

Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Unidad Iztapalapa

La primera geometrización del movimiento

ICR para obtener el título de Licenciada en Filosofía

Presenta

Mónica Mondragón Castro

Asesor

Dr. Godfrey Ernesto Guillaumin Juarez

México, diciembre 2018

A mis padres Álvaro y Engracia,

a mis hermanos, Salvador, Javier y Ricardo.

Por su siempre infinito amor, apoyo y confianza.

Agradecimientos

Agradezco a la Universidad Autónoma Metropolitana y a todos los profesores que tuve a quienes debo gran parte de mi formación filosófica.

Agradezco a mi profesor y amigo Dr. Godfrey E. Guillaumin Juarez, por su apoyo, paciencia y extensa revisión a mi investigación enriqueciéndola con cada una de sus enseñanzas en nuestras reuniones. Agradezco también la inspiración que tuve en su trabajo para la realización de la presente investigación.

Por último y no menos importante, agradezco a mis padres y a mis hermanos, quienes sin escatimar los recursos a su alcance han extendido su apoyo invaluable a lo largo de mi formación personal y académica.

Sin duda esta investigación no habría sido posible sin ustedes

Introducción General **1**
Capítulo 1. MATEMÁTICA GRIEGA, UNA MATEMÁTICA GEOMÉTRICA **5**
1.1.Pitágoras y el surgimiento de la inconmensurabilidad geométrica **8**
1.2.La teoría de la proporción y el método de exhaucion de Eudoxo **18**
1.3.La geometría expresada en los Elementos de Euclides **24**
Capítulo 2. LA FÍSICA DE ARISTÓTELES COMO PRECURSORA DE LA FÍSICA MODERNA ... **31**
2.1. Distinción entre la física y las matemáticas **33**
2.2. La Física aristotélica **37**
2.3. El movimiento **41**
2.4. Tiempo, espacio y movimiento **49**
Escolio **54**
Capitulo 3. LA GEOMETRIZACION DEL MOVIMIENTO LOCAL. **56**
3.1. Los Calculadores de Oxford y la discusión de la caridad como cualidad medible. **58**
3.2. Jean Buridan y el *Impetus* **66**
3.3. La teoría de las configuraciones de Nicole Oresme y la geometrizacion del movimiento. **72**
Resumen **84**
Conclusiones **91**

Introducción General

> El pasado no se trasformó en el <<mundo moderno>> en un momento singular: no debería ser motivo de sorpresa el descubrir que los que practicaban la ciencia en el siglo XVII tenían, a menudo, tanto de modernos como de antiguos. Sus ideas tuvieron que ser sucesivamente trasformadas y redefinidas por generaciones de pensadores antes de convertirse en las <<nuestras>>
>
> Steven Shapin, La Revolución Científica (1996).

La interpretación de la naturaleza aristotélica representa una de las grandes etapas de la historia de la física. Las características de la física de Aristóteles que vemos ahora ajenas al pensamiento de la física cuantificada moderna, no son sólo que se trataba de una física cualitativa, sino también, que buscaba sus explicaciones en términos de una interpretación de la experiencia inmediata. Su filosofía natural se ocupó de estudiar el cambio en todas sus formas, una de ellas es la del desplazamiento de los cuerpos interpretado como un cambio de lugar. Esta concepción de movimiento pasó de ser un concepto cualitativo a cuantitativo gracias al estudio que llevaron a cabo los escolásticos de la Edad Media.

Para que este cambio se realizara, durante siglos se formaron las condiciones necesarias (como las críticas a los principios físicos del movimiento aristotélico, la modificación de conceptos cualitativos y cuantitativos, la creación de las herramientas matemáticas necesarias para su medición) que permitieron la manifestación de la actividad intelectual a través de las criticas acerca de la concepción de la ciencia y de principios fundamentales del mundo físico elaborados por Aristóteles. Las ideas más importantes surgieron – entre otras cosas ― sobre el papel de las matemáticas en la explicación de los fenómenos físicos[1]. Estas reflexiones llevaron a abordar de forma diferente problemas que

[1] Para ver más leer David. C. Lindberg. *Los inicios de la ciencia occidental.* (Barcelona: Paidos 1992) Cap. 7 -12

se planteaba la filosofía natural, lo cual, llevó a desarrollar métodos matemáticos para resolverlos. El terreno en el que el nuevo tipo de problemas iba a producir sus mayores efectos desde mediados del siglo XVI fue en el estudio del movimiento.

Los cambios en el terreno de la Dinámica, se dieron gracias a dos principales causas, un desarrollo conceptual y un desarrollo metodológico. El desarrollo conceptual consistió en el análisis acerca del concepto de movimiento para finalmente determinar qué es lo que se quería medir. Este cambio conceptual implicó desarrollar métodos matemáticos adecuados que usarían como herramienta para la medición del movimiento.

La presente tesis es un análisis histórico-filosófico acerca de las condiciones que hicieron posible que el concepto de movimiento pasara de ser un concepto cualitativo a cuantitativo. Aristóteles distinguió entre la Física y la Matemática como dos ciencias con distintos objetos de estudio, los medievales hicieron una unión entre ambas ciencias para el estudio del movimiento, ya que los pensadores escolásticos comenzaron a usar los conocimientos griegos sobre geometría como herramienta para un mejor entendimiento del mundo físico. Derivado de lo anterior, cambia su concepción acerca de las cualidades aristotélicas consideradas hasta entonces como meros accidentes de la materia, y las comienzan a ver como magnitudes a las que se les puede asignar un número.

También está investigación analiza cómo las metodologías usadas para la medición de cualidades ―específicamente del movimiento – se fueron transformando a medida que las necesidades cuantitativas de los pensadores en cuestión se complicaban, por ejemplo, el problema de medir siempre con exactitud y encontrar casos en los que no haya una medida común entre dos magnitudes geométricas, como en el caso del descubrimiento de la inconmensurabilidad por los pitagóricos y la resolución del problema por Eudoxo. Así, el tema principal de estudio se divide en tres capítulos, el primero abarcando la matemática griega desde los pitagóricos hasta Euclides; luego, la Física aristotélica; hasta los estudios medievales acerca de las cualidades culminando con Nicole Oresme.

El estudio comienza analizando el descubrimiento de la inconmensurabilidad por parte de los pitagóricos como un "problema" que marcó el desarrollo de las técnicas de medición mediante las proporciones y magnitudes geométricas. Después, dentro del primer capítulo como parte importante de esta investigación está Eudoxo, pues él resolvió el

problema de la inconmensurabilidad pitagórica con su método de exhaucion, este método, junto con su definición de proporciones, formó la contribución más importante de Eudoxo a los sistemas griegos de medición por proporcionalidad. Estas técnicas de medición, alcanzarían el grado máximo de utilidad para su época con los Elementos de Euclides.

El segundo capítulo está dedicado al estudio de la Física aristotélica ya que es central para esta investigación por dos razones, la primera, porque Aristóteles estableció una Física ―que sólo vendría a ser sustituida por la Física moderna― que se basó en los cambios cualitativos en las propiedades de la materia dentro de la cual, elaboró su teoría del movimiento de los cuerpos. La segunda, porque la cosmología aristotélica dominó la interpretación de los fenómenos del mundo natural en la Edad Media incluyendo el movimiento por desplazamiento, lo cual, hizo que la transformación que llevaron a cabo los pensadores medievales sobre las cualidades y las magnitudes se hiciera con base en la filosofía aristotélica. De esta forma, los primeros movimientos hacía la cuantificación de conceptos en la física medieval se hicieron en el curso de una discusión sobre las categorías aristotélicas de 'cantidad' y 'cualidad'.

El tercer y último capítulo está escrito sobre los cambios conceptuales y metodológicos acerca de la geometría de proporciones y sobre los conceptos aristotélicos de las cualidades que llevaron a cabo los escolásticos del siglo XVI. El estudio concluye con Nicole Oresme porque él fue quien estudia la medición de las cualidades desarrollando herramientas metodológicas para medirlas, desarrolló así, un método grafico para la medición teórica del movimiento, aunque sin pensar en mediciones experimentales reales, Oresme comenzó a ver a las cualidades como magnitudes a las que se les puede asignar un valor numérico. Aquí es donde reside la importancia de este pensador medieval, pues Oresme estudió la velocidad y otras cualidades como propiedades con la capacidad de tener distintos grados de intensidad, a los cuales se les asignaría un número, lo cual es importante porque es el comienzo del paso de las cualidades a las magnitudes. Rompiendo con ello la distinción categórica aristotélica entre 'cualidad' y 'cantidad'. De esta forma, la cuantificación teórica que realizó Oresme, ayudó a sacar a fenómenos físicos como el del movimiento de los cuerpos, de las categorías aristotélicas como la de cualidad.

En el caso de los conceptos de movimiento y velocidad, se comprenden la interacción con los métodos cuantitativos que se estudiaban, cómo esta interacción generó nuevos conceptos, nuevas investigaciones y nuevo conocimiento acerca del mundo, y cómo esta interacción se convirtió en la base para que dichos conceptos pasaran de ser cualitativos a cuantitativos[2]. En resumen, la presente tesis es un estudio acerca del desarrollo intelectual y metodológico empleados para la medición de cualidades, específicamente del movimiento y la velocidad. Este trabajo es una reflexión acerca de la relación que existe entre las prácticas de medición y el conocimiento acerca del mundo físico.

[2] No sólo los conceptos estudiados en esta investigación, sino más bien, cómo las cualidades se convierten en magnitudes.

Capítulo 1.

MATEMÁTICA GRIEGA, UNA MATEMÁTICA GEOMÉTRICA

El ser humano ha buscado certeza dándole explicación a los fenómenos que ocurren a su alrededor, atribuyéndole a entidades la causalidad de la naturaleza. Así, las civilizaciones de la antigüedad tenían una cosmología basada en la creación del universo por seres superiores llamados dioses; sin embargo, la civilización griega se distingue por haber iniciado una nueva forma de investigación. Dicha investigación explicó la naturaleza dejando fuera la intervención divina.

La matemática juega un papel importante para el desarrollo de la ciencia, pues actualmente tenemos conocimiento de que los fenómenos de la naturaleza como el movimiento de los cuerpos obedecen a leyes físicas que comúnmente expresamos en lenguaje matemático. Actualmente vivimos en un universo dinámico donde ciertas cosas pueden ser impredecibles, pero a pesar de ello, las teorías físicas como la teoría de la relatividad o la del mundo cuántico, no serían posibles sin las matemáticas, sin embargo, no siempre fue así, detrás de la evolución de las teorías físicas existe un gran esfuerzo por llegar a algunas de sus nociones fundamentales.

Dos civilizaciones importantes para este proceso histórico de desarrollo científico fueron la egipcia y la babilónica, cuyos principales aportes fueron en el terreno de las matemáticas y la astronomía. Mucho de lo que hicieron ambas civilizaciones en matemáticas está vinculado a transacciones comerciales, edificaciones, cálculo de superficies, medidas de terrenos, y a diversos asuntos de la vida cotidiana. Ambas culturas influenciarían de manera permanente a la civilización griega.

En Egipto las matemáticas no trascendieron más allá de un uso práctico, lo que se daba era una aplicación de álgebra y aritmética a problemas relacionados con figuras geométricas que surgían de problemas del entorno. Los resultados geométricos de los egipcios estaban vinculados a asuntos referentes a la propiedad de la tierra, encontramos procedimientos para calcular áreas de rectángulos, triángulos y trapezoides e, incluso,

mecanismos para el cálculo del área de un circulo. Tenían procedimientos para calcular volúmenes de cubos, cilindros y otras figuras. Los egipcios tenían conocimiento del teorema de Pitágoras, de hecho, era usado para obtener ángulos rectos en las construcciones arquitectónicas, usando la proporción, 3, 4 y 5, de hecho, todas las pirámides con excepción de la de Keops incorporaron este triángulo[3].

"Las tablillas de arcilla […] revelan un sistema numérico babilónico, totalmente desarrollado hacia el 2000 a. C., que era simultáneamente decimal (basado en el número 10) y sexagesimal (basado en el número 60)"[4]. A diferencia de los egipcios, poseían una notación posicional, no conocían sin embargo el cero, aunque tenían un símbolo para representar la ausencia de algo. Para los babilonios, los números fundamentales eran del 1 al 10 y del 1 al 59. Se sabe que usaban la suma, la resta, multiplicación, división, raíz cuadrada y cubica; ecuaciones simples. "No tenían números negativos, por lo tanto, no eran aceptadas las raíces de ecuaciones cuadráticas negativas"[5].

En lo que se refiere a la geometría, para los babilonios, ésta no se estudiaba por sí misma, no se consideraba tampoco una disciplina separada, y, al igual que los egipcios, siempre en relación directa con problemas concretos surgidos del entorno. Sin embargo, conocían las áreas de rectángulos, de triángulos isósceles y trapecios. Se conoce el uso del teorema llamado de Pitágoras gracias a una tablilla con un cuadrado que contiene cuatro triángulos rectángulos y un cálculo que, traducido a nuestro sistema decimal resulta ser asombroso para determinar aproximadamente el valor de $\sqrt{2}$ [6].

De manera general, en las matemáticas babilonias y egipcias tanto en la aritmética, el álgebra como en la geometría, las reglas eran establecidas por la prueba y el error, con sustento en la experiencia práctica. No hay evidencia de la idea de estructura lógica, o la de demostración, o de la necesidad de ofrecer una justificación más allá de lo que la práctica o la evidencia física permitían. Este conocimiento llegó a los griegos gracias a la relación comercial muy amplia con los egipcios y babilonios que permitió la absorción de

[3] González Urbaneja, Pedro Miguel. "El teorema llamado de Pitágoras. Una historia geométrica de 4.000 años" *Sigma*, núm. 32 (Noviembre 2008) 103 - 12
[4] David. C. Lindberg. *Los inicios de la ciencia occidental.* (Barcelona: Paidos 1992) 37
[5] Ángel, Ruiz. *Historia y filosofía de las matemáticas.* (Nicaragua: EUNED, 2003) 25
[6] González Urbaneja, Pedro Miguel. *Opo. Sit.* P. 105

conocimiento principalmente matemático en un nuevo contexto social, político y económico griego[7].

Mileto es uno de los lugares que se presume funcionó como una especie de puente entre culturas y pueblos, esa ciudad jónica conectaba con los egipcios, fenicios y los babilonios. En Mileto nació una escuela de pensamiento cuyo fundador fue Tales (c. 670 – c. a. C), Anaximandro (c. 610 – c. 547 a. C.), Anaxímenes (c. 550 – 480 a.C.), Anaxágoras (c. 500 – c. 428 a.C.), y Pitágoras (c. 585 – c. 500 a. C.), este último fundó su propia escuela. Estos pensadores, buscaban principalmente una relación causal y más naturalista de los hechos que acontecían en el mundo. Una de sus principales reflexiones de los filósofos jonios es entender el por qué de los fenómenos naturales basándose en sus propias intuiciones.

"Baste decir entonces, de Tales, que ciertamente introdujo la geometría a los griegos, que probablemente mejoró la geometría egipcia al enseñar más líneas que áreas, y dando pruebas deductivas en lugar de inductivas, y que de todos modos formó una escuela que derivó de él sus temas y métodos de investigación, su creencia en la estabilidad de las leyes naturales, su tradición de la belleza y la utilidad de la vida intelectual"[8]. Por ello se considera a Tales como el primer pensador que enuncia un conjunto de proposiciones geométricas abstractas, independientes de cualquier aplicación práctica a la que pudiera destinarse. Características que no se encuentran en la matemática egipcia.

"[…] Tales averiguó la altura de pirámides y edificios similares midiendo sus sombras a la hora del día en que la sombra de una persona es de la misma altura a sí misma"[9]. Su método estaba basado en observaciones de triángulos similares e independientes de la latitud y la hora especifica del día o el año para determinar la altura de la pirámide. Tales, como único precursor de Pitágoras en Grecia, encabezó la serie de pensadores que demostraron interés por la geometría fuera de sus usos prácticos, sin embargo, su geometría forma parte del carácter empírico, pues no tenía aun ningún vínculo con la racionalización de la naturaleza[10].

[7] J. Rey Pastor y J. Babini. *Historia de la matemática, Vol. 1.* (Barcelona: Godisa 1985) 36
[8] James, Gow. *A short history of greek mathematics.* (Cambridge University Press, 2010) 145
[9] Ibid. 142
[10] Con ello me refiero a que Tales no tenía un interés puramente abstracto hacía la geometría.

La escuela pitagórica por otro lado, señaló un cambio de rumbo en el desarrollo de la ciencia griega, tanto en la teoría como en la práctica, y es aquí donde se encuentra el punto de partida para esta investigación. Los griegos examinaron las consecuencias del descubrimiento de que hay magnitudes inconmensurables, esto, los llevó a desarrollar las matemáticas como una disciplina deductiva a partir de principios y axiomas. Este conocimiento fue recogido en los Elementos de Euclides que luego se convertiría en un libro de gran utilidad como herramienta con la que se manejaban y aplicaban problemas geométricos al entendimiento de la naturaleza, dicha herramienta, fue el uso de las proporciones y razones para la medición[11].

Este capítulo está dedicado a explicar cómo se llevó a cabo el proceso de "perfeccionamiento"[12] de las proporciones como herramientas de medición en la antigua Grecia. Para ello seleccioné tres etapas, la primera, es el descubrimiento de la inconmensurabilidad por parte de los pitagóricos. La segunda, es la explicación del método de exhaucion de Eudoxo para alcanzar su máxima aplicación con Arquímedes, quien se basa en Euclides para concluir la tercera etapa. Este conocimiento geométrico será usado posteriormente, por Aristóteles para establecer algunas concepciones acerca del movimiento que serán expuestas en el segundo capítulo, y por los pensadores medievales para medir cualidades, entre ellas el movimiento.

1.1. Pitágoras y el surgimiento de la inconmensurabilidad geométrica

Uno de los logros de los antiguos matemáticos griegos fue la invención de las matemáticas abstractas basadas en una estructura lógica de definiciones, axiomas y demostraciones. "El estudio de ἀριθμητική, o el estudio científico de los números en abstracto, comienza en Grecia con Pitágoras, cuyo ejemplo determinó durante muchos siglos su simbolismo, su nomenclatura y los límites de su contenido"[13]. Su más famosa idea, tal vez, fue el considerar que "todo es número", es decir, "sostenían que era 'número' el ἀρχή ('principio'). Y esto nos ayuda a ver cómo Pitágoras tomó lo que aprendió de Tales y su

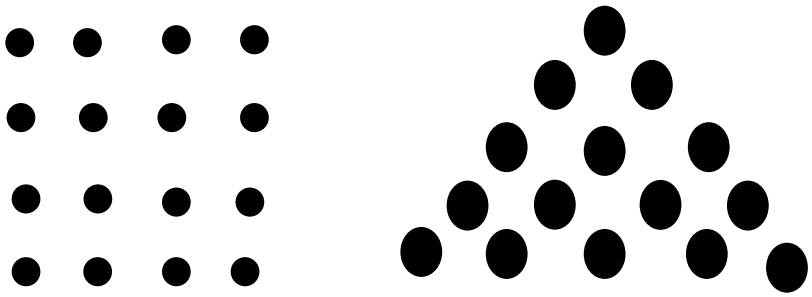
[11] Medición no en términos modernos, más bien, los pitagóricos comparaban magnitudes geométricas entre sí.
[12] Me refiero a que el conocimiento geométrico a partir de los pitagóricos fue recogido por Euclides, donde alcanza su máxima expresión sistematica y completa.
[13] James, Gow. *Opo. Sit.* P. 66

séquito, y llegó a ver que el número estructura todas las otras apariencias: ira, aire y el resto."[14]. Algo así como que los números eran los átomos del mundo, sin embargo, del vasto campo de ideas pitagóricas me referiré solo a la teoría de las proporciones y el descubrimiento de las magnitudes geométricas.

Para la escuela pitagorica, lo importante era la forma y la estructura de las cosas, pues sólo así se podían explicar la infinita variedad de objetos presentes en la naturaleza. Así es como los pitagoricos planteaban que la forma y estructura de la naturaleza, estaban fundadas en los números enteros y las proporciones entre ellas. Esta concepción de la naturaleza llevó a un profundo estudio de los numeros, su intima relación con la geometría haría que también ésta fuera estudiada asiduamente. "La etapa más antigua en el desarrollo de las matemáticas griegas que todavía es accesible para nosotros es la teoría musical de la proporción."[15].

Uno de sus métodos para encontrar proporciones consistió en disponer en forma geométrica conjuntos numéricos en que cada unidad estaba representada por un punto colocado en el lugar correspondiente a un sitio físico o geométrico. "De este modo era posible disponer los enteros en una serie de hileras de puntos situados uno bajo otro"[16]. De modo que se dieron cuenta de que existe una relacion entre numeros y figuras geometricas, así, representaban los numeros enteros siempe de manera excacta por un grupo de puntos:

Figura 1.



En la figura 1 por ejemplo, hay un cuadrado con las proporciones 4, 8, 12 y 16. Un triángulo con el uno en su vértice y, bajo él, el número dos en forma de dos puntos, seguido

[14] Robert, Hahn. *The metaphysics of the pythagorean theorem.* (Nueva York: University of New York Press, 2017) 153
[15] Árpád, Szabó. *The beginings of Greek mathematics.* (D. Reidel publishing company, Boston) 28
[16] S, Sambursky, *El mundo físico de los griegos.* (Madrid: Alianza Editorial, 1987)48

de una hilera de tres puntos, y así sucesivamente. Luego, "Si sumamos las hileras, obtenemos la serie de los <<numeros triangulares>>, 1, 3, 6, 10, 15, etc."[17]. "Así, los cuerpos perfectos son simplemente una idealización de los cuerpos físicos de la naturaleza, de ahí que pueda decirse que el número subyace a todos los objetos físicos y es el comienzo de todo"[18].

De acuero con los pitagóricos, la primer serie de puntos de la figura 1 representaba un número cuadrado porque el cuadrado de uno de sus lados da como resultado el total de puntos que lo constituyen, es decir, $4^2 = 16$. La segunda serie de puntos eran llamados numeros triangulares "dado que cada fila tiene una más que la fila de arriba, vemos que $t_n = 1 + 2 + \cdots + n - 1 + n$"[19]. "Cada número de dicha serie o proporción fue llamado *término* (όρος). Los términos medios de una proporción fueron llamados μεσότηες. Se conocían ciertamente tres tipos de proporción, la aritmética, la geométrica y la armónica."[20]. Los números cuadrados y los números triangulares, eran proporciones geometricas, pues los pitagoricos tenian una "concepcion de número como tamaño y se aplicaba a las magnitudes geometricas tales como la longitud, área y volumen"[21] lo cual, permitió que las proporciones se extendieran a figuras simples donde la aritmética y la geometría se unían[22].

Las proporciones aritméticas eran aquellas relaciones entre numeros proporcionales, por ejemplo "los numeros perfectos (τἐλειοι) son aquellos que son iguales a la suma de todos sus posibles factores (por ejemplo, 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14)"[23]. "Como informa Aristóteles, los pitagóricos comenzaron observando las relaciones numéricas de las consonancias musicales o *harmoniai* y, encontrando muchos otros puntos de correspondencia entre los números y el mundo […]"[24], descubrieron que los tonos musicales podían expresarse en términos precisos por razones numéricas, es decir, la razón del tamaño de las cuerdas de un instrumento como la lira producía las mismas notas sin importar el tamaño del instrumento en que se tocara, estas eran las proporciones armónicas. De la misma manera que son

[17] S, Sambursky, *Opo. Sit.* P.48
[18] Ibid.49
[19] Jeffrey, Stopple. *A primer of analytic number theory. From Pythagoras to Riemman* (Cambridge: Cambridge University Press)2
[20] James, Gow. *Opo. Sit.* P. 70
[21] Godfrey, Guillaumin. *Génesis de la medición celeste*. (México: Tirant humanidades, 2016) 201
[22] Ibid. 201
[23] James, Gow. *Opo. Sit.* P. 70
[24] Charles. H. Kahn. *Phytagoras and the Phytagoreans. A brief history.* (Indianapolis/Cambridge: Hackett Publishing Company, Inc., 2001) 3

únicamente los acordes musicales los que pueden tener un efecto agradable en el oído y ser estos mismos reproducidos a voluntad en diferentes instrumentos, así también las formas de los cuerpos geométricos que estaban en proporcion producían en la vista un efecto en igual medida a la armonía, pudiendo ser reproducibles exactamente gracias a que "[…] los números son elementos de todas las cosas que son, y que el firmamento entero es armonía y número. Y cuantas correspondencias encontraban entre los numeros y armonías, de una parte, y las pecularidades y partes del firmamento y la ordenacion del Universo, de otra, las relacionaban entre sí sistematicamente"[25].

"Una razón (λόγος) es una comparación entre cantidades homogéneas, (es decir, de números o magnitudes) con respecto a sus tamaños. Una proporción (άναλογια) es una igualdad de dos razones"[26]. Por ejemplo; "así, la razón de 18 a 6, la expresamos como 18/6 o como 3, lo que indica que 18 contiene a 6 tres veces. La razón de 9 a 3 es tambien 3, y por tanto, según esta nocion, los cuatro numeros 18, 6, 9 y 3 están en proporción. Esta proporción se expresa 18:6:9:3, se lee 18 es a 6 como 3 es a 9".[27]

Las relaciones que los pitagoricos asociaban a la naturaleza se daban por medio de magnitudes geométricas mediante razones y proporciónes. Por ello la aritmetica y la geometría se entrelazan en el pensamiento pitagórico, el cual, está reflejado en los Elementos de Euclides quien recopiló el conocimiento geométrico que se conocía en su tiempo[28], incluyendo la teoría de las proporciones pitagóricas. Es en el libro VII de los Elementos explica qué es una parte y fracción, ambas definiciones explican lo que significaba proporción para los pitagoricos.

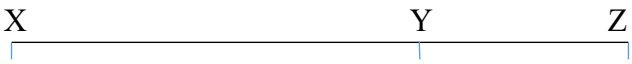
Definición 3. Un número es parte de otro cuando el menor divide al mayor.

Definición 4. Un número es fracción de otro cuando no lo mide[29].

[25] Aristoteles, Metafisica. Libro I, 986a 1-5
[26] Richard, Knorr. *The evolution of euclidean Elements*. (Canada: D. Reidel Publishing Company, 1975)15
[27] Correa Pabón, Guillermo. "Teoría de la proporción Pitagórica". *Escritos,* núm. 33 (Julio-Diciembre 2006) 605-606
[28] John, Tabak. *Geometry, The lenguaje of space and form.* (E.U., Facts in file, 2004) 24 -25
[29] Euclides, *Elementos libro V al IX*: Libro VII (Madrid: Gredos, 1994) 124-126

Los pitagóricos tenían la idea de que dos magnitudes, particularmente dos segmentos, tienen siempre una parte proporcional común, es decir, que son conmensurables. El siguiente paso fue asociar con cada par de segmentos la razón de sus longitudes. Este proceso requería que los segmentos en cuestión fueran conmensurables, en el sentido de poder encontrar un tercer segmento que los midiera en unidades enteras, lo cual graficamente se representa de la siguiente forma:

Figura 2.



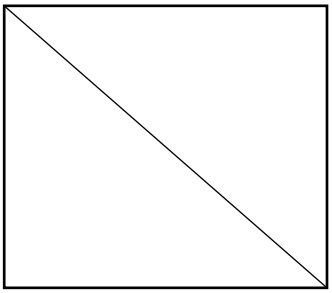
"En el diagrama anterior, la razón YZ a YX es la misma que XY a XZ" [30]. Las lineas A y B representan una proporción y son conmensurables porque dados dos segmentos, uno de longitud A y el otro de longitud B, si existe un segmento de longitud C tal que al añadir al segmento A un número de segmentos de igual longitud que esté un número finito de veces, encontremos un número resultante que tenga la misma longitud que el segmento C y B, pues dos veces B mide a A, y tres veces C mide a A y dos a B, todas de manera exacta. Así, estas proporciones se aplicaban a la geometría. Así, "Pitágoras descubrió que la armonía de los números se manifestaba en su forma más sorprendente en las razones matemáticas entre varios números que adoptaban la forma o bien de proporciones, o bien de relaciones geométricas"[31].

