

**Nuevas soluciones de las ecuaciones  
de Einstein para los modelos de  
universo Mixmaster y Taub y el  
fenómeno de la antigravedad**

# Contenido

- Resumen
  
- Capítulo 1  
Introducción
  
- Capítulo 2  
Relatividad General Compleja
  
- Capítulo 3  
El modelo de universo Mixmaster y las primeras derivadas
  
- Capítulo 4  
A).-Las soluciones de las ecuaciones de Einstein para el modelo de universo Mixmaster  
  
B).-Condiciones de realidad y algunas consecuencias
  
- Capítulo 5  
El modelo de universo de Taub y las nuevas soluciones

- Capítulo 6  
El modelo de universo de Taub vacío como universo acelerado
- Capítulo 7  
El modelo de universo de Taub vacío y el fenómeno de la Inflación
- Capítulo 8  
Comentarios y conclusiones  
A).- Relatividad General Compleja  
B).- El universo de Taub y el fenómeno de la antigravedad
- Apéndice A  
Universo Bianchi tipo IX
- Apéndice B  
Cálculo con el programa “Mathemática”: Las soluciones satisfacen las ecuaciones
- Referencias

# Resumen

En la primera parte de este trabajo se obtiene la solución analítica a un problema cosmológico largamente discutido. Partiendo de las ecuaciones de Einstein de la Relatividad General clásica se encuentran soluciones para el modelo de universo Mixmaster, que pertenecen a la Relatividad General compleja. La estrategia se basa en buscar primero una separación de las primeras derivadas, para posteriormente obtener las ecuaciones diferenciales con variables separadas. Las condiciones de realidad se imponen de manera directa sobre el tiempo cosmológico. Finalmente, cabe señalar lo significativo que resulta, que las ecuaciones de Einstein clásicas para el modelo de universo Mixmaster, cuya integrabilidad ha sido extensamente discutida, presenten soluciones complejas.

En la segunda parte de este trabajo, a través de una estrategia particular de separación de variables en el tiempo cosmológico, se encuentra una nueva familia de

soluciones de las ecuaciones de Einstein para el modelo de universo de Taub, mucho más general que la solución conocida. Entre las características de las nuevas soluciones se destaca el fenómeno de la antigravedad. Este fenómeno antigravitatorio convierte al universo de Taub en un universo acelerado.

# Capítulo 1

## Introducción

Por siempre el firmamento ha fascinado a los habitantes del planeta tierra. Esta fascinación, en buena medida, ha dado lugar al desarrollo de la cosmología( estudio del universo y sus leyes). Durante la mayor parte de la historia de la física y la astronomía no hubo fundamentos adecuados, de observación y teóricos, sobre los cuales construir una historia formal y veraz del universo. La cosmología moderna surge al escenario cuando Albert Einstein publica la Teoría de la Relatividad General, enmarcada en desarrollos matemáticos tensoriales muy complicados. Resolver las ecuaciones correspondientes, para el caso general, es prácticamente imposible. Entre otras, una de las alternativas ha sido simplificar el problema mediante la introducción de modelos que representan al universo de una manera particular; de manera general, en esta teoría, se esperaría que la geometría del espacio-tiempo del universo esté descrita por estas ecuaciones de la relatividad general.

Se han desarrollado un gran número de modelos de universo para las ecuaciones de la relatividad general, algunos muy estudiados con soluciones exactas y otros, también estudiados, pero con soluciones aproximadas.

El modelo cosmológico Bianchi tipo IX es una concepción del universo como un espacio homogéneo anisotrópico y un importante cues-

tionamiento relativo al problema de las singularidades de las componentes del tensor métrico [1]-[8]. La dinámica Mixmaster está definida como la evolución del modelo cosmológico diagonal vacío espacialmente homogéneo Bianchi tipo IX [9].

Ha habido controversia acerca de las soluciones no-triviales de las ecuaciones de Einstein para modelos vacíos. En estos casos se argumenta que de la misma manera que las ecuaciones de Laplace tienen soluciones no-triviales en ausencia del término fuente, así también en las ecuaciones de la relatividad general, cambiando las condiciones de frontera por condiciones iniciales, es posible obtener soluciones no-triviales.

De hecho, se han encontrado una gran cantidad de soluciones de las ecuaciones de Einstein para el espacio vacío, para las cuales, el tensor correspondiente de Riemann-Christoffel es en todos lados de tipo N en el esquema de clasificación de Petrov. El interés en estas soluciones reside, principalmente, en ciertas analogías formales que tienen con las soluciones onda-plana de las ecuaciones de Maxwell del espacio vacío. Pero así como las soluciones onda-plana electromagnéticas, éstas llamadas ahora de campo gravitacional nulo, se tienen que considerar como una idealización, en el sentido de que ambos tipos de soluciones no están relacionadas a ninguna fuente estructural, como se requeriría de soluciones de onda producidas por algún medio material.

La idea que guía la mayoría de las discusiones sobre las soluciones tipo-onda de las ecuaciones de campo de Einstein, es que el tensor de Riemann-Christoffel  $R_{\mu\nu\rho\sigma}$  juega el papel de una intensidad de campo en la teoría gravitacional de Einstein, análogo al papel que representa

el tensor electromagnético  $F_{\mu\nu}$  y que  $g_{\mu\nu}$  es el "potencial" de este campo análogo al vector potencial  $A_\mu$ . No obstante, la analogía no es completa, puesto que  $R_{\mu\nu\rho\sigma}$  depende de la segunda derivada de  $g_{\mu\nu}$  mientras que  $F_{\mu\nu}$  depende solamente de la primera derivada de  $A_\mu$ . Es necesario también enfatizar algo acerca de la naturaleza formal de esta analogía. Muchas de las propiedades físicas de las ondas electromagnéticas( por ejemplo, su habilidad para transportar energía y momento ) tienen todavía que ser demostradas a aplicar en el caso de ondas gravitacionales.

Una solución aproximada del modelo Bianchi Tipo IX, en las ecuaciones de Einstein de la relatividad general, es la obtenida por BKL (Belinskii, Khalatnikov and Lifshitz) entre 1963 y 1985 [10]-[14]. Por ese tiempo, Misner [9], [15] realizó un estudio de este modelo de universo al cual él denominó 'Mixmaster' donde se obtiene un potencial triangular en el cual una partícula representando al universo se mueve. Tanto BKL como Misner, hacen una descripción de la evolución del modelo a través de choques y las llamadas épocas de Kasner. Por una parte BKL encuentra una solución aproximada, que se construye a partir de soluciones parciales de un sistema de ecuaciones diferenciales reducido, correspondientes a periodos sucesivos(eras), de manera similar a choques y reflexiones en una pared potencial, al final, todo esto se integra como eras de Kasner. Misner por otra parte, usa la técnica ADM(Arnowitt, Deser, Misner) [16]-[18] para encontrar el comportamiento aproximado de este modelo de universo, que al final, también se traduce en choques y reflexiones, similar, en este sentido, a la conducta descrita por BKL. Trabajos posteriores en esta dirección[19]-[23] han tratado de clarificar y extender los resultados obtenidos por BKL y Misner.



Los resultados numéricos también han sido abundantes [23]-[27]. Una parte importante de ellos muestra el comportamiento descrito por BKL y Misner en cuanto a los choques y a las eras de Kasner. No obstante, hasta ahora no ha sido posible obtener una solución analítica que describa e incluya en detalle la imagen del modelo de universo Bianchi tipo IX que BKL y Misner concibieron; particularmente en cuanto a su comportamiento caótico[24]-[32], incluyendo, en su caso, los posibles choques y los intermedios considerados como eras de Kasner. La inexistencia de una solución analítica para el universo Bianchi tipo IX ha conducido a especulaciones, particularmente sobre si este modelo sería caótico, o no-integrable [31], [32]. Otra parte del problema especulativo, alrededor del universo Bianchi IX ha estado centrada en la cuantización canónica de las ecuaciones de la Relatividad General[8], [16], [33]-[35]. En esta parte, se han obtenido algunas soluciones de la ecuación de Wheeler-DeWitt (WDW) para la cosmología Bianchi IX [36], [37], [38]. Estas soluciones cuánticas se podrían comparar con soluciones clásicas, tratando de establecer alguna correspondencia, con la salvedad, de que las ecuaciones diferenciales no-lineales pueden tener muchas soluciones, hecho que en algunos casos dificultaría encontrar dicha correspondencia. Esto, entre otras cosas ha dado lugar a importantes desarrollos en otras direcciones, como 'simetrías ocultas'[36], [39], [40], 'nuevas variables' [35] y 'supersimetrías' [39], [40]. Estos resultados representan un esfuerzo importante en el estudio de la evolución del universo, un estudio que ha estado limitado en gran medida por nuestra falta de capacidad o insuficiencia para extraer mayor información de uno de los modelos de universo más estudiados en la cosmología, el modelo de universo Bianchi tipo IX[41].

Por otra parte, la búsqueda de nuevas soluciones o una extensión de

las ya conocidas, empezó a dar impulso a la Relatividad compleja a principios de los 1970's. Entre otros logros, se amplió la Relatividad General Clásica al espacio complejo de Minkowski[42], [43]. Posteriormente, dentro del ámbito de las soluciones de las ecuaciones Einstein-Maxwell, ocurrió una transición de la geometría de Riemann clásica al espacio complejo de Riemann de cuatro dimensiones donde existen condiciones para que se satisfaga  $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - 1/2g_{\alpha\beta}R = 0$  [44]. Una de las intenciones de fondo ha sido generar nuevas soluciones reales a partir de las extensiones complejas, como en el caso de la ecuación de Laplace o la ecuación del oscilador armónico, extrayendo la parte real de las soluciones complejas[45]-[47]. La misma escuela de pensamiento ha intentado desarrollar una teoría compleja de la Relatividad donde las soluciones reales se presentan como un subconjunto de las soluciones complejas[48], [49]. Recientemente, la tendencia apunta hacia el hecho de que la Relatividad General Clásica esté incrustada o contenida en una teoría compleja más grande, para posteriormente restringirla de manera conveniente imponiendo condiciones de realidad[50], [51]. En Teoría Cuántica, por ejemplo, de principio se ignoran las condiciones de realidad, se resuelven los problemas en cuanto a las constricciones de la teoría para posteriormente imponer las condiciones de realidad en los productos internos permisibles, los cuales requieren que los observables clásicos reales se transformen en operadores auto-adjuntos. Esto no se ha podido dar, hasta ahora, en gravitación.

En la primera parte de este trabajo, se presenta una solución particular exacta para el modelo de universo Mixmaster.

Otro modelo de universo, también muy estudiado, es el modelo de universo de Taub. Este universo es una simplificación geométrica de

un modelo más general [53]: el modelo Bianchi tipo IX [1]-[5] [34] cuya métrica, en el universo de Taub, se reduce al caso axisimétrico [53] [54] [55]. El universo de Taub es un modelo cosmológico homogéneo, anisotrópico de mayor simetría incrustado en uno de menor simetría, el modelo de universo Bianchi tipo IX( el universo Mixmaster) [14] [9] [15].

Desde hace algún tiempo, se han conocido algunas soluciones analíticas particulares en el tiempo logarítmico para el modelo de universo de Taub [54] [55]. En el tiempo cosmológico o tiempo propio exclusivamente, la separación de variables, para obtener su solución, parece ser extremadamente difícil. Por tanto, la descripción de la evolución temporal de los factores de escala, la tri-curvatura y otras variables del modelo de universo de Taub usualmente se expresan en términos del tiempo logarítmico [54] [55] [14].

Aunque gran cantidad de la especulación alrededor de la cuantización de las ecuaciones de la Relatividad General se ha centrado en el modelo de universo Bianchi tipo IX [17] [33], el modelo de universo de Taub se ha involucrado en desarrollos tales como 'Cuantización de microsuperespacios supersimétricos' [56], 'Métrica Hiperkahler' [57] y 'El problema cuántico del tiempo' [58]. Sin duda, el modelo de universo de Taub realmente tiene relevancia, como lo denotan estos desarrollos. Más aun, se han encontrado también algunas soluciones exactas para la ecuación de WDW en la métrica del modelo de universo de Taub [59], [60]. Dado el caso, podría haber algo de dificultad en comparar soluciones clásicas con estas soluciones cuánticas [36], las ecuaciones no-lineales pueden tener múltiples soluciones. En parte, esta situación da lugar a buscar en otras direcciones, por ejemplo, desarrollar un estudio más completo

y extraer más información del universo de Taub.

En la segunda parte del presente trabajo se proponen nuevas soluciones clásicas para el modelo de Taub con diferentes características que pueden dar lugar a nuevos avances en cosmología.

En el mismo contexto, ahora considerando la idea de antigravedad introducida a la cosmología por Einstein a través de la constante cosmológica y, en particular, las más recientes contribuciones de A. Guth (esto último, intentando resolver, entre otros, los llamados problemas cosmológicos: planidad y el horizonte del universo [61]) se puede mostrar que el universo de Taub conlleva las condiciones para que el universo manifieste el fenómeno de la antigravedad. Resulta realmente interesante que, sin introducir el término de la constante cosmológica, sin requerir condiciones extremas de presión, como en la etapa inflacionaria del universo ( $p = -\rho$ ) [54] [62] [63], ni tampoco introducir o considerar masas negativas en el universo [64], el modelo de Taub muestra el fenómeno antigravitatorio de manera natural, sin recurrir a mayores consideraciones y sin incluir condiciones adicionales en el modelo mismo.

Puntualizando, en la primera parte de este trabajo se encuentra una solución, sin la extensión compleja tradicional, de las ecuaciones de vacío de Einstein para el modelo de universo Mixmaster. Para este fin, en algún punto del desarrollo matemático se debe considerar que la métrica utilizada pertenece a la Relatividad General Compleja. En la segunda parte de este trabajo, se encuentran nuevas soluciones para el modelo de universo de Taub, soluciones que incluyen en su evolución

temporal el fenómeno de la antigravedad.

Un hecho que se debe marcar es que, no obstante que el modelo de universo de Taub es una simplificación del modelo de universo Mixmaster, al introducir esta simplificación en la solución encontrada para el modelo Mixmaster sólo se obtiene otro caso particular distinto a la solución encontrada para el modelo de Taub. Esto se explica con mayor detalle en el capítulo 5 y en las conclusiones.

# Capítulo 2

## Relatividad General Compleja

Una vez que Albert Einstein publicó la teoría de la relatividad general, cuyo marco matemático tensorial se basa en la ecuación (1) (ver apéndice A), se dio inicio a la cosmología moderna.

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - 1/2g_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu} \quad (1)$$

En las últimas décadas una parte de la comunidad científica, con base en la cosmología, intenta fundamentar una historia y un destino posible del universo. En un principio se consideró, quizá por simplicidad matemática, a las componentes del tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  como funciones reales de variable real. En este trabajo se muestra que las componentes del tensor métrico pueden ser funciones complejas de variable compleja. En este capítulo se presenta un panorama sucinto de algunas cuestiones relacionadas con la relatividad general compleja, que involucra a esta generalización.

Una variedad es el conjunto de puntos sobre el cual se coloca la geometría del espacio-tiempo. En relatividad general la variedad es el espacio-tiempo. Se dice que cuando se tiene un espacio-tiempo complejo, es decir, la métrica  $g_{\mu\nu}$  resulta estar compuesta de funciones complejas, ya sea de variable real o de variable compleja, entonces la relatividad general es compleja.

