

✓
APLICACION DEL METODO DEL ELEMENTO FINITO

A UN MODELO DE FRONTERA LIBRE

TESIS QUE PRESENTA EL

✓
MAT. LORENZO HECTOR JUAREZ VALENCIA

PARA LA OBTENCION DEL GRADO DE

✓
MAESTRO EN MATEMATICAS

OCTUBRE DE 1989 ✓

U. A. M. IZTAPALAPA BIBLIOTECA

ASESOR : Dra. Patricia Saavedra Barrera

✓
DIVISION DE CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA - IZTAPALAPA

094550

AGRADECIMIENTOS

En primer término quiero expresar mi agradecimiento a la Dra. Patricia Saavedra B. por haberme introducido en el estudio de los problemas de frontera libre, y por el apoyo que me proporcionó durante la realización de la presente tesis.

Al jefe del Dpto. de Matemáticas, Dr. Luis Verde S. por todas las facilidades que siempre me brindó.

Al Dr. Fernando Galaz F. por motivarme.

Al Dr. Octavio R. Arzate S. por su valiosa ayuda en la graficación de las curvas que se incluyen en la tesis.

Por último, agradezco a la Srta. M. Beatriz Arce V. su excelente labor de mecanografiado.

Lorenzo Héctor Juárez Valencia

INDICE

INTRODUCCION.	i
I. PRESENTACION DEL PROBLEMA.	
1.1. Antecedentes	1
1.2. Descripción del problema	6
1.3. Objetivos	9
II. FORMULACION DEBIL DEL PROBLEMA. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCION.	11
2.1. Introducción	11
2.2. Formulación débil del problema	12
2.3. Existencia y unicidad de la solución del problema débil.	18
III. DISCRETIZACION DEL PROBLEMA.	22
3.1. Introducción	22
3.2. Discretización del dominio	23
3.3. Espacios de interpolación	26
3.4. Discretización del problema	31
3.5. Existencia y unicidad de la solución del problema discreto	32
3.6. Convergencia	34
IV. SOLUCION COMPUTACIONAL DEL PROBLEMA.	35
4.1. Introducción	35
4.2. El algoritmo computacional	36

4.3. Descripción del programa que resuelve el problema	40
4.4. Presentación de ejemplos	49
V. MODIFICACIONES Y EXTENCIONES DEL MODELO ESTUDIADO.	84
5.1. Introducción	84
5.2. El problema con condiciones Neumann para la frontera libre	85
5.3. Introducción de la curvatura	105
CONCLUSIONES.	122
BIBLIOGRAFIA.	124

INTRODUCCION

En años recientes muchos autores han estudiado los problemas de flujos de fluidos con superficies libres. Este tipo de problemas aparecen frecuentemente en diversos procesos de ingeniería, principalmente en la industria química. Los modelos que simulan estos fenómenos están descritos por ecuaciones diferenciales parciales en dominios que no son conocidos. Tales problemas son fuertemente no lineales y no pueden resolverse analíticamente. Existen muy pocos resultados teóricos para este tipo de problemas, aunque se han hecho estudios experimentales y también se han resuelto computacionalmente. Sin embargo, hay muy pocos resultados de las propiedades de convergencia de las técnicas computacionales usadas. Los únicos trabajos en esta dirección que se conocen son el de J.A. Nietsche [10] y el de P. Saavedra-L.R. Scott [16]. Los últimos autores presentan un análisis del error de la aproximación numérica de un modelo abstracto simplificado que contiene algunas de las características de los problemas de superficie libre de fluidos viscosos. El análisis es realizado cuando el modelo se resuelve por medio del Método del Elemento Finito y se usan polinomios lineales por pedazos para aproximar las variables del problema.

En el trabajo que se presenta a continuación se resuelve computacionalmente el modelo propuesto en [16]. Además, se hacen

algunas modificaciones del modelo en las ecuaciones que corresponden a las condiciones de frontera sobre la superficie libre, y se resuelven computacionalmente los problemas obtenidos. Asimismo, se mencionan las modificaciones y complicaciones que aparecen al realizar un estudio teórico similar al realizado en [16] para los modelos obtenidos.

En el capítulo I se hace una descripción general del problema que se estudia en el presente trabajo. Además se mencionan los objetivos del trabajo de tesis. Los capítulos II y III contienen un resumen del material teórico para el análisis del error de la aproximación numérica que se presenta en [16]. En el capítulo IV se presenta la solución computacional del problema en algunos ejemplos. Por último, en el capítulo V se presentan las modificaciones y extensiones propuestas al modelo, además de la solución computacional en estos casos.

CAPITULO I

PRESENTACION DEL PROBLEMA.

1.1. ANTECEDENTES.

Considérese un fluido viscoso incompresible en el plano, contenido en un tanque de forma cúbica. La frontera se encuentra libre mientras que el fondo y sus lados consisten de paredes rectilíneas en cuyas esquinas inferiores hay una entrada y una salida de líquido, respectivamente. Cuando el movimiento es estacionario, el interés es conocer la forma que toma la superficie libre y el comportamiento del fluido cuando la velocidad con que entra y sale del tanque se reduce o aumenta uniformemente, de tal manera que la profundidad promedio permanece constante.

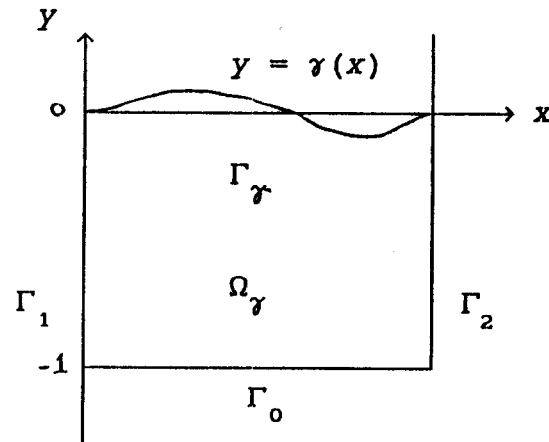
Presentamos a continuación un modelo de este problema. Designamos por $\gamma(x)$ la frontera libre, \vec{u} el campo de velocidades del fluido y p la presión. Denotamos por Ω_γ el dominio de interés:

$$\Omega_\gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: 0 < x < 1, -1 < y < \gamma(x)\} ,$$

y por Γ_γ la parte de la frontera de Ω_γ que corresponde a la superficie libre, es decir

$$\Gamma_\gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 1, y = \gamma(x)\} .$$

Sea Γ_0 la parte de la frontera que corresponde al fondo del tanque, Γ_1 y Γ_2 las que corresponden a la pared izquierda y a la pared derecha del tanque respectivamente, como se indica en la siguiente figura :



Las ecuaciones de movimiento para este problema se escriben en la forma:

$$\vec{u} \cdot \nabla u = \nabla \cdot \underline{\underline{T}} \quad \text{en } \Omega_\gamma \quad , \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{en } \Omega_\gamma \quad . \quad (1.2)$$

En la primera ecuación, que es la ecuación de momento, no se consideran las fuerzas de masa, específicamente la fuerza debida a la atracción gravitacional, y sólo se consideran fuerzas de superficie. Las fuerzas de superficie son las fuerzas de fricción y las debidas al gradiente de presiones. El gradiente de tensor de esfuerzos $\underline{\underline{T}}$ expresa este tipo de fuerzas, en donde

$$\underline{\underline{T}} = -p\underline{\underline{I}} + \nu[\nabla u + {}^t(\nabla u)] \quad ,$$

siendo p la presión, $\underline{\underline{I}}$ la matriz identidad y ν la viscosidad

cinemática. Junto con la ecuación (1.1) se incluye la ecuación de continuidad (1.2) cuya forma obedece a que estamos considerando un fluido incompresible.

Las condiciones de frontera en la superficie libre toman la forma:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{en } \Gamma_\gamma, \quad (1.3)$$

$$\vec{n} \cdot \underset{\sim}{T} \cdot \vec{\tau} = 0 \quad \text{en } \Gamma_\gamma, \quad (1.4)$$

$$\vec{n} \cdot \underset{\sim}{T} \cdot \vec{n} = sK(\gamma) \quad \text{en } \Gamma_\gamma, \quad (1.5)$$

en donde \vec{n} es el vector normal unitario exterior a la superficie libre, τ es el vector unitario tangente a la superficie libre, s es la tensión superficial y $K(\gamma)$ es la curvatura de γ . La condición (1.3) establece que no hay flujo de fluido a través de la frontera libre; (1.4), que no hay esfuerzos cortantes a lo largo de la superficie libre. La ecuación (1.5) expresa que la componente normal del vector de esfuerzos es igual a la diferencia de presiones la cual, de acuerdo a la ecuación de Laplace que aparece en la teoría de la tensión superficial, es proporcional a la curvatura de la superficie libre.

Para expresar la velocidad con que el líquido entra y sale del tanque se impone la condición

$$\vec{u} = \vec{u}_0 \quad \text{en } \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2. \quad (1.6)$$

Finalmente se consideran las condiciones

$$\int_0^1 \gamma(x) dx = 0, \quad (1.7)$$

$$\gamma(0) = \gamma(1), \quad \gamma'(0) = \gamma'(1). \quad (1.8)$$

La ecuación (1.7) establece que la profundidad promedio del fluido permanece constante e igual a uno. Las ecuaciones (1.8) son condiciones de tipo periódico en los extremos.

El problema que comprende las ecuaciones (1.1) a (1.8) exige la determinación de funciones $\vec{u}(x,y)$ y $\gamma(x)$ dos veces continuamente diferenciables, así como de una función continuamente diferenciable $p(x,y)$, que las satisfagan. Para determinar la frontera libre γ es necesario conocer la velocidad \vec{u} y la presión p del fluido a lo largo de ella. Estas variables se determinan a su vez resolviendo las ecuaciones de Navier-Stokes en el dominio Ω_γ en el cual una parte de su frontera es la incógnita γ . Este problema es fuertemente no lineal, su solución no puede encontrarse analíticamente y sólo puede aproximarse numéricamente.

Problemas de este tipo se encuentran en diversos procesos de ingeniería, principalmente en la industria química. Hay los llamados problemas de "superficie libre" que se presentan en la industria fílmica, que se describen por un sistema de ecuaciones similares al anterior. Algunas diferencias son la geometría del dominio y que la fuerza gravitacional es tomada en cuenta, es decir, en lugar de la ecuación (1.1) se toma la ecuación

$$\vec{u} \cdot \nabla \cdot \vec{u} = \vec{g} + \nabla \cdot \underline{\underline{T}} \quad \text{en } \Omega_\gamma .$$

En general estos problemas pueden tener detalles más complicados con líneas de contacto entre distintos medios, por ejemplo sólido-líquido, líquido-gas, y sólido-líquido-gas.

En la literatura hay pocos resultados teóricos para este tipo de problemas. Varios matemáticos soviéticos han estudiado un problema muy parecido al del tanque. Puknachev [13] y Solonnikov [20] probaron que si $\vec{u}_0 \in C^{2,\alpha}(\Omega^*)$, con $\Omega_\gamma \subset \Omega^*$, tiene norma pequeña, existen $\vec{u} \in C^{2,\alpha}(\Omega_\gamma)$, $p \in C^{1,\alpha}(\Omega_\gamma)$ y $\gamma \in C^{3,\alpha}(0,1)$ que satisfacen las ecuaciones (1.1) a (1.8), siempre que $\|\gamma\|_{C^{3,\alpha}(0,1)}$ sea pequeña. Esta solución es única en la vecindad de la solución trivial: $\vec{u}(x,y) \equiv \vec{0}$ y $\gamma(x) \equiv 0$.

Otros problemas con ecuaciones semejantes son el efecto de una varilla que rota en un tanque lleno de un fluido viscoso y el estudio de la superficie libre que forma un fluido que circula alrededor de una esfera que rota. Sattinger [18] en el primer problema y Okamoto [11] en el segundo, probaron bajo las mismas condiciones de regularidad que existen soluciones únicas en la vecindad de la solución trivial.

Existen programas muy sofisticados que resuelven este tipo de problemas. Ver, por ejemplo C. Cuvelier [6], Yih-Lin [9]; Kruyt, Segal y Zanden [8]; Ryskyn y Leal [15], además de los de Scriven y sus alumnos. Sin embargo, hay muy pocos resultados sobre el análisis de propiedades de convergencia de las técnicas computacionales que han sido usadas. El único trabajo que se

conoce en esta dirección es el de J.A. Nitsche [10].

1.2. DESCRIPCION DEL PROBLEMA.

En el presente trabajo se estudia la aproximación numérica de un modelo más sencillo que tiene las principales características de los problemas anteriormente descritos, pero se simplifica el balance de fuerzas y se toma como variable principal un campo escalar u . Es decir, sea $u: \Omega_\gamma \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega_\gamma, \quad (1.9)$$

en donde Ω_γ es el dominio determinado por las paredes del tanque y la frontera libre $\gamma(x)$.

De ahora en adelante se considera que el dominio Ω_γ es

$$\Omega_\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1 + \gamma(x)\},$$

y denotaremos su frontera como $\partial\Omega_\gamma$. La frontera libre la expresaremos por Γ_γ , es decir

$$\Gamma_\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, y = 1 + \gamma(x)\}.$$

Las condiciones de frontera ahora incluyen una condición de Dirichlet y una condición de frontera libre en donde la tensión superficial juega un papel importante. Estas condiciones son

$$u = g \quad \text{en} \quad \partial \Omega_\gamma, \quad (1.10)$$

$$\frac{-s\gamma''(x)}{(1+\gamma'(x)^2)^{1/2}} = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \quad \text{en} \quad \Gamma_\gamma. \quad (1.11)$$

Aquí g es una función escalar definida en un dominio Ω^* que contiene a Ω_γ , s la tensión superficial y \vec{n} el vector unitario normal a la frontera libre Γ_γ . Obsérvese que en el balance de fuerzas en la interfase se usa un término no lineal que no es la curvatura de γ . Esto se hace para simplificar la formulación variacional del problema. En el capítulo V se discute como generalizar este modelo cuando se introduce la expresión para la curvatura de γ . Finalmente, se considera una condición de Dirichlet para γ

$$\gamma(0) = \gamma(1) = 0. \quad (1.12)$$

El problema descrito por las ecuaciones (1.9) a (1.12) es un problema elíptico no lineal y que requiere como solución, en el sentido clásico, de una función u dos veces continuamente diferenciable en Ω_γ y de una función γ con dos derivadas continuas en $(0,1)$. En el siguiente capítulo se encuentra una formulación débil de este problema que se adapta mejor al estudio numérico. En lugar de los espacios de Hölder, usados en el estudio teórico de este tipo de problemas por los autores anteriormente mencionados, se hace uso de algunos espacios de Sobolev apropiados. Tales espacios son más adecuados para un estudio de la aproximación numérica vía el Método de Elemento Finito.

Como muestran los estudios teóricos el problema está bien planteado en el sentido de Hadamard si la frontera libre γ es una perturbación de la horizontal $y = 0$. Por tal motivo, para el estudio del problema se restringen los valores de γ y los de su derivada. Esto se logra si, por ejemplo, $\gamma \in W_{\infty}^1(0,1)$ y $\|\gamma\|_{W_{\infty}^1(0,1)} < 1$, lo cual equivale a pedir que la frontera libre sea Lipschitz continua casi dondequiera, y es la mínima regularidad posible para poder definir la tangente y la normal a la superficie libre en cada punto. Esta condición necesariamente repercute en la forma como deben escogerse los datos del problema y en la forma de las soluciones, como se verá en el siguiente capítulo. Tomando en consideración estos aspectos Saavedra y Scott [16] proponen una formulación más adecuada para resolver numéricamente el problema. La formulación es la siguiente:

Considérese una función $\gamma \in W_{\infty}^1(0,1)$ tal que $\|\gamma\|_{W_{\infty}^1(0,1)} < 1/2$. Sea $p > 2$ y $g \in W_p^1(\Omega^*)$ con $\Omega^* = [0,1] \times [0,3/2]$. Supóngase que $g(x,y) = 0$ para $y \geq 1/2$. Encontrar γ y $u \in W_p^1(\Omega_{\gamma})$ tales que

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{en } \Omega_{\gamma} , \\ u &= g && \text{en } \partial \Omega_{\gamma} , \\ \frac{-s\gamma''(x)}{\sqrt{1 + \gamma'(x)^2}} &= \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x, 1 + \gamma(x)) && \forall x \in (0,1) , \\ \gamma(0) &= \gamma(1) = 0 . \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

Los espacios de funciones que se proponen permiten establecer sin mucha dificultad una formulación variacional del problema y

aún estudiar -no tan fácilmente- existencia y unicidad de la solución para el problema débil.

El estudio de problemas que incluyen condiciones de tipo Neumann para γ presentan más dificultades. Aunque puede hacerse un estudio similar al que se menciona en el siguiente capítulo para el problema que incluye las condiciones

$$\gamma'(0) = \gamma'(1) = 0, \quad \int_0^1 \gamma(x) dx = 0, \quad (1.14)$$

en lugar de las condiciones de Dirichlet en el problema (1.13). Una variante es que debe buscarse la solución para γ en un subespacio de $W_{\infty}^1(0,1)$ cuyos elementos satisfagan (1.14), en lugar de encontrar γ en $W_{\infty}^1(0,1)$. En el capítulo V se discute el problema con condiciones (1.14) y se presentan las modificaciones que son necesarias para resolver el problema discreto asociado en algunos ejemplos.

1.3 OBJETIVOS.

Uno de los objetivos de la presente tesis es estudiar y comprender las técnicas que se usan en el estudio teórico de la aproximación numérica de problemas de frontera libre, en particular del estudio que se hace en [16]. Los capítulos II y III se incluyen con esta intención.

Otro aspecto importante es la solución numérica del modelo propuesto. El objeto es verificar que los resultados y cotas de

error obtenidos corresponden a los teóricos. Algunos puntos que merecen atención son : resolver numéricamente el problema para diferentes datos y estudiar el efecto de los datos en la solución; qué papel juega la tensión superficial en la determinación de la superficie libre; y cómo depende la solución numérica de los espacios de aproximación. En el capítulo IV se discute esto.

Por otra parte se pretende estudiar numéricamente y extender los resultados teóricos que se presentan en [16] para el modelo (1.13) cuando se introducen las condiciones Neumann (1.14), y cuando se introduce la expresión de la curvatura en lugar del término no lineal que aparece en la ecuación para γ . Esto último se hace con el objeto de validar el modelo propuesto cuando se consideran perturbaciones pequeñas. En el capítulo V se realiza el estudio de tales modelos.

CAPITULO II

EL PROBLEMA DEBIL. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES.

2.1. INTRODUCCION.

En el capítulo anterior se presentó el problema que se quiere estudiar. Tal problema está descrito por las ecuaciones (1.13), y nos interesa resolverlo por medios del Método del Elemento Finito. Por tal motivo se quiere desarrollar una formulación del problema que sea más adecuada para estos propósitos. En el presente capítulo se propone una formulación que se denomina formulación débil. Esta formulación se obtiene usando la fórmula de Green ó integración por partes para integrar las ecuaciones diferenciales que aparecen en el problema. Las ecuaciones integrales obtenidas constituyen un problema equivalente, en cierto sentido, al problema original, y pueden estudiarse desde el punto de vista del análisis funcional. El aspecto más importante de este tipo de formulación (en caso de poder realizarla) reside en que permite debilitar las condiciones de regularidad de los datos y soluciones del problema. Es decir, los espacios de funciones en donde buscamos las soluciones son más generales. Algunos de los espacios de funciones que se utilizan más ampliamente en el estudio de este tipo de problemas son los denominados Espacios de Sobolev. Estos son los espacios de funciones que se utilizarán en el presente trabajo.

En este capítulo también se describe la idea general que se utiliza en [16] para probar la existencia y unicidad de la solución del problema débil.

2.2. FORMULACION DEBIL DEL PROBLEMA.

Comencemos recordando el problema que nos interesa resolver. El problema consiste en encontrar las funciones γ y u tales que

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{en } \Omega_\gamma, \\ u &= g && \text{en } \partial \Omega_\gamma, \\ \frac{-s\gamma''(x)}{\sqrt{1 + \gamma'(x)^2}} &= \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x, 1+\gamma(x)) && \forall x \in (0, 1), \\ \gamma(0) &= \gamma(1) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

en donde, como se describió en el capítulo 1, Ω_γ es el dominio definido por

$$\Omega_\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, y < 1 + \gamma(x)\};$$

g es una función que describe las condiciones de frontera para u y que está definida en un dominio Ω^* que contiene Ω_γ ; $s > 0$ es la tensión superficial y es constante; \vec{n} es el vector unitario normal a la frontera libre

$$\Gamma_\gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, y = 1 + \gamma(x)\}.$$

El problema (2.1) consiste de dos "partes", el problema para

u y el problema para γ . Desarrollaremos una formulación variacional preliminar para cada uno de ellos. Consideremos primero el problema elíptico

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{en } \Omega_\gamma, \\ u &= g && \text{en } \partial \Omega_\gamma, \end{aligned} \tag{2.2}$$

del problema (2.1). Si $g \in C^2(\bar{\Omega}_\gamma)$, haciendo $u = \omega + g$ con $\omega \in C^2(\bar{\Omega}_\gamma)$ el problema (2.2) se transforma en

$$\begin{aligned} \Delta \omega &= -\Delta g && \text{en } \Omega_\gamma, \\ \omega &= 0 && \text{en } \partial \Omega_\gamma. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Una solución clásica de este problema es una función $\omega \in C^2(\bar{\Omega}_\gamma)$ que satisface ambas ecuaciones. Si se multiplica la primera ecuación por una función $v \in C^1(\Omega_\gamma)$ que tenga soporte compacto en Ω_γ y se integra sobre Ω_γ , se obtiene, utilizando la fórmula de Green, que

$$\int_{\Omega_\gamma} \nabla \omega \cdot \nabla v \, dx = - \int_{\Omega_\gamma} \nabla g \cdot \nabla v \, dx.$$

Como $u = \omega + g$, entonces

$$\int_{\Omega_\gamma} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = 0 \quad \forall v \in C_c^1(\Omega_\gamma). \tag{2.4}$$

Está claro que si $u \in C^2(\bar{\Omega}_\gamma)$ es solución del problema (2.2), u

satisface la ecuación (2.4). Sin embargo, la ecuación (2.4) también tiene sentido si $\forall u \in L^p(\Omega_\gamma) \times L^p(\Omega_\gamma)$ para $p \geq 1$. A una función $u \in L^p(\Omega_\gamma)$ tal que $\forall u \in L^p(\Omega_\gamma) \times L^p(\Omega_\gamma)$ y que satisface (2.4) se le conoce como solución débil del problema (2.2). En el estudio de soluciones débiles se hará uso de los espacios de Sobolev $W_p^1(\Omega)$ y $W_p^0(\Omega)$ con $1 \leq p \leq \infty$ y Ω un dominio en \mathbb{R} ó \mathbb{R}^2 .

Regresemos al problema (2.4). Dado que $C_c^1(\Omega_\gamma)$ es denso en $W_q^1(\Omega_\gamma)$ para toda $q \geq 1$, la ecuación (2.4) aún tiene sentido si $g \in W_p^1(\Omega_\gamma)$, $u \in g \otimes W_p^1(\Omega_\gamma)$ con $1 \leq p \leq \infty$ y $v \in W_q^1(\Omega_\gamma)$ con q tal que $1/p + 1/q = 1$. Por lo tanto, podemos escribir la formulación débil del problema (2.2) de la siguiente manera:

Dada $g \in W_p^1(\Omega^*)$, encontrar $u \in g \otimes W_p^0(\Omega_\gamma)$ tal que

$$\int_{\Omega_\gamma} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = 0 \quad \forall v \in W_q^1(\Omega_\gamma). \quad (2.5)$$

Procedemos de manera análoga para encontrar la formulación débil de

$$\frac{-s\gamma''(x)}{\sqrt{1 + (\gamma'(x))^2}} = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x, 1 + \gamma(x)) \quad x \in (0, 1), \quad (2.6)$$

$$\gamma(0) = \gamma(1) = 0.$$

La primera ecuación se puede escribir así:

$$-s\gamma''(x) = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x, 1 + \gamma(x)) \sqrt{1 + \gamma'(x)^2} \quad x \in (0,1),$$

y tiene como solución una función $\gamma \in C^2(0,1)$. Para debilitar la solución multiplicamos la ecuación diferencial por una función de prueba $\chi \in C_c^1(0,1)$ y realizamos integración por partes del lado izquierdo. Se obtiene

$$s \int_0^1 \gamma'(x) \chi'(x) dx = \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x, 1 + \gamma(x)) \chi(x) \sqrt{1 + \gamma'(x)^2} dx \quad \forall \chi \in C_c^1(0,1). \quad (2.7)$$

Si $\gamma \in W_\infty^1(0,1)$, para que (2.7) tenga sentido se requiere que $\chi \in W_1^0(0,1)$.

Con las expresiones (2.5) y (2.7) podemos establecer una formulación débil preliminar del problema (2.1). Primero introducimos las formas bilineales

$$a_\gamma(u, v) := \int_{\Omega_\gamma} \nabla u \cdot \nabla v \, dx ,$$

$$b(\gamma, \chi) := s \int_0^1 \gamma'(x) \chi'(x) dx .$$

La formulación débil preliminar es : Dado $g \in W_P^1(\Omega^*)$, encontrar $\gamma \in W_\infty^0$ y $u \in g \otimes W_P^1(\Omega_\gamma)$ tales que

$$\begin{aligned}
a_\gamma(u, v) &= 0, \quad \forall v \in W_q^1(\Omega_\gamma) \\
b(\gamma, \chi) &= \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x, 1+\gamma(x)) \chi(x) \sqrt{1+(\gamma'(x))^2} dx, \quad \forall \chi \in W_1^1(0, 1)
\end{aligned}
\tag{2.8}$$

En la anterior formulación aparece un pequeño inconveniente. En el lado derecho de la segunda ecuación se encuentra la expresión $\partial u / \partial \vec{n}$, la cual requiere de un poco más de esfuerzo para calcularla y además puede no estar definida para u arbitrarias en el espacio donde se buscan las soluciones. Para modificar la expresión se procede como sigue. De (2.2) se tiene que

$$0 = \int_{\Omega_\gamma} \Delta u v dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\partial \Omega_\gamma} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} v d\gamma \quad \forall v \in W_q^1(\Omega_\gamma),$$

gracias a la fórmula de Green. De aquí que si u es solución del problema (2.2) se verifica

$$a_\gamma(u, v) = \int_{\partial \Omega_\gamma} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} v d\gamma \quad \forall v \in W_q^1(\Omega_\gamma).$$

En particular, si existe $v \in W_q^1(\Omega_\gamma)$ tal que $v = 0$ en $\partial \Omega_\gamma - \Gamma_\gamma$, se tiene que

$$\begin{aligned}
a_\gamma(u, v) &= \int_{\Gamma_\gamma} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} v d\gamma \\
&= \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x, 1+\gamma(x)) v(x, 1+\gamma(x)) \sqrt{1+(\gamma'(x))^2} dx
\end{aligned}
\tag{2.9}$$

para tal función v . Como se puede notar nuestra intención es identificar la función χ en la ecuación (2.7) con la función v en la expresión (2.9). Para lograr esto debemos verificar dos cosas : Primero, que dada cualquier función $\chi \in W_1^0(0,1)$ es posible encontrar una extensión v de esta función, que denotaremos por $E_\gamma \chi$, tal que $E_\gamma \chi|_{\Gamma_\gamma} = \chi$ y $E_\gamma \chi = 0$ sobre $\partial\Omega_\gamma - \Gamma_\gamma$; segundo, que esta extensión se encuentra en $W_q^1(\Omega_\gamma)$. La siguiente proposición (ver [16]) indica que esto es posible si restringimos los valores de q .

Proposición 2.1. Para toda $\chi \in W_1^0(0,1)$ es posible construir una extensión $E_\gamma \chi$, en $W_q^1(\Omega_\gamma)$ con $q < 2$, tal que $E_\gamma \chi|_{\Gamma_\gamma} = \chi$ y $E_\gamma \chi|_{\partial\Omega_\gamma - \Gamma_\gamma} = 0$.

Observación. La restricción $q < 2$ impone la condición $p > 2$ en (2.8). En realidad esta restricción es consecuencia del hecho de pedir la mínima regularidad para γ , es decir, $\gamma \in W_\infty^1(0,1)$. Si se hubiese escogido $\gamma \in W_2^1(0,1)$, por ejemplo, entonces $E_\gamma \chi \in W_2^1(\Omega_\gamma)$, y bastaba tomar $p = q = 2$. Esto simplificaría el trabajo teórico

Ahora podemos usar la expresión (2.9), con $v = E_\gamma \chi$ que satisface las condiciones de la proposición 2.1, en la formulación (2.8). Entonces la forma final para la formulación variacional del problema (2.1) es:

Dada $g \in W_p^1(\Omega^*)$ con $p > 2$ y q tal que $1/p + 1/q = 1$, encontrar $u \in g \otimes W_p^1(\Omega_\gamma)$ y $\gamma \in W_\infty^1(0,1)$ tales que

$$\begin{aligned} a_\gamma(u, v) &= 0 & \forall v \in W_q^1(\Omega_\gamma), \\ b(\gamma, \chi) &= a_\gamma(u, E_\gamma \chi) & \forall \chi \in W_1^1(0,1). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Obsérvese que en esta formulación final ya no aparece la expresión $\partial u / \partial \vec{n}$.

