},\mathbb{C})$	Complexificación del espacio $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$	Pag. 34
$L^p(\mathbb{R},\mathbb{C})$	Complexificación del espacio $L^p(\mathbb{R})$	Pag. 34
$\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$	Espacio de funciones reales medibles con supremo esencial finito	Pag. 34
$L^\infty(\mathbb{R})$	Espacio de clases de equivalencia de funciones en $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$	Pag. 34
$\mathcal{F}_1^{-1}$	Inversa de la transformada de Fourier con respecto a la integral de Lebesgue	Pag. 34
$S(\mathbb{R}^n)$	Espacio de Schwartz	Pag. 35
$\mathcal{F}_{HK}$	Transformada de Fourier con respecto a la integral de Henstock-Kurzweil	Pag. 36
$BV_0(\mathbb{R})$	Espacio de funciones de variación acotada en $\mathbb{R}$ tales que se anulan en $\pm\infty$	Pag. 36
$\mathcal{F}_{HK}^{-1}$	Inversa de la transformada de Fourier con respecto a la integral de Henstock-Kurzweil	Pag. 38
$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}) + \mathcal{L}^q(\mathbb{R})$	Espacio de todas las funciones de la forma $f = f_p + f_q$, con $f_p \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ y $f_q \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R})$	Pag. 39
$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}^{p_i}(\mathbb{R})$	Suma finita de espacios $\mathcal{L}^{p_i}(\mathbb{R})$	Pag. 39
$\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})$	Espacio de todas las funciones de la forma $f = f_1 + f_0$, con $f_1 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ y $f_0 \in BV_0(\mathbb{R})$	Pag. 39
$\mathcal{B}$	$\mathcal{HK}(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R}) = \mathcal{HK}(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R})$	Pag. 40
$\mathcal{F}_{HK}^s$	HK transformada seno de Fourier	Pag. 42
$\mathcal{F}_{HK}^c$	HK transformada coseno de Fourier	Pag. 43
$\mathcal{H}(g)$	Transformada de Hilbert	Pag. 43
$H^1(\mathbb{R})$	Espacio real de Hardy	Pag. 43
$\mathcal{W}$	Espacio de funciones $g \in L^1(\mathbb{R})$ tales que $\frac{\mathcal{F}_1(g)(s)}{s} \in L^1(\mathbb{R})$	Pag. 44
Λ	Espacio de funciones $g \in \mathcal{B}$ tales que $\frac{\mathcal{F}_{HK}(g)(s)}{s} \in HK(\mathbb{R})$	Pag. 45
AC_{loc}	Espacio de funciones localmente absolutamente continuas	Pag. 45
$\mathrm{Si}(v)$	Función seno integral dada por $\mathrm{Si}(v) := \frac{2}{\pi}\int_0^v \frac{\mathrm{sen}(y)}{y}\,dy$	Pag. 46
γ_p	Constante γ_p	Pag. 51
B_1	$AC_{loc} \cap \mathcal{B}$	Pag. 52
$f * g$	Convolución de funciones dada por $\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy$	Pag. 52
$\tilde{X} = X + iX$	Complexificación de un espacio real X	Pag. 53
$\\|\cdot\\|_T$	Norma T en el espacio complejo $X + iX$	Pag. 53

