UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

Subtopologías separables
y
Cocientes de grupos fuertemente realcompactos

Tesis que presenta
Luis Felipe Morales López
Para obtener el grado de
Doctor en Ciencias Matemáticas

Asesor de tesis: Dr. Mikhail Tkachenko

Sinodales:

Dr. Vladimir V. Tkachuk (Presidente)

Dr. Mikhail G. Tkachenko (Secretario)

Dr. Richard Gordon Wilson Roberts (Vocal)

Dr. Sergey A. Antonyan (Vocal)

Dr. Ángel Tamariz Mascarúa (Vocal)

Ciudad de México, 25 de enero de 2017

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

Casa abierta al tiempo

Subtopologías separables
y
Cocientes de grupos fuertemente realcompactos

Tesis que presenta
Luis Felipe Morales López
Para obtener el grado de
Doctor en Ciencias Matemáticas

Asesor de tesis: Dr. Mikhail Tkachenko

Sinodales:

Dr. Vladimir V. Tkachuk (Presidente)

Dr. Mikhail G. Tkachenko (Secretario)

Dr. Richard Gordon Wilson Roberts (Vocal)

Dr. Sergey A. Antonyan (Vocal)

Dr. Ángel Tamariz Mascarúa (Vocal)

Ciudad de México, 25 de enero de 2017

Agradecimientos

A Dios.

A Kathya, gracias por caminar junto a mi, TE AMO.

A Miguel Enrique, por soportar los meses de ausencia.

A mis papás, por darme el tesoro más grande, su amor.

A mis amigos, que me motivaron con su ejemplo y sus palabras.

A mi asesor, Dr. Mikhail Tkachenko, por su paciencia, conocimientos, tiempo y esfuerzo. No tengo palabras suficientes para decir GRACIAS.

A CONACyT, por la ayuda recibida durante mis estudios de doctorado.

Resumen

Esta tesis tiene dos temas principales, que inspiraron la elaboración de dos artículos:

- Isomorfismos continuos sobre grupos separables (ver [21]).
- Cocientes de grupos fuertemente realcompactos (ver [22]).

En la Introducción se presentan los antecedentes históricos que motivan el estudio de los problemas atacados en esta tesis.

El Capítulo 1 "Preliminares" se divide en 4 secciones. En la sección 1.1 se da una introducción a los grupos topológicos y se mencionan las características más importantes que serán utilizadas en este trabajo. En la sección 1.2 se introduce el concepto de subtopología y se enuncian resultados ya conocidos. En la sección 1.3 se definen diferentes tipos de completitud tanto en espacios como en grupos topológicos y se presenta el concepto de grupos fuertemente realcompactos y fuertemente Dieudonné completos. Por último, en la sección 1.4, se especifica la notación y definiciones básicas que se usarán a lo largo de la tesis.

En el Capítulo 2 "Subtopologías Separables" se estudia el problema de las condensaciones sobre espacios separables e isomorfismos continuos sobre grupos topológicos separables. En el teorema 2.1.2 se dan condiciones suficientes para que un espacio topológico tenga una subtopología separable y se dan ejemplos que muestran que ninguna de estas condiciones se puede quitar (ver los ejemplos 2.1.3, 2.1.4 y 2.1.5). Además se prueba que estas condiciones fallan cuando se busca una subtopología de grupo separable, dando ejemplos de grupos topológicos que tienen una subtopología separable pero no una subtopología de grupo separable (ver el ejemplo 2.2.3).

En el ejemplo 2.2.5 se construye un espacio de Tychonoff numerablemente compacto y no separable que admite una condensación sobre un espacio compacto separable de cardinalidad $2^{\mathfrak{c}}$. En la sección 2.3 se demuestra que a todo grupo Abeliano de cardinalidad menor o igual que $2^{\mathfrak{c}}$ se le puede asignar una topología de grupo Hausdorff separable, es decir, que independientemente de sus características algebraicas, siempre podemos asignar una topología de grupo Hausdorff separable a un grupo Abeliano de cardinalidad menor o igual que $2^{\mathfrak{c}}$ (ver el teorema 2.3.11).

En el Capítulo 3 "Cocientes de grupos FRC y FDC" se estudian las características que tienen los grupos topológicos fuertemente realcompactos y los grupos fuertemente Dieudonné completos. En la sección 3.1 se demuestran propiedades que tienen las P-modificaciones de grupos topológicos y se describe la completación de Raĭkov de la P-modificación de un grupo en términos del grupo original. En la sección 3.2 se estudian también los cocientes de los grupos fuertemente realcompactos y de grupos fuertemente Dieudonné completos con respecto a subgrupos completamente metrizables y Čech-completos. Nuestros argumentos nos llevan a estudiar la relación entre la P-modificación del cociente de grupos y el cociente de las P-modificaciones en la sección 3.3.

Por último, en el Capítulo 4 "Conclusiones" se presentan las observaciones finales del trabajo y se hacen preguntas que quedan sin responder y que pueden ser interesantes para una investigación futura.

Índice general

Introducción

La teoría de grupos topológicos es un claro ejemplo de la fusión exitosa entre dos grandes áreas de la matemática, la teoría de grupos y la topología general.

Un grupo topológico (G, τ) es, como su nombre lo sugiere, un grupo abstracto al que se le asigna una topología que hace continuas las operaciones definidas en él, es decir, la multiplicación de grupo y la función inversión. La interacción entre estas dos estructuras da como resultado muchas propiedades de grupos topológicos que no son ciertas en espacios topológicos arbitrarios.

Las primeras nociones de grupos topológicos surgen a finales de siglo XIX y principios del XX, con el trabajo sobre los grupos de transformaciones y grupos de Lie. El estudio de los grupos topológicos hizo rápidamente avances significativos. Los matemáticos como Pontryagin, Markov, Freudenthal, Peter y Weyl, entre otros, hacen aportaciones considerables sobre la estructura de los grupos topológicos, así cómo de sus subgrupos, productos y cocientes.

Es muy interesante cómo la estructura topológica y la algebraica de un grupo topológico influyen una en la otra generando características únicas. Algunos ejemplos de estas propiedades las podemos encontrar en los teoremas de Birkhoff-Kakutani (1936), referente a la metrizabilidad de los grupos topológicos (ver el teorema 1.1.5), y de Pontryagin (1934) que demuestra que todo grupo topológico con el axioma de separación T_0 es Tychonoff.

En el Capítulo "Preliminares" se presentan los resultados conocidos en el campo de grupos topológicos que serán de gran utilidad en el desarrollo de este trabajo. Se definen los conceptos de subtopología de espacio, subtopología de grupo topológico y de grupos fuertemente realcompactos y fuertemente Dieudonné completos, que son los temas estudiados en esta tesis (ver las Secciones 1.2 y 1.3 respectivamente).

Encontrar una topología de grupo Hausdorff, no discreta para un grupo arbitrario no es una tarea fácil. En 1953, Kertész y Szele demuestran que a todo grupo infinito Abeliano se le puede asignar una topología de grupo Hausdorff no discreta. Sin embargo, existen ejemplos de grupos a los que la única topología de grupo que se les puede asignar es la discreta (ver [23]). Por eso es natural preguntarse que si dado un grupo arbitrario G y una propiedad topológica $\mathcal{P}$:

- ¿Existe una topología de grupo para G que tenga $\mathcal{P}$?
- ¿Qué propiedades algebraicas debe cumplir G para que se le pueda asignar una topología de grupo que tenga $\mathcal{P}$?

En 1957 Harrison y en 1958 Hulanicki responden la pregunta hecha por Halmos en 1944, caracterizando los grupos Abelianos que pueden admitir una topología de grupo compacto. Comfort y Ross en 1964 generalizan el resultado de Kertész y Szele demostrando que todo grupo Abeliano admite una topología de grupo metrizable no discreta y precompacta. En 1980 van Douwen demuestra que todo grupo Booleano G para el cual $|G| = |G|^{\omega}$ admite una topología de grupo numerablemente compacta. En 1998 Dikranjan y Shakhmatov dan condiciones suficientes para que un grupo Abeliano infinito G admita un topología de grupo Hausdorff pseudocompacta (ver [1, Teorema 9.11.6]). En 2002, bajo el axioma de Martin, Dikranjan y Tkatchenko caracterizan los grupos de cardinalidad $\mathfrak{c}$ que admiten una topología de grupo numerablemente compacto.

Es por esto que resulta natural preguntarse ¿Qué propiedades debe satisfacer un grupo para que admita una topología de grupo topológico Hausdorff separable?

En el Capítulo 2 se demuestra que para todo grupo Abeliano de cardinalidad menor o igual que $2^{\mathfrak{c}}$ se le puede asignar una topología de grupo topológico separable (teorema 2.3.11). En el teorema 2.1.2 se estudian las condensaciones sobre espacios topológicos y se dan condiciones suficientes para que exista una condensación de un espacio de Tychonoff sobre un espacio separable y damos ejemplos que prueban que dichas condiciones son mínimas. En el caso de grupos topológicos, en el teorema 2.2.2 se demuestra la existencia de grupos que tienen una subtopología de espacio separable pero no una subtopología de grupo separable. Además en el ejemplo 2.2.5 se construye una condensación de un espacio numerablemente compacto no separable sobre un espacio compacto separable de cardinalidad $2^{\mathfrak{c}}$, demostrando que el teorema de Arhangel'skii (ver [4] y [1, Corolario 9.8.17]) de homomorfismos continuos de grupos numerablemente compactos sobre grupos compactos no se puede extender a espacios topológicos arbitrarios.

En 1953 Katz demuestra que un grupo topológico es topológicamente isomorfo a un subgrupo de un producto de grupos topológicos primero numerables (metrizables) si y sólo si es ω-balanceado (ver [19]). Por otra parte, Guran en 1981 demuestra que un grupo topológico G admite un encaje topológico como un subgrupo de un producto de grupos topológicos segundo numerables si y sólo si G es ω-estrecho (ver [13]).

Por otra parte, es interesante estudiar los conceptos básicos de la topología general aplicados al campo de los grupos topológicos. Por ejemplo, existen muchos espacios primero numerables que no son metrizables (la recta de Sorgenfrey por mencionar alguno), pero por el teorema de Birkhoff-Kakutani sabemos que la clase de grupos metrizables es equivalente a la clase de grupos primero numerables. En el caso de espacios topológicos, la celularidad de un espacio σ-compacto puede ser arbitrariamente grande, pero la celularidad de un grupo σ-compacto es numerable. En estos ejemplos se muestra que la estructura algebraica de un grupo topológico afecta considerablemente sus características topológicas.

Hay, sin embargo, propiedades topológicas que pueden trabajar mejor en el caso de grupos topológicos si se les hace algunas modificaciones para no perder las características algebraicas del grupo. Por ejemplo, en 2004, M. Tkachenko, C. Hernández y M. López adaptan el concepto de realcompacidad a la teoría de grupos topológicos describiendo así la clase de los grupos *fuertemente realcompactos* (FRC). Un grupo es fuertemente realcompacto si es topológicamente isomorfo a un subgrupo cerrado de un producto de grupos segundo numerables. Es claro que todo grupo fuertemente realcompacto es realcompacto y, por el teorema de Guran (ver el teorema 1.1.15), ω-estrecho.

De manera similar, se adapta el concepto de espacio Dieudonné completo a los grupos topológicos de la siguiente forma. Un grupo topológico es *fuertemente Dieudonné completo* si es topológicamente isomorfo a un subgrupo cerrado de un producto de grupos metrizables. Es claro que la clase de los grupos fuertemente realcompactos esta contenida en la clase de los grupos fuertemente Dieudonné completos.

Se sabe que, en espacios topológicos de Tychonoff, la diferencia entre los espacios realcompactos y Dieudonné completos es muy sutil, ya que si no existen los cardinales medibles, entonces estas dos clases coinciden (ver [9, Ejercicio 8.5.13.h]). Pero en el caso de los grupos topológicos, cualquier grupo no numerable con la topología discreta es un ejemplo de grupo fuertemente Dieudonné completo que no es fuertemente realcompacto.

En [30] se demuestra que todo grupo ω-estrecho (ω-balanceado) es fuertemente realcompacto (fuertemente Dieudonné completo) si y sólo si es G_δ-cerrado en su completación de Raĭkov y que las clases de los grupos fuertemente realcompactos y fuertemente Dieudonné completos son cerradas bajo cocientes sobre subgrupos compactos.

En el Capítulo 3 se generalizan los resultados anteriores. Con este objetivo, en la sección 3.1 se estudian propiedades de ser ω-estrecho y ω-balanceado en las P-modificaciones de grupos topológicos. En la sección 3.2 se estudian los cocientes de los grupos fuertemente realcompactos y de grupos fuertemente Dieudonné completos y se demuestra que estas clases son cerradas bajo tomar cocientes con respecto a subgrupos completamente metrizables y Čech-completos (ver los teoremas 3.2.4 y 3.2.5), generalizando así los resultados expuestos en [30].

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se definen los conceptos básicos de los que se hablará en esta tesis. Se hace una introducción a los grupos topológicos y se presentan los resultados que utilizaremos. Además se define el concepto de *subtopología* $\mathcal{P}$, donde $\mathcal{P}$ es una propiedad topológica y se mencionan algunos teoremas conocidos al respecto. Por último hablaremos acerca de los diferentes conceptos relacionados a la completitud de espacios y grupos topológicos y definiremos los grupos fuertemente realcompactos y fuertemente Dieudonné completos, mismos que se compararán con los espacios realcompactos y Dieudonné completos. En la sección final, se presenta la notación y definiciones básicas que serán utilizadas a lo largo de este trabajo de tesis.

1.1. Grupos topológicos

Sea G un grupo con una topología. El grupo G es *topológico izquierdo* (*topológico derecho*) si las traslaciones izquierdas (derechas) son continuas en G. Un grupo G que es a la vez topológico izquierdo y derecho es un *grupo semitopológico*. Si la multiplicación en G es conjuntamente continua, decimos que G es un *grupo paratopológico*. Por otra parte, si tenemos un grupo semitopológico G donde la inversión es continua, decimos que G es un *grupo quasitopológico*. Si G es un grupo paratopológico y quasitopológico al mismo tiempo, es decir, que tanto el producto como la inversión son continuas, entonces diremos que G es un *grupo topológico*.

Daremos a continuación algunos resultados importantes en el estudio de los grupos topológicos que relacionan sus características algebraicas con las topológicas:

Un espacio topológico X se dice homogéneo, si para cualesquiera puntos $x, y \in X$, existe $f : X \to X$ homeomorfismo tal que $f(x) = y$. Si además se cumple también la igualdad $f(y) = x$, entonces el espacio topológico se dice que es bihomogéneo.

Teorema 1.1.1. *Todo grupo topológico G es bihomogéneo.*

Demostración. Sean $g, h \in G$ dos puntos y sea $f(x) = g \cdot x^{-1} \cdot h$. Es claro que $f(g) = h$ y $f(h) = g$. La continuidad de f es debida a la continuidad de la multiplicación y de la inversa en G. □

Este hecho facilita la verificación de muchas propiedades topológicas en los grupos topológicos ya que sólo se tienen que comprobar ciertas características en las vecindades de la identidad.

El teorema 1.1.1, junto con la continuidad de la multiplicación y la inversión hace que los grupos topológicos T_1 sean regulares (observación hecha por Kolmogorov). Poco después, en 1937, Pontryagin demuestra algo aún más sorprendente, definiendo prenormas en los espacios topológicos:

Teorema 1.1.2 (Pontryagin)**.** *Si G es un grupo topológico T_1, entonces G es completamente regular (ver [27, Teorema 4.14]).*

Este teorema no es verdadero ni para el caso de grupos paratopológicos, pues existen ejemplos de grupos T_1 que no son Hausdorff y Hausdorff que no son regulares (ver [14]). Banakh y Ravsky demostraron en [5] que los grupos paratopológicos T_3 son Tychonoff, este problema (demostrar la equivalencia entre grupos paratopológicos T_3 y Tychonoff) estuvo abierto alrededor de 60 años (de hecho ellos demostraron que los grupos paratopológicos funcionalmente Hausdorff son funcionalmente Tychonoff).

En esta tesis sólo consideraremos los grupos topológicos T_1.

El siguiente teorema es de gran importancia pues permite caracterizar completamente a $\mathcal{N}(e)$ el conjunto de las vecindades de la identidad y da una manera de discernir si una topología dada a un grupo es o no una topología de grupo topológico:

Teorema 1.1.3. *Sean G un grupo topológico y e el elemento identidad de G. Entonces existe una base local $\mathcal{V}$ para e en G que cumple las siguientes condiciones:*

(i) $\bigcap \mathcal{V} = \{e\}$;

(ii) *si $U, V \in \mathcal{V}$, entonces existe $W \in \mathcal{V}$ tal que $W \subseteq U \cap V$;*

(iii) *para cada $U \in \mathcal{V}$, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V^{-1} \subseteq U$;*

(iv) *para cada $U \in \mathcal{V}$, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V^2 \subseteq U$;*

(v) *para cada $U \in \mathcal{V}$ y $x \in G$, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $Vx \subseteq U$;*

(vi) *para cada $U \in \mathcal{V}$ y $x \in G$, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $xVx^{-1} \subseteq U$.*

Recíprocamente, si tenemos un grupo G y una familia $\mathcal{V}$ no vacía de subconjuntos de G que contienen a e y que satisfacen las condiciones (i) – (vi), entonces la familia $\{Ua : a \in G,\ U \in \mathcal{V}\}$ es una base de una topología de grupo topológico para G.

Como corolario del teorema 1.1.3, tenemos el siguiente resultado:

Corolario 1.1.4. *Sea e el elemento identidad de un grupo topológico G y $U \subset G$ una vecindad de e. Entonces existe una familia $\mathcal{F}$ de vecindades simétricas de la identidad $\mathcal{F} = \{V_n : n \in \omega\}$ tal que $V_0 \subset U$ y $V_{n+1}^2 \subset V_n$ para toda $n \in \omega$. El conjunto $H = \bigcap \mathcal{F}$ es un subgrupo cerrado de G.*

Otro hecho interesante que surge de la relación entre las propiedades algebraicas con las topológicas que cumplen los grupos topológicos, es el teorema de Birkhoff-Kakutani demostrado en 1936, acerca de la metrizabilidad de grupos topológicos (ver [1, Teorema 3.3.12]).

Teorema 1.1.5. *Un grupo topológico G es metrizable si y sólo si G es primero numerable.*

Es sorprendente cómo la estructura de grupo topológico simplifica las condiciones necesarias para la metrizabilidad. Este teorema falla para el caso de los grupos paratopológicos, pues *la recta de Sorgenfrey* es un claro ejemplo de un grupo paratopológico primero numerable no metrizable.