Observación. El problema (2.16) no depende de la extensión $E_\gamma \chi$ debido a que si $E_\gamma^1 \chi$ y $E_\gamma^2 \chi$ son dos extensiones de $\chi \in W_1^1(0,1)$ a $W_q^1(\Omega_\gamma)$, entonces $E_\gamma^1 \chi - E_\gamma^2 \chi$ es un elemento del espacio $W_q^1(\Omega_\gamma)$ y, en consecuencia, si u es solución del problema (2.16) se tiene que $a_\gamma(u, E_\gamma^1 \chi - E_\gamma^2 \chi) = 0$.

2.3. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCION DEL PROBLEMA DEBIL.

La demostración de la existencia y unicidad de la solución del problema débil (2.10) se puede consultar en [16]. En la prueba se utiliza un argumento de contracción. Las ideas centrales son las siguientes :

Como ya fué mencionado en el capítulo 1, Pukanchev [13], Solonnikov [20], Sattinger [18] y Okamoto [11], entre otros, probaron existencia y unicidad de soluciones en sentido clásico para problemas semejantes al problema (2.1). En particular, tales resultados son válidos si γ , u y g son de norma pequeña. Siguiendo la misma dirección se buscan soluciones γ y u del problema (2.10)

tales que $\|\gamma\|_{W_{\infty}^1(0,1)} < 1/2$ y $\|u\|_{W_p^1(\Omega_{\gamma})} < \varepsilon$ para alguna constante $\varepsilon > 0$ a determinar. Para el desarrollo del argumento de contracción se considera el conjunto

$$V_{\varepsilon} = \{(\gamma, u) \in W_{\infty}^0(0,1) \times W_p^1(\Omega_{\gamma}) : \|\gamma\|_{W_{\infty}^1(0,1)} < \frac{1}{2}, \|u\|_{W_p^1(\Omega_{\gamma})} < \varepsilon\}, \quad (2.11)$$

y el mapeo $T:V_{\varepsilon} \rightarrow V_{\varepsilon}$ definido de la siguiente manera

$$T(\gamma, u) = (\tilde{\gamma}, \tilde{u}) \quad (2.12)$$

en donde $\tilde{\gamma} \in W_{\infty}^0(0,1)$ resuelve

$$b(\tilde{\gamma}, \chi) = a_{\gamma}(u, E_{\gamma}\chi) \quad \forall \chi \in W_1^0(0,1), \quad (2.12a)$$

y $\tilde{u} \in g \otimes W_p^1(\Omega_{\tilde{\gamma}})$ resuelve

$$a_{\tilde{\gamma}}(\tilde{u}, v) = 0 \quad \forall v \in W_q^0(\Omega_{\tilde{\gamma}}). \quad (2.12b)$$

Para probar que T es efectivamente un mapeo de V_{ε} en V_{ε} debe mostrarse que los problemas (2.12a) y (2.12b) tienen solución única si se escogen los números ε y p y la función $g \in W_p^1(\Omega^*)$ de manera adecuada. Aquí Ω^* se toma como en (1.13). Por otro lado, para probar que T es una contracción debe definirse una norma adecuada en V_{ε} . Por ejemplo, la norma

$$\|(\gamma, \hat{u})\|_{\varepsilon} := \varepsilon \gamma_{W_{\infty}^1(0,1)} + \hat{u}_{W_p^1(\Omega_0)}, \quad (2.13)$$

en donde $\hat{u} \in W_p^1(\Omega_0)$ es la función asociada a la función $u \in W_p^1(\Omega_{\gamma})$ inducida por el cambio de variables

$$(\xi, \eta) \in \Omega_0 \longrightarrow (x, y) \in \Omega_{\gamma},$$

definido por

$$x = \xi, \quad y = (1 + \gamma(\xi))\eta. \quad (2.14)$$

Es decir

$$u(\xi, \eta) = u(\xi, (1 + \gamma(\xi))\eta). \quad (2.15)$$

En resumen, usando las anteriores ideas, en [16] se muestra el siguiente resultado

Proposición 2.2. Existen dos números positivos ε y δ y un número real $P > 2$ tales que si $\|g\|_{W_p^1(\Omega^*)} < \delta$, entonces el problema (2.10) admite una solución única $(\gamma, u) \in V_{\varepsilon}$ cuando $p \in (2, P)$, la cual puede calcularse por iteración de punto fijo:

$$(\gamma_{i+1}, u_{i+1}) = T(\gamma_i, u_i),$$

comenzando con cualquier $(\gamma_0, u_0) \in V_{\varepsilon}$.

Una posible elección para (γ_0, u_0) puede ser la siguiente. Tomar $\gamma_0 = 0$ y u_0 la solución de

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{en } \Omega_0, \\ u &= g && \text{en } \partial\Omega_0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Observación: En [16] se utiliza el siguiente argumento para demostrar que T es una contracción : " Sean \hat{g}_1 y \hat{g}_2 las funciones asociadas a g bajo el mapeo (2.15) con respecto a γ_1 y γ_2 en $W_0^1(0,1)$. Si $g(x,y)=0$ para $y \geq 1/2$ y $g(0,y)=g(1,y)=0 \forall y \in (0,1)$, entonces $\hat{g}_1 - \hat{g}_2 \in W_p^1(\Omega_0)$ ". Sin embargo la segunda restricción no es necesaria para garantizar lo anterior, pues

$$\hat{g}_1(\xi, \eta) - \hat{g}_2(\xi, \eta) = g(\xi, (1+\gamma_1(\xi))\eta) - g(\xi, (1+\gamma_2(\xi))\eta) = 0 ,$$

cuando $\xi=0$ ó 1 , y cuando $\eta=0$ ó $\eta=1$ suponiendo $g(x,y)=0$ para $y \geq 1/2$.

CAPITULO III

DISCRETIZACION DEL PROBLEMA. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCION. CONVERGENCIA.

3.1. INTRODUCCION.

Nuestro objetivo es resolver el problema (2.10) utilizando el Método del Elemento Finito en combinación con la contracción T definida por las ecuaciones (2.12), (2.12a) y (2.12b). Como punto inicial $(\gamma_0, u_0) \in V_\epsilon$ para realizar las iteraciones tomamos $\gamma_0 = 0$ y u_0 solución del problema (2.16). Entonces en cada iteración $(\gamma_{i+1}, u_{i+1}) = T(\gamma_i, u_i)$ con $i = 0, 1, \dots$, debemos resolver numéricamente el problema

$$\begin{aligned} b(\gamma_{i+1}, \chi) &= a_{\gamma_i}(u_i, E_{\gamma_i} \chi) & \forall \chi \in W_1^0(0, 1) &, \\ a_{\gamma_{i+1}}(u_{i+1}, v) &= 0 & \forall v \in W_q^0(\Omega_{\gamma_{i+1}}) &. \end{aligned}$$

El Método del Elemento Finito contiene dos características básicas: primero, el dominio Ω_{γ_i} es representado como una colección de subdominios geoméricamente simples, llamados elementos finitos; segundo, sobre cada elemento finito las funciones que intervienen en el problema son aproximadas por funciones sencillas, usando la idea de que cualquier función continua puede aproximarse por una combinación lineal de polinomios algebraicos. Es importante recalcar que en los trabajos para resolver los problemas que se

mencionan en la sección 1.1, los autores han utilizado elementos isoparamétricos para discretizar el dominio en combinación con polinomios cuadráticos ó cúbicos para aproximar sobre cada elemento las funciones que aparecen en tales problemas. Con ello obtienen convergencia computacional del método utilizado. Por el contrario, Saavedra y Scott [16] proponen discretizar Ω_γ con elementos triangulares lineales y usan polinomios lineales para aproximar los datos del problema y las soluciones del mismo sobre cada triángulo; asimismo prueban existencia y unicidad del problema discreto asociado al problema (2.10) y demuestran que se obtiene convergencia óptima en este caso.

En este capítulo se mencionan las principales ideas que se presentan en [16] para obtener una discretización del problema (2.10).

3.2. DISCRETIZACION DEL DOMINIO.

El objetivo es discretizar el dominio Ω_γ para cada $\gamma \in W_\omega^1(0,1)$ con $\|\gamma\|_{W_\omega^1(0,1)} < 1/2$. Para ello se hace uso de la discretización del dominio $\Omega_0 = [0,1] \times [0,1]$ y del mapeo (2.14) como se describe a continuación.

Sea π_h^0 , $0 < h \leq h_0 < 1$, una triangulación uniforme finita y regular de Ω_0 . Una triangulación de este tipo se muestra en la siguiente figura.

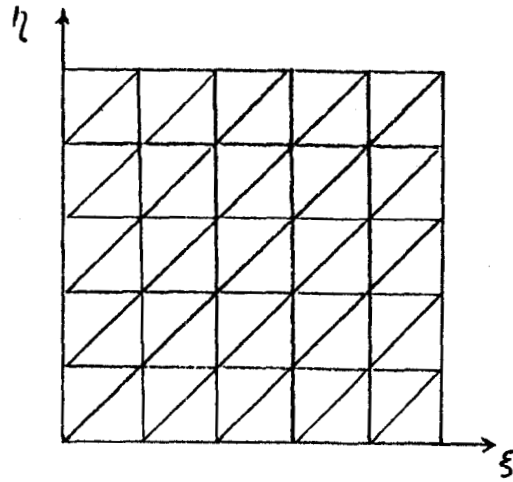


Fig. 3.1. Triangulación uniforme finita y regular π_h^0 de Ω_0 .

Ahora bién, dada $\gamma \in W_{\infty}^1(0,1)$ usamos el mapeo (2.14) para transformar cada uno de los vértices (ξ, η) de los triángulos en π_h^0 en los nuevos vértices $(x, y) = (\xi, (1+\gamma(\xi))\eta)$. De esta manera obtenemos una triangulación de Ω_{γ} que denotamos por π_h^{γ} . Esta triangulación de Ω_{γ} es regular (ver [16]). La siguiente figura ilustra la triangulación obtenida.

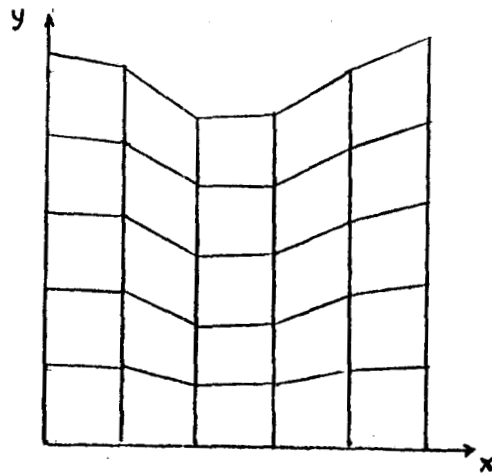


Fig. 3.2. Triangulación π_h^{γ} obtenida de π_h^0 via el mapeo (2.14).

Como puede observarse a cada triángulo $\hat{K} \in \pi_h^0$ le corresponde un único triángulo $K \in \pi_h^\gamma$. Además el polígono que aproxima al dominio Ω_γ es $\Omega_\gamma^h := \cup_{K \in \pi_h^\gamma} K$. Precisemos un poco más lo que se está haciendo. Sea \hat{K} un triángulo en π_h^0 con vértices $\hat{n}_i = (\xi_i, \eta_i)$, $i = 1, 2, 3$, en donde $\xi_2 = \xi_3$ y $\eta_1 = \eta_2$. Considere la transformación afín F_K^γ que transforma el triángulo \hat{K} en el correspondiente triángulo K de π_h^γ . Tal transformación es de la forma

$$F_K^\gamma : \hat{K} \rightarrow K$$

$$F_K^\gamma(x) = D_K \hat{x} + b_K \quad \forall \hat{x} \in \hat{K},$$

en donde D_K es una matriz de orden 2 y $b_K \in \mathbb{R}^2$. Los coeficientes de D_K y b_K se determinan de manera única para cada par asociado de los triángulos \hat{K} y K por el sistema de ecuaciones

$$F_K^\gamma(\hat{n}_i) = D_K \hat{n}_i + b_K = n_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

en donde $n_i = (\xi_i, (1+\gamma(\xi_i))\eta_i)$ son los vértices del triángulo K en π_h^γ . Véase la siguiente figura

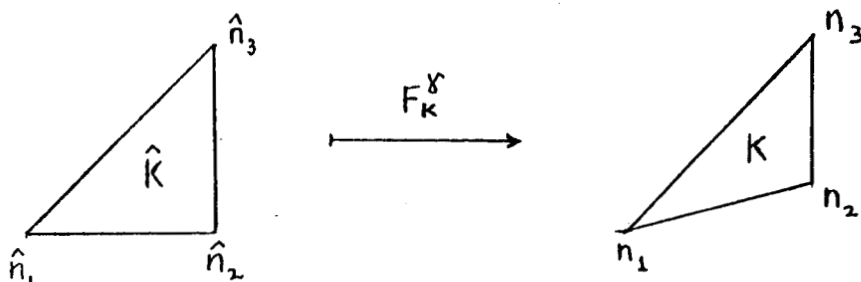


Fig. 3.3. Transformación de $\hat{K} \in \pi_h^0$ en $K \in \pi_h^\gamma$ mediante F_K^γ .

Algunos cálculos sencillos muestran que

$$D_K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\gamma(\xi_2) - \gamma(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} \eta_1 & 1 + \gamma(\xi_1) \end{bmatrix}, \quad b_K = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\gamma(\xi_2) - \gamma(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} \eta_1 \xi_2 \end{bmatrix}$$

Se ve fácilmente que si $\gamma \in W_\infty^1(0,1)$ y $\|\gamma\|_{W_\infty^1(0,1)} < 1$, entonces F_K^γ es invertible para toda $\hat{K} \in \pi_h^0$. En consecuencia $\Omega_\gamma^h = \cup_{\hat{K} \in \pi_h^0} F_K^\gamma(\hat{K})$, y la transformación $F^\gamma: \Omega_0 \rightarrow \Omega_\gamma^h$ tal que

$$F^\gamma|_{\hat{K}} = F_K^\gamma \quad \forall \hat{K} \in \pi_h^0,$$

es invertible. Esta transformación es el interpolante continuo, afín por pedazos, del mapeo (2.14) con respecto a la malla π_h^0 .

La ventaja con esta forma de discretizar el dominio de Ω_γ para cada curva γ , es que solo basta con discretizar el cuadrado unitario Ω_0 . Entonces los nodos de la malla para Ω_γ se encuentran directamente vía el mapeo (2.14) con respecto a γ . La discretización de Ω_0 se puede implementar computacionalmente sin dificultades. Por medio de la transformación $F^\gamma: \Omega_0 \rightarrow \Omega_\gamma^h$ se conoce el nuevo dominio Ω_γ^h en donde se va a aproximar la solución del problema (2.10). Es conveniente subrayar que la transformación $F^\gamma: \Omega_0 \rightarrow \Omega_\gamma^h$ es diferente del cambio de variables (2.14).

3.3. ESPACIOS DE INTERPOLACION.

Para discretizar el problema (2.10) se deben aproximar las

funciones que aparecen en tal formulación. Antes de hacer esto obsérvese que si $\|\gamma\|_{W_\infty^1(0,1)} < 1$, entonces la transformación F^γ induce un isomorfismo de $W_q^1(\Omega_\gamma^h) \rightarrow W_q^1(\Omega_0)$ por medio de $v \rightarrow \tilde{v} := v \cdot F^\gamma$, gracias a que $F^\gamma|_K$ es una transformación afín para cada $K \in \pi_h^0$.

Debido a que el problema discreto debe resolverse sobre Ω_γ^h , entonces debemos escoger subespacios de dimensión finita de los espacios $W_\infty^1(0,1)$ y $W_p^1(\Omega_\gamma^h)$, $1 \leq p \leq \infty$, para aproximar las soluciones γ y u , respectivamente, así como los datos del problema. Los subespacios que se utilizan son espacios de polinomios lineales por tramos, como fue mencionado en la introducción de este capítulo. Todos ellos están asociados con la triangulación π_0^h del polígono Ω_h^γ . Los subespacios son los siguientes :

a) Los subespacios de $W_\infty^1(0,1)$ y $W_\infty^0(0,1)$ son, respectivamente,

$$S_h = \{ \gamma \in C^0(0,1) : \gamma|_{I_i} \in P^1(I_i), \quad i = 1, \dots, N \},$$

$$S_h^0 = \{ \gamma \in S_h : \gamma(0) = \gamma(1) = 0 \},$$

en donde $P^1(I_i)$ indica el conjunto de polinomios lineales en el subintervalo $I_i = [\xi_i, \xi_{i+1}]$ del intervalo $[0,1]$, con $\xi_i \quad i=1, \dots, N-1$ tal que $(\xi_i, 0)$ es vértice de un triángulo $K \in \pi_h^\gamma$.

b) Los subespacios de $W_p^1(\Omega_\gamma^h)$ y $W_p^0(\Omega_\gamma^h)$ con $1 \leq p \leq \infty$ son

$$V_h^\gamma = \{ v \in C^0(\Omega_\gamma^h) : v|_K \in P^1(K) , \forall K \in \pi_h^\gamma \} ,$$

$$V_h^{\gamma 0} = \{ v \in V_h^\gamma : v(n) = 0 , \forall n \in \partial\Omega_\gamma^h \} ,$$

respectivamente. $P_1(K)$ es el espacio de polinomios lineales definidos en el triángulo $K \in \pi_h^\gamma$.

Los subespacios correspondientes a $W_p^1(\Omega_0)$ y $W_p^{\gamma 0}(\Omega_0)$, asociados a la triangulación π_h^0 son

$$V_h = \{ \hat{v} \in C^0(\Omega_0) : \hat{v}|_{\hat{K}} \in P^1(\hat{K}) , \forall \hat{K} \in \pi_h^0 \} ,$$

$$V_h^0 = \{ \hat{v} \in V_h : \hat{v}(\hat{n}) = 0 , \forall \hat{n} \in \partial\Omega_0 \} ,$$

respectivamente.

Tales son los espacios de dimensión finita que son usados en la aproximación variacional del problema (2.10).

Observación. La transformación F^γ es introducida, en realidad, porque aparte de transformar los triángulos $\hat{K} \in \pi_h^0$ en los triángulos $K \in \pi_h^\gamma$, también transforma el espacio de polinomios lineales en \hat{K} , $P^1(\hat{K})$, en el espacio de polinomios lineales en K , $P^1(K)$. Esto no es cierto en general si aplicamos la transformación (2.11) a la triangulación π_h^0 , puesto que tal transformación no es afín.

INTERPOLACION LINEAL POR PEDAZOS .

El objetivo es aproximar las funciones γ , u , g y $E_\gamma \chi$ que aparecen en el problema (2.10) con funciones en los espacios discretos introducidos .

a) Para aproximar $\gamma \in W_\infty^1(0,1)$ usamos el interpolante lineal por pedazos usual

$$I_h: W_\infty^1(0,1) \longrightarrow S_h^0 ,$$

$$I_h \gamma = \sum_{i=2}^{N-1} \gamma(\xi_i) \psi_i^h .$$

con $\{\psi_i^h\}_{i=2}^{N-1}$ la base lineal de Lagrange de S_h^0 . Tal base tiene la propiedad de que $\psi_i^h(\xi_j) = \delta_{ij}$ $i, j = 2, \dots, N-1$. Si $\gamma \in W_\infty^1(0,1) \cap W_\infty^2(0,1)$ se tiene el orden de convergencia usual (Ver Ciarlet [4]).

$$\|\gamma - I_h^\gamma \gamma\|_{W_\infty^1(0,1)} \leq Ch \|\gamma\|_{W_\infty^2(0,1)} .$$

b) Para aproximar las funciones $v \in W_p^1(\Omega_\gamma^h)$ con $p > 2$ usamos el interpolante lineal por pedazos

$$I_h^\gamma: W_p^1(\Omega_\gamma^h) \longrightarrow V_h^\gamma$$

$$I_h^\gamma v = \sum_{k=1}^{NN} v(n_k) v_k^h ,$$

donde NN es el número total de nodos n_k en la malla definida por π_h^γ , y $\{v_k^h\}_{k=1}^{NN}$ es la base usual de Lagrange del espacio V_h^γ con respecto a tal triangulación. Esta base es tal que

$$v_k^h(n_{k'}) = \delta_{kk'} , \quad k, k' = 1, 2, \dots, NN .$$

Como en el caso anterior, esta aproximación tiene el orden de convergencia usual: Si $v \in W_p^1(\Omega_\gamma^h) \cap W_p^2(\Omega_\gamma^h)$, entonces

$$\|v - I_h^\gamma v\|_{W_p^1(\Omega_\gamma^h)} \leq Ch \|v\|_{W_p^2(\Omega_\gamma^h)} .$$

Análogamente se aproxima $g \in W_p^1(\Omega_\gamma^h)$ por $g_h^\gamma := I_h^\gamma g$. Además si $g \in W_p^2(\Omega^*)$ para $p > 2$,

$$\|g - g_h^\gamma\|_{W_p^1(\Omega_\gamma^h)} \leq Ch \|g\|_{W_p^2(\Omega^*)} ,$$

c) Sea $\chi_h \in S_h^0$. Como $\chi_h \in W_p^1(0,1)$ para $1 \leq p \leq \infty$, se puede considerar su extensión $E\chi_h$ a Ω_0 de tal manera que $E\chi_h \in W_q^1(\Omega_0)$, $1 < q < 2$, (ver proposición 2.1). Como $E\chi_h$ ya no es continua en general, no es conveniente utilizar los anteriores interpolantes. En [16] se propone utilizar un interpolante para funciones rugosas :

$$J_h : W_q^1(\Omega_0) \longrightarrow V_h ,$$

definido por

$$J_h v = \sum_{k=1}^{NN} L_k(v) v_k^h ,$$

donde $\{v_k^h\}_{k=1}^{NN}$ es la base usual de Lagrange de V_h con respecto a la triangulación π_h^0 y NN el número total de nodos en la malla. L_k es un funcional lineal dado por una integral ponderada a lo largo de una arista en la triangulación que tiene como nodo a n_k , y reproduce localmente cualquier función lineal por pedazos. Además si $v \in W_q^1(\Omega_0) \cap W_q^2(\Omega_0)$ se satisface

$$\|v - J_h v\|_{W_q^1(\Omega)} \leq Ch \|v\|_{W_q^2(\Omega)} .$$

La "extensión discreta" $E_\gamma^h \chi_h$ de $\chi_h \in S_h^0$ al dominio Ω_γ^h se obtiene por medio de

$$E_\gamma^h \chi_h := J_h E \chi_h \circ (F^\gamma)^{-1} .$$

3.4. DISCRETIZACION DEL PROBLEMA.

La formulación discreta asociada con la triangulación $\pi_h^{\gamma_h}$ es:

Encontrar $\gamma_h \in S_h^0$ y $u_h \in g_h^{\gamma_h} \otimes V_h^{0\gamma_h}$ tales que

$$a_{\gamma_h}(u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h^{0\gamma_h} , \quad (3.1a)$$

$$b(\gamma_h, \chi_h) = a_{\gamma_h}(u_h, E_{\gamma_h}^h \chi_h) \quad \forall \chi_h \in S_h^0 . \quad (3.1b)$$

Puesto que el dominio en el problema discreto tiene como frontera libre la curva γ_h , entonces las funciones u_h, v_h tienen como

dominio a $\Omega_{\gamma_h}^h$ y, por tanto, se encuentran en el espacio $V_h^{\gamma_h}$.
 Entonces $g_h^{\gamma_h}$ es la función en $V_h^{\gamma_h}$ que interpola a $g \in W_p^1(\Omega_{\gamma_h}^h)$, y
 $E_{\gamma_h}^h \chi_h$ es la extensión discreta de $\chi_h \in S_h^0$ al espacio $V_h^{\gamma_h}$.

Observación. Al igual que en el problema continuo, el problema (3.11b) no depende de la extensión para χ_h .

3.5. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCION DEL PROBLEMA DISCRETO.

Para probar existencia y unicidad de la solución del problema discreto (3.1) se hace uso de las ideas análogas a las que se utilizan en el caso del problema débil (2.10).

Se define el conjunto

$$V_\varepsilon^h := \{ (\gamma_h, u_h) \in S_h^0 \times V_h^{\gamma_h} : \|\gamma_h\|_{W_\infty^1(0,1)} < 1/2, \|u_h\|_{W_p^1(\Omega_{\gamma_h}^h)} < \varepsilon \},$$

y a continuación consideramos el mapeo $T^h: V_\varepsilon^h \rightarrow V_\varepsilon^h$ definido por

$$T^h(\gamma_h, u_h) = (\gamma_h^*, u_h^*) \tag{3.2}$$

en donde $\gamma_h^* \in S_h^0$ satisface

$$b(\gamma_h^*, \chi_h) = a_{\gamma_h}(u_h, E_{\gamma_h}^h \chi_h) \quad \forall \chi_h \in S_h^0, \tag{3.2a}$$

y $u_h^* \in g_h^{\gamma_h^*} \otimes V_h^{\circ\gamma_h^*}$ es solución de

$$a_{\gamma_h^*}(u_h^*, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h^{\circ\gamma_h^*}. \quad (3.2b)$$

En [16] se demuestra que T^h es una contracción de V_ε^h en V_ε^h , y se obtiene el siguiente resultado :

Proposición 3.1. Existen constantes $P > 2$ y $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ pequeños tales que si $\|g\|_{W_p^1(\Omega^*)} < \delta$, entonces el problema discreto (3.1) admite una solución única $(\gamma_h, u_h) \in V_\varepsilon^h$ para toda $p \in (2, P)$, la cual puede calcularse por iteración de punto fijo :

$$(\gamma_h^{i+1}, u_h^{i+1}) = T^h(\gamma_h^i, u_h^i),$$

comenzando con cualquier $(\gamma_h^0, u_h^0) \in V_\varepsilon^h$.

Como dato inicial $(\gamma_h^0, u_h^0) \in V_\varepsilon^h$, puede escogerse $\gamma_h^0 = 0$ en $[0, 1]$ y u_h^0 la proyección de Ritz $R_h u^0$ de la solución u^0 del problema

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 & \text{en} & \quad \Omega_0, \\ u &= g & \text{en} & \quad \partial\Omega_0. \end{aligned}$$

Para $\|g\|_{W_p^1(\Omega^*)}$ suficientemente pequeña se satisface $(\gamma_h^0, u_h^0) \in V_\varepsilon^h$. La proyección de Ritz $R_h : W_2^1(\Omega_0) \rightarrow V_h^0$ se define como

$$\langle \nabla(R_h u - u), \nabla v_h \rangle = 0 \quad \forall v_h \in V_h^0.$$

3.6. CONVERGENCIA.

Antes de resolver computacionalmente el problema (3.1) mencionaremos brevemente que el método de solución propuesto es convergente. El método que se usará se mencionó al principio del presente capítulo. El siguiente resultado muestra la convergencia.

Proposición 3.2. Supongase que $(\gamma_h, u_h) \in V_\epsilon^h$ es solución del problema discreto (3.1). Si la solución de norma pequeña $(\gamma, u) \in V_\epsilon$ del problema (2.10) satisface $(\gamma, u) \in W_\infty^2(0,1) \times W_p^2(\Omega_\gamma)$ para $p > 2$ y ϵ suficientemente pequeño, entonces existe una constante $C > 0$ y $h_0 \in (0,1)$ tal que para todo $h \in (0, h_0]$

$$\|\hat{u} - u_h\|_{W_p^1(\Omega_\gamma)} + \|\gamma - \gamma_h\|_{W_\infty^1(0,1)} \leq Ch \left(\|\gamma\|_{W_\infty^2(0,1)} + \|\hat{u}\|_{W_p^2(\Omega_0)} \right).$$

La demostración puede verse en [16]. Tal teorema muestra que se obtiene convergencia óptima cuando se usan los espacios lineales introducidos en la sección 3.3 para aproximar las funciones del problema débil (2.10).

CAPITULO IV

SOLUCION COMPUTACIONAL DEL PROBLEMA.

4.1. INTRODUCCION.

En este capítulo se presenta la implementación computacional del Método del Elemento Finito para resolver el problema discreto asociado al problema débil (2.10), así como algunos resultados numéricos. En el anterior capítulo se encontró que el problema discreto es:

Encontrar $\gamma_h \in S_h^0$ y $u_h \in g_h^{\gamma_h} \oplus V_h^{0\gamma_h}$ tales que

$$\begin{aligned} a_{\gamma_h}(u_h, v_h) &= 0 & \forall v_h \in V_h^{0\gamma_h}, \\ b(\gamma_h, \chi_h) &= a_{\gamma_h}(u_h, E_{\gamma_h}^h \chi_h) & \forall \chi_h \in S_h^0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Las funciones que intervienen en este problema se encuentran en espacios de dimensión finita cuyas bases vectoriales son las de Lagrange, las cuales fueron introducidas en la sección 3.3. Por lo tanto, el problema discreto puede traducirse a un problema en el que deben resolverse sistemas de ecuaciones lineales. Esta transformación se realizará en la siguiente sección. En la sección 4.3 se comenta la estructura y características del programa usado para resolver el problema (4.1). Las soluciones obtenidas para diferentes datos se incluyen en la sección 4.4.

4.2. EL ALGORITMO COMPUTACIONAL.

El algoritmo para resolver el problema (4.1) consiste del Método del Elemento Finito en combinación con un procedimiento iterativo. En cada una de las iteraciones se deben resolver dos problemas. Estos problemas son los que describen las ecuaciones (3.2a) y (3.2b) del capítulo III. A continuación se describen con detalle los pasos a seguir.