Símbolo	Descripción	Definición
$BV(\mathbb{R},\mathbb{C})$	Complexificacion del espacio $BV(\mathbb{R})$	Pag. 54
$\mathcal{L}(X,Y)$	Espacio de operadores lineales y acotados $T : X \to Y$	Pag. 54
$\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$	Norma en el espacio de operadores $\mathcal{L}(X,Y)$	Pag. 54
$\tilde{T} : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{Y}$	Extensión compleja lineal de un operador $T : X \to Y$	Pag. 54
$\bar{A} = (A_0, A_1)$	Pareja de espacios compatibles	Pag. 55
$A_0 + A_1$	Espacio suma de espacios compatibles	Pag. 55
$\|\cdot\|_{A_0\cap A_1}$	Norma en la intersección de espacios compatibles	Pag. 55
$\|\cdot\|_{A_0+A_1}$	Norma en la suma de espacios compatibles	Pag. 55
$\|\cdot\|_{A_0\times A_1}$	Norma en el producto cartesiano $A_0 \times A_1$	Pag. 55
$(A_0 \times A_1)\big/D$	Espacio cociente isométrico a $A_0 + A_1$	Pag. 56
$\mathbb{F}(X,Y)$	Espacio de funciones f de $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1\}$ en $X + Y$	Pag. 57
$\|\cdot\|_{\mathbb{F}(X,Y)}$	Norma en el espacio complejo $\mathbb{F}(X,Y)$	Pag. 57
$[X,Y]_\theta$	Espacio complejo de interpolación θ	Pag. 58
$\|\cdot\|_{[\theta]}$	Norma en el espacio complejo de interpolación $[X,Y]_\theta$	Pag. 58
$\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \widehat{+} BV_0(\mathbb{R})$	Completación del espacio suma $$\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R}) := \left(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \times BV_0(\mathbb{R})\right)\big/D$$	Pag. 59
$L^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})$	Espacio suma de L^1 más BV_0 dado por $$\left(L^1(\mathbb{R}) \times BV_0(\mathbb{R})\right)\big/D'$$	Pag. 60
$L^\infty(\mathbb{R}) + \widehat{HK}(\mathbb{R})$	Espacio suma de L^∞ más $\widehat{HK}$	Pag. 60
$L^1(\mathbb{R},\mathbb{C}) + BV_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$	Complexificación del espacio suma $L^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})$	Pag. 60
$L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}) + \widehat{HK}(\mathbb{R},\mathbb{C})$	Complexificación del espacio suma $L^\infty(\mathbb{R}) + \widehat{HK}(\mathbb{R})$	Pag. 60
$\mathcal{F}_1^c : L^1(\mathbb{R},\mathbb{C}) \to L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$	Extensión compleja lineal de la transformada coseno en $L^1(\mathbb{R})$	Page. 61
$\mathcal{F}_{HK}^c : BV_0(\mathbb{R},\mathbb{C}) \to \widehat{HK}(\mathbb{R},\mathbb{C})$	Extensión compleja lineal de la transformada coseno en $HK(\mathbb{R})$	Page. 61
$\mathfrak{F}_1^c$	Transformada coseno en $L^1 + BV_0$	Pag. 61
$W^{1,p}(\mathbb{R})$	Espacio de Sóbolev real	Pag. 63
$W^{1,p}(\mathbb{R},\mathbb{C})$	Complexificación del espacio de Sóbolev $W^{1,p}(\mathbb{R})$	Pag. 63
$\mathcal{F}_2^c : L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}) \to L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$	Extensión complejo lineal de la transformada coseno en $L^2(\mathbb{R})$	Pag. 69
$\mathfrak{F}_2^c$	Transformada coseno en $L^2 + BV_0$	Pag. 69
$\mathfrak{F}_p^c$	Transformada coseno en $L^p + BV_0$	Pag. 70

Bibliografía

[1] Adams, R. A. y Fournier, J. J. F.: *Sobolev spaces*, volumen 140 de *Pure and Applied Mathematics (Amsterdam)*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, second edición, 2003, ISBN 0-12-044143-8. [citado en pág. 5, 63]

[2] Alexiewicz, A. y Orlicz, W.: *Analytic operations in real Banach spaces*. Studia Math., 14:57–78, 1953, ISSN 0039-3223. https://doi.org/10.4064/sm-14-1-57-78. [citado en pág. 54]

[3] Apostol, T.M.: *Análisis matemático*. Reverté, 1996, ISBN 9788429150049. https://books.google.com.mx/books?id=aaiyKfviI2gC. [citado en pág. 26]

[4] Arredondo, J. H. y Bernal, M. y Morales, M. G.: *Fourier Analysis with Generalized Integration*. Mathematics, 8(7):1199, 2020, ISSN 2227-7390. http://dx.doi.org/10.3390/math8071199. [citado en pág. 77]

[5] Arredondo, J. H. y Mendoza, F. J. y Reyes, A.: *On the norm continuity of the HK-Fourier transform*. Electron. Res. Announc. Math. Sci., 25:36–47, 2018, ISSN 1935-9179. https://doi.org/10.3934/era.2018.25.005. [citado en pág. 2, 5, 30, 45, 49, 51, 52, 75, 76, 77]