Las dificultades tradicionales para encontrar soluciones a las ecua-

ciones de la relatividad general, en gran medida, han dado lugar a la extensión de la relatividad general real a la compleja. El enfoque propuesto para obtener esta extensión al campo complejo se puede puntualizar de la forma siguiente [46],[47]

- a) establecer las ecuaciones complejas correspondientes a las ecuaciones reales de la relatividad general clásica
- b) establecer métricas complejas correspondientes a las métricas de la relatividad general clásica
- c) en los casos anteriores establecer condiciones de realidad que restrinjan el espacio-tiempo complejo a un subespacio, es decir, quedarse con una rebanada que limita el dominio de las funciones de la métrica.

En otras palabras, siendo limitado el número de soluciones reales de las ecuaciones de la relatividad general, se intenta obtener otras soluciones reales utilizando variedades complejas.

El tratamiento complejo se ha desarrollado, según algunos autores, a través de descubrimientos accidentales de transformaciones de coordenadas complejas, que permiten proceder de una solución real a otra solución real. Por otra parte, se reconoce que este procedimiento no está acabado.

El trabajo desarrollado ha sido intenso y también se puede puntualizar de la siguiente forma

- i*) extensión analítica o extensión compleja
- ii*) clasificación de las métricas obtenidas y
- iii*) condiciones de realidad.

Con esto se trata de establecer los primeros ladrillos del andamiaje matemático de una teoría de la relatividad general compleja, los cuales, a través de un procedimiento de síntesis (ahora desconocido) pudiera generar soluciones físicas reales [46].

Entre otras, la propuesta en algunos casos es que la extensión compleja se obtenga a partir de lo que se conoce como métricas SKS o DKS(doble Kerr-Schild) [47]

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2hK_{\mu}K_{\nu} \quad : SKS \quad (2)$$

con

$$\eta^{\mu\nu} K_{\mu}K_{\nu} = 0 \quad (3)$$

y

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + HK_{\mu}K_{\nu} + Ll_{\mu}l_{\nu} \quad : DKS \quad (4)$$

Con



$$\eta^{\mu\nu} K_\mu K_\nu = \eta^{\mu\nu} l_\mu l_\nu = 0 \quad (5)$$

donde  $\eta_{\mu\nu}$  es la métrica de Minkowski del espacio plano y  $K_\mu$ ,  $K_\nu$ ,  $l_\mu$  y  $l_\nu$  son complejos nulos y mutuamente ortogonales con respecto a  $\eta_{\mu\nu}$  y  $g_{\mu\nu}$ .

A partir de estas propuestas de extensión compleja, se clasifican las métricas y se trata de obtener el cuerpo matemático en la modalidad compleja. Es decir, se trata de obtener en última instancia una métrica real a partir de una compleja.

Otro enfoque ha sido la formulación de la relatividad general en términos de las variables de Ashtekar( formulación hamiltoniana de la relatividad general con base en ciertas variables espinoriales ). En otros términos, se reexpresa la relatividad como una teoría de una conexión y esto hace posible incorporar métodos que han resultado útiles y han tenido éxito en la descripción de teorías de Yang-Mills. Con las nuevas variables, las constricciones que caracterizan a la relatividad general parecen ser o resultan ser polinomiales en este espacio fase de las variables.

El programa original de Ashtekar se formuló como una ruta alternativa para la relatividad clásica y su cuantización canónica en contrapartida al enfoque estandar del ADM( Arnowit, Deser y Misner ).

Actualmente, después del programa de Ashtekar, con este enfoque

en buena parte se tiene la intención de reanalizar la relatividad general compleja de Ashtekar junto con las condiciones de realidad a la luz de la orientación canónica de Dirac( conteo de grados de libertad que surgen de la teoría compleja ) para constreñir al sistema. Se empieza con las condiciones de realidad, impuestas a mano, pero se consideran como constricciones primarias en la acción auto-dual de Ashtekar [50], también, en una formulación tipo Yang-Mills de interacciones gravitacionales en las cuales no sólo el tensor energía-momento, sino también su spin se acopla a la geometría dinámica Riemann-Cartan con torsión  $T^\alpha$  y curvatura  $R^{\alpha\beta}$  [65]

$$S = \int dt d^3x [-i\tilde{e}^{ai}\dot{A} - NS - N^a\nu_a - N^iG_i] \quad (6)$$

donde

$$S = \epsilon_{ijk}\tilde{e}^{ai}\tilde{e}^{bj}F_{ab}^k, \quad \nu_a = \tilde{e}_j^b F_{ab}^j, \quad G_i = D_a\tilde{e}_i^a \quad (7)$$

son las constricciones de la teoría y  $N$ ,  $N^a$ ,  $N^i$  son multiplicadores de Lagrange. Las variables complejas canónicas son: (a)  $\tilde{e}^{ai} = ee^{ai}$ , donde  $e^{ai}$  es la triada( $e^{ai}e_i^b = q^{ab}$ ,  $q^{ab}$  es la tri-métrica espacial) y  $a, b, \dots = 1, 2, 3$  son índices espaciales, en tanto que  $i, j, \dots = 1, 2, 3$ , son índices internos del grupo SO(3). También  $e = \det e_{bj}$  con  $e_{bj}$  la inversa de  $e^{ai}$ , (b)  $A_{ai}$  es la proyección tri-dimensional de la conexión auto-dual y  $F_{ab}^i = \partial_a A_b^i - \partial_b A_a^i + \epsilon_{jk}^i A_a^j A_b^k$  es la curvatura correspondiente. Este par de variables canónicamente conjugadas satisfacen

$$\{\tilde{e}^{ai}(x), A_{bj}(y)\} = i\delta_b^a \delta_j^i \delta^3(x, y) \quad (8)$$

Con estos paréntesis de Poisson, las constricciones antes mencionadas son de primera clase, es decir, para cualquiera par  $Q$  y  $R$ , se tiene

$$\{Q, R\}_{A, \tilde{e}} = 0 \quad (9)$$

Después, sistemáticamente aplicando el procedimiento de Dirac [51], mostrando que estas condiciones de realidad terminan siendo constricciones de segunda clase (no se cumple la expresión anterior), a continuación se recobra la formulación Hamiltoniana estandar de la relatividad general en su forma canónica de Palatini.

Con todo esto se trata de mostrar que es posible extraer una descripción canónica satisfactoria de la relatividad general partiendo de la teoría compleja.

Concluyendo esta parte se puntualiza lo siguiente:

*a)* una visión compleja de la relatividad general nos ayuda a clasificar soluciones reales y a relacionarlas unas con otras

*b)* Este punto de vista de la teoría compleja nos ayuda a obtener nuevas soluciones

*c)* También nos ayuda a encontrar bloques de construcción de nuevas soluciones y estos se pueden usar para construir soluciones reales

*d)* Al final se podrían sumar soluciones conocidas de manera no-lineal para obtener nuevas soluciones.

Por otra parte, aunque se ha dedicado gran cantidad de trabajo a este propósito puntualizado, muchos autores reconocen que falta mucho por hacer, en este enfoque complejo de la relatividad general, para ver nuevas soluciones de las ecuaciones de Einstein.

Un poco diferente ha sido el punto de vista del trabajo que se describe en el capítulo siguiente y que conforma la primera parte medular de este trabajo de tesis. Se resuelven las ecuaciones clásicas de Einstein de la Relatividad General y se encuentran soluciones que son funciones complejas de variable compleja, a las cuales se les impone la condición de realidad de que el tiempo cosmológico sea real mayor que cero. En otras palabras, para encontrar una solución particular exacta para el modelo de universo Mixmaster fue necesario considerar que la métrica esta integrada de funciones complejas de variable compleja.

# Capítulo 3

## El modelo de universo Mixmaster y las primeras derivadas

Sin duda, resulta sumamente estimulante el estudio teórico del universo, lo es más todavía, incursionar en la pretensión de responder a preguntas tales como: ¿ Surgió el universo, realmente, de la nada?, ¿Pudo crearse el universo a sí mismo? Estas y otras preguntas han mantenido un gran interés en la ciencia de la cosmología. Es difícil decir que tan cerca se está, en la actualidad, de poder definir el origen y destino del universo. No obstante, se ha realizado una gran cantidad de trabajo en esta dirección. Gran parte de la cosmología moderna se basa principalmente en las soluciones de las ecuaciones de Einstein para los modelos homogéneos e isotrópicos tipo Friedmann. Entre otras cosas, con objeto de prescindir de la suposición de condiciones iniciales especiales para estos modelos, se han incluido en el escenario los modelos anisotrópicos. Uno de los modelos anisotrópicos más estudiados de la cosmología resulta ser el modelo de universo Bianchi tipo IX.

Como antes se mencionó, el modelo de universo Mixmaster es la evolución temporal de la cosmología Bianchi tipo IX diagonal vacío. Las correspondientes ecuaciones de Einstein son[?](ver apéndice A, ecuaciones A78, A79, A80, A81 y A82):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{da}{dt} bc \right) + \frac{1}{2} (abc)^{-1} [a^4 - (b^2 - c^2)^2] &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left( a \frac{db}{dt} c \right) + \frac{1}{2} (abc)^{-1} [b^4 - (c^2 - a^2)^2] &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( ab \frac{dc}{dt} \right) + \frac{1}{2} (abc)^{-1} [c^4 - (a^2 - b^2)^2] &= 0 \\ a^{-1} \frac{d^2}{dt^2} a + b^{-1} \frac{d^2}{dt^2} b + c^{-1} \frac{d^2}{dt^2} c &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Con la transformación

$$\begin{aligned} X = a^2 = \exp[2\alpha], \quad Y = b^2 = \exp[2\beta], \\ Z = c^2 = \exp[2\gamma] \end{aligned} \quad (12)$$

y

$$dt = V d\tau \quad (13)$$

donde  $V = abc$ , substituidas en ecuaciones (10) y (11), se obtiene que [?]:

$$\begin{aligned} 2 \frac{d^2}{d\tau^2} \alpha &= (\exp[2\beta] - \exp[2\gamma])^2 - \exp[4\alpha] \\ 2 \frac{d^2}{d\tau^2} \beta &= (\exp[2\gamma] - \exp[2\alpha])^2 - \exp[4\beta] \end{aligned} \quad (14)$$

$$2\frac{d^2}{d\tau^2}\gamma = (\exp[2\alpha] - \exp[2\beta])^2 - \exp[4\gamma]$$

$$\frac{d\alpha}{d\tau}\frac{d\beta}{d\tau} + \frac{d\gamma}{d\tau}\left(\frac{d\alpha}{d\tau} + \frac{d\beta}{d\tau}\right) = \frac{1}{4}\left(2\frac{d^2}{d\tau^2}\alpha + 2\frac{d^2}{d\tau^2}\beta + 2\frac{d^2}{d\tau^2}\gamma\right) \quad (15)$$

Después de la transformación, las ecuaciones dinámicas y de restricción de Einstein se han simplificado al menos en apariencia. No obstante, se requiere ahora darles otra forma que resulta conveniente para la primera integración.

Dadas ecuaciones (12), ecuaciones (14) se escriben como:

$$2\frac{d^2}{d\tau^2}\alpha = [(Y - Z) - X][(Y - Z) + X]$$

$$2\frac{d^2}{d\tau^2}\beta = [(X - Z) - Y][(X - Z) + Y] \quad (16)$$

$$2\frac{d^2}{d\tau^2}\gamma = [(X - Y) - Z][(X - Y) + Z]$$

Ahora, con  $g_1$ ,  $g_2$  y  $g_3$  definidas de la siguiente manera:

$$g_1 = X + Y - Z \quad (17)$$

$$g_2 = X - Y - Z \quad (18)$$

$$g_3 = -X + Y - Z, \quad (19)$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
2\frac{d^2}{d\tau^2}\alpha &= g_1g_3 \\
2\frac{d^2}{d\tau^2}\beta &= g_1g_2 \\
2\frac{d^2}{d\tau^2}\gamma &= -g_2g_3
\end{aligned} \tag{20}$$

Hasta aquí, se ha logrado una aparente simplificación de las ecuaciones que, al menos sí las convierte en un sistema más manejable.

Una primera integral de este sistema es ecuación (15) la cual se puede reescribir como

$$\frac{d\alpha}{d\tau}\frac{d\beta}{d\tau} + \frac{d\gamma}{d\tau}\left(\frac{d\alpha}{d\tau} + \frac{d\beta}{d\tau}\right) = \frac{1}{4}(g_1g_2 + g_1g_3 - g_2g_3) \tag{21}$$

Esta ecuación es en efecto una restricción para cualquier solución para el sistema de ecuaciones con las segundas derivadas. En este caso, a pesar de haberse obtenido una primera integral, obtener la segunda parece una tarea muy complicada, debido a la mezcla que se tiene de las primeras derivadas.

Una manera de enfocar el problema de encontrar solución a este sistema de ecuaciones es buscar  $F1$ ,  $F2$  y  $F3$  tal que

$$\frac{d}{d\tau}F1 = g_1g_3$$



$$\frac{d}{d\tau}F2 = g_1g_2 \quad (22)$$

$$\frac{d}{d\tau}F3 = -g_2g_3$$

Después de una serie de consideraciones sobre la simetría que pudiera haber en las posibles derivadas parciales de las primeras integrales tales como  $\partial/\partial h_i(dh_j/d\tau) = \pm\partial/\partial h_i(dh_k/d\tau)$ , donde  $h_i, h_j$  y  $h_k$  pueden ser cualquiera de  $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$ , aparte de las soluciones triviales, una posible triada para  $F1, F2$  y  $F3$  parece ser

$$F1 = \sqrt{-1} g_2$$

$$F2 = \sqrt{-1} g_3 \quad (23)$$

$$F3 = -\sqrt{-1} g_1$$

Esto como consecuencia nos permite escribir para las primeras derivadas separadas lo siguiente

$$2\frac{d}{d\tau}\alpha = \sqrt{-1} g_2$$

$$2\frac{d}{d\tau}\beta = \sqrt{-1} g_3 \quad (24)$$

$$2\frac{d}{d\tau}\gamma = -\sqrt{-1} g_1$$

Con el fin de mostrar que tal separación satisface las ecuaciones dinámicas de Einstein y su constricción, se deriva con respecto a  $\tau$

$$\begin{aligned}
2\frac{d^2}{d\tau^2}\alpha &= \sqrt{-1} [X(2\frac{d}{d\tau}\alpha) - Y(2\frac{d}{d\tau}\beta) - Z(2\frac{d}{d\tau}\gamma)] \\
2\frac{d^2}{d\tau^2}\beta &= \sqrt{-1} [-X(2\frac{d}{d\tau}\alpha) + Y(2\frac{d}{d\tau}\beta) - Z(2\frac{d}{d\tau}\gamma)] \\
2\frac{d^2}{d\tau^2}\gamma &= -\sqrt{-1} [X(2\frac{d}{d\tau}\alpha) + Y(2\frac{d}{d\tau}\beta) - Z(2\frac{d}{d\tau}\gamma)] \quad (25)
\end{aligned}$$

Para la ecuación de constricción se tiene que la substitución directa de las primeras derivadas reproduce el miembro derecho en ecuación (21 ).

Substituyendo (17), (18) y (19) en las primeras derivadas de (24) se encuentra que (25) se pueden escribir como

$$\begin{aligned}
2\frac{d^2}{d\tau^2}\alpha &= g_1g_3 \\
2\frac{d^2}{d\tau^2}\beta &= g_1g_2 \\
2\frac{d^2}{d\tau^2}\gamma &= -g_2g_3
\end{aligned} \quad (26)$$

Con estas operaciones realizadas se demuestra que se ha obtenido una primera integral con primeras derivadas separadas.