Supóngase que γ_h y u_h son dados. Queremos calcular $\gamma_h^* \in S_h^0$ que resuelve

$$b(\gamma_h^*, \chi_h) = a_{\gamma_h}(u_h, E_{\gamma_h}^h \chi_h) \quad \forall \chi_h \in S_h^0, \quad (4.2)$$

y $u_h^* \in g_h^{\gamma_h^*} \oplus V_h^{\gamma_h^*}$ que satisface

$$a_{\gamma_h^*}(u_h^*, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h^{\gamma_h^*}. \quad (4.3)$$

Consideremos la ecuación (4.2). Sea $U = \{\psi_j^h\}_{j=1}^N$ la base usual de Lagrange de S_h , con N como se escogió en la sección 3.3. La base correspondiente para S_h^0 es $U^0 = \{\chi_j\}_{j=1}^{N-2}$ con $\chi_j = \psi_{j+1}^h$. Entonces para $\gamma_h^* \in S_h^0$ existen constantes d_j , $j = 1, 2, \dots, N-2$, tales que

$$\gamma_h^* = \sum_{j=1}^{N-2} d_j \chi_j^h.$$

Además para que se satisfaga (4.2) es suficiente que

$$b(\gamma_h^*, \chi_i) = a_{\gamma_h}(u_h, E_{\gamma_h}^h \chi_i) \quad \forall \chi_i \in U^0 .$$

Si se sustituye la expresión para γ_h^* en esta última ecuación, se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\sum_{j=1}^{N-2} b_{ij} d_j = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-2, \quad (4.4)$$

en donde

$$b_{ij} = s \int_0^1 \chi_i'(x) \chi_j'(x) dx \quad \text{y} \quad f_i = \int_{\Omega_{\gamma_h}^h} \nabla u_h \cdot \nabla E_{\gamma_h}^h \chi_i dx dy .$$

Por lo tanto, para encontrar γ_h^* basta con calcular los coeficientes b_{ij} y f_i y resolver el sistema de ecuaciones (4.4) para las d_j .

Se procede de manera análoga para encontrar el sistema de ecuaciones equivalente al problema (4.3). Supóngase conocida $\gamma_h^* \in S_h^0$ y sea $B = \{v_k^h\}_{k=1}^{NN}$ la base usual de Lagrange de $V_h^{\gamma_h^*}$, en donde NN es el número total de nodos n_k en la triangulación $\pi_h^{\gamma_h^*}$. La base correspondiente para $V_h^{0\gamma_h^*}$ es $B^0 = \{v_j^h\}_{j=1}^{nn}$, con nn el número de nodos interiores n_j en tal triangulación. Entonces

$$u_h^* = \sum_{k=1}^{NN} g(n_k) v_k^h + \sum_{j=1}^{nn} c_j v_j^h$$

para algunas constantes c_j , $j = 1, 2, \dots, n$ a determinar. Así que el problema (4.3) es equivalente a

$$\sum_{k=1}^{nn} a_{ij} c_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, nn, \quad (4.5)$$

con

$$a_{ij} = \int_{\Omega_{\gamma_h^*}} \nabla v_i^h \cdot \nabla v_j^h \, dx dy \quad \text{y} \quad b_i = - \sum_{k=1}^{NN} g(n_k) \int_{\Omega_{\gamma_h^*}} \nabla v_i^h \cdot \nabla v_k^h \, dx dy.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones para las c_j se puede calcular u_h^* .

Para resolver las integrales que aparecen en el cálculo de los coeficientes de los sistemas de ecuaciones (4.4) y (4.5), se utiliza la técnica del Elemento Finito. Es decir, cada una de estas integrales se descompone en una suma, donde cada sumando es la integral correspondiente sobre un elemento de la triangulación.

La estrategia general para resolver el problema (4.1) consiste a grandes rasgos de los pasos siguientes :

- 1) Discretización uniforme del dominio base $\Omega_0 = [0,1] \times [0,1]$ en una colección de elementos finitos triangulares preseleccionados. Posteriormente se escoge $\gamma_h^0 = 0$, y se realiza el ciclo iterativo :

Para cada $i = 0, 1, 2, \dots$

- 2) Resolver el problema (4.3) para $u_h^i := u_h^*$ con $\gamma_h^* = \gamma_h^i$
- 3) Resolver el problema (4.2) para $\gamma_h^{i+1} := \gamma_h^*$ con $\gamma_h = \gamma_h^i$ y $u_h = u_h^i$.
- 4) Utilizar la transformación (2.14) para encontrar la discretización del nuevo dominio $\Omega_{\gamma_h^{i+1}}^h$ que se utiliza en la siguiente iteración.

5) Escritura de resultados.

Los pasos 2), 3) y 4) constituyen el cuerpo principal del algoritmo. El mayor volumen de cálculos en el algoritmo se realiza en los pasos 2) y 3). Estos pasos, en realidad, deben descomponerse en un conjunto de tareas específicas. Por ejemplo, el cálculo de los coeficientes de los sistemas de ecuaciones lineales asociados con los problemas (4.2) y (4.3), la solución misma de estos sistemas de ecuaciones. En la siguiente sección se presentarán más detalles acerca del algoritmo.

El criterio más sencillo para parar el ciclo de iteraciones se obtiene comparando las soluciones de dos iteraciones sucesivas. Es decir, se puede parar cuando

$$\max\left\{ \|u_h^{i+1} - u_h^i\|_{L^\infty(\Omega_0)} / \|u_h^i\|_{L^\infty(\Omega_0)}, \|\gamma_h^{i+1} - \gamma_h^i\|_{L^\infty(0,1)} / \|\gamma_h^i\|_{L^\infty(0,1)} \right\} < \varepsilon$$

para algún $\varepsilon > 0$ pequeño .

4.3. DESCRIPCION DEL PROGRAMA QUE RESUELVE EL PROBLEMA.

En la sección anterior se presentaron los pasos generales que debe contener el algoritmo que resuelve el problema discreto que nos interesa. El programa que resuelve el problema se denomina FINIT. Para la realización del código se utilizó el lenguaje FORTRAN 77 con objeto de utilizar las ventajas de programación estructurada que ofrece. El programa consiste de un conjunto de subrutinas con tareas específicas cada una y un programa principal. El programa principal contiene únicamente instrucciones de llamada a las subrutinas, y las instrucciones para realizar el ciclo iterativo. Las subrutinas que incluye el programa se denominan MALLA, PREPAR, RIGIDT, ENSAM, RESOL, CURVA y NNOD, además de algunas para impresión de resultados. No se utilizan rutinas de paquetes; la totalidad del código es trabajo propio. A continuación se describen las tareas que realiza cada una de estas subrutinas.

1. MALLA. Esta subrutina genera la triangulación del dominio Ω_0 . Encuentra el número de nodos n_k de la malla así como sus coordenadas, el número de elementos finitos de la triangulación, y qué nodos contiene cada elemento. Además clasifica los nodos internos y los nodos que se encuentran en la frontera del dominio. Puesto que la triangulación construida es uniforme, el único parámetro necesario para generar los anteriores datos es el número N de nodos distribuidos uniformemente en el segmento $[0,1]$.

almacenar los coeficientes de tales bloques en un vector. La forma de la matriz de rigidez depende exclusivamente de cómo se triangula el dominio Ω_0 , cuando se ha fijado un conjunto de funciones base. Por tanto los datos que necesita la subrutina son los generados por la subrutina MALLA.

3. RIGIDT. Consideramos un elemento típico K de la triangulación π_h^* con vértices en los nodos n_1, n_2, n_3 , como se muestra en la siguiente figura

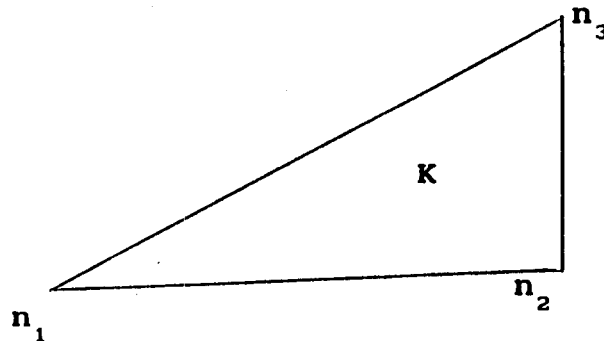


Figura 4.2. Elemento K de la triangulación π_h^* .

La formulación del problema (4.3) sobre este elemento es

$$\int_K \nabla u_h^* \cdot \nabla v_h^{(e)} dx dy = 0 \quad \forall v_h^{(e)} \in P^1(K). \quad (4.6)$$

La base usual de Lagrange $\{v_i^{(e)}\}_{i=1}^3$ de $P^1(K)$ son polinomios lineales con la propiedad de que para cada $i = 1, 2, 3$

$$v_1^{(e)}(n_k) = \delta_{ik}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Entonces $u_h^*|_K$ se puede representar como

$$u_h^*|_K = \sum_{k=1}^3 g(n_k) v_k^{(e)} + \sum_{j=1}^3 c_j^{(e)} v_j^{(e)}.$$

Así que (4.6) es equivalente al sistema

$$\sum_{j=1}^3 a_{ij}^{(e)} c_j^{(e)} = b_i^{(e)}, \quad i = 1, 2, 3,$$

con

$$a_{ij}^{(e)} = \int_K \nabla v_i^{(e)} \cdot \nabla v_j^{(e)} dx dy \quad \text{y} \quad b_i^{(e)} = - \sum_{k=1}^3 g(n_k) \int_K \nabla v_i^{(e)} \cdot \nabla v_k^{(e)} dx dy.$$

A la matriz $(a_{ij}^{(e)})$ se le denomina la matriz de rigidez del elemento K , y al vector $(b_i^{(e)})$ el vector de carga. La subrutina RIGIDT calcula estos arreglos para cada elemento $K \in \pi_h^*$. No se utiliza un elemento de referencia para realizar estos cálculos debido a que las funciones base de $P^1(K)$ son muy sencillas. De hecho si n_1 tiene coordenadas (x_1, y_1) , $i = 1, 2, 3$, entonces

$$v_1^{(e)}(x, y) = \frac{1}{2A^{(e)}} (\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 y)$$

con

$$A^{(e)} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_1 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix},$$

el área de elemento, y

$$\begin{aligned}\alpha_i &= x_j y_k - x_k y_j, \\ \beta_i &= y_j - y_k, \\ \gamma_i &= x_k - x_j,\end{aligned}$$

$$i = 1, 2, 3 \quad \text{y} \quad j = (i+1) \bmod 3, \quad k = (i+2) \bmod 3.$$

Entonces, realizando algunos cálculos sencillos, se encuentra que

$$a_{ij}^{(e)} = \frac{1}{4A^{(e)}}(\beta_i \beta_j + \gamma_i \gamma_j) \quad \text{y} \quad b_i^{(e)} = -\frac{1}{4A^{(e)}} \sum_{k=1}^3 g(x_k, y_k) (\beta_i \beta_k + \gamma_i \gamma_k).$$

Por lo tanto los únicos datos necesarios para calcular la matriz del elemento y del vector de carga son las coordenadas de los nodos del elemento K.

ENSAM. Esta subrutina realiza el ensamblado de las matrices elemento y del vector de carga generados por la subrutina RIGIDT. Es decir genera la matriz global de rigidez correspondiente al sistema de ecuaciones (4.5) y los coeficientes b_i de dicho sistema. La subrutina ENSAM utiliza los parámetros generados por las subrutinas MALLA y PREPAR para almacenar los coeficientes de la matriz $A = (a_{ij})$ del sistema (4.5) en un vector se realiza como se indica en la siguiente figura, para el caso de la matriz de la figura 4.1.

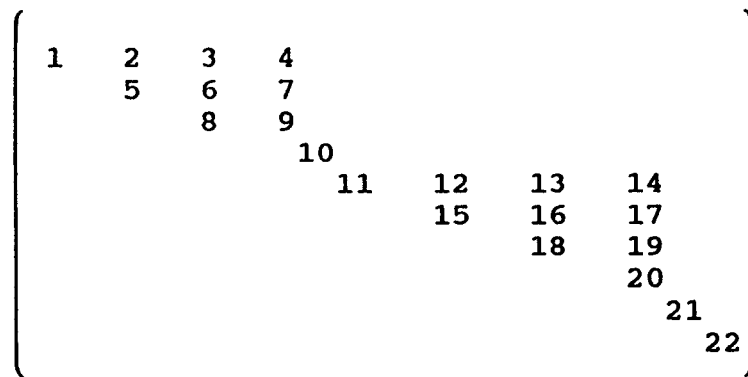


Figura. 4.2. Numeración de los coeficientes de la matriz de la figura 4.1.

5. RESOL. El método utilizado para resolver el sistema de ecuaciones (4.5) es el método de Cholesky adaptado para matrices ralas. Se escoge este método porque, como ya se mencionó anteriormente la matriz del sistema (4.5) es simétrica y positiva definida. El método es estable con respecto a errores de redondeo y puede programarse muy fácilmente. La subrutina RESOL resuelve el sistema de ecuaciones utilizando este método. Para ello se utilizan los siguientes datos de la matriz $A = (a_{ij})$ generados por la subrutina PREPAR :

$$\lambda(i), \quad i = 1, 2, \dots, nn$$

que indica el semiancho de banda del renglón i de la matriz, y

$$\beta(j), \quad j = 1, 2, \dots, nn$$

que indica el número de la primera fila de la matriz en donde se encuentra el primer coeficiente distinto de cero sobre la

columna j . Por ejemplo, para la matriz de la figura 4.1, $\lambda(1) = 4$, $\lambda(6) = 3$, $\beta(3) = 1$, $\beta(7) = 5$, $\beta(9) = 9$. El algoritmo de Cholesky para resolver el sistema de ecuaciones consiste de los siguientes pasos:

a) Se factoriza la matriz A en el producto LL^T , con $L = (l_{ij})$ una matriz triangular inferior que se calcula de la siguiente forma

$$l_{11} = (a_{11})^{1/2}$$

Para $j = 2, \dots, n$, hacer

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Para } i = \beta(i), \dots, j-1, \text{ hacer} \\ \quad l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=\max(\beta(i), \beta(j))}^{i-1} l_{ki} l_{kj}) / l_{11} \\ l_{jj} = (a_{jj} - \sum_{k=\beta(j)}^{j-1} l_{kj}^2)^{1/2} \end{array} \right.$$

Posteriormente el sistema $A\vec{c} = \vec{b}$ se resuelve en dos pasos :

b) Se resuelve el sistema $L\vec{y} = \vec{b}$ usando sustitución directa

$$y_1 = b_1 / l_{11}$$

Para $i = 2, \dots, n$, hacer

$$\left\{ \begin{array}{l} y_i = (b_i - \sum_{k=\beta(i)}^{i-1} l_{ki} y_k) / l_{ii} \end{array} \right.$$

c) Se resuelve el sistema $L^T\vec{c} = \vec{y}$ usando sustitución regresiva

$$c_n = y_n / l_{nn}$$

Parai = n-1, n-2, ..., 1, hacer

$$c_i = (y_i - \sum_{k=i+1}^{\lambda(i)+1-1} l_{ik} c_k) / l_{ii}.$$

6. CURVA. Esta subrutina resuelve el sistema de ecuaciones (4.4) asociado al problema (4.2). Primero realiza el cálculo de los coeficientes f_i cuyo valor es

$$\int_{\Omega_{\gamma_h}^h} \nabla u_h \cdot \nabla E_{\gamma_h}^h \chi_i \, dx dy,$$

en donde $\chi_i = \psi_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, N-2$ son las funciones "sombbrero". La gráfica de estas funciones se muestra en la siguiente figura

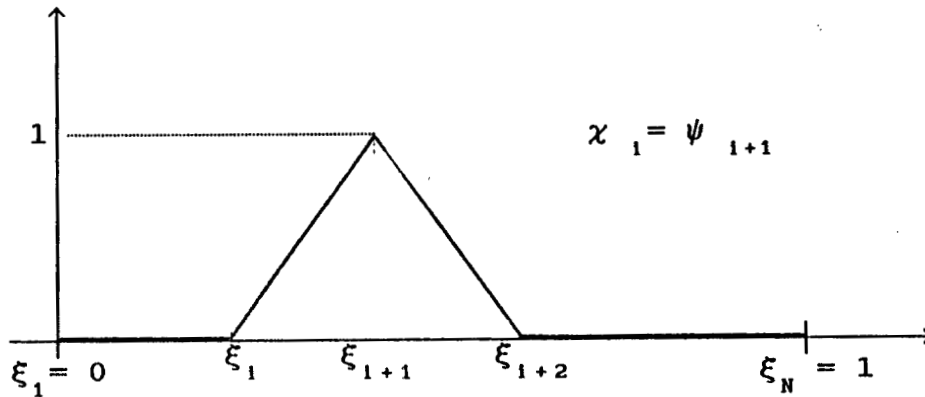


Figura 4.3. Función base χ_i de S_h^0 .

La extensión $E_{\gamma_h}^h \chi_i$ se escoge como se propuso en la sección 3.4, es decir

el cual puede resolverse por sustitución regresiva.

7. NNOD. Cuando se ha resuelto el problema (4.2) para γ_h^* , el siguiente paso es realizar la triangulación del nuevo dominio $\Omega_{\gamma_h^*}^h$ que se utiliza en la siguiente iteración. La subrutina NNOD realiza este trabajo utilizando la transformación (2.14) :

Sean $\hat{n}_i = (\xi_i, \eta_i)$, $i = 1, 2, \dots, NN$, el conjunto de nodos en Ω_0 obtenidos por la subrutina MALLA. El conjunto de nodos en $\Omega_{\gamma_h^*}^h$ correspondientes a la triangulación $\pi_h^{\gamma_h^*}$ son

$$n_i = \left(\xi_i, (1 + \gamma^*(\xi_i)) \eta_i \right), \quad i = 1, 2, \dots, NN.$$

Los parámetros de la nueva triangulación son los mismos que los de la triangulación π_h^0 , puesto que a cada triángulo $\hat{K} \in \pi_h^0$ le corresponde un único triángulo $K \in \pi_h^{\gamma_h^*}$ bajo la transformación F^{γ^*} .

4.4. PRESENTACION DE EJEMPLOS.

En esta sección se presentan los resultados numéricos obtenidos por medio del programa FINIT para diferentes datos. El objetivo de estos ejemplos es ilustrar computacionalmente el efecto de la norma de g y de la tensión superficial s en los valores aproximados. Asimismo se pretende mostrar que el orden del

error que se obtiene computacionalmente está acorde con el de la teoría.

Para simplificar los cálculos, las estimaciones del error se realizarán en la norma $\|\cdot\|_{L^\infty}$. J.A. Nitsche obtuvo el siguiente resultado: Supóngase que la solución u del problema elíptico en (1.13) es tal que $u \in H^1(\Omega) \cap W_\infty^2(\Omega)$. Entonces existe una constante C independiente de h tal que

$$\|u - u_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ch^2 |\ln h| \|u\|_{W_\infty^2(\Omega)}, \quad (4.7)$$

y si $u \in H^2(\Omega) \cap H^1(\Omega)$, entonces

$$\|u - u_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ch \|u\|_{H^2(\Omega)} \quad (4.8)$$

cuando $n = 2$. Ver [4]. Tomando en cuenta estos resultados se debe verificar, en nuestro caso, que el orden del error para el cálculo de γ y u debe encontrarse entre $O(h^2)$ y $O(h)$.

El problema (1.13) es un modelo abstracto en el cual no es posible comparar los resultados numéricos obtenidos con resultados experimentales o con la solución de algún problema conocido, como se hace usualmente. En nuestro caso, para estimar el orden del error se hace uso del siguiente argumento huerístico :

Supóngase que $\gamma(x)$ es la solución exacta del problema para la frontera libre. Sea $\xi_1 \in I = (0,1)$ un punto donde se ha obtenido la solución aproximada γ_h de γ , y h la longitud de discretización del intervalo $\bar{I} = [0,1]$. Si el error en la norma L^∞ es de orden h^r , se tiene que

$$\gamma_h(\xi_1) - \gamma(\xi_1) \approx Ch^r$$

para alguna constante C independiente de h . Asimismo

$$\gamma_{2h}(\xi_1) - \gamma(\xi_1) \approx C(2h)^r.$$

Restando la primera ecuación de la segunda se encuentra que

$$\gamma_{2h}(\xi_1) - \gamma_h(\xi_1) \approx Ch^r(2^r - 1).$$

Análogamente se obtiene que

$$\gamma_{4h}(\xi_1) - \gamma_{2h}(\xi_1) \approx C(2h)^r(2^r - 1).$$

Por lo tanto

$$2^r = \frac{\gamma_{4h}(\xi_1) - \gamma_{2h}(\xi_1)}{\gamma_{2h}(\xi_1) - \gamma_h(\xi_1)}$$

y

$$r \approx r(\gamma_h, \xi_1) := \log \frac{\gamma_{4h}(\xi_1) - \gamma_{2h}(\xi_1)}{\gamma_{2h}(\xi_1) - \gamma_h(\xi_1)} / \log 2 . \quad (4.9)$$

Para estimar el orden del error en la norma L^∞ cometido en el cálculo de la solución aproximada u_h de u , se utiliza el mismo argumento. Suponiendo que $n_1 \in \Omega_{\gamma_h}$ es un punto donde se ha obtenido la solución aproximada se encuentra que

$$r(u_h, n_1) := \log \left(\frac{u_{4h}(n_1) - \gamma_{2h}(n_1)}{\gamma_{2h}(n_1) - \gamma_h(n_1)} \right) / \log 2 , \quad (4.10)$$

en donde h es el paso de discretización del dominio Ω_{γ_h} .

En los ejemplos que se muestran a continuación se realizan estas estimaciones escogiendo $\xi_1 = 1/2$ y $n_1 = (1/2, (1+\gamma(1/2))1/2)$. Las estimaciones (4.9) y (4.10) solo se realizan cada vez que se toman diferentes expresiones para la función $g(x, y)$.

Los primeros 9 ejemplos se presentan con el objeto de observar el efecto de la norma de g en la solución aproximada, y para estimar el orden del error cometido. Los ejemplos 10, 11 y 12 ilustran el efecto de la tensión superficial.

En cada ejemplo del 1 al 9 se incluye la gráfica de la curva de la frontera libre $\gamma_h(x)$ junto con las iteraciones realizadas para obtenerla. Para los ejemplos 10, 11 y 12 se incluyen las gráficas que muestran como varía la solución discreta $\gamma_h(x)$ con

respecto al valor de la tensión superficial. En estas gráficas los números en cada curva indican el valor escogido para la tensión superficial s .

En todas las gráficas de frontera libre el símbolo ux indica el valor de cada subdivisión en la escala para la abscisa, y uy indica el valor de cada subdivisión en la escala para los valores de γ_h . En la parte inferior de cada gráfica se muestran el intervalo en donde varían los valores de x y el intervalo donde varían los valores de la ordenada y .

Se incluyen las gráficas de la solución $u_h(x,y)$ sólo en los ejemplos 2, 5 y 8. No se incluyen las gráficas de $u_h(x,y)$ para los demás ejemplos debido a que es más difícil observar las variaciones de una superficie a otra.

Se recuerda que $\Omega^* = [0,1] \times [0,3/2]$ es el dominio de definición de la función $g(x,y)$, s denota la tensión superficial y h es la longitud de discretización del cuadrado unitario Ω_0 , como se muestra en la figura 3.1. En la discretización de Ω_0 , NN indica el número de nodos en la triangulación y NE el número de elementos triangulares. Por último, el criterio utilizado para parar las iteraciones en todos los casos es, considerando el error relativo en dos iteraciones sucesivas. Tal criterio se mencionó en el final de la sección 4.2 y es :

Parar el ciclo iterativo cuando

$$\max\{\|u_h^{i+1}-u_h^i\|_{L^\infty(\Omega_0)}/\|u_h^i\|_{L^\infty(\Omega_0)}, \|\gamma_h^{i+1}-\gamma_h^i\|_{L^\infty(0,1)}/\|\gamma_h^i\|_{L^\infty(0,1)}\} < \varepsilon$$

para algún $\varepsilon > 0$ pequeño. En los ejemplos que se presentan a continuación se escogió $\varepsilon = 10^{-5}$.

Ejemplo 1.

$$g(x,y) = \begin{cases} 2(y - 1/2)\text{sen } \pi x, & y \leq 1/2 \\ 0 & , \quad y > 1/2. \end{cases}$$

$s = 1.$

Se consideran los casos

- a) $h = 1/10,$ $NN = 121,$ $NE = 200.$
- b) $h = 1/20,$ $NN = 441,$ $NE = 800.$
- c) $h = 1/40,$ $NN = 1681,$ $NE = 3200.$

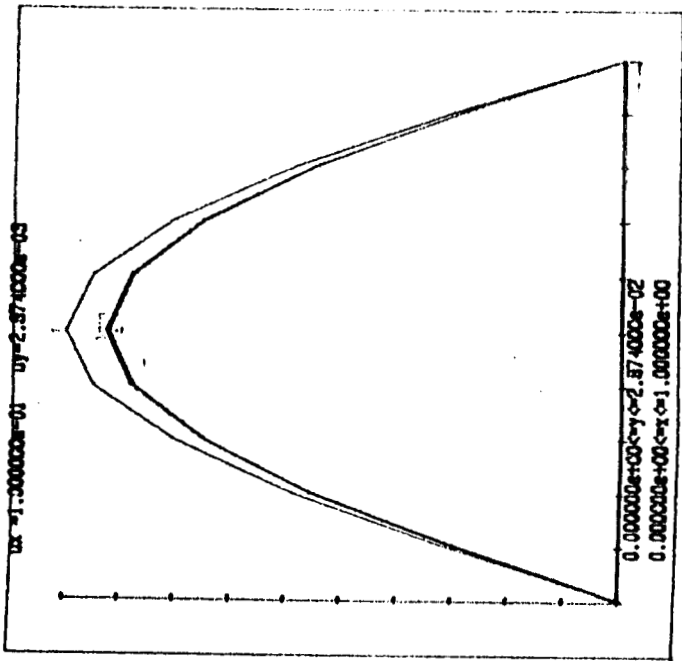
La norma de g en el espacio $W_2^1(\Omega^*)$ es 1.38 .

La convergencia se obtiene en 6 iteraciones y no depende de $h.$

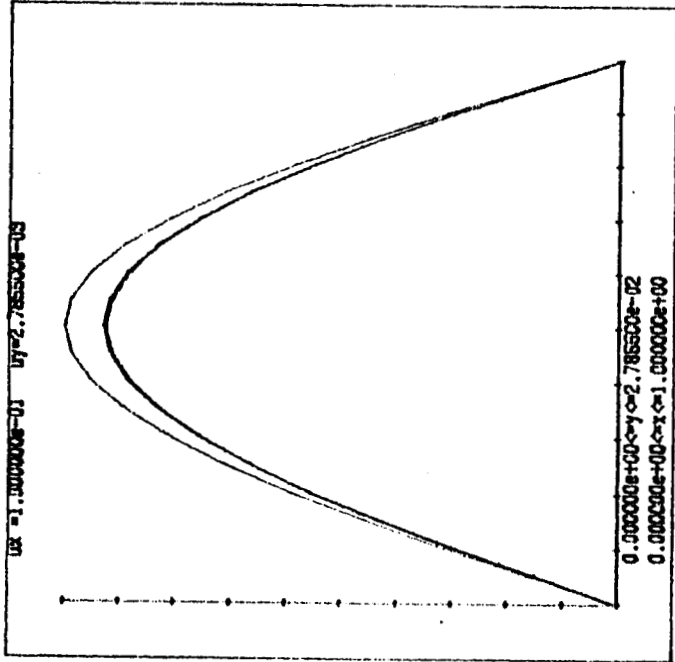
h	iter.	$\gamma_h(\xi_1)$	$r(\gamma_h)$	$u_h(n_1)$	$r(u_h)$
1/40		.027635		-.191403	
1/20	1	.027855		-.191774	
1/10		.028740		-.193240	
1/40		.025704		-.191957	
1/20	3	.025897		-.192338	
1/10		.026668		-.193839	
1/40		.025695		-.191960	
1/20	6	.025887	2.00	-.192340	1.98
1/10		.026657		-.193842	

Tabla 1. Muestra de valores para el ejemplo 1.