[6] Arredondo Ruíz, J. H. y Reyes, A.: *Interpolation theory for the HK-Fourier transform*. Rev. Un. Mat. Argentina, 2020. Aceptado. [citado en pág. 2, 5, 52, 58, 74, 76, 77]

[7] Bartle, Robert G.: *A modern theory of integration*, volumen 32 de *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001, ISBN 0-8218-0845-1. https://doi.org/10.1090/gsm/032. [citado en pág. 4, 8, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 25, 26, 27, 28, 43, 54, 64, 82]

[8] Beckner, William: *Inequalities in Fourier analysis on R^n*. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 72:638–641, 1975, ISSN 0027-8424. https://doi.org/10.1073/pnas.72.2.638. [citado en pág. 51]

[9] Bergh, J.y Löfström, J.: *Interpolation spaces. An introduction*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 223. [citado en pág. 34, 53, 55, 56, 57, 58]

[10] Bongiorno, Benedetto y Panchapagesan, T. V.: *On the Alexiewicz topology of the Denjoy space*. Real Anal. Exchange, 21(2):604–614, 1995/96, ISSN 0147-1937. [citado en pág. 25]

[11] Bonotto, E. M., M. Federson y P. Muldowney: *A Feynman-Kac solution to a random impulsive equation of Schrödinger type*. Real Anal. Exchange, 36(1):107–148, 2010/11, ISSN 0147-1937. http://projecteuclid.org/euclid.rae/1300108088. [citado en pág. 78]

[12] Bracewell, R. N.: *Aspects of the Hartley transform*. Proceedings of the IEEE, 82(3):381–387, 1994. [citado en pág. 77]

[13] Brezis, Haim: *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011, ISBN 978-0-387-70913-0. [citado en pág. 59, 63, 74, 81]

[14] Brudnyĭ, Yu. A. y Krugljak, N. Ya.: *Interpolation functors and interpolation spaces*, volumen 47 de *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1991, ISBN 0-444-88001-1. Translated from the Russian by Natalie Wadhwa. [citado en pág. 53]

[15] Calderón, A. P.: *Intermediate spaces and interpolation*. Studia Math. (Ser. Specjalna) Zeszyt, 1:31–34, 1963. [citado en pág. 57]

[16] Calderón, A. P.: *Intermediate spaces and interpolation, the complex method*. Studia Math., 24:113–190, 1964, ISSN 0039-3223. https://doi.org/10.4064/sm-24-2-113-190. [citado en pág. 5, 53, 57]

[17] Čelidze, V. G. y Džvaršeĭšvili, A. G.: *The theory of the Denjoy integral and some applications*, volumen 3 de *Series in Real Analysis*. World Scientific Publishing Co., Inc., Teaneck, NJ, 1989, ISBN 981-02-0021-8. https://doi.org/10.1142/0935, Translated from the Russian, with a preface and an appendix by P. S. Bullen. [citado en pág. 27]

[18] Federson, M.: *A constructive integral equivalent to the integral of Kurzweil*. Czechoslovak Math. J., 52(127)(2):365–367, 2002, ISSN 0011-4642. https://doi.org/10.1023/A:1021734929982. [citado en pág. 77]

[19] Federson, M.: *Substitution formulas for the Kurzweil and Henstock vector integrals*. Math. Bohem., 127(1):15–26, 2002, ISSN 0862-7959. [citado en pág. 77]

[20] Federson, M. y R. Bianconi: *Linear Fredholm integral equations and the integral of Kurzweil*. J. Appl. Anal., 8(1):83–110, 2002, ISSN 1425-6908. https://doi.org/10.1515/JAA.2002.83. [citado en pág. 5]

[21] Federson, M., R. Grau, J. G. Mesquita y E. Toon: *Lyapunov stability for measure differential equations and dynamic equations on time scales*. J. Differential Equations, 267(7):4192–4223, 2019, ISSN 0022-0396. https://doi.org/10.1016/j.jde.2019.04.035. [citado en pág. 5]

[22] Federson, M. y Mesquita, J. G. y A. Slavík: *Measure functional differential equations and functional dynamic equations on time scales*. J. Differential Equations, 252(6):3816–3847, 2012, ISSN 0022-0396. https://doi.org/10.1016/j.jde.2011.11.005. [citado en pág. 5, 78]