En general, suponían que dos figuras similares, por ejemplo dos cuadrados o dos triángulos, que tuvieran la misma apariencia ornamental, aunque diferian en tamaño, tenían las mismas proporciones. "Pero dos triángulos isósceles en ángulo recto tenían la misma apariencia ornamental, y por lo tanto deberían haber tenido el mismo *logos* (o proporcion*)*. De hecho, parecía evidente que sus lados tenían la misma relación cuantitativa entre sí. Sin

[30] Paul, Strathern. *The big idea: Phytagoras and his theorem.* (Reino Unido: Arrow, 1997) 57
[31] S, Samburky. *Opo. Sit.* P. 55

embargo, no tenían *logos*"[32]. El triángulo recto isoceles fue de especial importancia para los pitagóricos porque era la mitad de un cudrado[33] y, como mencioné antes, un número cuadrado era un número proporcional :

Figura 3



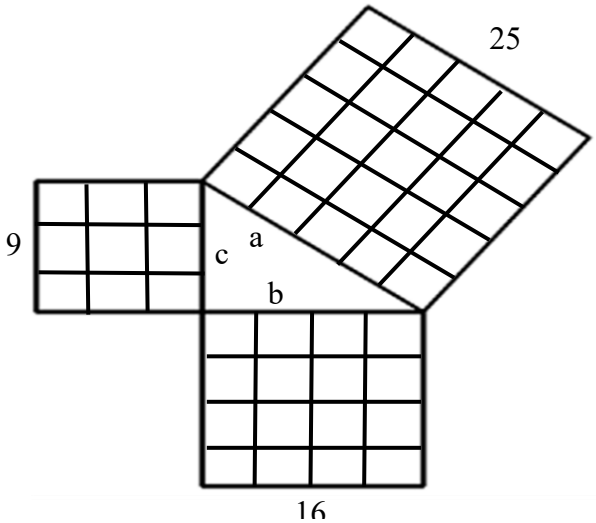
Todas las doctrinas pitagóricas discutidas hasta ahora se basan o resultan en una búsqueda de números enteros, a partir de los cuales se pueden construir figuras geométricas con ciertas propiedades. "En el caso del triángulo rectángulo isósceles, sin embargo, no es posible expresar la relación entre sus lados en números enteros."[34]. De acuerdo con uno de los teoremas más atractivos, y ciertamente uno de los más famosos y útiles de la geometría elemental es el llamado teorema de Pitágoras, el cual establece que, la suma de los cuadrados de los lados es igual al cuadrado de la diagonal: $a^{2+}b^2 = c^2$[35].

Se deduce que un triángulo cuyas proporciones fuesen 3:4:5[36] será siempre un triángulo rectángulo independientemente del tamaño de sus segmentos[37]. Esto se ve fácilmente cuando dibujamos un cuadrado sobre el lado mayor (hipotenusa), o sea, sobre la diagonal (a); así, se puede ver que es igual a la suma de los cuadrados dibujados sobre los

[32] Kurt, Von Fritz. The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum. En *Classics in the history of Greek mathematics. (*Boston: Springer Science +Bussines media, 2004) 228
[33] Robert, Hahn. *The metaphysics of the pythagorean theorem*. (New York: Suny press, 2017) 30
[34] Kurt, Von Fritz. *Opo. Sit.* P. 221
[35] Luke, Hoodkin. *A history of mathematics. (*New York: Oxford University Press, 2005) 38
[36] James, Gow. *Opo. Sit.* P. 70-71
[37] La teoría debe haber comenzado a partir de una observación que se conocía desde mucho antes del comienzo de la filosofía griega, a saber, que si uno junta tres piezas de madera de las respectivas longitudes de 3, 4 y 5, un ángulo recto triángulo resultará. De hecho, esta es una forma antigua de un cuadrado de carpintero. Dado que el tamaño de los cuadrados de carpintero no estaba estandarizado, también debe ser una cuestión de conocimiento común que la longitud absoluta de los lados del triángulo era irrelevante, y que todos los triángulos cuyos lados estaban en esa proporción no solo eran correctos. en ángulo, pero también en forma 'similar'. Finalmente, parece haberse sabido desde el principio que la suma de los cuadrados de 3 y 4 era igual al cuadrado de 5. Kurt, Von Fritz. *Opo. Sit.* P. 219

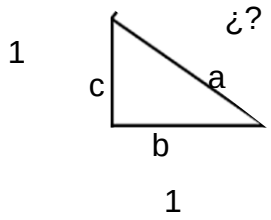
lados (c,b), pues el cuadrado más grande mide 5 x 5 = 25, los otros lados 3 x3 =9 y 4 x 4= 16, sumandos estos dos ultimos resultados da 25 como se muestra en el siguiente esquema[38].

Figura 4.



Sin embargo, el problema se presentó cuando aplicaron su teorema para calcular la diagonal de un triángulo recto cuyos lados miden 1, en notación moderna, esto es:

Figura 5.



La solución es la siguiente:

$a^2= b^2+c^2$

$a^2=1^2+1^2$

$a^2=2$

$a=\sqrt{2}$

$\sqrt{2}=$ ¿?

Para solucionarlo hay que encontrar un número que multiplicado por sí mismo nos dé como resultado el número 2. Para los griegos, la diagonal del triángulo tenía una determinada longitud, pero, no había ningún número exacto para asignarle, pues entonces, los griegos no tenían un concepto de número para expresar el resultado de la raíz de dos, y es que para ellos cualquier magnitud *a*, que fuese comparada con una magnitud *b*, y ambas *a* y *b* fuesen del mismo tipo (longitud con longitud, área con área, volumen con volumen) *a*, debía contener

[38] Paul, Karlson. *La magia de los números.*(Madrid: Labor, 1960) 121

un número entero de veces a la magnitud *b*, lo que las hacía conmensurables, es decir, $\sqrt{2}$, "[…] no se puede expresar como una proporción entre dos enteros — o, para decirlo, como los griegos generalmente lo hicieron, en términos geométricos, el hecho de que la diagonal de un cuadrado no es conmensurable con su lado"[39].

Por lo cual se descubrió que, dadas dos longitudes no siempre pueden ser divisoras de una longitud común, demostrando que la diagonal de un cuadrado cuyos lados midan uno es inconmensurable y por lo tanto irracional, "claramente la teoría numérica pitagórica y las matemáticas deductivas se encuentran en dos planos diferentes; 'todas las cosas son números' nunca significa "todas las magnitudes son conmensurables"[40]. Este descubrimiento provocó una profunda consternación en los pitagóricos, ¿Cómo puede ser que √2 dependa de números enteros y no pueda ser expresada como razón de dos de ellos? No existe una razón que pueda expresarse mediante números enteros, no existe una medida común para el lado y la diagonal del triángulo recto, por lo tanto, ambas magnitudes (lado y diagonal) eran imposibles de medir una con otra, a esa imposibilidad empírica y numérica le llamaron falto de razón o inconmensurable. "Cuando se habla de irracionalidad o inconmensurabilidad, hacemos referencia a una cualidad especial de ciertas magnitudes en su relación recíproca, y hablamos incluso de una clase especial de números irracionales"[41], sin embargo, cuando los pitagóricos usaron ese término significó que no había proporción[42].

Para ver cómo se puede establecer la inconmensurabilidad lineal de dos segmentos de línea, recordemos la Definición X. 1 de los Elementos:

> Se llaman magnitudes conmensurables aquellas que se miden con la misma medida, e inconmensurables aquellas de las que no es posible que haya medida común[43].

Los griegos perseveraron en el estilo de geometría también típico entre los egipcios y los babilonios; obtener áreas y volúmenes a partir de las longitudes de los lados, expresar el

[39] G.E.R. Lloyd. *Early Greek science, Thales to Aristotle. (*Londres: Chatto and windus, 1970)32-33
[40] Walter, Burkert. *Lore and science in ancient pythagoreanism* (Estados Unidos: Harvard university press, 1972) 463
[41] Kurt, Von Fritz. *Opo. Sit.* P. 228
[42] Ibid.228
[43] Euclides, *Elementos X-XIII*: Libro quinto (Madrid: Gredos, 1994) 9

diámetro de un cuadrado del lado dado, resolver los lados de un rectángulo cuya área y perímetro, etc[44]. Los egipcios y los babilonios trabajaban con magnitudes inconmensurables, áreas y volúmenes con las longitudes del triángulo rectángulo cuyos lados miden uno, es decir, no tenían ningún problema si el resultado de un cálculo o medición daba como resultado un número que no fuera entero. "Los matemáticos babilonios aceptaban como a ese problema la fracción 7/5 porque, expresado en notación contemporánea, $(7/5)^2= 49/25= 1.96$"[45], que es muy cercano a 2, sin embargo para los griegos no es 2. En el mundo griego, 'número', siempre significaba 'entero positivo', los griegos nunca introdujeron notación para distinguir los números no enteros como $\sqrt{2}$, esta fue llamada lado del cuadrado 2[46]. En términos puramente aritméticos el problema del valor inconmensurable, y el lado de un cuadrado reducido a la imposible de encontrar un número exacto, "los pitagóricos llamaron a tales números irracionales y se negaron a considerarlos como números, incluso no aparecen en Euclides"[47], "[…] ya que estos nunca valieron en Grecia como <<números>>, ni nunca tuvieron los griegos ningún símbolo para estas magnitudes."[48] El abismo entre lo discreto y lo continuo, entre finito e infinito que ha creado la aparición del inconmensurable obliga a renunciar a medir siempre con exactitud y privilegiar la geometría sobre la aritmética, lo cual, generó la primera crisis matemática de la antigüedad, este fue el primer paso para las demostraciones matemáticas, lo cual representó una de las mayores aportaciones de los griegos a la ciencia occidental

Los pitagóricos establecieron la posibilidad de aprehender la naturaleza por medio de magnitudes geométricas reduciéndolos a números y medidas. Su "tragedia" fue haber descubierto la existencia de magnitudes inconmensurables, ya que podría transformar la suposición filosófica de que los números entero son la base de todas las cosas[49]. El descubrimiento de magnitudes inconmensurables exigía una revisión de los fundamentos de la matemática pitagórica porque las magnitudes geométricas no podían ser medidas mediante números, ya que los pitagóricos concebían al número como entero y no como números que

[44] W. Richard, Knorr. *The evolution of the Euclidean Elements.*(Boston: D. Reidel Publishing Company,1975) 25
[45] Godfrey, Guillaumin. *Génesis de la medición celeste*. (México: Tirant humanidades, 2016) 202
[46] W. Richard, Knorr. *Opo. Sit.* P. 10
[47] John. J. Roche. *The mathematics of measurement, a critical history.* (Londres: The atholone press. 1998) 19
[48] Paul, Karlson. *Opo. Sit.* P.136
[49] W. Richard, Knorr. *Opo. Sit.* P. 24

no se pueden escribir en fracción como el resultado de la raíz de dos, por lo que se había descubierto que las magnitudes geométricas no podían ser medidas con números lo que les dio un carácter discontinuo.

Pero toda la teoría de la proporción de Pitágoras y figuras similares se construyó sobre la suposición aparentemente obvia de que dos segmentos de línea son conmensurables, es decir, que tienen alguna unidad de medida común. El descubrimiento de la inconmensurabilidad marca un momento clave en la historia de la geometría y de la ciencia "la perfección de la forma geométrica, las definiciones precisas y los postulados básicos, la exploración de muchas figuras y relaciones geométricas, una rigurosa demostración deductiva y una organización sistemática y coherente ― todo desarrollado rápidamente durante este período"[50], se emprendió un estudio no sólo para resolver el problema sino más bien para formular materiales métricos de una manera compatible con las demandas de los estudios de la teoría de la inconmensurabilidad[51]. Su aparición imprimió un cambio de rumbo en el conocimiento geométrico ya que esa imposibilidad de calcular de forma aritmética exacta la diagonal del cuadrado en función del lado, implicaría que había que hacer algo distinto. Renunciando a la exactitud aritmética, más adelante se replantearían el problema ya que la incalculabilidad aparecería nuevamente en otros casos de la geometría como el que se dio a través de la sección aurea entre diagonal y lado del pentágono regular habría sido $\sqrt{5}$.[52]

El descubrimiento de los inconmensurables fue de suma importancia principalmente porque "[…] permite adquirir una visión más profunda de la forma en que los griegos sentaron las bases de la ciencia de las matemáticas y en las cualidades especiales que les permitieron hacer un descubrimiento que sus predecesores babilónicos y egipcios con todos sus métodos altamente desarrollados y complicados no habían hecho en muchos siglos de estudios matemáticos"[53]. Este descubrimiento fue la primera crisis conocida en los fundamentos de las matemáticas, y no se resolvió fácil ni rápidamente. "Finalmente, alrededor del 370 a.C, el brillante matemático griego Eudoxo, discípulo de Platón y del dotado pitagórico Archytas, resolvió inteligentemente el 'escándalo' formulando una

[50] John. J. Roche. *Opo. Sit. P.* 34
[51] W. Richard, Knorr. *Opo. Sit.* P. 40
[52] Pedro Miguel Gonzales Urbaneja, "La solución de Eudoxo a la crisis de los inconmensurables". Sigma, 33. (Diciembre, 2008) 105
[53] Kurt, Von Fritz. *Opo. Sit.* P. 231

definición de proporción, o igualdad de dos proporciones, que es completamente independiente de la conmensurabilidad o inconmensurabilidad de las magnitudes involucradas" [54].

1.2. La teoría de la proporción y el método de exhaucion de Eudoxo

Hay algunos aspectos de la geometría griega que resultaron fundamentales para el desarrollo de la matemática, uno de ellos es el enfoque teórico abstracto y otro fue la búsqueda de los principios fundamentales del universo[55]. Como hecho fundamental está el descubrimiento de los inconmensurables por los pitagóricos, el cual, requirió un concepto completamente nuevo de relación y proporción. La solución temprana a este problema fue hacer que el resultado del proceso de sustracción mutua sea el criterio de proporcionalidad o *antifairesis.*

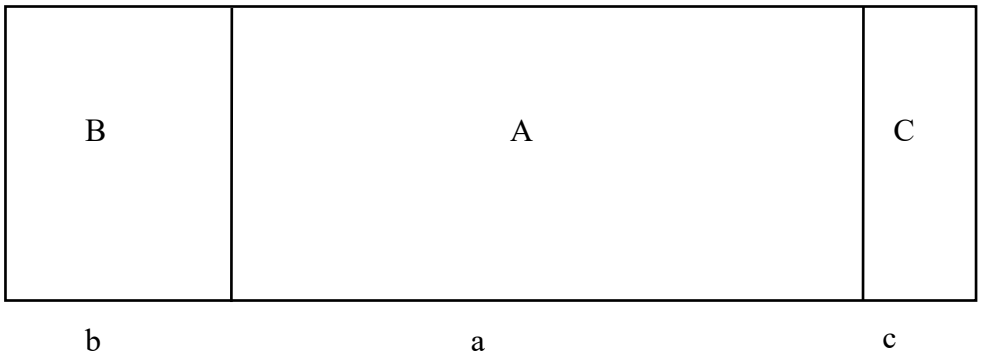
El método de *antifairesis* o también llamado, método de la "sustracción recíproca (anthyphairein)"[56] se aplicó a dos conjuntos de enteros determinados midiendo dos magnitudes con la mayor medida común encontrada por sustracción mutua, es decir, "en lugar de hacer que el resultado del proceso de substracción mutua sea el criterio de proporcionalidad, es decir, los dos conjuntos de enteros determinados midiendo dos magnitudes conmensurables con la mayor medida común encontrada por sustracción mutua, usaron el carácter del proceso de sustracción mutua como el criterio de proporcionalidad."[57]. Dados dos números, A y B, siendo B menor que A, B se resta de A tantas veces hasta que el resultado C sea menor a B; luego, se repite este mismo procedimiento utilizando B y C. El procedimiento se repite una y otra vez hasta encontrar un máximo común divisor.[58]

Pero si la aplicación del método de *antifairesis* se hubiera limitado a este tipo de casos, habría sido de poca utilidad, el caso en donde es más fácil probar la base de esta nueva

[54] James, Gow. *Opo. Sit.* P. 54
[55] Me refiero a que los pitagóricos pensaban que los números eran la esencia de todas las cosas que existen en el universo.
[56] Godfrey, Guillaumin. *Opo. Sit.* P. 214
[57] Kurt, Von Fritz. *Opo. Sit.* P. 229
[58] Paul Karlson. *Opo. Sit.* P. 155

definición es en la proposición de que dos rectángulos paralelogramos de la misma altura está en proporción con sus bases:

Figura 6.



En esta figura[59] se puede ver que si b se puede restar 5 veces de a, B también se puede restar 5 veces de A, y si el resto c se puede restar 8 veces de b, también puede restar C de B, y así sucesivamente. Si se aplica la *antafairesis* a la geometría los pitagóricos podrían pensar que habían encontrado el método indicado para confirmar la creencia de que si dos magnitudes son conmensurables, entonces cualquier relación es "expresable" como la relación de dos números. Consecuentemente, cualquier longitud, área, volumen son expresables por números. Sin embargo, si se aplica este método a magnitudes, por ejemplo, si d y l son la diagonal y el lado de un triángulo recto cuyas medidas de los lados son 1 se tiene en notación moderna lo siguiente:

$(d,l) \rightarrow (d-l,l)$

$(l,d-l) \rightarrow (2l-d,d-1) = (d,l)$[60]

Sustituyendo los valores en d y l tenemos:

$(2,1) \rightarrow (2-1,1)$

[59] Kurt, Von Fritz. *Opo. Sit.* P. 230

[60] Antonio M. Oller, José María Gairín, "La génesis de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización", *Relime*, núm. 16 (Noviembre 2013) 323

(1,2-1)→ (4-2, 2-1) = (2-1)

En el caso de aplicar el método de *antifairesis* a los valores de la diagonal y el lado del cuadrado cuyos lados midan 1, no hay un cálculo finito, pues "en definitiva se tiene que la razón d : l vendría dada por la sucesión (infinita y periódica) {1,2,2…}"[61]. La existencia de líneas cuya longitud o relación es inexpresable por números entero en las cuales, sus relaciones solo son expresables cuando son conmensurables era la razón por lo que la teoría de las proporciones pitagóricas sólo era aplicable para este tipo de magnitudes. El sentido de la definición es, que dos conjuntos de magnitudes son proporcionales si, en cada caso el proceso de sustracción mutua se encuentra un número máximo que los divida, sin embargo en este caso no es así, la serie toma un proceso exacto en cada paso sin un límite.

Es aquí cuando surge la necesidad de una nueva teoría de las proporciones que fuera aplicable para magnitudes conmensurables e inconmensurables, el cual, será resuelto de una manera más ingeniosa por Eudoxo de Cnido (400 - 350 a.C.) quien es uno de los matemáticos más importantes de la Grecia del siglo III, a.C. Eudoxo resolvió inteligentemente el "escándalo" lógico descubierto por los pitagóricos formulando una definición de proporción, o igualdad de dos proporciones, que es completamente independiente de la conmensurabilidad o inconmensurabilidad de las magnitudes involucradas en términos geométricos dejando de lado la aritmética.

La teoría de las proporciones de Eudoxo también llamada método de exhaucion –que ahora es la base del cálculo integral, permitió a los griegos resolver muchos problemas que antes estaban fuera de su alcance, dicha teoría la conocemos a través del libro V de los Elementos de Euclides (330 a. C. -275 a. C.), del cual, explicaré las definiciones más importantes para la continuación de éste estudio. La idea esencial detrás del método de exhaucion es que no es un método para encontrar una respuesta exacta, en su lugar, describe un criterio general para que una formula o proceso se aproxime con éxito a la respuesta que deseamos. Eudoxo opera con magnitudes que pueden hacerse más pequeñas que otras tanto como se quiera, lo importante del método es que garantiza que la diferencia entre la respuesta

[61] Antonio M. Oller, José María Gairín. *Opo. Sit.* P. 324

exacta y nuestra respuesta aproximada será tan pequeña como queramos siempre que repitamos nuestro proceso con la suficiente frecuencia.

El problema para los pitagóricos era que no se podía expresar la razón entre dos cantidades inconmensurables, para ello Eudoxo elimina esa dificultad definiendo la igualdad de razones, lo cual sustituiría todas las teorías previas sobre razones y proporciones.[62] Como lo inexpresable era la razón entre dos cantidades inconmensurables, Eudoxo elimina la dificultad definiendo la igualdad de razones de la siguiente forma:

> Se dice que guardan razón si las magnitudes que, al multiplicarse, pueden exceder una a otra.[63] (Definición V.4)

> Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda, que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera exceden a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente.[64](Definición V.5)

Primero con la definición número 4 para explicar lo que es una razón, pues aunque no define explícitamente lo que es una razón, queda entendido que se trata de la relación entre dos magnitudes, no entre dos números como lo habrían defendido los pitagóricos, pues ellos estaban muy apegados a su filosofía que explicaba que todas las relaciones en el universo estaban dadas por números enteros. Luego con la definición 5 se elimina la problemática de la inconmensurabilidad, esta última es aplicable para cualquier tipo de magnitud, conmensurable o inconmensurable. Las magnitudes consideradas por Eudoxo son aquellas que, siendo homogéneas[65] (que no necesariamente sean magnitudes del mismo tipo, ya que los griegos comparaban magnitudes de la misma especie, por ejemplo, áreas con áreas,

[62] Godfrey, Guillaumin. *Opo. Sit.* P. 214-223
[63] Euclides, *Elementos*: Libro quinto (Madrid: Gredos, 1994) 10
[64] Euclides, *Elementos*: Libro quinto (Madrid: Gredos, 1994) 11-12
[65] Esto se explica en la definición 3 del mismo libro V de los Elementos. De una forma distinta, Salomon Bochner explica que "…,las longitudes eran un tipo de magnitud, las áreas otro, los pesos otro, etc." (Salomon Bochner,"*The Role of the mathematics in the rise of science"*. (Princeton: Princeton University Press, 1981) 210

volúmenes con volúmenes, longitudes con longitudes) pueden guardar razón entre sí y satisfacer que si *a* es una magnitud menor que otra magnitud *b* entonces hay un número *n* que *na*>*b*, esta relación se representa de la siguiente manera:

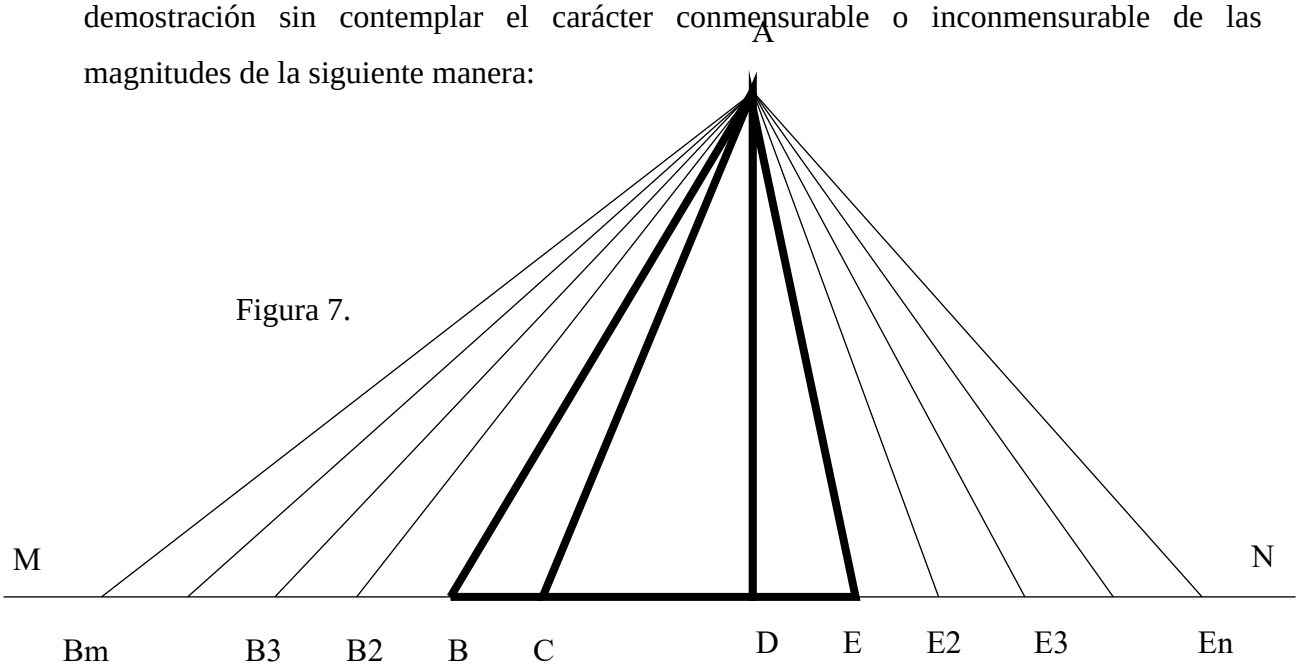
Sean m y n números enteros positivos, entonces a:b :: c:d siempre que se cumplan las siguientes situaciones:

a) na > mb y nc > md
b) na = mb y nc = md
c) na < mb y nc < md

Según esta relación, se puede saber la medida de una magnitud que está en razón con las otras, aún sin saber cuál es su medida siempre que se cumplan las condiciones de a), b) o c), y, de acuerdo con la definición 4, se puede buscar razón entre dos longitudes por ejemplo, dos áreas o dos volúmenes, ya que, según esta, sólo hay que tomar una de ellas y agregarla a sí misma las veces suficientes para que sobrepase otra área dada. Pero si dada una longitud y un área, sin importar las veces que se agregue la longitud a sí misma, nunca se podrá pasar el área dada en su medida, por lo tanto, no se pueden comparar.

Ahora con esta nueva definición de proporcionalidad podemos hacer una demostración sin contemplar el carácter conmensurable o inconmensurable de las magnitudes de la siguiente manera:

Figura 7.



En este diagrama[66] "sobre la recta CB, tracemos a partir de B, m-1 segmentos iguales a CB y unamos los puntos de división B2,B3,...,Bm con el vértice A. De forma similar tracemos a partir de E n-1 segmentos iguales a DE y unamos los puntos de división E2,E3,...,En con el vértice A. Se tiene BmC = m(BC), ABmC = m(ABC), EnD = n(ED), AEnD = n(AED)" [67]. De acuerdo a la proporción de Eudoxo se tiene ABC/ADE = BC/DE.

De acuerdo con la definición 4, podremos buscar la razón entre dos líneas, o entre dos áreas, o entre dos volúmenes, ya que, por ejemplo, dadas dos áreas cualesquiera, bastará tomar una de ellas y agregarla a sí misma un número suficiente de veces, para que con seguridad sobrepasemos en medida la otra área dada. Por el contrario, dada una línea, digamos una recta, y un área, no importa cuántas veces agreguemos la primera a sí misma, por eso es que no tenía sentido comparar magnitudes diferentes, nunca podremos pasar el área dada en su medida, y, por lo que, no hay lugar de comparación. Por tanto no tiene sentido hablar de la razón entre una línea y un área.[68] "este tratamiento complejo de una relación puede modernizarse con éxito de modo que la razón de Euclides (por ejemplo, de la circunferencia de un círculo a su diámetro) se traduce como el concepto moderno de un "número real" (por ejemplo, ahora pensamos en la proporción como un número, y damos por sentado que puede escribirse como un decimal en tantos lugares como deseemos)"[69].

Toda comparación entre magnitudes con la teoría de las proporciones de Eudoxo únicamente se da entre magnitudes conmensurables e inconmensurables, en las definiciones de IV y V de los Elementos de Euclides jamás se menciona que la comparación entre magnitudes sea de diferente tipo, es decir, longitudes, volumen o áreas. El problema es que los antiguos nunca compararon magnitudes de distinta índole, "por ejemplo, las longitudes eran un tipo de magnitud, las áreas eran otro tipo de magnitud, los pesos eran todavía otro tipo de magnitud, etc." [70], nunca relacionaron en una proporción un área con un volumen, conflicto que llevo a la "falta de maduración" de un concepto, en este caso, "una falta de

[66] Pedro Miguel Gonzales Urbaneja, *Opo. Sit.* P. 115
[67] Ibid. 111
[68] Salomon, Bochner. *Opo. Sit.* P. 211
[69]Luke, Hodkin. *A history of mathematics from Mesopotamia to modernity.* (E.U.: Oxford University Press 2005) 48
[70] Salomon, Bochner. *Opo. Sit.* P. 210

maduración del concepto de magnitud que para entonces era puramente geométrico. Dicha distinción se mantendría hasta el siglo XVII"[71].

El método de exhaucion de Eudoxo fue explotado mayormente por Arquímedes (287 a.C. – 212 a.C.). Arquímedes escribió obras como *Sobres las esferas y el cilindro y La cuadratura de la parábola.* En dichas obras, trata sobre el cálculo de áreas y volúmenes utilizando el método de exhaucion[72].

1.3. La geometría expresada en los Elementos de Euclides

La geometría Euclidiana es una potente herramienta de importante utilidad para el desarrollo de algunos campos de conocimiento, como las matemáticas del 200 a.C. y posteriormente en el siglo XIV. Euclides prácticamente no escribió ningún libro de los que se encuentran en sus Elementos, se considera que dicho libro es sólo una recopilación de los conocimientos matemáticos que se tenían hasta su tiempo[73]. Sin embargo, el logro de Euclides no es por su aportación original a la geometría sino por su gran capacidad de síntesis.