Un hecho que se debe sólo a la continuidad de las traslaciones, ya sean derechas o izquierdas, es que todo subgrupo abierto de un grupo topológico derecho (o izquierdo) es cerrado. Ahora, si además contamos con la continuidad de la función inversa, entonces podemos deducir el siguiente teorema (ver [1, Corolario 1.4.14]):

Teorema 1.1.6. *Si H es un subgrupo de un grupo topológico (quasitopológico) G, entonces $\overline{H}$, la cerradura de H en G, es un subgrupo de G.*

Este hecho no es verdadero para grupos paratopológicos. En su tesis doctoral, Manuel Fernández da condiciones suficientes sobre grupos paratopológicos y semitopológicos para que las cerraduras de sus subgrupos sean subgrupos también (ver [10]).

Este teorema es muy importante pues implica los siguientes corolarios:

Corolario 1.1.7. *Si H es un subgrupo localmente compacto de un grupo topológico G, entonces H es cerrado en G.*

Corolario 1.1.8. *Todo subgrupo discreto de un grupo topológico numerablemente compacto es finito.*

Corolario 1.1.9. *Todo subgrupo discreto de un grupo topológico Lindelöf es numerable.*

Para evitar confusiones con el término *normal* en teoría de grupos con *normal* en el sentido topológico, se utilizará el término *invariante* para referirse a un subgrupo H cuyas clases laterales izquierdas coinciden con las derechas. Con esta aclaración, podemos enunciar el siguiente teorema (ver [1, Teoremas 1.5.1 y 1.5.3])

Teorema 1.1.10. *Si H es un subgrupo de un grupo topológico G, entonces G/H es un espacio topológico T_1 si y sólo si H es un subgrupo cerrado de G. Además G/H es un grupo topológico T_1 si y sólo si H es un subgrupo cerrado e invariante de G.*

Una pregunta interesante es identificar cuáles propiedades se conservan bajo imágenes directas o inversas de funciones cocientes. El estudio de éstas dan cómo origen la siguiente definición:

Definición 1.1.11. *Dada una propiedad $\mathcal{P}$, decimos que $\mathcal{P}$ es* de tres espacios *si para cualquier subgrupo cerrado e invariante H de un grupo topológico G tal que H y G/H ambos tienen $\mathcal{P}$, implica que G también tiene $\mathcal{P}$.*

Algunos ejemplos de propiedades topológicas que son *de tres espacios* son:

1. Primera numerabilidad (=Metrizabilidad);
2. Segunda numerabilidad;
3. Compacidad;
4. Conexidad;
5. Compacidad local;
6. "Todos los subgrupos compactos son metrizables (o finitos)".

Es de interés analizar si una propiedad dada es o no una propiedad de tres espacios.

A continuación se presentan dos definiciones que se utilizan en esta tesis, sobre todo en el Capítulo 3.

Definición 1.1.12. *Sea G un grupo topológico. Entonces se dice que G es ω-estrecho si para cada $U \in \mathcal{N}(e)$, existe un subconjunto numerable C de G tal que $CU = UC = G$.*

Ejemplos de grupos ω-estrechos son los grupos separables, los grupos Lindelöf y los grupos con celularidad numerable.

Definición 1.1.13. *Sean G un grupo topológico. Se dice que G es ω-balanceado si para cada $U \in \mathcal{N}(e)$, existe una familia numerable $\gamma \subset \mathcal{N}(e)$ tal que para cualquier $x \in G$ existe $V \in \gamma$ con $xVx^{-1} \subset U$.*

Es claro que los grupos Abeliano y los grupos primero numerable son ω-balanceados. Durante mucho tiempo se preguntó si un grupo con pseudo-carácter numerable era ω-balanceado. Pestov en [24] da un ejemplo que demuestra que esta pregunta tiene respuesta negativa.

Por último, se enuncian los teoremas de Katz y Guran referentes a isomorfismos continuos (ver [1], teoremas 3.4.22 y 3.4.23).

Teorema 1.1.14 (Teorema de Katz)**.** *Sea G un grupo topológico. Entonces G es ω-balanceado si y sólo si G es topológicamente isomorfo a un subgrupo de un producto de grupos metrizables.*

Teorema 1.1.15 (Teorema de Guran)**.** *Sea G un grupo topológico. Entonces G es ω-estrecho si y sólo si G es topológicamente isomorfo a un subgrupo de un producto de grupos segundo numerables.*

1.2. Subtopologías

Una condensación es una función biyectiva y continua. Si X y Y son espacios y $f : X \to Y$ es una condensación, podemos asumir que X y Y tienen el mismo conjunto asociado y que la topología de X es más fina que la de Y. En este caso diremos que la topología de Y es una *subtopología de* X o que X se *condensa sobre* Y.

El problema de encontrar condiciones bajo las cuales el espacio X admite una subtopología con una propiedad $\mathcal{P}$ dada ha sido muy estudiada por diferentes autores. Es conocido que todo espacio de Hausdorff X con $nw(X) \leq \kappa$ se puede condensar sobre un espacio Y con $w(Y) \leq \kappa$ (ver [9, Lema 3.1.18]). Así mismo, existen resultados similares para las clases de espacios regulares y de Tychonoff. En [28] los autores encuentran condiciones necesarias y suficientes para que un espacio topológico admita una subtopología conexa Hausdorff o regular. En [12] se demuestra que todo espacio metrizable no compacto tiene una subtopología de Hausdorff conexa.

En grupos topológicos (y otras estructuras algebraicas con topología), el concepto de condensación tiene una contraparte natural: el *isomorfismo continuo* que es un homomorfismo y una condensación al mismo tiempo.

Al final de los 70's, Arhangel'skii demostró en [2] que todo grupo topológico G con $nw(G) \leq \kappa$ admite un isomorfismo continuo sobre un grupo topológico H con $w(H) \leq \kappa$. En [26] Shakhmatov amplío este resultado para anillos, módulos y campos topológicos. C. Hernández extendió este resultado para otras estructuras algebraicas con topologías regulares y de Tychonoff (ver [14]).

Como corolario del teorema de Katz acerca de encajes isomorfos en productos de grupos topológicos metrizables (ver el teorema 1.1.14), se puede deducir que si G es un grupo ω-balanceado y que el elemento neutral de G es un conjunto G_δ, entonces existe un isomorfismo continuo de G sobre un grupo metrizable. Pestov demuestra que la condición sobre G de ser ω-balanceado no se puede omitir (ver [25]).

En el teorema 2.1.2 de esta tesis se presentan condiciones suficientes que un espacio de Tychonoff debe satisfacer para que admita una condensación sobre un subespacio separable y denso en el cubo de Tychonoff de peso 2^ω. Los ejemplos 2.1.3, 2.1.4 y 2.1.5 muestran que ninguna de las condiciones en el teorema 2.1.2 puede omitirse. En el corolario 2.2.2, se demuestra que estas condiciones no son suficientes si buscamos un subtopología de grupo separable, dando un ejemplo de un grupo topológico que tiene una subtopología separable pero no una subtopología de grupo separable (ejemplo 2.2.3). En el teorema 2.2.4 se dan condiciones necesarias y suficientes para que exista un isomorfismo continuo de un subgrupo de producto de grupos Abelianos, compactos y metrizables sobre un grupo separable.

Como Arhangel'skii demostró en [4], todo homomorfismo continuo de un grupo numerablemente compacto X sobre un grupo compacto Y de cardinalidad Ulam no-medible es abierto. En el ejemplo 2.2.5 se construye una condensación de un espacio de Tychonoff numerablemente compacto y de celularidad 2^ω sobre un espacio compacto, separable y de cardinalidad $2^\mathfrak{c}$ lo que demuestra que el resultado de Arhangel'skii no se puede generalizar a espacios arbitrarios.

Finalmente en la sección 2.3 se demuestra que cada grupo Abeliano de cardinalidad menor o igual que $2^\mathfrak{c}$ admite una topología Hausdorff de grupo topológico precompacto y separable (ver el teorema 2.3.11).

1.3. Completitud en espacios y grupos topológicos

En la topología general, existen diferentes conceptos de completitud. Bajo ciertas circunstancias, estos conceptos son equivalentes, pero en general son muy diferentes.

En esta sección hablaremos de las diferentes nociones de espacios completos, y los compararemos con su contraparte en los grupos topológicos.

El primer concepto que estudiaremos es la completitud en el sentido de Raĭkov. Para esto, empezaremos dando la definición de *filtro de Cauchy*.

Definición 1.3.1. *Sea η un filtro de conjuntos abiertos de un grupo topológico G. Se dice que η es un* filtro de Cauchy *si para cada vecindad abierta V de la identidad e en G, existen $a, b \in G$ tales que aV y Vb pertenecen a η.*

Definición 1.3.2. *Un grupo topológico G se dice Raĭkov completo si y sólo si todo filtro de Cauchy en G converge.*

En 1946 Raĭkov demuestra el siguiente teorema, el cual se utilizará muchas veces a lo largo de este trabajo (ver [1, Teorema 3.6.10]).

Teorema 1.3.3. *Para cada grupo topológico G, existe un grupo ϱG Raĭkov completo y un isomorfismo topológico i de G sobre un subgrupo $i(G)$ denso en ϱG.*

Al grupo ϱG se le llama la Raĭkov completación de G. Se identifica a G como subgrupo denso de ϱG. Las propiedades básicas de este grupo pueden ser encontradas en [1, sección 3.6]. Se mencionan algunos resultados que serán utilizados más adelante.

Teorema 1.3.4. *Todo homomorfismo continuo f de un grupo topológico G a un grupo topológico H puede ser extendido a un homomorfismo continuo f^* de ϱG a ϱH.*

Teorema 1.3.5. *Si G es un grupo metrizable, entonces ϱG es completamente metrizable.*

Teorema 1.3.6. *Sea $G = \Pi_{i\in I} G_i$ un producto de grupos topológicos. Entonces ϱG es topológicamente isomorfo al grupo producto $\Pi_{i\in I} \varrho G_i$.*

Cabe mencionar que la propiedad de Raĭkov completitud es una propiedad de tres espacios (ver [1, Problema 3.6.F]).

Un espacio topológico Hausdorff X es H-cerrado si es cerrado en todo espacio de Hausdorff que lo contenga. Es claro que todo espacio compacto T_2 es H-cerrado. Un espacio regular es H-cerrado si y sólo si es compacto. Un ejemplo de espacio topológico H-cerrado no compacto es el intervalo $[0, 1]$ dotado con la topología generada por la topología usual y el conjunto $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

Esta definición se puede modificar para adaptarla al estudio de los grupos topológicos. Decimos que un grupo topológico Hausdorff es H-cerrado si es cerrado en todo grupo topológico Hausdorff que lo contiene. El sigueinte teorema no necesita demostración:

Teorema 1.3.7. *Sea G un grupo topológico Hausdorff. Entonces G es H-cerrado si y sólo si G es Raĭkov completo.*

Ejemplos de grupos Raĭkov completos son los grupos localmente compactos, Čech-completos y los completamente metrizables.

Observe que los espacios localmente compactos no son necesariamente H-cerrados. Por ejemplo, sea $X = \mathbb{I}^{\mathfrak{c}} \setminus \{x_0\}$, donde x_0 es un punto arbitrario de $\mathbb{I}^{\mathfrak{c}}$, entonces X es localmente compacto, pero no H-cerrado.

Otro concepto de completitud en la topología general es la Čech-completitud.

Definición 1.3.8. *Sea X un espacio topológico de Tychonoff. Decimos que X es Čech-completo si y sólo si X es un subconjunto G_δ de βX, donde βX es la compactificación de Stone-Čech de X.*

Hay que hacer notar que, aunque en la definición se hace mención a la compactificación de Stone-Čech, se sabe que X es Čech-completo si y sólo si es un subconjunto G_δ en alguna de sus compactificaciones (ver [9, Teorema 3.8.1]). La propiedad de ser Čech-completo se hereda por subespacios cerrados, subespacios G_δ, productos numerables. Es claro que los espacios Hausdorff compactos y los localmente compactos son Čech-completos. El espacio de los números irracionales con la topología de subconjunto de $\mathbb{R}$ es un ejemplo de un espacio Čech-completo que no es localmente compacto.

Los espacios Čech-completos satisfacen el siguiente teorema:

Teorema 1.3.9. *Sea X un espacio Čech-completo. Para todo elemento $x \in X$ y U vecindad abierta de x, existe un subconjunto compacto F de carácter numerable en X tal que $x \in F \subset U$.*

Este hecho tiene cómo consecuencia el siguiente corolario, en el campo de los grupos topológicos:

Corolario 1.3.10. *Sea G un grupo topológico Čech-completo y O una vecindad abierta de la identidad de G. Entonces existe un subgrupo compacto H de carácter numerable tal que $H \subset O$.*

El corolario 1.3.10, junto con el teorema 1.1.5 implican el siguiente hecho:

Corolario 1.3.11. *Para todo grupo Čech-completo G existe un homomorfismo cociente con su núcleo compacto sobre un grupo completamente metrizable.*

La siguiente definición, *espacio realcompacto*, la introduce Hewitt en 1948. También se conoce como *espacio completo en sentido de Hewitt-Nachbin.*

Definición 1.3.12. *Sea X un espacio de Tychonoff. Entonces decimos que X es realcompacto (o completo en sentido de Hewitt-Nachbin) si y sólo si no existe un espacio $\tilde{X}$ que cumpla al mismo tiempo las siguientes condiciones:*

(i) *Existe $r : X \to \tilde{X}$ un encaje homeomorfo tal que $r(X) \neq \overline{r(X)} = \tilde{X}$;*

(ii) *para cada función continua de valores reales $f : X \to \mathbb{R}$, existe una función continua $F : \tilde{X} \to \mathbb{R}$ tal que $F \circ r = f$.*

De la definición se sigue el siguiente teorema:

Teorema 1.3.13. *Sea X un espacio de Tychonoff. Entonces X es realcompacto si X es homeomorfo a un subespacio cerrado de una potencia $\mathbb{R}^\kappa$ de la recta real.*

El concepto de realcompacidad se puede adaptar a los grupos topológicos de la siguiente forma:

Definición 1.3.14. *Un grupo topológico G se llama fuertemente realcompacto (o fuertemente Hewitt-Nachbin completo) si y sólo si existe un isomorfismo topológico de G sobre un subgrupo cerrado de un producto de grupos segundo numerables.*

Por la definición queda claro que si G es fuertemente realcompacto entonces es realcompacto (ver [9, sección 3.11]).

Definición 1.3.15. *Un grupo topológico G se llama fuertemente Dieudonné completo si y sólo si existe un isomorfismo topológico de G sobre un subgrupo cerrado de un producto de grupos metrizables.*

Por la definición queda claro que si G es fuertemente Dieudonné completo, entonces es Dieudonné completo.

Por los teoremas de Guran y Katz de isomorfismos continuos (ver [1], teoremas 3.4.22 y 3.4.23), si G es fuertemente realcompacto (fuertemente Dieudonné completo), entonces G es ω-estrecho (ω-balanceado).

En [30] se demuestra que un grupo G ω-estrecho (ω-balanceado) es fuertemente realcompacto (fuertemente Dieudonné completo) si y sólo si es G_δ-cerrado en su completación de Raĭkov. En dicho artículo también se demuestra el siguiente teorema:

Teorema 1.3.16. *Sea G un grupo topológico y N un subgrupo compacto invariante de G. Entonces G es fuertemente realcompacto (fuertemente Dieudonné completo) si y sólo si G/N es fuertemente realcompacto (fuertemente Dieudonné completo).*

En el capítulo 3 este resultado se generaliza para el caso cuando N es Čech-completo. Además se estudia la P-modificación de estas clases de grupos topológicos y se concluye con un análisis de la relación existente entre las P-modificaciones y los cocientes de grupos topológicos.

1.4. Notación

Como es usual, se utiliza $\mathbb{I}$ para denotar el intervalo $[0,1]$, $\mathbb{T}$ para el círculo unitario, $\mathbb{N}$ para el conjunto de enteros positivos, $\mathbb{Z}$ para el anillo de enteros, $\mathbb{Q}$ para el campo de los números racionales, y $\mathbb{R}$ el campo de los números reales.

Sea X un espacio topológico. Se denota por $w(X)$, $nw(X)$, $\chi(X)$, $\psi(X)$, y $d(X)$ al peso, peso de red, carácter, pseudocarácter y densidad de X respectivamente.

Se dice que Z subconjunto de X es un *conjunto cero* si existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $Z = f^{-1}(0)$.

Sea $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de funciones, donde $f_\alpha : X \to Y_\alpha$ para cada $\alpha \in A$. Se usa $\triangle\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ para denotar el producto diagonal de la familia $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$.

Suponga que $\eta = \{G_\alpha : \alpha \in A\}$ es una familia de grupos topológicos y $\Pi\eta = \prod_{\alpha\in A} G_\alpha$ es el producto topológico de la familia η.

El Σ-producto de η, denotado por $\Sigma\Pi\eta$, es el subgrupo de $\Pi\eta$ que consiste de todos los puntos $g \in \Pi\eta$ tales que $|\{\alpha \in A : \pi_\alpha(g) \neq e_\alpha\}| \leq \omega$ y el σ-producto de η, denotado por $\sigma\Pi\eta$ es el subgrupo de $\Pi\eta$ que consiste en todos los puntos $g \in \Pi\eta$ tales que $|\{\alpha \in A : \pi_\alpha(g) \neq e_\alpha\}| < \omega$, donde $\pi_\alpha : \Pi\eta \to G_\alpha$ es la proyección natural de $\Pi\eta$ sobre G_α y $e_\alpha \in G_\alpha$ es el elemento neutral de G_α, para toda $\alpha \in A$. Es fácil notar que, tanto $\Sigma\Pi\eta$ cómo $\sigma\Pi\eta$ son subgrupos densos de $\Pi\eta$.

Sea X es un espacio de Tychonoff y G un grupo topológico, βX y ϱG denotan la compactificación de Čech-Stone de X (ver [9, sección 3.6]) y la completación de Raĭkov de G (ver [1, sección 3.6]) respectivamente.

Las siguientes definiciones son de la teoría de grupos (ver [11, sección 1.1]).

Sea G un grupo, e el elemento neutral de G y $g \in G$ un elemento de G distinto de e. Se denota por $\langle g\rangle$ el *subgrupo cíclico de G generado por g*. El orden de g es $o(g) = |\langle g\rangle|$. Si $o(g) = \infty$, entonces se dice que g tiene orden infinito y se tiene que $\langle g\rangle$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$. El conjunto $tor(G)$ formado por los elementos de $g \in G$ con $o(g) < \infty$ es llamado *la parte de torsión de G*. Si G es Abeliano, entonces $tor(G)$ es un subgrupo de G.

Se dice que el grupo G es:

- *libre de torsión* si para todo elemento $g \in G \setminus \{e\}$, $o(g) = \infty$;
- *de torsión* si para todo elemento $g \in G$, $o(g) < \infty$;
- *de torsión acotada* si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g^n = e$ para cada $g \in G$;
- *de torsión no acotada* si G es de torsión y para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $g \in G$ tal que $o(g) > n$;
- *divisible* si para todo $g \in G$ y $n \in \mathbb{N}$, existe $h \in G$ tal que $h^n = g$;
- *un p-grupo*, para un número primo p, si el orden de cualquier elemento de G es una potencia de p.