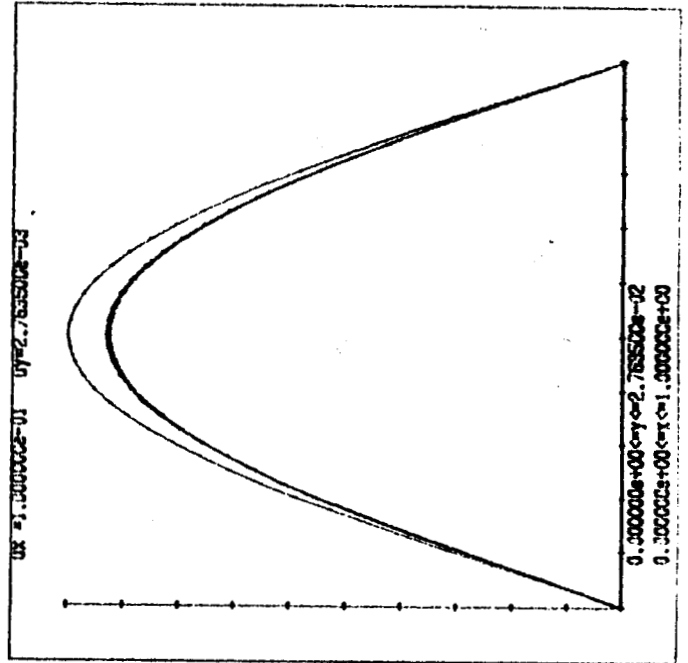
Gráficas de la curva $y = \gamma_h(x)$ correspondientes al Ejemplo 1.



a) $h = 1/10$



b) $h = 1/20$



c) $h = 1/40$

Ejemplo 2.

$$g(x, y) = \begin{cases} 8(y - 1/2)\text{sen } \pi x, & y \leq 1/2 \\ 0, & y > 1/2. \end{cases}$$

$s = 1.$

Se consideran los casos

- a) $h = 1/10,$ $NN = 121,$ $NE = 200.$
- b) $h = 1/20,$ $NN = 441,$ $NE = 800.$
- c) $h = 1/40,$ $NN = 1681,$ $NE = 3200.$

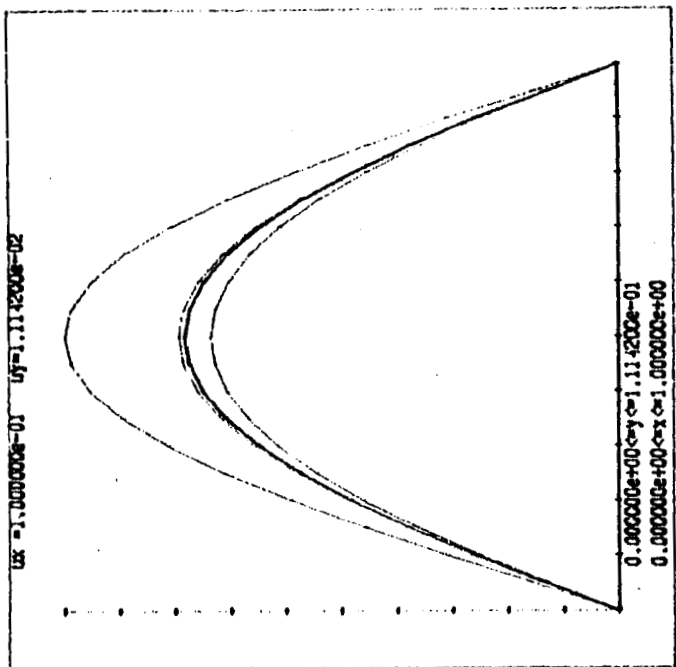
La norma de g en el espacio $W_2^1(\Omega^*)$ es 5.52 .

La convergencia se obtiene en 10 iteraciones y no depende de $h.$

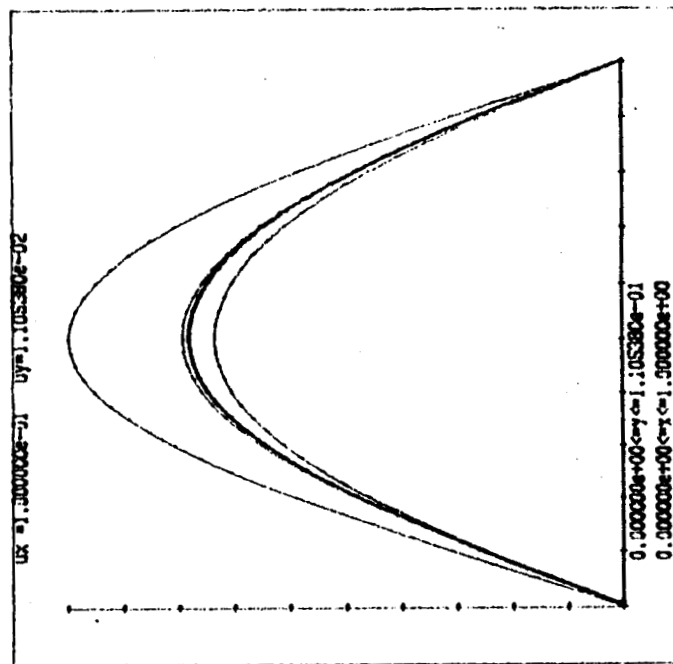
h	iter.	$\gamma_h(\xi_1)$	$r(\gamma_h)$	$u_h(n_1)$	$r(u_h)$
1/40		.110538		-.676030	
1/20	1	.111420		-.676715	
1/10		.114958		-.679368	
1/40		.087842		-.699746	
1/20	3	.088488		-.700752	
1/10		.090882		-.704689	
1/40		.086644		-.701019	
1/20	6	.087228		-.702055	
1/10		.089556		-.706111	
1/40		.086658		-.701007	
1/20	10	.087241	2.00	-.702040	1.97
1/10		.089575		-.706094	

Tabla 2. Muestra de valores para el ejemplo 2.

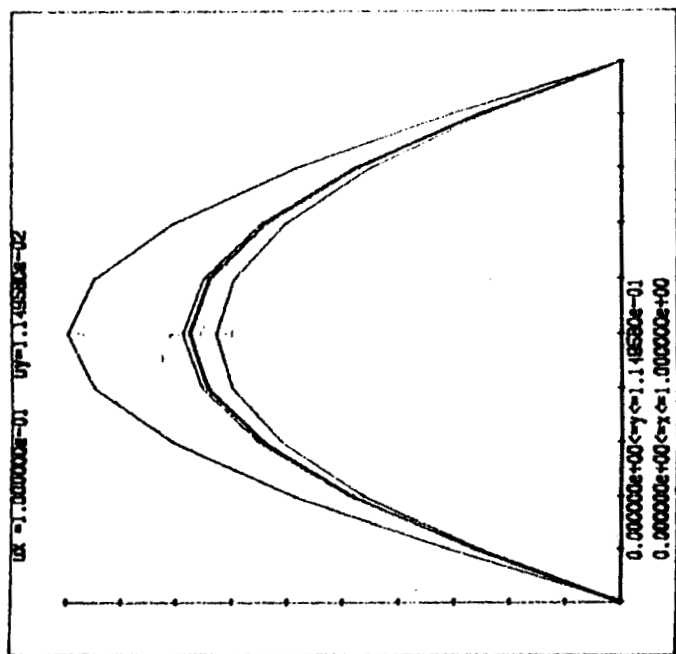
Gráficas de la curva $y = \gamma_h(x)$ correspondientes al Ejemplo 2.



b) $h = 1/20$



c) $h = 1/40$



a) $h = 1/10$

Ejemplo 3.

$$g(x,y) = \begin{cases} 16(y - 1/2)\text{sen } \pi x, & y \leq 1/2 \\ 0 & , \quad y > 1/2. \end{cases}$$

$s = 1.$

Se consideran los casos

- a) $h = 1/10,$ $NN = 121,$ $NE = 200.$
- b) $h = 1/20,$ $NN = 441,$ $NE = 800.$
- c) $h = 1/40,$ $NN = 1681,$ $NE = 3200.$

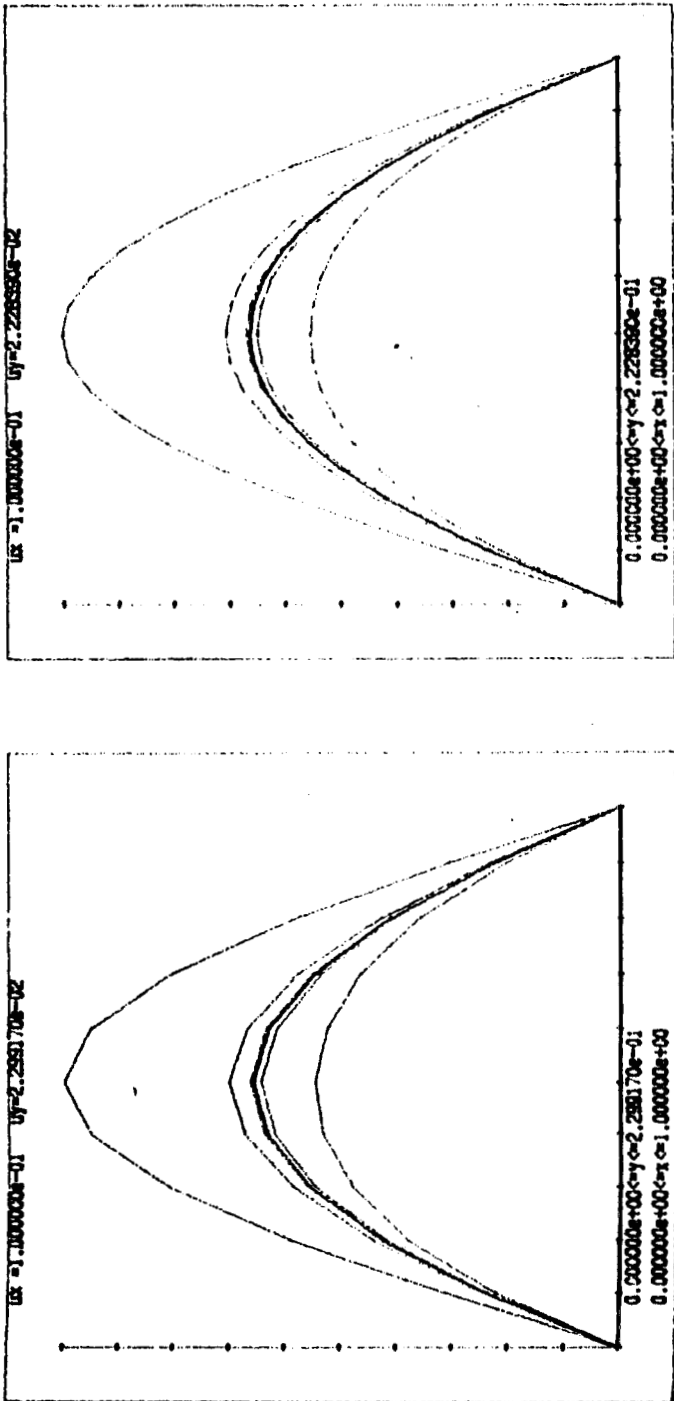
La norma de g en el espacio $W_2^1(\Omega^*)$ es 11.04 .

La convergencia se obtiene en 15 iteraciones y no depende de $h.$

h	iter.	$\gamma_h(\xi_1)$	$r(\gamma_h)$	$u_h(n_1)$	$r(u_h)$
1/40		.221076		-1.142029	
1/20	1	.222839		-1.141619	
1/10		.229917		-1.139826	
1/40		.143598		-1.286836	
1/20	4	.144511		-1.288157	
1/10		.148129		-1.293385	
1/40		.146812		-1.280489	
1/20	8	.147764		-1.281727	
1/10		.151572		-1.286530	
1/40		.146867		-1.280382	
1/20	12	.147819		-1.281617	
1/10		.151632		-1.286409	
1/40		.146868		-1.280383	
1/20	15	.147820	2.00	-1.281617	1.96
1/10		.151632		-1.286409	

Tabla 3. Muestra de valores para el ejemplo 3.

Gráficas de la curva $y = \gamma_h(x)$ correspondientes al Ejemplo 3.



b) $h = 1/20$

a) $h = 1/10$

c) $h = 1/20$

a) $h = 1/10$

Ejemplo 4.

$$g(x,y) = \begin{cases} (1-x)x^2(y-1/2)^2 e^{y+2}/\cos y, & y \leq 1/2 \\ 0 & , y > 1/2. \end{cases}$$

$s = 1.$

Se consideran los casos

- a) $h = 1/10,$ $NN = 121,$ $NE = 200.$
- b) $h = 1/20,$ $NN = 441,$ $NE = 800.$
- c) $h = 1/40,$ $NN = 1681,$ $NE = 3200.$

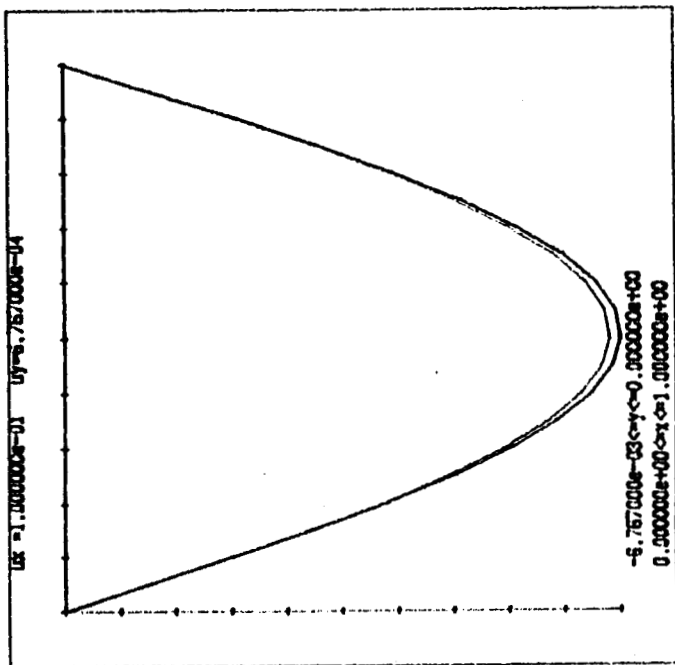
La norma de g en el espacio $W_2^1(\Omega^*)$ es 0.37 .

La convergencia se obtiene en 3 iteraciones y no depende de $h.$

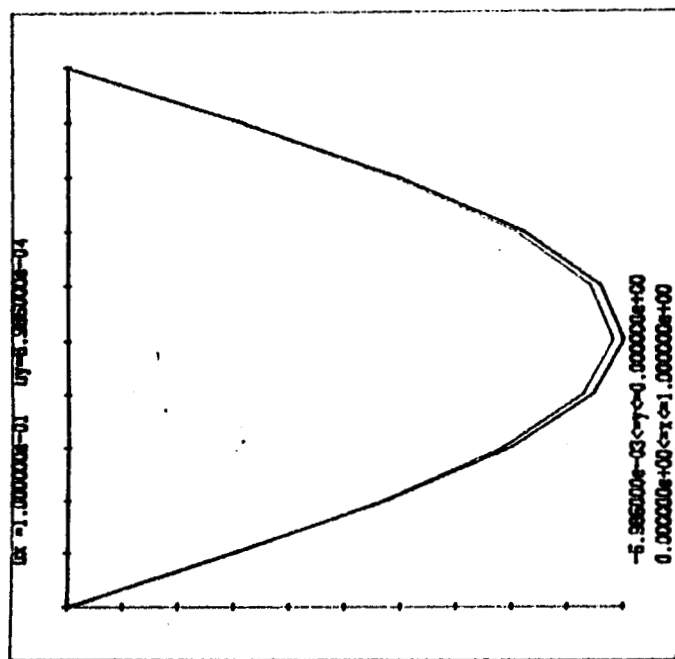
h	iter.	$\gamma_h(\xi_1)$	$r(\gamma_h)$	$u_h(n_1)$	$r(u_h)$
1/40		-.006585		.047904	
1/20	1	-.006638		.048009	
1/10		-.006848		.048422	
1/40		-.006710		.047913	
1/20	2	-.006765		.048018	
1/10		-.006984		.048431	
1/40		-.006712		.047913	
1/20	3	-.006767	1.99	.048018	1.98
1/10		.006986		.048431	

Tabla 4. Muestra de valores para el ejemplo 4.

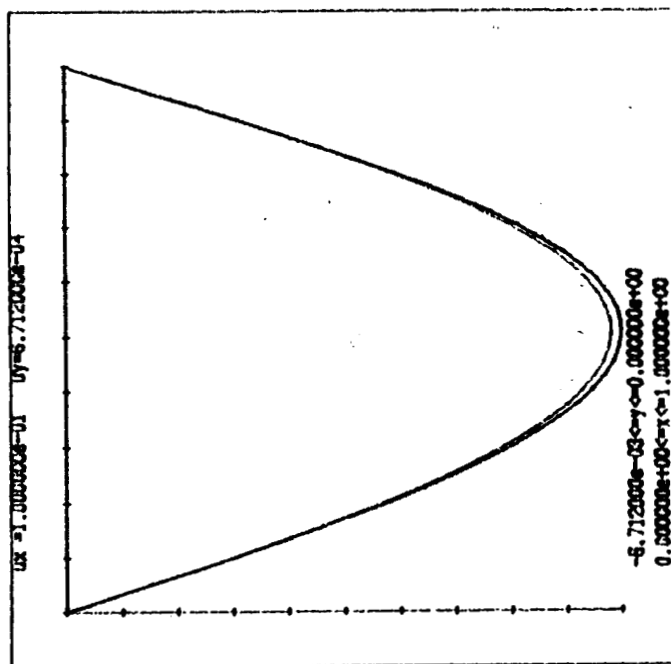
Gráficas de la curva $y = \gamma_h(x)$ correspondientes al Ejemplo 4.



b) $h = 1/20$



a) $h = 1/40$



c) $h = 1/40$

Ejemplo 5.

$$g(x,y) = \begin{cases} 7(1-x)x^2(y-1/2)^2 e^{y+2}/\cos y, & y \leq 1/2 \\ 0 & , \quad y > 1/2. \end{cases}$$

$s = 1.$

Se consideran los casos

- a) $h = 1/10,$ $NN = 121,$ $NE = 200.$
- b) $h = 1/20,$ $NN = 441,$ $NE = 800.$
- c) $h = 1/40,$ $NN = 1681,$ $NE = 3200.$

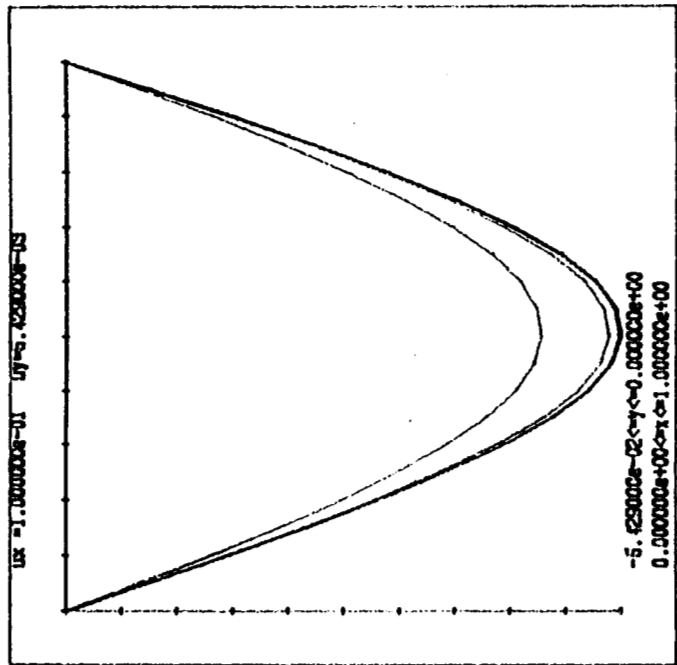
La norma de g en el espacio $W_2^1(\Omega^*)$ es 2.59 .

La convergencia se obtiene en 8 iteraciones y no depende de $h.$

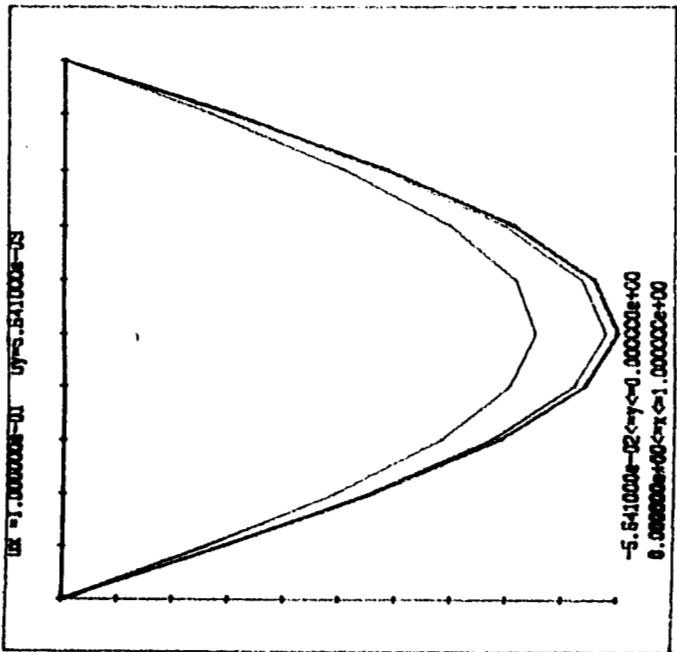
h	iter.	$\gamma_h(\xi_1)$	$r(\gamma_h)$	$u_h(n_1)$	$r(u_h)$
1/40		-.046097		.355295	
1/20	1	-.046465		.356215	
1/10		-.047938		.359829	
1/40		-.053593		.359222	
1/20	3	-.054109		.360222	
1/10		-.056194		.364174	
1/40		-.053766		.359313	
1/20	6	-.054290		.360318	
1/10		-.056409		.364287	
1/40		-.053767		.359313	
1/20	8	-.054290	2.02	.360318	1.98
1/10		.089575		-.706094	

Tabla 5. Muestra de valores para el ejemplo 5.

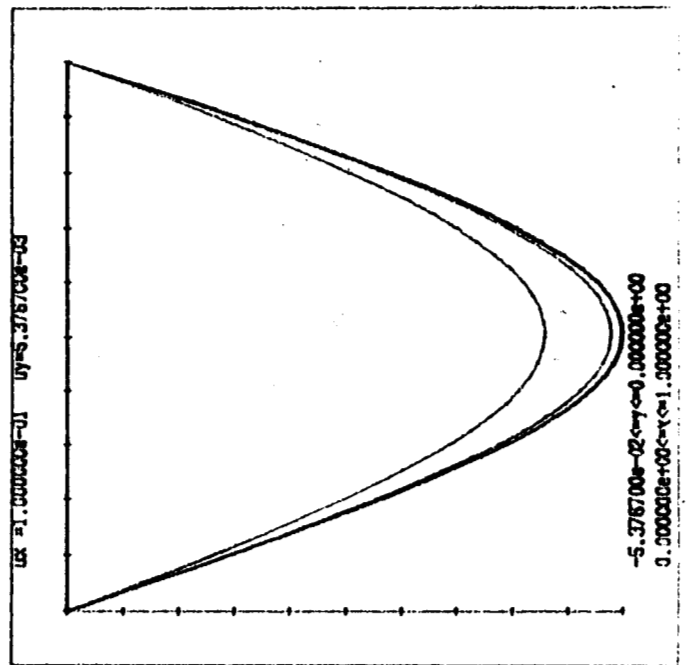
Gráficas de la curva $y = \gamma_h(x)$ correspondientes al Ejemplo 5.



a) $h = 1/10$



b) $h = 1/20$



c) $h = 1/40$

Ejemplo 6.

$$g(x,y) = \begin{cases} 14(1-x)x^2(y-1/2)^2 e^{y+2}/\cos y, & y \leq 1/2 \\ 0 & , \quad y > 1/2. \end{cases}$$

$s = 1.$

Se consideran los casos

- a) $h = 1/10,$ $NN = 121,$ $NE = 200.$
- b) $h = 1/20,$ $NN = 441,$ $NE = 800.$
- c) $h = 1/40,$ $NN = 1681,$ $NE = 3200.$

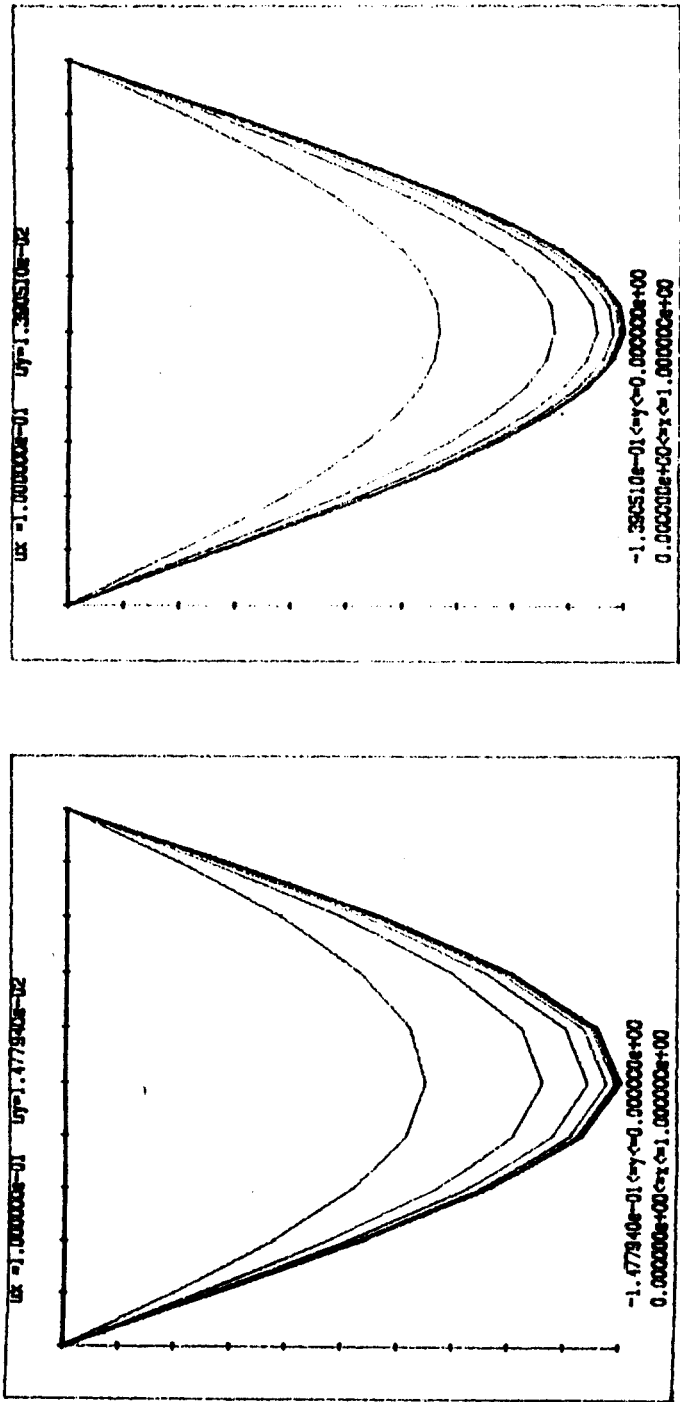
La norma de g en el espacio $W_2^1(\Omega^*)$ es 5.18 .

La convergencia se obtiene en 15 iteraciones y no depende de $h.$

h	iter.	$\gamma_h(\xi_1)$	$r(\gamma_h)$	$u_h(n_1)$	$r(u_h)$
1/40		-.092195		.759614	
1/20	1	-.092930		.761879	
1/10		-.095876		.770821	
1/40		-.134468		.807248	
1/20	4	-.136314		.810809	
1/10		-.143974		.825217	
1/40		-.136926		.810093	
1/20	8	-.138979		.813897	
1/10		-.147656		.829495	
1/40		-.136986		.810163	
1/20	12	-.139050		.813979	
1/10		-.147789		.829651	
1/40		-.136988		.810164	
1/20	15	-.139051	2.08	.813981	2.04
1/10		-.147794		.829657	

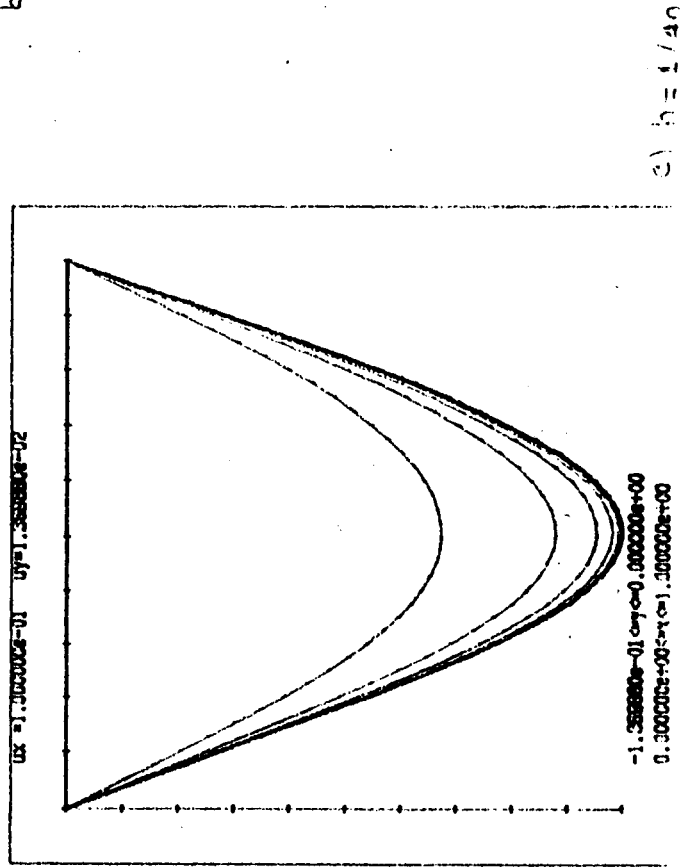
Tabla 6. Muestra de valores para el ejemplo 6.

Gráficas de la curva $y = \gamma_h(x)$ correspondientes al Ejemplo 6.



a) $h = 1/10$

b) $h = 1/20$



c) $h = 1/40$

Ejemplo 7.

$$g(x,y) = \begin{cases} 2(1/2-y)e^{1+x}\cos\pi x, & y \leq 1/2 \\ 0, & y > 1/2. \end{cases}$$

$s = 1.$

Se consideran los casos

- a) $h = 1/10,$ $NN = 121,$ $NE = 200.$
- b) $h = 1/20,$ $NN = 441,$ $NE = 800.$
- c) $h = 1/40,$ $NN = 1681,$ $NE = 3200.$

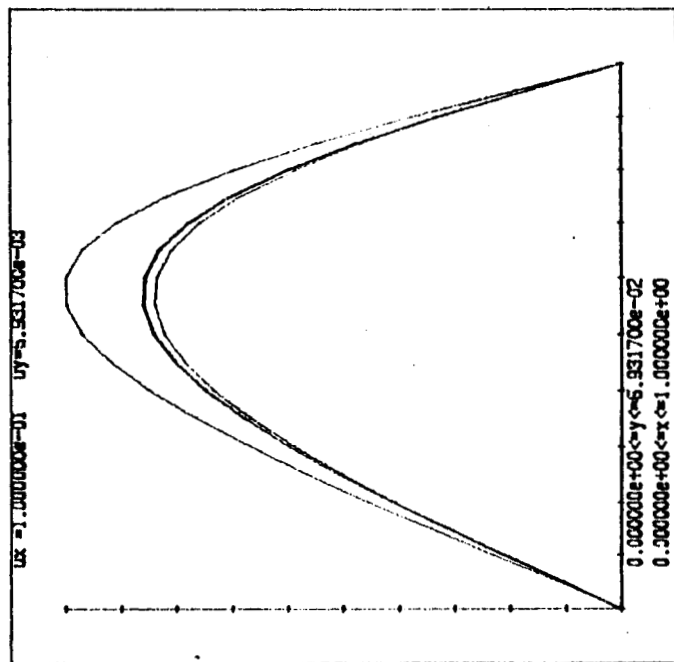
La norma de g en el espacio $W_2^1(\Omega^*)$ es 7.16 .