La matemática griega después de la crisis pitagórica y de la solución de Eudoxo se había vuelto sumamente sofisticada pues había adquirido un carácter demostrativo, los Elementos se convirtieron en el modelo por el cual organizar y exponer los resultados de las investigaciones geométricas altamente desarrolladas como un sistema axiomático-deductivo. Los antecedentes de Euclides marcan las bases matemáticas de la cuantificación y de la medición; tradicionalmente se ha considerado que medir es asignar un número a una magnitud, pero a lo largo de la historia de la ciencia se puede observar que la medición en muchos casos ha implicado mucho más que sólo cuantificar una magnitud, si bien es este el objetivo final de la medición en el proceso para obtener el número correcto que se debe asignar a una magnitud, existen transformaciones conceptuales e instrumentales interesantes que reflejan la complejidad y riqueza cognitiva dentro de un proceso de medición. En la antigua Grecia todos los problemas de medición se reducían a términos geométricos, de esta

[71] A.C. Crombie. Quantification in Medieval Physics. *Isis*, Vol. 52, No. 2 (Jun., 1961), pp. 143-160
[72] W. Richard, Knorr. The origins of deductive method. En *Classics in the history of greek mathematics.* Boston Studies in philosophy of science Vol. 240. Editado por Jean Christianidis. 2004. 101
[73] Paul, Karlson. *Opo. Sit.* P. 139

manera convirtieron una geometría teórica en práctica, en este sentido, "Arquímedes es especialmente estimado por la elegancia de sus pruebas matemáticas" [74].

La geometría euclidiana fue de vital importancia por la gran influencia que tuvo en el desarrollo y aplicación del método de exhaucion por algunos matemáticos, pues representó un modelo de presentación para otros textos matemáticos y físicos como los textos de Arquímedes. Los Elementos de Euclides permitieron el manejo y la aplicación de la geometría a problemas de la matemática de la época, como aquellos dirigidos a la demostración de proposiciones sobre áreas y volúmenes de figuras limitadas por línea o superficies, como en el caso del área de un segmento parabólico de Arquímedes y así encontrar nuevas soluciones, para ello "[…]el método de agotamiento de Eudoxo, se aplica en obras de Arquímedes y otros, y puede emplearse fácilmente como la base de una teoría de proporciones completa"[75]. La teoría puede determinar cuándo una razón entre magnitudes es igual o mayor que otra (Euclides V, definición 5 y 7); en el primer caso se habla de proporción: x es a y como z es a w. "Arquímedes añade expresamente el postulado: de dos magnitudes desiguales, la mayor excede a la menor en una cantidad tal que, añadida a sí misma, puede exceder a cualquier magnitud determinada del mismo tipo que las comparadas"[76] (*Sobre el área de un segmento parabólico*).

Esta definición es en esencia la definición 4 del libro V de Euclides, sin embargo la diferencia es que también guarda razón en el mismo sentido con cualquier otra magnitud homogénea:

[74] David. C. Lindberg. *Opo. Sit.* P. 125
[75] W. Richard, Knorr. On the early history og axiomatics: The interaction of mathematics and philosophy in greek antiquity. En *Classics in the history of greek mathematics.* Editado por Jean Christianidis. (E.U.:Springer science+business. 2004) 98
[76] Arquímedes, Método. Introducción por Luis Vega. Alianza Editorial. 26

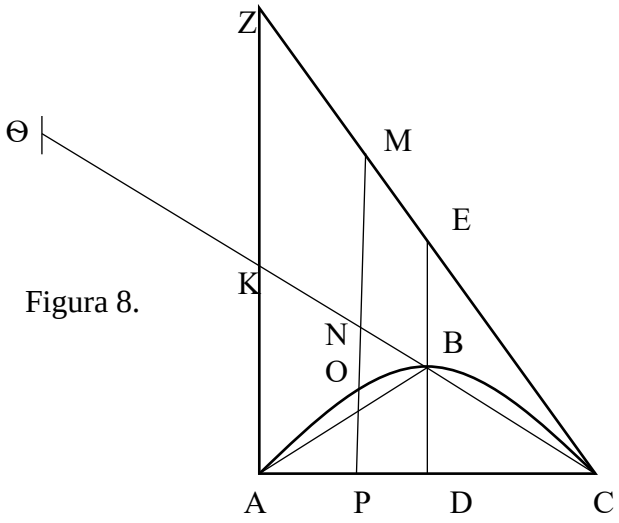


Figura 8.

"Digo que el segmento ABC es cuatro tercios del triángulo AZC. Dado que CBA es una parábola y CZ es tangente a ella, y ZD es una ordenada, EB es igual a BD, porque ZA y MP son paralelas a ED, MN es igual a NP y ZK es igual a KA. Puesto que MP es a PO como CA es a PA y CK es KN como CA es a PA, y CK es igual a K0, entonces MP es a PO como 0K es a KN"[77]. Tal como se demuestra es la definición V de los Elementos de Euclides, misma que equivale al método de exhaucion de Eudoxo, usando la equivalencia de la magnitud buscada con otras que se conocen ya.

Como se aprecia en la figura 8, Arquímedes tuvo grandes contribuciones que cubren el amplio dominio accesible a la matemática de la época utilizando la geometría euclidiana. En sus obras se apegan al método geométrico establecido, sin embargo, el propósito de Arquímedes no fue desarrollar la estructura metodológica de la matemática establecida, sino hacer contribuciones originales y sustantivas, plantearse nuevos problemas y llegar a nuevas vías de solución. Una de estas características podría ser la teoría de las razones y las proporciones entre magnitudes geométricas, las mismas que ya había señalado que usaban en Grecia; áreas, volúmenes y longitudes.

La teoría de las proporciones de Eudoxo permitió a las matemáticas griegas manejar razones de magnitudes geométricas de la misma forma y con la misma finalidad con la que las matemáticas actuales operan en todo tipo de números reales. Hoy en día serían cuestiones a tratar por medio del cálculo infinitesimal, pero los griegos al no tener esta herramienta y

[77] Arquímedes, Método. Area de un segmento parabólico. Alianza Editorial. 40-41

tener limitados conceptos numéricos, no permitían asignar a las figuras geométricas números que midieran sus áreas o sus volúmenes y por tanto tenían que calcular directamente con las figuras que eran tratadas como magnitudes. Dicho de otra forma, los griegos operaban únicamente con magnitudes geométricas, para saber la medida de una magnitud desconocida partían de otra magnitud conocida, como en el caso de la cuadratura de la parábola de la figura 6.

Arquímedes debía encontrar su razón con otra figura previamente conocida como el triángulo. Para determinar la medida de la curva, ésta fue dibujada dentro de un triángulo cuyas magnitudes son conocidas, y las diagonales dentro de la curva se van haciendo cada vez más pequeñas hasta alcanzar una medida aproximada. Es por ello que la teoría de las proporciones en Grecia era bastante sofisticada.

Otra forma en la que se aplicaban no solo el método de exhaucion sino la teoría de las proporciones de la misma forma en que las proporciones de las longitudes de las cuerdas en las frecuencias musicales es la ley de la palanca formulada por Arquímedes[78]. Arquímedes definió el peso específico, es decir, la proporción entre el peso de un cuerpo y su volumen[79].

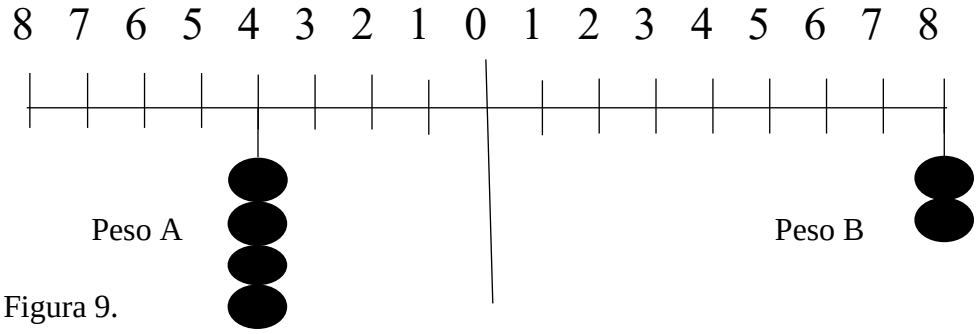


Figura 9.

[78] Mientras que la física moderna comenzaba con la definición de conceptos como velocidad, fuerza, presión, etc., derivadas como mencioné antes, de magnitudes básicas como la longitud, el tiempo y la masa, (Como la ley de la caía de los cuerpos, "aceleración" se deriva de m/s^2) fueron de sustantiva importancia para la comprensión de la naturaleza, de la misma manera los griegos usaban las proporciones y el método de exhaucion como potentes herramientas para la comprensión de la naturaleza.

[79] S. Sambursky. *Opo. Sit.* P. 63

Arquímedes considera magnitudes geométricas que actúan perpendicularmente sobre una barra, para buscar el centro de gravedad entre dos pesos, entre el peso A y el peso B: los pesos de los cuerpos y sus distancias respectivas del punto de apoyo de la barra son magnitudes aditivas, pertenecientes a una relación de equivalencia. "Asimismo postula un principio de simetría: el equilibrio de cualquier palanca de brazos iguales sometidos a pesos iguales".[80] En la figura 7, se representa que las palancas están equilibradas por una relación de proporciones, suponiendo que cada círculo pesa un gramo, en la palanca izquierda se colocan dos gramos y en la derecha cuatro gramos, aunque sus pesos son distintos están en equilibrio porque el peso A es el doble del peso B, el peso A se encuentra en el número cuatro del brazo derecho que representa la mitad del número ocho en el que se colocó el peso B. "Sobre esta base establece que magnitudes conmensurables o inconmensurables se equilibran a distancias inversamente proporcionales a sus respectivos pesos, mediante la reducción de la ley al caso paradigmático del equilibrio entre pesos iguales a distancias iguales"[81].

Roche considera que la falta de unidades internacionales de medida para longitudes y pesos mantenidas con precisión, fue una de las causas por las que la emergencia de la ciencia basada en la medición de esas cantidades no floreció de manera temprana. Los griegos aplicaron razones y proporciones a la naturaleza siempre que fue posible, "[…] ya que éstas son independientes de la elección de las unidades que las miden"[82]. Esta es una de las razones por las que los diagramas que aparecen en los Elementos de Euclides son sumamente abstractos, porque no dependen de objetos físicos, pero son aplicables a estos.

Incluso entonces, para aplicar la geometría a los cuerpos físicos era necesario introducir una simplificación e idealización de la forma y representar por ejemplo el brazo de una palanca equilibrada como una línea y el peso distribuido en ese brazo como una fuerza concentrada en su centro de gravedad, que también es representado como líneas. Utilizando estas estrategias teóricas, la geometría pudo ser aplicada a casi cualquier cosa de la naturaleza que pudiera ser expresada con líneas. Se puede decir con ello que la teoría de las razones y las proporciones griegas es un inicio de la cuantificación de la naturaleza, pues la comparación entre magnitudes homogéneas del mismo tipo más tarde se convertiría en una

[80] Arquímedes, Método, Introducción de Luis Vega p. 16
[81] Ibid.
[82] John J. Roche. *The mathematics of measurement, a critical history.* (Londres: The atholone press, 1998) 26

comparación de proporciones de distinta especie, como entre dos distancias y dos tiempos por ejemplo. Lo cual es el idioma principal para establecer leyes cuantitativas.

Estos dos ejemplos del uso de las proporciones y del método de exhaucion muestran cómo se solucionaban los problemas de medición antiguamente usando magnitudes geométricas, sin embargo, dicho método no solo se usó para fines mecánicos o para determinar áreas y volúmenes, sino también se aplicó en la óptica y la astronomía. Cabe mencionar que los griegos nunca definieron lo que es una magnitud, sin embargo Aristóteles denomina magnitud a aquello que se divide en partes continuas:

> Se denomina «parte», en un sentido, aquello en que puede dividirse, del modo que sea, la cantidad. (Siempre se dice, en efecto, que lo sustraído de la cantidad, en tanto que cantidad, es una parte de ella, por ejemplo, en cierto sentido se dice que dos son una parte de tres), si bien, en otro sentido, solamente (se llaman partes) aquéllas que sirven de medida para la cosa; por eso que dice que dos son una parte de tres en cierto sentido, pero en cierto sentido no[83].

Con Arquímedes se puede considerar que se inaugura un nuevo tipo de relación entre la física y las matemáticas, esto desde una interpretación moderna, ya que se consideraba a la física una disciplina separada de la matemática como lo menciona Aristóteles:

> Al igual que el matemático estudia nociones obtenidas por abstracción (en efecto, estudia suprimiendo todos los aspectos sensibles, como el peso y la ligereza, la dureza y lo contrario de ésta, y también el calor y el frio, y las demás contrareidades sensibles, mientras que deja solamente lo cualitativo y lo continuo, sea una o en dos o en tres dimensiones, así como las propiedades que poseen en tanto que son cantidades y magnitudes continuas, y no las estudia bajo ningún otro aspecto[84].

[83] Aristóteles, Metafísica, Libro quinto, cap. 25, 1023^{b}
[84] Aristóteles, Metafísica, XI, 1061^{a} 30-35.

Los puntos, líneas y superficies eran entendidas como formas geométricas, por el contrario, el peso, la ligereza, la dureza, etc., eran consideradas como cualidades de los cuerpos. Este fragmento de Aristóteles apuntó a que había una tradición de pensamiento matemático cuyo interés estaba solo en las propiedades geométricas de los objetos. Sin embargo, con Arquímedes se demuestra que la geometría practica antigua era en gran parte una geometría métrica, es decir, que los griegos midieron con ella áreas, distancias, volúmenes numéricamente con la aplicación del conocimiento geométrico.

Lo crucial es que, a pesar de no tener noción para definir los ahora llamados números irracionales, "los griegos nunca crearon un concepto para definir números reales ni tampoco para definir claramente lo que es una magnitud"[85]. Los griegos tenían el cálculo de relaciones y proporciones que podían aplicar libremente. Pero el cálculo no tenía un dinamismo de evolución. La longitud es una línea recta L, el área es una longitud multiplicada por otra, o sea L x L y el volumen es una longitud multiplicada por otras dos, o sea L x L x L. Esto nos muestra su relación, sin embargo, nadie pensó acerca de ellos o extendió estos productos a otras magnitudes, sin embargo, este problema representó la primera fase del desarrollo para la matemática y la ciencia de hoy. Es difícil exagerar su importancia para las ciencias exactas como la física, ya que la geometría griega proporciona una base lógica para el estudio de muchos tipos de relación cuantitativa, no simplemente aquellos que eran geométricos, como la temperatura y el movimiento.

[85] John. J. Roche. *The mathematics of measurement, a critical history.* (Londres: The atholone press. 1998) 210

Capítulo 2

La física de Aristóteles como precursora de la física moderna.

Aristóteles edificó su cosmología en el curso de una refutación de aquellos filósofos presocráticos que consideraban los fenómenos naturales como producto de la «necesidad». Dicha necesidad era una necesidad de orden, es decir, las cosas en la naturaleza estaban ordenadas necesariamente bajo el fin para el que fueron determinadas, para Aristóteles la regular recurrencia de los fenómenos naturales es manifestación de esa necesidad, esta misma necesidad opera en las cosas naturales, por ejemplo, para que haya cosecha es necesaria la lluvia, para que un árbol dé manzanas tiene que haber crecido de una semilla de manzana. En el segundo libro de su Física Aristóteles dice "Así, por ser una línea recta lo que es, es necesario que los ángulos de un triángulo sean iguales a dos rectos, pero no a la inversa; porque si sus ángulos no fuesen iguales a dos rectos la línea no sería recta"[86].

Así, dondequiera que las cosas resultan ser justo como deberían ser, es como si hubieran sido hechas con un fin, esas partes sobreviven, organizándose de forma adecuada, mientras que las que se formaron de modo diferente perecieron y continúan pereciendo. Así, creía que las cosas tienden a un fin, y que esto último no puede ser fruto de una coincidencia o de la espontaneidad, de ello se sigue que deben tender a un cierto fin y que todas las cosas lo son por naturaleza, de ahí que piense que la naturaleza opera con una necesidad de orden. Por tanto, la acción que tiende a un fin está presente en todas las cosas que llegan a ser y son por naturaleza.

Aristóteles forma parte de los principales artífices del pensamiento científico moderno[87] ya que en la antigüedad tuvo "la contribución más importante para la visión del cosmos"[88]. La interpretación de la naturaleza aristotélica es una de las principales concepciones del mundo en la historia de la ciencia, siendo seguida por la de Newton, la cual se vio seguida por la relatividad y la física cuántica. Esto se debe a que "en el siglo IV a. C.

[86] Aristóteles, Física, Libro II, cap. 9. 200ª 15-18
[87] Junto a Platón, Demócrito, Epicuro, etc.
[88] S. Sambursky. *El mundo físico a finales de la antigüedad.* (Madrid: Alianza, 1962) 12.

sólo Aristóteles había producido un extenso y coherente compendio de estudios en las ciencias naturales, así como en el método lógico y la ética, la metafísica, la crítica literaria y la teoría política."[89]. Aristóteles creó una distinción entre ciencias autónomas y disciplinas independientes, dentro de esta distinción está la física aristotélica.

La física en la antigua Grecia no tenía nada que ver con la denominación de una ciencia especial, como lo sería la ciencia moderna de Galileo, sino como una disciplina que lo comprendía todo. A diferencia de la ciencia moderna, la ciencia antigua no pretendía explicar detalladamente los mecanismos que rigen el comportamiento de la naturaleza. De esta forma, a diferencia de la física moderna, la física antigua o filosofía natural – establecida por Aristóteles – era una física basada en los cambios en las propiedades de la materia. Para Aristóteles la naturaleza es aquel principio que rige el desarrollo y desenvolvimiento de los seres en el mundo, por eso es que su física es una ciencia apartada de la matemática.

La física aristotélica fue una ciencia de carácter cualitativo basada en el cambio. Sobre esta base, Aristóteles elaboró su teoría del movimiento de los cuerpos y dentro de ésta los conceptos que la acompañan, como el de lugar o el de tiempo, sin embargo, ninguno de estos conceptos elaborado desde un punto de vista cuantitativo. La doctrina física de Aristóteles fue aceptada como dogma durante la Edad Media gracias a que a mitad del siglo XII y siglo XIII se mezclaron los principios básicos de la filosofía de Aristóteles con las concepciones religiosas del universo de esa época, "transformando así el conjunto de sus conceptos físicos y cosmológicos en dogma de fe"[90].

La influencia de Aristóteles fue tan grande que sus obras como la metafísica, meteorología y la física pasaron a ser temas de estudio obligatorio pues eran la base de la concepción de la naturaleza, para entonces, la ciencia aristotélica dominó la interpretación de los fenómenos físicos. Esta es una de las razones por las que este capítulo está dedicado a la física aristotélica, ya que ésta se centró principalmente en el estudio del movimiento de los cuerpos de forma cualitativa, dicha concepción del movimiento sería refutada siglos más tarde como explicaré en el capítulo siguiente. El objetivo de esta segunda parte es el de

[89] Richard. C, Dales. *The scientific achievement of middle ages.* (Pensylvania: University of Pensylvania press, 1994) -8
[90] David, C. Lindberg. *Los inicios de la ciencia occidenta*l. (Barcelona:Paidos, 1992) 260 -276

explicar por qué, a pesar de que la matemática en su tiempo había desarrollado un método de medición por proporciones geométricas, Aristóteles no lo usa para explicar su teoría del movimiento local de forma cuantitativa haciendo una distinción entre física y matemáticas como dos formas de investigación distintas. Todo esto, para entender la siguiente fase del desarrollo de la física en la Edad Media, el paso de las cualidades a las magnitudes.

2.1. Distinción entre la física y las matemáticas

"Aristóteles en la Física (*physis*) discute la naturaleza como territorio de todos los cambios, de los cuales, el movimiento es una forma"[91] por lo que ésta era una ciencia omnicomprensiva, es decir, estudiaba todas las cosas naturales que existen en el universo: "los astros, la materia inerte, las plantas, los animales y el hombre"[92]. Distinguió entre las cosas que son por naturaleza y las cosas que son por otras causas, entendiendo por otras causas, las cosas que son hechas mediante la *techné*[93], estas se distinguen de las cosas que son por naturaleza, porque estas últimas tienen un principio natural de cambio interno[94], los objetos producidos artificialmente son únicamente receptores de influencias de organismos complejos como los hombres, es decir, son objetos hechos por el hombre, como una cama o una silla. Entonces Aristóteles se interesa por los principios de cambio que resultan ser los principios de la naturaleza, sin embargo, no explica qué es la naturaleza, Falcon (2005, p.24) supone que "Aristóteles se basa provisionalmente en la forma en que la naturaleza, fue entendida por sus contemporáneos y predecesores, a quienes se refiere con el título de *physikoi"*[95]. En esta tradición tener una determinada naturaleza no es meramente ser algo u

[91] Ido, Yavetz. *Bodies and Media On the Motion of Inanimate Objects in Aristotle's Physics and On the Heavens*. (New York: Springer, 2015) VII
[92] Aristoteles, Física, Introducción por Guillermo R. De Echandía, P. 10
[93] Trabajos hechos con las manos, producto del hombre. Para Aristóteles, *techné* se contrasta con la naturaleza (physis), ya que la fuente de cambio para un producto de la *techné* es externa a la que se produce, pero la fuente del cambio para una producción natural está dentro de lo que cambia. Historical dictionary of ancient Greek Philosphy. Antony Creus, (Toronto,The Scarecrow Press, Inc., 2007) 258-259
[94] Aristoteles, Fisica libro II, Capitulo 9 192b, 10-23
[95] Filósofos dela naturaleza, como Empedocles, Anaxagoras, y Democrito. Historical dictionary of ancient Greek Philosphy. Antony Creus, (Toronto,The Scarecrow Press, Inc., 2007) 203-204

otro, sino más bien convertirse en algo u otro (bajo ciertas circunstancias[96]). "En esta tradición, el estudio de todo el mundo natural se realizó bajo el supuesto de que una cosa se convierte en lo que es (nuevamente, bajo ciertas circunstancias), y que nada viene a ser de lo que no es[97]".

La idea de naturaleza, era la idea de un mundo ordenado en el que las cosas se comportaban de una manera predecible, esto porque según Aristóteles, cada cosa de la naturaleza tiene un atributo que hace que cada objeto se comporte de la manera en que acostumbra[98]. Por esta razón es que una bellota se convierte en árbol, una roca cae, un perro ladra, etc., debido a su naturaleza. Aristóteles estudia la naturaleza desde un punto de vista biológico, esto es, estudia cada objeto natural desde la substancia como un todo[99], dicha sustancia está sujeta a cambios llamados accidentes, dichos accidentes son cualitativos, es decir, una alteración de la sustancia.

Aristóteles distinguió entre cantidades y cualidades. Ejemplos de cantidades son números, líneas, superficies, cuerpos, tiempo y lugar, mientras que ejemplos de cualidades son blancura, pesadez, salud, calor. Según Aristóteles, las cantidades admiten igualdad y desigualdad, pero no grados. Las cualidades, por el contrario, no admiten la igualdad o la desigualdad, pero admiten grados[100].

Aristóteles no especificó claramente si los grados de cualidades, como el peso, corresponden a cualidades distintas, o si la misma cualidad, el peso por ejemplo, era capaz de diferentes intensidades al igual que muchas otras cualidades como la blancura o la temperatura, sin embargo, nunca pensaron en medir los grados de intensidad. Por otro lado están las cantidades, las cantidades no son sustancias; las cantidades son uno de los accidentes

[96] Para que una cosa se convierta en lo que es, deben darse ciertas circunstancias, por ejemplo, para que una bellota se convierta en roble, debe haber condiciones de humedad en la tierra para que la bellota eche raíces, ese enraizamiento es una condición necesaria para la existencia del roble. Gotthelf, Allan. Teology, first principies, and scientific method in Aristotles biology. (Oxford: Oxford University Press, 2012)27

[97] Andrea, Falcon. *Aristotle and the science of nature. (*Cambridge, Nueva York: Cambridge University Press, 2005) 24

[98] David, C. Lindberg. *Opo. Sit. P. 81*

[99] G.E.R. Lloyd. *Aristotle, The growth and structure of his thouht.* (Cambridge: Cambridge University Press)72

[100] Studtmann, Paul, "Aristotle's Categories", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2017 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/fall2017/entries/aristotle-categories/>.

de las sustancias que pueblan el universo. Este tema estuvo en el centro de un debate en curso en los siglos XIII y XIV y lo explicaré en el próximo capítulo.

"Las matemáticas son, de acuerdo a Aristóteles, una de las 'tres ciencias teóricas'. Las otras dos son la (I) la teología, la cual es la misma que 'primera filosofía', y (2) la 'filosofía de la naturaleza (φυσικη), que generalmente podemos traducir por física"[101] No se dedicó al estudio de las matemáticas como Eudoxo o Arquímedes, sin embargo, estaba al tanto del conocimiento de su época. La física tuvo como objeto la naturaleza propia de cada cosa, la forma era inseparable de cada cuerpo, excepto lógicamente y aunque las formas de los cuerpos tenían una extensión geométrica, en Aristóteles eran objeto de otra ciencia. En la física II-2, define el carácter de la física al comparar su objetivo con el de las matemáticas y al considerar si estudia la naturaleza como materia o como forma.

Uno de los puntos en los que se unen ambas ciencias, es porque "los cuerpos físicos tienen también superficies, volúmenes, longitudes y puntos, de los cuales se ocupa el matemático" [102] y que además, son géneros de la categoría de cantidad[103], según la cual, es todo aquello que se pueda dividir y medir en partes divisibles. Las matemáticas, sin embargo, estudian las formas pero no como límites de un cuerpo físico, sino que el matemático, hace abstracción de las formas de los objetos en cuestiones de rectas, curvas, líneas, pares e impares, de manera independiente de la materia que los conformen. Por ejemplo, una manzana, un físico estudiará la forma que la hace ser una manzana y que por lo tanto, la distingue de ser algo más, estudia su materia en tanto que tenga el sabor y la textura de una manzana y no de alguna otra fruta.

El matemático además, hace abstracción de toda cosa sensible que conforme a su objeto de estudio, pues de la manzana hace abstracción de la pesadez y la ligereza, de la dureza y la blandura, del calor y el frio, separando solo aquello que es cuantitativo, es decir, únicamente la forma en cuanto es extensión geométrica, además el matemático estudia los números como entes que son inseparables de las cosas sensibles, pero el físico es quien estudia de hecho las cosas sensibles. Una ciencia se define por el género u objeto de estudio, por el tipo de

[101] Tomas, Healt. *Mathematics in Aristotle* (Oxford: At the clarendon press, 1949) 1
[102] Aristóteles, Física, II,2. 193b 20-25
[103] Studtmann, Paul, "Aristotle's Categories", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (2017 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/fall2017/entries/aristotle-categories/>.

propiedades especificables que pertenecen a ella, por lo que, sería imposible probar una cosa usando una ciencia diferente[104]. Aunque admite que será posible, en algunos casos, probar que una propiedad pertenece a un género utilizando un teorema de otra ciencia. En este tipo de casos, se dice que una ciencia es subordinada con otra ciencia como la óptica y la astronomía lo son de la física, pero también de la matemática[105].

La astronomía es subalterna de la física y de la matemática porque "es tarea del propio físico conocer la esencia del sol y de la luna, pero no sus atributos esenciales, en especial porque quienes se ocupan de la naturaleza manifiestan también el interés por la figura de la luna y el sol, e investigan si la tierra y el mundo son esféricos o no"[106], "los estudia como cuerpos que poseen forma y movimiento"[107] y en tanto que son objetos naturales del universo, el astrónomo, por otra parte, no intenta discutir algo de este tipo; pero demuestra la existencia de los cuerpos celestes, discute sus tamaños. El físico y el astrónomo a menudo se proponen a probar el mismo punto por ejemplo, que el sol es de gran tamaño respecto de la tierra, que la luna tiene forma esférica, pero no proceden en demostrarlo por los mismo métodos.[108] El astrónomo a menudo echa mano de la matemática para hacer sus pruebas geométricas y aritméticas.

La astronomía ocupa una posición especial respecto de la física, pues los objetos matemáticos son en general sin movimiento, como lo curvo, lo recto, el número, etc., la única excepción son los objetos celestes que siempre están en movimiento: "entre las cosas que son estudiadas por las matemáticas son inmóviles, a excepción de las que estudia la astronomía"[109], por lo tanto el físico no es matemático ni el matemático es físico, así como tampoco el astrónomo es físico ni matemático. De esta manera Aristóteles deja claro que la astronomía, la física y la matemática son ciencias completamente independientes con temas

[104] Mendell, Henry, "Aristotle and Mathematics", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2017 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/spr2017/entries/aristotle-mathematics/>.
[105] Tomas, Healt. *Mathematics in Aristotle* (Oxford: At the clarendon press, 1949)11
[106] Aristóteles, Física, Libro II, Capitulo 2. 193b28-30
[107] Tomas, Healt. *Opo. Sit.* P. 13
[108] Ibid. 14
[109] Aristóteles, Metafísica Libro I 989b-32

de estudio distintos. También deja claro que su ciencia de la naturaleza es únicamente de carácter cualitativo.