[23] Fefferman, C.: *Characterizations of bounded mean oscillation*. Bulletin of the American Mathematical Society, 77(4):587–588, 1971. [citado en pág. 77]

[24] Fonda, A.: *The Kurzweil-Henstock integral for undergraduates*. Compact Textbooks in Mathematics. Birkhäuser/Springer, Cham, 2018, ISBN 978-3-319-95320-5; 978-3-319-95321-2. https://doi.org/10.1007/978-3-319-95321-2, A promenade along the marvelous theory of integration. [citado en pág. 77]

[25] García-Cuerva, J. y Rubio de Francia, J. L.: *Weighted norm inequalities and related topics*, volumen 116 de *North-Holland Mathematics Studies*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985, ISBN 0-444-87804-1. 116. [citado en pág. 45]

[26] Gill, T. L. y W. W. Zachary: *Banach spaces for the Feynman integral*. Real Anal. Exchange, 34(2):267–310, 2009, ISSN 0147-1937. http://projecteuclid.org/euclid.rae/1256835188. [citado en pág. 78]

[27] Gordon, Russell A.: *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, volumen 4 de *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1994, ISBN 0-8218-3805-9. https://doi.org/10.1090/gsm/004. [citado en pág. 3, 4, 19, 22, 23, 54]

[28] Grafakos, Loukas: *Classical Fourier analysis*, volumen 249 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, third edición, 2014, ISBN 978-1-4939-1193-6; 978-1-4939-1194-3. https://doi.org/10.1007/978-1-4939-1194-3. [citado en pág. 4, 33, 34, 36, 73]

[29] Haaser, N.B. y Sullivan, J.A.: *Real Analysis*. Dover Books on Mathematics Series. Dover Publications, 1991, ISBN 9780486665092. https://books.google.com.mx/books?id=CbYdnQEACAAJ. [citado en pág. 26]

[30] Heikkilä, S.: *Differential and integral equations with Henstock-Kurzweil integrable functions*. J. Math. Anal. Appl., 379(1):171–179, 2011, ISSN 0022-247X. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.12.050. [citado en pág. 78]

[31] Heikkilä, S. y Talvila, E.: *Distributions, their primitives and integrals with applications to distributional differential equations*. Dynam. Systems Appl., 22(2-3):207–249, 2013, ISSN 1056-2176. [citado en pág. 78]

[32] Henstock, Ralph: *Lectures on the theory of integration*, volumen 1 de *Series in Real Analysis*. World Scientific Publishing Co., Singapore, 1988, ISBN 9971-50-450-2; 9971-50-451-0. https://doi.org/10.1142/0510. [citado en pág. 82]

[33] Henstock, Ralph y Pat Muldowney: *Ralph Henstock's Lectures on the Theory of Integration*, 2015. [citado en pág. 78]

[34] Hildebrandt, T. H.: *Introduction to the theory of integration*. Pure and Applied Mathematics, vol. 13. Academic Press, New York-London, 1963. [citado en pág. 49]

[35] Jameson, G. J. O.: *Sine, cosine and exponential integrals*. Math. Gaz., 99(545):276–289, 2015, ISSN 0025-5572. https://doi.org/10.1017/mag.2015.36. [citado en pág. 26, 29]

[36] Kober, H.: *A NOTE on Hilbert's operator*. Bull. Amer. Math. Soc., 48:421–427, 1942, ISSN 0002-9904. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1942-07688-9. [citado en pág. 43]

[37] Kreĭn, S. G. y Petunīn, Yu. Ī. y Semënov, E. M.: *Interpolation of linear operators*, volumen 54 de *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1982, ISBN 0-8218-4505-7. Translated from the Russian by J. Szűcs. [citado en pág. 56]

[38] Kurzweil, J: *Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter*. Czechoslovak Math. J., 7(3):418–449, 1957. [citado en pág. 78]

[39] Kurzweil, Jaroslav: *On Fubini theorem for general Perron integral*. Czechoslovak Math. J., 23(2):286–297, 1973. http://eudml.org/doc/12722. [citado en pág. 82]

[40] Lee, Peng Yee: *Lanzhou lectures on Henstock integration*, volumen 2 de *Series in Real Analysis*. World Scientific Publishing Co., Inc., Teaneck, NJ, 1989, ISBN 9971-50-891-5; 9971-50-892-3. [citado en pág. 10, 23, 25]