La convergencia se obtiene en 7 iteraciones y no depende de $h.$

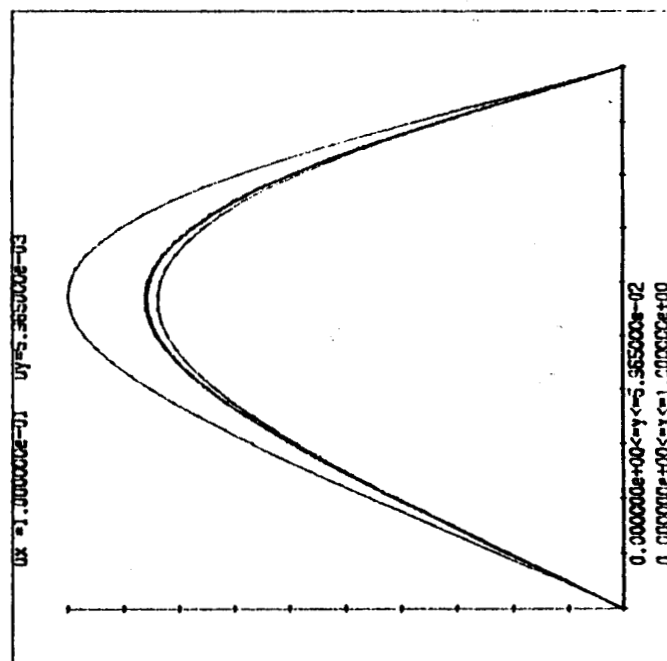
h	iter.	$\gamma_h(\xi_1)$	$r(\gamma_h)$	$u_h(n_1)$	$r(u_h)$
1/40		.057815		-.321151	
1/20	1	.057576		-.318854	
1/10		.056582		-.309544	
1/40		.050039		-.323577	
1/20	4	.049848		-.321234	
1/10		.049058		-.311727	
1/40		.050061		-.323571	
1/20	7	.049870	2.05	-.321227	2.02
1/10		.049079		-.311721	

Tabla 7. Muestra de valores para el ejemplo 7.

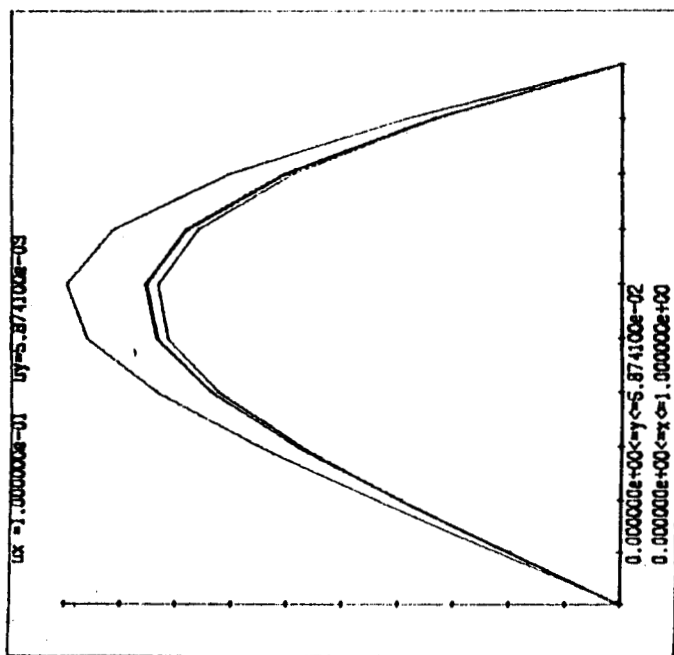
Gráficas de la curva $y = \gamma_h(x)$ correspondientes al Ejemplo 7.



b) $h = 1/20$



c) $h = 1/40$



a) $h = 1/10$

Ejemplo 8.

$$g(x, y) = \begin{cases} 6(1/2-y)e^{1+x} \cos \pi x, & y \leq 1/2 \\ 0 & , \quad y > 1/2. \end{cases}$$

$s = 1.$

Se consideran los casos

- a) $h = 1/10,$ $NN = 121,$ $NE = 200.$
- b) $h = 1/20,$ $NN = 441,$ $NE = 800.$
- c) $h = 1/40,$ $NN = 1681,$ $NE = 3200.$

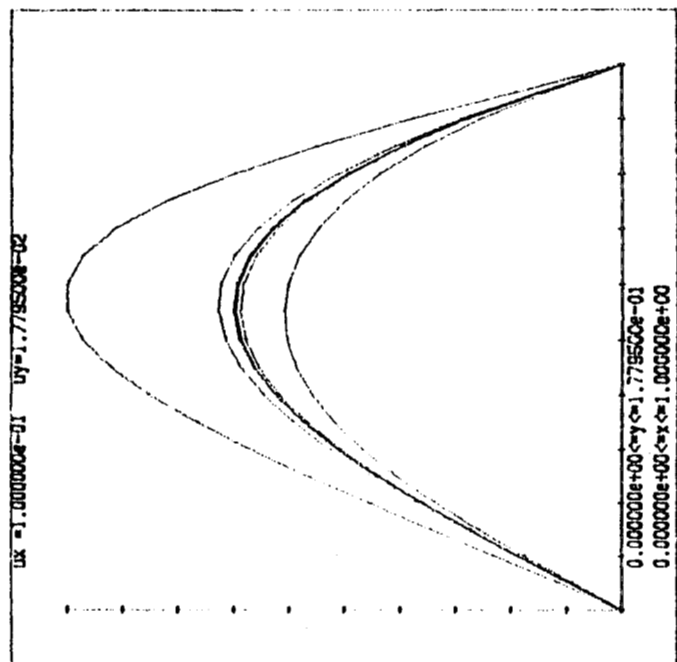
La norma de g en el espacio $W_2^1(\Omega^*)$ es 21.48 .

La convergencia se obtiene en 12 iteraciones y no depende de $h.$

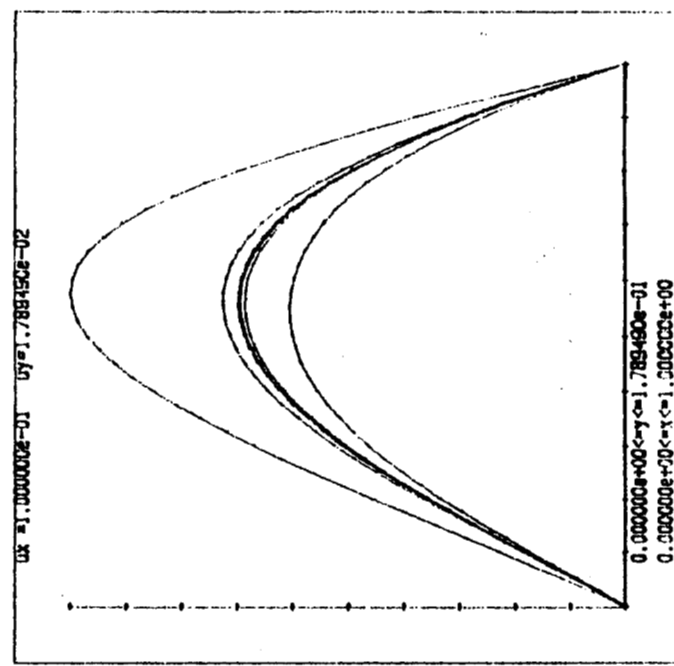
h	iter.	$\gamma_h(\xi_1)$	$r(\gamma_h)$	$u_h(n_1)$	$r(u_h)$
1/40		.173443		-.851465	
1/20	1	.172728		-.846506	
1/10		.169747		-.826761	
1/40		.121036		-.903026	
1/20	4	.120745		-.897038	
1/10		.119477		-.873107	
1/40		.122628		-.901465	
1/20	8	.122294		-.895541	
1/10		.120875		-.871826	
1/40		.122645		-.901448	
1/20	12	.122310	2.08	-.895523	2.00
1/10		.120889		-.871813	

Tabla 8. Muestra de valores para el ejemplo 8.

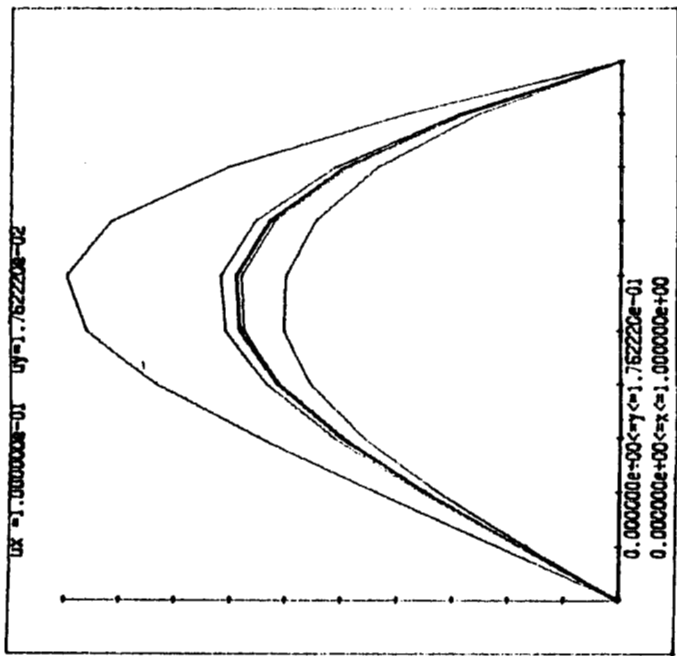
Gráficas de la curva $y = \gamma_h(x)$ correspondientes al Ejemplo 8.



a) $h = 1/10$



b) $h = 1/20$



c) $h = 1/40$

Ejemplo 9.

$$g(x,y) = \begin{cases} 10(1/2-y)e^{1+x}/\cos\pi x, & y \leq 1/2 \\ 0, & y > 1/2. \end{cases}$$

$s = 1.$

Se consideran los casos

- a) $h = 1/10,$ $NN = 121,$ $NE = 200.$
- b) $h = 1/20,$ $NN = 441,$ $NE = 800.$
- c) $h = 1/40,$ $NN = 1681,$ $NE = 3200.$

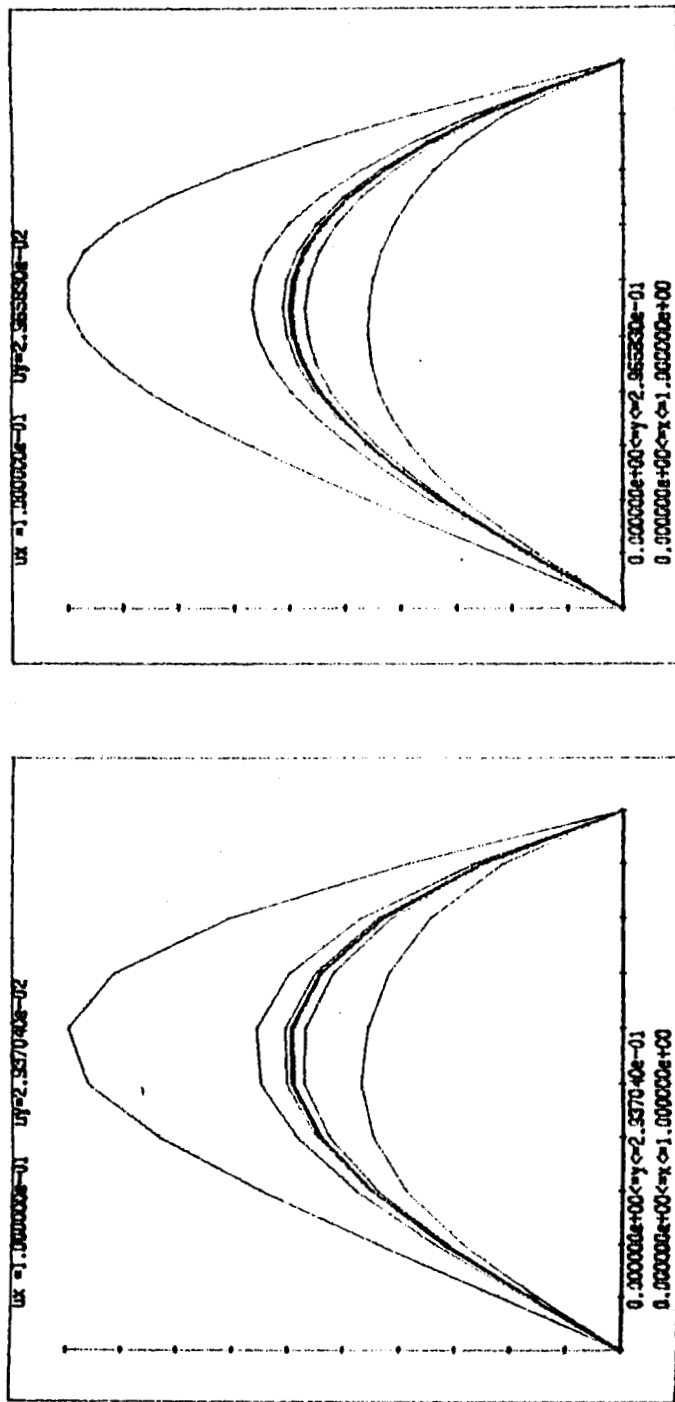
La norma de g en el espacio $W_2^1(\Omega^*)$ es 35,8 .

La convergencia se obtiene en 16 iteraciones y no depende de $h.$

h	iter.	$\gamma_h(\xi_1)$	$r(\gamma_h)$	$u_h(n_1)$	$r(u_h)$
1/40		.289073		-1.232332	
1/20	1	.287880		-1.227256	
1/10		.282912		-1.208082	
1/40		.168345		-1.428627	
1/20	4	.168425		-1.419084	
1/10		.168379		-1.382130	
1/40		.176252		-1.415581	
1/20	8	.175997		-1.406757	
1/10		.174809		-1.372251	
1/40		.176542		-1.415109	
1/20	12	.176262		-1.406323	
1/10		.175001		-1.371956	
1/40		.176552		-1.415089	
1/20	16	.176271	2.17	-1.406306	1.97
1/10		.175006		-1.371948	

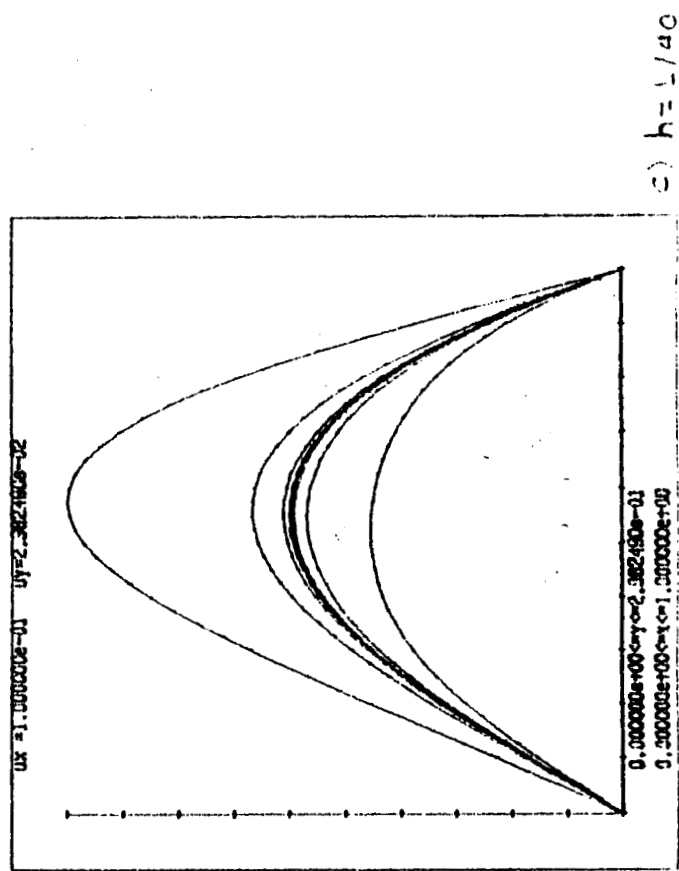
Tabla 9. Muestra de valores para el ejemplo 9.

Gráficas de la curva $y = \gamma_h(x)$ correspondientes al Ejemplo 9.



a) $h = 1/10$

b) $h = 1/20$



c) $h = 1/40$

Ejemplo 10.

$$g(x,y) = \begin{cases} 8(y - 1/2) \text{sen } \pi x, & y \leq 1/2 \\ 0 & , \quad y > 1/2. \end{cases}$$

$h = 1/20, \quad NN = 441, \quad NE = 800.$

Se consideran los casos:

- a) $S = 0.25$ b) $S = 0.5$ c) $S = 1.0$
 d) $S = 2.0$ e) $S = 4.0$ f) $S = 15.0$

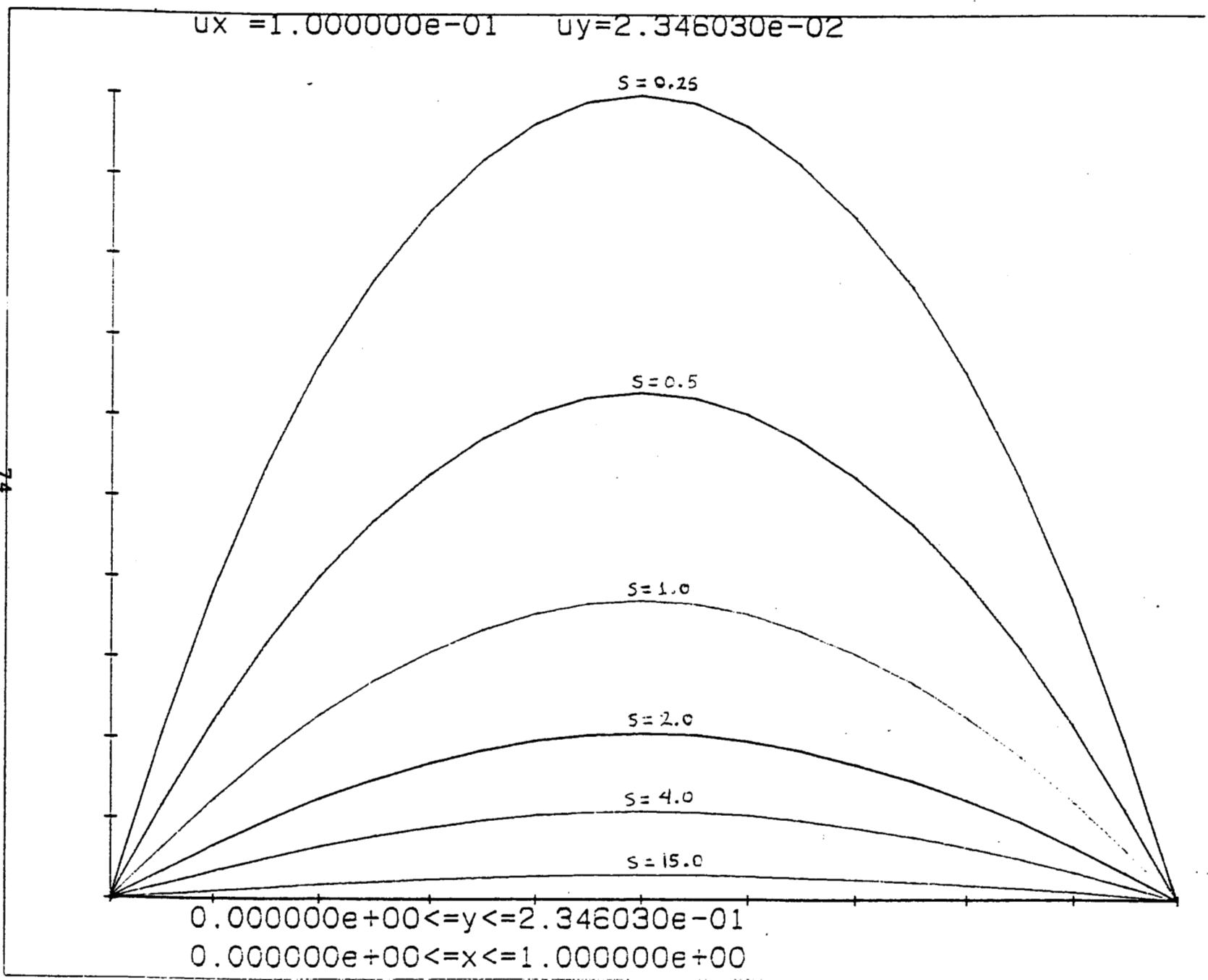
El número de iteraciones para obtener convergencia, en cada caso, se muestra en la tabla siguiente

s	No.iter.	$\gamma_h(\xi_1)$	$u_h(n_1)$
0.25	21	.234603	-.561612
0.5	15	.147820	-.640808
1.0	10	.087241	-.702040
2.0	8	.048576	-.743827
4.0	6	.025887	-.769362
15.0	5	.007276	-.790877

Tabla 10. Muestra de valores del ejemplo 10.

Variación de la frontera libre con respecto a la tensión superficial

Ejemplo 10.



Ejemplo 11.

$$g(x,y) = \begin{cases} 7(1-x)x^2(y - 1/2)^2 e^{y+2}/\cos y, & y \leq 1/2 \\ 0 & , y > 1/2 \end{cases}$$

$h = 1/20, \quad NN = 441, \quad NE = 800.$

Se consideran los casos:

- a) $S = 0.5$ b) $S = 1.0$ c) $S = 1.5$
 d) $S = 3.0$ e) $S = 6.0$ f) $S = 12.0$

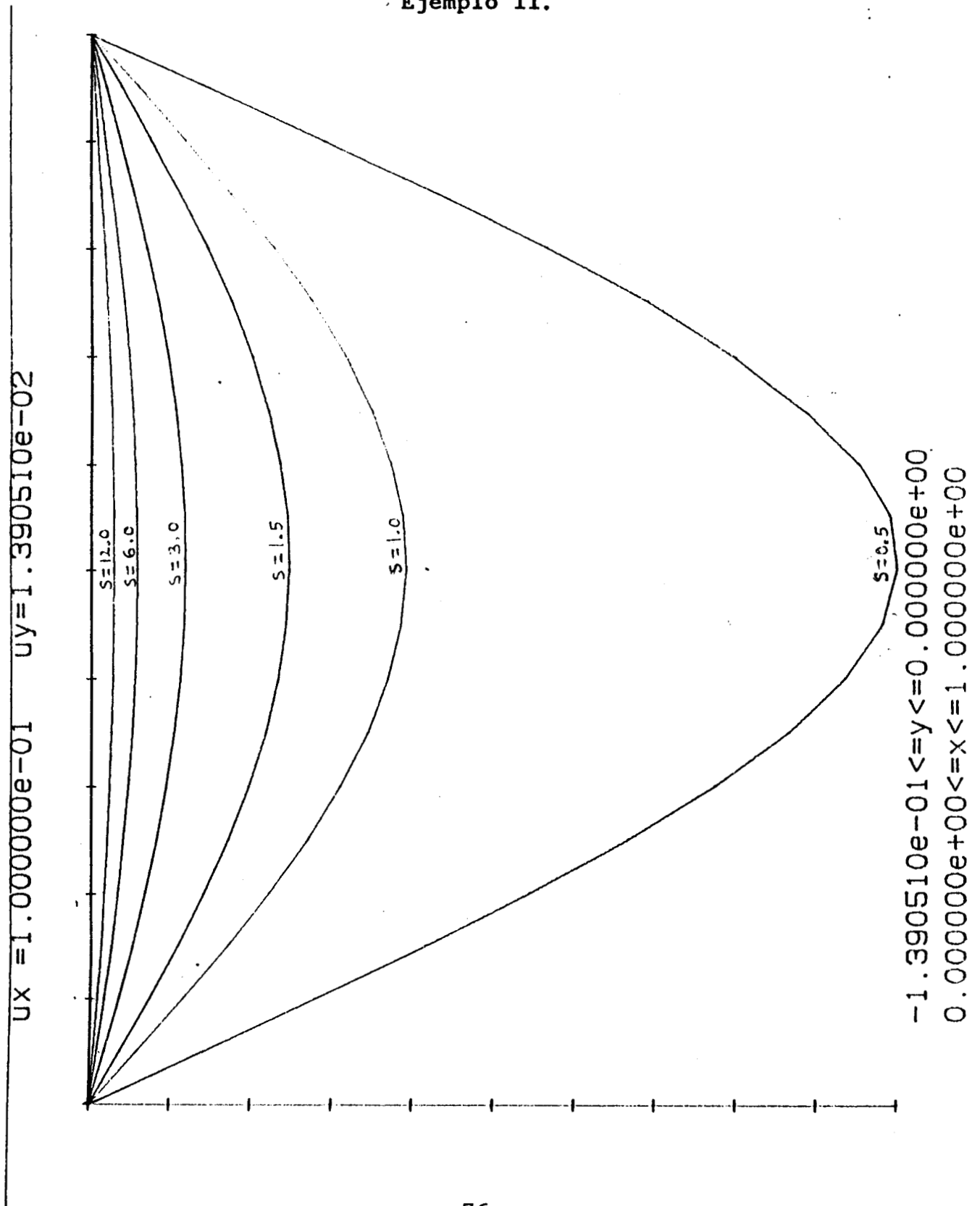
El número de iteraciones para obtener convergencia, en cada caso, se muestra en la tabla siguiente

s	No.iter.	$\gamma_h(\xi_1)$	$u_h(n_1)$
0.5	14	-.139015	.406990
1.0	8	-.054290	.360318
1.5	7	-.034154	.349875
3.0	6	-.016222	.340827
6.0	5	-.007921	.336698
12.0	4	-.003915	.334720

Tabla 11. Muestra de valores del ejemplo 11.

Variación de la frontera libre con respecto a la tensión superficial

Ejemplo 11.



Ejemplo 12.

$$g(x,y) = \begin{cases} 6(1/2 - y)e^{1+x} \cdot \cos\pi x, & y \leq 1/2 \\ 0 & , y > 1/2 \end{cases}$$

$h = 1/20, \quad NN = 441, \quad NE = 800.$

Se consideran los casos:

- a) $S = 0.4$ b) $S = 0.7$ c) $S = 1.0$
 d) $S = 1.5$ e) $S = 3.0$ f) $S = 10.0$

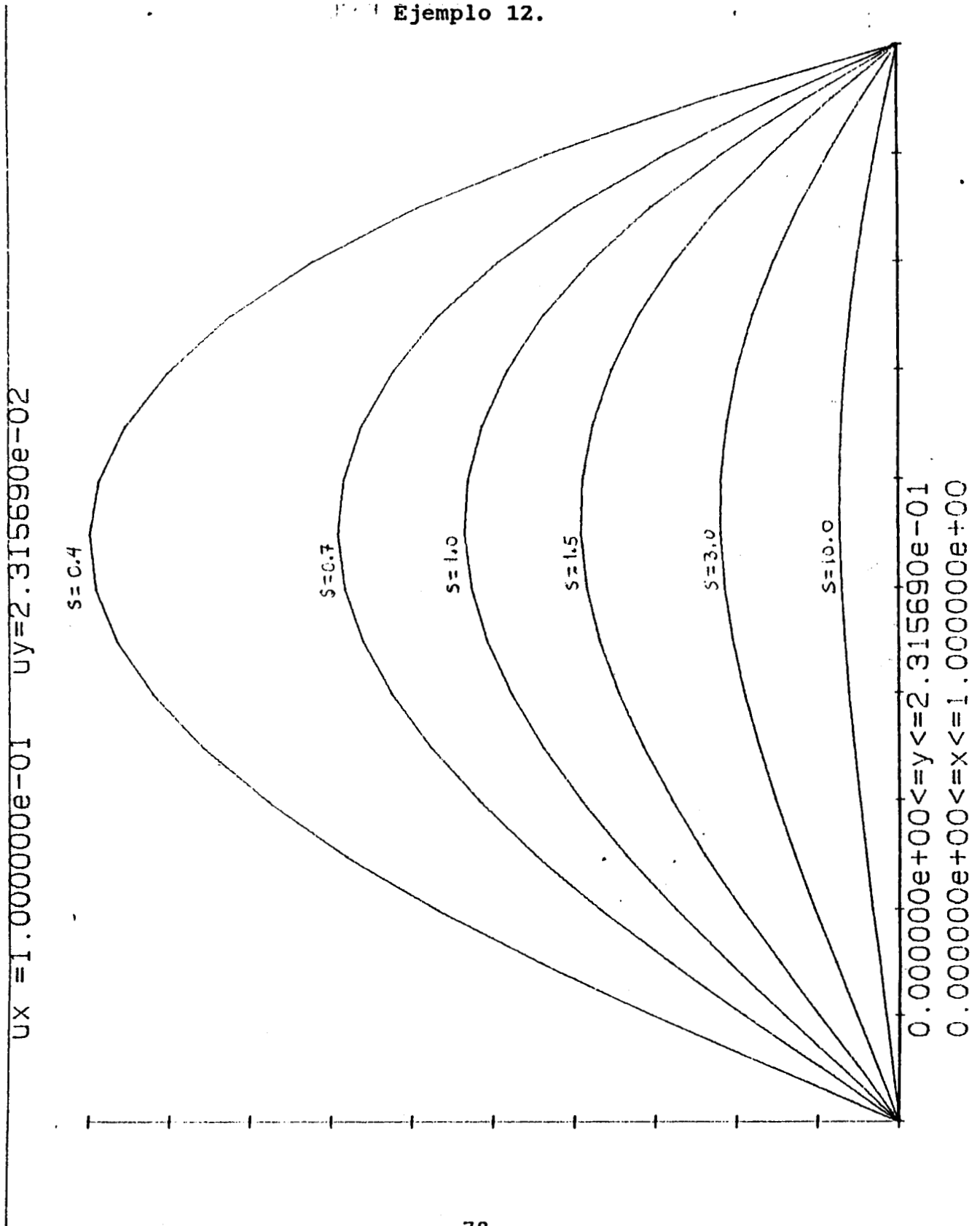
El número de iteraciones para obtener convergencia, en cada caso, se muestra en la tabla siguiente

s	No.iter.	$\gamma_h(\xi_1)$	$u_h(n_1)$
0.4	20	.229763	-.792758
0.7	15	.158453	-.860882
1.0	12	.122310	-.895523
1.5	9	.089296	-.926909
3.0	6	.049870	-.963681
10.0	4	.016454	-.993825

Tabla 12. Muestra de valores del ejemplo 12.