2.2. La Física aristotélica

La justificación de la física se centra principalmente en la noción de causa[110]. Las primeras líneas de la Física de Aristóteles explican el tipo de investigación que realizó:

> Puesto que en toda investigación sobre cosas que tienen principios, causas y elementos, el saber y la ciencia resultan del conocimiento de estos – ya que sólo creemos conocer una cosa cuando conocemos sus primeras causas y sus primeros principios, e incluso sus elementos -, es evidente que también en la ciencia de la naturaleza tenemos que intentar determinar en primer lugar cuanto se refiere a los principios. [111]

Este pasaje nos dice que el saber científico está basado en conocer las causas y los elementos de la realidad en cuestión, por lo tanto, el objetivo y la justificación de la ciencia natural es revelar las causas responsables de los fenómenos. Aristóteles deja en claro que la ciencia de la naturaleza es el resultado de una búsqueda de los principios explicativos; los principios del cambio, dicho cambio es la característica distintiva del mundo natural. Para la visión de Aristóteles de la física, es básico saber a lo que se refiere con "causa". La noción de causa en Aristóteles responde a una pregunta "por qué (lo cual significa captar la causa primera)"[112] Él cree que todo cambio tiene una causa, el conocimiento (científico o filosófico) es siempre conocimiento por las causas; se conoce algo cuando se conoce su primera causa. Aristóteles distingue cuatro causas: la formal, la material, la eficiente y la final, cada una da razón de cosas distintas, cada una da explicación de algo distinto.

La primera causa es la causa material. Ésta se refiere a los elementos de los que está compuesta una substancia, "una casa, por ejemplo, consiste en ladrillos y maderas dispuestas en una cierta estructura; una estatua consiste en mármol o bronce tallado o moldeado en cierta forma; un animal consiste en tejidos (carne, sangre y el resto) organizados según ciertos

[110] G.E.R. Lloyd- *Early greek science, Thales to Aristotle*. (Londres: Chatto&Windus, 1970) 58
[111] Aristoteles, Física Libro I 184ª-10-16
[112] Ibid. II 194b18-20

principios” [113], en el caso de un árbol seria la madera, etc. Así pues, la causa material sería en referencia a aquello de lo que está compuesto un objeto. Aristóteles señala que hay cosas que suceden por naturaleza y que la materia es uno de los principios del cambio[114]. Sin embargo, la materia por sí sola necesita de una forma que la organice según los principios de su naturaleza.

La causa formal es la responsable de lo que actualmente es una substancia, pues la substancia consiste en dos partes; la materia y la forma, la materia es el material en el que se realiza la forma. La forma, por otro lado es la que organiza algunas cosas de tal manera que el compuesto tiene la forma que suelen tener los objetos de este tipo. Pero la forma no es solo la organización de un trozo de materia, sino también un conjunto de capacidades que permite que el compuesto se comporte de maneras características del objeto que es.

Por esta razón es que la física de Aristóteles estudia ambas, pues las cosas naturales son compuestas de forma y materia. Sin embargo, también es imprescindible estudiar la forma antes que nada, porque la forma es anterior a la materia[115]. Para que la materia exista en realidad, debe tener alguna forma u otra y esta es la que unifica una pieza de materia, la organiza de una manera particular, dota al compuesto de función, y así lo convierte en el tipo de cosa que es. Entonces, la forma es aquello que hace al ser, ser lo que es, determina la manera en que la cosa existe, por ejemplo, en el caso de una cama de madera, la madera es la materia de la cual está hecha, pero no sería una cama sin la forma de cama, la forma de la cama la distingue por ejemplo de una silla que tiene la misma materia, es decir, que también es de madera.

La tercera causa es la eficiente, éste es el motor o estimulo que desencadena el proceso de desarrollo de una cosa. Para Aristóteles cualquier proceso requiere de una causa eficaz, la causa eficiente tiene que ver con lo que ahora asociamos con la idea de “causalidad”[116], la

---

[113] Jonathan, Barnes. *Aristotle: A very short introduction.* (Oxford: Oxford University Press, 2000) 78

[114] Aristóteles, Fisica192b35-193 Es uno de los principios del cambio porque éste sucede por la naturaleza de los elementos que compongan a la materia.

[115] Ibid. II, 193a30-35 y 193b 5. Y así como no diríamos de algo que es conforme al arte, o que es arte, si solo fuera una cama en potencia y no tuviese todavía la forma específica de la cama, tampoco lo diríamos de los constituido por naturaleza, pues lo que es carne o hueso en potencia, ni tiene todavía su propia naturaleza antes de tomar forma específica… mediante la cual decimos que es carne o hueso.

[116] Ferrater Mora- “causalidad” 270

cual, "tiene que ver con la acción de una cosa sobre otra"[117]. Finalmente está la causa final, esta se refiere al objetivo por el cual una cosa es, aquello para lo cual fue hecha. En los casos en los que hay un fin, por él se cumplen los pasos que suceden en serie, antes y después; por lo tanto, "las cosas están hechas de la manera en que su naturaleza dispuso que fuesen hechas de la manera en que están hechas, si nada lo impide" y "es necesario que el semen se genere primero, no el animal directamente[118]".

El objetivo entonces de la ciencia natural es dar cuenta de estas cuatro causas. Para tener conocimiento de una manzana, por ejemplo, debemos tomar en cuenta el material de la cual está hecha, hay que ver su forma, porque una manzana no sólo es forma, sino materia en una forma determinada, hay que dar cuenta de la causa eficiente pues en este caso, la causa eficiente es el árbol de manzanas ligado a su naturaleza, más generalmente, lo que se produce tiene la misma naturaleza que lo que lo produce[119], por ejemplo, un árbol de manzanas sólo dará manzanas y no cualquier otro fruto. Por último la causa final, porque el árbol hizo la manzana con un propósito, el de proporcionar alimento al hombre o, de lo contrario, hacer que de su semilla nazca otro árbol que proporcionará madera o más manzanas. De estas cuatro causas, la causa eficiente se toma como la fuente principal de todo cambio. "La mayor parte de la Física está dedicada al estudio del cambio en sus diferentes formas"[120].

En todo tipo de cambio, hay que considerar al sujeto, la forma y la privación. Para hablar de cambio debemos hablar de substancia, ya que esta permanece en todos los cambios que sufra el sujeto. El cambio es la privación, es decir, el sujeto pasa del no ser al ser. Esto nos lleva a la potencia y el acto.

Las cosas naturales pueden ser en acto y potencia, las cosas en acto significan que están siendo algo, y en potencia es que tienen la capacidad de ser algo, por ejemplo, una semilla es una semilla en acto pero es un árbol en potencia, el árbol es un árbol en acto pero es leña en potencia por un proceso de cambio que sería el proceso de tala del árbol que se transforma en leña. El acto tiene una potencia y ese cambio es el proceso por el cual se

[117] Jonathan, Barnes. *Opo. Sit. P.* 87
[118] Aristoteles, Física Libro I, 199a 8-11 y 199b 7-9
[119] David, Bostock. *Space, time, matter, and form, essays on Aristotle phyics. (Newyork: O*xford university press, 2006)83-85
[120] Jonathan, Barnes. *Opo. Sit. P.* 87

convierte en acto. En todo caso, el cambio no es total, siempre hay algo que permanece a pesar de sus accidentes, lo cuales son cambios que ocurren por la naturaleza de la cosa en cuestión. A partir de estos elementos Aristóteles va a definir el cambio como el acto de lo que está en potencia, es un estado intermedio entre la potencia y el acto[121].

Para Aristóteles los seres están sujetos al cambio por naturaleza propia, ya sean substanciales o accidentales, es decir, todas las cosas tienen una causa de cambios, "todas las cosas tienen en sí mismas un principio de cambio, sea con respecto al lugar o al aumento o a la disminución o a la alteración"[122]. Se plantea este tema y cree que todo lo que está en el mundo está sujeto al cambio, que la naturaleza de las cosas es el paso de un estado a otro, por lo cual, la naturaleza se entiende así, la primera materia sujeto de cada ser, que posee en sí misma el principio de cambio. El cambio es el pasaje de la potencia al acto. Ambas nociones se encuentran en las sustancias, "una sustancia es un compuesto de cierta forma en cierta materia, donde la materia es una potencia (δύναμις) y la forma es acto (έντελέχεια)"[123].

Hay dos tipos de cambio, sustancial y accidental. Toda sustancia está compuesta de materia y forma y a su vez esa materia y esa forma pueden ir variando produciendo nuevas sustancias, la sustancia es lo que existe en sí mismo[124]. El cambio sustancial es un proceso de generación y corrupción, ocurre cuando por ejemplo, se quema un pedazo de papel y se convierte en cenizas. El cambio sustancial se da cuando una sustancia cambia en otra sustancia[125].

El cambio accidental se refiere a las cualidades que modifican a una sustancia. Todos los cambios ocurren por contrarios, es decir, frio-caliente, arriba-abajo, etc., es así porque "aquellas cosas que, siendo diferentes en cuanto al género, no pueden estar presentes a la vez en lo mismo; también las que, perteneciendo al mismo género, difieren en grado sumo, y las que dándose en el mismo sujeto receptor, difieren en grado sumo, aquellas cuya diferencia es máxima, bien absolutamente, bien en cuanto al género, bien en cuanto a la especie"[126], por ello es que los accidentes de la substancia no podían ocurrir en términos medios, es decir,

[121] Aristóteles, Metafísica, Libro IX, Capitulo I. 1046ª 2
[122] Aristóteles, Física Libro II, Capítulo I,192b 10-15
[123] David, Bostock. *Opo. Sit. P*. 96
[124] Aristóteles, Metafísica. Libro V, Capitulo 8 10-25
[125] Aristóteles Acerca de la generación y corrupción, I-3. 317b 5-10
[126] Aristóteles, Metafísica. Libro V, Capitulo X, 1018a 25 - 35

que una cosa que sea blanca por naturaleza cambie a un color intermedio entre su color natural y su contrario – negro – ya que "las sustancias no vienen en grados[127], así cuando ocurría un cambio en un objeto lo hacía en relación muy estrecha con los elementos que lo conforman. La sustancia de todos los objetos del mundo estaba compuesta por aire, fuego, tierra y agua, así, si algo era caliente estaba conformado por fuego, si algo era húmedo tenía en su mayor cantidad agua, si algo era duro estaba conformado por tierra, etc. Estos cuatro elementos también determinaban el tipo de movimiento que tenía un cuerpo.

Existen tres tipos de cambios accidentales: cuantitativos, que afectan a la cantidad, es decir, crecimiento o disminución de la substancia, cualitativos, se refiere a la alteración, es el cambio en las cualidades de una substancia y por ultimo de lugar, este se refiere a la traslación. Dentro del movimiento como desplazamiento se encuentra el movimiento natural y el movimiento violento. Todo lo que se mueve, se mueve por naturaleza movidos por sí mismos o contra la naturaleza y violentamente: movidas por algo ajeno.

2.3. El movimiento

El movimiento natural era algo intrínseco de los seres que surge a partir de su propia naturaleza, dependiendo de la combinación de los cuatro elementos fundamentales que formaban al objeto, a saber: tierra, aire, fuego y agua. Ya he señalado antes que para Aristóteles la naturaleza es una causa de orden, y dentro del mundo la naturaleza opera siempre como esa causa de orden, dentro de este orden Aristóteles consideraba que todo en el universo tenía un lugar natural y que esos elementos tendían a moverse hacia ese lugar[128] determinado por la naturaleza de sus elementos, cada elemento se define por medio de cuatro poderes o cualidades principales: humedad, sequedad, frialdad, calor, (el fuego es caliente y seco, la tierra está fría y seca, ...).

Los elementos tienen cada uno un movimiento natural y un lugar natural. El concepto de "lugar" y esa inclinación de cada elemento hacia su lugar apropiado trabajan juntos: el

[127] S. Marc, Cohen. *Substances* En A companion to Aristotle (Reino Unido: Blackwell Publishing Ltd, 2009) 200

[128] Aristoteles, Acerca del Cielo II, 13. 195b 25-32

lugar constituye el "donde", esa direccionalidad del mundo, mientras que los elementos poseen esa inclinación hacia su lugar natural. Como resultado de esa "asociación"; el movimiento natural exhibe "una concepción de la física como la construcción de un mundo completo con su punto de partida, la definición de sus problemas, y el desarrollo de soluciones a esos problemas, y todas las elecciones relacionadas con ellos."[129]. "El fuego, si se deja solo, se moverá hacia arriba y encontrará su lugar en los bordes más externos del universo; la tierra se mueve naturalmente hacia abajo, al centro del universo; el aire y el agua encuentran su lugar en medio"[130].

Su movimiento natural se explica en términos de su ligereza y pesadez, "lo que produce movimiento hacia arriba y hacia abajo es lo que produce peso y ligereza"[131]. El movimiento natural podía ser directo hacia arriba como en el caso del fuego o directo hacia abajo como una roca, arriba y abajo como en el caso de todas las cosas sobre la Tierra; o podía ser circular, como en el caso de los objetos celestes[132]. A diferencia del movimiento hacia arriba o hacia abajo, o en general de cualquier movimiento en la Tierra, el movimiento circular no tiene principio ni fin, y se repite sin desviarse.

Su idea del movimiento de los cuerpos celestes fue construida basándose en la teoría de las esferas de Eudoxo[133], quien supuso que los caminos aparentemente complejos del sol, la luna y cada uno de los planetas eran, en cada caso, el producto de los simples movimientos circulares de un cierto número de esferas concéntricas. La primera esfera más externa en cada caso explica los fenómenos causados por la rotación diaria de la tierra alrededor de su eje. El segundo produjo el movimiento aparente del planeta a lo largo de la banda zodiacal. La tercera y la cuarta esfera tenían la intención de explicar la principal irregularidad aparente en el movimiento de los planetas, es decir, lo que se conoce como estaciones, cuando su supuesto curso hacia el este a través de las constelaciones se interrumpe y viajan hacia el

[129] Helen, S. Lang. *The Order of Nature in Aristotle's Physics. Place and the elements.* (Cambridge: Cambridge University Press, 1998) *10*
[130] Jonathan, Barnes. *Opo. Sit. P.* 98
[131] Theodore, Scaltsas. Mixing the Element en A companion to Aristotle (Reino Unido: Blackwell Publishing Ltd, 2009) 244
[132] Aristóteles, Acerca del cielo, libro II, XII 293ª 12-13
[133] G.E.R. Lloyd. *Opo. Sit.* P.105

oeste por un tiempo. Cada uno de los 5 planetas requería de 4 esferas que explicaban sus movimientos y el sol y la luna 3 esferas cada uno, sumando un total de 33 esferas[134].

Basándose en Eudoxo, Aristóteles hace una modificación a su teoría de las esferas, distinguiendo entre el mundo sublunar y el supralunar. La Tierra de Aristóteles es una esfera estacionaria en el centro del universo[135], alrededor de ella giran los cuerpos celestes visibles: la luna está más cerca de la Tierra, luego está el sol, luego los cinco planetas conocidos (Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno) y luego las estrellas fijas. El mundo sublunar, que es la región terrestre y es sede del elemento más pesado que es la Tierra, el cual, está sometido a la generación, corrupción y al cambio.

El mundo supralunar es lo que está más allá de la luna y es eterno, el mundo sublunar está formado por los cuatro elementos[136], y el mundo supralunar está formado por un material llamado éter que únicamente está sometido a un tipo de cambio, el movimiento circular, este es el que mantiene en movimiento a los objetos celestes. Aristóteles agrega 22 esferas más al modelo de Eudoxo porque su preocupación era dar cuenta de la transmisión del movimiento de la esfera más externa a la región sublunar, su objetivo no era descubrir cómo se movían los cuerpos celestes en términos matemáticos o geométricos, "el objeto de su discusión es descubrir la cantidad de motores inmóviles necesarios para explicar los movimientos independientes de los cuerpos celestes"[137], ya que las esferas transmiten movimiento a los cuerpos celestes. Pero mientras que, a través de la región celestial el movimiento es eterno e inmutable, en la región debajo de la luna hay movimiento y cambio, generación y corrupción.

En contraste con los objetos naturales existen los artefactos hechos por el hombre como una cama, la cual tiene una causa interna de movimiento ya que puede estar hecha de madera o de bronce, dichos materiales están conformados por el elemento tierra que tiene la cualidad de la pesadez, esta cama tendrá una fuente interna de movimiento hacia abajo, una vez alcanzado su lugar natural, dejara de moverse. Para moverla habrá que empujarla desde el

[134] C. M. Linton. From Eudoxus to Einstein , History of mathematical astronomy (Cambridge University Press, 2004) 26-32
[135] Aristóteles, Acerca del Cielo, II, 3, 286ª, 13-14
[136] Broade, Sarah. *Heavenly bodies and first cause*. En A companion to Aristotle (Reino Unido: Blackwell Publishing Ltd, 2009) 231
[137] G.E.R. Lloyd. *Opo. Sit. P.* 152

exterior. Lo mismo sucede con cualquier objeto natural que haya alcanzado su lugar apropiado, como una roca o un trozo de madera cuya cualidad sea la pesadez.

El movimiento violento o forzado, la otra clase de movimiento de Aristóteles, es impuesto, e.g., un individuo que empuja un mueble o levanta un peso impone movimiento, al igual que quien lanza una piedra. Lo esencial acerca del movimiento violento es que es causado externamente y se imparte a los objetos que no se mueven por sí mismos ni por su "naturaleza", sino gracias a empujes o tirones. Aristóteles usó la palabra "δύναμις"[138], *dúnamis*[139], para definir aquello que imprime el moviente sobre un objeto para que este se mueva, dicha palabra "en muchas discusiones modernas y traducciones se representa por 'fuerza'. Esto es doblemente desafortunado: se pierde el significado en el habla ordinaria, y sugiere de manera muy engañosa algún tipo de analogía con la 'fuerza' newtoniana"[140]. *Dúnamis* quiere decir "ser capaz de"[141], lo cual quiere decir que el moviente le imprime la capacidad de movimiento al objeto que mueve.

El movimiento por desplazamiento lleva implícito el concepto de "lugar", no como lugar natural, sino como una especie de "contenedor". El desplazamiento nos da muestra de que el lugar es distinto a los seres que cambian porque el lugar inmediatamente presenta la característica de ser continente y no contenido, de no desaparecer cuando un objeto cambia de lugar. El lugar no es una causa de los seres, ni un elemento de ellos, no es materia ni forma. El lugar para Aristóteles es una especie de límite de los objetos que contiene, "además, si hay un lugar y un espacio para un cuerpo, es claro que los habrá también para la superficie y los restantes límites del cuerpo"[142], si el lugar no es ni la forma, ni la materia ni algún intervalo, "el lugar tendrá que ser entonces la última de las cuatro, a saber: el límite del cuerpo

[138] Edward, Hussey. Aristóteles's mathematical physics: a reconstrucción (1991). En Aristótele's physics a collection of essays. Editado por Lindsay Judson. (Nuevayork: Calendon Press – Oxford University Press, 2003) 215

[139] Diccionario Griego – Inglés – Español, Edgar A.Madrid. Seminario Teológico, Guatemala, 2009.pp. 30

[140] Nota al pie de Edward, Hussey. Aristóteles's mathematical physics: a reconstrucción (1991). En Aristótele's physics a collection of essays. Editado por Lindsay Judson. (Nuevayork: Calendon Press – Oxford University Press, 2003)215

[141] Etymological Dictionary of Greek, Volumen I. Editado por Robert Beekes. Editorial Brill. Leiden Boston, 2010. 358

[142] Aristóteles, Física, Libro cuarto, Capitulo 1, 209ª 5-10

continente [que está en contacto con el cuerpo contenido]"[143]. Pero llamó al cuerpo contenido lo que es movible por locomoción.

El lugar es una categoría pues es un "dónde"[144], el lugar no altera la substancia que lo ocupa pues porque si suponemos que ha dejado atrás el lugar donde estuvo antes y se ha ido a otro lugar, no es menos Sócrates[145], por lo tanto, para Aristóteles el lugar es un marco de ubicaciones, es un límite inmaterial que se distingue del objeto que lo contiene[146]. Aristóteles claramente cree que su explicación del lugar explicará el movimiento de las cosas naturales ya que para este filósofo, el movimiento sin el lugar sería imposible[147]. El lugar es lo primero que rodea lo que está en su lugar y no es parte de lo contenido, por lo que el lugar no es ni mayor ni menor que lo que contiene, además, cada lugar tiene un arriba y un abajo[148].

Aristóteles agrega que "por esta razón el lugar parece ser una superficie y, como si fuera un recipiente, algo que contiene"[149] . Por lo que podemos decir que, para Aristóteles lugar es la longitud, la anchura y la profundidad, que además son tipos de cantidad[150]. El lugar, que es tridimensional, debe ser el primer límite del cuerpo que lo contiene.

"Además, si hay un lugar y un espacio para un cuerpo, es claro que los habrá también para la superficie y los restantes límites del cuerpo, ya que les corresponde la misma proporción; en efecto, allí donde había superficies ocupadas por agua , las habrá luego ocupadas por aire"[151]. Limita el contenedor dentro del cual todas las otras cosas actúan como límites y cosas limitadas. La superficie es un límite, límite del cuerpo que está contenido en un lugar, la superficie es una cantidad continua, sin embargo, aunque el lugar y la superficie son ambos límites y son ambos "atributos" del cuerpo, lo son de maneras muy diferentes[152]. A diferencia de la superficie, el lugar no está entre los objetos de las matemáticas; el lugar es

[143] Aristóteles, Física, Libro cuarto, Capitulo 4, 212a2-6.
[144] Gareth b. Matthews. *Aristotelian Categories.* En A companion to Aristotle (Reino Unido: Blackwell Publishing Ltd, 2009) pag. 155
[145] *Sorabji R. The philosophy of the commentators 200-600 A.D. Vol. 3. Logic and Methapysics* (Londres: Duchworth, 2004) 110
[146] Aristóteles, Física, Libro cuarto, Capitulo 5, 212b26-27
[147] Helen S. Lang. *Opo. Sit. P.*119
[148] Ibid. 78
[149] Aristóteles, Física, Libro cuarto, capitulo 4, 212ª27-29
[150] Aristóteles, Metafísica, VII-3, 1029^{a} líneas 14-15
[151] Aristóteles, Física, Libro cuarto, Capitulo 1, 209ª 8-10
[152] Helen S. Lang. *Opo. Sit. P*. 109

uno de los términos comunes y universales de la física, por lo cual, el lugar en Aristóteles no es medible.

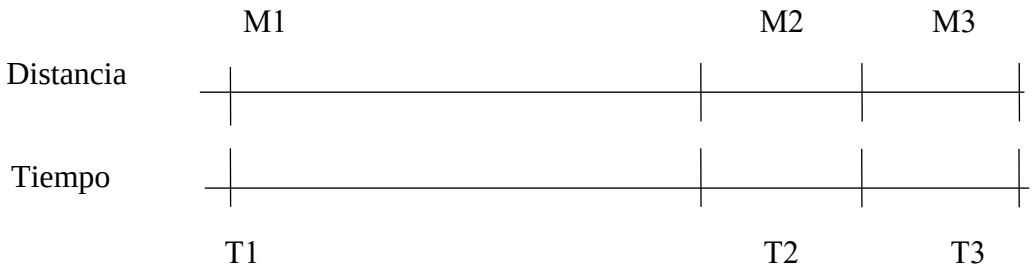
El lugar debe tener magnitud porque pertenece al género de cosas que tiene tres dimensiones. Pero no puede ser un elemento ni estar compuesto de elementos. Consecuentemente, aunque tiene magnitud, el lugar no puede ser un cuerpo porque proviene de "cosas inteligibles", porque tales cosas no producen magnitud, "los elementos de los cuerpos sensibles son cuerpos, pero de los elementos inteligibles no puede surgir magnitud alguna"[153]. Esta es una de las razones por las cuales Aristóteles en su interpretación de la naturaleza no considera el desplazamiento de un cuerpo como algo que se pueda medir, porque un cuerpo desplazándose deja un espacio para ser contenido en otro aunque ese cuerpo haya recorrido una distancia medible.

Hablar de movimiento por desplazamiento requiere también el concepto de tiempo. En Aristóteles el tiempo se relaciona con el concepto de movimiento pues para él, el tiempo no existe sin el movimiento, percibimos el tiempo porque hay movimiento, y sin tiempo no hay movimiento aunque son cosas distintas. El movimiento se da siempre de un lugar a otro en un tiempo determinado, Aristóteles pensó en el tiempo como algo que es continuo, lineal y único, es decir, el mismo para todos los objetos que cambian, para todos los eventos y lugares. Es como una línea recta que no tiene principio ni fin. "Así pues, cuando percibimos el ahora como una unidad, y no como anterior y posterior en el movimiento, se percibe el tiempo porque el cambio va de un punto de salida a uno de llegada, así transcurre el tiempo según un movimiento cuya relación es lo anterior y lo posterior, pues cuando notamos que hay un antes y un después, entonces hablamos de tiempo, porque el tiempo es justamente esto: número del movimiento según el antes y el después"[154].

El tiempo no solamente supone el movimiento local, sino también de cambio como el de alteración cualitativa como el de aumento y disminución. La idea de que el tiempo es un número en la medida en que su duración puede medirse por un múltiplo de alguna unidad, hace suponer que en Aristóteles el tiempo juega dos papeles, uno como un componente geométrico y otro como un componente métrico[155]. El primero porque como ya mencioné,

[153] Aristóteles, Física, Libro cuarto, Capitulo 1, 209ª 10-15
[154] Aristoteles, Física, Libro cuarto, Capitulo II, 219b
[155] Michael J. White. s. Aristotle on the Infinite, Space, and Time. En A companion to Aristotle (Reino Unido: Blackwell Publishing Ltd, 2009) 272

supone al tiempo como una línea recta, por lo tanto existe una relación de ida y vuelta entre el tiempo y el movimiento, "pero un movimiento mide un tiempo en la medida en que un tiempo en cuanto unidad temporal se define en términos de algún movimiento unitario y continuo"[156]. Hay cambios más lentos y cambios más rápidos, por ejemplo, el tiempo de vida de una manzana es más lento que el cambio que sufren 10 ml de agua si se ponen a hervir para convertirse en vapor. Aristóteles en el libro VI de su Física hace una comparación entre tiempo y movimiento:



Suponiendo que tenemos dos cuerpos A y B, "Así, suponemos que A es más rápido que B. Entonces, como el más rápido es el que cambia antes, si A ha cambiado de M1 a M4 en el tiempo T1T4, B no habrá llegado todavía a M4, aunque estará cerca; así, en un tiempo igual el más rápido recorre una distancia mayor"[157]. Por lo tanto, "es tambipen evidente, según lo anterior, que el cuerpo más rápido recorrerá una distancia igual en menos tiempo"[158]. Sin embargo, no existía en la física aristotélica el concepto de velocidad como lo conocemos gracias a la física modera, más bien, el tiempo es esencialmente la causa de la corrupción porque es el número de proceso o movimiento, y el proceso elimina lo que existe[159], en el caso del desplazamiento de un cuerpo solo existe un cuerpo que es más rápido y uno que es más lento.

Aristóteles "[…] deja en claro que el tiempo, en este sentido geométrico, depende ontológicamente (pero no es idéntico) de kinêsis — movimiento, proceso o cambio continuo, […]"[160], pues como ya mencioné, la concibe como una línea recta sin principio ni fin, esta

[156] Ibid. 263
[157] Aristoteles.Fisica Libro cuarto, Capitulo II. 232ª 27-30
[158] Ibid 232b 5
[159] Michael J. White. *Opo. Sit. P.* 271-272
[160] Ibid. 272

línea recta se puede dividir en una infinidad de unidades divisibles, pues el tiempo está compuesto por una serie de "antes y después" de movimientos de A a B. Esto puede ilustrarse si para un objeto Z que se mueve en un periodo X de A a B, durante la primera mitad ha estado en locomoción desde A a un punto intermedio Y hacia B, ese punto intermedio de A a Y[161], también se puede dividir en un punto medio y así sucesivamente de tal forma que sea una magnitud continua.

Aristóteles presenta una analogía para explicar el tiempo. Sabemos el tamaño de una manada de caballos al determinar su número (cuantos caballos hay en el grupo). Pero la unidad de medida (un caballo) por la cual enumeramos el tamaño de la manada de caballos está determinada por la naturaleza de lo que se mide[162]. Luego Aristóteles hace una analogía entre magnitud y tiempo:

> Y puesto que el tiempo es la medida del movimiento y de lo que se está moviendo, y lo mide cuando se ha determinado un movimiento que será la medida de un movimiento total (como el codo mide una longitud cuando se ha determinado una magnitud que será la medida del todo)[163].