[41] Lee, T. Y.: *Henstock-Kurzweil Integration on Euclidean Spaces*. Real Analysis 12. World Scientific Publishing Company, 2011, ISBN 9814324582,9789814324588. http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=0A6D40ADF9214A6E080E18712C7AE5F6. [citado en pág. 27]

[42] Lee, T.-Y.: *Bounded linear functionals on the space of Henstock-Kurzweil integrable functions*. Czechoslovak Math. J., 59(134)(4):1005–1017, 2009, ISSN 0011-4642. https://doi.org/10.1007/s10587-009-0070-y. [citado en pág. 27]

[43] Lieb, Elliott H. y Loss, Michael: *Analysis*, volumen 14 de *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997, ISBN 0-8218-0632-7. [citado en pág. 51]

[44] Liflyand, E.: *Integrability spaces for the Fourier transform of a function of bounded variation*. J. Math. Anal. Appl., 436(2):1082–1101, 2016, ISSN 0022-247X. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.12.042. [citado en pág. 43, 44, 76]

[45] Liflyand, E.: *The Fourier transform of a function of bounded variation: symmetry and asymmetry*. J. Fourier Anal. Appl., 24(2):525–544, 2018, ISSN 1069-5869. https://doi.org/10.1007/s00041-017-9530-1. [citado en pág. 43, 44]

[46] Liflyand, E. R.: *On asymptotics of Fourier transform for functions of certain classes*. Anal. Math., 19(2):151–168, 1993, ISSN 0133-3852. https://doi.org/10.1007/BF02905077. [citado en pág. 44]

[47] Liflyand, Elijah: *Fourier transform versus Hilbert transform*. Ukr. Mat. Visn., 9(2):209–218, 2012, ISSN 1810-3200. https://doi.org/10.1007/s10958-012-1048-0. [citado en pág. 5, 43, 77]

[48] Liflyand, Elijah: *Interaction between the Fourier transform and the Hilbert transform*. Acta Comment. Univ. Tartu. Math., 18(1):19–32, 2014, ISSN 1406-2283. https://doi.org/10.12697/ACUTM.2014.18.03. [citado en pág. 43, 45, 77]

[49] Liflyand, Elijah: *Functions of bounded variation and their Fourier transforms*. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhäuser/Springer, Cham, 2019, ISBN 978-3-030-04428-2; 978-3-030-04429-9. https://doi.org/10.1007/978-3-030-04429-9. [citado en pág. 44, 76]

[50] Liflyand, E. y Tikhonov, S.: *The Fourier transforms of general monotone functions*. En *Analysis and mathematical physics*, Trends Math., páginas 377–395. Birkhäuser, Basel, 2009. https://doi.org/10.1007/978-3-7643-9906-1_18. [citado en pág. 1, 44, 76]

[51] Lu, J. y Lee, P. Y.: *A dominated convergence theorem in the K-H integral*. Taiwanese J. Math., 7(3):507–512, 2003, ISSN 1027-5487. https://doi.org/10.11650/twjm/1500558402. [citado en pág. 82]

[52] Luna-Elizarrarás, M. E. y Ramírez-Reyes, F. y Shapiro, M.: *Complexifications of real spaces: general aspects*. Georgian Math. J., 19(2):259–282, 2012, ISSN 1072-947X. https://doi.org/10.1515/gmj-2012-0013. [citado en pág. 54]

[53] Lunardi, Alessandra: *Interpolation theory*, volumen 16 de *Appunti. Scuola Normale Superiore di Pisa (Nuova Serie) [Lecture NOTEs. Scuola Normale Superiore di Pisa (New Series)]*. Edizioni della Normale, Pisa, 2018, ISBN 978-88-7642-639-1; 978-88-7642-638-4. https://doi.org/10.1007/978-88-7642-638-4, Third edition [of MR2523200]. [citado en pág. 5, 53, 56, 57, 58, 64]

[54] Mendoza Torres, F. J.: *On pointwise inversion of the Fourier transform of BV_0 functions*. Ann. Funct. Anal., 1(2):112–120, 2010, ISSN 2008-8752. https://doi.org/10.15352/afa/1399900593. [citado en pág. 4, 36, 62, 75, 77]

