



Casa abierta al tiempo

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA**  
UNIDAD IZTAPALAPA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

**INTRODUCCIÓN AL ENFOQUE ESTOCÁSTICO DEL  
MOVIMIENTO BROWNIANO RELATIVISTA**

Tesis que presenta:

**Mat. Apl. Eric Santiago Escobar Aguilar**

Para obtener el grado de

**Maestro en Ciencias (Física)**

Asesores:

**Dr. José Inés Jiménez Aquino (UAM-Iztapalapa)**

**Dr. Hugo Aurelio Morales Técolt(UAM-Iztapalapa)**

Jurado Evaluador:

Presidente:

**Dr. Tonatiuh Matos Chassin**

Cinvestav-IPN

Secretario:

**Dr. José Inés Jiménez Aquino**

UAM-Iztapalapa

Vocal:

**Dr. Guillermo Chacón Acosta**

UAM-Cuaajimalpa

Ciudad de México a 20 de marzo de 2018.







## Agradecimientos

Estas líneas las aprovecho para expresar mi más profundo agradecimiento a las personas que de diversas maneras son parte de este logro.

En primer lugar quiero agradecer a mis padres, por su apoyo incondicional y dirección, necesarias para no apartar la vista de mis objetivos. Gracias por todo, este logro es dedicado a sus esfuerzos y sacrificios.

A mis asesores, mi admiración y profundo agradecimiento al Dr. José Inés Jiménez Aquino y Dr. Hugo A. Morales Técotl. Por haberme aceptado para colaborar y aprender de ustedes, por la paciencia, tiempo y tolerancia invertida en mi persona. Sus comentarios y discusiones me alentaron y despertaron un profundo interés en el conocimiento que me han hecho crecer intelectualmente. Agradezco profundamente al Dr. Guillermo Chacón Acosta y al Dr. Tona-tiuh Matos Chassin por sus comentarios y la revisión a la tesis, nutriendo los alcances de la misma.

A mis hermanos, Alex e Isaac. A Santino. A todos mis profesores y amigos, agradezco su compañía, sus consejos, su paciencia, sobre todo las enseñanzas que compartieron conmigo. Las alegrías y anécdotas las guardo como parte valiosa de esta etapa de mi vida, y cada uno de ustedes hacen de mi una mejor persona.

Por último, pero con el mismo entusiasmo, agradezco a la UAM por los apoyos y facilidades que me proporcionaron durante mi estancia en el posgrado y por los conocimientos que me proporcionaron. A CONACyT por el financiamiento a través de la beca de posgrado con número de CVU 665143. Esta tesis ha sido desarrollada en el marco del proyecto CONACyT 237351 'Implicaciones físicas de la estructura del espacio tiempo'.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>9</b>
<b>2. Elementos del cálculo estocástico</b>	<b>13</b>
2.1. Ecuaciones en diferenciales . . . . .	13
2.2. Ecuaciones diferenciales estocásticas . . . . .	15
2.3. Proceso de Wiener . . . . .	18
2.3.1. Ruido Gaussiano . . . . .	20
2.4. Cálculo de Ito . . . . .	21
<b>3. Movimiento Browniano no relativista</b>	<b>25</b>
3.1. Movimiento Browniano . . . . .	25
3.2. Ecuación de Fokker-Planck . . . . .	30
3.2.1. Ecuación de Fokker-Planck del proceso de Ornstein-Uhlenbeck . . . . .	31
3.3. Reglas de discretización . . . . .	33
<b>4. Termostatística relativista de equilibrio</b>	<b>37</b>
4.1. Relatividad especial . . . . .	37
4.2. Densidades de probabilidad en relatividad especial. . . . .	40
4.3. Distribución de Jüttner . . . . .	43
<b>5. Movimiento Browniano Relativista</b>	<b>45</b>
5.1. Ecuaciones de Langevin relativistas . . . . .	45
5.2. Ecuaciones de Fokker-Planck . . . . .	47
5.3. Relaciones fluctuación-disipación generalizadas . . . . .	48
5.4. Ecuaciones para la energía y la velocidad. . . . .	50
<b>6. Discusión, conclusiones y perspectivas.</b>	<b>59</b>
<b>Apéndice A</b>	<b>69</b>
<b>Apéndice B</b>	<b>71</b>





# Capítulo 1

## Introducción

Indiscutiblemente vivimos en una época prolífica para la ciencia. Desde el siglo pasado, los avances tecnológicos contribuyeron de gran manera para validar teorías que habían sido postuladas mucho tiempo atrás. Entre los logros más sorprendentes están aquellos asociados a fenómenos microscópicos, y en este siglo hemos encontrado en los colisionadores de partículas una herramienta esencial para el descubrimiento de nuevas partículas elementales. Uno de estos colisionadores es el RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider, por sus siglas en inglés), donde desde 2010 se han realizado experimentos con núcleos atómicos pesados, como los del oro o plomo, generando un plasma de cuarks y gluones. La descripción de la dinámica del estado de la materia resultante de estas colisiones y el entendimiento de las interacciones microscópicas correspondientes ha sido uno de los retos claves en RHIC [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7].

Este plasma ha sido susceptible de estudio mediante técnicas de física estadística fuera de equilibrio, mismas que han descrito correctamente sistemas físicos no relativistas. Sin embargo, en este caso, tratamos con un sistema de hecho relativista debido a la escala de altas energías en que ocurre por lo tanto las técnicas de física estadística deben ser extendidas en este contexto.

Una de las teorías que nos han ayudado a comprender sistemas físicos fuera de equilibrio, desde un punto de vista microscópico, es la del movimiento Browniano, llamado así en honor al botánico escocés Robert Brown, quien en 1827 documentó las observaciones que hizo en un microscopio sobre el movimiento que realizan granos de polen sumergidos en agua a temperatura ambiente. Hoy en día, el movimiento Browniano se entiende como el movimiento que experimenta cualquier partícula microscópica sumergida en un fluido, y que se caracteriza por ser continuo y errático. Fue Albert Einstein, quien en el año de 1905 dio una explicación suficientemente satisfactoria del fenómeno, mediante el uso de la teoría de probabilidad. Al año siguiente y de manera independiente, Marian Smoluchowski contribuyó también mediante métodos similares a la descripción teórica de este fenómeno [9]. Ambos coincidieron en dos puntos importantes:

- El movimiento es causado por las constantes colisiones de la partícula Browniana con las moléculas del fluido en el cual se encuentra sumergida.
- El comportamiento de las moléculas es tan complicado que los efectos sobre la partícula Browniana (PB) conviene ser descritos probabilísticamente.

La descripción realizada por Einstein fue dada a conocer en uno de sus cuatro artículos publicados en su *annus mirabilis* [8], y está formulada a partir de una ecuación de difusión, es decir, una ecuación asociada a la densidad de probabilidad de que la partícula esté en una posición  $x$  al tiempo  $t$ . Mostró que en el estado estacionario existe un balance entre las fuerzas de fricción y las fuerzas aleatorias que permite obtener el coeficiente de difusión. Como resultado de este hecho, Einstein obtuvo el desplazamiento cuadrático promedio de la PB que es directamente proporcional al tiempo, siendo la constante de proporcionalidad el coeficiente de difusión. Sugirió además que esta cantidad debería ser determinada experimentalmente.

En los tres años siguientes, el físico francés Paul Langevin propuso otra forma mucho más simple de describir el movimiento Browniano [10]. Su planteamiento teórico está basado en la segunda Ley de Newton con la siguiente hipótesis: debido a que la PB es grande comparada con el tamaño de las moléculas del fluido, y de acuerdo con la hidrodinámica clásica, la partícula experimenta una fuerza de oposición a su movimiento que es proporcional a su velocidad, conocida como fuerza de fricción o fuerza de arrastre (Ley de Stokes). Por otro lado, también la partícula experimenta fuerzas debido a las colisiones con las moléculas del fluido. En vista de la enorme cantidad de colisiones que sufre en cada instante, esta segunda fuerza varía de una forma azarosa y por tanto se conoce como fuerza aleatoria o estocástica. De este modo, de acuerdo con la segunda ley de Newton la contribución de las dos fuerzas, la de fricción y estocástica, dan como resultado una ecuación de movimiento de carácter aleatorio, o mejor dicho, una ecuación diferencial estocástica asociada a la posición y velocidad de la partícula Browniana. Esta ecuación diferencial estocástica es hoy conocida en la literatura como ecuación de Langevin. A diferencia de la ecuación de difusión de Einstein que describe la evolución de la densidad de probabilidad, la ecuación de Langevin describe directamente el comportamiento dinámico de la partícula Browniana inmersa en un fluido.

Con su planteamiento, Langevin obtuvo la misma expresión que Einstein para el desplazamiento cuadrático promedio de la PB. La confirmación experimental del resultado propuesto por Einstein y Langevin, fue llevada a cabo por J. Perrin en 1909 [11]. Fueron Ornstein y Uhlenbeck quienes en 1930, mostraron que existe una conexión entre ambas descripciones, haciendo notar que la distribución de probabilidad que satisface la velocidad de la PB es precisamente una distribución Gaussiana, conocida como distribución de Ornstein-Uhlenbeck [12].

Se podría pensar que una vez explicado el movimiento Browniano, ya no había nada que hacer en este campo. Sin embargo esto no fue así, la importancia del movimiento Browniano dejó de residir en la explicación de sus causas o la confirmación de la hipótesis atómica. La teoría del movimiento Browniano abrió un amplio espectro de posibilidades llegando a ser relevantes sus aplicaciones a la física, química, biología, economía, medicina, ingeniería, etc. Por ejemplo, en la biología ha servido para estudiar el plegamiento de proteínas, la dinámica de motores moleculares en la membrana celular entre otros [13, 14]. En la economía, con el creciente desarrollo de la econofísica, se han definido modelos a partir de comparaciones con la interacción microscópica en los gases. Incluso en las finanzas los procesos estocásticos juegan un papel importante para la teoría de riesgos y para armar portafolios de inversión basados en teorías matemáticas avanzadas [15, 16, 17, 18].

Las bases teóricas del movimiento Browniano y de los procesos estocásticos fueron desarrollados durante la primera mitad del siglo pasado por notables matemáticos como Wiener,

Kolmogoroff, Feller, Lévy, Ito, Stratonovich, y Fisk, en el contexto de ecuaciones diferenciales estocásticas (EDE). Las EDEs continúan impulsando el desarrollo de las funciones no diferenciables, la teoría de los fractales, la teoría de los procesos irreversibles y el movimiento Browniano relativista entre otros [13, 15, 18, 42].

Es importante comentar que para resolver el problema del movimiento Browniano no relativista, Einstein y Langevin tuvieron que recurrir a los conceptos de la mecánica estadística de equilibrio desarrollados por Maxwell, Boltzmann y Gibbs en la segunda mitad del siglo XIX, por lo que es natural pensar que el estudio del movimiento Browniano relativista requiere de conceptos relativistas de la termodinámica y mecánica estadística de equilibrio. Las primeras contribuciones sobre termodinámica relativista aparecieron en 1907 en los trabajos de Einstein [19] y Planck [20, 21], los cuales fueron motivo de amplias discusiones varios años después por parte de Ott [22]. Dada la necesidad de extender los conceptos antes mencionados en el marco de la teoría de relatividad, fue Jüttner [23] quien en 1911 dio un primer paso importante al derivar la generalización relativista de la distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann. Dichos conceptos han sido extendidos a la teoría cinética de gases a través de la ecuación de Boltzmann, tanto en el marco de la relatividad especial como en el de la relatividad general [52, 59].

El movimiento Browniano es el arquetipo de un proceso aleatorio por lo que consideramos el movimiento Browniano como un primer acercamiento a los procesos estocásticos relativistas. En este aspecto, se han logrado avances importantes en el desarrollo del movimiento Browniano relativista a través de las ecuaciones de Langevin y de Fokker-Planck [36, 37, 38]. En el marco de la relatividad especial, algunos modelos teóricos han sido propuestos para describir el movimiento Browniano mediante la ecuación de Langevin y su correspondiente ecuación de Fokker-Planck o simplemente en términos de ecuaciones de difusión relativistas [24, 25, 26].

Surge entonces la siguiente pregunta: ¿hasta dónde es posible generalizar los conceptos de las EDE basados en los modelos del movimiento Browniano en el marco de la teoría de la relatividad especial? Los esfuerzos llevados a cabo en esta dirección han sido reportados en un número importante de artículos, algunos de los cuales citamos en la lista de referencias de esta tesis. El objetivo principal en este trabajo es mostrar de manera intuitiva la herramienta matemática que ha sido desarrollada formalmente en la literatura para su estudio [36, 37, 39, 40]. Con este fin, hemos considerado conveniente dividir el presente trabajo en cinco capítulos. Es muy importante mencionar que el cálculo que usaremos para estudiar el problema del movimiento Browniano relativista, no es el usual, es decir, no es el cálculo estocástico que se presenta en muchos de los trabajos sobre movimiento Browniano no relativista que se describe en términos de una ecuación de Langevin con ruido aditivo. Las reglas del cálculo que utilizaremos son otras debido a que la EDE contiene un término aleatorio no aditivo sino multiplicativo (hoy conocido como ruido multiplicativo). En general el término multiplicativo es una función continua pero no diferenciable, y en este sentido la integración de estas funciones aleatorias son también estocásticas y por consiguiente requieren de otros métodos de integración. Por este motivo, en el capítulo 2, presentamos una revisión del cálculo estocástico en términos de diferenciales y las reglas de discretización de las integrales estocásticas. Estas reglas de discretización fueron introducidas por los matemáticos Ito [27, 28], Stratonovich [29, 30] y Fisk [31] para resolver EDE en presencia de ruido

multiplicativo.

En el tercer capítulo estudiamos como ejemplo concreto el movimiento Browniano no relativista usando el formalismo matemático del cálculo de Ito. El análisis se lleva a cabo a través de la EDE de Langevin y la correspondiente ecuación diferencial parcial de Fokker-Planck. En el capítulo 4 se introduce notación y consideraciones generales, así como conceptos de la teoría de relatividad que serán de utilidad para la descripción del movimiento Browniano relativista, así como algunos de los conceptos que necesitaremos de la termoestadística relativista. El movimiento Browniano relativista per sé se estudia en el capítulo 5, el cual está formulado a través de las EDE de Langevin y sus correspondientes ecuaciones de Fokker-Planck para las densidades de probabilidad, usando en su mayor parte el cálculo de Ito, aunque también exploraremos las variantes propuestas por Stratonovich y Fisk. En concreto exploramos tres ejemplos, el proceso de Ornstein-Uhlenbeck relativista y otros dos modelos que permiten obtener y analizar resultados concretos. Finalmente en el sexto y último capítulo resumimos los resultados que surgen del análisis previo, discutimos su alcances y limitaciones, y presentamos algunas perspectivas de trabajo futuro.

Es importante subrayar que esta tesis está estructurada para entender y aplicar los procesos estocásticos, en específico el movimiento Browniano en el régimen relativista, sin necesidad de aplicar la maquinaria de la teoría de la medida. Indudablemente la versión rigurosa de este análisis requerirá de tal formalismo. Sin embargo, como veremos a lo largo de este trabajo las aplicaciones que consideramos nos permiten un tratamiento más sencillo e intuitivo basado en diferenciales.

# Capítulo 2

## Elementos del cálculo estocástico

Como se mencionó en la introducción, las ecuaciones que estamos interesados en estudiar son ecuaciones diferenciales estocásticas (EDEs), es decir, aquellas que contienen un término aleatorio también conocido como ruido, que genéricamente denotamos como  $\Gamma(t)$  y cuyas propiedades estadísticas deben ser consideradas para resolver la EDE. En este capítulo plantearemos algunas consideraciones matemáticas para la solución de las ecuaciones en diferenciales, equivalentes a las ecuaciones diferenciales, ver por ejemplo [42]. Estas nos permitirán discutir las correspondientes ecuaciones diferenciales estocásticas incorporando el cálculo de Ito y sus implicaciones.