Si G es un grupo Abeliano de torsión, entonces G es la suma directa de p-grupos G_p (ver [11, Teorema 8.4]). Los subgrupos G_p son llamados las *p-componentes* de G.

Sea p un número primo. El conjunto de las p^n-ésimas raíces complejas de la unidad, con $n \in \mathbb{N}$ forman el subgrupo multiplicativo $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ de $\mathbb{T}$. Para todo primo p, el grupo $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es divisible.

Sea G un grupo topológico con elemento identidad e. Denotaremos por $\mathcal{N}_G(e)$ la familia de conjuntos abiertos U en G con $e \in U$. Usaremos ϱG para denotar la completación de Raĭkov de G. La unión de una familia de conjuntos G_δ en G se llama G_δ-*abierto*. Un conjunto G_δ-*cerrado* es el complemento de un conjunto G_δ-abierto. Denotamos por $cl_\delta(A)$ la G_δ-*cerradura* del subconjunto A de X, es decir, el conjunto de todas las $x \in X$ tal que para todo conjunto G_δ-abierto en X que continene a x intersecta a A. Decimos que el subconjunto A del espacio X es G_δ-*denso* en X si $cl_\delta(A) = X$. La G_δ-cerradura de un grupo topológico G en ϱG se denota por $\varrho_\omega G$. Claramente $\varrho_\omega G$ es un subgrupo de ϱG.

Sea (X, τ) un espacio topológico. La topología sobre X generada por los subconjuntos G_δ de (X, τ) se denota por τ_ω. El espacio $X_\omega = (X, \tau_\omega)$ es conocido como la P-*modificación* de X.

Capítulo 2

Subtopologías Separables

2.1. Subtopologías Separables en Espacios

Como ya hemos mencionado en la sección 1.2, decimos que el espacio topológico X tiene una subtopología con la propiedad topológica $\mathcal{P}$ si existe una función biyectiva y continua f de X a un espacio topológico Y con dicha propiedad. Nosotros estudiamos espacios con subtopologías separables.

No todo espacio tiene una subtopología separable. Por ejemplo, un espacio compacto y de Hausdorff X tiene una subtopología separable y de Hausdorff si y sólo si X es separable. Extendamos este hecho a una clase más grande de espacios.

Decimos que un espacio de Hausdorff X es *ω-acotado* si la cerradura de cualquier subconjunto numerable de X es compacta.

Proposición 2.1.1. *Sea X un espacio ω-acotado no separable. Entonces X no admite una condensación sobre un espacio de Hausdorff separable.*

Demostración. Por la suposición se tiene que para todo subconjunto numerable S de X, $X \setminus \bar{S} \neq \emptyset$. Sea $f : X \to Y$ una condensación sobre un espacio Hausdorff Y y D un subconjunto numerable de Y. Entonces $S = f^{-1}(D)$ es un subconjunto numerable de X, y $\bar{S}$ es compacto. Sea $x \in X \setminus \bar{S}$.

Observemos que $f(\bar{S})$ es compacto, $D \subset f(\bar{S})$ y que $f(x) \notin f(\bar{S})$, por lo tanto D no puede ser denso en Y. □

El siguiente teorema presenta un conjunto mínimo de condiciones suficientes para que un espacio de Tychonoff X admita una condensación sobre un espacio separable denso en $\mathbb{I}^{\mathfrak{c}}$, donde $\mathfrak{c} = 2^{\omega}$.

Teorema 2.1.2. *Sea X un espacio de Tychonoff con $nw(X) \leq 2^{\omega}$. Supongamos que X contiene un subespacio infinito, cerrado, discreto, y C^*-encajado A. Entonces X puede ser condensado sobre un espacio separable denso en $\mathbb{I}^{\mathfrak{c}}$.*

Demostración. Sin perder generalidad podemos asumir que $|A| = \omega$. Por el teorema de Hewitt-Marczewski-Pondiczery sabemos que $d(\mathbb{I}^{\mathfrak{c}}) = \omega$. Sea $D = \{d_n : n \in \omega\}$ un subconjunto numerable denso en $\mathbb{I}^{\mathfrak{c}}$, $\mathcal{N}$ una red de X, tal que $|\mathcal{N}| \leq 2^{\omega}$, y $A = \{x_n : n \in \omega\}$ una enumeración of A. Sea $g : A \to D$ una bijección, donde $g(x_n) = d_n$ para cada $n \in \omega$. Para cada $\alpha < \mathfrak{c}$, sea $f_\alpha = p_\alpha \circ g$, donde $p_\alpha : \mathbb{I}^{\mathfrak{c}} \to \mathbb{I}_{(\alpha)}$ denota la proyección natural de $\mathbb{I}^{\mathfrak{c}}$ sobre la α-ésima coordenada.

Construiremos una familia de funciones continuas $\{g_\alpha : X \to \mathbb{I}\}_{\alpha<\mathfrak{c}}$ tales que g_α extienda a f_α para cada $\alpha < \mathfrak{c}$ de tal manera que, dados dos puntos diferentes cualesquiera $x, y \in X$, exista $\alpha < \mathfrak{c}$ tal que $g_\alpha(x) \neq g_\alpha(y)$.

Si $n, m \in \omega$ son distintos, entonces existe $\alpha < \mathfrak{c}$ tal que $f_\alpha(x_n) = p_\alpha(d_n) \neq p_\alpha(d_m) = f_\alpha(x_m)$. Por lo tanto, cualquier familia de extensiones de f_α separa los puntos de A. Por eso sólo es necesario considerar dos casos, cuando uno de los puntos está en A y el otro no, y cuando ninguno de los dos puntos está en A.

Como A es cerrado, y X de Tychonoff, para cada $y \in X \setminus A$, existe $V_y \in \mathcal{N}$ tal que $y \in V_y$ y A y $\overline{V_y}$ pueden ser separados por *conjuntos ceros*. Sea $G_1 = \{V_y : y \in X \setminus A\}$. Por ser $G_1 \subset \mathcal{N}$, tenemos que $|G_1| \leq \mathfrak{c}$.

Para cada $V \in G_1$, elegimos dos conjuntos ceros Z_V y Z'_V en X ajenos tales que $V \subset Z_V$ y $A \subset Z'_V$ y sean $\mathcal{Z} = \{(Z_V, Z'_V) : V \in G_1\}$ y $\mathcal{C}_1 = A \times \mathcal{Z}$. Es claro que $|\mathcal{C}_1| \leq \mathfrak{c}$.

Sea $F = \{(x, y) : x, y \in X \setminus A, x \neq y\}$. Para cada pareja $(x, y) \in F$, podemos encontrar subconjuntos $U = U_{(x,y)} \in \mathcal{N}, V = V_{(x,y)} \in \mathcal{N}$ con $x \in U$ y $y \in V$ tales que existen conjuntos ceros disjuntos dos a dos $Z_{(U,V)}$, Z_U, Z_V con $A \subset Z_{(U,V)}$, $U \subset Z_U$ y $V \subset Z_V$. Sea $G_2 = \{(U_{(x,y)}, V_{(x,y)}) : (x, y) \in F\}$. Es claro que $G_2 \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$, por lo tanto $|G_2| \leq \mathfrak{c}$.

Para cada $(U, V) \in G_2$, elegimos conjuntos ceros disjuntos dos a dos $Z_{(U,V)}$, Z_U, Z_V tales que $A \subset Z_{(U,V)}$, $U \subset Z_U$ y $V \subset Z_V$ y definimos $\mathcal{C}_2 =$

$\{(Z_{(U,V)}, Z_U, Z_V) : (U,V) \in G_2\}$. Tenemos entonces que $|\mathcal{C}_2| \leq \mathfrak{c}$.

Sea $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$. Es claro que $|\mathcal{C}| \leq \mathfrak{c}$. Sea $\mathcal{C} = \{C_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ una enumeración de $\mathcal{C}$.

Caso 1: $C_\alpha \in \mathcal{C}_1$. Entonces C_α tiene la forma (x_n, Z_V, Z'_V), para algún $n \in \mathbb{N}$ y $V \in G_1$. Como Z_V y Z'_V son conjuntos ceros disjuntos, entonces existe una función continua $r_\alpha : X \to \mathbb{I}$ tal que $Z_V = r_\alpha^{-1}(0)$ y $Z'_V = r_\alpha^{-1}(1)$. Por la definición de Z'_V tenemos que $A \subset Z'_V$. Como A es C^*-encajado en X, existe una función continua $\tilde{f}_\alpha : X \to \mathbb{I}$ que extiende a f_α. Tenemos entonces dos subcasos, $f_\alpha(x_n) \neq 0$ o $f_\alpha(x_n) = 0$.

Si $f_\alpha(x_n) \neq 0$, definimos $g_\alpha : X \to \mathbb{I}$ como $g_\alpha = \tilde{f}_\alpha \cdot r_\alpha$. Entonces $g_\alpha(Z_V) \subset \{0\}$ y para cada $x \in A$, $g_\alpha(x) = \tilde{f}_\alpha(x) \cdot r_\alpha(x) = f_\alpha(x)$, por lo tanto g_α es una extensión de f_α. En particular, $g_\alpha(x_n) = f_\alpha(x_n) \notin g_\alpha(Z_V)$.

Si $f_\alpha(x_n) = 0$, entonces definimos $g_\alpha : X \to \mathbb{I}$ como $g_\alpha = 1 - r_\alpha + \tilde{f}_\alpha \cdot r_\alpha$. Como $A \subset Z'_V$, entonces para cualquier $x \in A$ tenemos que $r_\alpha(x) = 1$, por lo tanto $g_\alpha(x) = 1 - r_\alpha(x) + \tilde{f}_\alpha(x) \cdot r_\alpha(x) = \tilde{f}_\alpha(x) = f_\alpha(x)$, lo que demuestra que g_α es una extensión continua de f_α. Si $y \in Z_V$, entonces $g_\alpha(y) = 1$, lo que implica que $g_\alpha(Z_V) \subset \{1\}$.

En ambos subcasos hemos extendido f_α a una función continua g_α tal que $g_\alpha(x_n) \notin g_\alpha(Z_V)$.

Caso 2: $C_\alpha \in \mathcal{C}_2$. Entonces C_α tiene la forma $(Z_{(U,V)}, Z_U, Z_V)$ para alguna $(U,V) \in G_2$, donde $Z_{(U,V)}$, Z_U, y Z_V son conjuntos ceros disjuntos dos a dos y $A \subset Z_{(U,V)}$. Como en Caso 1, existe una función continua $\tilde{f}_\alpha : X \to \mathbb{I}$ que extiende a f_α tal que $\tilde{f}_\alpha(Z_U) \subset \{1\}$. Como $Z = Z_{(U,V)} \cup Z_U$ es un conjunto cero disjunto de Z_V, existe una función continuo $r_\alpha : X \to \mathbb{I}$ tal que $Z_V = r_\alpha^{-1}\{0\}$ y $Z = r_\alpha^{-1}\{1\}$. Sea $g_\alpha = \tilde{f}_\alpha \cdot r_\alpha$. Para cada $x \in A$, $g_\alpha(x) = \tilde{f}_\alpha(x) \cdot r_\alpha(x) = f_\alpha(x)$. Si $x \in Z_U$, entonces $g_\alpha(x) = \tilde{f}_\alpha(x) \cdot r_\alpha(x) = 1$. Si $x \in Z_V$, entonces $g_\alpha(x) = \tilde{f}_\alpha(x) \cdot r_\alpha(x) = 0$. Por lo tanto, $g_\alpha(Z_U) \cap g_\alpha(Z_V) = \emptyset$.

Así hemos construido una familia $\{g_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ de funciones continuas. Dados dos elementos diferentes $x, y \in X$, tenemos tres posibilidades: $x, y \in A$, o $x \in A$ y $y \notin A$, o $x, y \in X \setminus A$. Las funciones g_α son extensiones de las funciones f_α y por lo tanto separan los elementos de A. Si $x \in A$ y $y \notin A$, entonces estamos en Caso 1 y existe $\alpha < \mathfrak{c}$ tal que $C_\alpha = (x_n, Z_V, Z'_V)$ con $x = x_n$ y $y \in Z_V$. Como $g_\alpha(x_n) \notin g_\alpha(Z_V)$, tenemos que $g_\alpha(x) \neq g_\alpha(y)$. Si ambos puntos x, y están en $X \setminus A$, entonces estamos en Caso 2 y por lo tanto existe $\alpha < \mathfrak{c}$ tal que $C_\alpha = (Z_{(U,V)}, Z_U, Z_V)$ con $x \in Z_U$ y $y \in Z_V$. Como $g_\alpha(Z_U) \cap g_\alpha(Z_V) = \emptyset$ tenemos que $g_\alpha(x) \neq g_\alpha(y)$. En conclusión, la familia $\{g_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ separa los elementos de X.

Sea $\tilde{g} : X \to \mathbb{I}^{\mathfrak{c}}$, $\tilde{g} = \Delta\{g_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ y $Y = \tilde{g}(X)$. Puesto que la familia de g_α separan los elementos de X, $\tilde{g}$ es una función injectiva y continua. Además, por cada $n \in \omega$ y toda $\alpha < \mathfrak{c}$, $\tilde{g}(x_n)(\alpha) = g_\alpha(x_n) = f_\alpha(x_n)$, entonces $D \subset \tilde{g}(X)$. Por lo tanto, Y es un subespacio separable, denso en $\mathbb{I}^{\mathfrak{c}}$. □

Ya que $Y = \tilde{g}(X)$ en el teorema 2.1.2 es un subespacio denso de $\mathbb{I}^{\mathfrak{c}}$, entonces Y es *κ-metrizable* y *perfectamente κ-normal* (ver [3], [17]). En particular, cada subconjunto regular cerrado de Y es un conjunto cero.

Los siguientes ejemplos muestran que no podemos omitir ninguna de las condiciones que se piden en el teorema 2.1.2

Ejemplo 2.1.3. *Con $X = \beta\mathbb{N}$ y $A = \mathbb{N}$ tenemos un ejemplo que muestra que no puede omitirse la condición sobre A de ser cerrado en teorema 2.1.2*

Ejemplo 2.1.4. *Existen espacios de Tychonoff X con $nw(X) \leq 2^\omega$ con subespacios infinitos, cerrados y C^*-encajados A tales que X no puede ser condensado sobre un espacio separable.*

Demostración. Sea X un espacio de Hausdorff compacto no separable con $w(X) \leq 2^\omega$, por ejemplo el doble círculo de Alexandroff [9, ejemplo 3.1.26]. Sea A cualquier subconjunto de X cerrado e infinito. Por el Lema de Urysohn, A es C^*-encajado, pero no existe ninguna condensación de X sobre un espacio separable. □

Ejemplo 2.1.5. *Existe un espacio de Tychonoff X con $nw(X) \leq 2^\omega$ con un subespacio infinito, discreto y cerrado A tal que X no puede ser condensado sobre un espacio separable.*

Demostración. Sea $X = (W \times W_0) \setminus \{(\omega_1, \omega)\}$, donde $W = \{\alpha : \alpha \leq \omega_1\}$ y $W_0 = \{\alpha : \alpha \leq \omega\}$ tienen la topología del orden. Este espacio, conocido como *la plancha de Tychonoff*, es un espacio de Tychonoff que tiene la propiedad de que la cerradura de cualquier subconjunto numerable A es también numerable y si $A \subset (W \setminus \{\omega_1\}) \times W_0$, entonces $\bar{A}$ es compacto. No es difícil ver que cada función continua de valores reales de X puede ser extendida sobre $W \times W_0$, y por lo tanto, $\beta X = W \times W_0$. Sea $A = \{\omega_1\} \times (W_0 \setminus \{\omega\})$. Claramente

A es un subconjunto infinito, cerrado, discreto de X. Suponga que tenemos una condensación $f : X \to Y$ sobre un espacio de Tychonoff Y. Sea $D \subset Y$ un subconjunto numerable de Y y $S = f^{-1}(D)$. Como f es una bijección tenemos que S es numerable. La cerradura $\bar{S}$ de S en βX es un subespacio compacto numerable de βX, luego entonces $X \setminus \bar{S} \neq \emptyset$. Tomemos un elemento $x \in X \setminus \bar{S}$. Sea $F : \beta X \to \beta Y$ una extensión continua de la función f. Observe que $F(\bar{S})$ es numerable y compacto (por lo tanto cerrado en Y), $F(x) \notin F(\bar{S})$, y $F(\bar{S})$ contiene a D. Por lo tanto, D no puede ser denso en Y. Este ejemplo demuestra que la condición "A es C^*-encajado en X" no puede ser removida del teorema 2.1.2. $\square$

2.2. Isomorfismos Continuos

Decimos que un grupo topológico G es ω-estrecho si puede ser cubierto por una cantidad numerable de translaciones de cualquiera de las vecindades abiertas de la identidad de G.

Los siguientes resultados de muestran que las condiciones sobre X en el teorema 2.1.2 no son suficientes para asegurar la existencia de un isomorfismo continuo de X sobre un grupo separable en el caso de que X es un grupo topológico.

Teorema 2.2.1. *Sea κ un cardinal infinito con $\kappa \leq 2^\omega$, $\mathbb{T}$ el grupo del círculo, y G un subgrupo de $\Sigma\mathbb{T}^\kappa$. Entonces existe un isomorfismo continuo $\varphi : G \to H$ sobre un grupo separable H si y sólo si $\psi(G) \leq \omega$.*

Demostración. Sea $\varphi : G \to H$ un isomorfismo sobre un grupo separable H y $D \subset H$ un subconjunto denso numerable. Entonces existe un homomorfismo continuo $\overline{\varphi} : \varrho G \to \varrho H$ que extiende φ. Note que la completación de Raĭkov de G es la cerradura de G en $\mathbb{T}^\kappa$, $H \subset \overline{\varphi}(\varrho G) \subset \varrho H$, y $\overline{\varphi}(\varrho G)$ es un grupo compacto que contiene a H como un subgrupo denso. Por lo tanto, $\overline{\varphi}(\varrho G) = \varrho H$.

Claramente $\varphi^{-1}(D) \subset G \subset \Sigma(\mathbb{T}^\kappa)$ y $|\varphi^{-1}(D)| = \omega$, por lo tanto $B = \overline{\varphi^{-1}(D)}$ (la cerradura en $\mathbb{T}^\kappa$) es un subespacio compacto metrizable de $\Sigma\mathbb{T}^\kappa$ (ver [1, proposiciones 1.6.29 y 1.6.30]). Por tanto $\overline{\varphi}(B)$ es compacto y contiene a D como un subespacio denso, lo que implica que $\overline{\varphi}(B) = \varrho H$. También ϱH es compacto y tiene una red numerable numerable por ser imagen continua de B , entonces $w(\varrho H)$ y $w(H)$ son menores o iguales que ω. Se sigue que $\varphi : G \to H$ es un isomorfismo continuo de G sobre un espacio metrizable, y por lo tanto $\psi(G) \leq \omega$.