Aquí es el punto donde ha sido necesario considerar funciones complejas en el proceso de integración. Al introducir el factor  $\sqrt{-1}$  en ecuaciones (23), se verá que esto da lugar a que  $X, Y, Z, \tau$  sean funciones complejas de variable compleja. Por tanto, la variedad pasa de 4 dimensiones a una variedad de 8 dimensiones.

# Capítulo 4

## A.-Las soluciones de las ecuaciones de Einstein para el modelo de universo Mixmaster

Con el fin de obtener la segunda integral de las ecuaciones dinámicas de Einstein, es decir, resolver el sistema (20), se requiere una relación adicional entre los cuadrados de los factores de escala  $X, Y, Z$ .

Multiplicando por  $g_2$  la primera ecuación de (22), por  $g_3$  la segunda y por  $g_1$  la tercera se obtiene

$$\begin{aligned}g_2 \frac{d}{d\tau} F1 &= g_1 g_2 g_3 \\g_3 \frac{d}{d\tau} F2 &= g_1 g_2 g_3 \\g_1 \frac{d}{d\tau} F3 &= -g_1 g_2 g_3\end{aligned}\tag{27}$$

Ahora se substituyen ecuaciones (23) en (26) para encontrar que

$$\begin{aligned}g_2 \frac{d}{d\tau} \sqrt{-1} g_2 &= g_1 g_2 g_3 \\g_3 \frac{d}{d\tau} \sqrt{-1} g_3 &= g_1 g_2 g_3 \\g_1 \frac{d}{d\tau} - \sqrt{-1} g_1 &= -g_1 g_2 g_3\end{aligned}\tag{28}$$

consecuentemente existe la relación siguiente entre las derivadas de los cuadrados de las  $g$ 's:

$$\frac{d}{d\tau}(g_2)^2 = \frac{d}{d\tau}(g_3)^2 = \frac{d}{d\tau}(g_1)^2 \quad (29)$$

Integrando estas expresiones se obtiene lo siguiente

$$(g_3)^2 = (g_1)^2 - 4A \quad (30)$$

donde la constante de integración se elige como  $(-4A)$ . Sustituyendo las  $g$ 's en términos de  $X, Y, Z$ , por tanto

$$(-X + Y - Z)^2 = (X + Y - Z)^2 - 4A \quad (31)$$

y

$$(g_2)^2 = (g_1)^2 + 4B \quad (32)$$

donde la constante de integración se elige como  $(4B)$ , por tanto

$$(X - Y - Z)^2 = (X + Y - Z)^2 + 4B \quad (33)$$

Con algebra elemental, las relaciones entre los cuadrados de los factores de escala quedan como

$$X(Y - Z) = A$$

$$Y(Z - X) = B \quad (34)$$

$$Z(X - Y) = -(A + B)$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes diferentes de cero. Considerando que sólo las primeras dos ecuaciones son independientes, se puede ver que la tercera se obtiene de las otras dos.

Con la transformación (12) y la relación entre los cuadrados de los factores de escala, ecuaciones (14) o (16) se pueden escribir como

$$\begin{aligned} [X \frac{d^2}{d\tau^2} X - (\frac{d}{d\tau} X)^2] X^{-2} &= A^2 X^{-2} - X^2 \\ [Y \frac{d^2}{d\tau^2} Y - (\frac{d}{d\tau} Y)^2] Y^{-2} &= B^2 Y^{-2} - Y^2 \\ [Z \frac{d^2}{d\tau^2} Z - (\frac{d}{d\tau} Z)^2] Z^{-2} &= (A + B)^2 Z^{-2} - Z^2 \end{aligned} \quad (35)$$

Por lo tanto, se ha logrado obtener una separación de variables en las ecuaciones de Einstein para el modelo de universo Mixmaster. Integrando este sistema de ecuaciones una vez se encuentra que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} X &= \pm \sqrt{q_\alpha X^2 - A^2 - X^4} \\ \frac{d}{d\tau} Y &= \pm \sqrt{q_\beta Y^2 - B^2 - Y^4} \\ \frac{d}{d\tau} Z &= \pm \sqrt{q_\gamma Z^2 - (A + B)^2 - Z^4} \end{aligned} \quad (36)$$

Con objeto de mantener la consistencia entre este sistema y ecuaciones (29) y (34) se debe de tener que

$$\begin{aligned}
 q_\alpha &= -2A - 4B \\
 q_\beta &= 4A + 2B \\
 q_\gamma &= 2A + 2B
 \end{aligned}
 \tag{37}$$

En búsqueda de simplicidad se hace que  $q_\alpha = 0$  de modo que la consistencia entre (37) y (34) demanda que  $A = -2B$ ,  $q_\beta = -6B$ ,  $q_\gamma = -2B$  por lo que la integral de la primera ecuación de (36) queda como

$$\int \frac{dX}{\sqrt{X^4 + 4B^2}} = \pm\sqrt{-1} \int d\tau
 \tag{38}$$

Después de la integración el cuadrado del factor de escala es

$$X = -\sqrt{2B\sqrt{-1}} \text{JacobiSN}[\pm\sqrt{2B\sqrt{-1}}(\tau - \tau_0), -1]
 \tag{39}$$

donde  $\tau_0$  es una constante de integración.

Los cuadrados de los factores de escala  $Y, Z$  resultan simplificados cuando se expresan en términos de  $X$  como:

$$Y = \frac{-2B + X^2 \pm \sqrt{X^4 + 4B^2}}{2X}
 \tag{40}$$

$$Z = \frac{X(-2B + X^2 \pm \sqrt{X^4 + 4B^2})}{2(-2B \pm \sqrt{X^4 + 4B^2})}$$

## **B.-Condiciones de Realidad y algunas consecuencias**

Cuando se obtienen soluciones complejas, al resolver sistemas lineales de ecuaciones diiferenciales, es de esperarse que tanto la parte real asi como la parte imaginaria de estas soluciones satisfagan a las ecuaciones diferenciales. En este mismo razonamiento, el significado físico y matemático de ambas partes, real e imaginaria, se puede determinar normalmente de manera directa.

En sistemas no-lineales de ecuaciones diferenciales con soluciones complejas, la situación cambia radicalmente. Las partes real e imaginaria, independientes, no satisfacen a las ecuaciones diferenciales de donde se originaron. Establecer el significado estructural de las soluciones complejas se vuelve difícil y manejar el concepto de parte real y parte imaginaria al mismo tiempo se torna complicado.

Por esta circunstancia, en el capítulo 3 se explica parte del desarrollo del aparato teórico y matemático que se ha intentado establecer con el fin de encontrar soluciones en la Relatividad General Compleja que se puedan relacionar adecuadamente con el tipo de soluciones tradicionales. Esto no se ha podido lograr de manera definitiva todavía.



No obstante en parte de este trabajo, se propone que las soluciones encontradas aquí, funciones complejas de variable compleja tengan, al menos, una condición de realidad, apegada a un aspecto físico de la teoría que resulta ser el tiempo cosmológico.

En general, de acuerdo a los resultados previos,  $X, Y, Z$ , y  $V$  son funciones complejas de la variable compleja  $\tau$ . Con

$$\tau = \tau_1 + \sqrt{-1} \tau_2 \quad (41)$$

Una condición de realidad en este caso podría ser una integral real de la ecuación (13), es decir, con  $t \geq 0$  real, integrado sobre un contorno  $C$  en el plano definido por  $\tau_1$  y  $\tau_2$

$$t = \pm \int_C \sqrt{XYZ} d\tau \quad (42)$$

Definiendo

$$f(\tau) = \sqrt{XYZ} = u(\tau_1, \tau_2) + \sqrt{-1} \nu(\tau_1, \tau_2) \quad (43)$$

la condición de realidad resulta ser

$$\int_C (\nu d\tau_1 + u d\tau_2) = 0 \quad (44)$$

Es posible imponer otras condiciones de realidad sobre los factores de escala y sobre el volumen. En el caso presente, estas variables resultan entidades con dos grados de libertad.

Ahora se verá un ejemplo en el cual se fuerza a que  $X$  y  $\tau$  sean variables reales. Con  $B = \sqrt{-1}$  se encuentra que

$$X = \sqrt{2} \text{JacobiSN}[\pm\sqrt{2}(\tau - \tau_0), -1] \quad (45)$$

donde, para  $\tau$  real,  $X$  resulta real. Los cuadrados de los factores de escala  $Y$ ,  $Z$  y por tanto  $V$  resultan ser funciones complejas de variable real. La parte imaginaria de  $\sqrt{YZ}$  sólo se anula si  $X = 0$ . Esto conduce a soluciones triviales. Entonces,  $X \neq 0$  conlleva que  $t$  sea la integral de una función compleja de variable real y  $t$  resulta ser una función de la misma naturaleza.

En este punto, se hace notar que en la teoría clásica de la relatividad general de Einstein se tiene una variedad de cuatro dimensiones. Ahora, se muestra que en las ecuaciones de Einstein para el modelo de universo Mixmaster la variedad puede tener dos dimensiones para el tiempo logarítmico y seis dimensiones espaciales, un total de ocho dimensiones

# Capítulo 5

## El modelo de universo de Taub y las nuevas soluciones

En esta segunda parte, del trabajo de tesis, se encuentran nuevas soluciones para el modelo de universo de Taub. Estas soluciones son diferentes a las que se obtendrían con la simple simplificación geométrica de las ya obtenidas para el universo Mixmaster. Esto, probablemente se deba a que ahora sí se realiza una integración del sistema de ecuaciones de Einstein. La solución conocida, probablemente sea producto de una suposición de la solución, que satisface al sistema, que resulta ser sólo una solución particular. También, se puede ver que la solución compleja, para el universo de Taub, que se obtiene a través de una simplificación de la del modelo de universo Mixmaster, resulta ser otra solución particular distinta de la solución conocida.

Aunque también en esta parte, en algún momento se presupone una función matemática que satisface al sistema de ecuaciones de Einstein en segundas derivadas, tal como se hizo en la primera parte para el modelo de universo Mixmaster, ahora la función matemática parece tener un carácter más deductivo. Esto trae como consecuencia un proceso de integración que conlleva a una solución más general.

Todo este análisis, al final indica que existe otra solución distinta de la que se encontró en la primera parte de este trabajo para el modelo

de universo Mixmaster. En un futuro, se puede encontrar una solución más general, para este modelo, que incluya soluciones reales a las cuales se les pueda encontrar un sentido físico a la manera tradicional.

El sistema de ecuaciones (10) y (11), con  $b = c$  constituye el modelo de universo de Taub [?]- [?]. Las ecuaciones correspondientes son:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{da}{dt} b^2 \right) + \frac{1}{2} (ab^2)^{-1} [a^4] = 0 \quad (46)$$

$$\frac{d}{dt} \left( a \frac{db}{dt} b \right) + \frac{1}{2} (ab^2)^{-1} [2a^2 b^2 - a^4] = 0 \quad (47)$$

$$a^{-1} \frac{d^2}{dt^2} a + 2b^{-1} \frac{d^2}{dt^2} b = 0 \quad (48)$$

De ecuación (46) integrando una primera vez se obtiene,

$$\left( \frac{da}{dt} b^2 \right) = \pm \frac{1}{2} \sqrt{A^2 - a^4} \quad (49)$$

donde  $A$  es una constante.

Con las transformaciones (12) y (13) en estas ecuaciones de Taub se obtiene [?]:

$$2 \frac{d^2}{d\tau^2} \alpha = - \exp[4\alpha] = R_\alpha$$

$$2 \frac{d^2}{d\tau^2} \beta = 2 \frac{d^2}{d\tau^2} \gamma = \exp[4\alpha] -$$

$$2 \exp[2\alpha] \exp[2\beta] = R_\beta = R_\gamma \quad (50)$$

$$2 \frac{d\alpha}{d\tau} \frac{d\beta}{d\tau} + \left(\frac{d\beta}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{4}(R_\alpha + 2R_\beta) \quad (51)$$

En estas ecuaciones se definen las "curvaturas parciales"  $R_\alpha$ ,  $R_\beta$ ,  $R_\gamma$  las cuales en última instancia son funciones de la variable  $\tau$ .

Una solución conocida del modelo de universo de Taub se puede escribir como:

$$\begin{aligned} a^2 &= A \operatorname{sech}(A\tau) \\ b^2 &= \frac{1}{4} a^{-2} A^2 \operatorname{sech}^2(A\tau/2) \end{aligned} \quad (52)$$

Esta solución produce un volumen  $V$  y una tri-curvatura  $R = R_\alpha + 2R_\beta$  dados como:

$$V = A^{3/2} \frac{1}{4} \operatorname{sech}^{-\frac{1}{2}}(A\tau) \operatorname{sech}^2(A\tau/2) \quad (53)$$

$$R = A^2 \operatorname{sech}^2(A\tau) - A^2 \operatorname{sech}^2(A\tau/2) \quad (54)$$

Las curvas para los factores de escala,  $a$  y  $b$ , el volumen y la tri-curvatura se muestran en la figuras 1, 2, 3 y 4 respectivamente. En este caso particular la tri-curvatura no cambia de signo, siempre permanece con valores negativos.

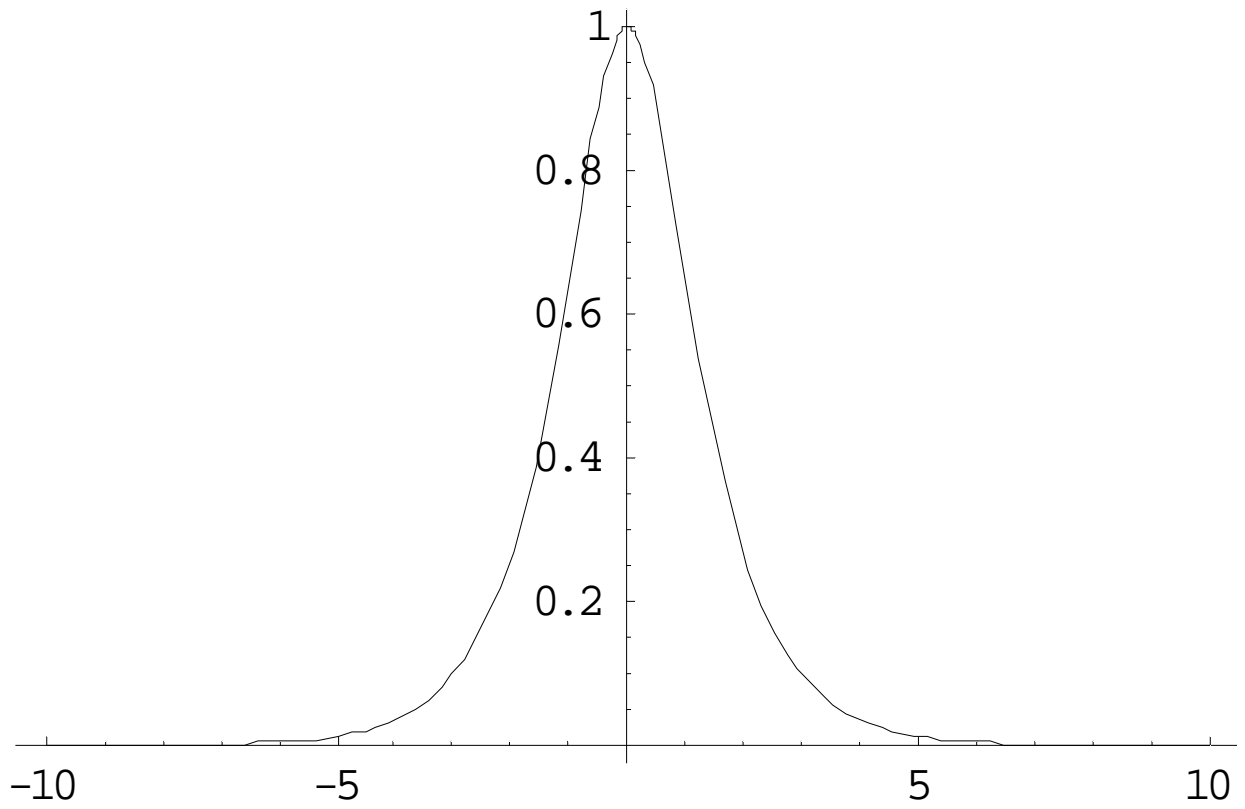


Figura 1.- Evolución del modelo de universo de Taub vacío en el tiempo logarítmico. La curva corresponde al cuadrado del factor de escala  $a^2$ . El punto de máxima expansión se da para  $\tau = 0$ . Este caso se calculó para  $A = 1$ .