### 2.1. Ecuaciones en diferenciales

En esta sección vamos a introducir un enfoque distinto pero equivalente a los conocidos para resolver ecuaciones diferenciales. Este enfoque está basado en el concepto de diferencial de una función, en lugar de su derivada. Consideremos la variable  $x$  que depende del tiempo  $t$ , su diferencial puede expresarse en términos del diferencial del tiempo  $dt$ , de tal forma que

$$dx = \frac{dx}{dt} dt. \quad (2.1)$$

Con la notación introducida podemos expresar ecuaciones diferenciales en términos de sus diferenciales  $dx$  y  $dt$  en lugar de usar derivadas. Por ejemplo si tenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p/m \\ -kx/m \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

podemos escribir el sistema (2.2) en términos de sus diferenciales como

$$\begin{pmatrix} dx \\ dp \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} p dt \\ -kx dt \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} dt. \quad (2.3)$$

A este tipo de ecuaciones las llamamos *ecuaciones en diferenciales*.

A continuación, para ilustrar con un ejemplo el método a seguir para resolver este tipo de ecuaciones, tomamos la siguiente ecuación

$$\dot{x} = -\gamma x, \quad (2.4)$$

en su forma de diferenciales

$$dx = -\gamma x dt. \quad (2.5)$$

Para resolver esta ecuación, hay que obtener  $x$  al tiempo  $t + dt$ , esto es, evaluar  $x$  al tiempo  $t$  y sumar  $dx = -\gamma x dt$ , entonces tenemos

$$\begin{aligned} x(t + dt) &= x(t) + dx \\ &= x(t) - \gamma x dt \\ &= (1 - \gamma dt) x(t). \end{aligned} \quad (2.6)$$

A primer orden, con  $dt$  muy pequeño, podemos aproximar usando  $e^{-\gamma dt} \simeq 1 - \gamma dt$ , obteniendo para (2.6) lo siguiente

$$x(t + dt) = e^{-\gamma dt} x(t). \quad (2.7)$$

El proceso presentado lo volvemos a realizar, para obtener ahora  $x((t + dt) + dt) = x(t + 2dt)$ , por lo tanto, iteramos una vez más quedando

$$\begin{aligned} x(t + 2dt) &= e^{-\gamma dt} x(t + dt) \\ &= e^{-\gamma dt} (e^{-\gamma dt} x(t)) \\ &= e^{-2\gamma dt} x(t). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Siguiendo los pasos anteriores, realizamos  $N$  iteraciones para que  $x$  evolucione de  $t$  a  $t + \tau$ , con  $dt = \tau/N$ , con lo que finalmente llegamos a

$$\begin{aligned} x(t + \tau) &= x(t) (e^{-\gamma dt})^N \\ &= x(t) (e^{-\gamma N dt}) \\ &= x(t) e^{-\gamma \tau} \end{aligned} \quad (2.9)$$

que nos da  $x(t + \tau)$  en términos de  $x(t)$ , que es precisamente la solución para (2.5), la cual también es obtenida mediante métodos de ecuaciones diferenciales. El método funciona también si consideramos  $\gamma = \gamma(t)$ . En este caso, la solución toma la forma

$$\begin{aligned} x(t + \tau) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N e^{-\gamma(t + ndt) dt} x(t) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-\sum_{n=1}^N \gamma(t + ndt) dt} x(t) \\ &= e^{-\int_t^{t+\tau} \gamma(t) dt} x(t). \end{aligned} \quad (2.10)$$

La ecuación que se acaba de resolver es la ecuación diferencial más simple a considerar, sin embargo todas las ecuaciones lineales pueden ser escritas en la forma (2.3). El método presentado será útil para resolver ecuaciones estocásticas, además nos ayuda a familiarizarnos con ecuaciones en términos de diferenciales. En la siguiente sección extenderemos el presente método al caso estocástico.

## 2.2. Ecuaciones diferenciales estocásticas

Para extender el método de la sección anterior. Iniciamos introduciendo la definición de un proceso estocástico. Consideremos un sistema que puede estar en cualquiera de un conjunto de estados previamente especificados. Supongamos que el sistema evoluciona o cambia de un estado a otro y sea  $X_t$  el estado del sistema al tiempo  $t$ . Si se considera que la evolución del sistema no es determinista, sino provocada por un mecanismo azaroso, entonces podemos decir que  $X_t$  es una variable aleatoria (VA) para cada valor de  $t$ . Esta colección de VAs es la definición de un proceso estocástico y sirve como modelo para representar la evolución aleatoria de un sistema conforme transcurre el tiempo. De manera más precisa recordamos la siguiente definición<sup>1</sup>

**Definición:** *Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias  $\{X_t : t \in T\}$  parametrizada por un conjunto  $T$ , llamado espacio parametral, en donde las variables toman valores en un conjunto  $S$  llamado espacio de estados.*

Por ejemplo, si el espacio parametral es el conjunto discreto  $T = \{0, 1, 2, \dots\}$  y estos números se interpretan como los valores del tiempo  $t$ , entonces el proceso estocástico se realiza a tiempos discretos y en este caso se denota por  $\{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$  o  $X_0, X_1, X_2, \dots$ . Así que, para cada valor de  $n$ ,  $X_n$  es el estado del sistema al tiempo  $n$ . Por otro lado, el espacio parametral puede también tomarse como un conjunto continuo  $T = [0, \infty)$ , y en este caso el proceso estocástico se realiza a tiempo continuo, y se denota como  $\{X_t : t \geq 0\}$ . En muchos casos los espacios de estados es el conjunto o subconjuntos de los números reales  $\mathbb{R}$ , aunque en algunos casos también se puede considerar la generalización  $n$  – dimensional  $\mathbb{R}^n$ .

Podemos ahora establecer la definición matemática de un proceso estocástico como una función de dos variables  $X : T \times \Omega \rightarrow S$ , tal que a la pareja  $(t, \omega)$  se le asocia el valor o estado  $X(t, \omega) \equiv X_t(\omega)$ . Donde  $\omega \in \Omega$  siendo  $\Omega$  el espacio muestral, es decir, el conjunto de los posibles valores que puede tomar la variable aleatoria. Así que para cada valor de  $t$  en  $T$ , la aplicación  $\omega \mapsto X_t(\omega)$  es una variable aleatoria, mientras que para cada  $\omega$  en un espacio muestral  $\Omega$  fijo, la función  $t \rightarrow X_t(\omega)$  es una trayectoria o realización del proceso, ver Fig. (2.1). Por ello en ocasiones también se define al proceso estocástico como una función aleatoria.

Una vez definido un proceso estocástico, tomamos como ejemplo la ec. (2.5) y le agregamos un término aleatorio  $\Gamma(t)$ , de tal manera que

$$dx = -\gamma x dt + \Gamma(t) dt. \quad (2.11)$$

Para resolver la ec. (2.11) definimos una nueva variable  $y(t)$  como

$$y(t) = x(t) e^{\gamma t}. \quad (2.12)$$

Vale la pena notar que la definición de la variable  $y(t)$  es tal que si  $x(t)$  es una solución para la parte determinista de (2.11) entonces la nueva variable  $y(t)$  sería una constante. Ahora, expresamos la ecuación en diferenciales para  $y$  a partir de lo que conocemos del cálculo usual

$$dy = \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) dx + \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) dt, \quad (2.13)$$

<sup>1</sup>Definición tomada de L. Rincón, Introducción a los procesos estocásticos, UNAM, México, 2012.

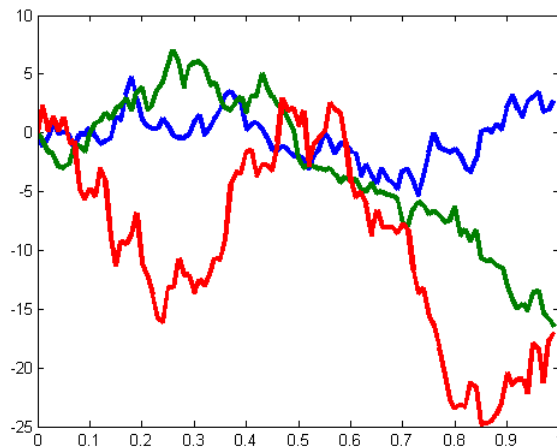


Figura 2.1: Trayectorias típicas estocásticas, cada color corresponde a una realización del proceso estocástico.

de modo que

$$dy = e^{\gamma t} [-\gamma x + \Gamma(t)] dt + \gamma x e^{\gamma t} dt = e^{\gamma t} \Gamma(t) dt. \quad (2.14)$$

Esta ecuación para  $y$  puede ser resuelta mediante los métodos usuales, es decir, integrando en ambos lados se obtiene

$$y(t) = y_0 + \int_0^t e^{\gamma s} \Gamma(s) ds, \quad (2.15)$$

donde la constante de integración  $y_0$  se fija como el valor de  $y$  al tiempo  $t = 0$ . La solución de la ecuación diferencial estocástica (2.11) se obtiene invirtiendo (2.12), dando como resultado

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t} + \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} \Gamma(s) ds. \quad (2.16)$$

De manera análoga al caso sin término aleatorio se puede resolver si consideramos que  $\gamma = \gamma(t)$ . La única diferencia radica en la variable a definir, siendo ahora

$$y(t) = x(t) e^{\int_0^t \gamma(s) ds} \equiv x(t) e^{\mathcal{R}(t)}, \quad (2.17)$$

donde hemos definido  $\mathcal{R}(t) \equiv \int_0^t \gamma(s) ds$ . En este caso la solución es

$$x(t) = x_0 e^{-\mathcal{R}(t)} + e^{-\mathcal{R}(t)} \int_0^t e^{\mathcal{R}(s)} \Gamma(s) ds. \quad (2.18)$$

El método propuesto permite resolver formalmente la EDE (2.11), donde aparece una integración del término de ruido o integral estocástica, dicha integral se deja indicada debido a la naturaleza de  $\Gamma(s)$  que como se mencionó anteriormente es una variable aleatoria. Es importante mencionar que la integral estocástica se realiza sobre una función continua pero no diferenciable, por lo que es necesario establecer un método de integración para evaluar



la integral estocástica. Para lograr esto, primero estudiaremos la solución de una EDE en términos de diferencias finitas en  $x$  mediante una discretización en el tiempo de tamaño  $\Delta t$ , de tal forma que para cada incremento  $\Delta t$  de la variable  $x$  existe un cambio  $\Delta x$ , que explícitamente es la diferencia que existe entre  $x(t)$  y  $x(t + \Delta t)$ , de tal manera que  $x$  toma valores en los tiempos discretos  $t_n = n\Delta t$ , con  $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$ .

Consideremos una ecuación en la que el cambio de  $x$ ,  $\Delta x$ , sea la suma de un término proporcional a  $x$  y un término aleatorio. Entonces la ecuación discreta resulta

$$\Delta x(t_n) = x(t_n) \Delta t + \Gamma(t_n) \Delta t, \quad (2.19)$$

donde  $\Gamma(t_n) \Delta t$  se le llama término de difusión, o bien, fuerza fluctuante o ruido estocástico[42]. En general esta ecuación puede resolverse si conocemos las propiedades estadísticas de  $\Gamma(t_n)$ .

Vamos a seguir el método expuesto en la sección anterior. La idea a seguir es, dado el valor de  $x$  al tiempo  $t_n$ , su valor al tiempo  $t_{n+1}$  es

$$\begin{aligned} x(t_n + \Delta t) &= x(t_n) + \Delta x(t_n) \\ &= x(t_n) + x(t_n) \Delta t + y_n \Delta t \\ &= (1 + \Delta t) x(t_n) + y_n \Delta t, \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde hemos cambiado la función  $\Gamma(t_n)$  por la variable aleatoria  $y_n$ . Esta identificación nos dice que a cada tiempo  $t_n$  se tiene un conjunto de valores para  $y_n$ , muestreados por su densidad de probabilidad correspondiente. Por esta razón ya no es posible predecir exactamente cual será el valor de  $x$  en un tiempo  $T$ , a menos que al momento de llegar al tiempo  $T$  tengamos todos los incrementos aleatorios completamente determinados.

La solución para  $x$  al tiempo  $\Delta t$  es

$$x(\Delta t) = x(0) (1 + \Delta t) + y_0 \Delta t. \quad (2.21)$$

Es evidente que  $x(\Delta t)$  es una variable aleatoria, ahora calculando la siguiente iteración tenemos

$$\begin{aligned} x(\Delta t + \Delta t) &= x(\Delta t) + \Delta x(\Delta t) = x(\Delta t) + x(\Delta t) \Delta t + y_1 \Delta t \\ &= x(0) (1 + \Delta t) + y_0 \Delta t + (x(0) (1 + \Delta t) + y_0 \Delta t) \Delta t + y_1 \Delta t \\ &= x(0) (1 + \Delta t) + y_0 \Delta t + x(0) (\Delta t + (\Delta t)^2) + y_0 (\Delta t)^2 + y_1 \Delta t \\ x(2\Delta t) &= x(0) (1 + 2\Delta t) + y_0 \Delta t + y_1 \Delta t \end{aligned} \quad (2.22)$$

Se nota que el siguiente paso temporal, es decir  $x(2\Delta t)$  es función de  $x(0)$ ,  $y_0$  y una nueva variable aleatoria  $y_1$ , correspondiente al incremento temporal. Por lo tanto para cualquier  $n$  obtenemos la solución a la ecuación en diferencias estocástica  $x(t_n)$

$$\begin{aligned} x(3\Delta t) &= x(0) (1 + 3\Delta t) + y_0 \Delta t + y_1 \Delta t + y_2 \Delta t \\ x(4\Delta t) &= x(0) (1 + 4\Delta t) + y_0 \Delta t + y_1 \Delta t + y_2 \Delta t + y_3 \Delta t \\ &\vdots \\ x(n\Delta t) &= x(0) (1 + n\Delta t) + \sum_{k=0}^{n-1} y_k \Delta t \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde  $t_n = n\Delta t$ , una vez más podemos notar que  $x(n\Delta t)$  será una variable aleatoria. Dado que la solución es una función que depende de todos los incrementos aleatorios  $y_n$ , para tener una solución completa es necesario calcular la densidad de probabilidad de la solución a partir de las densidades de probabilidad de  $y_n$ . Claramente, es importante conocer las propiedades de la suma y transformación de variables aleatorias. Por otra parte, si queremos encontrar ecuaciones estocásticas, en contraste con ecuaciones en diferenciales, es necesario tomar el límite continuo, es decir, cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  de la ecuación estocástica en diferenciales, por lo que la solución a dicha ecuación diferencial estocástica es también una densidad de probabilidad para  $x$  a cada tiempo  $t$ .

### 2.3. Proceso de Wiener

Vamos a considerar un caso especial y de alto interés en el estudio de procesos estocásticos. Este es el caso de las ecuaciones diferenciales estocásticas con ruido Gaussiano, para el cual entendemos que en cada incremento aleatorio se tiene distribución de probabilidad Gaussiana. En primer lugar el caso más sencillo, conocido como proceso de Wiener, es aquel donde el incremento de  $x$  depende únicamente del incremento aleatorio, para el caso de diferencias finitas es tal que  $\Gamma(t) \Delta t \equiv \Delta W_n$ . La ecuación discreta para  $x$  en este caso es

$$\Delta x(t_n) = \Delta W_n, \quad (2.24)$$

donde cada incremento de Wiener tiene la misma densidad de probabilidad y todos los incrementos son independientes entre si. La densidad de probabilidad está dada por la distribución de probabilidad Gaussiana

$$P(\Delta W) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\Delta W)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.25)$$

con media cero y varianza  $V = \sigma^2 = \Delta t$ .