Variación de la frontera libre con respecto a la tensión superficial

Ejemplo 12.



OBSERVACIONES.

1. Los ejemplos 1 a 9 muestran que las cotas de error para u_h y γ_h se encuentran dentro del rango estimado (véanse las expresiones (4.7) y (4.8)). Las estimaciones del error en el cálculo de las soluciones para estos ejemplos fueron las siguientes: de orden h^r con $1.99 < r < 2.17$ en el cálculo de γ_h ; de orden h^r con $1.96 < r < 2.04$ en el cálculo de u_h . Además, para el caso de los ejemplos presentados, siempre se estimó un orden de convergencia ligeramente mayor para el cálculo de γ_h . (ver tablas 1 a 9).

2. Los ejemplos 1-2-3, 4-5-6 y 7-8-9 muestran, como se esperaba, que con el aumento en la norma de la función g se obtienen soluciones de norma mayor tanto para γ como para u . Además, cuando se hace crecer la norma de g se requieren más iteraciones para acercarse al punto fijo $(\gamma_h, u_h) \in V_\varepsilon^h$ de la contracción T^h definida por las ecuaciones (3.16a) y (3.16b). Si la norma de g se sigue aumentando se encuentran ejemplos en donde $\|\gamma_h\|_{L^\infty(0,1)} > 1$.

El programa no puede continuar iterando en el caso que $\gamma_h(\xi_k) < -1$ para algún $\xi_k \in (0,1)$. La razón es que la transformación (2.14) no es invertible en este caso. El siguiente ejemplo muestra esto.

$$g(x,y) = \begin{cases} 25(1-x)x^2(y - 1/2)^2 e^{y+2}/\cos y, & y \leq 1/2 \\ 0 & , y > 1/2. \end{cases}$$

$S = 1.0$, $h = 1/10$, $NN = 121$, $NE = 200$. La norma de g en $W_2^1(\Omega^*)$ es 9.25. En este caso, el programa sólo realiza 6 iteraciones y

ya no puede continuar. A continuación se muestran los valores de γ_h en $1/2$ y de u_h en el punto $(1/2, (1+\gamma_h(1/2))1/2)$ en cada una de estas iteraciones. También se muestra una tabla de valores de γ_h en la iteración 6.

iter	$\gamma_h(\xi_1)$	$u_h(n_1)$
1	-.171207	1.198448
2	-.284292	1.529373
3	-.401445	1.780553
4	-.580900	2.059994
5	-.990333	2.549298
6	-.976831	5.686514

Muestra de valores del ejemplo.

x	$\gamma_h(x)$
0.0	.000000
0.1	-.225973
0.2	-.457178
0.3	-.673765
0.4	-.828196
0.5	-.976831
0.6	-1.013534
0.7	-.894223
0.8	-.709958
0.9	-.317060
1.0	.000000

Iteración 6.

Obsérvese que $\gamma_h(0.6) = -1.013534$.

Sin embargo, si $\|\gamma_h\|_{L_\infty(0,1)} > 1$ y $\gamma_h(\xi_k) > 0 \forall \xi_k \in (0,1)$, se encuentran ejemplos en donde aún se obtiene convergencia a un punto fijo de la contracción T^h . El problema aquí es que se necesita un mayor número de iteraciones. El siguiente ejemplo muestra este comportamiento

$$g(x,y) = \begin{cases} 500(y - 1/2)\text{sen } \pi x, & y \leq 1/2 \\ 0, & y > 1/2. \end{cases}$$

$S = 1.0$, $h = 1/10$, $NN = 121$, $NE = 200$. La norma de g es

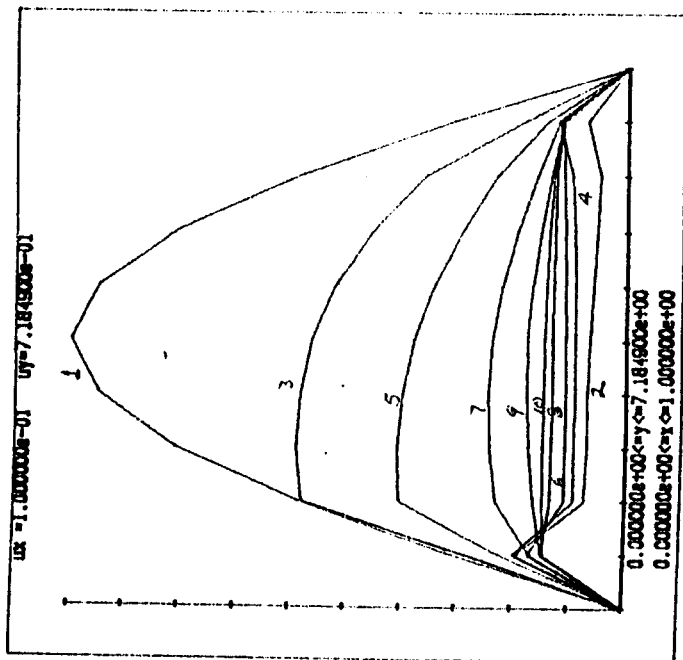
$\|g\|_{W_2^1(\Omega^*)} = 345$. El punto fijo (γ_h, u_h) se encuentra en 30 iteraciones. La siguiente tabla muestra los valores de γ_h en $\xi_1 = 1/2$ y de u_h en $n_1 = (1/2, (1+\gamma_h(1/2))1/2)$ para cada iteración. Después de la tabla se muestran las gráficas de la frontera libre. El primer dibujo corresponde a las primeras 10 iteraciones; el segundo, a las siguientes 10; y el tercero, a las últimas 10 iteraciones. Cada dibujo se hizo a escala diferente en la coordenada y .

iter	$\gamma_h(\xi_1)$	$u_h(n_1)$
1	7.184900	-50.402969
2	.466909	.223906
3	4.071034	-24.370773
4	.665040	-.135541
5	2.744560	-18.568502
6	.787741	-1.035632
7	1.735580	-15.616851
8	.954315	-3.902950
9	1.273417	-12.201709
10	1.057873	-7.545543
11	1.165404	-10.441463
12	1.101527	-8.869246
13	1.135625	-9.772733
14	1.116411	-9.278758
15	1.126867	-9.554002

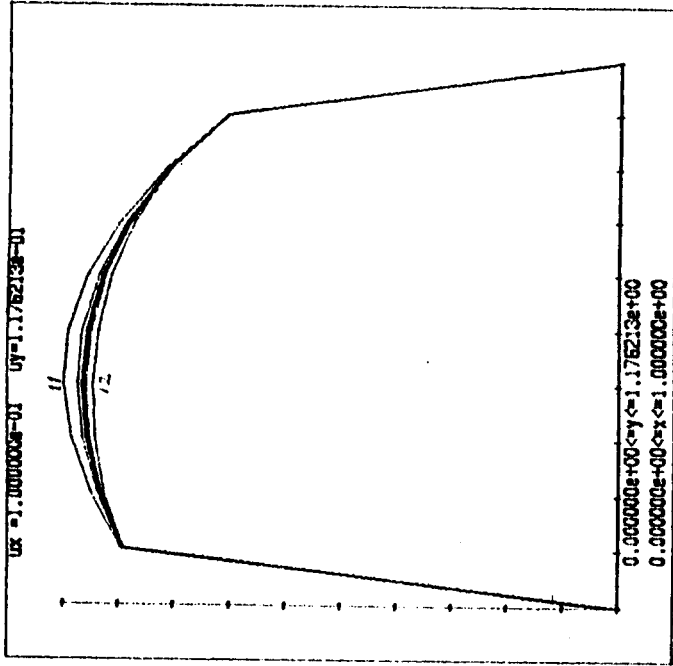
iter	$\gamma_h(\xi_1)$	$u_h(n_1)$
16	1.121081	-9.403155
17	1.124250	-9.486338
18	1.22503	-9.440659
19	1.123463	-9.465813
20	1.122935	-9.451997
21	1.123226	-9.459602
22	1.123066	-9.455410
23	1.123152	-9.457700
24	1.123106	-9.456474
25	1.123131	-9.457129
26	1.123118	-9.456799
27	1.123123	-9.456947
28	1.123122	-9.456891
29	1.123122	-9.456901
30	1.123122	-9.456901

Muestra de valores del ejemplo.

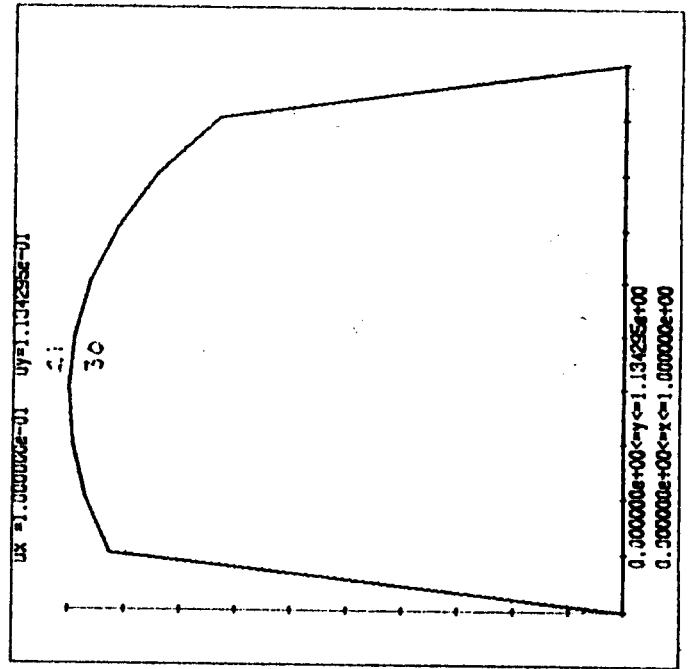
Iteraciones realizadas para encontrar la frontera libre
del ejemplo.



Iteraciones 1 a 10



Iteraciones 11 a 20



Iteraciones 21 a 30

3. El efecto de la tensión superficial en la solución numérica del problema se muestra en los ejemplos 10, 11 y 12. En estos ejemplos se observa que cuando la tensión superficial aumenta, la frontera libre presenta mayor oposición al cambio con respecto a la horizontal, y viceversa. Podría pensarse que sucede algo semejante en el cálculo de u_h . Sin embargo, los ejemplos 10 y 12 muestran que, en esos casos, el valor absoluto de u_h aumenta cuando la tensión superficial aumenta.

4. Otro hecho importante que merece resaltarse, es que el número de iteraciones necesarias para encontrar la solución aproximada (γ_h, u_h) no depende de h , el paso de discretización. Como muestran los ejemplos, el número de iteraciones sólo depende del valor de la norma de g y del valor de la tensión superficial.

CAPITULO V

MODIFICACIONES Y EXTENSIONES DEL MODELO ESTUDIADO.

5.1. INTRODUCCION.

El problema dado por las ecuaciones (1.13) describe un modelo abstracto simplificado, el cual contiene algunas características de modelos más generales que describen los fenómenos de fluidos con superficies libres (ver la sección 1.1). Los capítulos II y III describen el estudio teórico de la aproximación numérica que se presenta en [16] para dicho modelo. Aun no se ha desarrollado completamente una teoría similar para modelos más generales. El estudio de estos modelos es considerablemente más complicado y queda fuera del alcance de la presente tesis. Sin embargo, se puede hacer un estudio similar al realizado en [16] cuando se hacen algunas modificaciones al problema (1.13) en las ecuaciones para γ . En este capítulo se proponen dos modificaciones. La primera modificación se realiza sobre las condiciones de frontera para γ . Se discute el problema cuando se introducen condiciones de frontera Neumann, en lugar de las condiciones de Dirichlet propuestas. La segunda modificación que se propone es la introducción de la curvatura de γ en lugar del término no lineal $-s\gamma''(x)/\sqrt{1+\gamma'(x)^2}$ que aparece en el problema (1.13). El problema con condiciones Neumann para γ se discute en la sección 5.2. En la sección 5.3 se hace el estudio del problema cuando se introduce la curvatura de γ . En cada caso se mencionan brevemente las modificaciones y

complicaciones que aparecen en el estudio de los resultados teóricos para la aproximación numérica de estos modelos. Además, se incluye la solución computacional de algunos ejemplos.

5.2. EL PROBLEMA CON CONDICIONES NEUMANN PARA LA FRONTERA LIBRE.

Consideremos el problema (1.13). En lugar de las condiciones de frontera Dirichlet para la curva γ escogemos las condiciones (1.14) que se mencionaron en el capítulo I. Con este cambio el problema ahora es el siguiente:

Encontrar γ y u que satisfacen

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta u &= 0 && \text{en } \Omega_\gamma, \\
 u &= g && \text{en } \partial\Omega_\gamma, \\
 \frac{-s\gamma''(x)}{\sqrt{1+\gamma'(x)^2}} &= \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x, 1+\gamma(x)) && \forall x \in (0,1), \\
 \gamma'(0) &= \gamma'(1) = 0, \\
 \int_0^1 \gamma(x) dx &= 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

La última ecuación es una condición adicional para γ similar a la del modelo del tanque que se presentón en la sección 1.1. Esta ecuación expresa que la profundidad promedio del líquido contenido en el tanque permanece constante, y fué introducida por Puknachev [13]. El prueba existencia y unicidad de soluciones de un modelo que describe el comportamiento de un líquido que fluye en un canal

bidimensional.

Se puede hacer un estudio teórico del problema (5.1) similar al del problema (1.13). A continuación se describen algunas modificaciones esenciales para ello.

Para encontrar la formulación débil de este problema se procede de manera similar a la que se discutió en la sección 2.2. La formulación débil para u es la misma y está dada por (2.5). Para encontrar la formulación débil del problema para γ se necesita de una pequeña modificación. Ahora nos interesa buscar una solución $\gamma \in W_{\infty}^1(0,1)$ tal que

$$\int_0^1 \gamma(x) dx = 0.$$

Por tal motivo se introduce el espacio

$$\bar{W}_{\infty}^1(0,1) = \{ \gamma \in W_{\infty}^1(0,1) : \int_0^1 \gamma(x) dx = 0 \},$$

y el espacio de funciones de prueba

$$\bar{W}_1^1(0,1) = \{ \chi \in W_1^1(0,1) : \int_0^1 \chi(x) dx = 0 \}.$$

Gracias a que $\gamma'(0) = \gamma'(1)$, se obtiene que la formulación del

problema para γ en (5.1) puede escribirse como

$$s \int_0^1 \gamma'(x) \chi'(x) dx = \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x, 1+\gamma(x)) \chi(x) \sqrt{1+\gamma'(x)^2} dx \quad \forall \chi \in \bar{W}_1^1(0,1).$$

La proposición 2.1 de la sección 2.2 es válida para toda $\chi \in \bar{W}_1^1(0,1)$.

Por lo tanto la formulación débil del problema 5.1 es :

Encontrar $\gamma \in \bar{W}_\infty^1(0,1)$ y $u \in g \oplus \bar{W}_p^1(\Omega_\gamma)$ tales que

$$\begin{aligned} a_\gamma(u, v) &= 0 & \forall v \in \bar{W}_q^1(\Omega_\gamma) , \\ b(\gamma, \chi) &= a_\gamma(u, E_\gamma \chi) & \forall \chi \in \bar{W}_1^1(0,1) , \end{aligned} \tag{5.2}$$

en donde $p > 2$, $1 < q < 2$ tal que $1/p + 1/q = 1$, $g \in W_p^1(\Omega^*)$ con Ω^* tal que $\Omega_\gamma \subset \Omega^*$, y $a_\gamma(\cdot, \cdot)$, $b(\cdot, \cdot)$ son las formas bilineales definidas en la sección 2.2, del capítulo II.

Para demostrar existencia y unicidad de la solución del problema débil (5.2), se puede utilizar también un argumento de contracción. En este caso el conjunto V_ε que debe utilizarse es

$$V_\varepsilon = \{(\gamma, u) \in \bar{W}_\infty^1(0,1) \times W_p^1(\Omega_\gamma) : \|\gamma\|_{W_\infty^1(0,1)} < 1/2, \|u\|_{W_p^1(\Omega_\gamma)} < \varepsilon\},$$

y el mapeo $T: V_\varepsilon \rightarrow V_\varepsilon$ se define como en (2.12a) y (2.12b) con

$\tilde{\gamma} \in \bar{W}_\infty^1(0,1)$ y $\chi \in \bar{W}_1^1(0,1)$. Sin embargo, en este caso debe tenerse un poco de cuidado. Para demostrar que T es un mapeo se puede usar utilizar el mismo argumento. Por otro lado, para demostrar que T es una contracción es necesario hacer uso de la siguiente hipótesis :

Si \hat{g}_1 y \hat{g}_2 son las funciones asociadas a g bajo el mapeo (2.15) con respecto a $\gamma_1, \gamma_2 \in \bar{W}_\infty^1(0,1)$, entonces $\hat{g}_1 - \hat{g}_2 \in \bar{W}_p^1(\Omega_0)$.

Para que esto se cumpla es necesario pedir la siguiente condición adicional para g .

$$g(0,y) = g(1,y) = 0 \quad \forall y \in (0,1),$$

aparte de la condición $g(x,y) = 0$ para $y \geq 1/2$ que se impuso en el problema (1.13). Ver página 21.

EL PROBLEMA DISCRETO.

En la discretización del problema (5.2) se pueden utilizar espacios de interpolación similares a los usados en el capítulo IV para aproximar las funciones $u, g, E_\gamma \chi$. Para aproximar $\gamma \in \bar{W}_\infty^1(0,1)$ se puede usar el espacio

$$\bar{S}_h = \{ \gamma \in C^0(0,1) : \gamma|_{I_1} \in P^1(I_1), 1 = 1, \dots, N, \int_0^1 \gamma(x) dx = 0 \}, \quad (5.3)$$

el cual es un subespacio cerrado del espacio S_h definido en la sección 3.3. Se define el interpolante

$$\bar{I}_h : \bar{W}_\infty^1(0,1) \rightarrow \bar{S}_h$$

definido por

$$\bar{I}_h \gamma : I_h \gamma - \int_0^1 I_h \gamma(x) dx, \quad (5.4)$$

donde I_h es el interpolante lineal de Lagrange usual.

El problema discreto asociado al problema (5.2) queda de la siguiente manera :

Encontrar $\gamma_h \in \bar{S}_h$ y $u_h \in g_h^{\gamma_h} \oplus v_h^{\circ\gamma_h}$ tales que

$$a_{\gamma_h}(u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in v_h^{\circ\gamma_h},$$

y

$$b(\gamma_h, \chi_h) = a_{\gamma_h}(u_h, E_{\gamma_h}^h \chi_h) \quad \forall \chi_h \in \bar{S}_h. \quad (5.5)$$

Para demostrar existencia y unicidad de la solución de este problema puede procederse de manera análoga a como se hace en [16].

Para demostrar convergencia de la aproximación usada en este caso, aparece una dificultad mayor. Para $\chi_h \in \bar{S}_h$ aún puede asegurarse la existencia de una extensión $E\chi_h$ en $W_q^1(\Omega_0)$. Sin embargo, ya no puede asegurarse que $E\chi_h - J_h E\chi_h \in W_q^1(\Omega_0)$ como en la demostración del Teorema 3.2 en [16]. La dificultad es la siguiente. Si por ejemplo, $\chi_h(1) \neq 0$, $E\chi_h(1) = 0$ debido a que $E\chi_h|_{\partial\Omega_\gamma} - \Gamma_\gamma = 0$ por la proposición 2.1. Sin embargo, no se puede afirmar

$J_h E \chi_h(1) = 0$, por la forma como se escogió el interpolante J_h . Por lo tanto $E \chi_h - J E \chi_h$ no se encuentra en $W_q^1(\Omega_0)$, en general. Entonces, en este caso no se puede aplicar la técnica utilizada en [16] para demostrar la convergencia.

El algoritmo computacional para resolver el problema (5.5) es muy similar al utilizado para resolver, el problema discreto con condiciones de Dirichlet. La única modificación que necesita realizarse es para calcular γ_h . Primero se debe encontrar una base del espacio \bar{S}_h definido por (5.3). Sea $U = \{\psi_j\}_{j=1}^N$ la base usual de Lagrange de S_h . La base que se propone para el espacio \bar{S}_h es la siguiente

$$\bar{U} = \{ \chi_j \}_{j=1}^{N-1},$$

en donde las funciones χ_j ahora se definen como

$$\chi_j = \psi_j - \int_0^1 \psi_j, \quad j = 1, 2, \dots, N-1.$$

Es claro que estas funciones pertenecen al espacio \bar{S}_h . Para demostrar que \bar{U} es efectivamente una base de \bar{S}_h se utiliza la siguiente proposición.

Proposición 5.1. La función $\chi : = \psi - \int_0^1 \psi(x) dx$ puede expresarse como una combinación lineal de las funciones χ_j , $j = 1, 2, \dots, N-1$.

Demostracion. Es suficiente mostrar que existen constantes C_1, C_2, \dots, C_{N-1} no todas cero tales que

$$\chi_N = C_1 \chi_1 + C_2 \chi_2 + \dots + C_{N-1} \chi_{N-1} ,$$

es decir, tales que

$$\chi_N(\xi_i) = \sum_{j=1}^{N-1} C_j \chi_j(\xi_i) , \quad i = 1, 2, \dots, N-1 .$$

Este sistema de ecuaciones en forma matricial queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned} (1 - \frac{h}{2})C_1 - hC_2 - hC_3 - \dots - hC_{N-1} &= \chi_N(\xi_1) = -\frac{h}{2} \\ -\frac{h}{2}C_1 + (1-h)C_2 - hC_3 - \dots - hC_{N-1} &= \chi_N(\xi_2) = -\frac{h}{2} \\ -\frac{h}{2}C_1 - hC_2 + (1-h)C_3 - \dots - hC_{N-1} &= \chi_N(\xi_3) = -\frac{h}{2} \\ \vdots & \\ \frac{h}{2}C_1 - hC_2 - hC_3 + \dots + (1-h)C_{N-1} &= \chi_N(\xi_{N-1}) = -\frac{h}{2} \end{aligned}$$

El determinante de este sistema es $(1-h/2) - (N-2)h = h/2 \neq 0$. Por lo tanto el sistema tiene solución única para las C_j , $j=1, 2, \dots, N-1$, para toda $h > 0$. ■

Un argumento similar con coeficientes cero en el lado derecho del sistema de ecuaciones muestra que las funciones $\{\chi_j\}_{j=1}^{N-1}$ son linealmente independientes. Para verificar que este conjunto de

funciones genera el espacio \bar{S}_h , escogemos un χ_h arbitrario en \bar{S}_h .

Como $\chi_h \in S_h$, existen constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ tales que

$$\chi_h = \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2 + \dots + \alpha_N \psi_N.$$

Además, como $\chi_h \in \bar{S}_h$, se satisface

$$0 = \int_0^1 \chi(x) dx = \frac{h}{2} \alpha_1 + h\alpha_2 + \dots + h\alpha_{N-1} + \frac{h}{2} \alpha_N.$$

Por otro lado

$$\chi_N = \psi_N - \int_0^1 \psi_N(x) dx = \psi_N - \frac{h}{2}.$$

Sustituyendo α_N y ψ_N en la expresión para χ_h , se obtiene

$$\begin{aligned} \chi_h &= \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2 + \dots + \alpha_{N-1} \psi_{N-1} - (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + 2\alpha_{N-1}) \left(\chi_N + \frac{h}{2} \right) \\ &= \alpha_1 \left(\psi_1 - \frac{h}{2} \right) + \alpha_2 (\psi_2 - h) + \dots + \alpha_{N-1} (\psi_{N-1} - h) + C\chi_N, \end{aligned}$$

con $C = -(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + 2\alpha_{N-1})$. Por lo tanto

$$\chi_h = \alpha_1 \chi_1 + \alpha_2 \chi_2 + \dots + \alpha_{N-1} \chi_{N-1} + C\chi_N.$$

Como χ_h es combinación lineal de las $\{\chi_j\}_{j=1}^{N-1}$, se concluye que χ_h también es combinación lineal de estas funciones.

Suponiendo que se han encontrado γ_h y u_h , el problema que

consiste en calcular la solución $\gamma_h^* = \sum_{j=1}^{N-1} d_j \chi_j \in \bar{S}_h$ de

$$b(\gamma_h^*, \chi_i) = a_{\gamma_h}(u_h, E_{\gamma_h}^h \chi_i) \quad \forall \chi_i \in \bar{U},$$

es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\sum_{j=1}^{N-1} b_{1j} d_j = f_1, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (5.6)$$

en donde

$$b_{1j} = s \int \chi_1'(x) \chi_j'(x) dx \quad \text{y} \quad f_1 = \int_{\Omega_{\gamma_h}^h} \nabla u_h \cdot \nabla E_{\gamma_h}^h \chi_1 dx dy.$$

Si se considera como extensión de χ_1 a

$$E_{\gamma_h}^h \chi_1 = \sum_{k=1}^N \bar{\chi}_1(\xi_k) v_k^h,$$

entonces

$$f_1 = \sum_{k=1}^N \chi_1(\xi_k) \sum_{j=1}^{N-1} u_h(n_j) \int_{\Omega_{\gamma_h}^h} \nabla v_k^h \cdot \nabla v_j^h dx dy, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Los coeficientes $b_{1j} = s \int \chi_1'(x) \chi_j'(x) dx$ son :

$$b_{1j} = \begin{cases} s/h & \text{si } j = i = 1 \\ 2s/h & \text{si } j = i & \text{para } i = 2, \dots, N-2 \\ -s/h & \text{si } j = i-1 & \text{para } i = 2, \dots, N-2 \\ -s/h & \text{si } j = i+1 & \text{para } i = 1, \dots, N-2 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones (5.6) expresado en forma

error estimado. El ejemplo 4 muestra el efecto de la tensión superficial.

Ejemplo 1.

$$g(x,y) = \begin{cases} 4(y - 1/2)e^{x+2} \cos\pi x \operatorname{sen}\pi x, & y \leq 1/2 \\ 0 & , \quad y > 1/2. \end{cases}$$

$s = 1.$

Se consideran los casos

- a) $h = 1/10,$ $NN = 121,$ $NE = 200.$
- b) $h = 1/20,$ $NN = 441,$ $NE = 800.$
- c) $h = 1/40,$ $NN = 1681,$ $NE = 3200.$

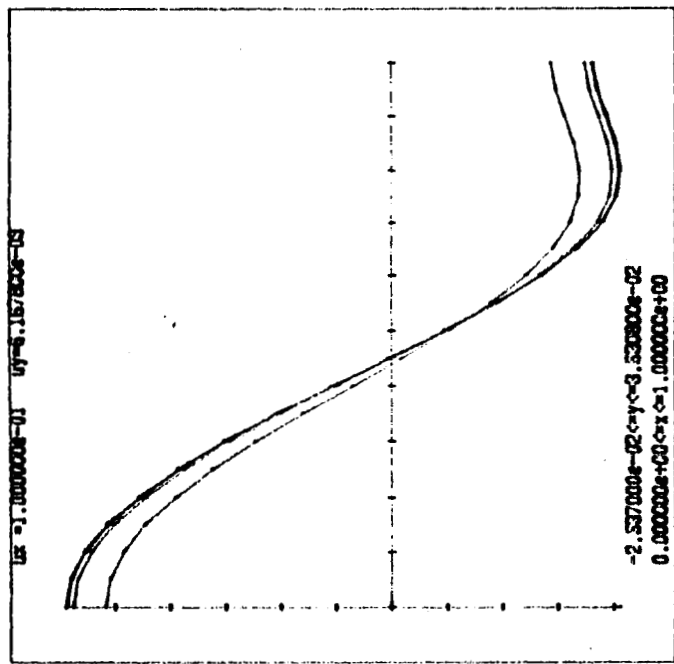
La norma de g en el espacio $W_2^1(\Omega^*)$ es 27.6 .

La convergencia se obtiene en 7 iteraciones en cada caso.