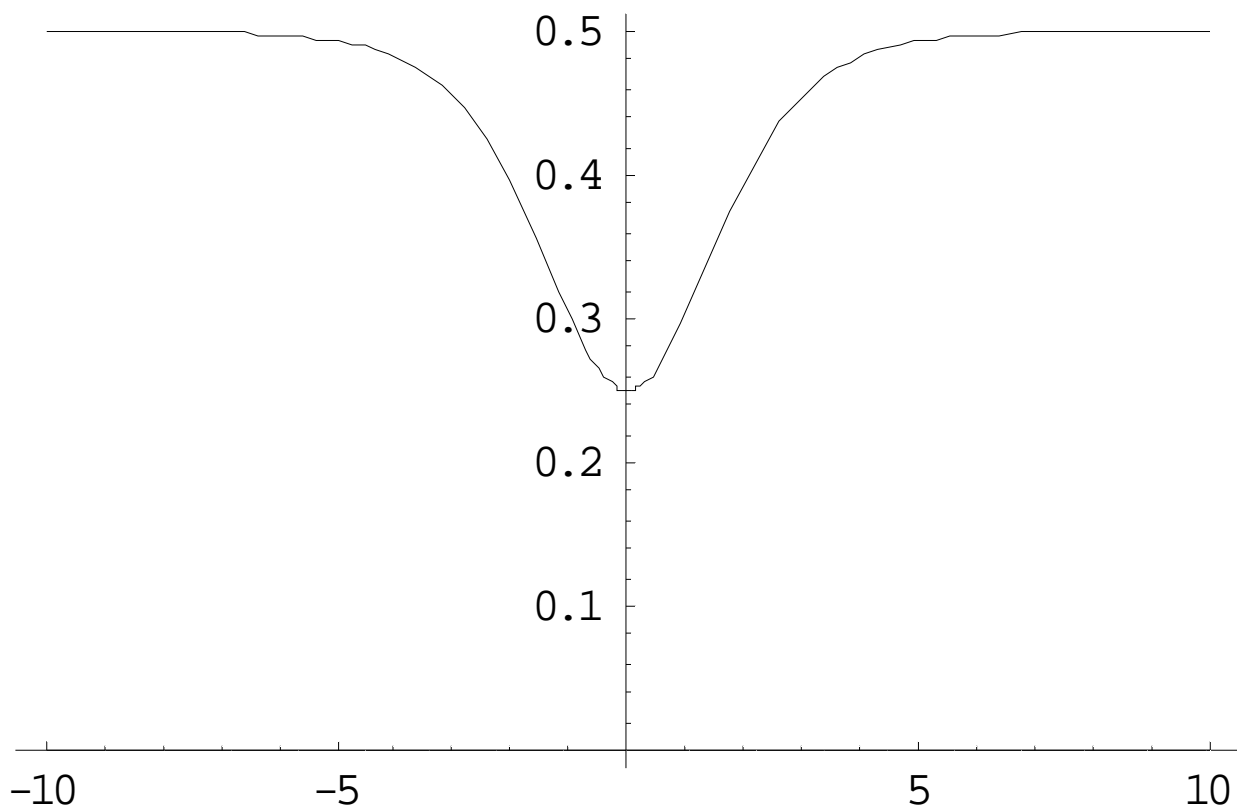


Figura 2.- Evolución del modelo de universo de Taub vacío en el tiempo logarítmico. La curva es el cuadrado del factor de escala  $b^2$ . El punto de máxima expansión que se da para el cuadrado del factor de escala  $a^2$ , aquí corresponde con el mínimo de  $b^2$ . Este caso se calcula para  $A = 1$ .

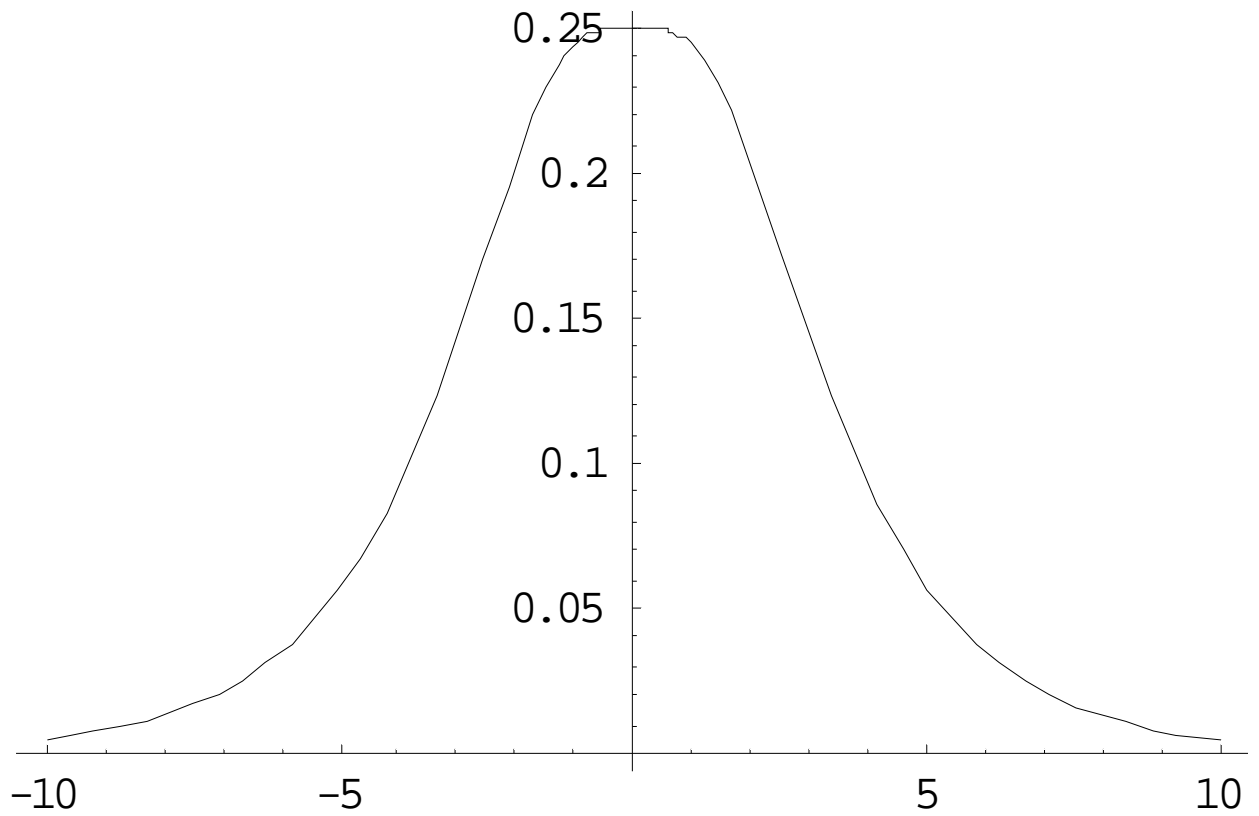


Figura 3.- Evolución del modelo de universo de Taub vacío en el tiempo logarítmico. La curva representa al volumen  $V$  . El punto de máxima expansión se da para  $\tau = 0$  donde el volumen  $V$  alcanza un máximo. Este caso corresponde a  $A = 1$ .



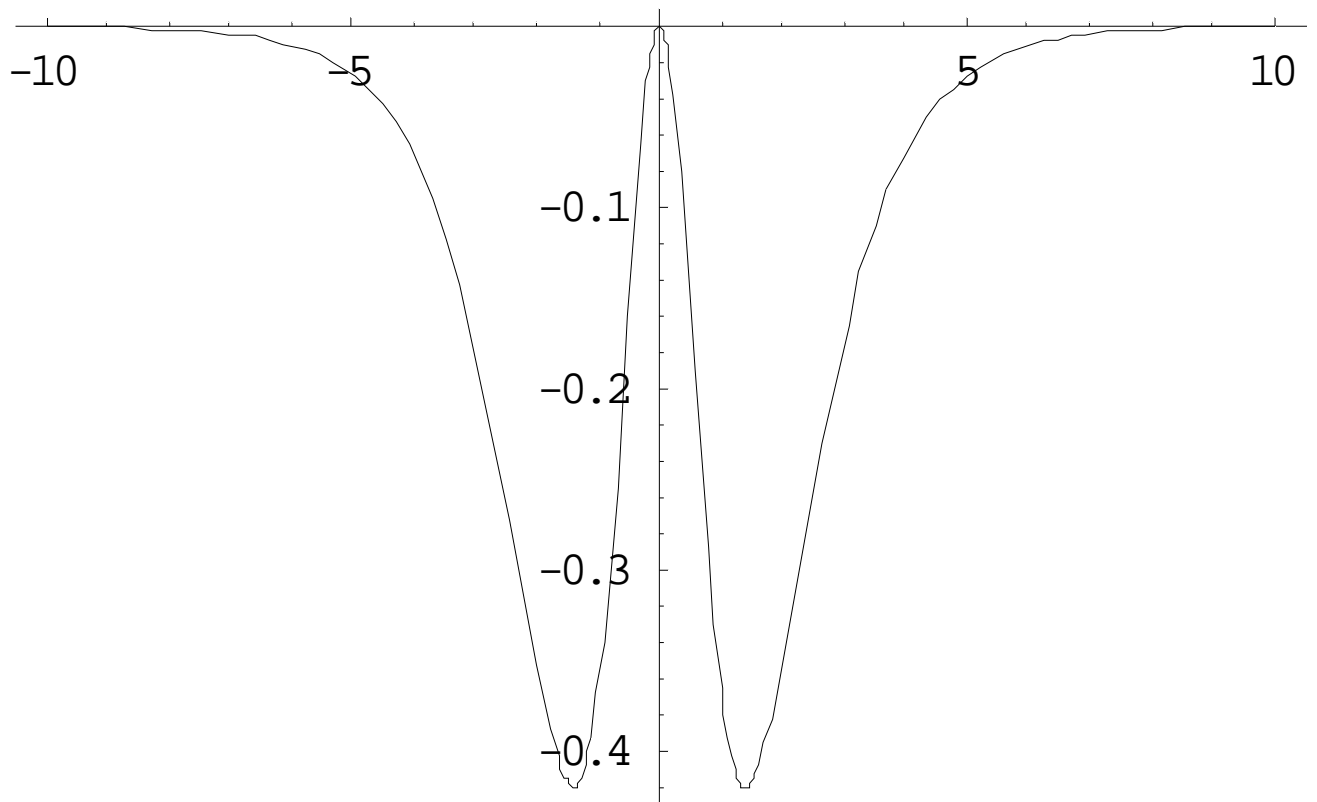


Figura 4.- Evolución del modelo de universo de Taub vacío en el tiempo logarítmico. La curva representa la tri-curvatura  $R$  que caracteriza este universo con  $R$  siempre negativa. El punto de máxima expansión que se da para  $\tau = 0$  cuando el volumen  $V$  alcanza un máximo, la tricurvatura se hace cero. Este caso se calcula para  $A = 1$ .

Parece ser muy difícil encontrar la solución general de la segunda ecuación de (50). No obstante, una estrategia particular consiste en considerar a las ecuaciones dinámicas como un todo:

Eliminando el tiempo logarímico de la solución conocida (52), se encuentra una relación entre los factores de escala

$$b^2 = (2(A + a^2))^{-1} A^2 \quad (55)$$

Esta relación deberá ser satisfecha también por los factores de escala como funciones del tiempo cosmológico.

Por otra parte, se puede mostrar que las expresiones

$$F1 = 2 \frac{da}{dt} b^2 = \pm (A^2 - a^4)^{\frac{1}{2}} \quad (56)$$

$$F2 = 2ab \frac{db}{dt} = -F1 \pm (A^2 - 4a^2 b^2)^{\frac{1}{2}} \quad (57)$$

satisfacen el sistema de ecuaciones (46), (47) y (48), es decir

$$\frac{dF1}{dt} = -a^3/b^2 \quad (58)$$

$$\frac{dF2}{dt} = a^3/b^2 - 2a \quad (59)$$

Por tanto, el cociente de las ecuaciones (56) y (57) conduce a

$$da/(a(A^2 - a^4)^{\frac{1}{2}}) = dQ/(Q(A^2 - 4Q^2)^{\frac{1}{2}}) \quad (60)$$

donde  $Q = ab$ .

Integrando ecuación (60) se obtiene

$$\begin{aligned} & ((2A + 2(A^2 - a^4)^{\frac{1}{2}})/a^2)^{\frac{1}{2}} = \\ & (B/8)^{\frac{1}{2}}((2A + 2(A^2 - 4a^2b^2)^{\frac{1}{2}})/ab) \end{aligned} \quad (61)$$

donde la constante de integración aquí se toma, convenientemente, como  $(B/8)^{\frac{1}{2}}$ . De este resultado se obtiene  $b^2$  y por tanto, se ha encontrado una familia de soluciones más general para el universo de Taub

$$a^2 = A \operatorname{sech}(A\tau)$$

$$b^2 = AB[1 + \tanh(A\tau)]/(1 +$$

$$\tanh(A\tau) + B \operatorname{sech}(A\tau))^2 \quad (62)$$

Con  $B = 1$ , se puede ver que la nueva familia de soluciones reproduce la solución conocida (52) y (55). Gráficas de ecuación (62) se muestran en las figura 5 y 6.