Para resolver la ecuación (2.24) usamos, sin pérdida de generalidad,  $x(0) = 0$ , y de forma iterativa obtendremos  $\Delta x$ . Esto nos da la solución

$$x_n \equiv x(n\Delta t) = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta W_i. \quad (2.26)$$

Calculemos ahora la densidad de probabilidad para  $x_n$ . Es bien conocido que la suma de varias distribuciones Gaussianas resulta en una distribución Gaussiana con promedio y varianza igual a la suma de promedios y varianzas de cada  $\Delta W_n$ . Entonces

$$\langle x_n \rangle = 0 \quad (2.27)$$

$$V[x_n] = n\Delta t \quad (2.28)$$

y

$$P(x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\Delta t}} e^{-x_n^2/(2n\Delta t)}. \quad (2.29)$$

Si queremos pasar de ecuaciones en diferencias a ecuaciones diferenciales tomamos el límite cuando  $N \rightarrow \infty$ . Ahora, si tomamos  $N$  iteraciones del proceso de Wiener, podemos llegar a que la solución en el límite continuo

$$x(T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta W_i \equiv \int_0^T dW(t) \equiv W(T). \quad (2.30)$$

La ecuación (2.30) define la integral estocástica,  $W(T) = \int_0^T dW(t)$ , como el límite de las sumas sobre los incrementos del proceso de Wiener, la cual es una variable aleatoria por las propiedades de la suma de variables aleatorias. La densidad de probabilidad de  $x(T)$  es fácil de calcular dado que es la suma de variables aleatorias Gaussianas resulta una Gaussiana. Nos resta calcular su promedio y varianza. El promedio resulta cero, dado que todas las variables aleatorias involucradas en la suma tienen promedio cero. Para calcular la varianza regresamos al límite discreto y partimos de la expresión

$$V[x(T)] = \sum_{i=0}^{N-1} V[\Delta W_i] = \sum_{i=0}^{N-1} \Delta t = N\Delta t = T, \quad (2.31)$$

con lo que podemos escribir explícitamente

$$P(x(T)) = P(x, T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{x^2}{2T}}. \quad (2.32)$$

El hecho de que la varianza sea proporcional a  $T$  se debe principalmente a que escogimos la varianza de los incrementos de Wiener igual a  $\Delta t$ , dado que hay un incremento de Wiener por cada paso de tiempo  $\Delta t$ , la varianza de  $x$  crece  $\Delta t$  por cada intervalo  $\Delta t$ .

Vale la pena preguntarse ¿qué pasa si escogemos la varianza  $V[\Delta W(\Delta t)] = (\Delta t)^\alpha$ ?, esto para ilustrar la importancia de haber escogido la varianza lineal a los incrementos temporales, para esto calculando la varianza para  $x(T)$  tenemos

$$V[x(T)] = \sum_{i=0}^{N-1} V[\Delta W_i] = N(\Delta t)^\alpha = N \left( \frac{T}{N} \right)^\alpha = N^{1-\alpha} T^\alpha. \quad (2.33)$$

Tomando el límite al continuo,  $N \rightarrow \infty$ , para pasar a las ecuaciones diferenciales, tenemos dos casos:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} V[x(T)] = T^\alpha \lim_{N \rightarrow \infty} N^{1-\alpha} = \begin{cases} 0 & \alpha > 1 \\ \infty & \alpha < 1 \end{cases} \quad (2.34)$$

lo cual no tiene sentido, por lo que debe cumplirse  $\alpha = 1$  si se quieren obtener EDEs que describan sistemas realistas.

Por lo tanto podemos concluir esta sección con el siguiente resultado. Dada una EDE con incremento infinitesimal Gaussiano  $dW$  en la parte del ruido, con cada incremento Gaussiano e independiente, entonces la varianza del incremento debe ser proporcional a  $dt$ .

### 2.3.1. Ruido Gaussiano

En la sección anterior llegamos a un resultado de gran relevancia estadística, asociando la varianza del incremento de Wiener con el incremento temporal,  $V[dW] = dt$ . Una de las condiciones que pedimos para que se cumpla lo anterior es que el incremento sea Gaussiano; Pero, ¿por qué Gaussiano?. Para comenzar vamos a hacer mención de uno de los teoremas más importantes en la estadística: el teorema del límite central.

Consideramos un caso particular de transformación de variables, la suma de varias variables estocásticas. Sean  $X_1, \dots, X_n$  un conjunto de variables aleatorias independientes, todas con densidad de probabilidad  $P_X(x)$  con promedio cero y varianza finita  $\sigma^2$ . Definimos la variable aleatoria  $Y = X_1 + \dots + X_n$  la cual tiene promedio cero y la varianza  $V[Y] = n\sigma^2$ . Ahora, si definimos de manera conveniente la variable aleatoria

$$Z = \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}, \quad (2.35)$$

seguimos teniendo promedio cero, pero la varianza ahora es  $\sigma^2$  para toda  $n$ .

El teorema de límite central establece que, dada una densidad de probabilidad  $P_X(x)$ , la distribución de probabilidad de la variable aleatoria  $Z$  tiende a una distribución de probabilidad Gaussiana, con promedio cero y con varianza  $\sigma^2$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ . Dicho teorema se cumple incluso si la densidad de probabilidad  $P_X(x)$  no es Gaussiana, lo cual es conveniente cuando tenemos un sistema en el que la cantidad de eventos es lo suficientemente grande para hacer uso de la distribución Gaussiana.

En la sección anterior usamos ruido Gaussiano, y se debe principalmente a que está presente en sistemas físicos. El ruido en la mayoría de las veces es el resultado de una gran cantidad de eventos aleatorios a nivel microscópico. Puede ser la fuerza eléctrica de varios electrones moviéndose aleatoriamente en un conductor o, como en el caso del movimiento browniano, el impacto de partículas de manera individual sobre la partícula browniana sumergida en una solución. Y dado que la fuerza total ejercida por las partículas microscópicas es la suma de cada una de las fuerzas aleatorias, entonces la fuerza total es la suma de varias variables aleatorias, y son suficientes para considerar una distribución de probabilidad Gaussiana. Por otra parte, dado que las fluctuaciones microscópicas suceden con mayor rapidez comparadas con la evolución del sistema, podemos modelar el ruido con densidad de probabilidad Gaussiana en cada paso temporal  $\Delta t$ . Incluso, suponiendo que cada incremento aleatorio en el ruido es completamente independiente del incremento siguiente, aunque es una aproximación que en la práctica no es siempre verdadera, resulta ser bastante acertada en los resultados. Matemáticamente, como se mostró en secciones anteriores, los procesos en los cuales el incremento aleatorio de cada intervalo de tiempo  $dt$  es independiente de todos los incrementos aleatorios anteriores puede ser modelada por una distribución de probabilidad Gaussiana. Esto se debe a que el incremento aleatorio en cada intervalo temporal, que es pequeño pero finito, es la suma sobre el número infinito de incrementos para los intervalos infinitesimales  $dt$ , lo cual resulta en un intervalo finito.

## 2.4. Cálculo de Ito

En la sección anterior justificamos el porqué los incrementos del ruido Gaussiano,  $dW$ , deben tener una varianza proporcional a  $dt$ . De igual manera, vimos su importancia en la descripción estadística al momento de resolver una ecuación diferencial estocástica, sin embargo, no hemos hablado de las consecuencias que puede tener sobre el cálculo en sí, considerado como una herramienta matemática. La ecuación diferencial

$$dx = -\gamma x dt, \quad (2.36)$$

la resolvimos usando la relación  $e^{-\gamma dt} \approx 1 - \gamma dt$ . La relación es válida dado que  $dt$  es un diferencial, es decir, cuando calculamos la solución de la ecuación diferencial tomamos el límite  $dt \rightarrow 0$ . Por lo tanto, la aproximación funciona porque los términos del desarrollo en series de potencias de  $e^{-\gamma dt}$  que son de segundo orden o mayor son insignificantes cuando tomamos el límite.

El resultado anterior nos permite ignorar términos de segundo orden o mayores en los incrementos  $dt$ . Lo cual nos permitiría usar las reglas usuales del cálculo, incluso podemos escribir nuestras ecuaciones en términos de derivadas y no en diferenciales. Sin embargo, vamos a probar que  $(dW)^2$  no se anula con  $dt$ , este resultado es el motivo por el cual es necesario escribir nuestras ecuaciones en términos de diferenciales y nos mostrarán el alma del cálculo de Ito. La solución de una ecuación diferencial estocástica implica sumar los incrementos infinitesimales para todos los pasos  $dt$ . Para ver la contribución, no nula, de  $(dW)^2$  tenemos que sumar sobre todos los pasos temporales hasta un tiempo finito  $T$ . A partir de la descripción discreta es posible obtener las propiedades estadísticas que contribuyen a la solución.

Calculamos el valor de expectación de  $(\Delta W)^2$

$$\langle (\Delta W)^2 \rangle = -\langle (\Delta W) \rangle^2 + V[\Delta W] = \Delta t, \quad (2.37)$$

esto es fácil de ver, dado que el promedio de  $\Delta W$  es cero. Esto nos dice que el valor de expectación de  $(\Delta W)^2$  no se desvanece respecto a los pasos temporales  $\Delta t$ , por lo que la suma de dichos incrementos tampoco se van a anular cuando hacemos la suma sobre todos los pasos infinitesimales e incluso cuando pasamos al límite continuo. De hecho, el valor de expectación para todos los incrementos de  $(\Delta W)^2$  de 0 a  $T$  es:

$$\left\langle \int_0^T (dW)^2 \right\rangle = \int_0^T \langle (dW)^2 \rangle = T = \int_0^T dt. \quad (2.38)$$

Vamos a ver que pasa ahora con la varianza. Calculamos directamente la varianza usando la densidad de probabilidad para  $\Delta W$ , tenemos entonces

$$V[(\Delta W)^2] = 2(\Delta t)^2 = 2\left(\frac{T}{N}\right)^2. \quad (2.39)$$

La varianza de la suma de todos los incrementos  $(\Delta W)^2$  es

$$\begin{aligned}
 V \left[ \sum_{n=0}^{N-1} (\Delta W)^2 \right] &= \sum_{n=0}^{N-1} V [(\Delta W)^2] \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} 2 (\Delta t)^2 \\
 &= 2N \left( \frac{T}{N} \right)^2 \\
 &= 2 \frac{T^2}{N},
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

pasando al límite continuo, es decir la integral de todos los incrementos tenemos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} V \left[ \sum_{n=0}^{N-1} (\Delta W)^2 \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} 2 \frac{T^2}{N} = 0. \tag{2.41}$$

Esto nos dice que la integral de todos los incrementos  $(dW)^2$  no es aleatoria, al contrario, es determinista e igual a su promedio  $T$ :

$$\int_0^T (dW)^2 = T = \int_0^T dt. \tag{2.42}$$

La razón es la misma por la que la varianza del promedio de  $N$  variables aleatorias, idénticas pero independientes, tiende a cero conforme  $N$  crece.

Por lo tanto tenemos el siguiente resultado

$$(dW)^2 = dt, \tag{2.43}$$

que conocemos formalmente como Lema de Ito, o bien, regla de Ito, que es fundamental para resolver ecuaciones diferenciales estocásticas con ruido Gaussiano.

Esta relación es la que nos aleja de las reglas usuales del cálculo, dado que cada que aparece un término del orden de  $(dW)^2$  no debemos descartarlo. Sin embargo, los demás términos, de la forma  $dt^n dW^m$ , con  $n > 1$  y  $m > 1$ , deben ser descartados en el límite infinitesimal. Por lo tanto, los términos que van a contribuir a la solución de una ecuación diferencial estocástica son  $dt$ ,  $dW$  y  $(dW)^2$ . Por lo tanto, la regla de Ito debe ser considerada para manipular ecuaciones diferenciales estocásticas. La técnica de cálculo que hemos discutido se denomina Cálculo de Ito.

A manera de resumen, cuando trabajamos con ecuaciones diferenciales estocásticas vamos a tomar en cuenta todos los términos a primer orden de  $dt$  y  $dW$ , y todos los términos de segundo orden en  $dW$ . Es necesario hacer esto cada que tengamos una ecuación diferencial estocástica para  $x$ , y cuando querramos conocer la ecuación diferencial estocástica para una variable que sea función de  $x$ .

Para hacer evidente estos resultados vamos a examinar un ejemplo que permite comprender los resultados expuestos, consideremos la ecuación diferencial estocástica

$$dx = f dt + g dW, \tag{2.44}$$

donde  $f$  y  $g$  son coeficientes de las contribuciones determinista y aleatoria respectivamente. Queremos encontrar la ecuación diferencial para  $y = x^2$ , con  $x$  una variable estocástica. Primero debemos de encontrar la relación entre los incrementos de  $y$  y  $dy$  respecto a los incrementos de  $x$ , por lo que hacemos

$$\begin{aligned}
 dy &= y(t+dt) - y(t) \\
 &= [x(t+dt)]^2 - [x(t)]^2 \\
 &= (x+dx)^2 - x^2 \\
 &= x^2 + 2x dx + (dx)^2 - x^2 \\
 &= 2x dx + (dx)^2.
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

Tomando en cuenta que  $x$  satisface la ec.(2.44), tenemos

$$\begin{aligned}
 dy &= 2x(f dt + g dW) + (f dt + g dW)^2 \\
 &= 2x(f dt + g dW) + (f dt)^2 + (g dW)^2 + 2f g dt dW \\
 &= 2x(f dt + g dW) + (g dW)^2 \\
 &= (2f x + g^2) dt + 2x g dW
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

Donde hemos usado la regla de Ito, cambiando  $(dW)^2 \rightarrow dt$ , y los demás términos son descartados debido a que son de la forma  $dt^n dW^m$ , con  $n > 1$  y  $m > 1$ .

En el ejemplo se hace evidente el uso de la regla de Ito, y aunque el ejemplo es bastante ilustrativo existen funciones que requieren un poco más de esfuerzo. Sin embargo, existe una forma más simple de calcular los incrementos de cualquier función no lineal  $y(x) = Z(x)$  en términos de los incrementos de  $x$ . Sea la ecuación diferencial estocástica

$$dx = f dt + g dW. \tag{2.47}$$

Hacemos un desarrollo en series de Taylor para  $y(x)$  hasta el segundo orden para ver explícitamente la contribución de  $(dW)^2$ , siendo

$$dy = Z' dx + \frac{1}{2} Z'' (dx)^2, \tag{2.48}$$

con  $Z' = \frac{dZ}{dx}$ . Sustituimos los valores de  $dx$  y tenemos

$$\begin{aligned}
 dy &= Z' (f dt + g dW) + \frac{1}{2} Z'' (f dt + g dW)^2 \\
 &= Z' (f dt + g dW) + \frac{1}{2} Z'' [(f dt)^2 + (g dW)^2 + 2f g dt dW] \\
 &= Z' (f dt + g dW) + \frac{1}{2} Z'' (g dW)^2 \\
 &= \left( f Z' + \frac{1}{2} g Z'' \right) dt + g Z' dW.
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

Entonces tenemos una nueva forma para la fórmula de Ito

$$dy(x) = \left( f Z' + \frac{1}{2} g Z'' \right) dt + g Z' dW. \tag{2.50}$$





# Capítulo 3

## Movimiento Browniano no relativista

En el capítulo anterior se presentaron las consideraciones teóricas, de manera tal que la formalidad matemática no fue necesaria para establecer EDEs en términos de diferenciales y el cálculo de Ito que establece las reglas que hay que tomar en cuenta para el término del ruido. En este capítulo vamos a estudiar el movimiento Browniano no relativista siguiendo la metodología del capítulo anterior. Este estudio será de gran ayuda para abordar más adelante el problema del movimiento Browniano relativista.

### 3.1. Movimiento Browniano

Tal como lo hemos comentado, el movimiento Browniano es un fenómeno típico de no equilibrio cuya dinámica puede describirse mediante una EDE, conocida como ecuación de Langevin. De acuerdo con Langevin[10], es posible describir el movimiento de la partícula Browniana en términos de la segunda ley de Newton si suponemos que la fuerza neta que experimenta la partícula es la suma de dos fuerzas, una fuerza de fricción viscosa y la otra una fuerza aleatoria. La fuerza de fricción corresponde a la resistencia que experimenta la PB al estar inmersa en un fluido. Esta fuerza es proporcional al negativo del momento de la partícula Browniana, es decir

$$F_{fricción} = -\alpha p = -\alpha m v, \quad (3.1)$$

donde  $m$  es la masa del grano de polen y  $v$  es su velocidad. La constante de proporcionalidad,  $\alpha$ , generalmente se refiere a la tasa de amortiguamiento, dada por  $\alpha = 6\pi\eta d/m$ , siendo  $d$  el diámetro de la partícula considerada esférica y  $\eta$  es la viscosidad del fluido. Esta fuerza se conoce como la fuerza de Stokes.

Por otro lado, la fuerza aleatoria que actúa sobre la partícula Browniana es resultado de la colisión entre las moléculas del fluido con la PB. Luego entonces la ecuación de movimiento está dada por

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\alpha p + g \xi(t), \quad (3.2)$$

donde  $g \xi(t)$  corresponde a la fuerza estocástica y  $g$  su intensidad. El término  $\xi(t)$  se conoce en la literatura como ruido estocástico o simplemente ruido, cuyas propiedades estadísticas

suponemos que satisfacen las propiedades de ruido blanco Gaussiano con promedio cero. También nos interesa saber el valor de expectación del producto de la variable aleatoria con la misma pero en un tiempo distinto, a dicho valor se le conoce como función de correlación. En el caso del movimiento Browniano tenemos

$$\langle \xi(t) \xi(t + \tau) \rangle = \delta(\tau), \quad (3.3)$$

es decir, la *auto-correlación* que tiene la variable aleatoria a distintos tiempos es una delta centrada en el tiempo final.