Aristóteles no intenta ninguna teoría de los factores que influyen en la velocidad de los cuerpos móviles, ya sea en movimiento "natural" o "forzado", sino que simplemente introduce una serie de afirmaciones generales sobre ese tema. El tiempo a pesar de su estrecha relación con el movimiento, no es movimiento, es aquello mediante el cual numeramos el movimiento, el tiempo es una magnitud continua porque el movimiento es continuo[164].Para Aristóteles el tiempo es un estado momentáneo de las cosas, o un evento momentáneo, donde un evento se define como 'el tener de alguna propiedad'[165], por eso, aunque el tiempo es una magnitud continua porque el movimiento es continuo, el movimiento no puede ser medido en términos matemáticos porque el tiempo en Aristóteles es un cambio[166], por ejemplo "una

[161] Sarah, Waterlow. *Nature, change, and agency in aristotelres physics.* (Londres: Calendon Press, 1982) 135
[162] Aristóteles. Física Libro cuarto, Capitulo 12, 220b 18-20
[163] Ibid IV, 12, 221a -5
[164] Ibid. IV, II, 220a, 25
[165] Sorabji Richard. Sorabji on Time and Eternity in Aristotle. https://historyofphilosophy.net/aristotle-sorabji
[166] Denis, Corish. Could time be change? (*Philosophy.* Vol. 84. No. 328, abril 2009 pp. 219-232) página 223

flecha, sigue siendo siempre una y la misma mientras va en el aire, pero es distinta en cada instante que consideremos, en el sentido que ocupa una porción distinta de espacio en cada momento"[167], sin embargo, a pesar de esta interpretación, "no hay, una definición del tiempo satisfactoria en relación con el cambio/movimiento que se pueda encontrar en Aristóteles"[168].

2.4. Tiempo, espacio y movimiento

La teoría de Aristóteles del movimiento, no explicaba suficiente por qué el aire a veces puede ayudar al movimiento mientras que en ocasiones crea una especie de resistencia reduciendo la velocidad. Los efectos de la fricción y de la resistencia del medio a través del cual tiene lugar el movimiento son más obvios en los casos del movimiento "forzado" que en los casos de movimiento "natural". En el caso del movimiento forzado cuando un moviente lanza una roca por ejemplo y esta no se detiene de forma inmediata cuando el moviente deja de tocarla, el movimiento tendrá dos factores, la resistencia del medio y la habilidad que el moviente imprimió para motivar el objeto (*dúnamis*), estos dos aspectos tienen una relación muy estrecha con la rapidez con la que se desplaza cualquier objeto en un movimiento violento.

> Así el cuerpo A se desplazará a través del medio B en el tiempo C, y a través del medio D (que es menos denso) en el tiempo E; si las longitudes de B y D son iguales, los tiempos C y E serán proporcionales a la resistencia del medio[169].

La resistencia era el segundo factor para que hubiera movimiento, por lo cual, el impulso del moviente (*dúnamis*) y resistencia son factores de los cuales la rapidez era dependiente. La resistencia dependía de la densidad del medio, pues el aire era más ligero

[167] Jorge Vidal. La concepción del tiempo en Aristóteles. (*Byzantion nea hellás.* No. 34. Santiago. Chile. Octubre 2015) http://www.scielo.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0718-84712015000100014
[168] Denis, Corish. Could time be change? (*Philosophy.* Vol. 84. No. 328, abril 2009 pp. 219-232) página 228
[169] Aristóteles, Física, Libro cuarto, Capitulo 8, 215b 1-5

que el agua y por lo tanto, los cuerpos en el aire se mueven más fácilmente que en el agua y cuanto más denso sea el medio más lento se moverá el cuerpo:

> Sea entonces B agua y D aire; en cuanto que el aire es más ligero y menos corpóreo que el agua, A pasará más rápidamente a través de D que a través de B. Habrá entonces entre ambas velocidades la misma proporción que aquella por la que el aire se diferencia del agua. De esta manera, si el aire es dos veces más sutil que el agua, A pasará a través de B en el doble de tiempo que a través de D, y por tanto el tiempo C será el doble que el tiempo E. Y siempre, cuanto más incorpóreo y menos resistente y más divisible sea el medio a través del cual el cuerpo se desplaza, tanto más rápidamente lo atravesará[170].

Aristóteles sostiene que la distancia recorrida por un cuerpo está en proporción directa con el "impulso"(*dúnamis*) que actúa sobre él y al tiempo transcurrido, mientras está en proporción inversa a la masa del cuerpo[171]. Esta misma ley de proporcionalidad también la aplica a la caída de los cuerpos, pues afirma que "cuando los cuerpos de diferentes pesos caen, los tiempos que tardan en recorrer una distancia son inversamente proporcionales a los pesos, es decir, un cuerpo que pese el doble que otro cubrirá la mitad del tiempo que el primero"[172].

Podemos notar que, la interpretación del movimiento forzado aristotélico se encuentran generalmente expresadas no como leyes, sino como reglas de proporcionalidad usando la razón 1:2[173]; por ejemplo, al hablar de un cuerpo B, movido por una distancia C en un tiempo D por un agente A, escribe Aristóteles:

> En el tiempo T un agente A, hará que algo que es la mitad de B se mueva sobre el doble de la distancia de C, y lo hará mover sobre la distancia C en

[170] Aristoteles física, Libro cuarto, Capítulo 8, 215b 5-13
[171] Samburski – *El mundo físico de los griegos.* (Madrid: Alianza Universidad, *1962)*– 117-118
[172] David, C. Lindberg. *Opo. Sit. P.* 90
[173] Ido, Yavetz. *Opo. Sit. P.* 2

> la mitad del tiempo T, pues de esta manera se mantendrá la proporción. Y si el agente A hace mover a B sobre la distancia de C en el tiempo T, y un agente igual a la mitad de A moverá a la mitad de B sobre la distancia C en el tiempo T. Así, por ejemplo, sea E la mitad de A, y F la mitad de la cosa movida B; entonces, la relación entre *dúnamis* y los pesos será semejante y proporcional en uno y otro caso, de la manera que cada agente hará que la misma distancia sea recorrida en el mismo tiempo[174].

Así, 1) la *dúnamis* del agente varía en proporción inversa al tiempo, 2) la *dúnamis* varía en proporción directa al peso de la cosa que se mueve, 3) la *dúnamis* varía en proporción directa a la distancia recorrida[175]. De este modo, el movimiento se produce a una rapidez constante bajo el impulso de un agente de forma constante por eso es que era necesaria la fricción del medio para que frenara al objeto. Sin embargo, a pesar de que esta interpretación del movimiento es proporcional, Aristóteles nunca asignó un número a dichas proporciones aunque el tiempo sea número y el movimiento sea medido por este porque no estuvo dentro de su concepción de la física, ya que como expliqué en un principio, la física aristotélica está dedicada a explicar los principios de la naturaleza.

"Estas reglas de proporcionalidad no tienen el alcance de una ley física como algunos estudiosos de Aristóteles lo pensarían siglos después"[176], ya que estas reglas están formuladas en "lo que el sentido común podría sugerir"[177], por eso es que la regla anterior de proporcionalidad es aplicable a varios casos como el siguiente:

> Y si hay dos agentes, y cada uno mueve un peso a una determinada distancia y durante un cierto tiempo, entonces si se unifican moverán los dos pesos juntos sobre una distancia igual y en un tiempo igual, pues ésta es justamente la proporción[178].

---

[174] Aristóteles, Física, Libro VII, Capítulo 6, 250ª 1-10
[175] Edward Hussey. *Opo. Sit. P*. 215 - 216
[176] Como Bradwardine quien intentó matematizar estas reglas en leyes del movimiento.
[177] G.E.R. Lloyd. *Opo. Sit. P.* 55
[178] Aristóteles, Fisica, Libro VII.Capitulo 5, 250a 25-28

Sin embargo, en otros casos su regla de proporcionalidad no se cumple:

> Aunque E hace mover a F sobre la distancia C en el tiempo T, no se sigue que E pueda mover en el tiempo T el doble de F sobre la mita de la distancia C. Así, del hecho de que A mueva a B sobre una distancia C en el tiempo T no se sigue que E, que es la mitad de A, pueda hacer que B, en el tiempo T, o en una fracción suya, recorra una parte de C que esté, respecto de la totalidad de C, en la misma proporción en que está la *dúnamis* del agente A respecto a la *dúnamis* del agente E. Bien puede ocurrir que E no mueva de ninguna manera a B. Porque del hecho de que la totalidad de su *dúnamis* cause una determinada cantidad de movimiento, no se sigue que la mitad de esa *dúnamis* vaya a causar una cantidad proporcional de movimiento en un tiempo cualquiera; si así fuera, un hombre podría mover un barco, ya que tanto la *dúnamis* motriz de los hombres que arrastran el barco como la distancia que le hacen recorrer son divisibles en tantas partes como hombres intervengan[179].

"Aunque su ley del movimiento […] no es correcta, su formulación está emparentada en dos aspectos con el espíritu de nuestro propio tiempo: es matemática en su forma y su validez es calificada por referencia a la experiencia."[180]. La falla principal del estudio del movimiento aristotélico es que "quizá Aristóteles no llevó a cabo experimentaciones simples que pudieran haberlo llevado a darse cuenta de algunos errores como el de que la caída de los cuerpos era proporcional al peso de los mismos"[181]. Más adelante aparecerían comentadores críticos de la obra de Aristóteles como por ejemplo Juan Filopón (490 – 566 d. C.) que anticipándose a Galileo, proporcionó evidencia experimental para refutar la doctrina del movimiento aristotélica. Con respecto al aire como agente externo que impulsaba un proyectil, en el caso de una flecha, sugirió que el movimiento de la flecha se daba por una fuerza que era implantada por el lanzador directamente en la flecha y no en el aire, así la

[179] Ibid, 250 a 10-19
[180] Sammuel, Samburski. *Opo. Sit. P*. 118
[181] Richard, Sorabji. *Matter, Sapace and motion. Theories in Antiquity and Their Sequ*el. (Londred: Duckworth, 1988) 147

fuerza implantada hace que el proyectil se mueva mientras esa fuerza se va agotando en el curso del movimiento.

Otro debate que va de la mano con el del movimiento natural aristotélico proporcionado por Filopón es el del medio. Se dio cuenta de que el medio como él lo entendía según los argumentos aristotélicos, no era responsable del movimiento de los proyectiles, Para Filopón esto resulta insostenible, y para demostrarlo, toma ese ejemplo pero en lugar de imaginar un objeto cayendo bajo diferentes medios con diferentes resistencias, toma cuerpos de diferentes pesos cayendo a través del mismo medio, demostrando con ello que la razón de los tiempos de movimiento no es igual, a la razón de los pesos, pues la diferencia de tiempos es muy pequeña, lo cual, lo lleva a afirmar lo contrario que Aristóteles; la razón de los tiempos de movimiento a través de dichos medios no es igual a la razón de sus densidades. "En efecto, si se dejan caer simultáneamente desde la misma altura dos cuerpos que difieran mucho en peso, se hallará que la razón de los tiempos de movimiento no es igual a la razón de los pesos, sino que la diferencia de tiempos es muy pequeña"[182].

Sin embargo, a pesar de las fallas en la interpretación de la naturaleza aristotélica, el logro en este campo, al ser el primero en analizar aspectos generales de la velocidad de los objetos en movimiento, todavía es bastante notable a pesar de no ser su objetivo principal. Aristóteles no tenía la intención de formar una teoría matemática acerca del movimiento, aunque su idea del lugar y del tiempo son continuos en términos geométricos, sino que, únicamente quiso explicar cómo ocurre ese movimiento en términos físicos, pues para él la física es diferente de la matemática y tienen ambas objetos de estudios distintos. El objetivo como mencioné antes fue conocer la naturaleza de las cosas y sus primeros principios.

A diferencia de los pitagóricos, quienes proponían un orden matemático con una estructura numérica en proporciones del universo, Aristóteles se basó en sentidos comunes como base de sus proporcionalidades, lo que hace de su teoría una relación cualitativa entre cantidades proporcionales sin que él haya decidido estudiarlo como entes numéricos. Con ello, elaboró una meticulosa teoría de la naturaleza cuidando las implicaciones de los datos

[182] Samuel Sambursky, *Opo. Sit. P*. 100

disponibles y basándose en explicaciones que concuerden en término de experiencia ordinaria[183].

Así, el pensamiento científico griego como precursor del pensamiento físico moderno, habría elaborado una visión de la naturaleza cualitativa y no matemática con Aristóteles, cuyo punto de vista sería dominante para la interpretación de la naturaleza en la época medieval. La ciencia aristotélica además, proporcionaría el marco conceptual para el desarrollo del pensamiento posterior, pues los conceptos de sus estudios, serían fuertemente estudiados y comentados con diferentes interpretaciones. En ese sentido personalmente creo que Aristóteles preparó el camino que seguirían gran parte de pensadores del siglo XIV y luego los fundadores de la física moderna del siglo XVII.

Escolio

En estas tres secciones que comprenden el capítulo sobre Aristóteles, se puede ver que fue fuertemente influenciado por la matemática y geometría griega, ya que sus explicaciones tienen que ver con una estructura axiomática implícita. Las explicaciones de la naturaleza tenían que proceder deductivamente de sus primeros principios. Aristóteles no creía que las matemáticas y la física se pudieran combinar para entender mejor la naturaleza, sin embargo, sí creía que las explicaciones del científico de la naturaleza tenían que tener la misma estructura lógica.

A pesar de que la física aristotélica era de carácter cualitativo, no podemos dejar de lado que su física se encarga en gran parte del estudio del movimiento local, el cual, lleva implícitas magnitudes como la del lugar y tiempo. Lugar como el límite de los objetos que contiene, como una especie de superficie que rodea al objeto contenido, se puede interpretar como una magnitud por sus características espaciales. Tiempo como algo que es continuo, lineal y único, analógicamente el tiempo es una línea recta que se puede dividir en intervalos de instantes. Ambos tiempo y lugar con dos cantidades continuas.

[183] Edward Hussey. *Opo. Sit. P.* 240

Aristóteles distingue la cantidad discreta de la cantidad continua. Incluye líneas, superficies, cuerpos, tiempo y lugar en esta categoría. En Metafisica Δ.13, Aristóteles también distingue la cantidad que es continua de la que no es continua.

> Una magnitud es la cantidad que se puede medir (a diferencia de lo numerable o contable), y una magnitud es divisible en partes que son continuas (1020a7-11). Entre las magnitudes, lo que es continuo en una [dimensión] es la longitud, eso en dos es anchura, y eso en tres es profundidad. . . La longitud limitada es una línea, una anchura limitada, una superficie y un cuerpo de profundidad limitada (1020a11-14).

La concepción de Aristóteles de la cantidad o magnitud continua es una concepción geométrica. Algunas de las características estructurales anteriores corresponden a propiedades centrales de la geometría en desarrollo del siglo IV a. C., por ejemplo, la concepción de continuidad de Aristóteles dice lo siguiente:

> Si la continuidad, el contacto y la sucesión son tales como los hemos definido antes, es decir, si decimos que son continuas aquellas cosas cuyos extremos son uno, en contacto cuando sus extremos están juntos y en sucesión cuando no hay ninguna cosa del mismo género entre ellas, entonces es imposible que algo continuo este hecho de indivisibles, como por ejemplo una línea de puntos, si damos por supuesto que la línea es un continuo y el punto un indivisible. (Física Libro IV, 1 231ª 20-25)

Esta concepción es en esencia la misma definición 3 y 4 de magnitud continua que encontramos en el libro VII de los Elementos de Euclides donde enuncia que un número es parte de otro cuando el menor divide al mayor, y también es la misma concepción pitagórica de que dos segmentos, tienen siempre una parte proporcional común. Tiempo y lugar entonces son dos tipos de magnitud vistos como dos longitudes que se pueden dividir tan pequeños como se quiere o a los cuales se les pueden agregar partes proporcionales tanto como se quiera, sin embargo, esta división o adición de partes es posible solo en potencia porque Aristóteles niega el infinito como acto, esto es, que el matemático puede imaginar esas cantidades pero no pueden existir en la realidad física.

La concepción de Aristóteles de la cantidad o magnitud continua es una concepción geométrica. Esta concepción de Aristóteles al poseer esa tridimensionalidad da muestra de que los cuerpos que estudia un físico tienen magnitud entendida geométricamente, en el sentido de que las formas de los cuerpos pueden ser representados por longitudes de segmentos y medirse de acuerdo a estas, sin embargo, el físico solo estudiaba las formas de los cuerpos como límites del cuerpo natural, pero el matemático estudia la forma de los cuerpos como segmentos, longitudes, áreas, volúmenes, etc., por eso, el lugar y el tiempo que ocupa un cuerpo que se mueve no es considerado como una magnitud, sino como una categoría.

Capítulo 3.

LA GEOMETRIZACION DEL MOVIMIENTO LOCAL.

Aunque en la antigüedad la "interpretación matemática" de la naturaleza tuvo importantes exponentes como los pitagóricos, Eudoxo y Arquímedes, los cuales, hicieron aportes como el uso de las proporciones, Aristóteles quien dominó la interpretación de los fenómenos físicos durante la Edad Media no usó las matemáticas de forma cuantitativa (como mencioné en el capítulo anterior) para formular su concepción de movimiento, fue así que constituyó una interpretación de la naturaleza muy de acuerdo con el sentido común, siendo capaz de dar explicaciones de acuerdo a sus postulados a muchos fenómenos como el del movimiento local o el de la caída de los cuerpos. Incluso bajo sus postulados, durante los siglos XII al XIV se criticaron y surgieron nuevos planteamientos, como el del tratamiento de las cualidades de los cuerpos. Sin embargo, el proceso de matematización de los fenómenos físicos es uno de los factores que constituye la piedra angular de la revolución científica que no comenzó en el siglo XVII, como señala Crombie:

> Uno de los cambios más importantes que facilitó el empleo creciente de la Matemática en la Física fue el introducido por la teoría de que todas las

> diferencias reales podían ser reducidas a diferencias en la categoría de la cantidad; que, por ejemplo, la intensidad de una cualidad, como la del calor, podía medirse exactamente de la misma manera como podía serlo la magnitud de una cantidad. Este cambio es el que distinguió principalmente la física matemática del siglo XVII de la física cualitativa de Aristóteles. Fue comenzado por los escolásticos de la última parte de la Edad Media[184]

En efecto, la cantidad y la cualidad son categorías diferentes establecidas por Aristóteles, las cuales, estaban presentes en las discusiones de los filósofos naturales de la Edad Media. Gracias a esas discusiones se condujo al tratamiento de la variación de las cantidades de una cualidad mediante la adición de partes o grados de intensidad. "Por otra parte, la intensidad expresa también la idea de que una cosa es «más esto» o «más aquello», por ejemplo, «más blanca» o «más rápida»". [185].

Estas críticas, desarrolladas dentro del mismo pensamiento aristotélico, iban a producir el derrocamiento de todo el sistema de la física de Aristóteles. Tales ideas condujeron gradualmente a una concepción diferente de abordar problemas que sólo los métodos experimentales[186] y el uso de las matemáticas podían dar respuesta. La nueva concepción produjo sus mayores efectos en la dinámica dándole un nuevo impulso a las matemáticas y a la física que influenciarían posteriormente a Galileo para establecer la cinemática de los movimientos en el vacío, luego a Newton para establecer leyes correctas de la dinámica, determinando un punto de inflexión en la historia de la ciencia.

Sin embargo, para que esto pasara tuvieron que llevarse a cabo transformaciones en conceptos cualitativos para convertirse en cuantitativos. Como ya expliqué en el capítulo uno, los griegos sólo comparaban magnitudes con otras magnitudes, es decir, solamente establecían proporciones para realizar mediciones. Este último aspecto se transformaría con pensadores medievales como Nicole Oresme.

---

[184] A. C. Crombie. *Historia de la ciencia: De San Agustín a Galileo. Vo.II., Siglos XIII – XVII.* (Madrid: Alianza, 1987) 82 -83

[185] Ramírez, Cruz, Jorge Alejandro. "Reflexiones sobre las ideas de Nicolás Oresme". *Ascepio. Revista de Historia de la Medicina y de la Ciencia.* Vol. 59. Número 1 (2007) 23 – 34. P. 27

[186] Me refiero a métodos experimentales no en el sentido moderno, sino más bien al experimentalismo aristotélico, entendiendo este último como la búsqueda de generalizaciones basadas en la propia experiencia o la registrada por otros.

El propósito de este capítulo es mostrar cómo se llevó a cabo el proceso de 'medición' del movimiento por medio de proporciones entre magnitudes geométricas, para ello, como punto de partida, describo el análisis y discusión acerca del tratamiento de las cualidades (establecidas por Aristóteles), de si éstas pueden medirse mediante grados numéricos. Luego paso a la exposición critica acerca del movimiento aristotélico por parte de Buridan, para finalmente exponer cómo mediante el uso de las proporciones geométricas establecidas por los griegos, Oresme combina dos aspectos hasta entonces categóricamente distintos, esto es, las cualidades y las magnitudes geométricas.

3.1. Los Calculadores de Oxford y la discusión de la caridad como cualidad medible.

Fue Aristóteles quien se planteó por primera vez la cuestión del movimiento de los cuerpos[187], sin embargo, nunca pensó que el movimiento se pudiera medir matemáticamente en términos de velocidad. La ciencia medieval se mantuvo en general dentro de la estructura del pensamiento aristotélico de la naturaleza. Las teorías del movimiento puramente matemáticas nacieron con la ciencia moderna, sin embargo, para que pudieran surgir algunos conceptos como el de la velocidad, tuvieron que pasar por un largo proceso de cambios, uno de los cuales, inicio en el siglo XII al XIV, pues en este periodo surgieron cuestiones sobre el tratamiento de las cualidades, este fue el comienzo de la matematización de los fenómenos físicos.

Ya he mencionado antes en el capítulo anterior, que la ciencia de la naturaleza de Aristóteles se dedicó en gran parte al estudio del movimiento de los objetos, ya sea de forma natural o forzada. Esta interpretación del movimiento era comúnmente aceptada en el siglo XIV, Aristóteles creía que el más veloz de dos objetos en movimiento cubría una distancia mayor en el mismo tiempo o la misma distancia en un tiempo menor, mientras que dos objetos que se movían con igual velocidad atravesaban distancias iguales en tiempos iguales. Por esta razón es que tiempo y distancias eran tomados como "medidas del movimiento", medidas no en el sentido actual de medición, sino más bien, a dichas medidas del movimiento

[187]David. C. Lindberg. *Los inicios de la ciencia occidental.* (Barcelona: Paidos 1992) 371

se les asignaba un número independiente a cada uno como resultado de la observación para determinar qué cuerpo se movía más rápido en comparación con otro en términos de distancia y tiempo, no obstante, la noción de velocidad seguía siendo un concepto vago, esto quiere decir que "velocidad" como magnitud no alzanzó el grado de ser cuantificable a pesar de depender de dos conceptos cuantificables, su definición todavía no se daba como una relación de las diferentes magnitudes del espacio y el tiempo, sólo era el resultado de la comparación entre dos movimientos, el más rápido era el más veloz, pero sólo como el resultado de la observación, no de la cuantificación.

No cuantificaron el movimiento porque dicha concepción estaba aún dominada por la visión aristotélica de que el movimiento era una de las cuatro clases de cambio, y como tal, "debemos recordar que Aristóteles y sus seguidores medievales consideraban el movimiento como una de las cuatro clases de cambio y que esperaban que el análisis del movimiento imitara (en gran medida) el análisis del cambio en general"[188], sin embargo, los escolásticos empezaron a pensar en la velocidad como una magnitud como resultado de dos cambios, el primero fue el de pensar que la velocidad podía funcionar como una formula general para "medir" la rapidez de un movimiento; y el segundo, el de considerar que las cualidades pueden medirse mediante grados, como lo explicaré a continuación.

Primero, como antecedente, en el siglo IV d.C. Juan Filopono realizó una crítica al movimiento aristotélico, en dicha critica, argumenta que, con respecto al aire como agente externo que impulsaba un proyectil, como en el caso del ejemplo de la flecha, sugirió que el movimiento de dicha flecha se daba por una fuerza llamada '*ímpetus*'[189] que era implantada por el lanzador directamente en la flecha y no en el aire, así la fuerza implantada hace que el proyectil se mueva mientras esa fuerza se va agotando en el curso del movimiento[190]. Filopono intenta expresar la fuerza de forma cuantitativa, diciendo que los cuerpos movidos por un *impetus* se mueven con velocidad inversamente proporcional a sus pesos y que los cuerpos que se movían a una velocidad determinada recorrían, contra la resistencia del aire, distancias que eran proporcionales a sus pesos. Los puntos de vista de Filopono fueron

[188] Ibid. 171
[189] Richard, Sorabji, *Philoponus and the rejection of Aristotelian Science.* (Nueva York: Cornell University Press, 1987) 47- 48
[190] Ibid. 126

repetidos con la traducción de la Física y el comentario de Averroes (1126 – 1198 d.C.) esas interpretaciones quedaron disponibles para los maestros medievales. Pero la exposición del movimiento de Filopono y de los árabes no sufrió una modificación importante hasta el *Tratado de Proporciones* de Thomas Bradwardine (1290 – 1349).

Luego, se dio un cambio también en la concepción que se tenía de las cualidades de los cuerpos, recordando, para los medievales la cantidad y la cualidad son categorías diferentes, esta tradición fue establecida por Aristóteles. La cantidad se concibe como una entidad constituida por partes homogéneas[191]. Las cualidades como la blancura, o el calor, 'son características que recibe una substancia'.[192] Para entonces las cualidades no podían ser medidas, sin embargo, si podían reconocerse diferentes grados de intensidad para las cualidades.

La cantidad es continua cuando se trata de una suma de partes, en una magnitud hay continuidad cuando las partes son de la misma naturaleza, así, la longitud, la superficie y el volumen son magnitudes continuas, pues todas las partes de una longitud son longitudes, todas las partes de un volumen son volúmenes y todas las partes de una superficie son superficies. En el caso de una magnitud discontinua, como el número, el aumento también se da por adición de nuevas cantidades. En ambas, el aumento se da por la agregación de nuevas partes que no afectan las ya existentes. Hasta aquí, está presente la tradición matemática griega con respecto a la clasificación de magnitudes.

Aristóteles había establecido que la variación en grados se encuentra no solo entre las cualidades sensibles como la blancura, la dureza, etc., sino también en las cualidades abstractas, como la justicia y la salud (una persona podría ser más saludable o más justa que otra). "Sugirió dos alternativas, sin elegir entre ellas: o la cualidad en sí misma varía, o — esta era la opinión generalmente atribuida a Aristóteles durante la Baja Edad Media — el sujeto participa en mayor o menor grado en una cualidad o forma invariante."[193].

Con las categorías de Aristóteles como antecedentes, el problema de la variación cualitativa adquirió mayor importancia como resultado de una pregunta teológica que Pedro

[191]Aristóteles, Metafísica, Libro quinto, cap. cap. 13, 1020^{a}líneas 10-1. Cap 25, 1023^{b} 10-20

[192] Aristóteles, Metafísica, Libro quinto, cap. 8, $1017^{b}10-15$

[193] Edward, Grant. *The fundations of modern science in the middle ages.*(New York: Cambridge University Press, 2011)99

Lombardo[194] (1110 – 1160) planteó en el siglo XII, este obispo italiano se cuestionó si se debe admitir que el Espíritu Santo podría aumentarse en el hombre, "si se debe admitir que el Espíritu Santo podría aumentarse en el hombre, [es decir,] si más o menos [de él] podría ser tenido o dado. Pedro insistió en que la caridad, o gracia, que es causada por el Espíritu Santo, no podría variar en los humanos porque esto implicaría un cambio en el Espíritu Santo. Los teólogos generalmente asumieron que la caridad era una entidad espiritual constante que los individuos podían poseer más o menos por una mayor o menor participación en ella, una opinión análoga a la afirmación de Aristóteles de que aunque la justicia permanecía constante, variaba en personas en virtud de su mayor o menor participación en él."[195].

Posteriormente John Duns Scoto (1265-1308) sugirió en el siglo XIV que una cualidad podría aumentarse mediante adición formal de partes similares nuevas, reales y distintas a una forma o cualidad ya existente, por ejemplo, que un cuerpo se volvía más blanco, no intercambiando su forma existente de blancura por una forma completamente nueva de un grado o intensidad más alta sino por una adición de blancura a la forma existente, lo que resulta en un mayor grado de blancura. Las partes nuevas se unirían a las existentes para constituir una forma unificada de intensidad definida, tal como se agregan partes iguales a una cantidad continua. Desde este punto de vista las cualidades se consideraban aumentables pero también disminuibles, de esta forma, la adición de una parte cualitativa a otra aumentaría la intensidad de esa cualidad[196]. Este es uno de los cambios conceptuales que se dio en este periodo de tiempo, pues las cualidades pasaron de ser meros accidentes de una substancia a ser cualidades que poseen cantidad, que a su vez, puede variar en mayor o menor medida.