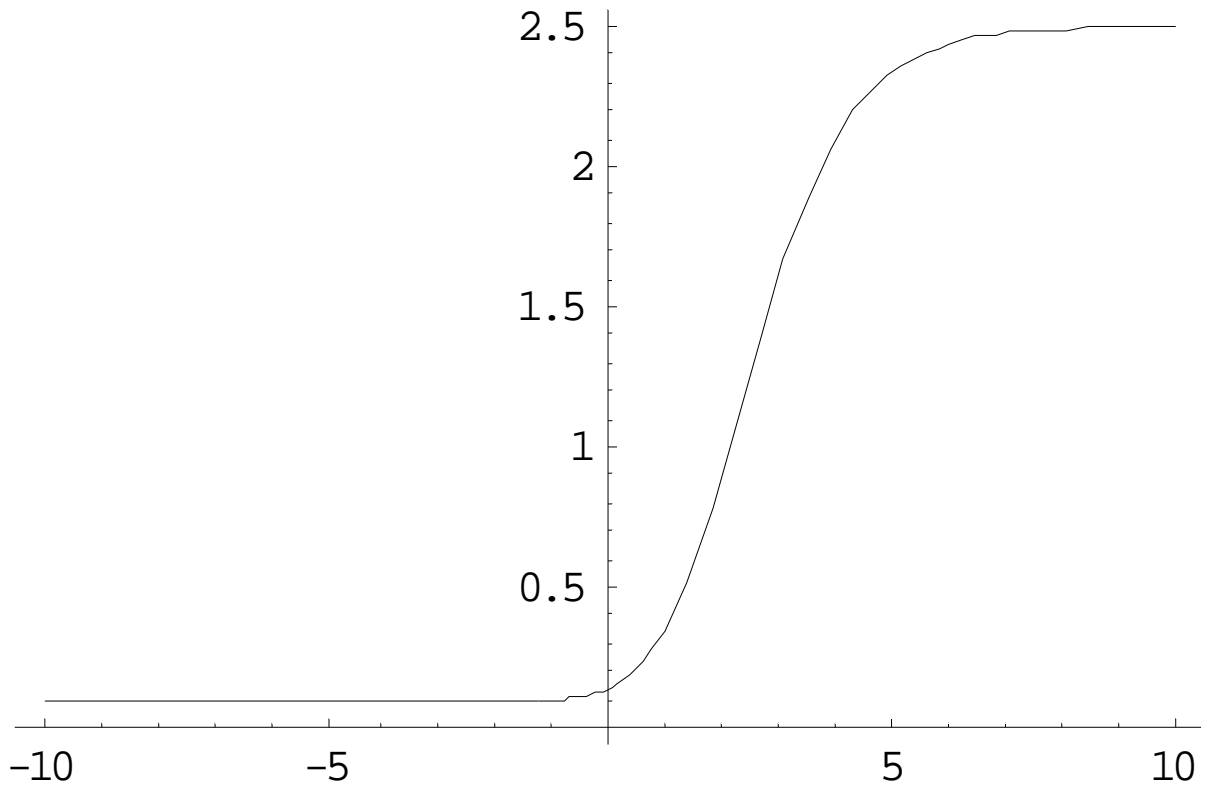


Figura 5.- Evolución del modelo de universo de Taub vacío, en el tiempo logarítmico, con las nuevas soluciones. La curva es el factor de escala al cuadrado  $b^2$ , con  $A = 1$  y  $B = 5$ . Al introducir la constante  $B \neq 1$  se produce una asimetría con respecto al eje vertical, ausente en la solución conocida de la figura 1.

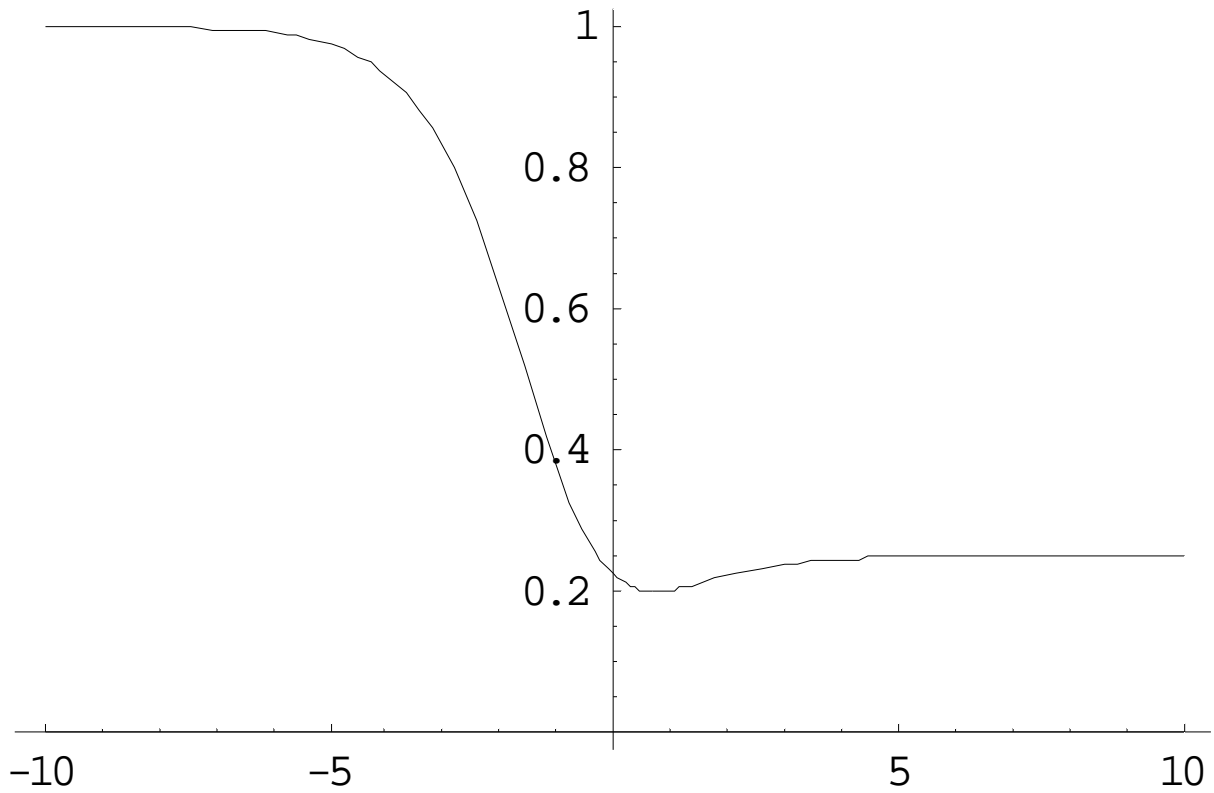


Figura 6.- Evolución del modelo de universo de Taub vacío, en el tiempo logarítmico, con las nuevas soluciones. La curva representa al factor de escala al cuadrado  $b^2$ , con  $A = 1$  y  $B = 0.5$ . Al introducir la constante  $B \neq 1$  se produce una asimetría con respecto al eje vertical, ausente en la solución conocida de la figura 1.

# Capítulo 6

## El modelo de universo de Taub vacío como universo acelerado

A través de la observación de explosiones de supernovas lejanas, se ha encontrado evidencia de la expansión acelerada del universo actual. Albert Einstein en 1917, introdujo en sus ecuaciones de la relatividad general, un término adicional caracterizado por la llamada constante cosmológica. Esta constante, representa una fuerza, llamada de vacío con la que, según Einstein, evitaría el colapso del universo predicho por sus ecuaciones, un requisito indispensable para la idea que prevalecía en aquel entonces, un universo quieto e inmutable.

No obstante todo ésto, Alexander Friedmann, entre otros posteriormente, demostró que solamente un universo en constante cambio es consistente con las ecuaciones de la relatividad general y al parecer es justo lo que indican las observaciones. Esto hizo que la constante cosmológica desapareciera del panorama científico hasta fines de la década de 1990 en que reaparece, con el escenario del universo acelerado de la energía oscura, también llamada quintaesencia, totalmente diferente a la también extraña, materia oscura.

Las ecuaciones de campo modificadas por Einstein son( ver apéndice A)

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu} \quad (63)$$

donde  $\Lambda$  representa a la constante cosmológica.

Esta fuerza adicional( energía oscura ), que da origen al universo acelerado, actúa según se dice, sobre el espacio mismo más que sobre la materia. A venido a constituir otro de los enigmas del universo, ya que, como opinan algunos investigadores, hasta la fecha sólo hemos sido capaces de nombrarla, puede ser la energía de la nada o la influencia de dimensiones espaciales ocultas. Algunos cosmólogos dicen que, se sabe qué cosa hace la energía oscura, es repulsiva como la antigravedad. Pero no es una fuerza en el sentido de que no depende de las propiedades de las partículas mismas. Es una fuerza que actúa directamente sobre el espacio. Al final, se comenta, estas respuestas han generado más preguntas de las que se tenían.

En este capítulo se intenta mostrar que el universo vacío de Taub se puede considerar como un universo acelerado positivamente. Quizá, un universo vacío no califique de manera adecuada como universo acelerado positivamente. No obstante, se puede probar que el efecto antigravitatorio que se va a describir para el universo vacío de Taub, también aparece en el universo de materia rígida de Taub con  $p = \rho$ . Esto contradice las mediciones en supernovas, anisotropía en la radiación cosmológica de fondo, estructuras de gran escala y también a las determinaciones de densidad de materia que predice que  $p = -\rho$  [?]. En el caso aquí considerado, se va a mostrar que en el universo vacío, la tri-curvatura es suficiente para producir el efecto citado.

Con el fin de exhibir el fenómeno antigravitatorio en el universo de Taub, se puede utilizar la ecuación de volumen en los modelos Bianchi. En el caso presente, esto se puede generalizar introduciendo una representación del 'factor de escala' promedio geométrico ( $\ln V$ ) en la ecuación de volumen en los modelos de universo Bianchi,

$$2\frac{d^2}{d\tau^2}(\ln V) = R \quad (64)$$

Se puede observar en la figura 4, que el universo de Taub vacío, con la solución conocida, tiene siempre una tri-curvatura  $R$  negativa, esto da lugar a una 'fuerza restauradora', como la gravedad, en el sistema representado por ecuación (64). Ahora, con las nuevas soluciones, se puede mostrar que, en el modelo de universo de Taub vacío, se tiene una aceleración positiva (antigravedad), es decir,  $R$  es mayor que cero, al menos en una parte importante del intervalo de  $\tau$ .

Con la nueva familia de soluciones ecuaciones (53) y (54) se pueden escribir ahora como

$$V = AB(A\operatorname{sech}(A\tau))^{\frac{1}{2}}[1 + \tanh(A\tau)] / (1 + \tanh(A\tau) + B\operatorname{sech}(A\tau))^2 \quad (65)$$

$$R = A^2\operatorname{sech}^2(A\tau) - 4A^2B\operatorname{sech}(A\tau)[1 + \tanh(A\tau)] / (1 + \tanh(A\tau) + B\operatorname{sech}(A\tau))^2 \quad (66)$$



Los casos en los que la expresión (66) aparece con signo positivo, en una parte del dominio de  $\tau$ , son aquellos en los cuales el fenómeno de la antigravedad esta presente, es decir, aquellos con  $B \neq 0, 1$ .

Las figuras 7 y 8 muestran el volumen y la tri-curvatura respectivamente, determinados por ecuaciones (65) y (66). El volumen de estos universos acelerados es tal que el área bajo la curva versus el tiempo cosmológico, resulta mayor que la correspondiente de la solución conocida. Esto es como consecuencia de la parte positiva, relativamente grande, de  $R$ .

Por otra parte, cabe aclarar que lo positivo de  $R$  proviene exclusivamente del miembro derecho de la ecuación diferencial para el factor de escala  $b$ . Al modificarse  $b^2$  con las nuevas soluciones se tiene ahora esta posibilidad. La solución de la ecuación diferencial para el factor de escala  $a$  no se modifica, sigue siendo una parte de la nueva solución la solución conocida. Por tanto, es posible afirmar que al menos, en una fracción importante del tiempo logarítmico, la anisotropía del universo se ve fuertemente perturbada, debido, entre otras cosas, a que la curvatura del universo sólo acelera positivamente a dos de los tres factores de escala( $b, c$ ).

Aunque existe cierta simetría, en cuanto a los casos con valores de  $B > 1$  y valores de  $B < 1$ , es relativamente simple apreciar el efecto en el primer caso, pero no es tan simple para el segundo. Cuando  $B > 1$ , las condiciones iniciales son tales que el universo se aproxima al origen, en figura 5, con un factor de escala  $b$  reducido, en comparación a aquel

de la figura 2. El efecto acelerante sobre  $b$ , que se manifiesta de manera preponderante cerca del origen, hace que  $b$  se incremente de manera importante en esta región. Cuando  $B < 1$ , las condiciones iniciales ahora diferentes, son tales que el universo, en puntos cercanos al origen, se encuentra con un factor de escala  $b$  incrementado, en comparación a aquel de la figura 2. El efecto acelerante sobre  $b$  hace que la tasa de reducción del valor del factor de escala al acercarse al origen cambie. Es decir, la tasa de reducción prácticamente se hace cero después del punto  $\tau = 0$ . El factor de escala ya no decrece y esto se debe al efecto acelerante de la parte positiva de  $R$ .

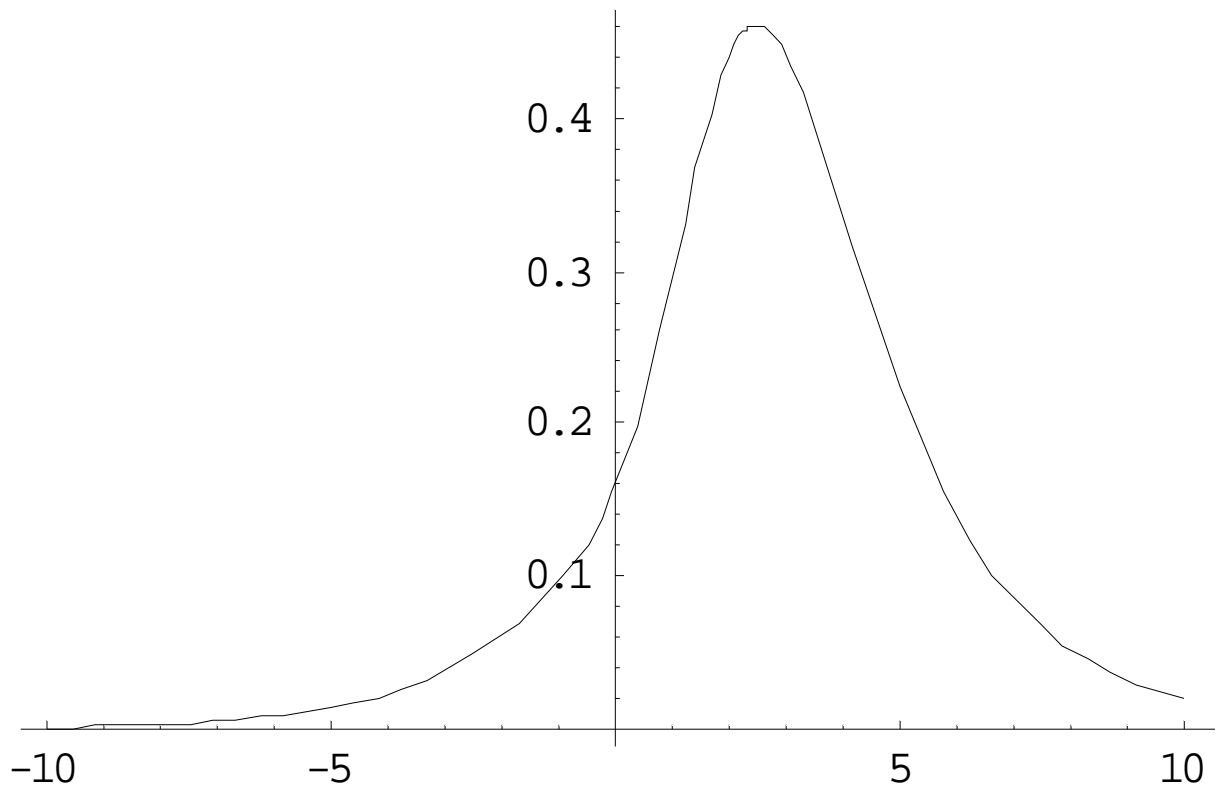


Figura 7.- Evolución en el tiempo logarítmico del volumen  $V$  de acuerdo a las nuevas soluciones en el universo de Taub vacío, con  $A = 1$  y  $B = 4$ , que se puede comparar con el volumen  $V$  de la solución conocida de la figura 3. El área bajo la curva es mayor ahora y se ha perdido la simetría, con respecto al eje vertical de la solución conocida.