La ecuación (3.2) puede ser escrita en forma vectorial de la siguiente forma

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi(t) \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

o bien, en forma de diferenciales

$$\begin{pmatrix} dx \\ dp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ dW \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

con  $dW$  el proceso de Wiener. Una vez establecidas las ecuaciones diferenciales estocásticas podemos notar que  $dx$  depende de  $p$ , mientras que  $dp$  no depende de  $x$ . Por lo tanto, para resolver dicha ecuación es necesario primero resolver para  $p$  y después para  $x$ . La ecuación para el momento,  $p$ , es

$$dp = -\alpha p dt + g dW. \quad (3.6)$$

Esta ecuación es conocida como el proceso de Ornstein-Uhlenbeck [12] y puede resolverse usando los métodos presentados en el capítulo anterior.

Tomando en cuenta únicamente la parte determinista  $dp = -\alpha p dt$ , y suponiendo que para  $t = 0$   $p(0) = p_0$ , entonces su solución será  $p(t) = p_0 e^{-\alpha t}$ . Ahora, haciendo un cambio de variable  $y = p e^{\alpha t}$  y  $y(0) = y_0$ , el cual de manera explícita queda como

$$\begin{aligned} dy &= y(p(t + dt), t + dt) - y(t) \\ &= y(p + dp, t + dt) - y(t) \\ &= (p + dp) \exp[\alpha(t + dt)] - p \exp[\alpha t] \\ &= p e^{\alpha(t+dt)} + dp e^{\alpha(t+dt)} - p e^{\alpha t}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Usamos el desarrollo de la exponencial hasta primer orden de tal forma que  $e^{\alpha(t+dt)} = e^{\alpha t} e^{\alpha dt} = e^{\alpha t} (1 + \alpha t)$ . Sustituyendo en las ecuaciones anteriores obtenemos

$$dy = p e^{\alpha t} + p \alpha e^{\alpha t} dt + e^{\alpha t} dp + \alpha e^{\alpha t} dp dt - p e^{\alpha t}. \quad (3.8)$$

Tomando en cuenta que todos los incrementos son infinitesimales, entonces el producto de cualquier incremento infinitesimal con  $dt$  se puede despreciar, dando como resultado

$$dy = p \alpha e^{\alpha t} dt + e^{\alpha t} dp. \quad (3.9)$$

Sustituimos la ecuación (3.6) en la ecuación (3.9) de tal manera que

$$\begin{aligned} dy &= p \alpha e^{\alpha t} dt + e^{\alpha t} (-\alpha p dt + g dW) \\ &= p \alpha e^{\alpha t} dt - \alpha p e^{\alpha t} dt + e^{\alpha t} g dW \\ dy &= e^{\alpha t} g dW. \end{aligned} \quad (3.10)$$

La ecuación anterior puede ser resuelta de la forma usual o, como en el capítulo anterior, sumando todos los incrementos estocásticos  $dW$  sobre un tiempo finito  $t$  y tomando el límite al continuo. Utilizando cualquier método obtenemos como solución

$$y(t) = y_0 + g \int_0^t e^{\alpha s} dW(s) \quad (3.11)$$

Para tener una solución completa de la ecuación diferencial estocástica debemos obtener el promedio y su varianza. Debido a la presencia de la integral estocástica, expresamos nuestra solución en forma discreta considerando  $t = N\Delta t$

$$y(t) = y(N\Delta t) = y_0 + \lim_{N \rightarrow \infty} g \sum_{n=0}^{N-1} e^{\alpha n \Delta t} \Delta W_n. \quad (3.12)$$

Para calcular la varianza podemos definir la variable aleatoria  $Y_n = g e^{\alpha n \Delta t} \Delta W_n$ . Dado que al multiplicar una variable aleatoria por un número  $c$  la varianza de dicha variable aleatoria cambia por un factor de  $c^2$ , entonces

$$V[Y_n] = g^2 e^{2\alpha n \Delta t} (\Delta W_n)^2 = g^2 e^{2\alpha n \Delta t} \Delta t, \quad (3.13)$$

de modo que la varianza de  $y(t)$  será

$$\begin{aligned} V[y(t)] &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} V[Y_n] = g^2 \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\alpha n \Delta t} \Delta t \\ &= g^2 \int_0^t e^{2\alpha s} ds = \frac{g^2}{2\alpha} (e^{2\alpha t} - 1). \end{aligned} \quad (3.14)$$

La media de  $y(t)$  está dada por

$$\langle y(t) \rangle = y_0, \quad (3.15)$$

dado que  $\langle dW \rangle = 0$ . Finalmente, para obtener la solución para la ecuación diferencial original (3.6) tenemos que  $p = y e^{-\alpha t}$  y entonces

$$p(t) = p_0 e^{-\alpha t} + g \int_0^t e^{-\alpha(s-t)} dW(s), \quad (3.16)$$

que es la solución de la ecuación (3.6) donde el promedio es

$$\langle p(t) \rangle = p_0 e^{-\alpha t},$$

y la varianza está dada por

$$V[p(t)] = \frac{g^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}). \quad (3.17)$$

Por otro lado, sabemos de mecánica estadística que el promedio de la energía cinética  $\langle E \rangle = \langle p^2 / (2m) \rangle$ , en el equilibrio es igual a  $k_B T / 2$ . Entonces para que nuestro modelo sea consistente con los resultados de la física estadística se debe cumplir lo anterior, una implicación directa es que la densidad de probabilidad debe ser independiente del tiempo en el estado de equilibrio. Examinando el resultado obtenido para la varianza,  $V[p(t)]$ , cuando tomamos el límite  $t \rightarrow \infty$  vemos de inmediato que en el estado de equilibrio

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V[p(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}) = \frac{g^2}{2\alpha} \equiv V(p)_{ss}. \quad (3.18)$$

Ahora, dado que el promedio,  $\langle p(t) \rangle = p_0 e^{-\alpha t}$ , tiende a cero conforme  $t \rightarrow \infty$ , entonces  $\langle p^2 \rangle = V[p(t)]$ . Por lo tanto, para ser consistentes con los resultados de física estadística se debe cumplir

$$\langle E \rangle = \langle p^2 / (2m) \rangle = \frac{V[p(t)]}{2m} = \frac{g^2}{4\alpha m} = \frac{g^2}{24\pi\eta a} = k_B T / 2, \quad (3.19)$$

de manera que la intensidad del ruido debe satisfacer

$$g^2 = 2\alpha m k_B T. \quad (3.20)$$

Este resultado es conocido como la relación de fluctuación-disipación [9, 10, 12], la cual muestra que en estado estacionario existe una relación entre la intensidad del ruido  $g^2$  con el coeficiente de fricción  $\alpha$  y la temperatura  $T$ . En otras palabras, en el estado estacionario se establece un balance entre la fuerza de fricción que tiende a detener el movimiento de la partícula Browniana, y la fuerza fluctuante que la mantiene en movimiento permanente. Una de las cantidades de relevancia que es posible calcular y medir en un experimento es el desplazamiento cuadrático medio, el cual se obtiene directamente mediante la integración de  $p(t)/m$  respecto al tiempo de la ec. (3.16), es decir

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \frac{p(s)}{m} ds \\ &= \frac{p_0}{m} \int_0^t e^{-\alpha s} ds + \frac{g}{m} \int_0^t \left[ \int_0^s e^{-\alpha(s-s')} dW(s') \right] ds. \end{aligned} \quad (3.21)$$

El orden de la doble integral en el segundo término puede ser cambiado usando las reglas usuales del cálculo, y es fácil probarlo al pasar a la discretización de la integral, entonces

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{p_0}{m} \int_0^t e^{-\alpha s} ds + \frac{g}{m} \int_0^t \int_0^s e^{-\alpha(s-s')} ds' dW(s) \\ &= \frac{p_0}{m\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) + \frac{g}{m\alpha} \int_0^t (1 - e^{-\alpha s}) dW(s). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Esta expresión es la solución completa para la posición  $x(t)$ . La distribución de probabilidad para  $x(t)$  es Gaussiana, lo cual nos permite calcular su promedio y su varianza a partir de los resultados obtenidos anteriormente. El promedio es simplemente

$$\langle x(t) \rangle = \frac{p_0}{m\alpha} (1 - e^{-\alpha t}), \quad (3.23)$$

mientras que la varianza es

$$\begin{aligned} V[x(t)] &= \frac{g^2}{(m\alpha)^2} \int_0^t (1 - e^{-\alpha s})^2 ds \\ &= \frac{g^2 t^2}{(m\alpha)^2} + \frac{g^2}{2m^2\alpha^3} (4e^{-\alpha t} - e^{-2\alpha t} - 3). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Langevin se dio cuenta que la tasa de amortiguamiento  $\alpha$ , o decaimiento, es muy rápida, al menos comparada con el tiempo de observación en el experimento. Lo anterior, es equivalente a considerar  $\alpha t \gg 1$ , y como consecuencia la varianza en dicho límite se reduce a

$$V[x(t)] = \frac{g^2 t}{(m\alpha)^2} - \frac{3g^2}{2m^2\alpha^3} = \frac{g^2}{(m\alpha)^2} \left( t - \frac{3}{2\alpha} \right) \approx \frac{g^2 t}{(m\alpha)^2} = \left( \frac{k_B T}{3\pi\eta d} \right) t. \quad (3.25)$$

La varianza de la posición, de la partícula Browniana, es proporcional a  $t$  para tiempos en los cuales  $\alpha t \gg 1$ . Este es el mismo comportamiento que exhibe el ruido de Wiener, es por eso que el ruido de Wiener es conocido como ruido Browniano. Para probar que el modelo matemático es adecuado, en 1910 Smoluchowski y Perrin en 1911 [11] realizaron experimentos en los cuales se observó el movimiento de la partícula Browniana y confirmaron este comportamiento de la varianza.

Exite por otro lado, una forma distinta de obtener el coeficiente de difusión asintótica debida a Kubo [44]. Dicho coeficiente se define de forma general como

$$D_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \langle [X(t) - X(0)]^2 \rangle, \quad (3.26)$$

por lo que para el caso del proceso de Ornstein-Uhlenbeck se obtiene el resultado

$$D_\infty = \left( \frac{k_B T}{6\pi\eta d} \right) \equiv \frac{g^2}{(m\alpha)^2} = \frac{k_B T}{m\alpha}. \quad (3.27)$$

En esta sección hemos estudiado y resuelto la EDE tipo Ornstein-Uhlenbeck usando el cálculo de Ito y aplicado al problema del MB. El cálculo de Ito conduce a los mismos resultados usando las herramientas del cálculo convencional, como era de esperarse. Sin embargo, la utilidad de dicho cálculo se verá posteriormente cuando estudiemos las EDEs con ruido multiplicativo. Existe por otro lado, una forma alternativa para describir los procesos estocásticos, tal como lo hizo Einstein para resolver el problema del MB al establecer la ecuación de difusión para densidad de probabilidad. En la siguiente sección estudiaremos la manera de describir los procesos estocásticos a través de la ecuación para la densidad de probabilidad conocida como ecuación de Fokker-Planck.

### 3.2. Ecuación de Fokker-Planck

Dada una ecuación diferencial estocástica, su solución queda completamente determinada cuando se obtiene la distribución de probabilidad correspondiente. Todo proceso estocástico tiene asociado una distribución de probabilidad que a su vez satisface una ecuación diferencial parcial. En otras palabras, dada una EDE es posible obtener a partir de ella una ecuación diferencial parcial para la densidad de probabilidad, conocida como ecuación de Fokker-Planck.

Aunque esta ecuación no provee tanta información como la ecuación diferencial estocástica, por ejemplo no nos proporciona un método práctico para realizar simulaciones de las trayectorias del proceso. Sin embargo, su mayor virtud es que podemos obtener expresiones analíticas para las densidades de probabilidad del estado estacionario, lo cual no siempre es fácil de obtener a partir de la ecuación diferencial estocástica.

Resulta relativamente sencillo obtener la ecuación de Fokker-Planck de un proceso estocástico,  $x(t)$ , a partir de una ecuación diferencial de Ito

$$dx = f(x, t) dt + g(x, t) dW. \quad (3.28)$$

Comenzamos calculando la ecuación diferencial para el valor promedio de una función arbitraria  $h(x)$ , usando la regla de Ito, la ecuación diferencial para la función  $h(x)$  queda como

$$\begin{aligned} dh &= \frac{dh}{dx} dx + \frac{1}{2} \frac{d^2 h}{dx^2} dx^2 \\ &= \left( \frac{dh}{dx} \right) (f(x, t) dt + g(x, t) dW) + \frac{1}{2} \frac{d^2 h}{dx^2} (f(x, t) dt + g(x, t) dW)^2 \\ &= \left( \frac{dh}{dx} \right) (f(x, t) dt + g(x, t) dW) + \frac{1}{2} \frac{d^2 h}{dx^2} g^2(x, t) (dW)^2 \\ &= \left( \frac{dh}{dx} \right) f(x, t) dt + \frac{1}{2} \frac{d^2 h}{dx^2} g^2(x, t) dt + \left( \frac{dh}{dx} \right) g(x, t) dW, \end{aligned} \quad (3.29)$$

tomando el promedio de ambos lados, y tomando en cuenta que  $\langle dW \rangle = 0$ , tenemos

$$\begin{aligned} d\langle h \rangle &= \left\langle f(x, t) \left( \frac{dh}{dx} \right) \right\rangle dt + \frac{1}{2} \left\langle g^2(x, t) \frac{d^2 h}{dx^2} \right\rangle dt \\ \frac{d\langle h \rangle}{dt} &= \left\langle f(x, t) \left( \frac{dh}{dx} \right) \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle g^2(x, t) \frac{d^2 h}{dx^2} \right\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ f(x, t) \left( \frac{dh}{dx} \right) + \frac{1}{2} g^2(x, t) \frac{d^2 h}{dx^2} \right] \mathcal{P}(x, t) dx. \end{aligned} \quad (3.30)$$

En la última línea usamos la definición del valor promedio, donde  $\mathcal{P}(x, t)$  es la densidad de probabilidad, tomando en cuenta que la probabilidad es normalizada y que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \mathcal{P}(x, t) = 0$ . Después de integrar dos veces por partes tenemos

$$\frac{d\langle h \rangle}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} dx h(x) \left[ -\frac{\partial}{\partial x} (f(x, t) \mathcal{P}(x, t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (g^2(x, t) \mathcal{P}(x, t)) \right], \quad (3.31)$$

por otro lado para cualquier  $h(x)$ , sabemos que

$$\langle h(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \mathcal{P}(x, t) h(x), \quad (3.32)$$

entonces

$$\frac{d\langle h \rangle}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} dx h(x) \frac{\partial \mathcal{P}(x, t)}{\partial t}, \quad (3.33)$$

si usamos los resultados de las ecuaciones (3.31) y (3.33), se cumple que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx h(x) \left[ -\frac{\partial}{\partial x} (f(x, t) \mathcal{P}(x, t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (g^2(x, t) \mathcal{P}(x, t)) \right] = \int_{-\infty}^{\infty} dx h(x) \frac{\partial \mathcal{P}(x, t)}{\partial t}. \quad (3.34)$$

Puesto que integramos sobre el mismo espacio y se está mutiplicando por la misma función  $h(x)$  arbitraria, entonces los elementos dentro de la integral deben de cumplir

$$\frac{\partial \mathcal{P}(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (f(x, t) \mathcal{P}(x, t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (g^2(x, t) \mathcal{P}(x, t)), \quad (3.35)$$

la cual es conocida como Ecuación de Fokker-Planck.