Esta suposición de Scoto acerca de un tratamiento cuantitativo de las variaciones en la intensidad de las cualidades sufridas por los cuerpos fue aceptado por sus sucesores, y tal vez influyó en la opinión sostenida por algunos de los estudiosos de Merton College en Oxford[197] (también llamados "los calculadores"), de que el aumento o disminución de la

[194] Obispo italiano del siglo XII, ver A history of University in Europ, editado por Walter Rüegg, Cambridge University Press. P.50-51

[195] Edward, Grant. *Opo. Sit. P.* 99

[196] Marshall, Clagett. *The Science of mechanics in Middle Ages*. (Madison: London – Oxford University Press, 1961)206

[197] Dichos estudiosos fueron Thomas Bradwardine, William Heytesbury, Richard Swineshead y John Dumbleton. La actividad de estos pensadores en Merton se extiende desde aproximadamente 1328 hasta

intensidad cualitativa tiene lugar mediante la suma o la resta de grados de intensidad. El más representativo de los calculadores fue Thomas Bradwardine quien fue el primero en intentar generalizar las reglas del movimiento aristotélico en leyes del movimiento que Aristóteles deduce de la experiencia, leyes que requieren la presencia continua de un motor, o al menos una fuente de movimiento, y movimiento; *dúnamis* y resistencia, para la continuidad del movimiento.

La fuente de movimiento o motor es interna como en movimiento natural o externo como en movimiento forzado, que durante el movimiento debe estar en contacto con la cosa movida. Aristóteles nos dice que la velocidad es directamente proporcional al peso como leemos en el De caelo: Si un motor A mueve un objeto B la distancia CD en el tiempo E, tal que, si B es divido en dos partes iguales, el mismo motor A moverá la mitad de B la distancia CD la mitad del tiempo E y los tiempos tendrán una relación entre sí que es la inversa de la de los pesos; por ejemplo, si la mitad del peso es movido la distancia en un tiempo dado, su doble (es decir, el peso total) tomará la mitad del tiempo[198].

Lo mismo se afirma en la Física "observamos que las cosas que tienen un mayor sesgo, es decir, impulso de peso o ligereza, si las condiciones son en otros aspectos iguales, se mueven más rápidamente sobre una distancia igual, y eso en la relación que las magnitudes tienen entre sí. Con la relación simple y directa entre el peso y la velocidad asumida, no es sorprendente que, en el caso de cuerpos de diferentes tamaños, la velocidad sea proporcional al volumen"[199]. Otros pasajes en las obras de Aristóteles sostienen que en el movimiento natural, "cuando el peso es el mismo, la velocidad es inversamente proporcional a la resistencia, como en el caso del movimiento no natural"[200].

"Como matemático y filósofo natural, Bradwardine intentó reconciliar lo que él creía que eran dos hechos: (1) Ningún movimiento tiene lugar cuando la fuerza es igual o menor que la resistencia (un hecho de la experiencia, también implicado por la discusión de Aristóteles). (2) Los factores de fuerza y resistencia como determinantes de la velocidad están

aproximadamente 1350. Solo quedan los detalles biográficos más importantes de estos estudiosos de Merton. Pero no hay duda de que la actividad mecánica de Bradwardine precede a la de los otros eruditos.

[198] Aristóteles, De caelo, Libro III, Cap. 2. 301b 4-8

[199] Aristóteles, Física, Libro IV, Cap. 8. 216ª 11-16

[200] Aristóteles, Física, Libro IV, Cap.8. 215ª 24, 215b10

en algún tipo de proporción en lugar de relacionarse por una simple diferencia aritmética."[201]. "El problema entonces para Bradwardine era encontrar alguna proporcionalidad que dejara la fuerza y la resistencia como una proporción, pero que satisfaría el hecho de que cuando son iguales no tiene lugar ningún movimiento. Su respuesta fue que la proporción de velocidades en los movimientos sigue la proporción de la fuerza del motor con respecto al peso dela cosa movida"[202].

A primera vista, esto parecería ser simplemente una afirmación que resume las declaraciones de proporcionalidad de Aristóteles. Sin embargo, sus conclusiones muestran que su intención era mantener que la velocidad aumenta aritméticamente a medida que la relación de fuerza a resistencia aumenta geométricamente. Si bien, Bradwardine mantuvo la opinión de Aristóteles de que la velocidad con la que un objeto se movía estaba determinada por la "fuerza" (*dúnamis)* que actuaba sobre ella y la resistencia que experimentaba, reformuló las leyes de movimiento de Aristóteles de tal modo que, "[…] una duplicación de la velocidad de un objeto requería la proporción de fuerza resistencia a ser cuadrado, en lugar de duplicado, como Aristóteles lo tenía"[203]. Así, la fórmula dinámica de Bradwardine dedujo que, la velocidad es proporcional a la relación entre la fuerza motriz y la resistencia, siempre que la fuerza sea lo suficientemente grande para vencer la resistencia y producir movimiento[204].

Un formula simple que lo resume es la siguiente:

$V \alpha S/T \alpha F/R$

En el caso del movimiento violento:

$V \alpha F/R$

[201] Marshall, Clagett. *Opo. Sit.* P. 437-438
[202] Ibid.430.
[203] Roger, G. Newton. *From Clockwork to Crapshoot, a history of physics.* (Londres: The Belknap Press of Harvard University Press Cambridge, Massachusetts, 2007) 56
[204] S1 : S2 :: F1 : F2, cuando T1 =T2 y R1 = R2, y asumiendo que el movimiento ocurre. S1, S2 son distancias. T1, T2 son tiempos en movimiento forzado, F1, F2 son fuerzas externas y R1, R2, son pesos.
T2 : T1 :: F1 : F2 cuando S1 = S2, R1 = R2 y el movimiento ocurre
S1 : S2 :: R2 : R1 cuando F1 = F2, T1 = T2 y el movimiento ocurre
T1 : T2 :: R1 : R2 cuando S1 = S2, F1 = F2 y el movimiento ocurre.

Donde V es la velocidad, F es la fuerza que la motiva e inversamente proporcional a la resistencia R[205] siempre que la fuerza sea lo suficientemente grande para vencer la resistencia del medio y producir movimiento. Para el caso del movimiento por caída de un cuerpo pesado la formula sería la misma pero en lugar de la fuerza, iría el peso del objeto que va en caída. La teoría de Bradwardine fue tenida casi universalmente como "[…] la auténtica 'ley del movimiento' de Aristóteles"[206].

Con esta aproximación a una interpretación "matemática" del movimiento más la concepción de que las cualidades podían ser aumentadas o disminuidas, "[…] los maestros de Merton aplicaron varias reglas numéricas y métodos a las variaciones cualitativas y luego, por analogía, a problemas afines de movimiento en el espacio (motus localis)"[207]. Así, trataron variaciones en la velocidad o el movimiento local del mismo modo que las variaciones en la intensidad de una cualidad.

Su concepción era que la intensidad de un movimiento aumentaba con la velocidad, de la misma forma que el enrojecimiento de una manzana aumentaba con la maduración. Los estudiosos de Merton procedieron a desarrollar un marco conceptual para estudiar el movimiento. En ese marco conceptual se encontraba "[…] movimiento uniforme (movimiento a velocidad constante) y movimiento no uniforme (o acelerado)[208]. Estos conceptos de 'velocidad' prepararon el escenario para la contribución más significativa de los calculadores de Oxford a la cinemática del movimiento local, a saber, la Regla de la Velocidad Media[209].

Esta regla de la velocidad enuncia que, un cuerpo acelerado o desacelerado durante un tiempo dado cubre la misma distancia que si recorriera el mismo tiempo uniformemente con la velocidad del instante medio de su movimiento, lo cual, se define como una velocidad media[210]. Por lo que, "[…] un cuerpo en aceleración uniforme durante dos horas, cubrirá la misma distancia que un cuerpo que se mueva uniformemente durante dos horas a la velocidad

[205] David. C. Lindberg. *Opo. Sit*. P. 91
[206] A.C. Crombie. *Opo. Sit*. P. 60
[207] Marshall Clagett. *Opo. Sit*. P. 206
[208] David C. Lindberg, *Opo. Sit*. P. 373
[209] A.C., Crombie. *Opo. Sit. P. 90*
[210] Marshall, Clagett. *Opo. Sit*. P. 265

alcanzada por el primer cuerpo después de una hora"[211]. Así mismo, si la distancia recorrida en la segunda mitad de un cuerpo uniformemente acelerado desde el reposo es tres veces la distancia recorrida en la primera mitad.

Dicho teorema de la velocidad media, simbólicamente lo expresaron de la siguiente manera: "S= ½ $V_f t$, donde S es la distancia recorrida, V_f es la velocidad final, t es el tiempo de aceleración. La velocidad es uniformemente acelerada por lo que V_f=at, donde a es aceleración uniforme, por sustitución tenemos s= ½at^2. La forma de expresar matemáticamente un movimiento uniformemente acelerado que parte del reposo es Vo, por sustitución tendríamos s= $Vot + ½at^2$ porque $V_f - Vo = at$.[212]"

Estos estudiosos consideraron el movimiento local dentro del contexto más general de lo que llamaron la intensión y la remisión de las formas: cómo las cualidades y propiedades de un cuerpo se intensifican y disminuyen y cómo deben compararse a medida que cambian[213]. Esto se explica porque en el caso de un cuerpo que se volvía más blanco, por ejemplo, no intercambiando su blancura por una forma completamente nueva de un grado o intensidad más alta sino por una adición de blancura a la forma existente, lo que resulta en un mayor grado de blancura. En este caso, las cualidades se cuantificaron, y fueron expresadas en grados o intensidades. Desde que el intervalo de intensidad se llamó "latitud", la teoría sobre la cantidad de cualidades llegó a llamarse la "latitud de las formas" que Nicole Oresme (1323-1382 d.C) más adelante explicaría de una forma geométrica.

Las técnicas matemáticas desarrolladas en relación con la latitud de las formas se aplicaron a una variedad de fenómenos naturales. Por ejemplo, el calor de un cuerpo se puede medir de dos maneras: por su intensidad (lo que llamamos su temperatura) y por su extensión (la cantidad total de calor en el cuerpo). A partir de esa idea se dio una tendencia general a encontrar los medios para representar los cambios cualitativos de los cuerpos, un esfuerzo por encontrar conceptos cualitativos que pudieran ser expresados matemáticamente, lo que concluyó en el surgimiento de la velocidad como una nueva medida.

---

[211]Walter, Roy. Change and Motion En The Cambridge history of science, Vol. II Medieval Scince. Editado por David Lindberg y Michael H. Shank. (Cambridge: Cambridge University Press)430

[212] Edward Grant. *Opo. Sit*. P.101

[213] A. C. Crombie. The significance of medieval discussions of scientific method for the scientific revolution. En *Critical problems in the history of science*. Editado por Marshall Clagett. (Madison, Milwaukee y Londres: The Uniersity of Wisconsin Press, 1969) 90

El argumento principal es que las cualidades pueden existir en los cuerpos con distintos grados de intensidad, por ejemplo, el calor puede existir en diferentes intensidades, puede haber cuerpos muy fríos o muy calientes, también pasa que en el mismo cuerpo hay aumento y disminución de calor. Se trata de entender cómo ésta discusión comprende el fenómeno de intensificación y disminución de una forma de acuerdo a las categorías aristotélicas de cantidad y cualidad, de cómo tratar a las cualidades en cuanto a aumento y disminución así como con las cantidades, pues el calor por ejemplo, aumentado o disminuido no es una reunión de partes como la longitud, el volumen y la superficie, por lo cual se piensa que si el calor es una magnitud, tendría que ser una magnitud discreta, pues al igual que el número, está compuesto por partes indivisibles.

Durante los siglos XIII al XV se propusieron numerosas teorías que cuestionaban la cosmología establecida por Aristóteles. Para el movimiento violento, la explicación medieval del siglo XIII reprodujo con pequeñas variantes la explicación de Aristóteles en Física que atribuía al aire el papel de motor. Esta posición llegó a ser impugnada en el siglo siguiente. En la siguiente sección mencionaré algunas críticas de Jean Buridan, el maestro de arte de la Universidad de París y un partidario de la teoría del ímpetus.

3.2. Jean Buridan y el *Impetus*

"Pero, influido por Bradwardino, Buridán formuló su teoría con mayor exactitud cuantitativa que cualquiera de sus predecesores"[214]. Uno de los principales puntos de crítica de la dinámica aristotélica en el siglo XIV se centró en la explicación de Aristóteles del movimiento de los proyectiles. Se pregunta Buridán "si el proyectil, después de haber dejado la mano de quien lo ha lanzado, es movido por el aire o bien por alguna otra entidad"[215].

La visión aristotélica del movimiento violento exigía la presencia continua de un motor en contacto con la cosa movida. Aristóteles supuso que de alguna manera la "fuerza"

[214] A.C., Crombie. *Opo. Sit*. P. 68

[215] Jean Buridan, Quaestiones in libros physicorum, lib. VIII, q. 12: "Utrum projectum post exitum a manu projicientis moveatur ab aere vel a quo moveatur". Tomado de Prieto, Serrano, Leopoldo. "Buridán, el ímpetus y la primera unificación de la física terrestre y celeste". *Thémata. Revista de Filosofía*. Vol. 21. Número 41 (2009) 350-371. 359

original comunicaba al medio o transmitía el poder para continuar el movimiento del proyectil, de la misma manera en cómo se transmite el calor de la manos un objeto que se toca; sin embargó, Buridan no estaba satisfecho con esta explicación, sostenía que las tesis de Aristóteles son muy difíciles de aceptar porque son contrarias a muchas experiencias y adoptó la teoría del *impetus* de Filopono del siglo VI d.C.[216]

Buridan utilizó la teoría del impetus para explicar tanto el movimiento terrestre como el movimiento de los cuerpos celestes. Para postular su teoría del impetus, este pensador reunió una serie de "[…] argumentos y prácticas experimentales"[217], dichos experimentos, fueron formulados contra el argumento aristotélico de que el medio era el responsable del movimiento de los proyectiles. Dos de esos experimentos mentales dicen lo siguiente:

> Un molino, el cual, es movido continuamente por un largo tiempo y sin embargo no se sale de su lugar. Por lo tanto, no es necesario que el aire llene el lugar de partida del molino de un herrero. Por lo tanto, no se puede decir que el molino de herrero es movido por el aire de esta manera.[218]
>
> Un barco arrastrado rápidamente en el río incluso contra el flujo del río, una vez que el remeo ha cesado, no puede detenerse rápidamente, sino que continúa moviéndose durante un largo tiempo. Y sin embargo, un marinero en la cubierta no siente ningún aire desde atrás empujándolo. Siente solo el aire del frente que lo resiste[219].

Primero, la rueda del molino continuará girando en su lugar mucho tiempo después de ser movida, a pesar de que el aire no puede estar detrás de ella, y continúa girando incluso cuando se obstruye el aire colocando un paño al lado de su borde. "Además, los barcos continuarán moviéndose sin que se detecte viento detrás de ellos, y no importa cuán duro uno golpee el aire detrás de una piedra, se produce un pequeño movimiento en comparación con

[216]Frederick, Copleston. *A History of Philosophy Vol. III. Late Medieval and Renaissance Philosophy.* (Londres: Image Book, 1993) 158
[217] Edward, Grant. *God and Reason in the Middle Ages.* (Cambridge: Cambridge University Press, 2001)163
[218] Marshall, Clagett. *Opo. Sit.* P. 532
[219] Ibid. 533

tirarlo. Y finalmente, si el aire moviera proyectiles, entonces una pluma podría arrojarse más lejos que una piedra ya que es más fácil moverla por aire, pero se observa lo contrario"[220].

Dichos argumentos hicieron concluir a Buridan que los objetos no eran impulsados por el aire, sino que, un proyectil es movido por un cierto impetus o fuerza motriz impresa en él por el motor en proporción a la velocidad del elemento motriz y a la cantidad de materia prima en el proyectil, esto es:

> Pero debido a que el impetus se adquiere junto con el movimiento, el movimiento es mucho más rápido si el objeto es más grande y más grave…y por lo tanto, a mayor peso del cuerpo, el impetus será mayor y el objeto se moverá más rápido, se acelera continuamente, y así siempre, incluso hasta el final.[221]

El impetus se imprime en la dirección hacia la que se mueve el motor y es proporcional a la cantidad de materia o peso. Por lo tanto, cuanto mayor (más pesado) es un cuerpo, mayor es el impetus impreso. Este hecho podría explicar por qué un trozo de plomo se movió más lejos que una pluma; de hecho, el impetus de la pluma pronto es destruido por la resistencia del aire. Teniendo en cuenta lo dicho en las citas anteriores, se puede concluir que el impetus de un proyectil es directamente proporcional tanto a su velocidad como a su peso. Esta es la razón por la cual los cuerpos más grandes y más densos pueden lanzarse más lejos, ya que se les puede imponer un mayor impetus en virtud de su mayor cantidad de materia o peso[222].

Por otro lado, el aire junto con la tendencia natural del cuerpo pesado a moverse hacia abajo, solo sirve para disminuir el impetus al resistir el movimiento forzado, de modo que éste se vuelve más y más lento hasta que cesa por completo. El ímpetu duraría indefinidamente si no fuera por el aire (la resistencia del medio) como agente contrario. Luego sugiere que la teoría del impetus explica el movimiento continuo de la rueda o el molino del herrero después de que uno ha parado girando activamente, dice: "Y tal vez si la

[220] Walter, Roy. *Opo. Sit* P. 423
[221] Jean Buridan. Questiones De Caelo et Mundo. Página 180, Libro II, Cuestión 12, línea 15-25
[222] Danilo, Capecci. *The problem of motion of bodies. A historical view of the development of classical mechanics*. (New York, Londres: Springer, 2014) 67

rueda durara para siempre sin alguna disminución o alteración del mismo, y no hubiera resistencia que corrompiese el impetus, la rueda se movería perpetuamente por ese impetus."[223].

La teoría del impetus permitía explicar un cierto número de propiedades del movimiento como efectos del impetus sobre el móvil. Así, la aceleración o deceleración constante del movimiento eran explicadas por medio de la ganancia o pérdida del impetus. Buridan explicaba la naturaleza de este impetus en analogía con el calor impreso por el fuego sobre un metal o con el sonido producido por la percusión del badajo en una campana. "En ambos casos ni el calor ni el sonido desaparecen instantáneamente, sino que decrecen progresivamente hasta extinguirse"[224].

Para Buridan entonces, el impetus es una cualidad presente en el motor que mueve un objeto. Al ser una cualidad permanente, Buridan lo distingue del movimiento. El impetus es, por lo tanto, una fuerza motriz en el cuerpo que se mueve, es una cualidad presente de forma natural en el motor que mueve otro cuerpo, es una fuerza impresa en el cuerpo movido por el motor e inherente en él "[…] del mismo modo que se dice que una cualidad impresa en hierro por un imán mueve la plancha hacia el imán...se remite, se corrompe o impedido por la resistencia, o una inclinación contraria"[225]. Usando esta idea de impetus, Buridan pasó a explicar el movimiento de las esferas celestes y la aceleración de los cuerpos que caen.

El ímpetu es una cualidad presente naturalmente y predispuesta para mover un cuerpo en el que está impresionado, así como se dice que una calidad impresa en hierro por un imán mueve la plancha al magneto.Buridan refuta la teoría de la caída de los cuerpos de Aristóteles. Esta teoría sostenía que un cuerpo que cae naturalmente se acelera porque a medida que cae y se acerca al suelo, hay cada vez menos aire para resistir su caída; por lo tanto, su velocidad se acelerará continuamente. Buridan usa un argumento similar en contra de esta teoría, declarando que:

---

[223] Jean Buridan. Questiones De Caelo et Mundo. Página 180, Libro II, Cuestión 12, línea 30-38

[224] Prieto, Serrano, Leopoldo. "Buridán, el ímpetus y la primera unificación de la física terrestre y celeste". *Thémata. Revista de Filosofía*. Vol. 21. Número 41 (2009) 350-371 .358

[225] Jean Buridan, Quaestiones in libros physicorum, lib. VIII, q. 12: "Utrum projectum post exitum a manu projicientis moveatur ab aere vel a quo moveatur". Tomado de Marshall, Clagett. *The Science of mechanics in Middle Ages*. (Madison: London – Oxford University Press, 1961) 524

> […] Si dos cuerpos similares comienzan a caer, uno desde un lugar extremadamente alto y el otro desde un lugar bajo como una distancia de diez pies desde la tierra, esos cuerpos en el comienzo de su movimiento se mueven igual de rápido, no con el hecho de que uno de ellos tiene una gran cantidad de aire debajo y el otro tiene solo un poco. Por lo tanto, a lo largo, la mayor velocidad no surge de una mayor proximidad a la tierra o porque el cuerpo tiene menos aire debajo de ella, sino del hecho de que ese cuerpo en movimiento se mueve desde una distancia más larga y a través de un espacio más largo.[226]

El argumento se asemeja mucho al del movimiento violento, sólo que el impetus en este caso se lo da el pesó del cuerpo, pues Buridan creía que la aceleración de la caída de los cuerpos se producía porque el peso del cuerpo continuamente estaba imprimiendo más y más impetus en el cuerpo. "El impetus continuamente creciente produce la velocidad de aumento constante"[227], es decir, hace que el cuerpo acelere a medida que cae. Por las mismas razones, rechazó que cuanto mayor sea la cantidad de aire debajo de un cuerpo que cae, mayor será la resistencia. Por último, descartó la sugerencia de que entre más pesado sea un cuerpo más rápido caerá, la aceleración es causada por una diferencia de peso entre un cuerpo en un lugar alto y uno en un lugar bajo con el argumento de que debido a que las diferencias de velocidad e impacto son muy pequeñas, no pueden ser el resultado de una diferencia en peso.

Para apoyar su argumento, nuevamente recurre al experimento mental del molino: "[…] si haces girar un molino grande y muy pesado [es decir, una rueda] y luego dejas de moverlo, todavía se moverá un poco más por este impetus ha adquirido. No, no puede detenerlo inmediatamente, pero a causa de la resistencia de la gravedad del molino, el impetus se vería continuamente disminuido hasta que el molino dejara de moverse"[228].

Buridan imaginó una secuencia de fases discretas en la caída de un cuerpo. El proceso de aceleración de la caída de los cuerpos y del movimiento violento se explica asumiendo intervalos discretos de tiempo o espacio (fases). En la primera fase, solo el peso actúa y la

[226] Edward,Grant. *A History of Natural Philosophy. From the Ancient World to the Nineteenth Century.*(Cambridge: Cambridge University Press, 2007) 220
[227] Marshall, Clagett. *Opo. Sit* P. 525
[228] Ibid. 547

velocidad alcanza un valor Λv. En la segunda fase del movimiento debe considerarse un impetus correspondiente a una velocidad Λv, que sumado al efecto del peso hace que la velocidad del cuerpo, al final de la segunda fase, sea 2Λv. Al comienzo de la tercera fase, la velocidad es así 2Λv, y el cuerpo recibe un impetus correspondiente, por lo que al final de la tercera fase, la velocidad es 3Λv. Continuando con la secuencia de velocidades discretas: Λv, 2Λv, 3Λv, 4Λv, 5Λv, ...[229] "se genera y la naturaleza de aceleración del movimiento se explica y aparentemente también se cuantifica"[230]. "La explicación de Buridan está aun directamente en la tradición aristotélica, porque la fuerza es siempre proporcional a la velocidad y no a la aceleración, como sería el caso en la física newtoniana"[231]. Esta secuencia de velocidades discretas, es un reflejo de la influencia que hizo el cambio conceptual de cualidad, pues la rapidez pasó de ser la velocidad con que un cuerpo se mueve de un lugar a otro, a ser una serie de intervalos a los que se les puede asignar un número, esta secuencia de velocidades después se retomaría por Nicole Oresme en sus configuraciones del movimiento, quien lo representaría de una forma geométrica.

Para el movimiento de los cuerpos celestes, Buridan contrariamente a la teoría aristotélica del éter como explicación del movimiento de los cuerpos celestes, utilizó el impetus:

> […] Dios, cuando creó el mundo, movió cada uno de los orbes celestiales a su antojo, e invirtiéndolos, los impresionó y los movió sin que tuviera que moverlos más, excepto por el método de influencia general mediante el cual concurre como coagente en todas las cosas que tienen lugar. [...] Y estos impetus que impresionó en los cuerpos celestes no se redujeron ni se corrompieron después, porque no había inclinación de los cuerpos celestes por otros movimientos. Tampoco hubo resistencia que pudiera ser corruptora o represiva de ese impetus[232].

[229] Edward Grandt, *The Fundation of Modern Science in the Middle ages.* (Cambridge: Cambrige University Press, 2011) 97
[230] Danilo, Capecci. *Opo. Sit.* P. 71
[231] Edward Grandt, *Opo. Sit.* P. 97-98
[232] Jean Buridan, Questions of the Four Books on the Heavens II, Question 12, traducción en Clagett, Science of Mechanics in the Middle Ages, 536

De esta manera, el impetus impreso en un cuerpo se mantendría constante y se movería con un movimiento circular uniforme para siempre, aunque no de forma lineal, como ocurría en la Tierra. El impetus era perpetuo, ya que una vez impreso en el cuerpo celeste, éste no encontraba ni la tendencia contraria de la resistencia del aire. Así, "[…] Buridan incluía por primera vez el movimiento terrestre y celeste en un mismo sistema mecánico"[233].

En continuidad con la tradición de los llamados calculadores del Merton College, los filósofos parisienses comenzaron a introducir el uso de las matemáticas en el cálculo del movimiento. Este fue un mérito particular de Nicole de Oresme, un discípulo de Buridan. Alrededor de 1350 en una obra titulada *Sobre las configuraciones de las cualidades y movimientos*, que es el tratamiento más original e integral de la intensión y remisión de cualidades. Las Configuraciones de las cualidades y movimientos, es la obra en la que Oresme desarrolla toda su teoría sobre la matematización de las cualidades[234], en ella representa las variaciones de cualidades a través de diagramas de geometría euclidiana con los cuales trata una serie de temas actuales para la escolástica del siglo XIV, especialmente la medición de las cualidades, entre ellas, la velocidad.[235]

3.3. La teoría de las configuraciones de Nicole Oresme y la geometrizacion del movimiento.

Nicole Oresme, aceptó la interpretación del movimiento de Buridan, sin embargo, también retomó el teorema de la velocidad de los Calculadores de Merton College, pues aunque Oresme aceptaba que el impulso del movimiento violento era impuesto por otro que contaba con esta cualidad, creía que cualquier movimiento empezaba con velocidad cero. A diferencia de Buridan, Oresme analizó la generación del impetus en un cuerpo arrojado. Él dividió el movimiento violento resultante en tres pasos:

[233] Prieto, Serrano, Leopoldo. *Opo. Sit.* P. 358

[234] George Sarton, *Introduction to the history of science Vol. 3, parte 2*. (Washintong: Carnegie Institution of Washintong 1951)pp.1486-1489

[235]Dana B. Durand, "Nicole Oresme and the Mediaeval Origins of Modern Science", *Speculum*, Vol. 16, No. 2. (Apr., 1941), pp. 167-185. Pp174

> Por lo tanto, el movimiento violento tiene tres etapas o partes: una etapa es cuando el objeto móvil está en contacto con el agente que causa el impetus; en ese momento, el impetus aumenta y, si no hay retroceso accidental, la generación o aceleración de la velocidad aumenta. De esto, se sigue que el crecimiento de esta cualidad o tensión también aumenta. En segundo lugar, cuando el cuerpo movido violentamente se separa del agente o motor primario, entonces la velocidad aumenta, pero la generación, fortalecimiento o aumento de la velocidad se reduce cada vez menos y finalmente se detiene; y en ese momento la velocidad en sí misma y la cualidad o tensión ya no aumentan. La tercera etapa comienza; entonces la cualidad natural del objeto en movimiento, su peso, reduce esta cualidad o tensión que milita en contra de su movimiento natural de modo que el movimiento se ralentiza y el impetus disminuye y finalmente se detiene. De esta manera y en ninguna otra podemos explicar las apariencias de todos los experimentos que podemos observar con movimiento violento, ya sea ruptura recta alta, recta abajo, entrecruzada o circular, con respecto a su velocidad y lentitud y reflejo o retorno y con respecto de todos los asuntos para los cuales podemos asignar alguna otra causa suficiente […][236].