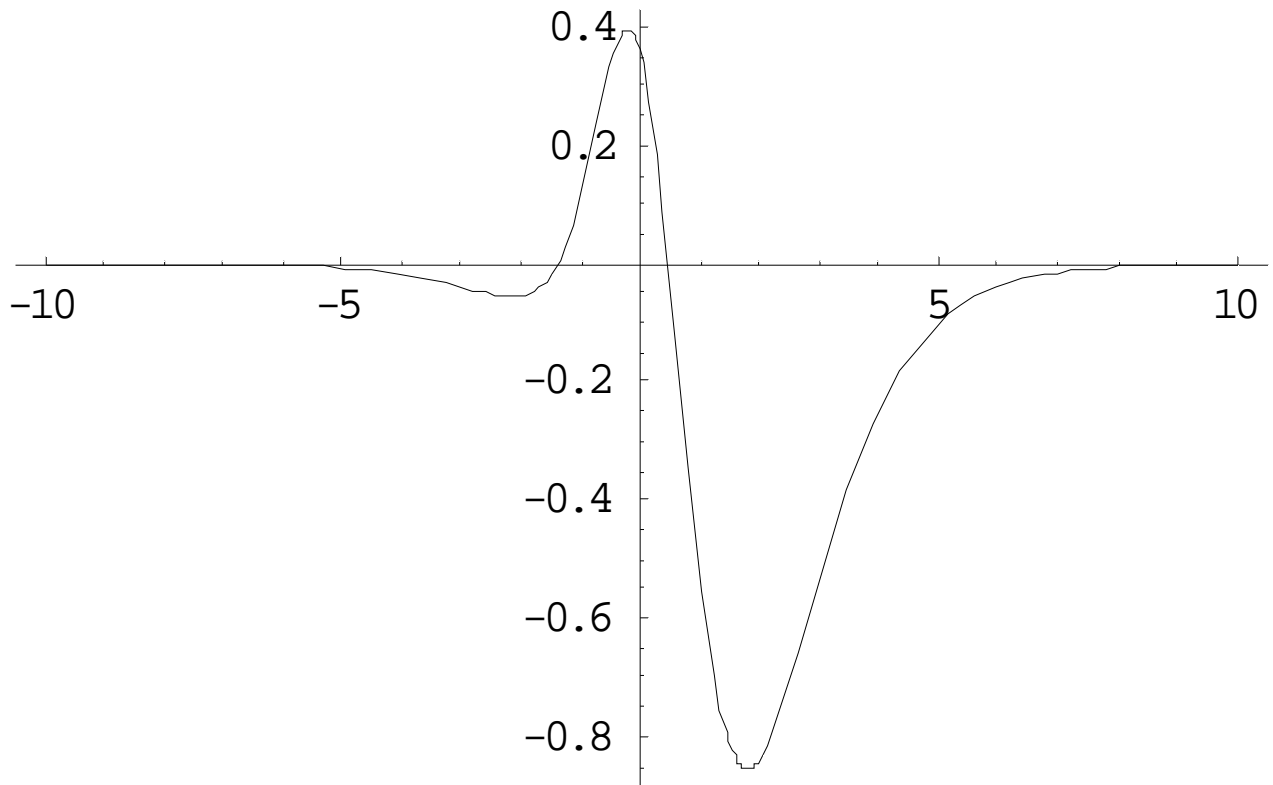


Figura 8.- Evolución en el tiempo logarítmico de la tri-curvatura  $R$ , con  $A = 1$  y  $B = 4$ , de acuerdo a las nuevas soluciones en el universo de Taub vacío, muestra una parte positiva y una gran asimetría que no aparecen en la figura 4.

# Capítulo 7

## El modelo de universo de Taub vacío y el fenómeno de la Inflación

Según la teoría de la inflación [?], nace el universo y después de una pequeñísima fracción de segundo, el universo se encuentra en un estado inestable, con un exceso de energía que dio lugar a un crecimiento exponencial (del orden de  $10^{50}$  veces) de los factores de escala del universo. Se afirma que este proceso tuvo lugar de  $10^{-37}$  a  $10^{-34}$  del primer segundo.

Existen actualmente muchas versiones diferentes del escenario del universo inflacionario. La principal característica de todas estas versiones, algunas veces llamada el paradigma inflacionario, es la existencia de una etapa en la evolución en la cual el universo se expande exponencialmente (o casi-exponencialmente) mientras se encuentra en un estado de vacío que contiene algunos campos clásicos homogéneos, pero sin o casi sin partículas. Después de esta etapa de inflación, este estado inicial de vacío decae a un estado conteniendo partículas. Las partículas interactúan entre sí y después se establece el equilibrio termodinámico volviendo al universo extremadamente caliente [?].

Como es sabido lo que condujo, principalmente, a establecer la teoría de la inflación, fué el intento de resolver problemas de los modelos de universo tales como: el problema de la planitud, horizonte, homogenei-

dad, Singularidad, formación de galaxias y el problema de la unicidad.

Una maneras de formular estos problemas es:

a) Singularidad. Es el estado de densidad infinita en el cual el universo nace al tiempo  $t = 0$ .

b) Planidad. De acuerdo a la teoría de la Relatividad General, la geometría del universo es, en general, diferente de la geometría Euclidiana del espacio plano. El universo puede ser cerrado, en la manera en que la superficie de una esfera es cerrada. El parámetro de longitud natural en relatividad general ( $l_p$  =radio de Schwarzschild para la masa de Planck) es la longitud de Planck. Por tanto, se debería tener un espacio muy curvo, típicamente radios de curvatura del orden de  $10^{-33}cm$ . Sin embargo, se ve que el universo real es plano a escalas de  $10^{28}cm$ , el radio de la parte observable del universo.

c) Horizonte. ¿Porqué diferentes regiones del universo causalmente desconectadas iniciaron su expansión simultaneamente (en  $t = 0$ )?

d) Homogeneidad. Observaciones astronómicas muestran que a escala muy grande el universo es extremadamente homogéneo. Sin embargo a muchísimo menor escala es también extremadamente inhomogéneo. ¿Porqué el universo es de esta manera?.

e) Formación de galaxias. ¿Qué dio lugar a al formación de las galaxias?.

f) El problema de la unicidad. Este problema fue enunciado originalmente por Einstein, aproximadamente de ésta manera: En lo que yo realmente estoy interesado es en saber si Dios pudo haber creado al universo de otra manera.

Todos estos problemas( y otros no mencionados ) son muy difíciles de resolver, fuera de la teoría de la inflación. Dentro de ésta teoría, uno tras otro se han ido resolviendo, ya sea completamente o al menos relajados en el contexto de la inflación.

Es poco probable que con un universo como el Taub vacío se puedan explicar algunos de los problemas enunciados. Esto debido a las partículas y a la materia involucradas en el fenómeno inflacionario. No obstante, existen otros problemas con la teoría de la inflación, en particular, uno de tipo causal. El mismo Alan Guth se refiere a la inflación como una idea básica muy atractiva, pero no se sabe a ciencia cierta el mecanismo que la impulsa. Por otra parte, también se desconoce el mecanismo mediante el cual se detiene la inflación. Estos problemas se resuelven con el universo de Taub, ya que la aceleración, en este modelo aparece y se detiene de manera natural, es decir, sin incluir mecanismo adicionales. Esto se explica, con algún detalle a continuación:

Se puede mostrar que las soluciones, ecuaciones (62), se pueden reescribir

$$a^2 = A \operatorname{sech}(A\tau + \tau_0)$$

$$b^2 = AB[1 + \tanh(A\tau + \tau_0)] / (1 + \tanh(A\tau + \tau_0) + B \operatorname{sech}(A\tau + \tau_0))^2 \quad (67)$$

donde  $\tau_0$  es una constante de integración.

Esto significa que de acuerdo con el valor de esta constante, se sitúan los acontecimientos importantes, cerca o lejos del origen de la variable  $\tau$ . En otras palabras, con un valor adecuado de  $\tau_0$  se puede poner la etapa de universo acelerado del modelo de Taub, al principio de todo.

El caso mostrado en la figura 9, denota un crecimiento casi-exponencial del cuadrado del factor de escala  $b$ , en un tiempo relativamente corto. También se aprecia un crecimiento posterior, el cual se puede considerar moderadamente acelerado.

Buscando sólo una comparación con el modelo inflacionario, se puede decir que el modelo de universo de Taub vacío tiene una etapa inflacionaria y una etapa posterior de aceleración más moderada.

Una argumentación todavía más importante, con respecto a la inflación, es que en el modelo de Taub, la etapa inflacionaria y la de crecimiento de aceleración moderada aparecen y desaparecen de manera natural en el modelo. No se requiere la constante cosmológica ni otro artificio adicional en el modelo que produzca esta aceleración antigravitatoria.



Por otra parte, la gran anisotropía que aparece en esta etapa de universo acelerado, no desaparece sino que se refuerza al final de los tiempos. Se puede mostrar que en el modelo de Taub con materia rígida ( $p = \rho$ ) [?], existe la posibilidad de tener también antigraavedad, producida por la materia junto con anisotropía.

Dentro de la teoría de la inflación, existe el llamado 'índice espectral' que indica la dependencia de la escala de las perturbaciones del espectro de densidad. Diferentes modelos de inflación predicen diferentes valores para este índice espectral. Debido a que este índice se puede observar con gran exactitud, se puede utilizar para discriminar entre diferentes modelos de inflación. En el aspecto inflacionario aquí descrito en el modelo de universo de Taub, además de ser un universo vacío, no se tiene un potencial que impulse la inflación, tampoco un campo escalar dentro del modelo mismo. Tanto el campo escalar como el potencial entran en la definición del espectro de las perturbaciones de la curvatura  $P_R(k)$  [?], [?].

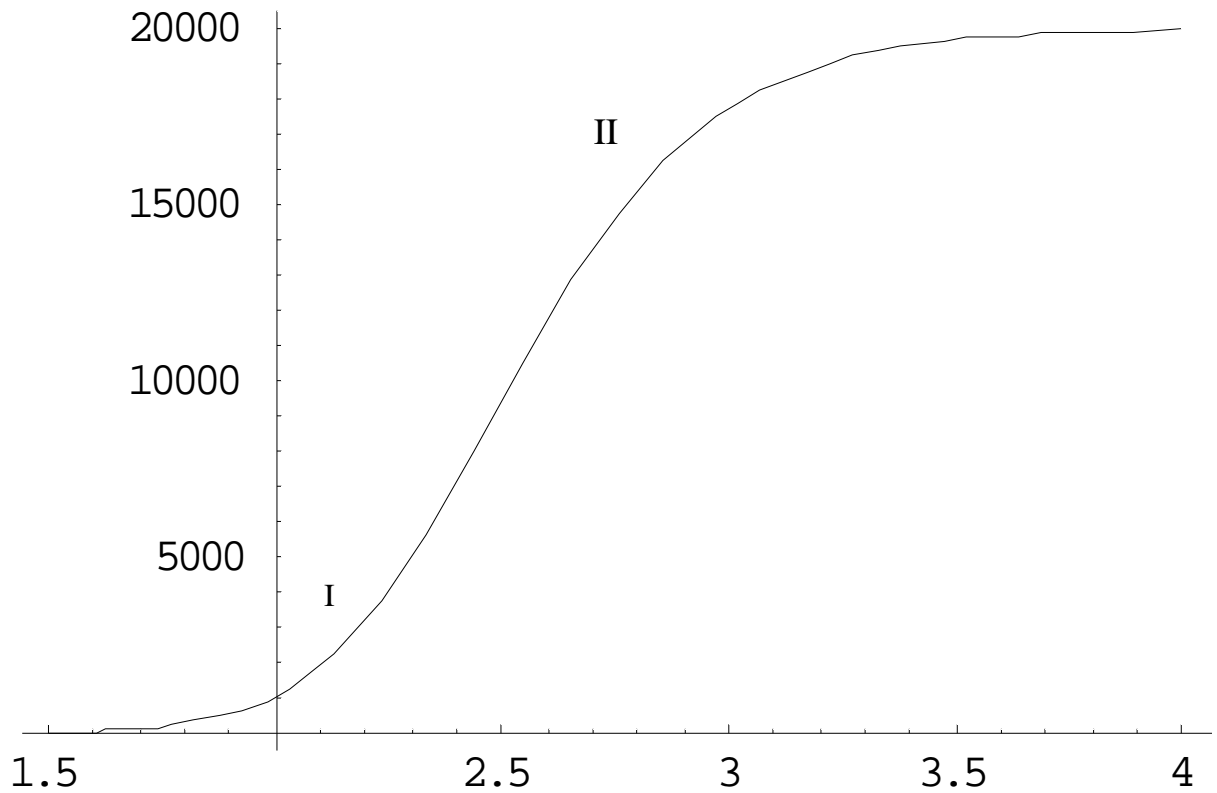


Figura 9.- Evolución del modelo de universo de Taub vacío, en el tiempo logarítmico, con las nuevas soluciones. La curva muestra el efecto de la tri-curvatura sobre  $b^2$ . Cuando  $A = 4$  y  $B = 10^4$  resulta en un incremento substancial, casi-exponencial (I), en un tiempo relativamente corto. Posteriormente se tiene una etapa de crecimiento acelerado moderado (II).

# Capítulo 8

## Comentarios y Conclusiones

### A.-Relatividad General Compleja

La primera parte del análisis descrito en este trabajo, denota la existencia de una clase de soluciones exactas no triviales de las ecuaciones de Einstein para el modelo de universo Mixmaster, y por tanto, la existencia de la tan largamente debatida integrabilidad de este modelo. En otras palabras, sin recurrir a la extensión compleja típica en problemas tales como la ecuación de Laplace, se ha encontrado una familia de soluciones que pertenece a la Relatividad General Compleja.

No es inusual que los sistemas de ecuaciones lineales presenten soluciones complejas de variable real. El presente procedimiento muestra que en Relatividad General Compleja, donde las ecuaciones son no lineales, se encuentran soluciones que son funciones complejas de variable compleja.

En cuanto a las condiciones de realidad que se han de imponer a las soluciones de la Relatividad compleja ha sido un asunto de frecuente discusión. Hasta el momento, es un punto insuficientemente entendido. En el caso presente se puede argumentar que los cuadrados de los factores de escala del modelo Mixmaster resultan ser funciones con una

dimensión adicional, es decir, con dos grados de libertad. Podemos afirmar que los factores de escala resultan entidades bidimensionales. Por tanto, los factores de escala usualmente uni-dimensionales aparecen ahora contenidos en un espacio-tiempo con tiempo logarítmico bidimensional.

De la misma manera que el tiempo logarítmico, resulta que los factores de escala encontrados también tienen dos grados de libertad. Esto significa que la variedad de cuatro dimensiones a pasado a ser de ocho dimensiones.

Las condiciones de realidad en el presente caso se pueden imponer demandando un tiempo cosmológico real y positivo. Esto, sin duda limita el espacio de la métrica. Sin embargo, encontrar tanto el significado físico de los factores de escala como la descripción de la evolución temporal del universo en las variables del tiempo cosmológico resulta prácticamente imposible debido a la dificultad que presentan las integrales correspondientes. Esto nos obliga a resignarnos con la descripción en las variables del tiempo logarítmico.

## **B.-El universo de Taub y el fenómeno de la antigravedad**

Desarrollando una estrategia particular de separación de variables, se ha obtenido una nueva familia de soluciones para el modelo de universo de Taub vacío. Esta familia de soluciones incluye, como caso particular, las soluciones ya conocidas.