En el caso de  $n$ -dimensiones, podemos obtener la ecuación de Fokker-Planck vectorial para  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ . Para la ecuación vectorial estocástica

$$d\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) dt + G(\mathbf{x}, t) d\mathbf{W}, \quad (3.36)$$

donde  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_N)^T$ ,  $d\mathbf{W} = (dW_1, dW_2, \dots, dW_M)^T$  es un vector de  $M$  incrementos de Wiener independientes entre ellos y  $G$  es una matriz de  $N \times M$ . Es posible demostrar que la ecuación de Fokker-Planck tiene la forma de

$$\frac{\partial \mathcal{P}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} (f_i(\mathbf{x}, t) \mathcal{P}(\mathbf{x}, t)) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (D_{ij}(\mathbf{x}, t) \mathcal{P}(\mathbf{x}, t)), \quad (3.37)$$

con  $D_{ij} = \sum_{k=1}^M G_{ik} G_{jk}$ .

Con los resultados expuestos en la presente sección podemos estudiar las ecuaciones diferenciales estocásticas y las ecuaciones de Fokker-Planck relacionadas a los problemas que nos conciernen, como es el caso del proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

### 3.2.1. Ecuación de Fokker-Planck del proceso de Ornstein-Uhlenbeck

Para obtener la ecuación de Fokker-Planck asociada al proceso de Ornstein-Uhlenbeck partimos de las siguientes ecuaciones diferenciales estocásticas

$$\begin{pmatrix} dx \\ dp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} dW, \quad (3.38)$$

entonces la ecuación de Fokker-Planck correspondiente, obtenida a partir de lo expuesto en la sección (3.37), tomando en cuenta que

$$f_x = p/m, \quad f_p(p, t) = -\alpha p \quad (3.39)$$

y

$$G(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}, \quad g = cte \quad (3.40)$$

será

$$\frac{\partial \mathcal{P}(x, p, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{m} \mathcal{P}(x, p, t) \right) + \frac{\partial}{\partial p} (\alpha p \mathcal{P}(x, p, t)) + \frac{1}{2} g^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} (\mathcal{P}(x, p, t)). \quad (3.41)$$

Siendo la ecuación correspondiente al sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas (3.38), dicha ecuación tiene por solución una función de distribución de probabilidad Gaussiana, el cual puede ser obtenida como se muestra en [43].

## Termalización

Un proceso de gran interés es conocido como la termalización de un sistema físico. Dicho proceso se realiza cuando el sistema, descrito por un vector  $\mathbf{x}$ , es colocado en contacto con un sistema mucho más grande en equilibrio térmico a temperatura  $T$ , conocido como baño térmico. Entonces la densidad de probabilidad se convierte en una densidad estacionaria  $P(\mathbf{x})$ .

Para el caso del movimiento Browniano, la ecuación (3.6) proporciona un modelo para la termalización de una partícula inmersa en un fluido. Para tal caso, considerando una dimensión, el estado del sistema está descrito por  $p$ , por lo que la ecuación de Fokker-Planck es unidimensional

$$\frac{\partial \mathcal{P}(p, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p} \left[ \alpha p \mathcal{P}(p, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p} (g^2 \mathcal{P}(p, t)) \right]. \quad (3.42)$$

Consideramos que si el sistema alcanza un estado estacionario entonces no existen variaciones en el tiempo de la densidad de probabilidad, es decir,  $\frac{\partial \mathcal{P}(x, p, t)}{\partial t} = 0$ . Por lo que el problema se reduce a la ecuación

$$\alpha p \mathcal{P}(p) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p} [g^2 \mathcal{P}(p)] = 0. \quad (3.43)$$

Dicha ecuación es una ecuación diferencial que se puede resolver si consideramos  $\psi(p) = g^2 \mathcal{P}(p)$ , por lo tanto tenemos la ecuación

$$\psi'(p) + (2\alpha p/g^2)\psi(p) = 0, \quad (3.44)$$

cuya solución es

$$\psi(p) = \frac{1}{g^2 \mathcal{N}} e^{-\frac{p^2 \alpha}{g^2}}, \quad (3.45)$$



donde  $\mathcal{N}$  es una constante de normalización que cumple

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(p) dp = 1. \quad (3.46)$$

Es de gran interés el caso en el que si se cumple (3.20) entonces la función de densidad de probabilidad estacionaria es la de Maxwell-Boltzmann

$$\psi_{MB}(p) = \frac{1}{2\alpha m k_B T \mathcal{N}} e^{-\frac{p^2}{2m k_B T}}. \quad (3.47)$$

Entonces, la solución estacionaria para el sistema es precisamente la distribución de Maxwell-Boltzmann para el momento. En el caso multidimensional se generaliza el resultado de manera inmediata, con la solución

$$\psi_{MB}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\alpha m k_B T \mathcal{N}_n} e^{-\frac{\mathbf{p}^2}{2m k_B T}}, \quad (3.48)$$

donde  $\mathcal{N}_n$  es la constante de normalización que cumple

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\mathbf{p}) dp^n = 1. \quad (3.49)$$

Con esto queda claro que el modelo del movimiento Browniano incluye la parte estadística del movimiento aleatorio de manera correcta, y también describe de manera adecuada el proceso de temalización de una partícula inmersa en un baño térmico.

### 3.3. Reglas de discretización

Las ecuaciones diferenciales estocásticas que vamos a trabajar en la presente tesis pueden ser expresadas de manera general como

$$dx = f(x, t) dt + g(x, t) dW, \quad (3.50)$$

donde el primer término es conocido como término de arrastre y el segundo es el término de difusión. En el caso del proceso de Ornstein-Uhlenbeck consideramos el coeficiente de difusión,  $g(x, t) = cte$ , es decir, no tiene dependencia de la variable física  $x$  y se le conoce como ruido aditivo. Sin embargo, si  $g(x, t)$  depende explícitamente de  $x$  entonces se dice que el término de difusión es multiplicativo. Dado el caso, el cálculo de Ito presenta algunos detalles que expondremos de manera explícita, partimos de la ecuación (3.50) escrita en incrementos discretos y consideramos el ruido Gaussiano

$$\Delta x = f(x, t) \Delta t + g(x, t) \Delta W, \quad (3.51)$$

cuyas soluciones recurrentes son de la forma,

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + \Delta x_{n-1} \\ &= x_{n-1} + f(x_{n-1}, t_{n-1}) \Delta t + g(x_{n-1}, t_{n-1}) \Delta W_{n-1} \end{aligned} \quad (3.52)$$

y la solución general, obtenida después de iterar  $N$  veces es

$$x_N = x(N\Delta t) = x_0 + \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n, t_n) \Delta t + \sum_{n=0}^{N-1} g(x_n, t_n) \Delta W_n. \quad (3.53)$$

La expresión anterior en general arroja soluciones aceptables pero no es de mucha ayuda si queremos obtener una solución explícita para  $x$ , dado que la solución está en términos de  $x_{N-1}, x_{N-2}, \dots, x_0$  pero no incluye el término  $x_N$ . Escrito en su forma discreta nos lleva a una expansión infinita de términos y cuando se lleva al límite continuo, considerando  $N \rightarrow \infty$ , obtenemos la integral de Ito, precisamente como la definimos

$$\int_0^t g(x(t), t) dW \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} g(x_n, t_n) \Delta W_n. \quad (3.54)$$

Esta integral es parte de la solución para  $x(t)$ . Sin embargo, existen formas alternas de definir las integrales estocásticas para un proceso de Wiener, las cuales dependen de la regla de discretización usada para las integrales. Por ejemplo, la integral de Stratonovich considera el punto medio de la discretización, es decir, evalúa la función estocástica en  $\frac{x_{n+1} + x_n}{2}$ , por lo tanto, queda definida como

$$\begin{aligned} \oint_0^t g(x, t) dW &\equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} g\left(\frac{x[(n+1)\Delta t] + x[n\Delta t]}{2}, n\Delta t\right) \Delta W_n \\ &\equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} g\left(\frac{x_{n+1} + x_n}{2}, t_n\right) \Delta W_n. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Vale la pena cambiar un poco la notación para distinguir entre la integral de Stratonovich y la integral de Ito. Para hacer notar las diferencias entre una regla de discretización y otra, vamos a diferenciar los coeficientes de arrastre y el de difusión como sigue:

- Para Ito, consideramos un asterisco (\*) como subíndice del coeficiente de arrastre y en el producto del término de difusión. Por lo tanto, la ecuación diferencial estocástica de Ito queda como

$$dx = f_*(x, t) dt + g(x, t) * \Delta W. \quad (3.56)$$

- Para la integral de Stratonovich consideramos un círculo blanco o bullet blanco ( $\circ$ ), de igual forma lo colocaremos como subíndice en el coeficiente de arrastre y como producto en el término de difusión. La ecuación diferencial estocástica queda como

$$dx = f_\circ(x, t) dt + g(x, t) \circ \Delta W. \quad (3.57)$$

Para ver cuál es la relación entre ambas integrales (Ito y Stratonovich), calculamos de manera explícita la diferencia. Partimos de la solución para la ecuación estocástica (3.56) en su forma discreta,

$$x_n = x_{n-1} + f(x_{n-1}, t_{n-1}) \Delta t + g(x_{n-1}, t_{n-1}) \Delta W_{n-1}, \quad (3.58)$$

y tomamos el  $n$ -ésimo término de la integral de Stratonovich dado por

$$g\left(\frac{x_{n+1} + x_n}{2}, t_n\right) \Delta W_n = g\left(x_n + \frac{\Delta x_n}{2}, t_n\right) \Delta W_n. \quad (3.59)$$

Con la idea de hacer la notación más compacta usamos que  $g_n \equiv g(x_n, t_n)$ , y desarrollamos en serie de potencias en el punto  $(x_n, t_n)$  hasta segundo orden, y usando la regla de Ito,  $(\Delta W)^2 = \Delta t$ , tenemos

$$g\left(x_n + \frac{\Delta x_n}{2}, t_n\right) = g_n + \left(\frac{\Delta x_n}{2}\right) \frac{\partial g_n}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta x_n}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 g_n}{\partial x^2} + \dots \quad (3.60)$$

Dado que la ecuación estocástica es válida para todo tiempo  $t$ , podemos sustituir el  $n$ -ésimo término,  $\Delta x_n = f(x_n, t_n) \Delta t + g(x_n, t_n) \Delta W_n$ , en la expresión anterior y obtenemos

$$\begin{aligned} g\left(x_n + \frac{\Delta x_n}{2}, t_n\right) &= g_n + \left(\frac{f_n \Delta t + g_n \Delta W_n}{2}\right) \frac{\partial g_n}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{f_n \Delta t + g_n \Delta W_n}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 g_n}{\partial x^2} \\ &= g_n + \left(\frac{f_n}{2} \Delta t + \frac{g_n}{2} \Delta W_n\right) \frac{\partial g_n}{\partial x} + \left(\frac{g_n^2}{8} \frac{\partial^2 g_n}{\partial x^2}\right) (\Delta W_n)^2 \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$g\left(x_n + \frac{\Delta x_n}{2}, t_n\right) = g_n + \left(\frac{f_n}{2} \frac{\partial g_n}{\partial x} + \frac{g_n^2}{4} \frac{\partial^2 g_n}{\partial x^2}\right) \Delta t + \left(\frac{g_n}{2} \frac{\partial g_n}{\partial x}\right) \Delta W_n, \quad (3.62)$$

donde hemos usado la regla de Ito para obtener la última línea. Ahora es conveniente llevarlo a la forma discretizada de la Integral de Stratonovich, por lo que sumamos de ambos lados de la ecuación y multiplicamos por  $\Delta W_n$ , obteniendo

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} g\left(x_n + \frac{\Delta x_n}{2}, t_n\right) \Delta W_n &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[ g_n \Delta W_n + \left(\frac{f_n}{2} \frac{\partial g_n}{\partial x} + \frac{g_n^2}{4} \frac{\partial^2 g_n}{\partial x^2}\right) \Delta t \Delta W_n + \left(\frac{g_n}{2} \frac{\partial g_n}{\partial x}\right) (\Delta W_n)^2 \right] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[ g_n \Delta W_n + \left(\frac{g_n}{2} \frac{\partial g_n}{\partial x}\right) \Delta t \right]. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Tomando el límite cuando  $n \rightarrow \infty$  de ambos lados, tenemos

$$\oint_0^t g(x, t) dW = \int_0^t g(x, t) dW + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial g(x, t)}{\partial x} g(x, t) dt. \quad (3.64)$$

Por lo tanto si tenemos la ecuación estocástica  $dx = f_\circ(x, t) dt + g(x, t) \circ dW$  y usamos la regla de discretización que nos lleva a la integral de Stratonovich tenemos la solución  $x(t)$

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \int_0^t f(x, t) dt + \oint_0^t g(x, t) dW \\ &= x(0) + \int_0^t \left[ f(x, t) + \frac{g(x, t)}{2} \frac{\partial g(x, t)}{\partial x} \right] dt + \int_0^t g(x, t) dW. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Es importante notar que las últimas integrales son integrales de Ito. Es decir, si tenemos un sistema que involucre ruido multiplicativo, de la forma

$$dx = f_\circ(x, t) dt + g(x, t) \circ dW \quad (3.66)$$

podemos resolverla usando la integral de Stratonovich, o bien, podemos cambiar el coeficiente de arrastre de tal forma que la ecuación diferencial estocástica sea  $dx = \left[ f_*(x, t) + \frac{g(x, t)}{2} \frac{\partial g(x, t)}{\partial x} \right] dt + g(x, t) * dW$  y entonces resolvamos con la integral de Ito.

Existe otra regla de discretización, conocida como Ito-Inverso, la cual vamos a identificar con un círculo negro o bullet negra ( $\bullet$ ). En esta regla de discretización consideramos

$$\begin{aligned} \int_0^t g(x, t) dW &\equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} g(x[(n+1)\Delta t], (n+1)\Delta t) \Delta W_n \\ &\equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} g(x_{n+1}, t_{n+1}) \Delta W_n. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Dicha integral corresponde a tomar el punto posterior en la discretización. Haciendo un análisis similar al anterior llegamos a

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \int_0^t f(x, t) dt + \int_0^t g(x, t) dW \\ &= x(0) + \int_0^t \left[ f(x, t) + g(x, t) \frac{\partial g(x, t)}{\partial x} \right] dt + \int_0^t g(x, t) dW. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Es decir, como en el caso anterior, si tenemos un sistema cuya ecuación diferencial estocástica es

$$dx = f_\bullet(x, t) dt + g(x, t) \bullet dW, \quad (3.69)$$

de manera similar al caso de la integral de Stratonovich podemos resolver usando la integral de Ito-Inverso, o bien, cambiarla por

$$dx = \left[ f_\bullet(x, t) + g(x, t) \frac{\partial g(x, t)}{\partial x} \right] dt + g(x, t) * dW \quad (3.70)$$

y utilizar el calculo de Ito para trabajarla.

Desde un punto de vista práctico, cada regla de discretización tiene propiedades características únicas. Por ejemplo, la regla de discretización de Ito ( $*$ ) es muy conveniente para simulaciones numéricas, pero cuando se consideran transformaciones no lineales para el momento  $P$  se debe de tener en cuenta las modificaciones al cálculo usual por el cálculo de Ito. Por otro lado, si se considera la regla de Stratonovich ( $\circ$ ), las reglas del cálculo usual se conservan pero para simulaciones numéricas es más complicado implementar la discretización. Finalmente cuando consideramos la regla de Ito-Inverso ( $\bullet$ ), las simulaciones numéricas son muy complicadas para implementar, sin embargo como veremos más adelante podemos obtener una relación de fluctuación-disipación mucho más simple que en las otras dos. Es decir, podemos usar las diferentes reglas de discretización dependiendo del fenómeno físico que querramos modelar. El cálculo que aprendimos a usar es el de Ito, por lo que es conveniente llevar las ecuaciones diferenciales estocásticas a la discretización de Ito. Lo anterior se logra corrigiendo en el término de arrastre de la ecuación correspondiente, es decir, podemos pasar de una a otra regla de discretización y por consiguiente de una a otra ecuación diferencial estocástica.

# Capítulo 4

## Termostatística relativista de equilibrio

En los capítulos anteriores hemos estudiado algunas de las herramientas necesarias para resolver EDEs no relativistas que deseamos extender a las correspondientes para el caso del movimiento Browniano relativista. Para abordar este último es necesario recordar algunos conceptos básicos de la relatividad especial así como de la termostatística relativista. En particular es de gran interés generalizar resultados como la relación de fluctuación-disipación en el régimen relativista, la cual establece un balance entre la fuerza de fricción y la fuerza fluctuante en el estado estacionario. Con lo anterior en mente, el capítulo está organizado de manera tal que primero se repasan los conceptos de relatividad especial necesarios, después se establecen las condiciones que deben de cumplir las funciones de distribución de probabilidad para que sean consistentes con el formalismo relativista y finalmente estudiamos la modificación relativista de la distribución de Maxwell-Boltzmann con finalidad es establecer una relación de fluctuación-disipación relativista en el siguiente capítulo.