Verifiquemos ahora la otra implicación. Observe que el elemento identidad e de G es un conjunto G_δ, porque $\psi(G) \leq \omega$. Como G es un subgrupo de un grupo compacto, entonces es ω-estrecho. Por el corolario 3.4.25 de [1], existe un isomorfismo continuo de G sobre un grupo segundo numerable, y por lo tanto separable. □

El siguiente corolario se sigue del teorema 2.2.1.

Corolario 2.2.2. *Sea $G = \sigma(\mathbb{T}^\kappa)$ el σ-producto de κ copias del grupo del círculo, con κ cardinal infinito. Si existe un isomorfismo continuo $\varphi : G \to H$ sobre un grupo separable H, entonces $\kappa = \omega$.*

Demostración. Sólo hay que verificar que $\psi(\sigma(\mathbb{T}^\kappa)) = \kappa$, luego entonces la conclusión se sigue del teorema 2.2.1. □

Ejemplo 2.2.3. *Existe un grupo topológico con una subtopología separable pero no con subtopología de grupo separable.*

Demostración. El grupo $G = \sigma(\mathbb{T}^\kappa)$ contiene subespacios infinitos, cerrados, discretos, C^*-encajados. Por el teorema 2.1.2, si $\kappa \leq 2^\omega$ podemos encontrar una condensación de G sobre un espacio separable Tychonoff, pero si $\kappa > \omega$, entonces no existe isomorfismo continuo de G sobre ningún grupo topológico separable. □

El teorema 2.2.1 puede ser generalizado si remplazamos $\mathbb{T}^\kappa$ por el producto de cualquier familia de grupos Abelianos compactos y metrizables:

Teorema 2.2.4. *Sea $\eta = \{G_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ una familia de grupos Abelianos compactos y metrizables con $\kappa \leq 2^\omega$, y G un subgrupo de $\Sigma = \Sigma\Pi\eta$. Entonces existe un isomorfismo continuo $\varphi : G \to H$ de G sobre un grupo topológico separable H si y sólo si $\psi(G) \leq \omega$.*

Arhangel'skii demostró en [4, Corolario 12] que todo homomorfismo continuo de un grupo numerablemente compacto sobre un grupo compacto de cardinalidad Ulam no medible es abierto. En particular, si existe un isomorfismo continuo de un grupo numerablemente compacto G sobre un grupo compacto de cardinalidad Ulam no-medible, entonces G es compacto.

El siguiente ejemplo demuestra que no se puede extender este resultado a espacios topológicos arbitrarios:

Ejemplo 2.2.5. *Existe un espacio de Tychonoff X numerablemente compacto no separable que admite una condensación sobre un espacio compacto separable de cardinalidad $2^{\mathfrak{c}}$, y por lo tanto, X es de cardinalidad Ulam no medible.*

Demostración. Sea $Y = \beta\mathbb{N}$ la Čech-Stone compactificación de los números naturales y $Z = Y \setminus \mathbb{N}$. Por [9, ejemplo 3.6.18], Z contiene una familia $\mathcal{A}$ de cardinalidad $\mathfrak{c}$ que consiste de conjuntos abiertos no vacíos ajenos dos a dos. Sea $\pi_1 : Y \times Z \to Y$ y $\pi_2 : Y \times Z \to Z$ las proyecciones naturales de la primera y la segunda coordenada respectivamente. Como Y es compacto, π_2 es una función cerrada. Por [9, Teorema 3.5.8], Z es un espacio compacto porque es el residuo de un espacio localmente compacto y por lo tanto, π_1 es una función cerrada también.

Por [9, Teorema 3.6.14], todo subconjunto cerrado infinito S de Y y Z tiene cardinalidad igual a $2^{\mathfrak{c}}$. Sea M un subconjunto infinito de $Y \times Z$. Es claro que al menos uno de los conjuntos, $\pi_1(M)$ o $\pi_2(M)$, es infinito. Suponga que $\pi_1(M)$ es infinito. Como la proyección π_1 es cerrada, $\pi_1(\overline{M})$ es un subconjunto cerrado de Y, y por lo tanto, $\pi_1(\overline{M})$ y $\overline{M}$ tienen cardinalidad igual a $2^{\mathfrak{c}}$.

Nuestro objetivo es construir un espacio numerablemente compacto no separable X contenido en $Y \times Z$ tal que $\pi_1(X) = Y$, $\pi_1|_X$ es un función inyectiva, y $\pi_2(X) \cap A \neq \emptyset$ para toda $A \in \mathcal{A}$.

Llamemos como $[Y]^\omega$ a la familia de subconjuntos de Y con cardinalidad ω. Sea $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ una numeración fiel de $\mathcal{A}$ y elijamos $z_\alpha \in A_\alpha$ para cada $\alpha < \mathfrak{c}$. Sean $Y = \{y_\beta : \beta < 2^{\mathfrak{c}}\}$ y $[Y]^\omega = \{F_\gamma : \mathfrak{c} \leq \gamma < 2^{\mathfrak{c}}\}$ numeraciones fieles de Y y $[Y]^\omega$ respectivamente tales que $F_{\mathfrak{c}} \subset \{y_\beta : \beta < \mathfrak{c}\}$.

Definimos entonces una secuencia $\{X_\gamma : \mathfrak{c} \leq \gamma < 2^{\mathfrak{c}}\}$ de subconjuntos de $Y \times Z$ que satisfacen las siguientes condiciones para cada γ con $\mathfrak{c} \leq \gamma < 2^{\mathfrak{c}}$:

(i_γ) $X_\beta \subset X_\gamma$ si $\mathfrak{c} \leq \beta < \gamma$;

(ii_γ) la restricción de π_1 a X_γ es una función inyectiva;

(iii$_\gamma$) $F_\gamma \subset \pi_1(X_\gamma)$;

(iv$_\gamma$) $\pi_1^{-1}(F_\gamma) \cap X_\gamma$ tiene un punto de acumulación en X_γ;

(v$_\gamma$) $|X_\gamma| \leq |\gamma|$.

Para cada $\alpha < \mathfrak{c}$ llamamos $\overline{x}_\alpha = (y_\alpha, z_\alpha)$ y sea $X'_\mathfrak{c} = \{\overline{x}_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$. Por la numeración de $[Y]^\omega$, $F_\mathfrak{c} \subset \pi_1(X'_\mathfrak{c})$. Sea $B_\mathfrak{c} = \pi_1^{-1}(F_\mathfrak{c}) \cap X'_\mathfrak{c}$. Como π_1 es cerrado y $F_\mathfrak{c} \subset \pi_1(B_\mathfrak{c})$, la cardinalidad de $\pi_1(\overline{B_\mathfrak{c}})$ es igual a $2^\mathfrak{c}$, por lo tanto podemos elegir $x_\mathfrak{c} \in \overline{B_\mathfrak{c}}$ tal que $\pi_1(x_\mathfrak{c}) \notin \pi_1(X'_\mathfrak{c})$.

Sea $X_\mathfrak{c} = X'_\mathfrak{c} \cup \{x_\mathfrak{c}\}$. Las condiciones (ii$_\mathfrak{c}$), (iii$_\mathfrak{c}$), (iv$_\mathfrak{c}$), y (v$_\mathfrak{c}$) se satisfacen claramente, condición (i$_\mathfrak{c}$) se cumple por vacuidad.

Suponga que para algún γ con $\mathfrak{c} \leq \gamma < 2^\mathfrak{c}$, X_ξ esta definido para todo ξ, $\mathfrak{c} \leq \xi < \gamma$. Sea $\tilde{X}_\gamma = \bigcup_{\mathfrak{c} \leq \xi < \gamma} X_\xi$. Tenemos dos posibilidades. Si $F_\gamma \subset \pi_1(\tilde{X}_\gamma)$, entonces $X'_\gamma = \tilde{X}_\gamma$. Si $F_\gamma \setminus \pi_1(\tilde{X}_\gamma) \neq \emptyset$, entonces elegimos un punto arbitrario $x_y \in \pi_1^{-1}(y)$ para cada $y \in F_\gamma \setminus \pi_1(\tilde{X}_\gamma)$ y $X'_\gamma = \tilde{X}_\gamma \cup \{x_y : y \in F_\gamma \setminus \pi_1(\tilde{X}_\gamma)\}$. En ambos casos, $F_\gamma \subset \pi_1(X'_\gamma)$.

Como las condiciones (i$_\xi$) y (v$_\xi$) se satisfacen para cada ξ con $\mathfrak{c} \leq \xi < \gamma$, $|X'_\gamma| \leq |\gamma| < 2^\mathfrak{c}$.

Sea $B_\gamma = \pi_1^{-1}(F_\gamma) \cap X'_\gamma$. Como π_1 es una función cerrada, $|\pi_1(\overline{B_\gamma})| = 2^\mathfrak{c}$, y por lo tanto existe $x_\gamma \in B_\gamma$ tal que $\pi_1(x_\gamma) \notin \pi_1(X'_\gamma)$.

Sea $X_\gamma = X'_\gamma \cup \{x_\gamma\}$. Claramente se satisface la condición (i$_\gamma$).

Puesto que las condiciones (i$_\xi$) y (ii$_\xi$) se cumplen para cada ξ entre $\mathfrak{c}$ y γ, $\pi_1|_{\tilde{X}_\gamma}$ es una función uno-a-uno. Por nuestra definición de X'_γ, $\pi_1|_{X'_\gamma}$ es una función uno-a-uno también. Finalmente, por nuestra elección de x_γ, $\pi_1(x_\gamma) \notin \pi_1(X'_\gamma)$, se sigue que $\pi_1|_{X_\gamma}$ es uno-a-uno, por (ii$_\gamma$).

Como $F_\gamma \subset \pi_1(X'_\gamma)$ y $x_\gamma \in X_\gamma$, entonces se satisfacen (iii$_\gamma$) y (iv$_\gamma$).

Ya que se cumplen (v$_\xi$) y (i$_\xi$) para cada ξ con $\mathfrak{c} \leq \xi < \gamma$, se tiene que $|\tilde{X}_\gamma| \leq |\gamma|$. Como $|X_\gamma \setminus \tilde{X}_\gamma| \leq \omega$, podemos concluir que $|X_\gamma| \leq |\gamma|$

Sea $X = \bigcup_{\mathfrak{c} \leq \gamma < 2^\mathfrak{c}} X_\gamma$ y sea $f : X \to Y$ la restricción de π_1 a X. Como se cumplen las condiciones (i$_\gamma$) y (ii$_\gamma$) para toda γ con $\mathfrak{c} \leq \gamma < 2^\mathfrak{c}$, f es una función continua uno-a-uno. Sea $y \in Y$ un elemento arbitrario de Y y $F \in [Y]^\omega$ un subconjunto de Y con $y \in F$. Entonces existe γ, $\mathfrak{c} \leq \gamma < 2^\mathfrak{c}$ tal que $F = F_\gamma$. Por (iii$_\gamma$),

$$y \in F = F_\gamma \subset \pi_1(X_\gamma) \subset \pi_1(X) = f(X),$$

de aquí se sigue que $f(X) = Y$, y por lo tanto f es una condensación de X sobre Y.

Sea B un subconjunto infinito numerable arbitrario de X. Entonces $F = f(B)$ es un conjunto infinito numerable contenido en Y y existe $\gamma < 2^{\mathfrak{c}}$ tal que $F = F_\gamma$. Por (iv$_\gamma$), $B = f^{-1}(F) = \pi_1^{-1}(F_\gamma) \cap X_\gamma$ tiene un punto de acumulación en X_γ y, por lo tanto en X. Esto significa que X es numerablemente compacto.

Como $A \cap \pi_2(X) \supset A \cap \pi_2(X_{\mathfrak{c}}) \neq \emptyset$ para toda $A \in \mathcal{A}$, X no puede ser separable. □

2.3. Topologías separables sobre grupos Abelianos

En esta sección probaremos que todo grupo Abeliano G con $|G| \leq 2^{\mathfrak{c}}$ admite una topología de grupo separable, precompacta y de Hausdorff. Para hacer esto, dividimos el trabajo en tres partes:

Caso 1 Existe $x \in G$ con $o(x) = \infty$.

Caso 2 G is un grupo de torsión acotada.

Caso 3 G is un grupo de torsión no acotada.

Empecemos con el caso cuando G no es un grupo de torsión. Para ello daremos la siguiente definición.

Decimos que un grupo topológico es *monotético* si tiene un subgrupo ciclico denso. El sigueinte resultado esta probado en [16, Corolario 25.15]:

Lema 2.3.1. *El grupo $\mathbb{T}^\kappa$ es monotético si y sólo si $\kappa \leq \mathfrak{c}$.*

Teorema 2.3.2. *Sea G un grupo Abeliano tal que $|G| \leq 2^{\mathfrak{c}}$. Supongamos que existe un elemento $x \in G$ de orden infinito. Entonces existe una topología de grupo separable, precompacta y de Hausdorff sobre G.*

Demostración. La idea principal de la prueba es definir un monomorfismo $\overline{\varphi}: G \to \mathbb{T}^{\mathfrak{c}}$ tal que $\overline{\varphi}(G)$ sea separable. Haremos esto primero para el caso cuando G es divisible.

Sea H el subgrupo minimal divisible de G que contiene a $x \in H$. Como $o(x)$ es infinito, H es isomorfo a $\mathbb{Q}$. Por el lema 2.3.1, existe $a \in \mathbb{T}^{\mathfrak{c}}$ tal que $\overline{\langle a \rangle} = \mathbb{T}^{\mathfrak{c}}$. Sea $\varphi : H \to \mathbb{T}^{\mathfrak{c}}$ un monomorfismo tal que $\varphi(x) = a$. Para toda $\beta < \mathfrak{c}$, sea $\varphi_\beta = p_\beta \circ \varphi$, donde $p_\beta = \mathbb{T}^{\mathfrak{c}} \to \mathbb{T}_{(\beta)}$ es la proyección de $\mathbb{T}^{\mathfrak{c}}$ a la coordenada β.

Sea $\kappa = |G| > \omega$. Cómo G es divisible, G es isomorfo a la suma directa $H \oplus \bigoplus_{\alpha \in A} G_\alpha$, donde cada G_α es un subgrupo de G isomorfo a $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ para algún número primo p, y A es un conjunto de índices de cardinalidad κ (ver [11, Teorema 23.1]).

Para cada $\alpha \in A$, sea $\varrho_\alpha : G_\alpha \to F$ el isomorfismo de G_α sobre F, donde F es $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, con p número primo.

Consideremos a A como un subespacio del espacio $2^{\mathfrak{c}}$ con la topología del producto. Sea $\mathcal{B}$ la base canónica de $2^{\mathfrak{c}}$. Sabemos que $|\mathcal{B}| = \mathfrak{c}$.

Para cada $g \in G$, sea $h_g \in H$ y $k \in \bigoplus_{\alpha \in A} G_\alpha$ tal que $g = h_g + k$. Si $g \in G \setminus H$, entonces $k \neq e$ y existe un subconjunto finito no vacío $c(g) \subset A$ tal que $k \in \bigoplus_{\alpha \in c(g)} G_\alpha$. Para cada $\alpha \in c(g)$, tomemos $k_\alpha \in G_\alpha$ con $k = \sum_{\alpha \in c(g)} k_\alpha$. Elijamos un $\alpha(g) \in c(g)$ arbitrario tal que $k_{\alpha(g)}$ no sea la identidad del grupo $G_{\alpha(g)}$. Sea $U_g \in \mathcal{B}$ un conjunto abierto que cumple que $U_g \cap c(g) = \{\alpha(g)\}$. Así, para cada $g \in G \setminus H$ hemos definido un par $(h_g, U_g) \in H \times \mathcal{B}$.

La cardinalidad del conjunto $P = \{(h_g, U_g) : g \in G \setminus H\}$ es menor o igual que $|H \times \mathcal{B}| = \omega \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$. Sea $P = \{P_\beta : \beta < \mathfrak{c}\}$ una numeración de P, donde P_β es un par (h_β, U_β) con $h_\beta \in H$ y $U_\beta \in \mathcal{B}$. para cada $\beta < \mathfrak{c}$, definimos un homomorfismo $\psi_\beta : \bigoplus_{\alpha \in A} G_\alpha \to \mathbb{T}$ cómo sigue:

Si $\varphi_\beta(h_\beta) = 1$, entonces se define ψ_β tal que $\psi_\beta|_{G_\alpha} = \varrho_\alpha$ si $\alpha \in U_\beta$, y $\psi_\beta|_{G_\alpha} = \mathbf{1}$, en otro caso. Si $\varphi_\beta(h_\beta) \neq 1$, entonces definimos $\psi_\beta \equiv \mathbf{1}$.

Sea $\overline{\varphi}_\beta$ el homomorfismo definido por $\overline{\varphi}_\beta = \varphi_\beta \oplus \psi_\beta$. Es claro que, para cada $\beta < \mathfrak{c}$, $\overline{\varphi}_\beta$ es una extensión de φ_β, por lo tanto $\overline{\varphi} = \Delta_{\beta < \mathfrak{c}} \overline{\varphi}_\beta$ es una extensión de φ y $\ker(\overline{\varphi}) \cap H = \ker(\varphi) = \{e\}$.

Elegimos $g \in G \setminus H$. Entonces $g = h_g + \sum_{\alpha \in c(g)} k_\alpha$, donde $k_\alpha \in G_\alpha$ para cada $\alpha \in c(g)$. Existe $\beta < \mathfrak{c}$ tal que $h_g = h_\beta$ y $U_g = U_\beta$, por lo tanto $\overline{\varphi}_\beta(g) = \varphi_\beta(h_\beta) \cdot \psi_\beta(\sum_{\alpha \in c(g)} k_\alpha) = \varphi_\beta(h_\beta) \cdot \prod_{\alpha \in c(g)} \psi_\beta(k_\alpha) = \varphi_\beta(h_\beta) \cdot \psi_\beta(k_{\alpha(g)})$.

Tenemos dos posibilidades:

Si $\varphi_\beta(h_\beta) = 1$, entonces $\psi_\beta(k_{\alpha(g)}) = \varrho_{\alpha(g)}(g(\alpha(g))) \neq 1$ y, por lo tanto, $\overline{\varphi}_\beta(g) \neq 1$. Si $\varphi_\beta(h_\beta) \neq 1$, entonces $\psi_\beta \equiv \mathbf{1}$. Se sigue que $\overline{\varphi}_\beta(g) = 1$.

Como $\overline{\varphi}$ es un monomorfismo de G al grupo $\mathbb{T}^{\mathfrak{c}}$, con $\overline{\varphi}(\langle x \rangle) = \langle a \rangle$, y $\langle a \rangle$ es un subconjunto denso de $\mathbb{T}^{\mathfrak{c}}$, se sigue que $\overline{\varphi}(G)$ es un grupo topológico de Hausdorff, precompacto y separable.