Una característica notable de esta nueva familia de soluciones encontrada en este trabajo, es la existencia de un efecto acelerante. Entre otras causas, indudablemente que esta característica de las nuevas soluciones esta relacionada con las condiciones iniciales del universo. Además, se debe de hacer notar, la contribución adicional de la geometría a través de la curvatura, contenida en las expresiones analíticas de las nuevas soluciones. En otras palabras, el volumen del universo en este modelo, dado en ecuación (65), tiene un factor que multiplica por la raíz cuadrada de la función hiperbólica, que hace que el resto de la función sólo contribuya significativamente en la proximidad del origen. Por lo tanto, las condiciones iniciales resultan críticas, tanto para los factores de escala como para el volumen. La constante  $B$ , en todo caso determina los factores geométricos de la solución y como consecuencia la preponderancia temporal en cada caso.

Otro aspecto importante que se menciona del universo de Taub, en este trabajo, es su relación que tiene con la inflación. En cierto modo, el universo de Taub puede acercarse a un crecimiento inflacionario en un tiempo relativamente corto. También, posterior a esta etapa, se tiene un crecimiento acelerado moderado, que se podría relacionar con el periodo del universo real donde figura la energía oscura.

Finalmente, no deja de sorprender que las ecuaciones de la Relatividad General, sin constante cosmológica ni potenciales adicionales, incluyan de alguna manera antigravedad, es decir, el universo acelerado.

# Apéndice A

## Universo Bianchi tipo IX

En este apéndice se calculan las ecuaciones de Einstein de la relatividad general, dinámicas y de constricción, para el modelo de universo Bianchi tipo IX.

El espacio tri-dimensional de este modelo es un espacio anisotrópico homogéneo. El universo tiene diferentes dimensiones en tres direcciones ortogonales, caracterizadas respectivamente por las funciones  $a(t)$ ,  $b(t)$  y  $c(t)$ .

A partir de las ecuaciones de Einstein de la Relatividad General

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu} \quad (A1)$$

donde  $G_{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein,  $R_{\mu\nu}$  es el tensor de Ricci,  $R$  es el escalar de Ricci,  $T_{\mu\nu}$  es el tensor de esfuerzo-energía y  $k$  es una constante; se obtienen las ecuaciones dinámicas y la llamada ecuación de constricción, para el vacío, en este modelo de universo, de la siguiente manera:

Se requiere calcular los coeficientes de las formas de conexión, el tensor de curvatura de Riemann para una métrica en cualquier base. Los pasos a seguir se pueden puntualizar como [?]

*i)* se establecen formas de conexión

*ii)* se utiliza la primera ecuación de Cartan

*iii)* se utiliza la segunda ecuación de Cartan

*iv)* se obtienen las ecuaciones de Einstein para el modelo Bianchi tipo IX

Con  $\xi_\alpha$  vectores Killing,  $\{X_\alpha\}$  es una base invariante de modo que  $[\xi_\alpha, X_\alpha] = 0$ ,  $\{\omega^\alpha\}$  es la base dual de  $\{X_\alpha\}$ ,  $[\xi_\alpha, \xi_\beta] = C_{\alpha\beta}^\gamma \xi_\gamma$ ,  $[X_\alpha, X_\beta] = C_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma$  y  $d\omega^\alpha = \frac{1}{2} C_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\beta \wedge \omega^\gamma$  definen las constantes de estructura  $C_{\beta\gamma}^\alpha$ ,  $\{x_\alpha\}$  es el sistema de coordenadas para expresar los vectores con la base coordenada  $\{\partial_\alpha\}$  donde  $\partial_\alpha \equiv \partial/\partial x^\alpha$ , y la base dual es  $\{d\omega^\alpha\}$ .

Para este modelo de universo las constantes de estructura son [?]

$$C_{23}^1 = -C_{32}^1 = 1, \quad C_{31}^2 = -C_{13}^2 = 1,$$

$$C_{12}^3 = -C_{21}^3 = 1 \tag{A2}$$

las restantes constantes de estructura son

$$C_{\beta\gamma}^\alpha = 0 \tag{A3}$$

Los vectores Killing son

$$\xi_1 = \partial_2 \quad (A4)$$

$$\begin{aligned} \xi_2 = \cos x^2 \partial_1 - \cot x^1 \operatorname{sen} x^2 \partial_2 + \\ \operatorname{sen} x^2 \partial_3 / \operatorname{sen} x^1 \end{aligned} \quad (A5)$$

$$\begin{aligned} \xi_3 = -\operatorname{sen} x^2 \partial_1 - \cot x^1 \cos x^2 \partial_2 + \\ \cos x^2 \partial_3 / \operatorname{sen} x^1 \end{aligned} \quad (A6)$$

La base invariante es

$$\begin{aligned} X_1 = -\operatorname{sen} x^3 \partial_1 + \cos x^3 \partial_2 / \operatorname{sen} x^1 - \\ \cot x^1 \cos x^3 \partial_3 \end{aligned} \quad (A7)$$

$$\begin{aligned} X_2 = \cos x^3 \partial_1 + \operatorname{sen} x^3 \partial_2 / \operatorname{sen} x^1 - \\ \operatorname{sen} x^3 \cot x^1 \partial_3 \end{aligned} \quad (A8)$$



$$X_3 = \partial_3 \quad (A9)$$

La base dual de  $\{X_\alpha\}$  es

$$\omega^1 = -\text{sen}x^3 dx^1 + \text{sen}x^1 \text{cos}x^3 dx^2 \quad (A10)$$

$$\omega^2 = \text{cos}x^3 dx^1 + \text{sen}x^1 \text{sen}x^3 dx^2 \quad (A11)$$

$$\omega^3 = \text{cos}x^1 dx^2 + dx^3 \quad (A12)$$

las 2-formas son

$$\begin{aligned} d\omega^1 &= \omega^2 \wedge \omega^3, & d\omega^2 &= \omega^3 \wedge \omega^1, \\ d\omega^3 &= \omega^1 \wedge \omega^2 \end{aligned} \quad (A13)$$

Con la métrica

$$ds^2 = -dt^2 + g_{ij}\omega^i\omega^j \quad (A14)$$

diagonalizada, se puede escribir

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2(dx^1)^2 + b(t)^2(dx^2)^2 + c(t)^2(dx^3)^2 \quad (A15)$$

Ahora se cambia la base para pasar a la métrica del espacio de Minkowski

$$Y_0 = \partial_0 = \partial/\partial t, \quad Y_1 = 1/a(t)X_1, \\ Y_2 = 1/b(t)X_2, \quad Y_3 = 1/c(t)X_3 \quad (A16)$$

Se calculan las nuevas constantes de estructura con

$$[Y_\alpha, Y_\beta] = C_{\alpha\beta}^\gamma Y_\gamma \quad (A17)$$

y resulta

$$C_{01}^1 = -\dot{a}/a, \quad C_{01}^0 = C_{01}^2 = C_{01}^3 = 0 \quad (A18)$$

$$C_{02}^2 = -\dot{b}/b, \quad C_{02}^0 = C_{02}^1 = C_{02}^3 = 0 \quad (A19)$$

$$C_{03}^3 = -\dot{c}/c, \quad C_{03}^0 = C_{03}^1 = C_{03}^2 = 0 \quad (A20)$$

$$C_{12}^3 = c/(ab), \quad C_{12}^0 = C_{12}^1 = C_{12}^2 = 0 \quad (A21)$$

$$C_{13}^2 = -b/(ac), \quad C_{13}^0 = C_{13}^1 = C_{13}^3 = 0 \quad (A22)$$

$$C_{23}^1 = a/(bc), \quad C_{23}^0 = C_{23}^2 = C_{23}^3 = 0 \quad (A23)$$

Ahora se obtienen relaciones entre las fórmulas de conexión

$$\sigma_{\mu\nu} + \sigma_{\nu\mu} = 0 \quad (A24)$$

con  $\{\sigma^\alpha\}$  la base dual de  $\{Y_\alpha\}$  y con  $g_{\alpha\beta} = \text{const}$  para  $\mu = \nu$  se tiene

$$\sigma_{\mu\mu} + \sigma_{\mu\mu} = 2\sigma_{\mu\mu} = 0 \quad (A25)$$

$$\sigma_\mu^\mu = 0 \quad (A26)$$

$$\sigma_{\mu}^{\mu} = \Gamma_{\mu 0}^{\mu} \sigma^0 + \Gamma_{\mu 1}^{\mu} \sigma^1 + \Gamma_{\mu 2}^{\mu} \sigma^2 + \Gamma_{\mu 3}^{\mu} \sigma^3 = 0 \quad (A27)$$

por tanto

$$\Gamma_{\mu\alpha}^{\mu} = 0 \quad (A28)$$

Considerando los restantes valores de los índices y con

$$\sigma_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} \sigma_{\beta}^{\alpha} + g_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha}^{\beta} \quad (A29)$$

los símbolos de Christoffel resultantes son

$$\Gamma_{i\alpha}^0 = \Gamma_{0\alpha}^i \quad (A30)$$

$$\Gamma_{j\alpha}^i = -\Gamma_{i\alpha}^j \quad (A31)$$

$$\Gamma_{11}^0 = \Gamma_{01}^1 = \dot{a}/a \quad (A32)$$

$$\Gamma_{10}^0 = \Gamma_{12}^0 = \Gamma_{02}^1 = \Gamma_{13}^0 = \Gamma_{03}^1 =$$

$$\Gamma_{21}^0 = \Gamma_{01}^2 = \Gamma_{02}^0 = 0 \quad (A33)$$

$$\Gamma_{22}^0 = \Gamma_{02}^2 = \dot{b}/b \quad (A34)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{23}^0 &= \Gamma_{03}^2 = \Gamma_{31}^0 = \Gamma_{01}^3 = \Gamma_{32}^0 = \\ \Gamma_{02}^3 &= \Gamma_{33}^0 = \Gamma_{03}^3 = 0 \end{aligned} \quad (A35)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{33}^1 &= \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{30}^2 = \Gamma_{20}^3 = \Gamma_{32}^2 = \\ \Gamma_{22}^3 &= \Gamma_{33}^2 = \Gamma_{23}^3 = 0 \end{aligned} \quad (A36)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{20}^1 &= \Gamma_{10}^2 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^1 = \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{00}^1 = \Gamma_{03}^3 = 0 \end{aligned} \quad (A37)$$

$$\Gamma_{00}^2 = \Gamma_{20}^0 = \Gamma_{01}^2 = \Gamma_{21}^0 = \Gamma_{20}^2 =$$

$$\Gamma_{30}^2 = \Gamma_{20}^3 = 0 \quad (A38)$$

$$\Gamma_{23}^1 = -\Gamma_{13}^2 = (-a^2 - b^2 + c^2)/(2abc) \quad (A39)$$

$$\Gamma_{31}^2 = -\Gamma_{21}^3 = (a^2 - b^2 - c^2)/(2abc) \quad (A40)$$

$$\Gamma_{12}^3 = -\Gamma_{32}^1 = (-a^2 + b^2 - c^2)/(2abc) \quad (A41)$$

$$\Gamma_{00}^3 = \Gamma_{30}^0 = \Gamma_{10}^3 = \Gamma_0^1 = \Gamma_{11}^3 = \Gamma_{31}^1 = 0 \quad (A42)$$

De las formas de conexión se tiene que

$$\sigma_0^0 = 0 \quad (A43)$$

y con expresiones del tipo

$$\sigma_1^0 = \Gamma_{10}^0 \sigma^0 + \Gamma_{11}^0 \sigma^1 + \Gamma_{12}^0 \sigma^2 +$$

$$\Gamma_{13}^0 \sigma^3 = \sigma_0^1 = (\dot{a}/a) \sigma^1 \quad (A44)$$

se tiene

$$\sigma_2^0 = \sigma_0^2 = (\dot{b}/b)\sigma^2 \quad (A45)$$

$$\sigma_3^0 = \sigma_0^3 = (\dot{c}/c)\sigma^3 \quad (A46)$$

$$\sigma_2^1 = -\sigma_1^2 = (-a^2 - b^2 + c^2)/(2abc)\sigma^3 \quad (A47)$$

$$\sigma_3^1 = -\sigma_1^3 = (a^2 - b^2 + c^2)/(2abc)\sigma^2 \quad (A48)$$

$$\sigma_3^2 = -\sigma_2^3 = (a^2 - b^2 - c^2)/(2abc)\sigma^3 \quad (A49)$$

Primera ecuación de Cartan

$$d\sigma^\mu = -\sigma_\nu^\mu \wedge \sigma^\nu \quad (A50)$$

substituyendo en esta ecuación se obtiene

$$d\sigma^0 = 0 \quad (A51)$$

$$d\sigma^1 = (\dot{a}/a)\sigma^0 \wedge \sigma^1 - a^2/(abc)\sigma^2 \wedge \sigma^3 \quad (A52)$$

$$d\sigma^2 = (\dot{b}/b)\sigma^0 \wedge \sigma^2 + b^2/(abc)\sigma^1 \wedge \sigma^3 \quad (A53)$$

$$d\sigma^3 = (\dot{c}/c)\sigma^0 \wedge \sigma^3 - c^2/(abc)\sigma^1 \wedge \sigma^2 \quad (A54)$$

Las formas de curvatura son

$$\Theta_\nu^\mu = d\sigma_\nu^\mu + \sigma_\alpha^\mu \wedge \sigma_\nu^\alpha \quad (A55)$$

Substituyendo en esta ecuación se tiene que

$$\Theta_0^0 = 0 \quad (A56)$$

$$\begin{aligned} \Theta_1^0 = & (\ddot{a}/a)\sigma^0 \wedge \sigma^1 + [-a^2(2\dot{a}/a) + (a^2 + b^2 - c^2)\dot{b}/b + \\ & (a^2 - b^2 + c^2)\dot{c}/c]\sigma^2 \wedge \sigma^3/(2abc) \end{aligned} \quad (A57)$$

$$\Theta_2^0 = (\ddot{b}/b)\sigma^0 \wedge \sigma^2 + [b^2(2\dot{b}/b) + (-a^2 - b^2 + c^2)\dot{a}/a +$$



$$(a^2 - b^2 - c^2)\dot{c}/c]\sigma^1 \wedge \sigma^3/(2abc) \quad (A58)$$

$$\Theta_3^0 = (\ddot{c}/c)\sigma^0 \wedge \sigma^3 + [-c^2(2\dot{c}/c) + (-a^2 + b^2 + c^2)\dot{b}/b + (a^2 - b^2 + c^2)\dot{a}/a]\sigma^1 \wedge \sigma^2/(2abc) \quad (A59)$$