### 4.1. Relatividad especial

En el siglo XX, a partir del surgimiento de la relatividad especial, se ha hecho un importante trabajo para reformular las teorías clásicas de la física en un contexto relativista. La teoría de la relatividad especial está basada en dos postulados, el primero establece que las leyes de la física deben ser las mismas sin importar el marco de referencia inercial; el segundo afirma que la luz siempre se propaga en el vacío con una velocidad constante  $c$  que es independiente del estado de movimiento del cuerpo emisor y del estado de movimiento del observador, en la presente tesis para la velocidad de la luz consideramos  $c = 1$ , a menos que se considere necesario escribir  $c$ . Estos postulados, en conjunto con algunas suposiciones adicionales dan lugar a la teoría de la relatividad especial. Por lo tanto, para generalizar los conceptos que utilizaremos en los siguientes capítulos tenemos que considerar los postulados enunciados y sus implicaciones.

En general, para describir un evento nos interesa saber en dónde ocurrió y el momento en que ocurrió. Para el caso de la relatividad especial estos dos elementos de información son considerados coordenadas del espacio tiempo, es decir para describir eventos hacemos

uso de un espacio  $(1 + d)$ -dimensional, correspondientes a una dimensión temporal y  $d$  dimensiones espaciales. Entonces un evento en el espacio-tiempo estará descrito mediante el conjunto ordenado de la forma

$$\tilde{\mathbf{x}} = x^\alpha = (t, \mathbf{x}) = (t, x^1, \dots, x^d), \quad (4.1)$$

en donde los índices griegos  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ , toman los valores  $0, 1, 2, \dots, d$ , y dado el caso, cuando solo tengamos índices con letras latinas  $i, j, k, \dots$ , estos tomarán únicamente valores de las componentes espaciales, es decir  $\{1, 2, \dots, d\}$ . Para el presente trabajo, consideramos un espacio-tiempo  $(1 + 3)$ -dimensional y curvatura nula, cuyo elemento de línea es

$$ds^2 = -c^2t^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = \eta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \quad (4.2)$$

y las componentes correspondientes del tensor métrico de Minkowski  $\eta_{\alpha\beta}$  son

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Las componentes de los vectores que denotamos con superíndices ( $x^\alpha$ ) se denominan contravariantes. Para obtener las componentes covariantes ( $x_\alpha$ ), es necesario contraer con  $\eta_{\alpha\beta}$ , es decir,

$$x_\alpha := \eta_{\alpha\beta}x^\beta, \quad (4.4)$$

cuyas componentes son

$$x_\alpha \mapsto (-t, \mathbf{x})$$

Genéricamente nos referimos a estas como las componentes de los vectores del espacio-tiempo, las cuales para el caso de  $(1 + 3)$ -dimensiones les llamaremos cuatro-vectores y siendo sus componentes

$$x^\alpha = (t, \mathbf{x}) = (t, x, y, z), \quad (4.5)$$

La relación entre componentes de un cuatro-vector en un marco de referencia y otro que se mueve respecto al primero con velocidad  $w$  en el eje de las  $x$ , son tales que

$$x = \gamma(x' + wt'), \quad y = y' \quad z = z', \quad t = \gamma(t' + wx') \quad (4.6)$$

donde  $\gamma = (1 - w^2)^{-1/2}$ , a dichas relaciones se les conoce como transformaciones de Lorentz, y son consecuencia directa de los postulados de relatividad especial.

Escritas de forma tensorial, en la teoría de la relatividad especial la transición de un marco de referencia inercial,  $\Upsilon$ , a otro marco  $\Upsilon'$  está dada por

$$\bar{x}' = \Lambda \bar{x} \Leftrightarrow x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta, \quad (4.7)$$

donde  $\Lambda^\alpha_\beta$  es la matriz de Lorentz que es de la forma

$$\Lambda^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} \gamma & -\frac{w}{c}\gamma & 0 & 0 \\ -\frac{w}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Adicionalmente a las transformaciones entre marcos inerciales podemos incluir las restricciones

$$\Lambda^0_0 \geq 1, \quad \det(\Lambda^\alpha_\beta) = +1, \quad (4.9)$$

con lo cual excluimos inversiones temporales y de espacio-tiempo.

Ahora, con el objetivo de describir la evolución de un evento en el espacio-tiempo es necesario conocer como cambian sus coordenadas respecto a las coordenadas del espacio-tiempo, es decir es necesario definir los cuatro-vectores de gradiente como sigue

$$\partial_\alpha := \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \mapsto \left( \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \quad (4.10)$$

$$\partial^\alpha := \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \mapsto \left( -\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right). \quad (4.11)$$

Con la idea de describir la evolución del movimiento de una partícula es usual utilizar la coordenada temporal  $t$  del marco de referencia en el cual se encuentra. Sin embargo, dado que ahora el tiempo  $t$  tiene el mismo estatus que las coordenadas espaciales es conveniente introducir un tiempo invariante, tiempo propio, bajo transformaciones de Lorentz como aquel determinado por un marco que se mueve junto con la partícula. De este modo un diferencial de tiempo propio se expresa como

$$d\tau := (-\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta)^{1/2} = (dt^2 - d\mathbf{x}^2)^{1/2} = dt (1 - \mathbf{v}^2)^{1/2}, \quad (4.12)$$

donde  $\mathbf{v}(t) := d\mathbf{x}(t)/dt$  es la velocidad de la partícula en el marco de laboratorio. Ahora introducimos un cuatro-vector velocidad  $u^\alpha$  de una partícula como la derivada respecto al tiempo propio, es decir

$$u^\alpha := \frac{dx^\alpha}{d\tau} \Rightarrow u_\alpha u^\alpha = -1. \quad (4.13)$$

Este es un cuatro-vector debido al carácter invariante del tiempo propio. Ahora, nos interesa asociar lo antes presentado con otras cantidades físicas, tales como el momento y la energía, por lo que definimos para una partícula puntual, con masa  $m > 0$ , el cuatro-vector de energía momento  $p^\alpha = (p^0, p^1, \dots, p^d) = (\epsilon, \mathbf{p})$ , tal que

$$p^\alpha := m u^\alpha \Rightarrow p_\alpha p^\alpha = -m^2. \quad (4.14)$$

Es importante mencionar que  $p^\alpha$  al ser un cuatro-vector también transforma bajo las transformaciones de Lorentz, es decir,

$$p'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta p^\beta, \quad (4.15)$$

o bien, la transformación de cada una de sus componentes es de la forma

$$p_x = \gamma(p'_x + w p'_0), \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z, \quad p_0 = \gamma(p'_0 + w p'_x). \quad (4.16)$$

Las relaciones y definiciones anteriores, junto con los postulados de relatividad especial, dan lugar a varias propiedades que pueden ser obtenidas fácilmente, por ejemplo

$$p^0 = \epsilon = m\gamma(\mathbf{v}), \quad \mathbf{p} = m\gamma(\mathbf{v}) \mathbf{v}, \quad \gamma(\mathbf{v}) := (1 - \mathbf{v}^2)^{-1/2}. \quad (4.17)$$

destacando la condición de mass-shell, que será de gran importancia para la descripción del movimiento Browniano relativista, siendo

$$m^2 = \epsilon^2 - \mathbf{p}^2 = \epsilon'^2 - \mathbf{p}'^2, \quad (4.18)$$

que obtenemos gracias a la ec. (4.14).

Aunque la relatividad especial da un espectro amplio de estudio, los anteriores son los conceptos mínimos necesarios para describir el movimiento Browniano relativista.<sup>1</sup>

## 4.2. Densidades de probabilidad en relatividad especial.

Una vez revisado los conceptos necesarios para poder dar una descripción relativista al movimiento Browniano es conveniente considerar la versión relativista de la termoestadística. Primero hay que recordar que la mecánica estadística proporciona el nexo entre la descripción mecánica y termodinámica de un sistema macroscópico, nos permite obtener las propiedades termodinámicas macroscópicas de un sistema a partir del estudio de las propiedades microscópicas. Es frecuente dividir la mecánica estadística en dos partes:

- Mecánica estadística en equilibrio (Termoestadística o termodinámica estadística), la cual se ocupa de la descripción de sistemas en equilibrio termodinámico.
- Mecánica estadística de no equilibrio, que se dedica al estudio de los fenómenos de transporte, como por ejemplo las reacciones químicas involucradas en un sistema, o bien la mecánica de fluidos y transferencia de calor.

En el caso del movimiento Browniano no relativista la termoestadística en equilibrio juega un papel importante al considerar el teorema de equipartición de energía y así poder establecer la relación de fluctuación-disipación. Por otro lado, una de las suposiciones físicas que tomamos en cuenta para modelar el movimiento Browniano es que el baño térmico en el cual se sumerge la partícula Browniana es homogéneo, estacionario y en equilibrio térmico con la partícula Browniana, entonces es razonable pensar que en un tiempo suficientemente grande la partícula alcanzará su estado estacionario correspondiente. Aunque el movimiento Browniano es un fenómeno estrictamente fuera de equilibrio, cuya descripción matemática se basa en ecuaciones diferenciales estocásticas y sus correspondientes ecuaciones de Fokker-Planck, una propiedad importante de los sistemas fuera de equilibrio es saber si dicho sistema es estacionario, es decir, si sus variables de estado se mantienen sin cambios respecto al tiempo. Nuestro propósito a continuación es mostrar bajo qué condiciones un proceso estocástico relativista es estacionario. Por esta razón en esta sección vamos a estudiar la termoestadística relativista de los sistemas estacionarios y el caso particular de la generalización relativista de la distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann.

Comenzamos por estudiar cómo se transforman las funciones de distribución de probabilidad entre un marco de referencia inercial y otro que se mueve con velocidad  $w$  con respecto

---

<sup>1</sup>Conceptos básicos de mecánica relativista se cubren exhaustivamente en E.F. Taylor y J.A. Wheeler, *Space-Time Physics*, San Francisco: Freeman, 1992.



al primero. Van Kampen ha mostrado [46] la invariancia de Lorentz de una función de distribución para una partícula en el espacio fase  $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ . En su estudio considera la función de distribución  $f$  de una partícula en un gas de  $N$  partículas, por lo que si un observador  $O$  observa el gas en un instante  $t$  encontrará

$$Nf(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{p}, \quad (4.19)$$

partículas en un elemento de volumen del espacio fase  $[\mathbf{x}, \mathbf{x} + d\mathbf{x}] \times [\mathbf{p}, \mathbf{p} + d\mathbf{p}]$ . Otro observador  $O'$ , con una velocidad  $w$  con respecto al primer observador  $O$ , planteará otra distribución  $f'$ , la pregunta que nos hacemos es cómo se relacionan  $f$  y  $f'$ .

En la literatura parece no haber duda en que  $f$ , por lo que si tomamos cualquier punto espaciotemporal con coordenadas  $\mathbf{x}, t$  con respecto a  $O$  y  $\mathbf{x}', t'$  en  $O'$ , entonces  $\mathbf{x}, t$  y  $\mathbf{x}', t'$  están relacionados mediante transformaciones de Lorentz de  $O$  a  $O'$ , lo mismo se cumple si tomamos el momento  $p$  y su transformación de Lorentz  $p'$ . Entonces podemos decir que si la invariancia se puede expresar como

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = f'(\mathbf{x}', \mathbf{p}', t'). \quad (4.20)$$

Hay diferentes formas de tratar el problema, una de las propuestas del mismo Van Kampen, utiliza la unicidad de las trayectorias de las partículas y una reparametrización de las trayectorias en términos de sus tiempos propios. En consecuencia, la ecuación (4.20) representa un resultado cinemático, es decir no involucra las ecuaciones de movimiento, por lo que sus aplicaciones a una gama extensa de modelos es posible. Incluso se demuestra que

$$\int d^d x' d^d p' f'(\mathbf{x}', \mathbf{p}', t') = \int d^d x d^d p f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), \quad (4.21)$$

siempre que la función de distribución  $f'$  satisface la condición de normalización a un tiempo  $t'$

$$1 = \int d^d x' d^d p' f'(\mathbf{x}', \mathbf{p}', t'). \quad (4.22)$$

Para poder enunciar una de las consecuencias de la invariancia primero estudiamos el vector de densidad de corriente, el cual queda definido por las siguientes cantidades

$$\rho(t, \mathbf{x}) = \int d^d p f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \quad (4.23)$$

y

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = \int d^d p f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \mathbf{v}, \quad (4.24)$$

donde  $\mathbf{v} = \mathbf{p}/\epsilon = \mathbf{p}/p^0$  es la velocidad de la partícula. Dichas cantidades forman parte de un cuatro-vector densidad de corriente definido como

$$j^\alpha = (\rho, \mathbf{j}), \quad (4.25)$$

el cual también podemos escribir de la forma

$$j^\alpha(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^d p}{p^0} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) p^\alpha, \quad (4.26)$$

donde

$$\frac{d^d p}{p^0} = \frac{d^d p'}{p'^0}, \quad (4.27)$$

es un invariante bajo las transformaciones de Lorentz. Este cuatro-vector resulta de gran relevancia principalmente porque satisface una ecuación de continuidad

$$\partial_\alpha j^\alpha = \frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (4.28)$$

la cual junto con las ecuaciones (4.21) y (4.22) establecen la conservación del número de partículas y de probabilidad.

## Distribución marginal

Ahora, con la idea de determinar las condiciones necesarias para que una función de distribución de probabilidad sea invariante es necesario obtener las distribuciones marginales de momento, respecto a  $O$  y  $O'$  respectivamente mediante la integración de dichas funciones respecto a las coordenadas espaciales, es decir,

$$F(\mathbf{p}, t) = \int d^d x f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), \quad (4.29)$$

$$F'(\mathbf{p}', t') = \int d^d x' f'(\mathbf{x}', \mathbf{p}', t'). \quad (4.30)$$

Vale la pena mencionar que  $F$  y  $F'$  hacen referencia a diferentes hiperplanos en el espacio-tiempo de Minkowski, dado que  $t$  y  $t'$  representan diferentes tiempos físicos del mismo espacio-tiempo. Entre las implicaciones que resultan de considerar una distribución marginal del momento destaca que si  $m$  es la masa de cada partícula, su energía está dada por

$$p^0(\mathbf{p}) \equiv \epsilon(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}, \quad (4.31)$$

y su velocidad por

$$\mathbf{v} = \frac{d\epsilon}{d\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{\epsilon}. \quad (4.32)$$

Por otro lado, podemos notar de (4.16) que la transformación de  $\mathbf{p}$  es independiente de las transformaciones de  $\mathbf{x}$  y  $t$ . Dicha transformación tiene Jacobiano

$$J = \frac{d(\mathbf{p}')}{d(\mathbf{p})} = \gamma(1 - \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}) = \frac{p'^0}{p^0} \equiv \frac{\epsilon'}{\epsilon}, \quad (4.33)$$

esto se puede ver claramente de (4.16) y (4.31). La transformación para la posición y el tiempo, independiente del momento, tiene Jacobiano

$$\frac{d(\mathbf{r}', t')}{d(\mathbf{r}, t)} = 1. \quad (4.34)$$

Ahora, si tomamos la distribución marginal (4.29) y suponemos que las partículas son libres, es decir, su momento es constante y  $F(\mathbf{p}, t) = F(\mathbf{p})$ , entonces podemos decir que cada

partícula observada por  $O$  con momento  $\mathbf{p}$  es observada por  $O'$  con momento  $\mathbf{p}'$ . Por lo tanto, en este caso particular podemos ver que la invariancia de la distribución de momentos debe ser como

$$F(\mathbf{p}) d^3\mathbf{p} = F'(\mathbf{p}') d^3\mathbf{p}'. \quad (4.35)$$

Usando  $F(\mathbf{p}) = F'(\mathbf{p}') J$ , y (4.33) tenemos

$$\epsilon F(\mathbf{p}) = \epsilon' F'(\mathbf{p}'). \quad (4.36)$$

Es necesario destacar que (4.36) solamente se cumple cuando consideramos partículas libres, es decir, cuando no existen interacciones entre partículas, no hay campos externos, ni paredes. Sin embargo, cuando consideramos un sistema encerrado en un volumen  $V$ , el momento no es constante dado que las colisiones con las paredes cambian el momento de las partículas. Para dicho caso, Dirac [49] mostró que la distribución de momento en equilibrio obedece la siguiente ley de transformación

$$\frac{F(\mathbf{p})}{V} = \frac{F'(\mathbf{p}')}{V'}. \quad (4.37)$$

Los elementos teóricos presentados juegan un papel relevante para modelar el movimiento Browniano relativista. Dado que el sistema que estamos describiendo está encerrado en un volumen finito, y el baño térmico es homogéneo, isotrópico y está en equilibrio térmico, podemos describirlo con funciones de distribución de probabilidad en equilibrio termodinámico, es decir independientes del tiempo. Para dichas condiciones de la función de distribución de probabilidad se tiene que considerar (4.37) para la invariancia. En este contexto, queremos hacer énfasis en la generalización relativista de la distribución de Maxwell-Boltzmann. La motivación que se tiene para hacer lo anterior está en las ecuaciones de Fokker-Planck correspondientes al proceso de Ornstein-Uhlenbeck, cuya distribución de velocidades estacionaria es la de Maxwell-Boltzmann. Dicha distribución tiene como característica que incluye velocidades mayores a la velocidad de la luz  $c$ , por lo que entra en conflicto con la relatividad.