En general, cada grupo Abeliano infinito G puede ser considerado cómo un subgrupo de un grupo divisible $\tilde{G}$ con $|\tilde{G}| = |G|$ (ver [11, Teorema 24.1]). Como es sabido, existe un monomorfismo $\phi : \tilde{G} \to \mathbb{T}^{\mathfrak{c}}$ tal que $\phi(x) = a$, donde $x \in G$ es un elemento de orden infinito y $a \in \mathbb{T}^{\mathfrak{c}}$ con $\langle a \rangle$ denso en $\mathbb{T}^{\mathfrak{c}}$. Por lo tanto, $\phi(G)$ contiene a $\langle a \rangle$ como subconjunto denso. La restricción $\overline{\varphi} = \phi|_G : G \to \phi(G)$ es el isomorfismo que estamos buscando. □

El siguiente paso es considerar un grupo G de torsión acotada (Caso 2). En este caso usaremos los siguientes lemas.

Lema 2.3.3. *Sea p un número primo, $m \in \mathbb{N}$, y P el subgrupo de $\mathbb{T}$ formado por las p^m-ésimas raíces complejas de la unidad. Para cada $s \in P$ y $k \leq m$ con $o(s) \leq p^k$, existe $s_k \in P$ tal que $o(s_k) = p^k$ y $s = s_k^{p^k/o(s)}$.*

Demostración. Como $s \in P$, $o(s) = p^n$ para algún $n \leq m$, así que existe a, número entero no negativo $a < p^n$, tal que $s = e^{2a\pi i/p^n}$. Observe que a no es divisible por p.

Sea $s_k = e^{2a\pi i/p^k}$. Es claro que $o(s_k) = p^k$ y

$$s_k^{p^k/o(s)} = \left(e^{2a\pi i/p^k}\right)^{p^k/o(s)} = e^{2a\pi i/p^n} = s.$$

□

Lema 2.3.4. *Sea p un número primo, $m \in \mathbb{N}$, P el subgrupo de $\mathbb{T}$ formado por las p^m-ésimas raíces complejas de la unidad y $H = P^{\mathfrak{c}}$. Para cada $h \in H$ existe $g \in H$ con $o(g) = p^m$ y $h \in \langle g \rangle$.*

Demostración. Sea h un elemento de H. Para cada $\alpha < \mathfrak{c}$, sea $n_\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $o(h(\alpha)) = p^{n_\alpha}$. Ya que $n_\alpha \leq m$ para cada $\alpha < \mathfrak{c}$, existe

$$n_h = \max\{k_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}.$$

Denotemos por $d = m - n_h$ y, para $\alpha < \mathfrak{c}$, sea $k_\alpha = n_\alpha + d$.

Es claro que $k_\alpha \leq m$. Por el lema 2.3.3 para cada $\alpha < \mathfrak{c}$ podemos encontrar $h^*_\alpha \in P$ tal que $o(h^*_\alpha) = p^{k_\alpha}$ y $h(\alpha) = {h^*_\alpha}^{p^{k_\alpha}/o(h(\alpha))}$. Notemos que $\frac{p^{k_\alpha}}{o(h(\alpha))} = \frac{p^{k_\alpha}}{p^{n_\alpha}} = p^d$.

Sea g el elemento de H tal que $g(\alpha) = h^*_\alpha$. Observemos que para toda $\alpha < \mathfrak{c}$, $p^d \cdot g(\alpha) = h(\alpha)$, por lo tanto $h = p^d \cdot g$.

Por nuestra definición de n_h, existe $\beta < c$ tal que $o(h(\beta)) = p^{n_h}$. Puesto que el orden de $h(\beta)$ es igual a p^{n_h}, $o(h^*_\beta) = p^d \cdot o(h(\beta)) = p^m$ y por lo tanto $o(g) = p^m$.

□

Teorema 2.3.5. *Sea G un grupo Abeliano de torsión acotada tal que $|G| \leq 2^{\mathfrak{c}}$. Entonces G admite una topología de grupo topológico Hausdorff, separable y precompacta.*

Demostración. Podemos asumir que $|G| > \omega$. Supongamos primero que para toda $g \in G$, el orden de g es una potencia de un número primo fijo p. Como G es de torsión acotada, podemos encontrar $k \in \mathbb{N}$ con $o(g) \leq p^k$ para cada $g \in G$. Entonces existe un conjunto $\{g_\alpha : \alpha \in A\} \subset G$ tal que $G = \bigoplus_{\alpha \in A} \langle g_\alpha \rangle$ (ver [11, Teorema 17.2]).

Para cada $\alpha \in A$, sea $\varrho_\alpha : \langle g_\alpha \rangle \to \mathbb{T}$ el monomorfismo definido por $\varrho_\alpha(g_\alpha) = e^{2\pi i/n_\alpha}$, donde $n_\alpha = o(g_\alpha)$.

Para toda $n \leq k$, sea $A_n = \{\alpha \in A : o(g_\alpha) = p^n\}$ y $m = \max\{n : |A_n| \geq \omega\}$. Sea $J_0 = \{\alpha_j : j \in \omega\}$ un subconjunto infinito numerable de A_m, $G_0 = \bigoplus_{\alpha \in J_0} \langle g_\alpha \rangle$, $J = (\bigcup_{n \leq m} A_n) \setminus J_0$ y $F = \bigcup_{n > m} A_n$. Observemos que $G' = \bigoplus_{\alpha \in F} \langle g_\alpha \rangle$ es finito y que $|G_0| = \omega$. Por lo tanto, $G = G' \oplus G_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in J} \langle g_\alpha \rangle$.

Sea $H = P^{\mathfrak{c}}$, donde P es el subgrupo de $\mathbb{T}$ formado por todas las p^m-ésimas raíces complejas de la unidad. Por el teorema de Hewitt-Marczewski-Pondiczery, H es separable. Sea D un subgrupo numerable y denso de H. Como D es un grupo de torsión acotada, es la suma directa de grupos cíclicos, es decir, $D = \bigoplus_{j \in \omega} \langle d_j \rangle$. Por el lema 2.3.4 podemos suponer que $o(d_j) = p^m$ para toda $n \in \omega$.

Sea φ un monomorfismo $\varphi : G_0 \to H$ tal que $\varphi(g_{\alpha_j}) = d_j$, para toda $n \in \omega$. Extenderemos este monomorfismo a $\bar{G} = G_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in J} \langle g_\alpha \rangle$. Para cada $\beta < \mathfrak{c}$, sea $\varphi_\beta = p_\beta \circ \varphi$, donde $p_\beta : H \to P_{(\beta)}$ es la proyección natural de H sobre la coordenada β-ésima.

Considere J como un subespacio del espacio $2^{\mathfrak{c}}$ dotada con la topología del producto. Sea $\mathcal{B}$ la base canónica de conjuntos abiertos en $2^{\mathfrak{c}}$, $|\mathcal{B}| = \mathfrak{c}$.

Para toda $\bar{g} \in \bar{G}$, existe $\bar{g}_0 \in G_0$ y ua conjunto finito $c(\bar{g}) \subset J$ tal que $\bar{g} = \bar{g}_0 + l_{\bar{g}}$, donde $l_{\bar{g}} \in \bigoplus_{\alpha \in c(\bar{g})} \langle g_\alpha \rangle$. Si $\bar{g} \in \bar{G} \setminus G_0$, entonces $c(\bar{g}) \neq \emptyset$. Sea $\alpha_{\bar{g}} \in c(\bar{g})$ un elemento arbitrario de $c(\bar{g})$ y elije $U_{\bar{g}} \in \mathcal{B}$ tal que $U_{\bar{g}} \cap c(\bar{g}) = \{\alpha_{\bar{g}}\}$.

El conjunto $S = \{(\bar{g}_0, U_{\bar{g}}) : \bar{g} \in \bar{G} \setminus G_0\}$ tiene cardinalidad menor o igual que $|G_0 \times \mathcal{B}| = \omega \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$. Sea $S = \{S_\beta : \beta < \mathfrak{c}\}$ una numeración de S, donde S_β es un par (a_β, U_β) con $a_\beta \in G_0$ y $U_\beta \in \mathcal{B}$.

Si $\varphi_\beta(a_\beta) = 1$, entonces definimos $\psi_\beta : \bigoplus_{\alpha \in J} \langle g_\alpha \rangle \to P$ un homomorfismo tal que $\psi_\beta|_{\langle g_\alpha \rangle} = \varrho_\alpha$ para cada $\alpha \in U_\beta$ y $\psi_\beta(g_\alpha) = 1$, cuando $\alpha \in J \setminus U_\beta$. Si $\varphi_\beta(a_\beta) \neq 1$.

Sea $\psi_\beta \equiv \mathbf{1}$. Sea $\overline{\varphi}_\beta = \varphi_\beta \oplus \psi_\beta$. Es claro que, para cada $\beta < \mathfrak{c}$, $\overline{\varphi}_\beta$ es una extensión de φ_β. Por lo tanto, $\overline{\varphi} = \Delta_{\beta < \mathfrak{c}} \overline{\varphi}_\beta$ es una extensión de φ y $\ker(\overline{\varphi}) \cap G_0 = \ker(\varphi) = \{e\}$.

Elegimos $\bar{g} \in \bar{G} \setminus G_0$. Entonces $\bar{g} = \bar{g}_0 + l_{\bar{g}}$ donde $l_{\bar{g}} = \sum_{\alpha \in c(\bar{g})} l_\alpha \in \bigoplus_{\alpha \in c(\bar{g})} \langle g_\alpha \rangle$. Existe $\beta < \mathfrak{c}$ tal que $\bar{g}_0 = a_\beta$ y $U_{\bar{g}} = U_\beta$. Por nuestra definición de U_β, $U_\beta \cap c(\bar{g}) = \{\alpha_{\bar{g}}\}$ y $l_{\alpha_{\bar{g}}}$ es diferente del elemento identidad. Se sigue que $\overline{\varphi}_\beta(\bar{g}) = \overline{\varphi}_\beta(\bar{g}_0 + l_{\bar{g}}) = \varphi_\beta(a_\beta) \cdot \psi_\beta(l_{\bar{g}}) = \varphi_\beta(a_\beta) \cdot \prod_{\alpha \in c(\bar{g})} \psi_\beta(l_\alpha) = \varphi_\beta(a_\beta) \cdot \psi_\beta(l_{\alpha_{\bar{g}}})$.

Si $\varphi_\beta(a_\beta) = 1$ entonces $\psi_\beta(l_{\alpha_{\bar{g}}}) = \varrho_\alpha(l_{\alpha_{\bar{g}}}) \neq 1$ porque ϱ_α es un isomorfismo y $l_{\alpha_{\bar{g}}}$ es diferente del elemento identidad. Por lo tanto, $\overline{\varphi}_\beta(\bar{g}) = \varphi_\beta(a_\beta) \cdot \psi_\beta(l_{\alpha_{\bar{g}}}) = 1 \cdot \psi_\beta(l_{\alpha_{\bar{g}}}) \neq 1$.

Si $\varphi_\beta(a_\beta) \neq 1$, entonces $\psi_\beta(l_{\alpha_{\bar{g}}}) = 1$. Se sigue que:

$$\overline{\varphi}_\beta(\bar{g}) = \varphi_\beta(a_\beta) \cdot \psi_\beta(l_{\alpha_{\bar{g}}}) = \varphi_\beta(a_\beta) \cdot 1 \neq 1.$$

Entonces $\overline{\varphi}$ es un monomorfismo de $\bar{G}$ a $P^{\mathfrak{c}}$ tal que $D \subset \overline{\varphi}(G_0)$. Por lo tanto, $\overline{\varphi}(\bar{G})$ es un grupo topológico precompacto y separable.

Sea G' un subgrupo finito de $\mathbb{T}^F$. Si $g \in G$, entonces existe $g' \in G'$ y $\bar{g} \in \bar{G}$ tales que $g = g' + \bar{g}$. Sean $\tilde{\varphi} : G \to G' \times P^{\mathfrak{c}}$, y $\tilde{\varphi}(g) = (g', \overline{\varphi}(\bar{g}))$. Entonces $\tilde{\varphi}$

es un monomorfismo de G a $G' \times P^{\mathfrak{c}}$ y por lo tanto G admite una topología de grupo topológico Hausdorff, separable y precompacta.

Ahora, suponga que G es un grupo Abeliano de torsión acotada arbitrario, y sea $G = \bigoplus_{i \leq n} G_{p_i}$ la descomposición de G en la suma directa de sus componentes p-primarias (ver [11, Teorema 8.4]). Como ya se demostro, cada G_{p_i} admite una topología de grupo topológico precompacta, separable, y de Hausdorff. Cómo el número de componentes es finito, $\bigoplus_{i \leq n} G_{p_i}$ es algebraicamente isomorfo a $\prod_{i \leq n} G_{p_i}$, y por lo tanto G admite una topología de grupo topológico Hausdorff, separable y precompacta. □

2.3.1. El Caso de Grupos de Torsión no Acotada

El caso cuando G es un grupo Abeliano de torsión no acotada requiere una atención especial. En este caso, adaptaremos algunas ideas de la prueba de [6, Teorema 2.3].

Decimos que $V \subset \mathbb{T}$ es un *arco abierto* si V es abierto y conexo, y denotamos por $l(V)$ a la longitud de V. Dado $z \in \mathbb{T}$ y $m \in \mathbb{N}$ denotamos por $mz = z^m$.

Lema 2.3.6. *Suponga que V es un arco abierto de $\mathbb{T}$, $z_1, z_2 \in \mathbb{T}$, $n, m \in \mathbb{N}$, $1 \leq n < m$, y $4\pi/m < l(V)$. Entonces existe $y \in V$ tal que $my = z_1$ y $ny \neq z_2$.*

Demostración. Sea $z \in \mathbb{T}$ y $k \in \mathbb{N}$. La distancia entre cualesquiera dos diferentes raíces k-ésimas de z es un multiplo de $2\pi/k$. Como $l(V) > 4\pi/m$, hay al menos dos raíces m-ésimas z_1 distintas en V. Sea y_1, y_2 dos elementos de V tales que $my_1 = my_2 = z_1$ tales que la distancia entre y_1 y y_2 es $2\pi/m$. Note que y_1 y y_2 no pueden ser ambas raíces n-ésimas de z_2 pues, de lo contrario, la distancia entre ellos debería ser mayor o igual que $2\pi/n$, lo que implicaría que $m \leq n$ contradiciendo la suposición del lema. □

Lema 2.3.7. *Sea K un subgrupo numerable de $\mathbb{T}^{\mathfrak{c}}$ y $f' \in K$, $m \geq 2$. Suponga que $\{V_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ es una familia de arcos abiertos de $\mathbb{T}$ tales que $4\pi/m < l(V_\alpha)$, para toda $\alpha < \mathfrak{c}$. Entonces existe $f \in \prod\{V_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ tal que $mf = f'$ y $nf \notin K$ para cada n, con $1 \leq n < m$.*

Demostración. Sea $K \times \{1, ..., m-1\} = \{(h_k, n_k) : k \in \omega\}$ una numeración de $K \times \{1, ..., m-1\}$. Para cada $k < \omega$ definimos $\alpha_k < \mathfrak{c}$ y $x_{\alpha_k} \in \mathbb{T}$ que satisfacen las siguientes condiciones:

(i$_k$) $\alpha_k \neq \alpha_j$, si $j < k$;

(ii$_k$) $x_{\alpha_k} \in V_{\alpha_k}$;

(iii$_k$) $mx_{\alpha_k} = f'(\alpha_k)$;

(iv$_k$) $n_k x_{\alpha_k} \neq h_k(\alpha_k)$.

Sea $\alpha_0 < \mathfrak{c}$ un ordinal arbitraio. Por el lema 2.3.6 (con $V = V_{\alpha_0}$, $z_1 = f'(\alpha_0)$, $z_2 = h_0(\alpha_0)$, $n = n_0$) podemos elegir un elemento $x_{\alpha_0} \in V_{\alpha_0}$ que cumple con las condiciones (ii$_0$), (iii$_0$) y (iv$_0$). Condición (i$_0$) se cumple por vacuidad.

Supongamos que para todo $j < k$ tenemos elegidos α_j y x_{α_j} tales que cumplen las condiciones (i$_j$) - (iv$_j$). Elegimos un $\alpha_k < \mathfrak{c}$ que satisface (i$_k$). Por el lema 2.3.6 haciendo $V = V_{\alpha_k}$, $z_1 = f'(\alpha_k)$, $z_2 = h_k(\alpha_k)$, y $n = n_k$, elegimos x_{α_k} que cumple (ii$_k$) - (iv$_k$).

Finalmente, para cada $\alpha \in \mathfrak{c} \setminus \{\alpha_k : k \in \omega\}$ usamos lema 2.3.6 otra vez con $V = V_\alpha$, $z_1 = f'(\alpha)$, $z_2 = 1$, $n = 1$ para elegir $x_\alpha \in V_\alpha$ tal que $mx_\alpha = f'(\alpha)$.

Definimos $f \in \mathbb{T}^{\mathfrak{c}}$ por $f(\alpha) = x_\alpha$ para cada $\alpha < \mathfrak{c}$. Entonces:

- $f(\alpha) \in V_\alpha$ para cada $\alpha < \mathfrak{c}$, y por lo tanto $f \in \prod\{V_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$.
- $mf(\alpha) = mx_\alpha = f'(\alpha)$ para cada $\alpha < \mathfrak{c}$, entonces $mf = f'$.
- Dados $n \in \{1, ..., m-1\}$ y $h \in K$, existe $k \in \omega$ tal que $(h, n) = (h_k, n_k)$.

Por las condiciones (iii$_k$) y (iv$_k$), tenemos que

$$nf(\alpha_k) = n_k x_{\alpha_k} \neq h_k(\alpha_k) = h(\alpha_k).$$

Como $h \in K$ es arbitrario, $nf \notin K$ para toda $n < m$.

$\square$

La prueba del siguiente lema se puede encontrar en [1, Lema 1.1.5]:

Lema 2.3.8. *Sean G y G^* grupos topológicos Abelianos, K y K^* subgrupos de G y G^*, respectivamente. Suponga que existen $x \in G$, $x^* \in G^*$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ y un isomorfismo $\psi : K \to K^*$ que cumplen las siguientes condiciones:*

- *$mx \in K$ y $mx^* \in K^*$;*

- *$nx \notin K$ y $nx^* \notin K^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n < m$;*
- *$\psi(mx) = mx^*$.*

Entonces existe un único isomorfismo $\varphi : K + \langle x \rangle \to K^* + \langle x^* \rangle$ que extiende ψ tal que $\varphi(x) = x^*$.

Ahora recordaremos algunas definiciones de teoría de grupos. Un sistema $\{a_1, ..., a_k\}$ de elementos de un grupo G es llamando *independiente* si

$$n_1a_1 + ... + n_ka_k = 0 \quad (n_i \in \mathbb{Z})$$

implica

$$n_1a_1 = ... = n_ka_k = 0.$$

Decimos que un sistema infinito L del grupo G es independiente si cualquier subconjunto finito de L es independiente.