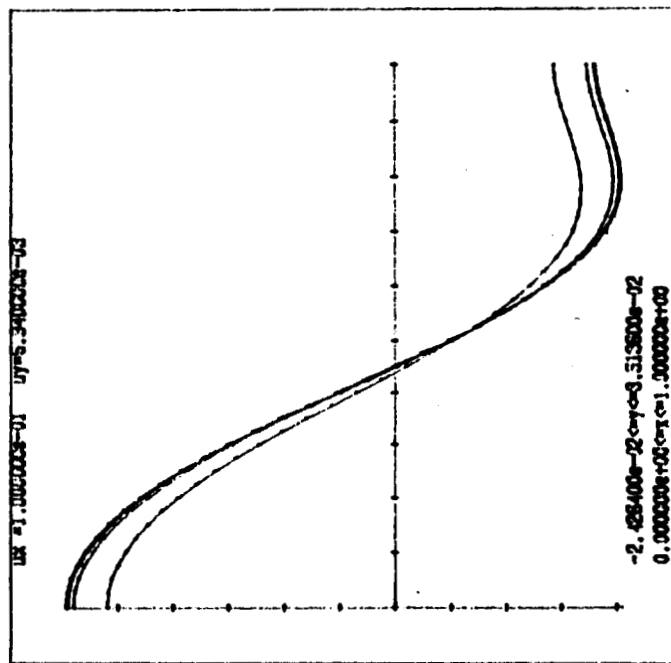
h	iter.	$\gamma_h(\xi_1)$	$r(\gamma_h)$	$u_h(n_1)$	$r(u_h)$
1/40		-.006167		.423624	
1/20	1	-.006253		.422900	
1/10		-.006596		.419478	
1/40		-.005792		.423161	
1/20	4	-.005792		.422341	
1/10		-.005726		.418541	
1/40		-.005785		.423158	
1/20	7	-.005783	5.11	.422333	2.20
1/10		-.005714		.418530	

Tabla 1. Muestra de valores del ejemplo 1.

Gráficas de la curva $y = \gamma_h(x)$ correspondientes al Ejemplo 1.



a) $h = 1/10$



b) $h = 1/20$

c) $h = 1/40$

Ejemplo 2.

$$g(x,y) = \begin{cases} 6(y - 1/2)e^{x+2} \cos\pi \operatorname{sen}\pi x, & y \leq 1/2 \\ 0, & y > 1/2. \end{cases}$$

$s = 1.$

Se consideran los casos

- a) $h = 1/10,$ $NN = 121,$ $NE = 200.$
- b) $h = 1/20,$ $NN = 441,$ $NE = 800.$
- c) $h = 1/40,$ $NN = 1681,$ $NE = 3200.$

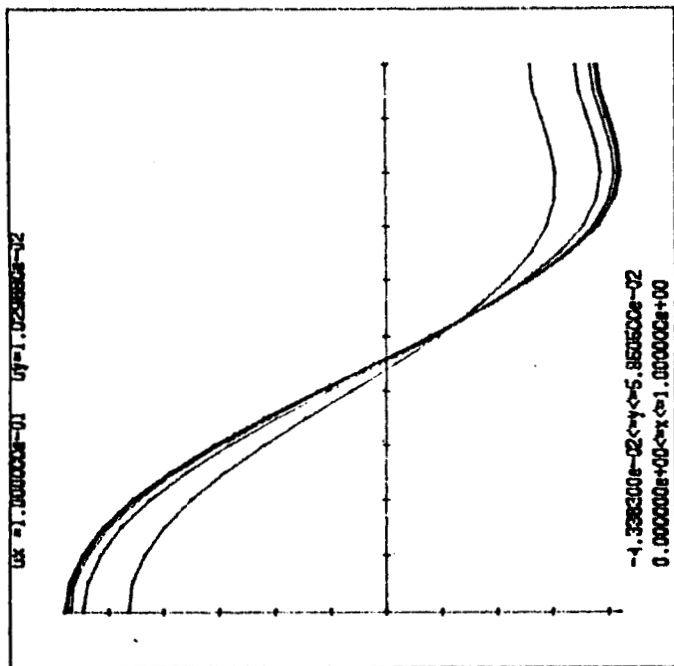
La norma de g en el espacio $W_2^1(\Omega^*)$ es 41.4 .

La convergencia se obtiene en 10 iteraciones en cada caso.

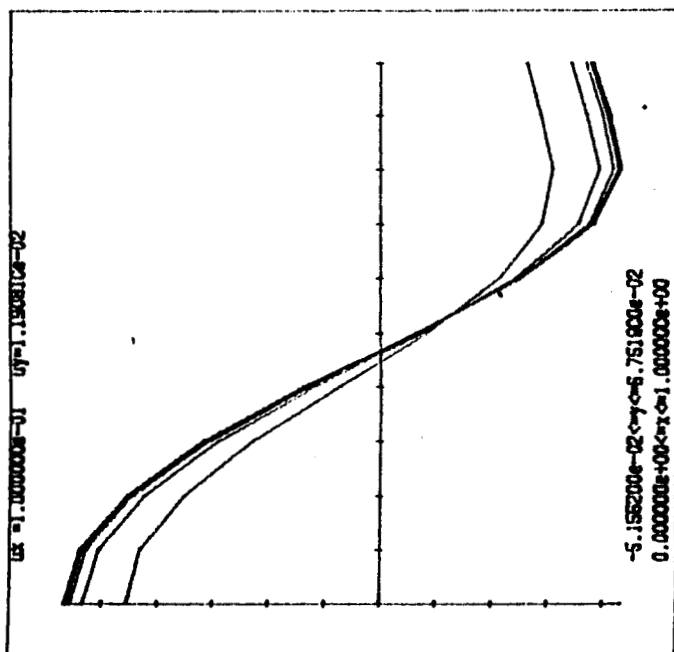
h	iter.	$\gamma_h(\xi_1)$	$r(\gamma_h)$	$u_h(n_1)$	$r(u_h)$
1/40		-.009250		.637279	
1/20	1	-.009380		.635950	
1/10		-.009894		.629767	
1/40		-.008172		.635223	
1/20	4	-.008080		.633493	
1/10		-.007570		.625695	
1/40		-.008098		.635124	
1/20	7	-.007997		.633382	
1/10		-.007443		.625508	
1/40		-.008096		.635125	
1/20	10	-.007995	2.46	.633377	2.17
1/10		-.007438		.625501	

Tabla 2. Muestra de valores del ejemplo 2.

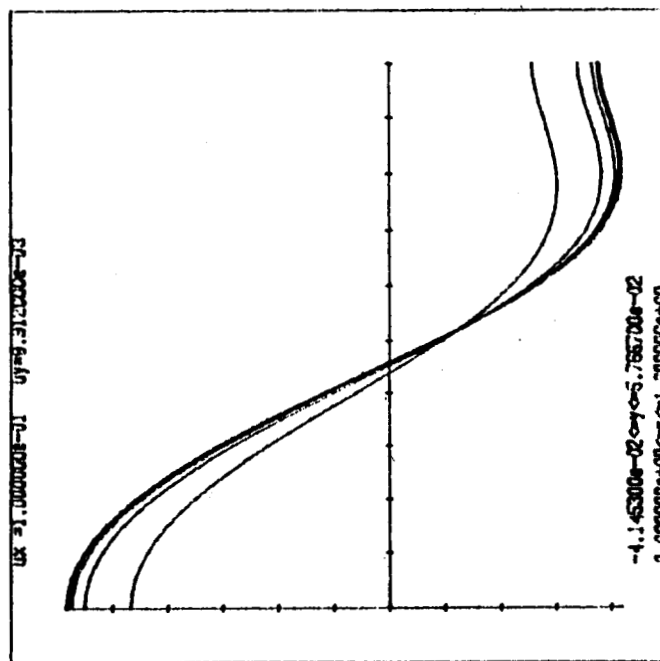
Gráficas de la curva $y = \gamma_h(x)$ correspondientes al Ejemplo 2.



b) $h = 1/20$



a) $h = 1/10$



c) $h = 1/4$

Ejemplo 3.

$$g(x,y) = \begin{cases} 9(y - 1/2)e^{x+2} \cos \pi x \operatorname{sen} \pi x, & y \leq 1/2 \\ 0 & , \quad y > 1/2. \end{cases}$$

$s = 1.$

Se consideran los casos

- a) $h = 1/10,$ $NN = 121,$ $NE = 200.$
- b) $h = 1/20,$ $NN = 441,$ $NE = 800.$
- c) $h = 1/40,$ $NN = 1681,$ $NE = 3200.$

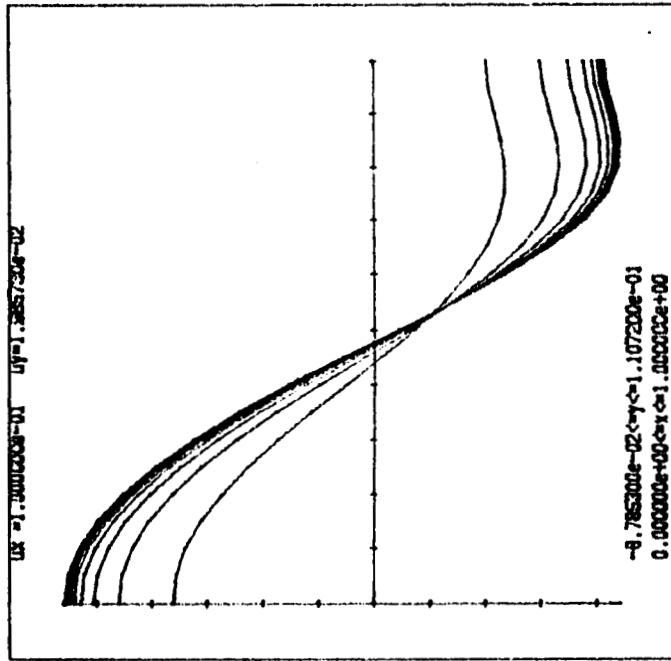
La norma de g en el espacio $W_2^1(\Omega^*)$ es 62.1 ..

La convergencia se obtiene en 21 iteraciones en cada caso.

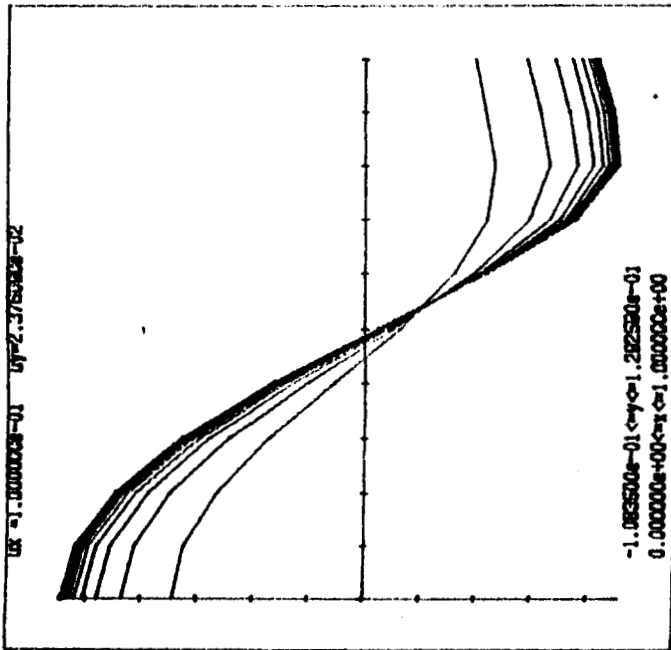
h	iter.	$\gamma_h(\xi_1)$	$r(\gamma_h)$	$u_h(n_1)$	$r(u_h)$
1/40		-.013875		.959768	
1/20	1	-.014070		.957192	
1/10		-.014841		.945293	
1/40		-.009844		.947698	
1/20	5	-.009358		.942946	
1/10		-.006997		.921420	
1/40		-.009270		.947698	
1/20	9	-.008686		.940000	
1/10		-.005766		.917793	
1/40		-.009212		.946159	
1/20	13	-.008613		.941054	
1/10		-.005567		.917193	
1/40		-.009207		.946147	
1/20	17	-.008605		.941034	
1/10		-.005533		.917092	
1/40		-.009206		.946146	
1/20	21	-.008604	2.35	.941029	2.23
1/10		-.005527		.917074	

Tabla 3. Muestra de valores del ejemplo 3.

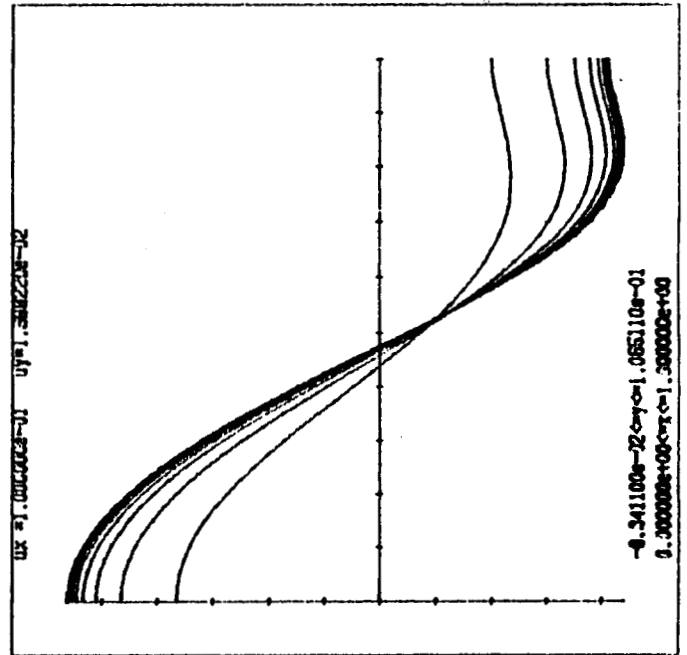
Gráficas de la curva $y = \gamma_h(x)$ correspondientes al Ejemplo 3.



b) $h = 1/20$



c) $h = 1/10$



d) $h = 1/5$

Ejemplo 4.

$$g(x,y) = \begin{cases} 6(y-1/2) e^{x+2} \cos\pi x \operatorname{sen}\pi x, & y \leq 1/2 \\ 0 & , \quad y > 1/2. \end{cases}$$

$h = 1/20$, $NN = 441$, $NE = 800$.

Se consideran los casos

- | | | |
|--------------|---------------|--------------|
| a) $s = 0.7$ | b) $s = 0.85$ | c) $s = 1.0$ |
| d) $s = 2.0$ | e) $s = 4.0$ | f) $s = 8.0$ |

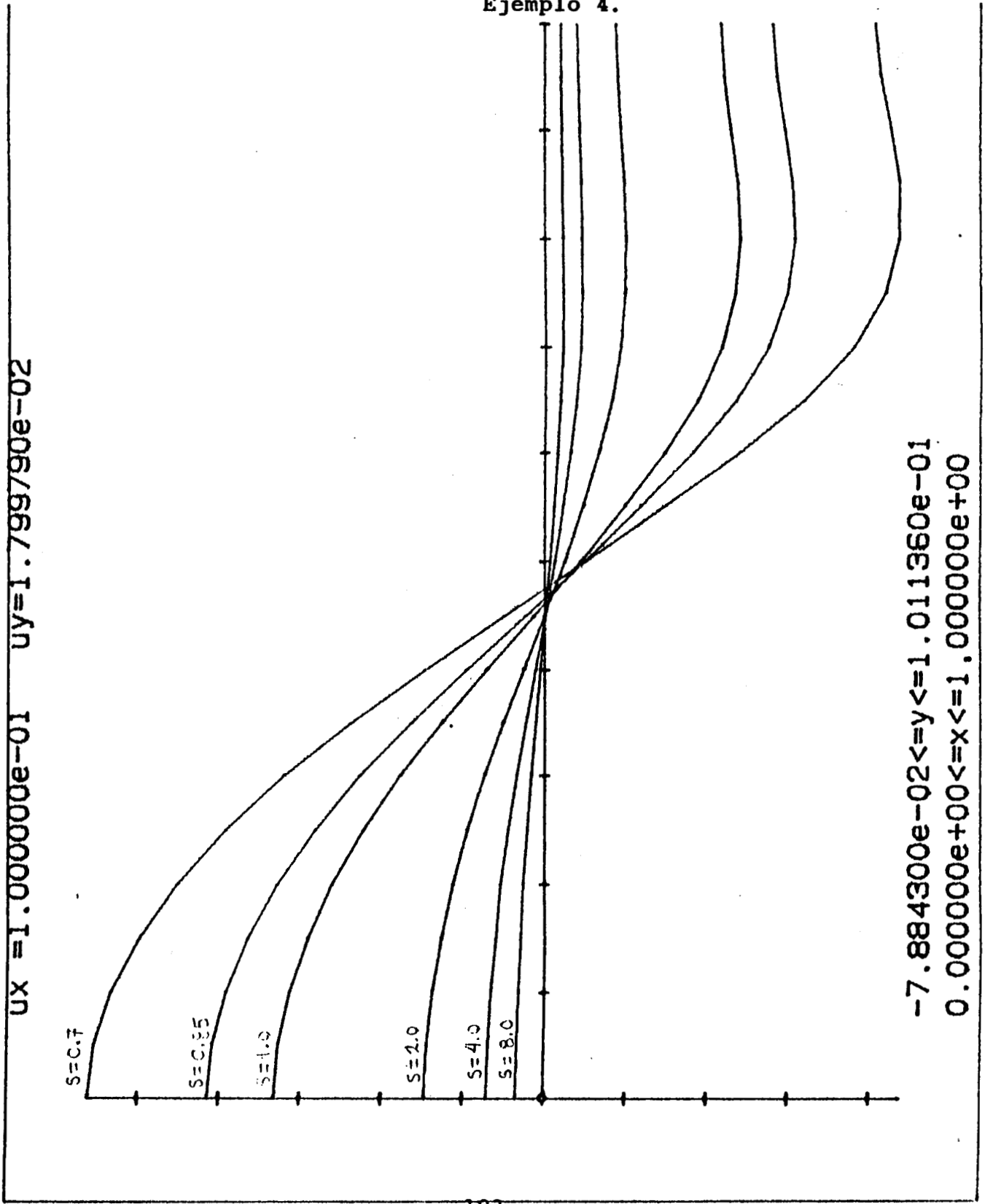
El número de iteraciones para obtener convergencia, en cada caso, se muestra en la siguiente tabla

s	No. iter.	$\gamma_h(\xi_1)$	$u_h(n_1)$
0.7	15	-.008929	.629120
0.85	12	-.008770	.632471
1.0	10	-.008528	.632902
2.0	5	-.004456	.633090
4.0	4	-.002296	.632101
8.0	3	-.001161	.631489

Tabla 4. Muestra de valores del ejemplo 4.

Variación de la frontera libre con respecto a la tensión superficial.

Ejemplo 4.



OBSERVACIONES.

Las observaciones son en general las mismas que se mencionaron al final de los ejemplos del capítulo anterior.

5.3. INTRODUCCION DE LA CURVATURA.

La introducción de la curvatura de γ en el modelo (1.13) es directa. Basta reemplazar la ecuación de la superficie libre por la expresión

$$-s \left(\frac{\gamma'(x)}{\sqrt{1+\gamma'(x)^2}} \right)' = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x, 1+\gamma(x)) \quad \forall x \in (0,1). \quad (5.7)$$

Con esta modificación, el problema (1.13) se convierte en :

Encontrar γ y u que satisfacen

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{en } \Omega_\gamma, \\ u &= g && \text{en } \partial\Omega_\gamma, \\ -s \left(\frac{\gamma'(x)}{\sqrt{1+\gamma'(x)^2}} \right)' &= \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x, 1+\gamma(x)) && \forall x \in (0,1), \\ \gamma(0) &= \gamma(1) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

La formación débil del problema para u es la misma que la del problema (1.13). Para encontrar una formulación débil del problema para γ se puede proceder como lo hacen Saavedra y Scott [16]. Multiplicando por una función de prueba $\chi \in W_1^0(0,1)$ y haciendo integración por partes del lado izquierdo de la tercera ecuación de (5.8), ellos obtienen que

$$s \int_0^1 \frac{\gamma'(x)\chi'(x)}{\sqrt{1+\gamma'(x)^2}} dx = \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial \vec{h}}(x, 1+\gamma(x)) \frac{\chi(x)}{\sqrt{1+\gamma'(x)^2}} \sqrt{1+\gamma'(x)^2} dx .$$

La inconveniente de esta formulación es que la forma

$$b(\gamma, \chi) = s \int_0^1 \frac{\gamma'(x)\chi'(x)}{\sqrt{1+\gamma'(x)^2}} dx$$

no es lineal en γ , y el operador de extensión E_γ introducido en la sección 2.2 ahora debe aplicarse a la función

$$\chi(x) / \sqrt{1+\gamma'(x)^2}$$

Sin embargo, si se considera el hecho de que

$$\left(\frac{\gamma'(x)}{\sqrt{1+\gamma'(x)^2}} \right)' = \frac{\gamma''(x)}{(1+\gamma'(x)^2)^{3/2}} ,$$

Se obtiene que la ecuación (5.7) es equivalente a

$$-s\gamma''(x) = \frac{\partial u}{\partial \vec{h}}(x, 1+\gamma(x)) (1+\gamma'(x)^2) \sqrt{1+\gamma'(x)^2} \quad \forall x \in (0,1) .$$

La formulación débil para esta expresión es

$$s \int_0^1 \gamma'(x) \chi'(x) dx = \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial \vec{h}}(x, 1+\gamma(x)) \chi(x) (1+\gamma'(x))^2 \sqrt{1+\gamma'(x)^2} dx \quad \forall \chi \in W_1^0(0,1).$$

La ventaja de esta formulación es que podemos expresar esta ecuación como

$$b(\gamma, \chi) = a_\gamma(u, E_\gamma \chi_\gamma) \quad \forall \chi \in W_1^0(0,1), \quad (5.9)$$

con $b(\cdot, \cdot)$ la misma forma bilineal que se usó para estudiar el problema (1.13) y

$$\chi_\gamma(x) := \chi(x) (1+\gamma'(x))^2. \quad (5.10)$$

Las propiedades de la forma bilineal $b(\cdot, \cdot)$ sobre los espacios $W_\infty^1(0,1)$ y $W_1^1(0,1)$ continúan siendo válidas. Sin embargo, el precio a pagar es que para garantizar que el lado derecho de la ecuación (5.9) tenga sentido, es necesario que para toda $\chi \in W_1^0(0,1)$ la función χ_γ también se encuentre en este espacio. Para ello debe asumirse, al menos, que $\gamma'' \in L^1(0,1)$, y entonces se puede aplicar la proposición 2.1 del capítulo II a la función χ_γ . Esta desventaja también se presenta en la formulación que proponen Saavedra y Scott [16], pues en ese caso se debe encontrar la extensión E_γ sobre la función $\chi_\gamma(x) = \chi(x) / \sqrt{1 + \gamma'(x)^2}$. Lo anterior muestra que es necesario estudiar con cuidado si es posible encontrar extensiones de χ_γ suponiendo $\gamma \in W_\infty^1(0,1)$, que permitan estudiar el problema (5.8) por medio de una formulación similar a la del capítulo II. En la presente sección supondremos

$\gamma \in W_{\infty}^2(0,1)$. Esto garantiza que $\chi_{\gamma} \in W_1^1(0,1) \forall \chi \in W_1^1(0,1)$. Por lo tanto, la siguiente formulación débil del problema (5.8) tiene sentido.

Calcular $\gamma \in W_{\infty}^2(0,1)$ y $u \in g \otimes W_p^1(\Omega_{\gamma})$ tales que

$$a_{\gamma}(u, v) = 0 \quad \forall v \in W_q^1(\Omega_{\gamma}), \quad (5.11)$$

$$b(\gamma, \chi) = a_{\gamma}(u, E_{\gamma} \chi_{\gamma}) \quad \forall \chi \in W_1^1(0,1),$$

con χ_{γ} definida por (5.9). Para demostrar existencia y unicidad de la solución de este problema se pueden utilizar las técnicas usadas en [16]. Sólo que en este caso para utilizar el argumento de contracción se define el mapeo $T: V_{\varepsilon} \rightarrow V_{\varepsilon}$ como

$$T(\gamma, u) = (\tilde{\gamma}, \tilde{u}),$$

en donde $\tilde{\gamma} \in W_{\infty}^2(0,1)$ resuelve

$$b(\tilde{\gamma}, \chi) = a_{\tilde{\gamma}}(u, E_{\tilde{\gamma}} \chi_{\tilde{\gamma}}) \quad \forall \chi \in W_1^1(0,1),$$

y $\tilde{u} \in g \otimes W_p^1(\Omega_{\tilde{\gamma}})$ resuelve

$$a_{\tilde{\gamma}}(\tilde{u}, v) = 0 \quad \forall v \in W_q^1(\Omega_{\tilde{\gamma}}).$$

EL PROBLEMA DISCRETO.

Para discretizar el problema (5.11) se pueden utilizar los espacios de interpolación definidos en la sección 3.3 y los interpolantes lineales introducidos en la sección 3.4 del capítulo III. La discretización del problema (5.11) es:

Encontrar $\gamma_h \in S_h^0$ y $u_h \in g_h^{\gamma_h} \oplus V_h^{0\gamma_h}$ tales que

$$a_{\gamma_h}(u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h^{0\gamma_h}, \quad (5.12)$$

$$b(\gamma_h, \chi_h) = a_{\gamma_h}(u_h, E_{\gamma_h}^h \chi_{\gamma_h}) \quad \forall \chi_h \in S_h^0,$$

en donde $\chi_{\gamma_h}(x) := \chi_h(x)(1 + \gamma_h'^2(x)) \quad \forall x \in [0, 1]$.

El análisis para probar existencia y unicidad de la solución de este problema es el mismo que el realizado en [16].

En este caso tampoco puede aplicarse la técnica usada en [16] para demostrar convergencia. La dificultad se debe a que χ_{γ_h} es discontinua en cada nodo x_k de la discretización escogida en el intervalo $[0, 1]$. Esto se debe a que γ_h' es discontinua en esos puntos. Entonces $E\chi_{\gamma_h} \in W_q^1(\Omega_0)$ será discontinua en los puntos $(\xi_1, 1)$, y no puede asegurarse que $E\chi_{\gamma_h} - J_h E\chi_{\gamma_h} \in W_q^1(\Omega_0)$.

El algoritmo computacional para resolver el problema (5.12) presenta una pequeña modificación en el cálculo de γ_h con respecto al algoritmo para resolver el problema (4.1). En este caso se considera

$$E_{\gamma_h}^h \chi_{\gamma_h}^i = \sum_{k=1}^N \chi_{\gamma_h}^i(\xi_k) v_k^h, \quad ,$$

en donde $\chi_{\gamma_h}^i = \chi_i(1+\gamma_h'^2)$ con $\{\chi_i\}_{i=1}^{N-2}$ las funciones base de S_h^0 introducidas en la sección 4.2. N , ξ_k y v_k^h también se escogen como en dicha sección. Por lo tanto

$$E_{\gamma_h}^h \chi_{\gamma_h}^i(x) = [1+\gamma_h'(\xi_{i+1})^2] v_{i+1}^h(x) \quad i = 1, 2, \dots, N-2.$$

Entonces, suponiendo conocida γ_h , para calcular $\gamma_h^* \in S_h^0$ que resuelve

$$b(\gamma_h^*, \chi_i) = a_{\gamma_h} \left(u_h, E_{\gamma_h}^h \chi_{\gamma_h}^i \right) \quad \forall \chi_i \in S_h^0, \quad (5.13)$$

se resuelve el sistema de ecuaciones

$$b(\gamma_h^*, \chi_i) = [1+\gamma_h'(\xi_{i+1})^2] a_{\gamma_h} (u_h, v_{i+1}^h) \quad i = 1, 2, \dots, N-2$$

Por lo tanto, si $\gamma_h^* = \sum_{j=1}^{N-2} d_j \chi_j$, entonces el problema (5.13) es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\sum_{j=1}^{N-2} b_{1j} d_j = f_1 \quad i = 1, 2, \dots, N-2, \quad (5.14)$$

en donde los coeficientes b_{1j} son los mismos que los del sistema de ecuaciones (4.4) de la sección 4.2, y los coeficientes f_1 ahora contienen el factor adicional $(1 + \gamma'_h(\xi_{i+1})^2)$. Es decir

$$f_1 = (1 + \gamma'_h(\xi_{i+1})^2) \int_{\Omega_{\gamma_h}} \nabla u_h \cdot \nabla v_{i+1}^h dx dy \quad i = 1, 2, \dots, N-2.$$

A partir de la siguiente página se muestran algunos ejemplos. Los ejemplos 5, 6 y 7 ilustran el efecto de la norma de g en la solución en la solución aproximada, y el orden de error cometido. El ejemplo 8 muestra el efecto de la tensión superficial en la determinación de la superficie libre. Los datos que se escogieron para los ejemplos 5, 6, 7 y 8 son los mismos que los de los ejemplos 1, 2, 3 y 10 del capítulo IV respectivamente. Los datos se escogen de esta manera con objeto de comparar los resultados con los obtenidos en el capítulo IV para tales ejemplos.

Ejemplo 5.

$$g(x,y) = \begin{cases} 2(y - 1/2) \operatorname{sen}\pi x, & y \leq 1/2 \\ 0 & , \quad y > 1/2. \end{cases}$$

$s = 1.$

Se consideran los casos

- a) $h = 1/10, \quad NN = 121, \quad NE = 200.$
- b) $h = 1/20, \quad NN = 441, \quad NE = 800.$
- c) $h = 1/40, \quad NN = 1681, \quad NE = 3200.$

La norma de g en el espacio $W_2^1(\Omega^*)$ es 1.38 .