### 4.3. Distribución de Jüttner

Cuando se plantean las ecuaciones relativistas de Langevin, es necesario conocer las distribuciones de probabilidad que cumplan con el comportamiento de relajación y así determinar correctamente las relaciones de fluctuación-disipación en el régimen relativista. Los resultados de la sección anterior aplican para una función de distribución de probabilidad estacionaria y arbitraria  $\phi(\mathbf{p})$ , en especial queremos estudiar una distribución relativista que sea nula cuando la velocidad excede a  $c = 1$ .

Para velocidades  $v \ll 1$ , es aceptable describir un gas en equilibrio por la distribución de Maxwell-Boltzmann

$$f_{MB}(\mathbf{v}; m, \beta, d) = \left[ \frac{\beta m}{2\pi} \right]^{d/2} \exp[-\beta m \mathbf{v}^2], \quad (4.38)$$

o equivalentemente para los momentos

$$g_{MB}(\mathbf{p}; m, \beta, d) = \left[ \frac{\beta}{2\pi m} \right]^{d/2} \exp[-\beta \mathbf{p}^2 / 2m], \quad (4.39)$$

donde  $m$  es la masa de la partícula,  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  el momento no relativista,  $d$  es el número de dimensiones espaciales que ocupa el gas y  $\mathcal{T} = (k_B\beta)^{-1}$  la temperatura del gas. Sin embargo, si las velocidades moleculares son altas, es decir, en el régimen relativista, para el cual  $v \lesssim 1$ , se propone la siguiente distribución

$$f_J(\mathbf{v}; m, \beta, d) = A_d \exp[-\beta m\gamma(\mathbf{v})c^2], \quad (4.40)$$

donde  $A_d$  es una constante de normalización. Donde el término de la exponencial cumple

$$m\gamma c^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}}, \quad (4.41)$$

y realizando un desarrollo en el límite clásico ( $\mathbf{v}^2/c^2 \ll 1$ ), tenemos entonces

$$m\gamma c^2 \approx mc^2 \left(1 + \frac{\mathbf{v}^2}{2c^2}\right) = mc^2 + \frac{m\mathbf{v}^2}{2}, \quad (4.42)$$

el primer término se puede absorber en la constante  $A_d$  y por consiguiente la distribución (4.40) se reduce a la correspondiente distribución del caso no relativista (4.38). Para el momento relativista  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}\gamma$  tenemos

$$g_J(\mathbf{p}; m, \beta, d) = A_d \exp\left[-\beta (m^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2}\right]. \quad (4.43)$$

La constante de normalización  $A$  queda determinada por

$$A_d = \int d^d p \exp\left[-\beta (m^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2}\right], \quad (4.44)$$

y dependiendo del número de dimensiones espaciales que se consideren se obtienen diferentes valores de la constante. Por ejemplo, cuando consideramos dos dimensiones tenemos la siguiente expresión

$$A_2 = 2\pi m^2 e^{-\beta m} \frac{(1 + \beta m)}{(\beta m)^2},$$

para tres dimensiones tendremos

$$A_3 = 4\pi m^3 \frac{K_2(\beta m)}{\beta m},$$

con  $K_n(z)$  la función de Bessel modificada de segundo orden [52].

La función de distribución (4.40) o (4.43) es conocida como la función de distribución de probabilidad de Jüttner, y fue obtenida por él en 1911. Fue calculada para un conjunto de partículas independientes inmersas en un baño térmico encerrado en un recipiente con cierto volumen en reposo. Aunque la distribución de Jüttner ha sido ampliamente estudiada, se han sugerido diferentes modificaciones para diferentes situaciones físicas [59, 52]. Sin embargo, con la ayuda de simulaciones numéricas ha sido posible validar (4.40).

# Capítulo 5

## Movimiento Browniano Relativista

En las secciones anteriores sentamos las bases para describir el movimiento Browniano en el marco de la relatividad especial. Hemos expuesto que existen dos métodos matemáticos para describir los procesos estocásticos; uno de ellos se lleva a cabo mediante ecuaciones de evolución asociadas a las densidades de probabilidad, como son las ecuaciones maestras o ecuaciones de Fokker-Planck. El otro método consiste en el uso de ecuaciones diferenciales estocásticas para las variables dinámicas del sistema. Ambas estrategias en principio son equivalentes, puesto que dada una EDE es posible obtener su correspondiente ecuación de Fokker-Planck asociada. El propósito de este capítulo es aplicar ambas estrategias en el estudio del movimiento Browniano relativista siguiendo la idea desarrollada por Dunkel y Hänggi [50].

### 5.1. Ecuaciones de Langevin relativistas

Vamos a comenzar por establecer las ecuaciones que modelan un proceso estocástico relativista. Primero, es importante recordar que es posible establecer las ecuaciones en el marco de referencia de laboratorio (inercial en reposo) o en un marco de referencia comóvil con la partícula Browniana. Comenzamos estableciendo las ecuaciones para el marco de referencia de laboratorio. Hablando de manera muy general el movimiento Browniano relativista es un proceso estocástico cuya velocidad,  $|\mathbf{V}(t)| = \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|$ , no excede la velocidad de la luz  $c = 1$ . Por lo tanto, podemos establecer la EDE para el momento relativista  $\mathbf{P} = (P^i)$ ,  $i = 1, \dots, d$ , donde la restricción de la velocidad, ahora para el momento, debe satisfacer la condición

$$|\mathbf{V}(t)| = \frac{|\mathbf{P}|}{P^0} = \frac{|\mathbf{P}|}{(M^2 + \mathbf{P}^2)^{1/2}} \leq 1 \quad \forall t, \quad (5.1)$$

con  $M > 0$  la masa de la partícula Browniana. Entonces las EDEs son establecidas en el espacio  $\{\mathbf{X}(t), \mathbf{P}(t)\}$ , parametrizadas por el tiempo de laboratorio  $t$ . La conocida relación diferencial que conecta las coordenadas espaciales de posición  $\mathbf{X} = (X^i)$  y de momento  $\mathbf{P} = (P^i)$  nos ayudará a establecer la primera ecuación, dada por

$$dX^i(t) = \left( \frac{P^i}{P^0} \right) dt, \quad (5.2)$$

donde  $P^0(t) = E(t) = (M^2 + \mathbf{P}^2)^{1/2}$  es la energía relativista de la partícula al tiempo  $t$ . La parte estocástica acopla las componentes espaciales del momento  $P^i(t)$  con el ruido estocástico, via una ecuación diferencial estocástica, dada por

$$dP^i(t) = \mathcal{F}^i dt - a^i_j P^j dt + c^i_j \odot dB^j(t), \quad (5.3)$$

donde  $\mathcal{F}^i$  es una fuerza determinista externa,  $a^i_j P^j$  es una fuerza de fricción fenomenológica y el último término representa el ruido, el cual normalmente está modelado por un proceso de Wiener  $\mathbf{W}(t) \equiv \mathbf{B}(t) = (B^1(t), B^2(t), \dots, B^d(t))$  y  $c^i_j$  es la intensidad del ruido. El símbolo  $\odot$ , representa un producto y de acuerdo con la regla de discretización se representará con los símbolos  $\ast$ (Ito),  $\circ$ (Stratonovich),  $\bullet$ (Backward-Ito).

Las dos ecuaciones anteriores escritas en forma de ecuaciones en diferenciales, describen únicamente la parte espacial de los cuadvectores de posición  $(X^0, \mathbf{X})$  y de momento  $(P^0, \mathbf{P})$ . Sin embargo, gracias a la notación del cálculo de Ito podemos agregar las ecuaciones para las partes temporales. Para el caso de la posición podemos agregar de forma directa la contribución temporal análoga de (5.2)

$$dX^0(t) = \left( \frac{P^0}{P^0} \right) dt = dt. \quad (5.4)$$

Para la componente de la energía,  $P^0$ , podemos usar la regla de Ito (aunque podríamos usar Stratonovich o Ito-inverso) en la ecuación (5.3) aplicada a la condición del hiperboloide de masa,  $P^0(t) = (M^2 + \mathbf{P}^2)^{1/2}$ . De acuerdo a la ec. (2.50), definimos las funciones

$$Z(t) \equiv P^0(t) = (M^2 + \mathbf{P}^2)^{1/2}, \quad (5.5)$$

donde la ecuación de transformación es

$$dZ(t) = \left[ A^i \partial_i G(P^i) + \frac{1}{2} C^i_r C^j_r \partial_i \partial_j G(P^j) \right] dt + C^i_r \partial_i G(P^i) \ast dB^r(t), \quad (5.6)$$

con  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial P^i}$ ,  $C^i_r = c^i_r$  y  $A^i = \mathcal{F}^i - a^i_j P^j$ . Calculamos

$$\frac{\partial Z}{\partial P^i} \equiv \partial_i Z = \frac{\partial (M^2 + \mathbf{P}^2)^{1/2}}{\partial P^i} = \frac{P^i}{P^0} \quad (5.7)$$

y

$$\partial_j \partial_i Z(P^i) = \partial_j \left( \frac{P^i}{P^0} \right) = \partial_j \left( \frac{P^i}{(M^2 + \mathbf{P}^2)^{1/2}} \right) = \frac{\delta^{ij}}{P^0} - \frac{P^i P^j}{(P^0)^3}. \quad (5.8)$$

Sustituyendo en la ec. (5.3) obtenemos una ecuación diferencial estocástica para  $P^0$

$$dP^0(t) = \left[ (\mathcal{F}^i - a^i_j P^j) \frac{P^i}{P^0} + \frac{c^i_r c^j_r}{2} \left( \frac{\delta^{ij}}{P^0} - \frac{P^i P^j}{(P^0)^3} \right) \right] dt + \frac{P^i}{P^0} c_{ir} \ast dB^r(t). \quad (5.9)$$

Observemos que la forma de la métrica de Minkowski nos permite establecer las siguientes propiedades

$$\mathcal{F}^i := \mathcal{F}_i, \quad c_{ir} := c^i_r. \quad (5.10)$$

Una consecuencia interesante que se tiene de las reglas de discretización es que podemos aplicar cualquier regla de transformación, correspondiente a cada regla de discretización y obtener un resultado generalizado. En el caso anterior, para obtener la ecuación (5.9) usamos la regla de transformación (5.6), que corresponde a la regla de discretización de Ito. Sin embargo, podemos usar cualquiera de las otras dos reglas de discretización y sus transformaciones para obtener

$$dP^0(t) = \left[ (\mathcal{F}^i - a^i_j P^j) \frac{P^i}{P^0} + \lambda_{\odot} \frac{c^i_r c^j_r}{2} \left( \frac{\delta^{ij}}{P^0} - \frac{P^i P^j}{(P^0)^3} \right) \right] dt + \frac{P^i}{P^0} c_{ir} \odot dB^r(t), \quad (5.11)$$

donde dependiendo de la regla de discretización  $\lambda_{\odot}$  toma los siguientes valores

$$\lambda_* = 1, \quad \lambda_{\circ} = 0, \quad \lambda_{\bullet} = -1, \quad (5.12)$$

para Ito, Stratonovich e Ito-inverso respectivamente. Es evidente que hay modificaciones en el cálculo para obtener las ecuaciones diferenciales estocásticas, cuando usamos la discretización de Ito e Ito-Inverso. Con lo anterior quedan establecidas las ecuaciones diferenciales estocásticas para los cuadvectores de posición  $(X^0, \mathbf{X})$  y de momento  $(P^0, \mathbf{P})$ . Notemos que el término de ruido sólo se agrega en la ecuación correspondiente a los momentos y no a la ecuación para las posiciones, esto se debe a que la ecuación de Langevin no relativista para la partícula Browniana es en realidad una ecuación diferencial de segundo grado para la posición  $\mathbf{x}$ , es decir

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\alpha \frac{dx}{dt} + \psi(t). \quad (5.13)$$

Sin embargo esta ecuación es totalmente equivalente al sistema de ecuaciones de primer grado dado por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= p/m \\ \frac{dp}{dt} &= -\alpha p/m + \psi(t). \end{cases} \quad (5.14)$$

Donde evidentemente el término estocástico solo esta asociado al momento de la partícula Browniana, y la posición tendrá contribuciones estocásticas a través de la integración del momento, como se mostró en el ejemplo del Proceso de Ornstein-Uhlenbeck no relativista.

## 5.2. Ecuaciones de Fokker-Planck

Como se mencionó en capítulos anteriores, además de la ecuación de Langevin los procesos estocásticos pueden ser caracterizados por las ecuaciones de Fokker-Planck correspondientes. Las ecuaciones de Fokker-Planck correspondientes al régimen relativista difiere del caso no relativista porque al involucrar ruido multiplicativo en la ecuación (5.3) la regla de discretización juega un papel importante.

De acuerdo a [56] la definición de cada integral estocástica y las propiedades del proceso de Wiener arrojan diferentes correlaciones entre el coeficiente de difusión  $\langle c(P) \odot dW \rangle$ , por lo que obtenemos diferentes ecuaciones de Fokker-Planck. Siguiendo el método expuesto en el capítulo 3, sección 2 las ecuaciones correspondientes son:

- Para el caso de la regla de Ito,  $\odot = *$ , tenemos  $\langle c(P) * dB \rangle = 0$  entonces

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{P^i}{P^0} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) f_* = \frac{\partial}{\partial P^i} \left[ \left( -\mathcal{F}^i + a^i_j P^j \right) f_* + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial P^k} \left( c^i_r c^k_r f_* \right) \right], \quad (5.15)$$

- si se utiliza la regla de discretización del punto medio, es decir, Stratonovich tenemos  $\langle c(P) \circ dB \rangle = \frac{1}{2} c(P) c'(P) dt$ ,  $\odot = \circ$ , y se obtiene

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{P^i}{P^0} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) f_\circ = \frac{\partial}{\partial P^i} \left[ \left( -\mathcal{F}^i + a^i_j P^j - \frac{1}{2} c^k_r \frac{\partial}{\partial P^k} c^i_r \right) f_\circ + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial P^k} \left( c^i_r c^k_r f_\circ \right) \right], \quad (5.16)$$

- finalmente si utilizamos la regla de Ito-Inverso,  $\odot = \bullet$ , consideramos  $\langle c(P) \bullet dB \rangle = c(P) c'(P) dt$  y la ecuación de Fokker-Planck resultante es

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{P^i}{P^0} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) f_\bullet = \frac{\partial}{\partial P^i} \left[ \left( -\mathcal{F}^i + a^i_j P^j - c^k_r \frac{\partial}{\partial P^k} c^i_r \right) f_\bullet + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial P^k} \left( c^i_r c^k_r f_\bullet \right) \right], \quad (5.17)$$

Donde  $f_\odot(t, \mathbf{x}, \mathbf{P})$  es la función de distribución de probabilidad de la partícula browniana en el espacio fase. En la ecuación diferencial estocástica (5.3) para el caso del movimiento Browniano, al igual que en el caso no relativista, la constante de fricción y el término del ruido dependen de la simetría que tiene el baño térmico y las ecuaciones (5.2) y (5.3) deben de satisfacer las condiciones para que la función de distribución de probabilidad tenga el comportamiento de relajación adecuado hacia el estado de equilibrio estacionario.