El *rango* $r(G)$ de un grupo Abeliano G es la cardinalidad de un sistema independiente maximal de G. El *rango libre de torsión* $r_0(G)$ es la cardinalidad de un sistema independiente maximal que contiene solamente elementos de orden infinito. Para cada número primo p, el *p-rango* $r_p(G)$ de G es un sistema independiente maximal que contiene únicamente elementos cuyo orden es una potencia de p.

El siguiente lema puede ser encontrado en [7, Lema 3.17].

Lema 2.3.9. *Sea G y G^* grupos Abelianos tales que $|G| \leq r(G^*)$ y $|G| \leq r_p(G^*)$ para todo número primo p. Supongamos que H es un subgrupo de G tal que $r(H) < r(G^*)$ y $r_p(H) < r_p(G^*)$ para todo primo p. Si G^* es un grupo divisible, entonces cada monomorfismo $\varphi : H \to G^*$ se puede extender a un monomorfism $\psi : G \to G^*$.*

Ahora podemos demostrar el siguiente teorema:

Teorema 2.3.10. *Sea G un grupo Abeliano de torsión no acotada $|G| \leq 2^{\mathfrak{c}}$. Entonces G admite una topología de grupo Hausdorff, separable y precompacta.*

Demostración. Sea $\mathcal{V}$ una base numerable para la topología de $\mathbb{T}$ formada por arcos abiertos y suponga que $\mathbb{T} \in \mathcal{V}$. Puesto que G es un grupo de torsión no acotada, podemos elegir un subconjunto $S \subset G \setminus \{e\}$ tal que $|nS| = \omega$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde e es la unidad de G.

Consideremos $\mathfrak{c}$ como el espacio topológico 2^ω y sea $\mathfrak{B}$ una base canónica de 2^ω formada de subconjuntos cerrados - abiertos no vacíos de 2^ω, de cardinalidad $|\mathfrak{B}| = \omega$.

Sea $\mathbb{U}$ el conjunto de todas las cubiertas abiertas finitas de 2^ω formadas por conjuntos ajenos dos a dos. Para cada $\mathcal{U} \in \mathbb{U}$ y $\alpha < \mathfrak{c}$, sea $U_{\alpha,\mathcal{U}}$ la única $U \in \mathcal{U}$ tal que $\alpha \in U$. Llamemos $\mathbb{E} = \{(\mathcal{U}, \upsilon) : \mathcal{U} \in \mathbb{U}$ y $\upsilon : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ es una función$\}$. Para cada $(\mathcal{U}, \upsilon) \in \mathbb{E}$, sea $F(\mathcal{U}, \upsilon) = \prod\{\upsilon(U_{\alpha,\mathcal{U}}) : \alpha < \mathfrak{c}\}$.

Claramente $\mathbb{E}$ es numerable. Sea $\mathbb{E} = \{(\mathcal{U}_k, \upsilon_k) : k \in \omega\}$ una numeración de $\mathbb{E}$ tal que $\mathcal{U}_0 = \{2^\omega\}$ y $\upsilon_0(2^\omega) = \mathbb{T}$.

Para cada $k < \omega$, elegimos $n_k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$4\pi/n_k < \text{mín}\,\{l(\upsilon(U)) : U \in \mathcal{U}_k\}.$$

Por recursión en $k \in \omega$ elegimos un elemento $x_k \in S$ y definimos una función $\varphi_k : H_k = \langle\{x_j : j \leq k\}\rangle \to \mathbb{T}^\mathfrak{c}$ que cumplen las siguientes condiciones:

(i$_k$) $\varphi_k(x_k) \in F(\mathcal{U}_k, \upsilon_k)$;

(ii$_k$) φ_k es un monomorfismo;

(iii$_k$) $\varphi_k|_{H_j} = \varphi_j$ para toda $j < k$.

Escogemos cualquier elemento x_0 en S y sea $\varphi_0 : \langle x_0\rangle \to \mathbb{T}^\mathfrak{c}$ un monomorfismo arbitrario. Entonces condiciones (i$_0$) y (ii$_0$) son cumplidas, mientras que la condición (iii$_0$) es vacua. Ahora sea $k \in \mathbb{N}$, y supongamos que tenemos definidos $x_j \in S$ y funciones φ_j que cumplen con (i$_j$), (ii$_j$) y (iii$_j$) para todo $j < k$.

Sea $H'_k = \bigcup_{j<k} H_j$. Puesto que (ii$_j$), (iii$_j$) se cumplen para cada $j < k$, la función $\varphi'_k = \bigcup_{j<k} \varphi_j : H'_k \to \mathbb{T}^\mathfrak{c}$ es un monomorfismo. Como $\{x_j : j < k\} \subset S$ es finito, $n_k!S \setminus H'_k \neq \emptyset$. Por lo tanto, existe $x_k \in S$ tal que $n_k!x_k \notin H'_k$. En particular, $nx_k \notin H'_k$ para toda $n \leq n_k$. Sea $K = \varphi'_k(H'_k)$. Para

$\alpha < \mathfrak{c}$, sea $V_\alpha = \upsilon_k(U_{\alpha,\mathcal{U}})$. Por nuestra elección de n_k tenemos que $4\pi/n_k \leq l(\upsilon_k(U_{\alpha,\mathcal{U}})) = l(V_\alpha)$ para toda $\alpha < \mathfrak{c}$.

Sea $m = \min\{n \in \mathbb{N} : nx_k \in H'_k\}$ y $f' = \varphi'_k(mx_k) \in K$. Entonces $m > n_k$ y $4\pi/m < 4\pi/n_k < l(V_\alpha)$ para cada $\alpha < \mathfrak{c}$. Notemos que $m \geq 2$. Por el lema 2.3.7 podemos encontrar $f \in F(\mathcal{U}, \upsilon) = \prod\{\upsilon(U_{\alpha,\mathcal{U}}) : \alpha < \mathfrak{c}\}$ tal que $mf = f'$ y $nf \notin K$ para $n < m$. Llamemos $H_k = \langle\{x_j : j \leq k\}\rangle$. Por lema 2.3.8 podemos extender φ'_k a un monomorfismo $\varphi_k : H_k \to \mathbb{T}^{\mathfrak{c}}$ con $\varphi_k(x_k) = f$.

Como $\varphi_k(x_k) = f \in F(\mathcal{U}, \upsilon)$, se cumple la condición (i$_k$). Por el lema 2.3.8, φ_k es un monomorfismo que extiende φ'_k, y por lo tanto (ii$_k$) y (iii$_k$) se satisfacen también.

Sea $H = \bigcup_{k\in\omega} H_k$ y $\varphi = \bigcup_{k\in\omega} \varphi_k$. Como (ii$_k$) y (iii$_k$) se cumplen para cada $k \in \omega$, tenemos que $\varphi : H \to \mathbb{T}^{\mathfrak{c}}$ es un monomorfismo.

Afirmamos que $\varphi(H \cap S)$ es un subconjunto denso de $\mathbb{T}^{\mathfrak{c}}$. Sea W un conjunto abierto no vacío de $\mathbb{T}^{\mathfrak{c}}$. Entonces existe un subconjunto finito $I = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ de $\mathfrak{c}$ y arcos abiertos no vacíos $V_{\alpha_1}, ..., V_{\alpha_n} \in \mathcal{V}$ tales que $\prod_{\alpha<\mathfrak{c}} W_\alpha \subset W$, donde $W_\alpha = V_\alpha$ si $\alpha \in I$ y $W_\alpha = \mathbb{T}$ en otro caso. Sea $\mathcal{U} = \{U_1, ..., U_n\} \in \mathbb{U}$ tal que $\alpha_i \in U_i$ para cada $i \leq n$ y tomemos $\upsilon : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, $\upsilon(U_i) = V_{\alpha_i}$. Entonces $(\mathcal{U}, \upsilon) \in \mathbb{E}$ y por lo tanto existe $k \in \omega$ tal que $(\mathcal{U}, \upsilon) = (\mathcal{U}_k, \upsilon_k)$. Claramente $F(\mathcal{U}_k, \upsilon_k) = F(\mathcal{U}, \upsilon) \subset \prod_{\alpha<\mathfrak{c}} W_\alpha \subset W$. Puesto que $x_k \in S \cap H_k \subset H \cap S$ y $\varphi(x_k) = \varphi_k(x_k) \in F(\mathcal{U}_k, \upsilon_k)$, se sigue que $\varphi(H \cap S) \cap W \neq \emptyset$. Esto implica la densidad de $\varphi(H \cap S)$ en $\mathbb{T}^{\mathfrak{c}}$.

Por lema 2.3.9, el monomorfismo φ puede extenderse a un monomorfismo $\psi : G \to \mathbb{T}^{\mathfrak{c}}$. Por lo tanto, $\psi(G)$ es un subgrupo separable denso en $\mathbb{T}^{\mathfrak{c}}$. □

Por los teoremas 2.3.2, 2.3.5 y 2.3.10 concluimos que:

Teorema 2.3.11. *Sea G un grupo Abeliano con $|G| \leq 2^{\mathfrak{c}}$. Entonces G admite una topología de grupo Hausdorff, separable y precompacta.*

Capítulo 3

Cocientes de grupos FRC y FDC

Los conceptos de *fuerte Dieudonné completitud* (FDC) y de *fuerte realcompacidad* (FRC) surgen como la adaptación de los conceptos bien conocidos de espacios topológicos realcompactos y de Dieudonné completos.

Decimos que un grupo topológico G es *fuertemente realcompacto* si es topológicamente isomorfo a un subgrupo cerrado de un producto de grupos segundo numerables. De igual manera decimos que G es *fuertemente Dieudonné completo* si es topológicamente isomorfo a un subgrupo cerrado de un producto de grupos metrizables (ver [30, 20]).

Es claro que todo grupo fuertemente Dieudonné completo es ω-balanceado, mientras que los grupos fuertemente realcompactos son ω-estrechos.

La fuerte realcompacidad implica la fuerte Dieudonné completitud. Cualquier grupo discreto es metrizable y por ende fuertemente Dieudonné completo, pero es fuertemente realcompacto si y sólo si es numerable. Por lo tanto, los grupos discretos no numerables son ejemplos de grupos Dieudonné completos que no son fuertemente realcompactos. Observemos que ambas clases son cerradas bajo productos y bajo subgrupos cerrados.

En éste capítulo demostraremos que las clases de grupos fuertemente realcompactos y fuertemente Dieudonné completos son cerrados con respecto a tomar cocientes con subgrupos invariantes Čech-completos y P-modificaciones.

Los argumentos de las demostraciones se basan en las respuestas a la pregunta de cuándo la P-modificación del grupo cociente G/H es equivalente al cociente G_ω/H_ω de las correspondientes P-modificaciones de los grupos G y H. Resulta que los grupos $(G/H)_\omega$ y G_ω/H_ω son topológicamente isomorfos cuando H es completamente metrizable (lema 3.2.3) o si G es ω-balanceado y H es Čech-completo (teorema 3.3.2).

En el teorema 3.2.5 se demuestra que ambas clases de grupos topológicos son cerradas bajo cocientes de subgrupos Čech-completos. De hecho, se demuestra el siguiente resultado: Si G es un grupo ω-estrecho (ω-balanceado) y H es un subgrupo de G, invariante y Čech-completo, entonces G es fuertemente realcompacto (fuertemente Dieudonné-completo) si y sólo si el grupo cociente G/H es fuertemente realcompacto (fuertemente Dieudonné-completo).

En el ejemplo 3.2.6 se construye una extensión de un grupo compacto por un grupo metrizable y separable que falla en ser fuertemente Dieudonné completo. Resulta que existe un grupo Abeliano, pseudocompacto, no-compacto (y por lo tanto no realcompacto) G que contiene un subgrupo H cerrado, metrizable y separable tal que el grupo cociente G/H es compacto.

En sección 3.3 se presentan condiciones sobre un grupo topológico G que implican que todo subgrupo invariante, cerrado y metrizable H de G tal que $(G/H)_\omega \cong G_\omega/H_\omega$ es completamente metrizable. En particular, se demuestra en el corolario 3.3.5 que si H es un subgrupo invariante y metrizable de un grupo pseudocompacto G, entonces $(G/H)_\omega \cong G_\omega/H_\omega$ si y sólo si H es compacto. Se prueba que $(G/H)_\omega$ es topológicamente isomorfo a G_ω/H_ω si el subgrupo cerrado e invariante H de G es Čech-completo o pseudocompacto (ver el teorema 3.3.2 y corolario 3.3.6).

3.1. La P-modificación de un grupo

Dado un grupo topológico (G,σ), sea σ_ω la familia de todos los conjuntos G_δ (intersección numerable de abiertos) de G. No es difícil verificar que σ_ω es una base para una topología de grupo topológico para G la cual se conoce como la *P-modificación de* (G,σ), o la *G_δ-modificación de* (G,σ).

Muchas propiedades topológicas no se preservan al tomar la P-modificatión. Por ejemplo podemos mencionar celularidad, compacidad, conexidad, entre otras. Por otro lado, en [15, Teorema 8] se demuestra que la P-modificación de un grupo Raĭkov completo es nuevamente Raĭkov completo. En esta sección describiremos la fuerte realcompacidad y la fuerte Dieudonné completitud de un grupo topológico en términos de su P-modificación.

Empecemos con un lema.

Lema 3.1.1. *Sea G un grupo topológico ω-balanceado. Entonces G_ω, la P-modificación de G, es balanceada.*

Demostración. Sea U una vecindad abierta de la identidad e en G_ω. Podemos asumir que $U = \bigcap_{n\in\omega} U_n$, donde U_n es un subconjunto abierto de G, para cada $n \in \omega$. Puesto que G es ω-balanceado, para cada $n \in \omega$ existe una familia numerable γ_n de vecindades abiertas de e en G tal que para cada $x \in G$ podemos encontrar $O \in \gamma_n$ que cumple con $xOx^{-1} \subset U_n$.

Sea $V_n = \bigcap \gamma_n$. Para cada $n \in \omega$, V_n es un conjunto G_δ en G con la propiedad de que para cada $x \in G$, $xV_nx^{-1} \subset U_n$. Sea $V = \bigcap_{n\in\omega} V_n$. Es claro que V es un conjunto G_δ en G que contiene a e. Por lo tanto, V es una vecindad abierta de e en G_ω tal que $xVx^{-1} \subset U$ para cada $x \in G$. Por eso se concluye que el grupo G_ω es balanceado. □

Notemos que existe un grupo topológico G tal que G_ω es balanceado, pero G no es ω-balanceado. En efecto, Pestov en [24] presenta un ejemplo de un grupo G de pseudocarácter numerable tal que no es ω-balanceado. Claramente la P-modificación de G es discreta y por lo tanto balanceada.

En [15, Teorema 8] fue probado que si un grupo X es Raĭkov completo, entonces X_ω es también Raĭkov completo. En el siguiente lema describimos la Raĭkov completación de la P-modificación de un grupo topológico dado.

Lema 3.1.2. *Sea X un grupo topológico. Entonces $\varrho(X_\omega)$ es topológicamente isomorfo a la P-modificación de la G_δ-cerradura de X en ϱX, es decir, $\varrho(X_\omega) \cong (\varrho_\omega X)_\omega$.*

Demostración. Es claro que X es G_δ-denso en $\varrho_\omega X$ y $\varrho_\omega X$ es G_δ-cerrado en ϱX. Por lo tanto, X_ω es denso en $(\varrho_\omega X)_\omega$ mientras que este último grupo es cerrado en $(\varrho X)_\omega$.

De acuerdo con [15, Teorema 8] el grupo $(\varrho X)_\omega$ es Raĭkov completo y, por ende, es $(\varrho_\omega X)_\omega$. Como X_ω es denso en $(\varrho_\omega X)_\omega$, concluimos que $\varrho(X_\omega) = (\varrho_\omega X)_\omega$. □

Los siguientes dos resultados muestran que la Raĭkov completitud de G_ω es una componente esencial en nuestras caracterizaciones de grupos fuertemente Dieudonné completos y fuertemente realcompactos.

Teorema 3.1.3. *Un grupo X ω-balanceado es fuertemente Dieudonné completo si y sólo si X_ω es Raĭkov completo.*

Demostración. Supongamos que X es fuertemente Dieudonné completo. Por [30, Teorema 3.3] se tiene que $X = \varrho_\omega X$. Se sigue del lema 3.1.2 que $\varrho(X_\omega) \cong (\varrho_\omega X)_\omega = X_\omega$. Y por lo tanto el grupo X_ω es Raĭkov completo.

Por otro lado, si X_ω es Raĭkov completo, entonces $X_\omega = \varrho(X_\omega) = (\varrho_\omega X)_\omega$. De aquí se sigue que $X = \varrho_\omega X$. Finalmente, como X es ω-balanceado, [30, Teorema 3.3] implica que X es fuertemente Dieudonné completo. □

A diferencia de ω-balanceado, la P-modificación de un grupo ω-estrecho puede no ser ω-estrecho. El grupo topológico $\mathbb{R}$ con la topología usual es ω-estrecho, pero $\mathbb{R}_\omega$ es un grupo discreto no numerable y, por lo tanto, no es ω-estrecho.

La prueba del siguiente hecho es muy similar a la demostración del teorema 3.1.3, por lo que se omite.

Teorema 3.1.4. *Un grupo topológico ω-estrecho X es fuertemente realcompacto si y sólo si X_ω es Raĭkov completo.*

Se demuestra en [30, Teorema 3.16] que un grupo topológico $\mathbb{R}$-factorizable G es fuertemente realcompacto si y sólo si G es un espacio realcompacto. Como los grupos $\mathbb{R}$-factorizables son ω-estrechos y los grupos precompactos son $\mathbb{R}$-factorizables [1, Corolario 8.1.17], teorema 3.1.4 implica los sigueintes corolarios.

Corolario 3.1.5. *Un grupo $\mathbb{R}$-factorizable G es realcompacto si y sólo si la P-modificación de G es Raĭkov completa.*

Corolario 3.1.6. *Para todo grupo precompacto G, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *G es realcompacto.*

(ii) *La P-modificación de G es Raĭkov completa.*

3.2. Cocientes de grupos completos

En [1, Corolario 7.6.19] esta demostrado que cualquier grupo topológico es un cociente de un grupo topológico cero-dimensional con pseudocarácter numerable. Como todo grupo ω-balanceado de pseudocarácter numerable es fuertemente Dieudonné completo [30, Teorema 3.4], vemos que las propiedades de ser fuertemente Dieudonné completo o fuertemente realcompacto no son invariantes bajo tomar grupos cocientes.