[55] Mendoza Torres, F. J. y Escamilla Reyna, J. A. y Sánchez Perales, S.: *Some results about the Henstock-Kurzweil Fourier transform*. Math. Bohem., 134(4):379–386, 2009, ISSN 0862-7959. [citado en pág. 40, 41]

[56] Mendoza Torres, F. J. y Morales Macías, M. G. y Escamilla Reyna, J. A. y Arredondo Ruiz, J. H.: *Several aspects around the Riemann-Lebesgue lemma*. J. Adv. Res. Pure Math., 5(3):33–46, 2013, ISSN 1943-2380. https://doi.org/10.5373/jarpm.1458.052712. [citado en pág. 36]

[57] Monteiro, G. A. y Slavík, A. y Tvrdý, M.: *Kurzweil–Stieltjes Integral*. World Scientific, 2018. https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/9432. [citado en pág. 5, 19, 20, 49]

[58] Monteiro, G. A. y Tvrdý, M.: *Continuous dependence of solutions of abstract generalized linear differential equations with potential converging uniformly with a weight*. Bound. Value Probl., páginas 2014:71, 18, 2014, ISSN 1687-2762. https://doi.org/10.1186/1687-2770-2014-71. [citado en pág. 78]

[59] Morales, M G. y R Gaitn: *Feynman's path integral seen as a Henstock integral*. En *Journal of Physics, Conf. Series*, volumen 912, 2017. [citado en pág. 5]

[60] Morales, M. G. y Arredondo, J. H.: *Factorization in the space of Henstock-Kurzweil integrable functions*. Azerb. J. Math., 7(2):116–131, 2017, ISSN 2218-6816. [citado en pág. 41, 52, 76]

[61] Morales, M. G. y Arredondo, J. H. y Mendoza, F. J.: *An extension of some properties for the Fourier transform operator on $L^p(\mathbb{R})$ spaces*. Rev. Un. Mat. Argentina, 57(2):85–94, 2016, ISSN 0041-6932. [citado en pág. 36, 39, 70, 73]

[62] Morales M., M. G. y Escamilla R., J. A. y Mendoza T., F. J. y Arredondo R., J. H.: *The Banach-Steinhaus theorem and the convergence of integrals of products*. Int. J. Funct. Anal. Oper. Theory Appl., 4(1):51–64, 2012, ISSN 0975-2919. [citado en pág. 25]

[63] Muñoz-Fernández, G. y Sarantopoulos, Y. y Tonge, A.: *Complexifications of real Banach spaces, polynomials and multilinear maps*. Studia Mathematica, 134:1, Marzo 1999. [citado en pág. 54]

[64] Nathanson, E. S.: *Path integration with non-positive distributions and applications to the Schrödinger equation*. Thesis (Ph.D.) The University of Iowa, 2014. [citado en pág. 5]

[65] Pap, E. (editor): *Handbook of measure theory. Vol. 1, 2*. North-Holland, Amsterdam, 2002, ISBN 0-444-50263-7. [citado en pág. 82]

[66] Pardy, M.: *The complex mass from Henstock-Kurzweil-Feynman-Pardy integral*. Editorial Board, página 1, 2019. [citado en pág. 78]

[67] Pinsky, Mark A.: *Introduction to Fourier analysis and wavelets*, volumen 102 de *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009, ISBN 978-0-8218-4797-8. https://doi.org/10.1090/gsm/102, Reprint of the 2002 original. [citado en pág. 34, 36, 58]

[68] Reed, M. y Simon, B.: *Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975. [citado en pág. 34, 51]

[69] Reed, M. y Simon, B.: *Methods of modern mathematical physics. I*. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York, second edición, 1980, ISBN 0-12-585050-6. Functional analysis. [citado en pág. 22, 33, 51]

[70] Rudin, Walter: *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edición, 1987, ISBN 0-07-054234-1. [citado en pág. 3, 22, 34, 59, 81]

[71] Sánchez-Perales, S. y Mendoza Torres, F. J. y Escamilla Reyna, J. A.: *Henstock-Kurzweil integral transforms*. Int. J. Math. Math. Sci., páginas Art. ID 209462, 11, 2012, ISSN 0161-1712. https://doi.org/10.1155/2012/209462. [citado en pág. 36, 40, 52]