En la primera, el objeto que se mueve está en contacto con el motor causante del movimiento, luego de que el móvil abandona el motor, por ejemplo, una roca abandona el brazo que la lanza, la aceleración disminuye mientras que la velocidad aumenta. En la última fase el peso reduce el impetus y el movimiento se vuelve cada vez más lento hasta detenerse, el movimiento no era sólo la suma de intervalos de velocidad como lo había enunciado Buridan, sino también una resta de ellos cuando el movimiento empieza a cesar. Sin embargo, esta concepción del movimiento de Oresme no fue su único tema de estudio, él también contribuyó al tema del análisis de las cualidades, y en este sentido, lo enriqueció y lo clarificó en un sistema de representación geométrica, en los que incluiría las cualidades y el movimiento de los cuerpos.

[236] Nicole, Oresme. Le Livre du Ciel et dumonde. Traduccion tomada de Danilo, Capecci. *The problem of motion of bodies. A historical view of the development of classical mechanics*. (New York, Londres: Springer, 2014)75- 76

En la intensión y la remisión de formas o cualidades, los filósofos naturales medievales asumieron que casi cualquier cualidad variable podía aumentarse o reducirse mediante la suma o la resta de partes idénticas. De la misma manera, que si se pudiera abstraer la gravedad de un cuerpo y añadirla al peso de otro cuerpo, este último se haría más pesado. Se afirmaba, que la intensidad de una cualidad como la del calor era susceptible de ser medida numéricamente, de la misma forma que la magnitud de una cantidad. Al suponer que tales operaciones eran conceptualmente significativas, Oresme representó cualidades variables mediante figuras geométricas, marcando así una desviación de sus predecesores en el Merton College.

Fue esta concepción de la relación entre la intensión y la remisión la que dio origen al segundo método de expresar las relaciones numéricas con las cualidades, un método geométrico por medio de gráficas y proporciones. Los griegos utilizaron algunas veces el álgebra en conexión con la geometría, como los pitagóricos, Eudoxo y Arquímedes, sin embargo, ellos sólo lo hicieron para hacer comparaciones entre magnitudes, es decir, partían del conocimiento de una magnitud para medir a otras magnitudes pero jamás combinaron dos tipos de magnitudes, es decir, las discretas y las continuas. Jamás pensaron que una cantidad que podía ser pensada como continua, como por ejemplo el calor, podía ser representada y "medida" en términos de magnitudes geométricas, es decir, magnitudes discretas, Oresme combinó ambas en sus representaciones geométricas de las cualidades como explicaré a continuación.

Como había mencionado antes, para Aristóteles la cantidad y la cualidad pertenecían a categorías absolutamente distintas, sin embargo, Oresme sugirió la posibilidad de que ambas se combinaran: "Todo lo que se puede medir excepto los números se imagina a la manera de una cantidad continua. Por lo tanto, es apropiado imaginarse para sus puntos de medición, líneas y superficies o las propiedades de esas cosas, en las cuales, como dice el Filósofo, se puede encontrar inmediatamente una medida o proporción. . . Y ya sea que existan puntos indivisibles o no, sin embargo, es apropiado imaginarlos en forma matemática, para conocer la medida de las cosas y su proporción"[237]. En este pasaje reconoce la necesidad

[237] Marshall, Clagett. *Opo. Sit.* P. 347

del uso de la matemática y la geometría necesarias para un mejor entendimiento de la naturaleza, tal como lo había hecho antes Grosseteste.

La idea básica del sistema es simple. Su propósito era representar la cantidad de una cualidad por medio de una figura geométrica de un área y forma equivalentes. Las figuras geométricas, particularmente las áreas, se pueden usar para representar la cantidad de una cualidad. El método propuesto por Oresme para fusionar el enfoque matemático al estudio de las cualidades lo llamó *latitud de las formas*[238] se llevó a cabo tomando una línea horizontal que representa AC (Figura 1).

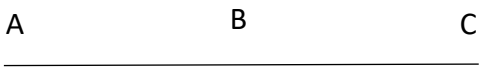


Figura 1.

La línea AC representa la extensión en el espacio o en el tiempo de un objeto cuyas cualidades van a ser medidas. La extensión puede dividirse en espacios iguales AB, BC, llamadas grados, mediante los cuales se puede indicar el aumento o disminución de una cualidad dibujando una línea vertical en algún punto del objeto llamada latitud[239] (Figura 2).

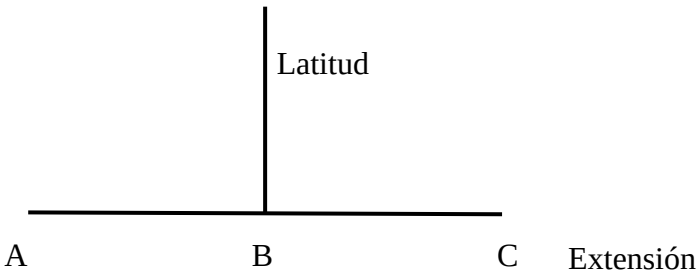


Figura 2.

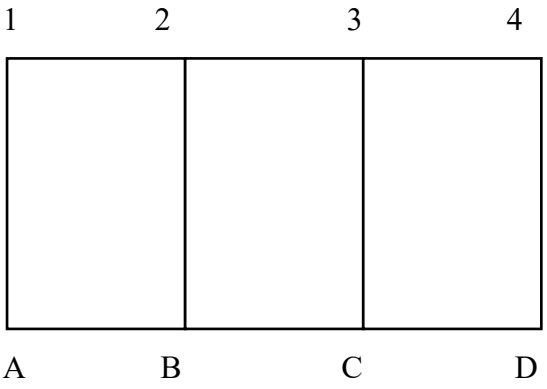
Se puede trazar una figura geométrica para representar la intensidad de una cualidad en cualquier punto del objeto, por ejemplo, la extensión AD, puede ser una varilla de metal

[238] A.C. Crombie. *Opo. Sit* P. 89

[239] Los mismos términos usados por Oresme y sus contemporáneos para graficar cualidades y movimientos – "latitud" y "longitud" - fueron términos geométricos que desde hace mucho tiempo se convirtieron en la propiedad de la geografía y la astronomía, y su uso por los escolásticos podría reflejar no simplemente una comprensión básica de la geometría, pero más bien una transferencia intencional de los términos de un tipo de gráficos a otro. Marshal Clagett, The Science of Mechanics in the Middle Ages. 333

calentada de forma distinta, de modo que del extremo A esté más caliente que el extremo D[240]. Si la temperatura incrementa de forma uniforme, las latitudes tendrán un tamaño uniforme, de forma que se puedan trazar varias latitudes en una extensión con una misma escala representando la cumbre con otra línea horizontal dando como resultado la siguiente figura geométrica[241]:

Figura 3.



Oresme muestra cómo dos cualidades iguales pueden tener diferentes efectos. Una forma en que esto puede ocurrir es si las cualidades son iguales pero de intensidad desigual. Por ejemplo, "A y B sean dos penas, siendo A el doble de intensivo que B y la mitad de extenso. Entonces serán iguales simplemente ... aunque el dolor A es peor que, o más para ser evitado que, el dolor B. Porque es más tolerable estar en menos dolor durante dos días que en un gran dolor por un día. Pero estos dos dolores iguales y uniformes cuando se comparan mutuamente se configuran de manera diferente, ... de modo que si el dolor A se asimila a un cuadrado, entonces el dolor B se asimilará a un rectángulo cuyo lado más largo denotará extensión, y el rectángulo y el cuadrado se igualen."[242].

Pero su importancia para el presente estudio es que, al tratar las cualidades, sigue a sus predecesores ingleses al tratar también los cambios de velocidad respecto del movimiento local; y entonces nos da un método geométrico para presentar los cambios de velocidad.

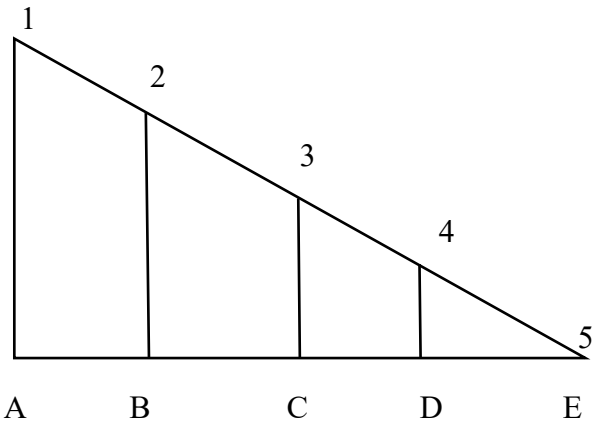
[240] David C. Lindberg. *Opo. Sit* P. 375

[241] Nicole Oresme De latitudinibus formarum. Add: Blasius Pellecanus, Quaestiones super tractatus de latitudinibus formarum Nicolai Oresme (I, II) pp.1 https://archive.org/details/ita-bnc-in2-00002176-001

[242] Oresme's Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum, part II, ch. 39, in Marshall Clagett, ed. and trans., Nicole Oresme and the Medieval Geometry of Qualities and Motions. Tomado de Edward, Grant. God and reason in The Middle Ages, 172

Cuando dicha intensidad es la velocidad, existen dos tipos de movimiento llamados, uniforme y uniformemente disforme. El rectángulo de la figura 3 representa el movimiento de una velocidad uniforme, ya que las latitudes A1, B2, C3, D4 son del mismo tamaño y por lo tanto la intensidad del movimiento es uniforme en todos sus grados ABCD. Para representar el segundo movimiento – uniformemente disforme – tenemos la siguiente figura geométrica[243].

Figura 4.



Las líneas AE y AD que representaban la extensión del objeto, representan la duración del movimiento, esto es, el tiempo. Así, geométricamente la velocidad se relaciona con el tiempo, la velocidad uniforme se representa con una figura cuyas líneas verticales son de igual longitud, como en el caso del rectángulo. En el caso de un movimiento uniformemente acelerado, requiere de líneas que van creciendo de manera uniforme como el triángulo, en este caso como la velocidad es uniforme pero va aumentando en intervalos iguales, le llamaban movimiento uniformemente disforme, en el caso de que el movimiento fuera en aumento pero en cantidades no proporcionales le llamaban movimiento disformemente disforme, lo cual formaría una figura con irregularidades en la línea que representa la velocidad[244], como en el caso de la figura 5[245].

[243] Nicole Oresme De latitudinibus formarum. Add: Blasius Pellecanus, Quaestiones super tractatus de latitudinibus formarum Nicolai Oresme (I, II) pp.1 https://archive.org/details/ita-bnc-in2-00002176-001
[244] A. C., Crombie, *Opo. Sit*. P. 87
[245]Nicole Oresme De latitudinibus formarum. Add: Blasius Pellecanus, Quaestiones super tractatus de latitudinibus formarum Nicolai Oresme (I, II) pp.1 https://archive.org/details/ita-bnc-in2-00002176-001

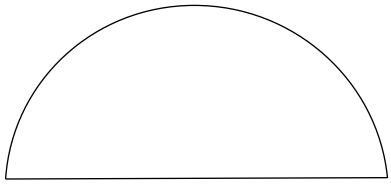


Figura 5

Oresme entendió que las áreas de las figuras en el caso del movimiento local representan las distancias recorridas en los tomos correspondientes representados en cada caso. Lo uniforme y lo disforme indican que la intensión se mantiene o varía en cierto grado, que aumenta o disminuye, aquí se puede ver que indican un parámetro de medición. De este modo, se comienzan a tratar aumentos y disminuciones cualitativas en términos de proporciones cuantitativas. Las propiedades de la figura podían representar propiedades intrínsecas a la misma cualidad

Oresme representa la cualidad de un objeto de acuerdo con la variación de intensidad respecto del tiempo. Sobre la base de estas comparaciones, Oresme geometrizó el teorema de la velocidad de los calculadores de Merton College. Dicho teorema de la velocidad se expresa de la siguiente forma: S= ½ $V_f t$, donde S es la distancia recorrida, V_f es la velocidad final, t es el tiempo de aceleración[246]. Con este teorema trataron de definir la noción de la velocidad instantánea. Oresme formula el tratamiento geométrico de esta cuestión de la siguiente manera:

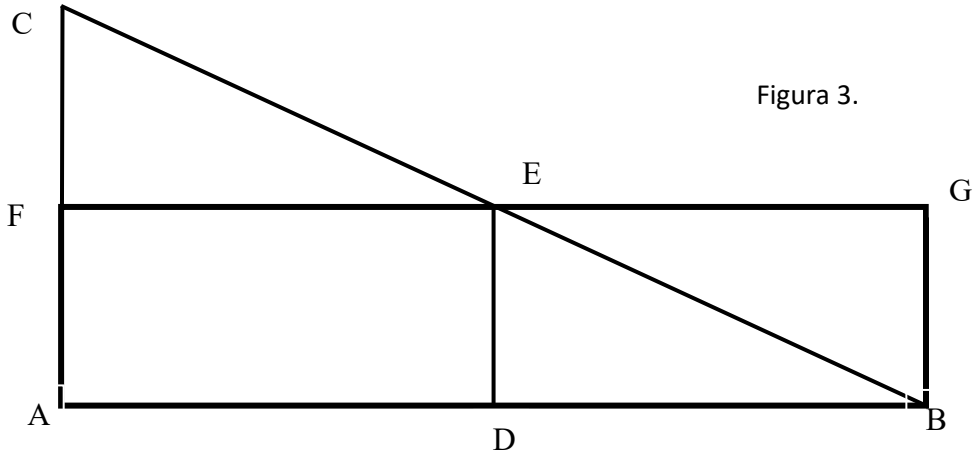


Figura 3.

[246] Eward, Grant. *Opo. Sit*. P.173

Donde:

AB = la línea del tiempo

AD; AF; GB = velocidad

FEG = Velocidad media

DE = a la velocidad instantánea que un cuerpo adquiere en el instante medio del tiempo medio. Si el cuerpo se moviera uniformemente con cualquier velocidad que tuviera DE, la distancia que recorrería al pasar de G a F en el tiempo AB, está siendo representada por el rectángulo ABGF, por lo que se demuestra que el triángulo ABC tiene la misma área que el rectángulo ABGF.

Como se puede ver, es mucho más sencilla la explicación de Oresme al mostrar que la velocidad total es equivalente a la distancia que recorre un cuerpo en movimiento. De ahí se sigue la comprobación de la velocidad media, pues en el esquema es evidente que el área de un triángulo rectángulo ABC, que representa la intensidad total de una cualidad distribuida uniformemente disforme desde cero es igual a la del rectángulo ABGF de la misma base con la mitad de su altura, lo cual, representa una cualidad uniforme en grado medio, y puesto que el área del triángulo DEB que representa la mitad más lenta del movimiento es un cuarto del are del triángulo ABC.[247] Así, compara las áreas de tales cifras y concluye que al comparar las áreas, se puede tener una base para la comparación de diferentes cualidades y movimientos.

En palabras más simples quiere decir que un cuerpo que tiene un movimiento con aceleración constante, que cubre una distancia en un cierto tiempo, cubrirá la misma distancia si se moviera por el mismo tiempo con una velocidad igual a la velocidad promedio. Por ejemplo, si yo lanzo una flecha con un movimiento uniformemente acelerado entre 0 y 100 kilómetros por hora en un tiempo determinado, entonces esa flecha recorrería la misma distancia en el mismo tiempo con velocidad uniforme de 50 kilómetros por hora. El movimiento de la flecha está representado por el triángulo ABC, la velocidad media por la

[247] David C, Lindberg. *Opo. Sit. 378-379*

altura del rectángulo D mientras que la velocidad uniforme de la flecha se representa por el rectángulo ABGF. El teorema de Merton trata de explicar que, la distancia que recorre un cuerpo bajo las condiciones arriba explicadas, es igual a la otra. En la figura 3 la distancia recorrida es medida por el área de las figuras, podemos demostrar el teorema de Merton probando que el área del triángulo y el rectángulo son las mismas, como lo menciona en la siguiente cita:

> Toda cualidad uniformemente disforme posee la misma cantidad como si informara uniformemente al mismo sujeto según el grado del punto medio. Por <<según el grado del punto medio>> entiendo: si la cualidad es lineal. Para la cualidad de una superficie sería preciso decir: <<según el grado de la línea media>>. […] Es evidente entonces que toda cualidad uniformemente disforme o cualquier velocidad es igualada por una cualidad o velocidad uniforme.[248]

No hay que suponer que se habla de medición como práctica, más bien se refiere a las relaciones proporcionales entre entidades geométricas, "[…] son sus observaciones sobre la geometría de Euclides"[249]. Dichas relaciones proporcionales comenzaron con la suposición de Oresme acerca de que "cada cantidad es una parte o partes de otra"[250], a las cuales, se les pueden asignar dos números, a saber, un numerador y un denominador. Esta relación de números tiene un sentido exponencial, por ejemplo, si tenemos alguna cantidad A y tomados tres de sus cinco partes, entones $(A)^{3/5}$, donde 3 es el numerador y 5 es el denominador del exponente[251]. Así, si tenemos alguna cantidad A y tomamos parte o partes de ella, el resto también será una parte o partes de la cantidad original. Por lo tanto, si tomamos $(A)^{3/5}$ nos queda $(A)^{2/5}$ ya que A= $(A)^{3/5}\bullet(A)^{2/5}$ [252]. La tercera suposición afirma que cualquier cantidad dividida en dos, donde una es parte o partes del todo, tendrá las dos partes

[248]Nicole Oresme, De Configuratione Qualitatum, parte 3, capítulo 7. Tomado de Crombie. Historia de la ciencia: de San Agustin a Galileo.90-91

[249]Serrano. M. Isabel, Suceava D. Bogdan. "A Medieval Mystery: Nicole Oresme's Concept of Curvitas".*Notices of the AMS.* Volumen 62, Numero 9. (Octubre 2015)pp.1030-1034

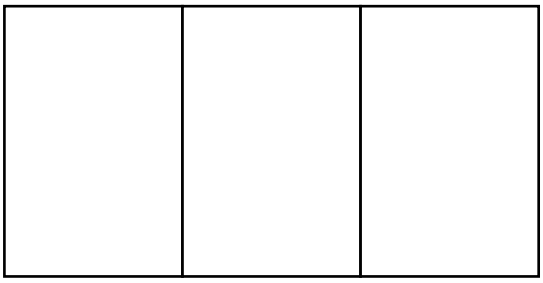
[250] Nicole Oresme, De Proportionubus proportionum. Capítulo 2, primera parte, proposición 3

[251] Ibid. Para facilitar la explicación, estoy tomando nomenclatura de Edward Grant, Introducción página 26.

[252] Ibid.

relacionadas como sus numeradores, al igual que $(A)^{2/5}$y $(A)^{3/5}$ se relacionan como una proporción de números 2/3, o por el contrario como 3/2[253].

Estas relaciones de proporción con "cantidades" son las mismas expresiones geométricas que Oresme usó para representar el movimiento uniforme y el uniformemente disforme. Si tuviéramos el rectángulo de la figura dividido en 3 partes iguales, sería una proporción expresada $(A)^{3/3}$, cada parte del rectángulo sería una cantidad $(A)^{1/3}$, y si tomamos dos de sus tres partes seria $(A)^{2/3}$. La representación gráfica sería la siguiente:



$^{1}/_{3}$ $^{2}/_{3}$ $^{3}/_{3}$

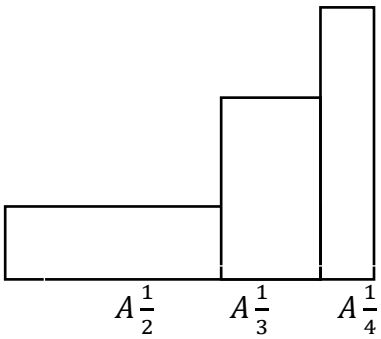
Estas suposiciones revelan que "Oresme se ocupaba de relaciones puramente numéricas entre las partes de un todo representado geométricamente, es decir, está relacionando los exponentes numéricos de forma unitaria"[254]. De esta forma es como trata las magnitudes geométricas como cantidades. Parece exponer con ello sólo las relaciones entre las proporciones consideradas como cantidades en el sentido más amplio, que incluyen proporciones racionales o irracionales. Esto se explica cuando dice que dos razones como $(A)^{2/5}$y $(A)^{3/5}$ podrían ser irracionales, mientras que sus relaciones exponenciales están representadas por una relación de números[255] o, como dice Oresme, "la relación de estas proporciones será la relación de esos números. Puedes descubrir la relación de los números por aritmética"[256]. (II.I.430-32). Por ejemplo, las proporciones $(A)^{2/5}\bullet(A)^{3/5}$, son

[253] Ibid.
[254] Nicole Oresme, De Proportionubus proportionum. Edward Grant, introducción, 27
[255] Edward Grant explica esta relación diciendo "Lo que quiere decir es que un número, en cuanto número, no es diferente de ningún otro, 2 es la raíz cuadrada de 4, al igual que √2 es la raíz cuadrada de 2. Solo podemos hablar de inconmensurabilidad si consideramos la relación de dos números, 6√2 es racional en términos de √2 e irracional en términos de 2."
[256] Nicole Oresme, De Proportionubus proportionum. Libro II. 1. Líneas 430-432

irracionales, mientras que sus exponentes están representando una parte de la cantidad total de A, A= $(A)^{2/5}\bullet(A)^{3/5}$[257].

Lo que demuestra que este pensador, aunque utiliza aun geometría euclidiana para sus configuraciones, no lo hace para comparar magnitudes geométricas, sino para encontrar proporciones entre cantidades, es decir, está relacionando la aritmética con la geometría, sin embargo dice, "[…] por extensión, se puede decir que no todas las razones racionales tienen una relación racional conmensurable; ni (tiene cada racional otro racional conmensurable) en […] y esto se puede decir de otros géneros y especies (de proporciones)."[258], pensando en que efectivamente hay relaciones irracionales que no tienen ninguna proporción racional común, sin embargo pueden ser "medidas" si se tratan aritméticamente. En otras palabras, Oresme multiplica muchas veces una cantidad o una razón irracional hasta que la cantidad resultante sea racional, algo similar a lo que hacía Eudoxo geométricamente, dividir magnitudes geométricas tan pequeñas como se quieran o aumentarlas tan grandes como se quieran.

Aquí personalmente me parece que es importante hablar de las magnitudes continuas, recordando la geometría y magnitudes griegas, éstas pueden ser divididas y aumentadas hasta el infinito por lo cual, el medir en la época medieval es agregar y disminuir tanto como se quiera, como mencioné anteriormente, solo entre magnitudes del mismo tipo, pero si medir es agregar o disminuir, medir entonces es encontrar proporciones. Para los griegos una magnitud geométrica era inconmensurable porque no tenía otra magnitud proporcional que la divida en partes iguales, Oresme elimina esta dificultad tratando aritméticamente a las magnitudes geométricas por medio de series vistas como cantidades:



[257] Actualmente, una de las leyes de los exponentes es $x^2\bullet x^3=x^{2+3}$

[258] Nicole Oresme, De Proportionubus proportionum. Libro II. 3. Líneas 285-295

Oresme señaló que "la suma de $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$ es más grande que $\frac{1}{2}$, así como la suma de los siguientes cuatro términos de $\frac{1}{5}$ a $\frac{1}{8}$ y la suma de los siguientes ocho términos de $\frac{1}{9}$ a $\frac{1}{16}$, etc., entonces el total llegará a ser infinito"[259], aquí Oresme se basa en que "cualquier relación es como una cantidad continua en el sentido de que es divisible en infinito al igual que una cantidad continua. [Es divisible] en dos partes iguales, o tres, o cuatro, etc .; en partes desiguales de cualquier manera; en partes conmensurables y en partes inconmensurables, etc. y, de hecho, de cualquier otra manera[260]". Con ello muestra nuevamente que usa la geometría euclidiana para encontrar proporciones entre cantidades, en otras palabras, usa proporciones geométricas − que serían continuas − para encontrar proporciones entre cantidades − que serían discontinuas − de esta manera "Oresme ayudó a romper las barreras artificiales entre el número y la magnitud que plagaron las matemáticas desde la antigüedad griega"[261].

Antes de las configuraciones de Oresme, no era posible dar una definición métrica para la velocidad porque el movimiento era tratado como uno de los cuatro tipos de cambio aristotélicos. Además, tampoco era posible comparar magnitudes de distinto tipo, una proporción verdadera resultaba de comparar dos distancias o dos tiempos, pues sólo comparaban magnitudes del mismo tipo (longitudes con longitudes, volumen con volumen, etc.) pero no distancia con tiempo, sin embargo las configuraciones entendidas como representaciones geométricas del movimiento (y de las cualidades de los cuerpos) permite reducir las magnitudes bajo el mismo criterio, pues en las figuras anteriores, representan la comparación entre la línea que representan tiempo, distancia y la velocidad, por lo cual, este es el comienzo de comparación entre magnitudes de distinta especie, pues el primero fue lograr cuantificar cualidades. Los estudiosos de Merton College y los parisinos crearon un conjunto de herramientas matemáticas geométricas, algunos de los cuales fueron empleados posteriormente por Galileo. A pesar de que la clasificación cualitativa de Aristóteles dominaba las interpretaciones de la naturaleza, los pensadores medievales dieron los primeros pasos hacia una física basada en la medición y el cálculo.

[259] Ricardo, Cantoral. María Farfán. *Desarrollo conceptual del cálculo.* (México: Thomson, 2004) 53
[260] Nicole Oresme, De Proportionubus proportionum. Libro 1 suposición 5, líneas 268-270
[261] Nicole Oresme, De Proportionubus proportionum. Introducción por Edward Grant página 27

Resumen

Desarrollo conceptual de movimiento

En el periodo estudiado en esta investigación, se puede ver también un desarrollo epistemológico que tiene que ver con un cambio conceptual de algunos principios que componían el conocimiento acerca del mundo físico. Dicho cambio conceptual se da sobre la base de la cosmología aristotélica con los pensadores Medievales. Los principales cambios se llevaron a cabo en el concepto de movimiento. Uno de los motivos para que se diera ese cambio conceptual comienza con una crítica a la filosofía aristotélica que, conduciría gradualmente a una concepción diferente de estudiar el mundo natural, me refiero a que comenzaron a ver en la matemática –particularmente la geometría – una herramienta para interpretar los fenómenos físicos como la refracción de la luz, o en el caso de esta investigación, el movimiento y la velocidad.

La crítica a la filosofía natural aristotélica que hizo Filopono y después Buridán, se dio, entre otras cosas, porque no había una correspondencia observacional entre los argumentos expuestos por Aristóteles y los de dichos pensadores. Cómo lo mencioné en el segundo capítulo, Aristóteles expuso que el movimiento violento se da por una capacidad de movimiento que le transmite el moviente al tocar el objeto que mueve, por ejemplo, si un arquero lanza una flecha le imprimirá *dunamis* (aquello que imprime el moviente sobre un objeto para que este se mueva, dicha palabra significa 'ser capaz de'), una vez que el objeto deja de tocar la mano que lo mueve, lo que mantendrá a la flecha en movimiento será el aire que la empujará desde atrás. El problema para Filopono es que la interpretación aristotélica no explicaba cómo el aire podía mantener los objetos en movimiento aun cuando el moviente deja de tocar el objeto que mueve. Por lo cual, sugirió que el movimiento de dicha flecha era impulsado por una fuerza que llamó 'ímpetus', dicha fuerza era implantada directamente en la flecha, no en el aire —como argumentó Aristóteles — y que dicha fuerza se va agotando con el movimiento en curso.

Siglos más tarde, Buridan adoptó la teoría del ímpetus de Filopono apoyándola diciendo que, un barco en el mar impulsado por el remeo sigue moviéndose a pesar del cese del remeo que lo impulsa, cuando el viento sopla en una dirección contraria a su movimiento

éste continúa moviéndose en su camino y no cambia hacia la dirección que lleva el viento. De esta manera concluye que el impetus es una especie de 'fuerza' que aplica el moviente a la cosa movida, dicha fuerza va aumentando al comienzo del movimiento y luego va disminuyendo en intervalos discretos de tiempo o espacio.

Lo importante de esta interpretación del movimiento de los cuerpos, es que, esa secuencia de velocidades en intervalos discretos, influenció el desarrollo conceptual que llevarían a cabo los pensadores escolásticos del siglo XVI, pues para entonces 'velocidad' como concepto cualitativo, significaba la comparación de un cuerpo con respecto de otro en movimiento, – es decir, esto es más rápido que lo otro—. El cambió fue que para Buridan, la velocidad pasó a ser una serie de intervalos a los que se les puede asignar un valor numérico, esta secuencia de velocidades después se retomaría por Nicole Oresme, quien haría una medición teórica de la velocidad.

Otro de los puntos principales que influenciaron el desarrollo conceptual, es que se llevaron a cabo cambios en las categorías de 'cualidad' y 'cantidad'. El cambio en los conceptos cualitativos se llevó a cabo dentro de la filosofía aristotélica. Pedro Lombardo pensó que el espíritu santo podía aumentarse o disminuirse respecto de su mayor o menor participación en la caridad, basándose en que Aristóteles decía lo mismo de la justicia. Esta afirmación influenció a más pensadores medievales como Scoto y los investigadores del Colegio de Merton a sugerir que las cualidades podían ser aumentadas por una adición de partes similares nuevas, por ejemplo que un cuerpo blanco podía tener un grado mayor de blancura por la adición de blancura a la forma ya existente.