Por otro lado los cocientes con respecto a subgrupos compactos conservan las dos propiedades. De acuerdo con [30, Teorema 3.17], si H es un subgrupo compacto invariante de un grupo topológico G, entonces G es fuertemente realcompacto (fuertemente Dieudonné completo) si y sólo si G/H es fuertemente realcompacto (fuertemente Dieudonné completo). Afirmamos que es posible extender este resultado a que el subgrupo H sea Čech-completo. Para esto requerimos algunos resultados auxiliares.

Nuestro primer lema es evidente y su prueba es omitida.

Lema 3.2.1. *Si H es un subgrupo arbitrario de un grupo topológico G, entonces la función identidad de H_ω sobre el subgrupo correspondiente de G_ω es un isomorfismo topológico.*

El siguiente resultado es un hecho importante para la demostración del lema 3.2.3.

Lema 3.2.2. *Sea H un subgrupo invariante completamente metrizable de un grupo topológico G con identidad e. Sean también $\{V_n : n \in \omega\}$ una base local para H en e y $\{U_n : n \in \omega\}$ una sucesión de vecindades abiertas simétricas de e en G tal que $U_{n+1}^2 \subseteq U_n$ y $U_n \cap H \subseteq V_n$ para cada $n \in \omega$. Entonces el subgrupo $P = \bigcap_{n\in\omega} U_n$ de G satisface $PH = \bigcap_{n\in\omega} U_n H$.*

Demostración. De las propiedades de la sucesión de $\{U_n : n \in \omega\}$ se sigue que $P = \bigcap_{n\in\omega} U_n$ es un subgrupo de G. Esta claro que $PH \subset \bigcap_{n\in\omega} U_n H$. Por lo tanto, es suficiente con demostrar la contención inversa.

Tomemos un elemento arbitrario $x \in \bigcap_{n\in\omega} U_n H$. Para toda $n \in \omega$, elegimos elementos $y_n \in U_n$ y $h_n \in H$ tales que $x = y_n h_n$. Afirmamos que $\{h_n : n \in \omega\}$ es una sucesión de Cauchy en H. En efecto, sea V una vecindad abierta de e en H. Existe $N \in \omega$ tal que $V_N \subseteq V$. Tomemos $m, n \in \omega$ con $m > N$

y $n > N$. Podemos asumir sin perder generalidad que $n \leq m$. Se sigue de $y_m h_m = x = y_n h_n$ que

$$y_n^{-1} y_m = h_n h_m^{-1} \in H \cap U_n^{-1} U_m = H \cap U_n U_m \subseteq H \cap U_n^2 \subseteq H \cap U_{n-1} \subseteq V_N.$$

Puesto que H es invariante en G, un argumento similar demuestra que $y_m y_n^{-1} \in V_N$ si tenemos que $m, n > N$. Esto prueba nuestra afirmación.

Como el grupo H es completamente metrizable, se sigue del [1, Teorema 4.3.7] que H es Raĭkov completo. Por lo tanto, la sucesión $\{h_n : n \in \omega\}$ converge en H, es decir, existe $h_* \in H$ tal que $h_n \to h_*$ cuando $n \to \infty$. Por lo tanto, los elementos $y_n = x h_n^{-1}$ convergen a $x h_*^{-1}$. Ya que $y_k \in U_n$ cuando $k \geq n$, concluimos que $x h_*^{-1} \in \overline{U_n}$ para cada $n \in \omega$, de aquí se sigue que $x h_*^{-1} \in \bigcap_{n \in \omega} \overline{U_n} = \bigcap_{n \in \omega} U_n = P$. Esto prueba que $x \in P h_* \subset PH$, brindándonos así la igualdad requerida. □

El siguiente lema prepara el terreno para la prueba del teorema 3.2.5.

Lema 3.2.3. *Sea H un subgrupo invariante completamente metrizable de un grupo topológico G. Entonces la función identidad de G_ω / H_ω sobre $(G/H)_\omega$ es un isomorfismo topológico.*

Demostración. Denotemos por φ a la función identidad de G_ω / H_ω sobre $(G/H)_\omega$. Es claro que φ es continua, por lo tanto es suficiente verificar que φ es abierta. Sea $\pi \colon G \to G/H$ el homomorfismo cociente. El mismo homomorfismo considerado como una función de G_ω sobre G_ω / H_ω lo denotaremos por π_ω. Claramente π y π_ω son homomorfismos continuos y abiertos. Entonces $p = \varphi \circ \pi_\omega$ es un homomorfismo continuo de G_ω sobre $(G/H)_\omega$. La conclusión del lema se obtiene si probamos que p es abierta lo que significa que φ es abierto también. Con este fin es suficiente encontrar una base local $\mathcal{B}$ de la identidad e del grupo G_ω tal que $p(W)$ es abierto en $(G/H)_\omega$ para cada $W \in \mathcal{B}$.

Sea $\{V_n : n \in \omega\}$ una base local de la identidad e en H. Sea Q un conjunto abierto arbitrario en G_ω que contiene a e. Entonces existe una sucesión $\{O_n : n \in \omega\}$ de vecindades abiertas de e en G tal que $\bigcap_{n \in \omega} O_n \subset Q$. Es fácil definir por inducción una sucesión $\{U_n : n \in \omega\}$ de vecindades abiertas y simétricas de e en G tal que $U_{n+1}^2 \subseteq U_n \subset O_n$ y $U_n \cap H \subseteq V_n$ para cada $n \in \omega$. Entonces $P = \bigcap_{n \in \omega} U_n \subset Q$ y el lema 3.2.2 implica que $PH = \bigcap_{n \in \omega} U_n H$. El conjunto $R = \bigcap_{n \in \omega} \pi(U_n)$ es una vecindad abierta de la identidad en

$(G/H)_\omega$. Tenemos que $p^{-1}(R) = \bigcap_{n\in\omega} p^{-1}(\pi(U_n)) = \bigcap_{n\in\omega} U_n H = P$, de esto se sigue que $R = p(P)$. Por lo tanto, $p(P)$ es abierto en $(G/H)_\omega$. Probamos así que para cada vecindad abierta Q de e en G_ω, la imagen $p(Q)$ contiene una vecindad abierta de la identidad en $(G/H)_\omega$. Es por esto que el homomorfismo p es abierto y φ es un isomorfismo topológico, cómo queríamos demostrar. $\square$

Combinando el lema 3.2.3 y algunos resultados de [29, 30] probamos el siguiente teorema:

Teorema 3.2.4. *Sea G un grupo ω-balanceado (ω-estrecho) y H un subgrupo de G invariante y completamente metrizable. Entonces G es fuertemente Dieudonné completo (fuertemente realcompacto) si y sólo si G/H es fuertemente Dieudonné completo (fuertemente realcompacto).*

Demostración. Es suficiente demostrar que el teorema es válido para el caso de grupos fuertemente Dieudonné completos, el argumento en el caso de grupos fuertemente realcompactos es muy similar. Por lo tanto, podemos asumir que el grupo G es ω-balanceado. Entonces el grupo cociente G/H es también ω-balanceado. De acuerdo a [30, Teorema 3.3] debemos verificar que si if uno de los grupos G o G/H es G_δ-cerrado en su completación de Raĭkov, entonces el otro también lo es.

Sea $\varphi\colon \varrho G \to (\varrho G)/H$ el homomorfismo cociente. Si G/H es G_δ-cerrado en $(\varrho G)/H$ entonces $G = \varphi^{-1}(G/H)$ es G_δ-cerrado en ϱG y, por [30, Teorema 3.3], G es fuertemente Dieudonné completo.

Ahora supongamos que G es G_δ-cerrado en ϱG. Por el lema 3.1.2 se sigue que $\varrho(G_\omega) = (\varrho_\omega G)_\omega = G_\omega$, por lo tanto el grupo G_ω es Raĭkov completo. Puesto que H es metrizable, el grupo H_ω es discreto y por lo tanto Čech-completo. Por [29, Teorema 11.18], el grupo cociente G_ω/H_ω es también Raĭkov completo.

Puesto que el lema 3.2.3 implica que $(G/H)_\omega \cong G_\omega/H_\omega$ es Raĭkov completo y, por lo tanto, el grupo G/H es fuertemente Dieudonné completo por el teorema 3.1.3. Lo último significa que G/H es G_δ-cerrado en $\varrho(G/H) \cong (\varrho G)/H$. $\square$

Teorema 3.2.5. *Sea X un grupo ω-balanceado (ω-estrecho) y H un subgrupo de X invariante y Čech-completo. Entonces X es fuertemente Dieudonné completo (fuertemente realcompacto) si y sólo si X/H también lo es.*

Demostración. Como en la demostración del teorema 3.2.4 consideraremos únicamente el caso de Dieudonné completitud. Sea φ el homomorfismo canónico de ϱX sobre $(\varrho X)/H$. Ya que H es Čech-completo, el grupo cociente $(\varrho X)/H$ es Raĭkov completo (ver [29, Teorema 11.18]). Entonces $(\varrho X)/H$ es la completación de Raĭkov de X/H. Si X/H es fuertemente Dieudonné completo, entonces es G_δ-cerrado en $(\varrho X)/H$ por [30, Teorema 3.3] y por lo tanto $X = \varphi^{-1}(X/H)$ es G_δ-cerrado en ϱX. El mismo teorema implica que X es fuertemente Dieudonné completo.

Ahora asumamos que X sea G_δ-cerrado en ϱX. Como el grupo H es Čech-completo, se sigue de [1, Corolario 4.3.5] que existe un subconjunto compacto C de H con una base numerable en H de vecindades que contienen al elemento identidad e de H. Sea $\{O_n : n \in \omega\}$ una familia de vecindades abiertas de e en X tal que $\{O_n \cap H : n \in \omega\}$ es una base de C en H. Entonces $C = H \cap \bigcap_{n\in\omega} O_n$. Puesto que X es ω-balanceado, cada vecindad de la identidad e en X contiene un subgrupo cerrado e invariante de tipo G_δ en X (ver [1, Teorema 3.4.18]). Por lo tanto, para cada $n \in \omega$, existe un subgrupo cerrado e invariante P_n de tipo G_δ en X que cumple con $P_n \subset O_n$. Entonces $P = \bigcap_{n\in\omega} P_n$ es un subgrupo cerrado e invariante de tipo G_δ en X con $P \cap H \subset C$.

Es claro que $P \cap H$ es un conjunto cerrado G_δ en H y en C. Puesto que C y el subconjunto cerrado $P \cap H$ son compactos, el conjunto $P \cap H$ tiene una base numerable de vecindades abiertas en C. Por la transitividad del carácter en espacios de Hausdorff, podemos concluir que el subgrupo compacto $N = P \cap H$ de H tiene una base numerable de vecindades en H. Puesto que H y P son subgrupos invariantes de X, entonces lo es el subgrupo N. Por lo tanto, el grupo cociente H/N es metrizable por [1, Lema 4.3.19].

El homomorfismo cociente de H sobre H/N es una función perfecta, y como las funciones perfectas preservan Čech-completitud (ver [9, Teorema 3.9.10]), el grupo H/N es Čech-completo. Puesto que el espacio H/N es metrizable, concluimos que es completamente metrizable.

El grupo cociente X/N es fuertemente Dieudonné completo por [30, Teorema 3.17], y H/N es un subgrupo de X/N invariante completamente metrizable. Usando el teorema 3.2.4 podemos concluir que el grupo $X/H \cong (X/N)/(H/N)$ es fuertemente Dieudonné completo. $\square$

Supongamos que $\eta = \{G_\alpha : \alpha \in A\}$ es una familia de grupos topológicos y

$\Pi\eta = \prod_{\alpha\in A} G_\alpha$ es el producto topológico de la familia η. Sea el Σ-producto de η, denotado por $\Sigma\Pi\eta$, el subgrupo de $\Pi\eta$ que consiste de todos los puntos $g \in \Pi\eta$ tales que $|\{\alpha \in A : \pi_\alpha(g) \neq e_\alpha\}| \leq \omega$, donde $\pi_\alpha \colon \Pi\eta \to G_\alpha$ es la proyección natural de $\Pi\eta$ sobre el factor G_α y e_α es el elemento neutral de G_α, para cada $\alpha \in A$. Similarmente, el σ-producto de η, denotado por $\sigma\Pi\eta$, es el subgrupo de $\Pi\eta$ que consiste de todos los puntos $g \in \Pi\eta$ tales que $|\{\alpha \in A : \pi_\alpha(g) \neq e_\alpha\}| < \omega$. Es fácil observar que tanto $\Sigma\Pi\eta$ como $\sigma\Pi\eta$ son subgrupos densos de $\Pi\eta$. Una descripción de las propiedades de estos subgrupos puede encontrarse en [1, sección 1.6].

Los siguientes ejemplos demuestran que las propiedades de ser fuertemente realcompacto o fuertemente Dieudonné completo no son propiedades de tres espacios (ver la definición 1.1.11).

Ejemplo 3.2.6. *Existe un grupo topológico Abeliano pseudocompacto no-compacto G que contiene un subgrupo separable metrizable H tal que el grupo cociente G/H es compacto. Por lo tanto, G falla en ser fuertemente realcompacto.*

Demostración. Sea X el grupo $\mathbb{Z}_2^{\mathfrak{c}}$, donde $\mathfrak{c} = 2^\omega$, y sea Y el grupo $\mathbb{Z}_2^{\omega}$. Denotemos por $[\mathfrak{c}]^{\leq\omega}$ la familia de todos los subconjuntos numerables no vacios de $\mathfrak{c}$. Es claro que $|[\mathfrak{c}]^{\leq\omega}| = \mathfrak{c}$. Para cada $A \in [\mathfrak{c}]^{\leq\omega}$ y $u \in \mathbb{Z}_2^A$, sea $C(A,u) = \pi_A^{-1}(u)$, donde $\pi_A \colon \mathbb{Z}_2^{\mathfrak{c}} \to \mathbb{Z}_2^A$ es la proyección natural. Observe que la familia $\mathcal{E} = \{C(A,u) : A \in [\mathfrak{c}]^{\leq\omega},\ u \in \mathbb{Z}_2^A\}$ es de cardinalidad $\mathfrak{c}$. Sea $\mathcal{F}$ el producto $\mathcal{E}\times Y$. Es claro que cualquier punto de Y es un conjunto G_δ y que $|\mathcal{F}| = \mathfrak{c}$. Sea $\{(E_\alpha, y_\alpha) : \alpha < \mathfrak{c}\}$ una numeración de $\mathcal{F}$. Por recursión sobre $\alpha < \mathfrak{c}$ definimos un subconjunto $\{x_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ de X tal que las siguientes condiciones se cumplen para toda $\alpha < \mathfrak{c}$:

(i) $x_\alpha \in E_\alpha$;

(ii) $x_\alpha \notin \langle\{x_\beta : \beta < \alpha\}\rangle$.

Condición (ii) es posible pues $|E_\alpha| = 2^{\mathfrak{c}}$. Para cualquier $y \in Y$, la cardinalidad del conjunto $\{\alpha : y_\alpha = y\}$ es igual a $\mathfrak{c}$. Sea $\tilde{X} = \{x_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$. Definimos la función $f : \tilde{X} \to Y$ por $f(x_\alpha) = y_\alpha$ para cada $\alpha < \mathfrak{c}$. El conjunto $\tilde{X}$ es linealmente independiente por (ii), por lo tanto, podemos extender f a un homomorfismo g de $\langle\tilde{X}\rangle$ a Y. Puesto que todo subgrupo del grupo Booleano

X es un sumando directo en X, g se puede extender a un homomorfismo $\varphi\colon X \to Y$.

Sea $P = \{(x, \varphi(x)) : x \in X\}$. Observemos que P es un sugbrupo G_δ-denso de $X \times Y$. Sea U un subconjunto G_δ no vacío del espacio $X \times Y$. Entonces existe $y \in Y$, $A \in [\mathfrak{c}]^{\leq\omega}$, y $u \in \mathbb{Z}_2^\omega$ tal que $C(A, u) \times \{y\} \subset U$. Existe $\alpha < \mathfrak{c}$ tal que $(E_\alpha, y_\alpha) = (C(A, u), y)$. Entonces (i) implica que $(x_\alpha, y_\alpha) \in U$ y, por nuestra definición de φ, $\varphi(x_\alpha) = y_\alpha$, por lo tanto $(x_\alpha, y_\alpha) \in U \cap P$.

Sea $Z = \sigma\mathbb{Z}_2^\omega$ y $H = \{e\} \times Z$, donde e es el elemento identidad de X. Entonces H es un subgrupo metrizable y separable de $X \times Y$. Definimos un subgrupo G de $X \times Y$ como la suma $G = P + H$. Sea p la restricción a G de la proyección natural de $X \times Y$ sobre el primer factor X. Observemos que $G \cap (\{e\} \times Y) = H$, por lo tanto H es un subgrupo derrado de G. En particular G es un subgrupo propio de $X \times Y$. Como H es denso en $\{e\} \times Y$, p es un homomorfismo abierto de G sobre X (ver [18, Lema 1.3]). Por lo tanto, el grupo cociente G/H es topológicamente isomorfo al grupo compacto X.

Como P es un subgrupo G_δ-denso del grupo compacto $X \times Y$, vemos que P es pseudocompacto. Como $P \subset G \subset X \times Y$, el grupo G también es pseudocompacto. Finalmente, un espacio pseudocompacto es realcompacto si y sólo si es compacto, por lo que el grupo G no puede ser realcompacto, ni fuertemente realcompacto. □

3.3. Cocientes y P-modificaciones

Fue demostrado en lema 3.2.3 que para cualquier subgrupo invariante completamente metrizable H de un grupo topológico G, los grupos $(G/H)_\omega$ y G_ω/H_ω son topológicamente isomorfos. En esta sección extenderemos este resultado al caso de cuando H es Čech-completo.

Empezaremos considerando el caso cuando tenemos un subgrupo compacto H de G.

Lema 3.3.1. *Si K es un subgrupo compacto e invariante de un grupo topológico G, entonces el isomorfismo identidad de G_ω/K_ω sobre $(G/K)_\omega$ es un isomorfismo topológico.*

Demostración. Como en la demostración del lema 3.2.3 es suficiente demostrar que el homomorfismo canónico p de G_ω sobre $(G/K)_\omega$ es abierto. Claramente p coincide punto a punto con el homomorfismo cociente $\pi\colon G \to G/K$.

Sea Q un subconjunto G_δ en G que contiene al elemento identidad e en G. Digamos que $Q = \bigcap_{n\in\omega} O_n$, donde O_n es abierto en G para cada $n \in \omega$. Definimos por inducción una secuencia $\{U_n : n \in \omega\}$ de vecindades abiertas simetricas de e en G tales que $U_{n+1}^2 \subset U_n \subset O_n$ para cada $n \in \omega$. Entonces $C = \bigcap_{n\in\omega} U_n$ es un subgrupo cerrado de G tal que $C \subset Q$. Afirmamos que $p(C) = \bigcap_{n\in\omega} p(U_n)$. La inclusión $p(C) \subset \bigcap_{n\in\omega} p(U_n)$ es evidente. Demostremos la otra inclusión. Tomemos un elemento arbitrario $y \in p(\bigcap_{n\in\omega} U_n)$. Entonces $p^{-1}(y) \cap U_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \omega$. Como K es compacto, también lo es la fibra $p^{-1}(y)$. Claramente $\overline{U_{n+1}} \subseteq U_n$ para cada $n \in \omega$, por lo tanto $p^{-1}(y) \cap \bigcap_{n\in\omega} \overline{U_n} \neq \emptyset$ o, equivalentemente, $p^{-1}(y) \cap \bigcap_{n\in\omega} U_n \neq \emptyset$. Concluimos que $y \in \bigcap_{n\in\omega} p(U_n)$, por lo que queda demostrada nuestra afirmación.