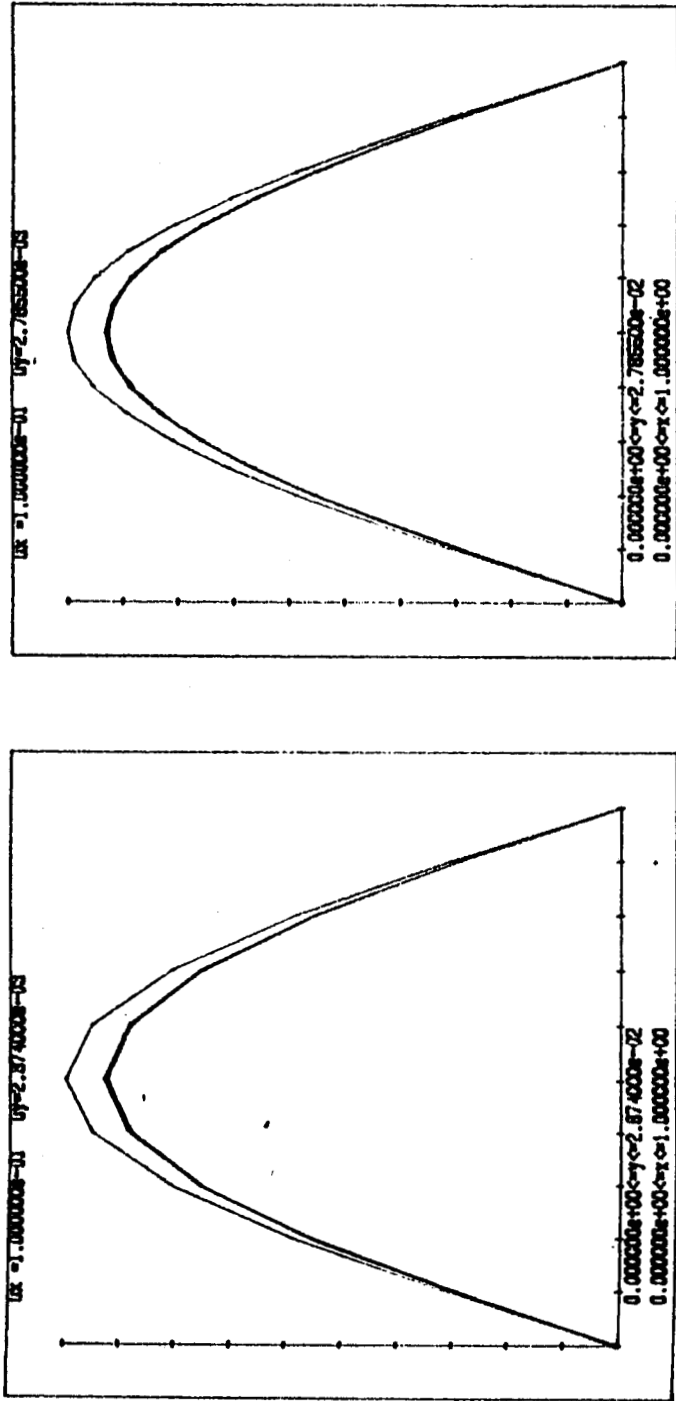
La convergencia se obtiene en 6 iteraciones en cada caso.

h	iter.	$\gamma_h(\xi_1)$	$r(\gamma_h)$	$u_h(n_1)$	$r(u_h)$
1/40		.027635		-.191403	
1/20	1	.027855		-.191774	
1/10		.028740		-.193240	
1/40		.025739		-.191947	
1/20	3	.025932		-.192328	
1/10		.026707		-.193828	
1/40		.025731		-.191950	
1/20	6	.026698 *	2.00	-.192330	1.98
1/10		.026698		-.193831	

Tabla 5. Muestra de valores para el ejemplo 5.

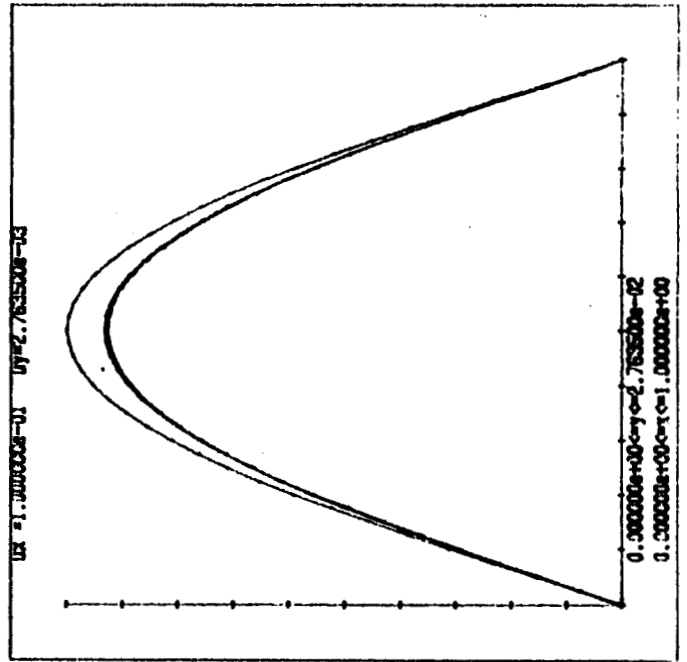
* DEBE SER 25924

Gráficas de la curva $y = \gamma_h(x)$ correspondientes al Ejemplo 5.



a) $h = 1/10$

b) $h = 1/20$



c) $h = 1/40$

Ejemplo 6.

$$g(x,y) = \begin{cases} 8(y - 1/2) \operatorname{sen}\pi x, & y \leq 1/2 \\ 0 & , \quad y > 1/2. \end{cases}$$

$s = 1.$

Se consideran los casos

a) $h = 1/10, \quad NN = 121, \quad NE = 200.$

b) $h = 1/20, \quad NN = 441, \quad NE = 800.$

c) $h = 1/40, \quad NN = 1681, \quad NE = 3200.$

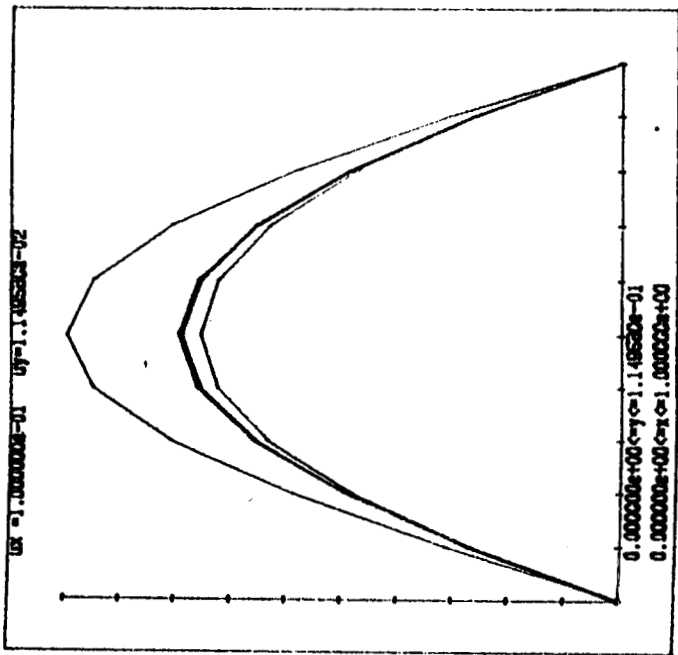
La norma de g en el espacio $W_2^1(\Omega^*)$ es 5.52 .

La convergencia se obtiene en 9 iteraciones en cada caso.

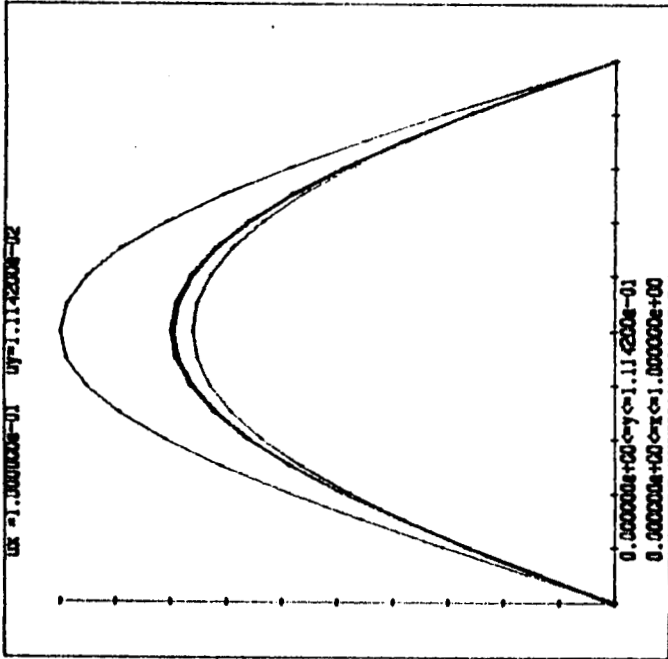
h	iter.	$\gamma_h(\xi_1)$	$r(\gamma_h)$	$u_h(n_1)$	$r(u_h)$
1/40		.110538		-.676030	
1/20	1	.111420		-.676715	
1/10		.114958		-.679368	
1/40		.088557		-.699022	
1/20	3	.089183		-.700008	
1/10		.091692		-.703870	
1/40		.087902		-.699723	
1/20	6	.088521		-.700720	
1/10		.091000		-.704622	
1/40		.087904		-.699721	
1/20	9	.088524	2.00	-.700716	1.97
1/10		.091003		-.704619	

Tabla 6. Muestra de valores del ejemplo 6.

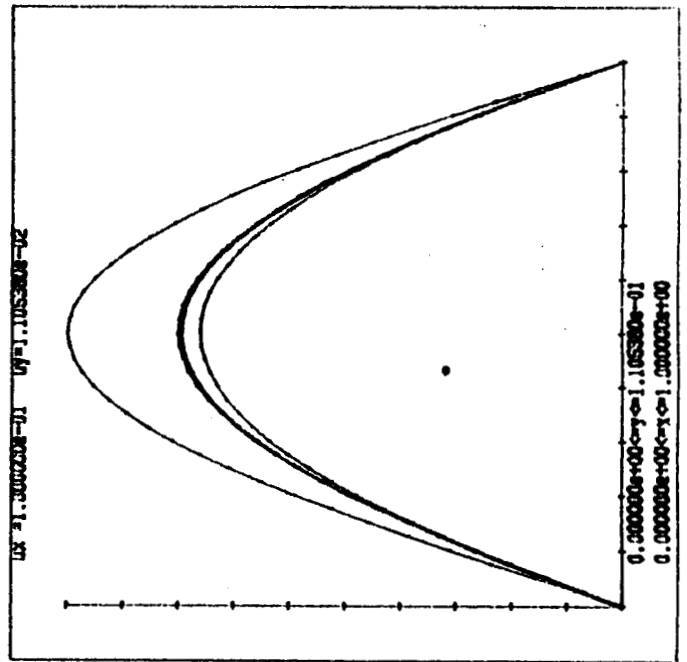
Graficas de la curva $y = \gamma_h(x)$ correspondientes al ejemplo 6.



a) $h = 1/10$



b) $h = 1/20$



c) $h = 1/100$

Ejemplo 7.

$$g(x,y) = \begin{cases} 16(y - 1/2) \operatorname{sen}\pi x, & y \leq 1/2 \\ 0, & y > 1/2. \end{cases}$$

$s = 1.$

Se consideran los casos

- a) $h = 1/10,$ $NN = 121,$ $NE = 200.$
- b) $h = 1/20,$ $NN = 441,$ $NE = 800.$
- c) $h = 1/40,$ $NN = 1681,$ $NE = 3200.$

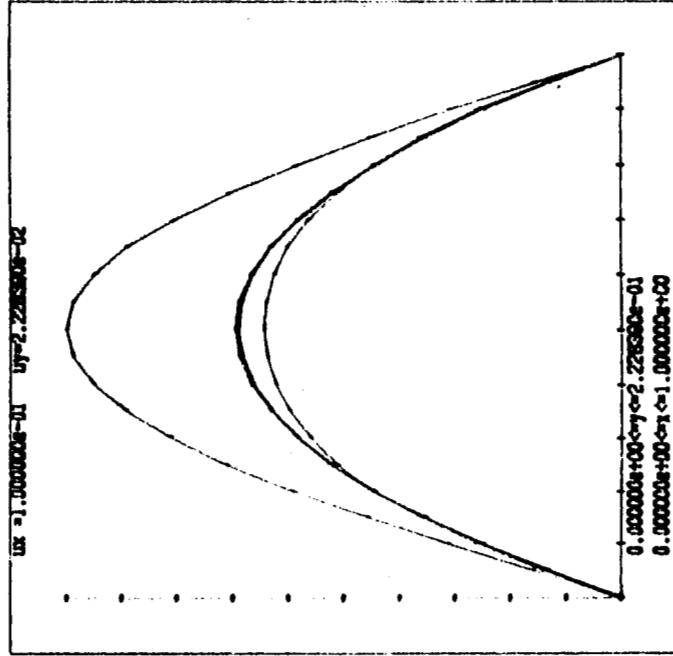
La norma de g en el espacio $W_2^1(\Omega^*)$ es 11.04 .

La convergencia se obtiene en 10 iteraciones en cada caso.

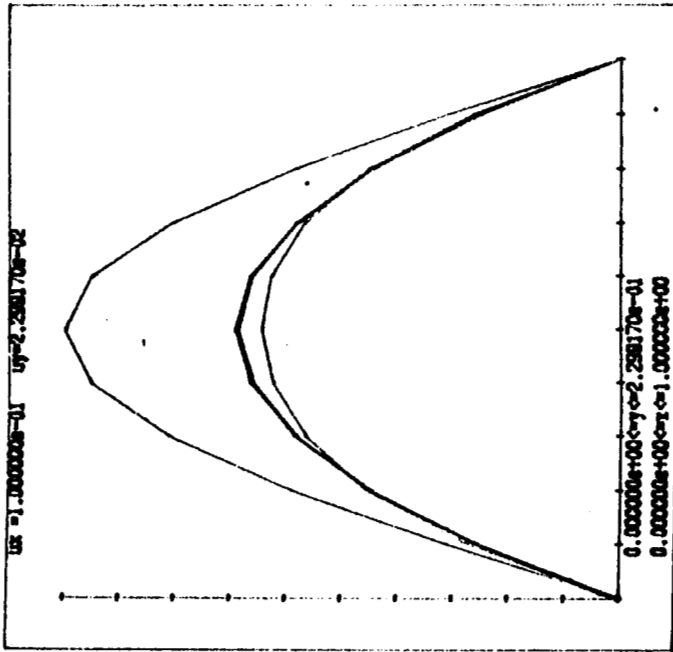
h	iter.	$\gamma_h(\xi_1)$	$r(\gamma_h)$	$u_h(n_1)$	$r(u_h)$
1/40		.221076		-1.142029	
1/20	1	.222839		-1.141619	
1/10		.229917		-1.139826	
1/40		.152660		-1.269463	
1/20	4	.153815		-1.270321	
1/10		.158395		-1.273685	
1/40		.152652		-1.269456	
1/20	7	.153791		-1.270337	
1/10		.158316		-1.273805	
1/40		.152655		-1.269445	
1/20	10	.153793	1.99	-1.270331	2.17
1/10		.158319		-1.273800	

Tabla 7. Muestra de valores para el ejemplo 7.

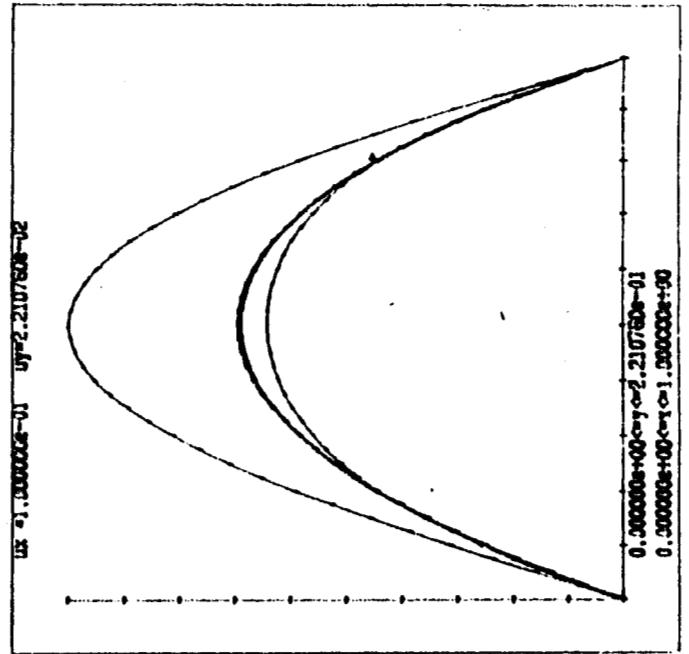
Gráficas de la curva $y = \gamma_h(x)$ correspondientes al Ejemplo 7.



b) $h = 1/20$



a) $h = 1/10$



c) $h = 1/40$

Ejemplo 8.

$$g(x,y) = \begin{cases} 8(y-1/2) \operatorname{sen}\pi x, & y \leq 1/2 \\ 0 & , \quad y > 1/2. \end{cases}$$

$$h = 1/20, \quad NN = 441, \quad NE = 800.$$

Se consideran los casos

- a) $s = 0.25$ b) $s = 0.5$ c) $s = 1.0$
d) $s = 2.0$ e) $s = 4.0$ f) $s = 15.0$

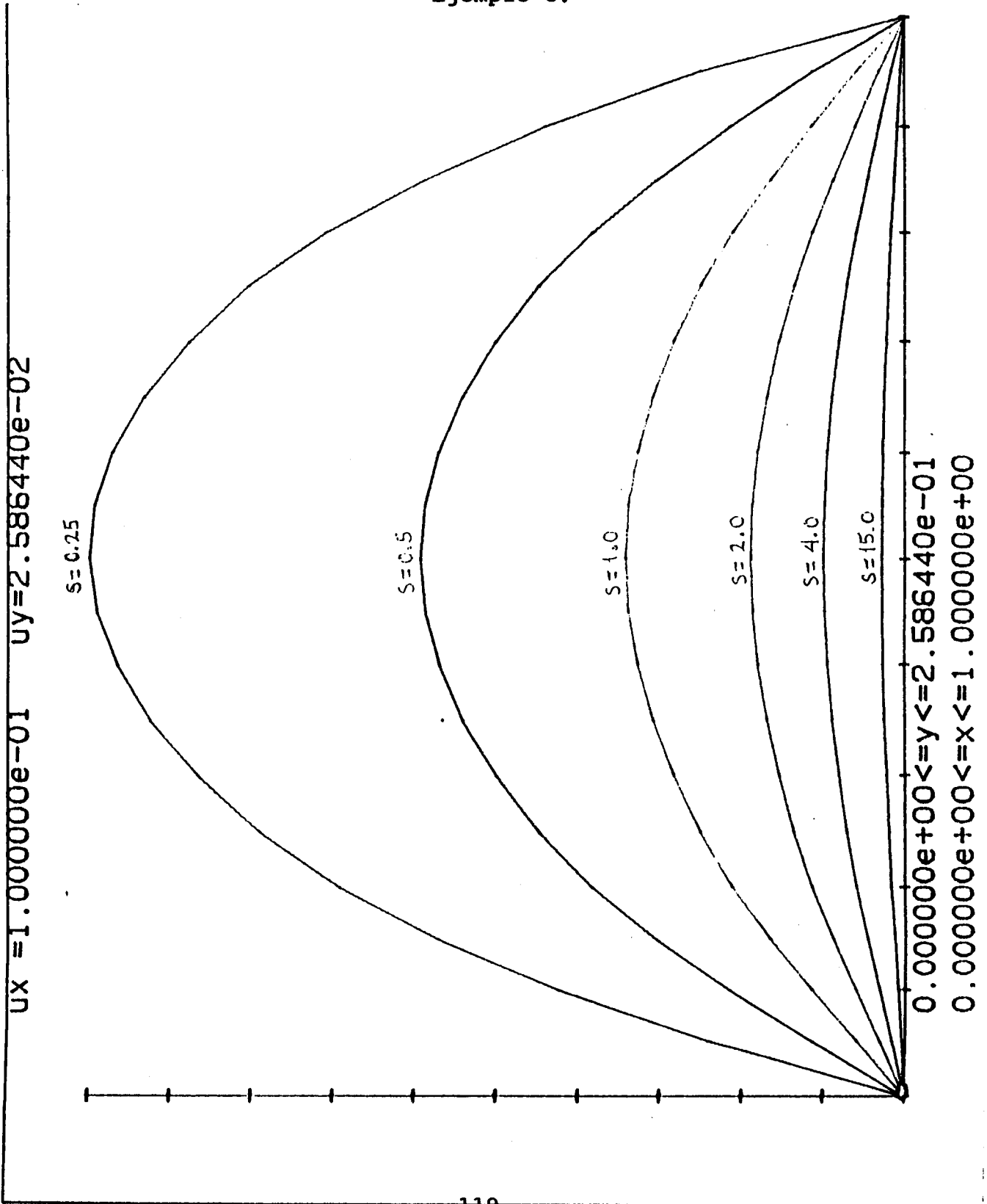
El número de iteraciones para obtener convergencia, en cada caso, se muestra en la siguiente tabla

s	No. iter.	$\gamma_h(\xi_1)$	$u_h(n_1)$
0.25	16	.258644	-.541871
0.5	10	.153793	-.635167
1.0	9	.088524	-.700716
2.0	8	.048809	-.743574
4.0	6	.025924	-.769322
15.0	4	.007277	-.790876

Tabla 8. Muestra de valores del ejemplo 8.

Variación de la frontera libre con respecto a la tensión superficial.

Ejemplo 8.



OBSERVACIONES.

1.El comportamiento de las soluciones con respecto a la norma de g es el mismo que en caso del modelo estudiado en el capítulo IV. Además las cotas de error estimadas son las mismas, como puede observarse de las tablas 1, 2 y 3 del capítulo IV y las tablas 5, 6 y 7 de este capítulo.

2.Cuando se hace crecer la norma de g se obtiene una convergencia más rápida al punto fijo (γ_h, u_h) que en el caso del modelo del capítulo IV. Por otro lado, a medida que aumenta la norma de g , la diferencia en valor absoluto entre soluciones correspondientes del problema(4.1) y del problema (5.12) aumenta, como muestra la siguiente tabla.

h	$\ g\ _{W_2^1(\Omega^*)}$	Sol. del prob.4.1		Sol. del prob.5.12		dif. de sol.	
		γ_h	u_h	γ_h	u_h	γ_h	u_h
1/10	1.38	.025695	-.191960	.025731	-.191950	.000036	.000010
1/20		.025887	-.192340	.025924	-.192330	.000037	.000010
1/40		.026657	-.193842	.026698	-.193831	.000041	.000011

1/10	5.52	.086658	-.701007	.087904	-.699721	.001246	.001288
1/20		.087341	-.702040	.088524	-.700716	.001283	.001324
1/40		.089575	-.706094	.091003	-.704619	.001428	.001475

1/10	11.04	.146868	-1.280383	.152655	-1.269445	.005787	.010900
1/20		.147820	-1.281617	.153793	-1.270331	.005973	.011300
1/40		.151632	-1.286409	.158319	-1.273800	.006687	.012600

3.El comportamiento de la frontera libre con respecto a la

tensión superficial es el mismo que el del modelo del capítulo V. La tabla 10 del capítulo IV y la tabla 8 de este capítulo, muestran que a mayores perturbaciones de γ la diferencia de soluciones de los problemas correspondientes es mayor.

4. Las observaciones 2 y 3 nos hacen suponer que cuando la perturbación sobre γ es pequeña el modelo del capítulo IV simula bien el modelo que incluye la curvatura de γ . Esto está de acuerdo con el hecho de que para encontrar γ_h en el problema (5.12) es necesario resolver el sistema (5.14), en donde los coeficientes f_1 difieren de los del sistema (4.4) por el factor $(1 + \gamma'_h(x)^2)$.

CONCLUSIONES

- 1.-Se ha verificado que el problema (1.13) puede resolverse por medio del Método del Elemento Finito en combinación con un esquema iterativo de tipo Picard, como se propone en [16]. Se utilizaron polinomios lineales por pedazos para aproximar la frontera libre γ y el campo escalar u . Los resultados numéricos obtenidos permiten afirmar que el orden de convergencia en la norma L^∞ es de orden h^2 , tanto para γ como para u .
- 2.-La solución (γ, u) del problema estudiado se obtiene en una vecindad de (γ_0, u_0) , con $\gamma_0 = 0$ y $u_0 = 0$. El tamaño de esta vecindad depende esencialmente de la función g y de su norma : ella crece cuando la norma de g crece y viceversa. Por otro lado, el aumento en el valor de la tensión superficial produce perturbaciones más pequeñas de la frontera libre, no siendo así en el caso del campo escalar u .
- 3.-La convergencia del método iterativo aplicado no depende del tamaño del paso de discretización escogido. Además, el método converge aún para valores de $\|\gamma\|_{W_\infty^1(0,1)}$ mayores a $1/2$, inclusive a 1 , siempre y cuando la transformación (2.14) sea biyectiva. Por lo que la restricción $\|\gamma\|_{W_\infty^1(0,1)} < 1/2$ no es esencial en los cálculos numéricos.
- 4.-Los resultados teóricos que presentan en [16] pueden extenderse

cuando se introduce la expresión de la curvatura en lugar del término no lineal $\gamma''(x) / (1+\gamma'(x)^2)^{1/2}$ en el problema (1.13), si se asume que $\gamma \in W_{\infty}^2(0,1)$ ó alguna otra condición sobre γ que garantice que la función $\chi(x)(1+\gamma'(x)^2)$ se encuentre en $W_1^1(0,1)$ cuando $\chi \in W_1^1(0,1)$. Los resultados numéricos muestran que para perturbaciones pequeñas de γ y u el modelo (1.13) simula bien el modelo que incluye la curvatura de γ . Los resultados teóricos también pueden aplicarse cuando se consideran condiciones Neumann para γ . Asimismo, es muy probable que se pueda hacer un estudio teórico similar cuando se combinan todas las condiciones mencionadas en el último capítulo.

5.-Algunos aspectos para trabajo futuro son los siguientes :

- a) Estudiar la posibilidad de utilizar un esquema iterativo de Newton-Raphson en la solución del problema, para acelerar la convergencia a la solución de punto fijo.
- b) Estudiar si las soluciones de norma grande tanto para γ como para u son únicas, y también si son estables.
- c) Extender el análisis utilizado en el estudio del problema (1.13) a algunos problemas concretos. En particular a problemas de flujos ideales cuyo comportamiento se describe por medio de las ecuaciones de Bernoulli, y posteriormente a las ecuaciones de Stokes.

BIBLIOGRAFIA

1. R.A. Adams, "Sobolev Espaces", Academic Press, New York, 1975.
2. D.N. Arnold, L.R. Scott and M. Vogelius, *Regular inversion of the divergence operator whit Dirichlet boundary conditions on a polygon*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., (accepted).
3. H. Brézis, "Analyse Fonctionnelle", Masson Editeur, 1983.
4. P.G. Ciarlet, "The Finit Element Method for Elliptic Problems", North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1978.
5. P. Clement, *Approximation by finit element functions using local regularization*, R.A.I.R.O. Anal. Numer., 9 R2(1975), 77-84.
6. C. Cuvelier, *On the numerical solution of a capillary free boundary problem governed by the Navier-Stokes equations*, Springer Lecture Notes in Physics, 141 (1980), 132-137.
7. S.F. Kistler and L.E. Scriven *Coating flow theory by Finit Element and asytmotic analysis of the Navier-Stokes system*, International Journal for Numerical Methods ia Fluids, vol 4, 207- 29 (1984).
8. N.P. Kruyt, C. Cuvalier, A. Segal and J. Van der Zanden, *A total linearization methods for solving viscous free boundary flow problems by the Finit Element Method*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol.8, 357-363 (1988).
9. Y.Y. Lin, *Numerical solutions for flow in a partially filled, rotating cylinder*, SIAM J. SCI. STAT. COMP., vol 7, No. 2, 1976.
10. J.A. Nietsche, *Free boundary problems for Stoks' flows and Finit Element Methods*, "Ecuadiff 6", Lecture Notes in Math, vol. 1192, Springer, Berlin, 1986, 327-332.
11. H. Okamoto, *Stationary free boundary problems for circular flows whit or whitout surface tension*, Lecture Notes in Num. Appl. Anal, 5, 223-257 (1982). Nonlinear P.D.E. in Applied Science, U.S.-Japan Seminar, Tokyo, 1982.
12. F.M. Orr and L.E. Scriven, *"Riming flow : Numerical Simulation of steady, viscous, free, surface flow whit surface tension*, J. Fluid Mech., (1976), vol 84, part 1, pp, 145-165.
13. V.V. Pukhnachev, *Hydrodinamic free boundary problems*, "Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications, College de France Seminar Volume III", Pitman, Boston, 1982, 301-308.

14. J. N. Reedy, "An Introduction to the Finit Element Method", Mc. Graw-Hill, 1984.
15. G. Ryskin and L.G. Leal, *Numerical solution of free boundary problems in fluid mechanics*, Part 1-3, *J. Fluid Mech.*, 148(1984), 1-43.
16. P. Saavedra and L.R. Scoot, *Variational formulation of a model free boundary problem*, (Submitted).
17. H. Saito and L.E. Scriven, *Study of coating flow by the Finit Element Method*, *J. Comp. Phys.*, 42 (1981), 53-76.
18. D.H. Sattinger, *On the free surface of viscous fluid motion*, *Proc. R. Soc. London*, 349c 183-204, (1976).
19. R. Scott and S. Zhang, *Finit element interpolation of non-smooth functions satisfying boundary conditions*, *Math. Comp.* (Submitted).
20. V.A. Solonnikov, *On the Stokes equations in domains whit non-smooth boundaries and on viscous incompressible flow whit a free surface*, "Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications", *College de France Seminar Volume III*", Pitman, Boston, 1982, p. p. 340-423.