Ahora, como  $\sigma_\alpha^\alpha = 0$  se encuentra que

$$\Theta_\alpha^\alpha = 0 \quad (A60)$$

y con  $\sigma_\alpha^0 = \sigma_0^\alpha$  y  $\sigma_j^i = -\sigma_i^j$  se tiene que

$$\Theta_\alpha^0 = \Theta_0^\alpha \quad (A61)$$

y

$$\Theta_j^i = \Theta_i^j \quad (A62)$$

además

$$\Theta_2^1 = [(-a^2 - b^2 + c^2)\dot{\cdot} + (-a^2 - b^2 + c^2)\dot{c}/c]$$

$$\sigma^0 \wedge \sigma^3/(2abc) + [2(\dot{a}/a)(\dot{b}/b)c -$$

$$c^2(-a^2 - b^2 + c^2)/(abc) + (a^2 - b^2 + c^2)(a^2 - b^2 - c^2)/(2abc)]\sigma^1 \wedge \sigma^2/(2abc) \quad (A63)$$

$$\Theta_3^1 = [(a^2 - b^2 + c^2)\dot{\cdot} + (a^2 - b^2 + c^2)\dot{b}/b]$$

$$\sigma^0 \wedge \sigma^2/(2abc) + [2(\dot{a}/a)(\dot{c}/c)c -$$

$$b^2(a^2 - b^2 + c^2)/(abc) + (-a^2 - b^2 + c^2)(-a^2 + b^2 + c^2)/(2abc)]\sigma^1 \wedge \sigma^3/(2abc) \quad (A64)$$

$$\Theta_3^2 = [(a^2 - b^2 - c^2)\dot{\cdot} + (a^2 - b^2 - c^2)\dot{a}/a]$$

$$\sigma^0 \wedge \sigma^1/(2abc) + [2(\dot{b}/b)(\dot{c}/c)c - a^2(a^2 - b^2$$

$$- c^2)/(abc) + (-a^2 - b^2 + c^2)(a^2 - b^2$$

$$+c^2)/(2abc)]\sigma^2 \wedge \sigma^3/(2abc) \quad (A65)$$

La segunda ecuación de Cartan es

$$\Theta^\mu_\nu = \frac{1}{2}R^\mu_{\nu\sigma\tau}\sigma^\sigma \wedge \sigma^\tau \quad (A66)$$

Substituyendo las expresiones anteriores y con  $\mu = \nu = 0$  se tiene que

$$R^0_{0ij} = -R^0_{0ji} = 0 \quad (A67)$$

Con los restantes índices  $\mu$  y  $\nu$  se tiene

$$R^0_{101} = -R^0_{110} = \ddot{a}/a \quad (A68)$$

$$R^0_{202} = -R^0_{220} = \ddot{b}/b \quad (A69)$$

$$R^0_{303} = -R^0_{330} = \ddot{c}/c \quad (A70)$$

$$R_{ikl}^i = 0 \quad (A71)$$

$$R_{203}^1 = -R_{230}^1 = [(-a^2 - b^2 + c^2)\dot{c} + (-a^2 - b^2 + c^2)\dot{c}/c]/(2abc) \quad (A72)$$

$$R_{212}^1 = -R_{221}^1 = [2(\dot{a}/a)(\dot{b}/b)c - c^2(-a^2 - b^2 + c^2)/(abc) + (a^2 - b^2 + c^2)(a^2 - b^2 - c^2)/(2abc)] \quad (A73)$$

$$R_{302}^1 = -R_{320}^1 = [(a^2 - b^2 + c^2)\dot{c} + (a^2 - b^2 + c^2)\dot{b}/b]/(2abc) \quad (A74)$$

$$R_{313}^1 = -R_{310}^1 = [2(\dot{a}/a)(\dot{c}/c)c -$$

$$\begin{aligned}
& b^2(a^2 - b^2 + c^2)/(abc) + \\
& (-a^2 - b^2 + c^2)(-a^2 + b^2 + c^2)/(2abc) \quad (A75)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{301}^2 = -R_{310}^2 = & [(a^2 - b^2 - c^2) \cdot + \\
& (a^2 - b^2 - c^2)\dot{a}/a]/(2abc) \quad (A76)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{323}^2 = -R_{332}^2 = & [2(\dot{b}/b)(\dot{c}/c)c - \\
& a^2(a^2 - b^2 - c^2)/(abc) + \\
& (-a^2 - b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)/(2abc)] \quad (A77)
\end{aligned}$$

Ahora se calcula el tensor de Ricci

$$R_{00} = -(\ddot{a}/a + \ddot{b}/b + \ddot{c}/c) \quad (A78)$$

$$\begin{aligned}
R_{11} &= (a\ddot{a} - (\dot{a})^2)/a^2 + (\dot{a}/a + \dot{b}/b + \dot{c}/c)\dot{a}/a + \\
&(2c^2b^2 - c^4 + a^4 - b^4)/(2a^2b^2c^2)
\end{aligned} \tag{A79}$$

$$\begin{aligned}
R_{22} &= (b\ddot{b} - (\dot{b})^2)/b^2 + (\dot{a}/a + \dot{b}/b + \dot{c}/c)\dot{b}/b + \\
&(2c^2a^2 - c^4 - a^4 + b^4)/(2a^2b^2c^2)
\end{aligned} \tag{A80}$$

$$\begin{aligned}
R_{33} &= (c\ddot{c} - (\dot{c})^2)/c^2 + (\dot{a}/a + \dot{b}/b + \dot{c}/c)\dot{c}/c + \\
&(2a^2b^2 + c^4 - a^4 - b^4)/(2a^2b^2c^2)
\end{aligned} \tag{A81}$$

Para el vacío se tiene que

$$R_{\alpha\beta} = 0 \tag{A82}$$

Por tanto  $R_{11} = R_{22} = R_{33} = 0$  son las ecuaciones de campo de Einstein y  $R_{00} = 0$  es la ecuación de constricción.

# Apéndice B

## Cálculo con el programa “Mathemática”: Las soluciones satisfacen las ecuaciones

En este apéndice se realizan los cálculos, con “mathemática”, con el fin de mostrar que las nuevas soluciones del modelo de universo vacío de Taub, satisfacen las ecuaciones de Einstein de la relatividad general.

En una primera parte, se substituyen las nuevas soluciones ecuaciones (62), en las ecuaciones de campo de Einstein, también llamadas ecuaciones dinámicas.

Antes de iniciar los cálculos, es conveniente recordar que el factor de escala  $a$  no cambia en las nuevas soluciones. Por tanto, para comprobar las soluciones basta con considerar la ecuación para el factor de escala  $b$ . En el programa de mathemática  $a^2$  es  $a^2$ ,  $b^2$  es  $b^2$ ,  $F_{cer} = 0$  es la segunda ecuación de (50). En la siguiente página se calcula el término con la segunda derivada.





Ahora, se substituye en la segunda ecuación de (50), la segunda derivada( `Out[5]` ),  $a_2$  y  $b_2$ .

En la segunda parte de este apéndice, se substituyen las nuevas soluciones en la ecuación de constricción (51). Ahora,  $F_{const} = 0$  representa la ecuación (51),  $a_{2p}$  y  $b_{2p}$  son las primeras derivadas de  $\text{Log}[X]$  y  $\text{Log}[Y]$  respectivamente.

Como se ha visto, la simplificación al final de cada uno de los dos cálculos, sobre las ecuaciones de campo y la ecuación de constricción, producen cero. Por tanto, se ha mostrado que las nuevas soluciones satisfacen las ecuaciones de Einstein de la relatividad general.

## **References**

# Referencias

- [1] Belinskii V. A., Khalatnikov I. M. and Lifshitz E. M., 1980, *Phys. Lett.* **77A**, 214.
- [2] Barrow J. D. and Tipler F. J., 1979, *Phys. Rep. C* **56**, 372.
- [3] Belinskii V. A. and Khalatnikov I. M., 1970, *Sov. Phys. J.E.T.P.* **30**, 1174.
- [4] Lifshitz E. M., Lifshitz I. M. and Khalatnikov I. M., 1971, *Sov. Phys. J.E.T.P.* **32**, 173.
- [5] Belinskii V. A. and Khalatnikov I. M., 1971, *Sov. Phys. J.E.T.P.* **32**, 169.
- [6] Bogoyavlenskii O. I. and Novikov S. P., 1973, *Sov. Phys. J.E.T.P.* **37**, 747.
- [7] Hawking S. W. and Ellis G. F. R., 1968, *Astrophys. J.* **152**, 25.
- [8] Springael J., Conte R. and Musette M., 1998, *Reg. and Chaotic Dynam.* **3**, 3.
- [9] Misner C. W., 1969, *Phys. Rev. Lett.* **22**, 1071.
- [10] Belinskii V. A., Khalatnikov I. M. and Lifshitz E. M., 1970, *Adv. Phys.* **19**, 525.
- [11] Lifshitz E. M. and Khalatnikov I. M., 1963, *Adv. Phys.* **12**, 185.
- [12] Belinskii V. A. and Khalatnikov I. M., 1969, *Sov. Phys. J.E.T.P.* **29**, 911.

- [13] Belinskii V. A., Lifshitz E. M. and Khalatnikov I. M., 1982, *Adv. Phys.* **31**, 639.
- [14] Khalatnikov I. M., *et al.* 1985, *J. Stat. Phys.* **38**, 97.
- [15] Misner C. W., 1969, *Phys. Rev.* **186**, 1319.
- [16] Arnowitt R., and Deser S., 1959, *Phys. Rev.* **113**, 745.
- [17] Arnowitt R., Deser S. and Misner C. W., 1959, *Phys. Rev.* **116**, 1322.
- [18] Arnowitt R., Deser S. and Misner C. W., 1960, *Il Nuovo Cimento* **15**, 487.
- [19] Barrow J. D., 1982, *Phys. Rep., a Rev. Sect. of Phys. Lett.* **85**, 1.
- [20] Matzner R. A., Shepley L. C. and Warren J. B., 1970, *Ann Phys.* **57**, 401.
- [21] Ryan M. P., 1971, *Ann. Phys.* **65**, 506.
- [22] Ryan M. P., 1971, *Ann. Phys.* **68**, 541.
- [23] Moser R., Matzner R. A. and Ryan M. P., 1973, *Ann. Phys.* **79**, 558.
- [24] Ferraz K. and Francisco G., 1992, *Phys. Rev. D* **45**, 1158.
- [25] Rugh S. E. and Jones B. J. T., 1990, *Phys. Lett. A* **147**, 353.
- [26] Berger K., 1991, *Gen. Rel. Grav.* **23**, 1385.
- [27] Zardecki A., 1983, *Phys. Rev. D* **28**, 1235.
- [28] Cornish N. J. and Levin J. J., 1997, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 998.
- [29] Chernoff F. and Barrow J. D., 1983, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 134.
- [30] Lin X. F. and Wald R. M., 1989, *Phys. Rev. D* **41**, 2244.

- [31] Latifi A., Musette M. y Conte R., 1994, *Phys. Lett. A* **194**, 83.
- [32] Maciejewski A. J. y Szydłowski M., 1998, *J. Phys. A: Math. and Gral.* **31**, 2031.
- [33] Müller V. y Schmidt H. J., 1991, *Fortschr.-der- Phys.* **39**, 319.
- [34] Belinskii V. A., Gibbons G. W., Page D. N. and Pope C. N., 1978, *Phys. Lett. B* **76**, 433.
- [35] Ashtekar A., 1986, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2244.
- [36] Obregon O., Pullin J. y Ryan M. P., 1993, *Phys. Rev. D* **48**, 5642.
- [37] Barbero J. F. and Ryan M. P., 1996, *Phys. Rev. D* **53**, 5670.
- [38] Kucha K. V. y Ryan M. P., 1989, *Phys. Rev. D* **40**, 3982.
- [39] Graham R., 1991, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 1381.
- [40] Graham R., 1991, *Phys. Lett. B* **277**, 393.
- [41] Cotsakis S., Lemmer R. L. and Leach P. G. L., 1998, *Phys. Rev. D* **57**, 4691.
- [42] Newman E. T. and Winicour J., 1974, *J. Math. Phys.* **15**, 426.
- [43] Lind R. W. and Newman E. T., 1974, *J. Math. Phys.* **15**, 1103.
- [44] Plebanski J. F., 1975, *J. Math. Phys.* **16**, 2395.
- [45] Plebanski J. F. and Hacyan S., 1975, *J. Math. Phys.* **16**, 2403.
- [46] Finley J. D. and Plebanski J. F., 1976, *J. Math. Phys.* **17**, 585.
- [47] Plebanski J. F. and Schild A., 1976, *Il Nuovo Cimento* **35 B**, 35.
- [48] McIntosh C. B. G. and Hickman M. S., 1985, *Gen. Rel. Grav.* **17**, 111.

- [49] Hall G. S., Hickman M. S. and McIntoch C. B. G., 1985, *Gen. Rel. Grav.* **17**, 475.
- [50] Morales- Tcocl H. A., Urrutia L. F. and Vergara J. D., 1996, *Class. Quantum. Grav.* **13**, 2933.
- [51] Montesinos M., Morales- Tcocl H. A., Urrutia L. F. and Vergara J. D., 1999, *J. Math. Phys.* **40**, 1504.
- [52] Ryan M. P., Shepley L. C. 1971, *Homogeneous Relativistic Cosmologies* (Princeton University Press).
- [53] Taub A. H., 1951, *Ann. Math.* **53**, 472.
- [54] Barrow J. D., 1988, *Nucl. Phys.* **296**, 697.
- [55] Barrow J. D., 1978, *Nature* **272**, 211.
- [56] Socorro J., et al. 1992, *Phys. Rev. D* **45**, 2026.
- [57] El-Hassouni A., et al. 1989, *Jour. of Modern Phys.* **4**, 351.
- [58] Higuchi A., Wald R. M., 1995, *Phys. Rev. D* **51**, 544.
- [59] Martínez S. E. y Ryan M. P., 1983, *Relativity, Cosmology, Topological Mass + Supergravity World Scientific.*
- [60] Guven J., Rosenbaum M. y Ryan M. P., 1992, *VI Marcel Grossmann Meeting World Scientific.*
- [61] Guth A. H., 1981, *Phys. Rev. D* **23**, 347.
- [62] Gron O., 1985, *Phys. Rev. D* **32**, 2522.
- [63] Abbott L. F., Wise M. B. 1984, *Nucl. Phys. B* **244**, 2541.
- [64] Magueijo J. and Baskerville K. 1999, *Phil. Trans. of the Roy. Soc.: math. Phys.* **357**, 3221.

- [65] Mielke E. W., 1992, *Ann. Phys.* **219**, 78.
- [66] Turner M. S., 2001, *Nucl. Phys. B* **91**, 405.
- [67] Linde A. D., 1990, *Inflation and Quantum Cosmology* (Academic Press, Inc.).
- [68] Mielke E. W., Peralta H.H. 2002, *Phys. Rev. D* **66**, 123505.
- [69] Copeland E. J., 1997, *arXiv:astro-ph. /9712028*.





CONSTANCIA DE PRESENTACION DE EXAMEN DE GRADO

La Universidad Autónoma Metropolitana extiende la presente CONSTANCIA DE PRESENTACION DE EXAMEN DE GRADO de DOCTOR EN CIENCIAS del alumno LEANDRO MELENDEZ LUGO, matrícula 94351385, quien cumplió con los 180 créditos correspondientes a las unidades de enseñanza aprendizaje del plan de estudio. Con fecha tres de diciembre del 2004 presentó la DEFENSA de su DISERTACIÓN PÚBLICA cuya denominación es:

NUEVAS SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES DE EINSTEIN PARA LOS MODELOS DE UNIVERSO DE MIXMASTER Y TAUB Y EL FENOMENO DE LA ANTIGRAVEDAD.

Cabe mencionar que la aprobación de la Disertación Pública tiene un valor de 180 créditos y el programa consta de 360 créditos.

El jurado del examen ha tenido a bien otorgarle la calificación de:

APROBADO

JURADO

Presidente

Secretario

DR. MICHAEL PATRICK RYAN ALLEN

DR. PABLO AGUSTIN DEL SAGRADO CORAZON DE JESUS CHAUVET ALDUCIN

Vocal

Vocal

DR. TONATIUH MATOS CHASSIN

DR. ERWIN WILLI MIELKE ECKEHARD

Vocal

DR. ROMAN LINARES ROMERO

UNIDAD IZTAPALAPA

Coordinación de Sistemas Escolares

San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina, México, D.F, 09340, Apdo. Postal 555-320-9000

Tels. 5804-4880 y 5804-4883 Fax 5804-4876