[72] Schechter, Martin: *Complex interpolation*. Compos. Math., 18(1-2):117–147, 1967. [citado en pág. 53]

[73] S.G. Krein y Ju.I. Petunin y E.M. Semenov.: *Interpolation of linear operators*, volumen 54 de *Translations of mathematical monographs*. American Mathematical Society, 1982., ISBN 0821845047,9780821845042. http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=5e1b150f4048ac2ce0784fff07aaf5b4. [citado en pág. 53]

[74] Sjölin, Per: *A remark on the Hausdorff-Young inequality*. Proc. Amer. Math. Soc., 123(10):3085–3088, 1995, ISSN 0002-9939. https://doi.org/10.2307/2160664. [citado en pág. 51]

[75] Sogge, Christopher D.: *Fourier integrals in classical analysis*, volumen 210 de *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edición, 2017, ISBN 978-1-107-12007-5. https://doi.org/10.1017/9781316341186. [citado en pág. 34, 36, 57]

[76] Swartz, Charles: *Introduction to gauge integrals*. World Scientific Publishing Co., Singapore, 2001, ISBN 981-02-4239-5. https://doi.org/10.1142/9789812810656. [citado en pág. 24]

[77] Talvila, Erik: *Henstock-Kurzweil Fourier transforms*. Illinois J. Math., 46(4):1207–1226, 2002, ISSN 0019-2082. http://projecteuclid.org/euclid.ijm/1258138475. [citado en pág. 4, 5, 27, 36, 37, 38, 39, 41, 52]

[78] Talvila, Erik: *Continuity in the Alexiewicz norm*. Math. Bohem., 131(2):189–196, 2006, ISSN 0862-7959. [citado en pág. 52]

[79] Talvila, Erik: *The distributional Denjoy integral*. Real Anal. Exchange, 33(1):51–82, 2008, ISSN 0147-1937. http://projecteuclid.org/euclid.rae/1209398378. [citado en pág. 3, 25, 52]

[80] Talvila, Erik: *Convolutions with the continuous primitive integral*. Abstr. Appl. Anal., 2009, ISSN 1085-3375. https://doi.org/10.1155/2009/307404. [citado en pág. 36, 52]

[81] Talvila, Erik: *The one-dimensional heat equation in the Alexiewicz norm*. Adv. Pure Appl. Math., 6(1):13–37, 2015, ISSN 1867-1152. https://doi.org/10.1515/apam-2014-0038. [citado en pág. 78]

[82] Ye, G. y W. Liu: *The distributional Henstock-Kurzweil integral and applications: a survey*. J. Math. Study, 49(4):433–448, 2016, ISSN 1006-6837. https://doi.org/10.4208/jms.v49n4.16.06. [citado en pág. 5]

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE DISERTACIÓN PÚBLICA

No. 00072
Matrícula: 2121800817

Integral de Henstock Kurzweil y Transformada de Fourier

Con base en la Legislación de la Universidad Autónoma Metropolitana, en la Ciudad de México se presentaron a las 14:00 horas del día 15 del mes de diciembre del año 2020 POR VÍA REMOTA ELECTRÓNICA, los suscritos miembros del jurado designado por la Comisión del Posgrado:

DR. SLAVISA DJORDJEVIC V.
DR. CARLOS IBARRA VALDEZ
DRA. MARIA GUADALUPE MORALES MACIAS
DR. JUAN HECTOR ARREDONDO RUIZ
DR. JULIO CESAR GARCIA CORTE

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron a la presentación de la Disertación Pública cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

DE: ALFREDO REYES VAZQUEZ

y de acuerdo con el artículo 78 fracción IV del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

APROBAR

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo
DIRECCION DE SISTEMAS ESCOLARES

ALFREDO REYES VAZQUEZ
ALUMNO

REVISÓ

MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA

PRESIDENTE

DR. SLAVISA DJORDJEVIC V.

VOCAL

DR. CARLOS IBARRA VALDEZ

VOCAL

DRA. MARIA GUADALUPE MORALES MACIAS

VOCAL

DR. JUAN HECTOR ARREDONDO RUIZ

SECRETARIO

DR. JULIO CESAR GARCIA CORTE