Se sigue de $\bigcap_{n\in\omega} p(U_n) = p(C) \subset p(Q)$ que la imagen $p(Q)$ contiene la vecindad abierta $\bigcap_{n\in\omega} p(U_n)$ de la identidad en $(G/H)_\omega$, por lo tanto el homomorfismo p es abierto, lo que demuestra el lema. □

Teorema 3.3.2. *Sea H un subgrupo invariante Čech-completo de un grupo topológico ω-balanceado G. Entonces la función identidad de G_ω/H_ω sobre $(G/H)_\omega$ es un isomorfismo topológico.*

Demostración. La demostración es similar a la prueba del teorema 3.2.5. Como el grupo H es Čech-completo, podemos aplicar el [1, Corolario 4.3.5] para encontrar un subconjunto compacto C de H con una base numerable de vecindades abiertas en H que contienen la identidad e de H. Sea $\{O_n : n \in \omega\}$ una familia de vecindades abiertas de e en G tales que $\{O_n \cap H : n \in \omega\}$ es una base para C en H. Entonces $C = H \cap \bigcap_{n\in\omega} O_n$. Puesto que G es ω-balanceado, toda vecindad abierta de la identidad e en G contiene un subgrupo cerrado invariante de tipo G_δ en G (ver [1, Teorema 3.4.18]). Por lo tanto, para cada $n \in \omega$, existe un subgrupo cerrado e invariante P_n de tipo G_δ en G que cumple que $P_n \subset O_n$. Entonces $P = \bigcap_{n\in\omega} P_n$ es un subgrupo cerrado e invariante de tipo G_δ en G tal que $P \cap H \subset C$.

Es claro que $P \cap H$ es un conjunto G_δ cerrado en H y en C. Como C y $P \cap H$ son compactos, el conjunto $P \cap H$ tiene una base numerable de vecindades abiertas en C. Por la transitividad del carácter en los espacios de Hausdorff, concluimos que el subgrupo compacto $K = P \cap H$ de H tiene una base numerable de vecindades abiertas en H. Ya que los subgrupos H y P de G son invariantes en G, también lo es el subgrupo K. Por lo tanto el grupo cociente H/K es metrizable [1, Lema 4.3.19].

El homomorfismo cociente de H sobre H/K es una función perfecta, y como funciones perfectas preservan Čech-completitud (ver [9, Teorema 3.9.10]), el grupo H/K es Čech-completo, además de metrizable, por lo que se concluye que es completamente metrizable.

El paso final en nuestro argumento es aplicar el Segundo Teorema de Isomorfismos para grupos topológicos el cual implica que $G/H \cong (G/K)/(H/K)$. Como el subgrupo K de G es compacto, la función identidad de G_ω/K_ω sobre $(G/K)_\omega$ es un isomorfismo topológico, por el lema 3.3.1. De la misma forma, los grupos $(H/K)_\omega$ y H_ω/K_ω son topológicamente isomorfos. Sean $H^* = H/K$ y $G^* = G/K$. Usando esta notación tenemos que $G/H \cong G^*/H^*$, $H^*_\omega \cong H_\omega/K_\omega$ y $G^*_\omega \cong G_\omega/K_\omega$. Aplicando los lemas 3.2.3 y 3.3.1 junto con el Segundo Teorema de Isomorfismos podemos concluir que

$$(G/H)_\omega \cong (G^*/H^*)_\omega \cong (G_\omega/K_\omega)/(H_\omega/K_\omega) \cong G_\omega/H_\omega.$$

Por lo tanto, los grupos $(G/H)_\omega$ y G_ω/H_ω son topológicamente isomorfos. □

En los lemas 3.2.3 y 3.3.1 los subgrupos correspondientes H y K del grupo topológico G son Raĭkov completos. También es sabido que todo grupo topológico Čech-completo es Raĭkov completo [1, Teorema 4.3.7]. Por lo tanto, el subgrupo H de G en el teorema 3.3.2 es Raĭkov completo también. Por eso es natural preguntarse si la equivalencia de los grupos $(G/H)_\omega$ y G_ω/H_ω no implican la Raĭkov completitud de H, incluso si H es separable y metrizable:

Proposición 3.3.3. *Si H y K son grupos topológicos arbitrarios y $G = H \times K$, entonces la función identidad de G_ω/H_ω sobre $(G/H)_\omega$ es un isomorfismo topológico.*

Demostración. Es claro que $G/H \cong K$, por tanto $(G/H)_\omega \cong K_\omega$. Como $G_\omega \cong H_\omega \times K_\omega$, tenemos que $G_\omega/H_\omega \cong (H_\omega \times K_\omega)/H_\omega \cong K_\omega$. Por lo tanto, los grupos G_ω/H_ω y $(G/H)_\omega$ son topológicamente isomorfos. □

Bajo ciertas circunstancias, la Raĭkov completitud de un subgrupo cerrado invariante H de un grupo topológico G llega a ser una condición necesaria para que la equivalencia $G_\omega/H_\omega \cong (G/H)_\omega$ sea valida. En la siguiente proposición demostramos que este es el caso cuando el grupo G es localmente pseudocompacto.

Proposición 3.3.4. *Sea H un subgrupo metrizable e invariante de un grupo localmente pseudocompacto G. Entonces la función identidad de G_ω/H_ω sobre $(G/H)_\omega$ es un isomorfismo topológico si y sólo si el grupo H es localmente compacto.*

Demostración. Primero notamos que un grupo metrizable localmente compacto es completamente metrizable. Por eso la suficiencia de la proposición se sigue del lema 3.2.3, incluso sin la suposición de que G es localmente pseudocompacto. Por tanto asumimos que los grupos G_ω/H_ω y $(G/H)_\omega$ son topológicamente isomorfos, donde el subgrupo H de G es metrizable. La completación de Raĭkov de G, ϱG, es un grupo localmente compacto. Como el grupo ϱH es topológicamente isomorfo a la cerradura de H en ϱG y esta cerradura es un subgrupo invariante de ϱG, vemos que el encaje canónico de G/H en $\varrho G/\varrho H$ es un isomorfismo topológico de G/H sobre su imagen (ver [1, Teorema 1.5.16]). Note que el grupo ϱH es metrizable y localmente compacto, por lo tanto ϱH es completamente metrizable. De los lemas 3.2.1 y 3.2.3 se sigue que $(G/H)_\omega$ es un subgrupo topológico del grupo $(\varrho G/\varrho H)_\omega \cong (\varrho G)_\omega/(\varrho H)_\omega$. Como los grupos G_ω/H_ω y $(G/H)_\omega$ son topológicamente isomorfos, vemos que el encaje natural de G_ω/H_ω en $(\varrho G)_\omega/(\varrho H)_\omega$ es un isomorfismo topológico de G_ω/H_ω sobre su imagen o, equivalentemente, la restricción a G_ω del homomorfismo cociente $\pi_\omega\colon (\varrho G)_\omega \to (\varrho G)_\omega/(\varrho H)_\omega$, llamemoslo φ, es una función abierta de G_ω sobre el subgrupo $\pi_\omega(G_\omega)$ de $(\varrho G)_\omega/(\varrho H)_\omega$ y $\pi_\omega(G_\omega) \cong G_\omega/H_\omega$.

Finalmente, el grupo localmente pseudocompacto G intersecta a todo subconjunto G_δ no vacío en ϱG (ver [1, Problema 3.7.J]), es decir, G_ω es un subgrupo denso de $(\varrho G)_\omega$. Como el homomorfismo φ es abierto, [1, Teorema 1.5.16] implica que $H_\omega = (\varrho H)_\omega \cap G_\omega$ es denso en $(\varrho H)_\omega$. Notemos que el grupo $(\varrho H)_\omega$ es discreto ya que ϱH es metrizable. Por lo tanto, $H_\omega = (\varrho H)_\omega$, es decir, $H = \varrho H$. En otras palabras, el grupo H es Raĭkov completo. Por lo tanto, $H = \varrho H$ es un subgrupo cerrado del grupo localmente compacto ϱG, lo que implica la local compacidad de H. $\square$

Notemos que todo grupo Abeliano precompacto es topologicamente isomorfo a un subgrupo cerrado de un grupo Abeliano pseudocompacto (conexo) [31].

Por lo tanto, el siguiente corolario describe una situación similar.

Corolario 3.3.5. *Sea H un subgrupo cerrado metrizable e invariante de un grupo topológico pseudocompacto G. Entonces la función identidad de G_ω/H_ω sobre $(G/H)_\omega$ es un isomorfismo topológico si y sólo si el grupo H es compacto.*

Demostración. De acuerdo con la proposición 3.3.4, los grupos G_ω/H_ω y $(G/H)_\omega$ son topológicamente isomorfos si y sólo si H es localmente compacto. El grupo H es precompacto por ser subgrupo del grupo pseudocompacto G. La conclusión del corolario se sigue del hecho que grupos precompactos localmente compactos son compactos. $\square$

El siguiente corolario extiende el lema 3.3.1 a una clase más general.

Corolario 3.3.6. *Sea K un subgrupo cerrado invariante y pseudocompacto de un grupo topológico G. Entonces la función identidad de G_ω/K_ω sobre $(G/K)_\omega$ es un isomorfismo topológico.*

Demostración. Sea ϱG la completación de Raĭkov del grupo G. Entonces la cerradura de K en ϱG es un grupo compacto topológicamente isomorfo a ϱK. Denotemos por π el homomorfismo cociente de ϱG sobre $\varrho G/\varrho K$ y sea $G^* = \pi^{-1}\pi(G)$.

Entonces $G \subset G^* \subset \varrho G$. Como K es pseudocompacto, intersecta a todo subconjunto G_δ no vacío en ϱK. Por lo tanto, G intersecta a todo subconjunto G_δ no vacío en $G^* = G\cdot\varrho K$. Como K es denso en ϱK, la restricción de π a G es un homomorfismo continuo abierto de G sobre $\pi(G) \cong G/K$ y, similarmente, $G^*/\varrho K \cong \pi(G) \cong G/K$.

El grupo ϱK es compacto y por el lema 3.3.1 implica que

$$(G/K)_\omega \cong (G^*/\varrho K)_\omega \cong (G^*)_\omega/(\varrho K)_\omega. \tag{3.1}$$

Nosotros sabemos que G es G_δ-denso en G^* y K es G_δ-denso en ϱK, es decir, G_ω es denso en $(G^*)_\omega$ y K_ω es denso en $(\varrho K)_\omega$. Por eso podemos concluir que $(G^*)_\omega/(\varrho K)_\omega \cong G_\omega/K_\omega$ en virtud de [1, Teorema 1.5.16]. Esta última afirmación junto con (3.1) implican que $(G/K)_\omega \cong G_\omega/K_\omega$. $\square$

Capítulo 4

Conclusiones

A lo largo de este trabajo se obtuvieron varios resultados en forma positiva y algunos contraejemplos que respondían varias preguntas planteadas en el proyecto predoctoral.

Cabe resaltar que se generalizan resultados conocidos en el ámbito de los grupos fuertemente realcompactos y fuertemente Dieudonné completos y se dan herramientas para el estudio de estos grupos.

En la siguiente sección mencionamos algunos problemas, que hasta donde este autor sabe, todavía siguen sin responderse.

4.1. Problemas Abiertos

La respuesta a la siguiente pregunta generalizará el teorema 2.3.11.

Pregunta 4.1.1. *¿Cuáles son las características que debe tener un grupo (Abeliano) localmente compacto para que tenga una subtopología separable?*

Por otro lado, en el caso de los cocientes de grupos fuertemente realcompactos y fuertemente Dieudonné completos se puede plantear la siguiente pregunta:

Pregunta 4.1.2. *Sean G es un grupo ω-estrecho y N un subgrupo Raĭkov completo invariante de G. ¿Será cierto que G es fuertemente realcompacto implica que G/N es fuertemente realcompacto?*

Para el caso de grupos paratopológicos, se puede dar una definición de grupos fuertemente realcompactos.

Definición 4.1.3. *Sea G un grupo paratopológico regular. Decimos que G es fuertemente realcompacto si es topológicamente isomorfo a un subgrupo cerrado de un producto de grupos paratopológicos regulares segundo numerable.*

Es natural preguntarse si los teoremas que hemos demostrado para grupos topológicos fuertemente realcompactos son válidos para esta nueva clase de grupos paratopológicos. Esto abre una buena línea de investigación. El problema que se encuentra inmediatamente al trabajar con esta clase es que no existe una construcción equivalente a la completación de Raĭkov en grupos paratopológicos.

Bibliografía

[1] Arhangel'skii, A.V. and Tkachenko, M. G. *Topological Groups and Related Structures*, Atlantis Studies in Mathematics, I. Atlantis Press, Paris–Amsterdam; World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, New Jork (2008). xiv+781 pp. ISBN: 978-90-78677-06-2.

[2] Arhangel'skii, A.V. *Cardinal invariants of topological groups. Embeddings and condensations*, (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR 247, (1979), 779–782.

[3] Arhangel'skii, A.V. *General Topology III: Paracompactness, Function Spaces, Descriptive Theory*, Ency. of Math. Sci., 51, (Springer, Berlin 1995).

[4] Arhangel'skii, A.V. *On countably compact topologies on compact groups an on dyadic compacta*, Topol. Appl. 57, (1994) 163–181.

[5] Banakh, T. and Ravsky, A. *A characterization of Tychonoff spaces with applications to paratopological groups*, preprint (http://arxiv.org/abs/1410.1504).

[6] Dikranjan, D.N. and Shakhmatov, D.B. *Hewitt-Marczewski-Pondiczery type theorem for Abelian groups and Markov's potential density*, Proc. Amer. Math Soc. 138 (2010), 2979–2990.

[7] Dikranjan,D.N. and Shakhmatov, D.B. *Forcing hereditarily separable compact-like group topologies on Abelian groups*, Topology Appl. 151 (2005) 2–54.

[8] Druzhinina, I. *Condensations onto connected metrizable spaces*, Houston J. Math. 30 (3), (2004), 751–766.

[9] Engelking, R. *General Topology*, Sigma Ser. Pure Math. 6 (Heldermann, Berlin, 1989).

[10] Fernández, M. *Cerraduras de subgrupos y otros aspectos en grupos para-topológicos*, Tesis doctoral, Universidad Autónoma Metropolitana, México, 2014).

[11] Fuchs, L. *Infinite Abelian Groups, Vol. I*, Pure and Applied Math., Vol. 36-I. (Academic Press, New York-London, 1970).

[12] Gruenhage, G., Tkachuk, V.V. and Wilson, R.G. *Weaker connected and weaker nowhere locally compact topologies for metrizable and similar spaces*, Topology Appl. 120, (2002), 365–384.

[13] I. Guran, *Topological groups close to being Lindelöf*, Soviet Math. Dokl. 23 (1981) 173–175; Russian original in: Dokl. Akad. Nauk SSSR 256 (1981) 1035–1037.

[14] Hernández, C. *Condensations of Tychonoff universal topological algebras*, Comment. Math. Univ. Carolin. 42 (3), (2001), 529–533.

[15] Hernández, C. and Tkachenko, M.G. *A note on ω-modification and completeness concepts*, Bol. Soc. Mat. Mexicana. 3 (8), (2002), 93–96.

[16] Hewitt, E. and Ross, K.A. *Abstract Harmonic Analysis. Vol. I, Structure of Topological Groups, Integration Theory, Group Representations.* Second edition. Fund. Prin. of Math. Sci., 115. (Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979).

[17] Isiwata, T. *Compact and realcompact κ-metrizable extensions.* Topology Proc. 10 (1), (1985), 95–102.

[18] Grant, D. L. *Topological groups which satisfy an open mapping theorem*, Pacific J. Math. **68** (1977), 411–423.

[19] Katz, G.I. *Isomorphic mapping of topological groups to direct product of groups satisfying the first axiom of countability*, Uspekhi Mat. Nauk 8 (1953) 107–113 (in Russian).

[20] Lukász, G. *Compact-like topological groups*, Research and Exposition in Mathematics, 31. Heldermann Verlag, Lemgo, 2009.

[21] Morales, L.F. *Continuous isomorphisms onto separable groups*, Applied General Topology, vol.13, n.2 (2012), p.135-150. ISSN 1989-4147.

[22] Morales, L.F. and Tkachenko, M.G. *Quotients of strongly realcompact groups*, Topological Algebra and its Applications, vol.4, (2016), p.9-17. ISSN: 2299-3231.

[23] Ol'shanskiĭ, A.I. *A remark on a countable non-topologizable group*, Vestnik Mosk. Gos. Univ. Ser. I Mat. Mekh. no. 3, p. 103 (in Russian), 1980.

[24] Pestov, V. G. *Embeddings and condensations of topological groups*, Math. Notes **31**, 3–4, 228–230. Russian original in: Mat. Zametki **31** (1982), 442–446.

[25] Pestov, V. G. *An Example of nonmetrizable minimal topological group whose identity has the type G_δ*. (Russian) Ukrain. Mat. Zh. 37 (6), (1985), 795–796.

[26] Shakhmatov, D.B. *Condensations of universal topological algebras preserving continuity of operations and decreasing weights*, (Russian) Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. (2), (1984), 42–45.

[27] Tkachenko, M.G., Villegas, L., Hernández, C., and Rendón, O. *Grupos Topológicos*, Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa; México D.F. (1997). xiii+219 pp. ISBN: 970-654-141-1.

[28] Tkachenko, M.G., Tkachuk, V.V., Uspenskij, V.V., and Wilson, R.G. *In quest of weaker connected topologies*, Comment. Math. Univ. Carolin. 37 (4), (1996), 825–841.

[29] Roelcke, W. and Dierolf, S. *Uniform Structures on Topological Groups and Their Quotients*, McGraw-Hill (1981).

[30] Tkachenko, M.G., Hernández-García, C., and López Ramírez, M.A. *Strong realcompactness and strong Dieudonné completeness in topological groups*, Topol. Appl. **159** (2012), 1948–1955.

[31] Ursul, M. *Embeddings of locally precompact groups in locally pseudocompact ones*, Izv. Akad. Nauk Moldav. SSR Ser. Fiz.-Tekh. Mat. Nauk **3** (1989), 54–56 (in Russian).

[32] Yengulalp, L. *Coarser connected metrizable topologies*, Topology Appl. 157 (14), (2010), 2172-2179.