Lo relevante de estas afirmaciones es que empezaron a cambiar la noción de cualidad, y al mismo tiempo, la noción de magnitud. Se consideraba que una cantidad es continua cuando había una suma de partes que son de la misma naturaleza (longitud más longitud, etc.). En las magnitudes discontinuas, como el número, también hay una suma por adición de nuevas cantidades. En ambas, el aumento se da por la agregación de nuevas partes sin afectar las ya existentes. De esta misma manera se comenzó un nuevo tratamiento de las cualidades, se empezó a ver a las cualidades como magnitudes a las que es posible asignarles un número.

Tales ideas condujeron al uso de las matemáticas para estudiar cualidades, pues los pensadores medievales asumieron que casi cualquier cualidad podía aumentarse o disminuirse mediante la suma o la resta de partes. Oresme empezó ver a todas las cualidades como cantidades continuas, a las que era conveniente representarlas como líneas y superficies para conocer sus medidas y sus proporciones. Con ello, pudo ver 'cuanto' de cualidad tiene un sujeto determinado en comparación con otros o con una unidad de medida De esta manera, este pensador estudió la velocidad como una propiedad con la capacidad de tener distintos grados de intensidad con respecto del tiempo y el espacio recorrido, usó la geometría para representar el movimiento de un cuerpo partiendo del reposo, creó nuevos conceptos para estudiar los distintos tipos de movimiento (movimiento uniforme, uniformemente acelerado, uniformemente disforme).

Así, Oresme 'introdujo' una nueva concepción de velocidad completamente diferente al que se tenía. El movimiento por desplazamiento seguía siendo considerado como un cambio aristotélico y la velocidad era la intensidad cuantificada de ese cambio, como está expuesto en el capítulo tres, ese accidente puede ser constante, puede variar o puede experimentar *intensión* y *remisión*. El trabajo de este pensador parisino, consistió en dar explicaciones a los fenómenos naturales como el movimiento, sin embargo, también consistió en proponer un marco teórico desde el cual generar explicaciones plausibles desde *las configuraciones geométricas* como herramienta de medición teórica, con la cual, se podían tratar a las cualidades en la categoría de cantidad, lo que implicaba el comienzo del estudio en abstracto – teórico – de las leyes del movimiento de los cuerpo.

Las críticas a la cosmología aristotélica, los cambios conceptuales señalados y la creación de nuevos conceptos para explicar sus nuevos métodos de investigación, fueron útiles en su momento pues satisfacían su búsqueda de respuestas a los problemas que surgían. Aunque realizaron algunas mediciones, no se llevó a cabo una medición real con base en la experimentación para que sus soluciones se realizaran sobre una base de hechos reales. Sin embargo, hubo un cambio en la forma de estudiar el mundo físico, pues antes de dicho cambio los fenómenos físicos estaban sujetos a la explicación de la cosmología aristotélica. De esta manera, se avanzaba también en el conocimiento del mundo físico.

Desarrollo metodológico

La aparición de problemas en la ciencia trae consigo el desarrollo de metodologías y la creación de conceptos para su resolución. El primer problema descrito en el primer capítulo fue el del descubrimiento de los inconmensurables por parte de los pitagóricos. No se podía encontrar ninguna manera de medir dos magnitudes que fueran inconmensurables entre sí, o, en otras palabras, su teoría de la proporcionalidad explicaba solamente magnitudes conmensurables, a esos segmentos inconmensurables les llamaron 'falto de razón'.

Fue la nueva teoría de la proporcionalidad desarrollada por Eudoxo la que formó el 'mayor éxito' porque a diferencia de los pitagóricos, el segundo método de exhaucion podía incluir magnitudes inconmensurables en sus aplicaciones resolviendo de esa manera el primer problema. Este conocimiento fue preservado por Euclides en sus Elementos, los cuales, permitieron el manejo y la aplicación de la geometría a problemas de la matemática de la época, como aquellos dirigidos a la demostración de proposiciones sobre áreas y volúmenes de figuras limitadas por líneas o superficies, facilitando así la medición mediante magnitudes geométricas y proporciones.

El siguiente problema, fue la 'medición' de cualidades, ¿cómo podía medirse la blancura, el calor o la velocidad? Las cualidades, como ya lo expliqué en el tercer capítulo, fueron estudiadas desde dentro de la filosofía aristotélica en combinación con aspectos teológicos, con ello me refiero a que, basándose en la concepción aristotélica de que cualidades abstractas como la justicia, aumentaban o disminuían de acuerdo con su mayor o menor participación en ellas, los pensadores medievales analógicamente pensaron que pasaba lo mismo con la caridad. Lo importante de estas reflexiones acerca de las cualidades, es que gracias a ellas se comenzó a ver a las demás cualidades como aumentables o disminuibles, es decir, como cualidades que se pueden tratar como una cantidad.

De estas reflexiones acerca de las cualidades se desprenden dos cosas; la primera que se empezó a pensar en el movimiento en términos de distancia y tiempo de forma matemática, y derivado de esto último, que se platearon metodologías para poder medirlo, uno de esas metodologías fue la de Bradwardine. Él usó el término de proporcionalidad que está en V de Euclides para el estudio de la mecánica y así generalizar las reglas del movimiento aristotélico en leyes del movimiento.

Aristóteles había formulado sus reglas con el término de 'proporcionalidad' al sugerir que, la distancia recorrida por un cuerpo está en proporción directa con el 'impulso' (*dúnamis*) que actúa sobre él y al tiempo transcurrido, mientras está en proporción inversa a la densidad del cuerpo, sin embargo, no lo hizo con un enfoque matemático, sino más bien cualitativo. Lo importante, es que Bradwardine le dio una interpretación matemática a las reglas aristotélicas de movimiento[262] formulando 'métricamente' una función que resumió su concepción del movimiento, aunque dicha función no se adecuara a los hechos reales, ni tampoco fuera sometida a ninguna comprobación empírica.

La función formulada por Bradwardine, intenta indirectamente definir la velocidad como una razón entre tiempo, el espacio recorrido, la fuerza (dunamis) transmitida y la densidad del cuerpo, por lo que, parece implícitamente que supuso que la velocidad podía ser expresada por un número o una cantidad, al igual que el espacio y el tiempo. Su metodología se desarrolla para expresar dichas relaciones con letras del alfabeto en lugar de números para sustituir las cantidades. El trabajo de Bradwardine es una muestra clara de que empezaba a haber un interés en la matemática como una ciencia importante para estudiar la naturaleza, dicho interés y metodología fueron seguidos por otros autores como los pensadores del Merton College.

Los estudiosos de Merton, formularon su teorema de la velocidad media[263], ellos comenzaron a pensar en el movimiento en relación al tiempo y la distancia[264], en la variación en la velocidad del movimiento local, ya que había movimientos más rápidos que otros, formularon su teorema en términos de velocidad inicial y velocidad final. Crearon conceptos para estudiar al movimiento mediante su teorema, por ejemplo, definieron movimiento uniformemente acelerado como aquel en el que la velocidad aumenta mediante incrementos iguales en unidades iguales de tiempo. También establecieron conceptos como el de la intensión y remisión de las formas para referirse a la intensificación y disminución de las cualidades.

Para los estudiosos de Merton, una forma era cualquier cualidad en la naturaleza, como el movimiento, con su aumento o su disminución. La *intensión* o *remisión*, eran los

[262] V α S/T α F/R. En el caso del movimiento violento: V α F/R

[263] Que un movimiento uniformemente acelerado o retardado es equivalente, por lo que respecta al espacio recorrido en un tiempo determinado, a un movimiento uniforme cuya velocidad es igual absolutamente a la velocidad instantánea poseída por el movimiento uniformemente acelerado o retardado en el instante medio del tiempo. $\upsilon = \upsilon_0 + a \cdot t$

[264] Sin embargo, no establecieron que la velocidad es igual al cociente diferencial entre espacio y tiempo

valores numéricos que había que asignarle cuando la velocidad aumentaba o disminuía. Ambos conceptos estaban en relación con la *extensión*, pues en el caso del movimiento, la *intensión* cambiaba en relación a otra forma conocida como la distancia o el tiempo. Esta relación entre extensión e intensión dio origen al método geométrico de expresar dichas relaciones de forma cuantitativa.

Oresme retomó la metodología de estudio de los maestros de Merton y la convertiría en la 'latitud de las formas' ―en sus configuraciones geométricas― estudiando así, las cualidades desde un punto de vista geométrico, usando la geometría euclidiana para estudiar por ejemplo el movimiento de los cuerpos. Este pesador parisino, siguiendo la práctica habitual de los 'mertonianos', representó la *extension* por una línea recta horizontal e hizo la altura de las perpendiculares proporcionales a la *intensión*, con el propósito de representar la cantidad de una cualidad, la cantidad de movimiento por ejemplo. Este es uno de los méritos de los pensadores medievales, particularmente Oresme, en el caso del movimiento, estudió la velocidad como una propiedad con la capacidad de tener distintos grados de intensidad, sin embargo no realizó una medición real del espacio recorrido durante un tiempo dado. Todo ello lo hizo por medio de las proporciones geométricas[265], 'midió' mediante la división de magnitudes geométricas en partes proporcionales, generando una metodología de series geométricas (como al final del capítulo 3 lo explico).

La teoría medieval de las latitudes de las formas cuantificó cualidades teóricamente y las representó con líneas geométricas, combinando aspectos de la física cualitativa de Aristóteles con la tradición geométrica de las proporciones griega. Los matemáticos griegos idealizaron y abstrayeron formas geométricas con base en los cuerpos físicos, en el caso de los pensadores medievales, idealizaron el aumento o disminución de una cualidad representándolo geométricamente. De esta manera, se deja ver que la geometría fue una herramienta de utilidad en el estudio del mundo físico.

Euclides representó las magnitudes por medio de líneas, Arquímedes representó los pesos también por líneas. Los griegos hacían mediciones a través del uso de proporciones geométricas mediante magnitudes de la misma especie. En la Edad Media, las intensidades en las cualidades pudieron ser representadas por líneas, las cuales, fueron usadas también

[265] De esta manera quizá uno pueda comprender porque obtuvo los resultados expuestos en el capítulo anterior

para incluir la medición de velocidades en grados de intensidad también por medio de proporciones geométricas.

La teoría de las configuraciones geometrías de Oresme, no sólo era un tratado que representaba la cantidad de una cualidad de una forma gráfica, también fue una teoría geométrica sobre filosofía natural. Representaba la distribución de las cualidades de un cuerpo y las proporciones de las mismas. El trabajo de Oresme no consistió sólo en dar explicaciones de los fenómenos, sino también, el de proponer un marco teórico desde el que generar explicaciones acerca del mundo natural.

En las configuraciones geométricas de Oresme, se representa una propiedad continuamente variable y a las líneas del diagrama les asignaba un número de la 'medida' de las intensidades. El número indicaba las relaciones entre las líneas que medían las intensidades. Los números no se consideraban continuos, como los diagramas de las configuraciones, los números eran considerados discretos.

Los números no podían ser continuos, lo cual significa que no podían ser divididos a diferencia de lo continuo, como una línea. Oresme elimina esta dificultad tratando aritméticamente a las magnitudes geométricas por medio de series vistas como cantidades, tal como lo explico al final del tercer capítulo. De esta manera crea una herramienta de cuantificación donde es posible comparar magnitudes de distinto tipo. La importancia en las configuraciones de Oresme, es que combina lo continuo y lo discreto en sus diagramas para representar la cantidad de una cualidad, aunque las configuraciones explicaban sus propiedades cualitativas, no determinaban qué cualidades se iban de medir, haciendo medibles casi cualquier tipo de cualidad, como el calor, la blancura, la bondad y el movimiento.

En estos esfuerzos por cuantificar la naturaleza, se puede ver que hay un desarrollo metodológico que se ajusta a las necesidades epistémicas del problema que se esté resolviendo, con ello me refiero a que cuando se presenta un problema, aparecen metodologías que estudian dicho problema llegando a un resultado, dichas metodologías cambian de acuerdo a los datos observados, cambiando también los datos acerca del mundo natural. La pregunta acerca del segundo problema metodológico fue ¿cómo podía medirse la blancura, el calor o la velocidad?, para resolverlo expuse varías metodologías que se plantearon para 'medir' con éxito las cualidades, de estas metodologías, la empleada por

Oresme fue la más 'precisa' aunque como mencioné antes, no se haya logrado una medición real de la velocidad o de una cualidad. Fue la más precisa y la que tuvo un mayor alcance en cuanto a un progreso del conocimiento acerca del mundo.

Estas metodologías formuladas durante la Edad Media, dan cuenta de un interés hacia la cuantificación del movimiento, pero éste fue estudiado extensamente sin referencia a la observación o al experimento, la obra de Oresme "… fue un paso adelante hacia la invención de la geometría analítica y hacia la introducción en la geometría de la idea de movimiento de la que había carecido la geometría griega. Empleó correctamente su método de representar el cambio lineal de la velocidad."[266]

Conclusiones

De la anterior investigación se puede deducir que, para que el concepto de movimiento cambiara, se llevaron a cabo modificaciones ontológicas, metodológicas y epistemológicas. Los cambios ontológicos tuvieron que ver con modificaciones en los principios físicos del movimiento. Los cambios metodológicos son aquellas 'herramientas teóricas' de investigación que se crearon, o también, los cambios en los métodos de 'medición' existentes. Y por último, las modificaciones epistemológicas tienen que ver con los nuevos datos acerca del movimiento que se generaron a partir de la creación de nuevos métodos de investigación.

Las modificaciones ontológicas que analizo en esta investigación se llevaron a cabo por los escolásticos de la Edad Media. Desde Aristóteles hasta Oresme se pueden encontrar diferentes principios físicos que explicaban el concepto del movimiento, cada uno justificó esos principios con base en distintas fuentes. Aristóteles por ejemplo, elaboró una física del movimiento basada en los cambios y en la naturaleza de las cosas, los principios físicos aristotélicos permitían explicar de forma coherente fenómenos como el del movimiento que parecían correctos a la experiencia. Después, los medievales aceptarían las explicaciones que los principios físicos aristotélicos proveían, sin embargo, comenzaron a surgir críticas como

[266] A. C.Crombie, *Opo. Sit.* 89

la de Buridán acerca del movimiento violento, la cual, explicaba dicho movimiento como la aplicación de una especie de 'fuerza' al objeto movido, esa 'fuerza' va aumentando y después disminuyendo en intervalos discretos de tiempo y espacio. De esta manera los medievales comenzaron a combinar aspectos cuantitativos geométricos a la interpretación del movimiento.

Por otro lado, las discusiones acerca del aumento y disminución de las cualidades influenciaron a los escolásticos medievales que comenzaron a pensar que las cualidades podían disminuirse o aumentarse por una agregación de partes sin afectar las ya existentes, de esta forma podían 'medirse' y ser representadas geométricamente. La concepción del movimiento entonces, seguía siendo un cambio de lugar, es decir, seguía sujeto a la interpretación aristotélica, sin embargo, los escolásticos medievales estaban iniciando el proceso de cambio de los principios explicativos del movimiento, que posteriormente desembocarían en su medición geométrica.

Las nuevas concepciones de las cualidades y de las magnitudes llevó a la invención de nuevas herramientas matemáticas de medición porque con base en ellas, se había empezado a pensar cómo analizar fenómenos como el movimiento matemáticamente, lo cual fue de gran importancia porque permitió a los pensadores escolásticos obtener nueva información acerca del movimiento que no habían considerado, por ejemplo, que un cuerpo parte de velocidad cero y que ésta va aumentando en intervalos proporcionales de tiempo y espacio. La creación de estos nuevos métodos de investigación no sólo hizo posible concebir los problemas del movimiento de una forma diferente a la tradición aristotélica, sino también representarlos geométricamente y medirlos. Uno de los elementos epistemológicos derivados de los métodos de investigación, es que permitieron que la conceptualización de movimiento se hiciera más abstracta[267]. Se puede ver también un avance en las metodologías de medición, pues los medievales desarrollaron nuevas herramientas matemáticas para estudiar el movimiento basadas en la geometría griega, pero comparadas con éstas, los nuevos métodos de medición integraban más elementos al estudio de la naturaleza, a saber, la cantidad de una

[267] Cuando eliminan el *dúnamis* aristotélico y la capacidad del aire de mover el objeto. A los pensadores medievales les interesó medir solamente la cantidad de movimiento con respecto del tiempo y el espacio recorrido.

cualidad, el tiempo y la distancia, combinando magnitudes continuas y discretas en las configuraciones geométricas de Oresme.

Esa nueva metodología que medía geométricamente la cantidad de movimiento hace una diferencia en cómo se explicaban los fenómenos de la mecánica, pues aunque no se abandona por completo la explicación del movimiento con base en el sentido común — cuyo habito de pensamiento había establecido Aristóteles — sí había comenzado un interés por una explicación matemática y más exacta del movimiento. Dicho interés llevó a Oresme a pensar en las configuraciones geométricas como una representación en abstracto de una cualidad, i.e., no conocemos la velocidad que recorre un cuerpo así que la representamos geométricamente. Derivado de los anterior, Oresme pensó cómo eliminar la dificultad entre lo continuo y lo discreto tratando aritméticamente a las magnitudes geométricas elevándolas a exponentes fraccionarios, por lo cual, no compara magnitudes geométricas, sino que encuentra proporciones entre cantidades.

De esta manera el presente estudio es un análisis del conocimiento cuantitativo del movimiento, cuya medición se dio gracias a la interacción de los tres aspectos antes expuestos. Los principios ontológicos fueron tomados desde la base de la explicación aristotélica del mundo, los cambios metodológicos fueron tomados de la medición proporcional griega que estaba expuesta en los Elementos de Euclides y que fue aplicada a la cuantificación de cualidades, así, los métodos de medición se ampliaron y mejoraron. Ambos elementos permitieron la obtención de nuevos datos acerca del mundo físico, las nuevas formas de estudio permitirían concebir al movimiento de una forma cuantitativa.

Bibliografía

Bibliografía Capitulo 1:

Aristóteles, Metafísica Madrid: Gredos, 1994.

Árpád, Szabó. The beginnings of greek mathematics. Hungría: Spriner science + bussines media, 1978

Arquímedes, Método, Introducción de Luis Vega p.: Madrid: Alianza Editorial, 1986

Bochner, Salomon. The role of the mathematics in the rise of science. Princeton: Princeton University Press, 1981.

Burket, Walter. Lore and science in ancient pythagoreanism. Estados Unidos: Harvard University Press, 1972

Christianidis, J. Boston studies in the philosophy of science. Classics in the history of greek mathematics. Boston: Springer science+Business media, B.V.,2004

Correa Pabón, Guillermo. "Teoría de la proporción Pitagórica". Escritos, núm. 33. Julio-Diciembre 2006

Clagett, M. A history of mathematics from Mesopotamia to modernity. Oxford: Oxford University Press, 2005

Euclides, Elementos. Madrid: Gredos, 1994.

Eves, Howard. Great moments in mathematicsa before 1650. EUA: The mathematical association of America, 1983.

Gonzales Urbaneja Pedro Miguel. "La solución de Eudoxo a la crisis de los inconmensurables". Sigma, Diciembre 2008.

Grow, James. A short history of greek mathematic. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.

Guillaumin Juarez, Godfrey. Génesis de la medición celeste. México: Titant humanidades, 2016.

H. Charles. Pythagoras and the pythagoreans, a brief history. Indianapolis/Cambridge: Hackett Publishing Company, Inc., 2001

Hahn, Robert. The metaphysics of the pythagorean theorem. Nueva York: University of New York Press, 2017

Hodkin, Luke. A history of mathematics from Mesopotamia to Modernity. EUA: Oxford University Press, 2005

Karlson, Paul. La magia de los números. Madrid: Labor, 1960.

Knorr. Richard. The evolution of euclidean Elements. Canada: D. Reidel Publishing Company, 1975

Knorr, Richard. The origins of deductive method. En Classics in the history of greek mathematics. Editado por Jean Christianidis. EUA: Springer science+business, 2004.

Knorr, Richard. On the early history of axiomatics. En Classics in the history of greek mathematics. Editado por Jean Christianidis. EUA: Springer science+business, 2004.

Lloyd. G.E.R. Early Greek Science. Thales to Aristotle. Londres: Chattoand windus, 1970

Lindberg, C. David. Los inicios de la ciencia occidental. Barcelona: Paidos, 2002.

Rey Pastor J. Babini J. Historia de la matemática. Vol. I. Barcelona: Godisa, 1985.

Roche, John. The mathematics of measurement, a critical history. Londres: The atholone press, 1998.

Oller, M. Antonio. José Maria Garin. La génesis de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. Relime, núm. 16. Noviembre 2013.

Sambursky, S. El mundo físico de los griegos. Madrid: Alianza Universidad, 1987.

Paul, Strathern. The big idea: Phytagoras and his theorem. Reino Unido: Arrow, 1997

Stopple, Jeffrey. A primer of analytic number theory. From Pythagoras to Riemann. Cambridge: Cambridge University Press

Tabak, John. Geometry, The lenguaje of space and form. EUA: Facts in file, 2004.

Von Fritz, Kurt. The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum. En Classics in the history of Greek mathematics. Boston: Springer Science +Bussines media, 2004

Bibliografía capítulo 2:

Aristóteles, Acerca del Cielo. Madrid: Gredos, 1996.

Aristóteles Acerca de la generación y corrupción. Madrid: Gredos, 1987.

Aristóteles, Física. Madrid: Gredos, 1992.

Aristóteles, Metafísica. Madrid: Gredos, 1994

Barnes, Jonathan. Aristotle: A very short introduction. (Oxford: Oxford University Press, 2000)

Bostock, David. Space, time, matter, and form, essays on Aristotle phyics. Newyork: Oxford university press, 2006

Clagett, Marshall. The Science of mechanics in Middle Ages. (The university of Winsconsin press, London oxford university press,1961)

Corish, Denis. Could time be change? (Philosophy. Vol. 84. No. 328, abril 2009 pp. 219-232) http://www.jstor.org/stable/20533187?loggedin=true

Dales, C, Richard. The scientific achievement of middle ages. Pennsylvania: University of Pennsylvania press, 1994Gareth b. Matthews. Aristotelian Categories. En A companion to Aristotle en (Reino Unido: Blackwell Publishing Ltd, 2009)

Healt, Tomas. Mathematics in Aristotle (Oxford: At the clarendon press, 1949)

Henry, Mendell. Aristotle and Mathematics", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2017 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = https://plato.stanford.edu/archives/spr2017/entries/aristotle-mathematics

Hussey, Edward.. Aritotle´s mathematical physics: a reconstruction. En Aristotle´s physics a collection of essays. Editado por Lindsay Judson. (Nuevayork: Caldendon press – Oford University Press, 2003)

Lang. S. Helen. The Order of Nature in Aristotle's Physics. (Cambridge: Cambridge University Press, 1998)

Lindberg. C. David. Los inicios de la ciencia occidental. (Barcelona: Paidos 1992)

Linton, C. M. From Eudoxus to Einstein , History of mathematical astronomy (Cambridge University Press, 2004)

Lloyd, G.E.R. Early greek science, Thales to Aristotle. (Londres: Chatto&Windus, 1970)

Lloyd. G.E.R. Revolution of wisdom. Studies in the Claims and Practice of Ancient Greek Science. (Berkeley: University of California Press,1987)

Lloyd. G.E.R. Aristotle, the growth and structure of his thouht. (Cambridge: Cambridge University Press)

Roche, J. John. The mathematics of measurement, a critical history. (Londres: The atholone press. 1998)

Studtmann, Paul, "Aristotle's Categories", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2017 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = https://plato.stanford.edu/archives/fall2017/entries/aristotle-categories.

Sambursky, Samuel. El mundo físico a finales de la antigüedad (Madrid: Alianza, 1990)

Sambursky, Samuel. – El mundo físico de los griegos. (Madrid: Alianza Universidad, 1962)

Scaltsas, Theodore. Mixing the Element en A companion to Aristotle (Reino Unido: Blackwell Publishing Ltd, 2009)

Sorabji Richard. Sorabji on Time and Eternity in Aristotle. https://historyofphilosophy.net/aristotle-sorabji

Sorabji R. The philosophy of the commentators 200-600 A.D. (2004. London: Duchworth) 110

Vidal, Jorge. La concepcion del tiempo en Aristoteles. (Byzantion nea hellás. No. 34. Santiago, Chile. Octubre 2015) http://www.scielo.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0718-84712015000100014

Waterlow, Sarah. Nature, change, and agency in aristotelres physics. (Londres: Calendon Press, 1982)

White. J. Michael. Aristotle on the Infinite, Space, and Time. En A companion to Aristotle (Reino Unido: Blackwell Publishing Ltd, 2009)

Bibliografía capítulo 2:

Aristóteles, Acerca del Cielo. Madrid: Gredos, 1996.

Aristóteles, Física. Madrid: Gredos, 1992.

Aristóteles, Metafísica. Madrid: Gredos, 1994

Capecci, Danilo. The problem of motion of bodies. A historical view of the development of classical mechanics. New York, Londres: Springer, 2014

Clagett, Marshall. Critical problems in the history of science. Madison, Milwaukee y Londres: The Uniersity of Wisconsin Press, 1969

Clagett, Marshall. The Science of mechanics in Middle Ages. Madison: London – Oxford University Press, 1961

Copleston, Frederick. A History of Philosophy Vol. III. Late Medieval and Renaissance Philosophy. Londres: Image Book, 1993.

Crombie, A.C. Historia de la ciencia: De San Agustín a Galileo. Vo.II., Siglos XIII – XVII. (Madrid: Alianza, 1987)

Crombie, A.C. Science, Art and Nature in Medieval and Modern Thought. Londres: The Hambledon Press, 1996

Durand, Dana. B. Nicole Oresme and the Mediaeval Origins of Modern Science. Speculum, Vol. 16, No. 2. Apr., 1941, 167-185

Eamon, William. Science and the secrets of the nature. Books of secrets in Medieval and Early Modern Culture. Reino Unido: Princeton University Press, 1994

Grant, Edward. A History of Natural Philosophy. From the Ancient World to the Nineteenth Century. Cambridge: Cambridge University Press, 2007

Grant, Edward. God and Reason in the Middle Ages. Cambridge: Cambridge University Press, 2001

Grant, Edward. The Fundation of Modern Science in the Middle ages. Cambridge: Cambrige University Press, 2011

Jean Buridan. Questiones De Caelo et Mundo. Cambridge, Massachusetts: The Mediaeval academy of America, 1942

Lindberg, David C. Los Inicios de la Ciencia Occidental. Barcelona: Paidos 2002

Lindberg, C. David. H. Shank. The Cambridge history of science volume 2 Medieval Science. Cambridge: Cambridge university press, 2013

Linton, C. M. From Eudoxus to Einstein. A History of Mathematical Astronomy. Cambridge: Cambridge University Press, 2004

McEvoy, James. Robert Grosseteste, Great Medieval Thinkers. Oxford: Oxford University Press, 2000

Oresme, Nicole. De latitudinibus formarum. Add: Blasius Pellecanus, Quaestiones super tractatus de latitudinibus formarum Nicolai Oresme (I, II) pp.1 https://archive.org/details/ita-bnc-in2-00002176-001

Oresme, Nicole, De Proportionubus proportionum. Editado y traducido por Edward Grant. The University of Wisconsin Press, 1996

Prieto, Serrano, Leopoldo. Buridán, el ímpetus y la primera unificación de la física terrestre y celeste. Thémata. Revista de Filosofía. Vol. 21. Número 41, 2009. 350-371.

Ramírez, Cruz, Jorge Alejandro. Reflexiones sobre las ideas de Nicolás Oresme. Ascepio. Revista de Historia de la Medicina y de la Ciencia. Vol. 59. Número 1

Serrano. M. Isabel, Suceava D. Bogdan. A Medieval Mystery: Nicole Oresme's Concept of Curvitas.Notices of the AMS. Volumen 62, Numero 9. Octubre 2015. 1030-1034

Schemmel, Matthias. Medieval Representations of Change and Their Early Modern Application. Towards a historical epistemology of space. Humboldt University and the Max Planck Institute for the History of Science. Septiembre 2008.9-20

Sorabji, Richard. Philoponus and the rejection of Aristotelian Science. Nueva York: Cornell University Press, 1987

T. Clarck, Joseph.The philosophy of science en Critical problemns in the history of Science, Editado por Marshall Clagett. Londres: The University of Wisconsin Press, 1969

Wallace, A. Wallace. Causality and scientific explanations. E.U.: The University of Michigan press, 1972