### 5.3. Relaciones fluctuación-disipación generalizadas

Consideremos ausencia de fuerzas externas, es decir  $\mathcal{F}^i = 0$ . Por otro lado, si nuestro marco de referencia está en un baño térmico estacionario, isotrópico y homogéneo, los coeficientes de fricción y de difusión deben ser matrices diagonales (invariantes por rotaciones espaciales)

$$a^i_j = \alpha (P^0) \delta^i_j, \quad c^i_j = (2D (P^0))^{1/2} \delta^i_j, \quad (5.18)$$

y los coeficientes dependen únicamente de la energía relativista de las partículas Brownianas. Los argumentos anteriores simplifican las ecuaciones de Langevin (5.2) y (5.3) tales que

$$dX^i(t) = \left( \frac{P^i}{P^0} \right) dt, \quad (5.19)$$

$$dP^i(t) = -\alpha P^i dt + (2D)^{1/2} \odot dB^i(t), \quad (5.20)$$

por lo tanto, las ecuaciones de Fokker-Planck se simplifican y toman la siguiente forma

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{P^i}{P^0} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) f_* = \frac{\partial}{\partial P^i} \left[ \alpha P^j f_* + \frac{\partial}{\partial P^i} (D f_*) \right], \quad (5.21)$$



$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{P^i}{P^0} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) f_{\circ} = \frac{\partial}{\partial P^i} \left[ \alpha P^i f_{\circ} + D^{1/2} \frac{\partial}{\partial P^i} (D^{1/2} f_{\circ}) \right], \quad (5.22)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{P^i}{P^0} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) f_{\bullet} = \frac{\partial}{\partial P^i} \left[ \alpha P^i f_{\bullet} + D \frac{\partial}{\partial P^i} f_{\bullet} \right]. \quad (5.23)$$

Un argumento importante que debe tomarse en cuenta proviene de las consideraciones termostadísticas, dado que el movimiento de la partícula Browniana está restringida a un volumen finito  $\mathbb{V}$  y el baño térmico se encuentra en un estado de equilibrio con temperatura  $\mathcal{T} = \frac{1}{k_B \beta}$ , entonces hablamos de que a tiempos grandes el estado tiende a un estado estacionario. Por un proceso igual al realizado en el capítulo 3 para obtener la distribución de Maxwell-Boltzmann, en [60] encuentran las soluciones para las ecs. (5.21), (5.22) y (5.23), donde se encuentran

$$f_*(p) = \frac{1}{2M K_0(\beta) (M^2 + P^2)^{1/2}} \exp[-\beta (M^2 + P^2)^{1/2}], \quad (5.24)$$

$$f_{\circ}(p) = \frac{\sqrt{2\pi k \mathcal{T}}}{2M K_{3/4}(\beta/2) K_{1/4}(\beta/2) (M^2 + P^2)^{1/2}} \exp[-\beta (M^2 + P^2)^{1/2}] \quad (5.25)$$

y

$$f_*(p) = \frac{1}{2M K_1(\beta)} \exp[-\beta (M^2 + P^2)^{1/2}].$$

Donde  $K_{\nu}(z)$  es la función modificada de segundo orden de Bessel. Puede notarse que en el caso de una dimensión la correspondiente generalización de la distribución de Maxwell-Boltzmann es la que corresponde a Ito-Inverso, es decir es la distribución de Jüttner de la forma

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{P}) = \mathcal{N} \exp \left[ -\beta (M^2 + \mathbf{P}^2)^{1/2} \right] \chi(\mathbf{x}; \mathbb{V}). \quad (5.26)$$

La función característica  $\chi(\mathbf{x}; \mathbb{V})$  se define como

$$\chi(\mathbf{x}; \mathbb{V}) := \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \mathbb{V}, \\ 0, & \mathbf{x} \notin \mathbb{V}, \end{cases} \quad (5.27)$$

y es una función indicadora del volumen accesible  $\mathbb{V}$ . Por otro lado, si sustituimos la función de distribución de Jüttner en las ecuaciones de Fokker-Planck, podemos encontrar relaciones entre las funciones  $\alpha(P^0)$  y  $D(P^0)$ . Estas relaciones son conocidas como relaciones de fluctuación-disipación generalizadas y dependen de la regla de discretización, de manera que

$$0 \equiv \alpha(P^0) P^0 - \beta D(P^0) + \sigma_{\circ} \frac{dD(P^0)}{dP^0}, \quad (5.28)$$

con  $\sigma_* = 1$ ,  $\sigma_{\circ} = 1/2$  o  $\sigma_{\bullet} = 0$ . La relación de Einstein no relativista se obtiene de (5.28) al considerar la regla de discretización de Ito-Inverso y reemplazar la masa por  $P^0$ .

## 5.4. Ecuaciones para la energía y la velocidad.

Como ejemplo de los resultados establecidos anteriormente, vamos a estudiar el problema del proceso de difusión en una dimensión espacial:  $d = 1$ . Comenzaremos por establecer las ecuaciones diferenciales estocásticas para la energía  $p^0$  y para la velocidad  $V(t) = P(t)/P^0(t)$ . Para tal propósito vamos a partir de las ecuaciones de Langevin usando la regla de discretización de Ito

$$dX(t) = \left( \frac{P}{P^0} \right) dt, \quad (5.29)$$

$$dP(t) = -\alpha_* P dt + (2D)^{1/2} * dB(t), \quad (5.30)$$

donde usamos la hipótesis de que  $B(t)$  está caracterizada por la distribución Gaussiana y los coeficientes cumplen  $\alpha_* = \alpha_*(P^0)$  y  $D = D(P^0)$ . De igual manera podemos escribir la ecuación anterior considerando la discretización de Stratonovich, obteniendo la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$\begin{aligned} dP(t) &= -\alpha_o P dt + (2D)^{1/2} \circ dB(t), \\ \alpha_o(P^0) &= \alpha_* + \frac{1}{2P} \frac{dD(P)}{dP}, \end{aligned} \quad (5.31)$$

o bien, si consideramos la regla de discretización de Ito-Inverso, la ecuación diferencial estocástica resultante será

$$\begin{aligned} dP(t) &= -\alpha_\bullet P dt + (2D)^{1/2} \bullet dB(t), \\ \alpha_\bullet(P^0) &= \alpha_* + \frac{1}{P} \frac{dD(p)}{dP}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Las relaciones de fluctuación disipación siguen cumpliéndose al imponer como solución a las ecuaciones de Fokker-Planck la función de distribución de Jüttner en una dimensión. Bajo estas consideraciones se obtienen las relaciones generalizadas de Einstein

$$0 = \alpha_\circ P^0 - \beta D(P^0) + \sigma_\circ \frac{dD(P^0)}{dP^0}, \quad (5.33)$$

con  $\sigma_* = P^0/P$ ,  $\sigma_\circ = P^0/(2P)$  o  $\sigma_\bullet = 0$ . Por otro lado, de la ec. (5.11) y las consideraciones planteadas obtenemos la ecuación de Langevin para la energía, tomando en cuenta que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^i &= 0, \\ a^i_j &= \alpha(P^0), \\ C^i_r &= (2D(P^0))^{1/2}, \end{aligned} \quad (5.34)$$

luego entonces

$$dP^0(t) = \left[ -\alpha(P^0) P^2 \frac{1}{P^0} + \lambda_\circ D(P^0) \left( \frac{1}{P^0} - \frac{P^2}{(P^0)^3} \right) \right] dt + \frac{2P}{P^0} D(P^0) \circ dB^r(t), \quad (5.35)$$

usando  $P = P^0 \left[1 - \left(\frac{M}{P^0}\right)^2\right]^{1/2}$ , con un poco de álgebra se obtiene lo siguiente

$$dP^0(t) = \left[ -\alpha(P^0) P^0 \left[1 - \left(\frac{M}{P^0}\right)^2\right] + \lambda_{\odot} \frac{D(P^0)}{P^0} \left(\frac{M}{P^0}\right)^2 \right] dt + \left\{ 2D(P^0) \left[1 - \left(\frac{M}{P^0}\right)^2\right] \right\}^{1/2} \odot dB^r(t). \quad (5.36)$$

Si ahora consideramos  $P(V) = \frac{MV}{(1-V^2)^{1/2}}$ , entonces los coeficientes tienen la siguiente dependencia

$$\alpha(P^0) := \alpha(P(V)), \quad D(P^0) := D(P(V)). \quad (5.37)$$

Aplicando dos veces la fórmula de Ito primero para transformar  $dP^0 \mapsto dP$  y después para  $dP \mapsto dV$  tenemos,

$$dV(t) = \left[ -\alpha(1-V^2) + \frac{3D}{M^2}(1-V^2)^2 \right] V dt + \left[ \frac{2D}{M^2}(1-V^2)^3 \right]^{1/2} * dB(t). \quad (5.38)$$

El cálculo explícito puede verse en el apéndice A, donde hemos utilizado la transformación correspondiente a la regla de discretización de Ito-Inverso, sin embargo, podemos utilizar cualquier regla de transformación para obtener la expresión general

$$dV(t) = \left[ -\alpha(1-V^2) - \lambda_{\odot} \frac{3D}{M^2}(1-V^2)^2 \right] V dt + \left[ \frac{2D}{M^2}(1-V^2)^3 \right]^{1/2} \odot dB(t), \quad (5.39)$$

con  $\lambda_* = 1$ ,  $\lambda_{\circ} = 0$ , o bien  $\lambda_{\bullet} = -1$ . La ecuación establecida para la velocidad permite calcular el desplazamiento cuadrático medio, o bien, la constante de difusión asintótica  $\mathcal{D}_{\infty}$ . Para un proceso de difusión en una dimensión espacial  $X(t)$  con velocidad  $V(t)$ , la constante de difusión asintótica se define como

$$\mathcal{D}_{\infty} := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \langle [X(t) - X(0)]^2 \rangle, \quad (5.40)$$

donde el desplazamiento espacial está definido por la relación

$$X(t) - X(0) = \int_0^t ds V(s), \quad (5.41)$$

por lo tanto podemos decir que la constante de difusión describe el desplazamiento cuadrático medio a tiempos grande cuando el sistema alcanza un estado estacionario. El coeficiente  $\mathcal{D}_{\infty}$ , se puede calcular de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\infty} &:= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle [X(t) - X(0)]^2 \rangle \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^t ds \int_0^t ds' \langle V(s) V(s') \rangle \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t ds \langle V(t) V(s) \rangle, \end{aligned} \quad (5.42)$$

siempre que el proceso asociado a la velocidad es estacionario, entonces se debe cumplir que  $\langle V(t) V(s) \rangle = \langle V(t-s) V(0) \rangle$  y haciendo un cambio de variable  $u = t - s$ , tenemos

$$\mathcal{D}_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t du \langle V(u) V(0) \rangle \quad (5.43)$$

que corresponde a la fórmula de Kubo. De acuerdo con Lindner [41], para una ecuación de Langevin de la forma

$$dV(t) = -a_\bullet(V) V dt + [2b(V)]^{1/2} \bullet dB(t), \quad (5.44)$$

la fórmula de Kubo toma la siguiente forma integral

$$\mathcal{D}_\infty = \frac{\int_0^{v_+} dy \exp[U(y)] \left[ \int_y^{v_+} dx \exp[-U(x)] x/b(x) \right]^2}{\int_0^{v_+} dz \exp[-U(z)]/b(z)}. \quad (5.45)$$

En donde  $v_+$  es el límite superior del rango de velocidades, en nuestro caso tenemos  $v_+ = 1$ ,  $U(v) := \int_0^v d\omega \mu_*(\omega) / b(\omega)$  es el potencial efectivo del coeficiente de arrastre de Ito

$$\mu_*(\omega) := \alpha_*(v) v = a_\bullet(v) v - b'(v). \quad (5.46)$$

En general la representación integral del coeficiente de difusión asintótico suele ser muy complicada de integrar, sin embargo en [41] se menciona que para el movimiento Browniano  $(1+1)$ -dimensional, propuesto en [39] puede calcularse de manera analítica. En particular, si consideramos modelos cuya función de distribución de momentos en el estado estacionario sea la función de distribución de Jüttner, entonces deben cumplirse las relaciones de Einstein (5.33), lo cual implica que solo tenemos libertad de escoger una de las funciones  $\alpha$  ó  $D$ .

## Proceso de Ornstein-Uhlenbeck Relativista

Históricamente el proceso de Ornstein-Uhlenbeck ha sido considerado el prototipo para entender el Movimiento Browniano, y esto aplica también para el caso relativista. El caso que vamos a estudiar fue propuesto por Debbasch [36, 37, 38]. Comenzamos por definir

$$\alpha(P) = \frac{\alpha_{ou} M}{P^0}, \quad (5.47)$$

donde  $\alpha_{ou} > 0$  es el parámetro de fricción y es constante. Si tomamos en cuenta la relación de Einstein (5.33), y considerando la regla de discretización de Ito-Inverso, tenemos

$$D(p) \equiv \frac{\alpha_\bullet P^0}{\beta} = \frac{\alpha_{ou} M}{\beta} = D_{ou}. \quad (5.48)$$

Con lo anterior podemos establecer la ecuación de Langevin correspondiente

$$dP(t) = -\frac{\alpha_{ou} M}{P^0} P dt + \left( \frac{2\alpha_{ou} M}{\beta} \right)^{1/2} \bullet dB(t), \quad (5.49)$$

o bien, usando la regla de discretización de Ito

$$dP(t) = -\frac{\alpha_{ou}M}{P^0}P dt + \left(\frac{2\alpha_{ou}M}{\beta}\right)^{1/2} * dB(t). \quad (5.50)$$

Es evidente que aquí la regla de discretización es irrelevante, debido a que el ruido es aditivo, es decir no depende del momento  $P$ . Ahora, para obtener la constante de difusión asintótica debemos de escribir la ecuación diferencial estocástica asociada al proceso que describe la velocidad  $V = P/P^0$  dada por la ecuación (5.39), de donde obtenemos

$$\begin{aligned} dV(t) &= \left[-\frac{\alpha_{ou}M}{P^0}(1-V^2) - \lambda_{\odot} \frac{3\alpha_{ou}}{M\beta}(1-V^2)^2\right] V dt + \left[\frac{2\alpha_{ou}}{M\beta}(1-V^2)^3\right]^{1/2} \odot dB(t) \\ &= -\alpha_{ou} \left[(1-V^2)^{3/2} + \lambda_{\odot} \frac{3}{M\beta}(1-V^2)^2\right] V dt + \left[\frac{2\alpha_{ou}}{M\beta}(1-V^2)^3\right]^{1/2} \odot dB(t), \end{aligned} \quad (5.51)$$

donde en la última línea usamos

$$P^0 = \frac{P}{V} = \frac{MV(1-V^2)^{-1/2}}{V} = \frac{M}{(1-V^2)^{1/2}}. \quad (5.52)$$

Distinguimos cuando usamos Ito-Inverso,  $\lambda_{\odot} = \lambda_{\bullet} = -1$  y cuando usamos Ito, tenemos  $\lambda_{\odot} = \lambda_{*} = 1$ , luego entonces

$$dV(t) = -\alpha_{ou} \left[(1-V^2)^{3/2} - \frac{3}{M\beta}(1-V^2)^2\right] V dt + \left[\frac{2\alpha_{ou}}{M\beta}(1-V^2)^3\right]^{1/2} \bullet dB(t), \quad (5.53)$$

$$dV(t) = -\alpha_{ou} \left[(1-V^2)^{3/2} + \frac{3}{M\beta}(1-V^2)^2\right] V dt + \left[\frac{2\alpha_{ou}}{M\beta}(1-V^2)^3\right]^{1/2} * dB(t). \quad (5.54)$$

Para obtener  $D_{\infty}$ , dada en (5.45) usamos la ecuación diferencial estocástica de Ito, de donde

$$\mu_{*}(\omega) := \alpha_{*}(\omega)\omega = \alpha_{ou} \left[(1-\omega^2)^{3/2} + \frac{3}{M\beta}(1-\omega^2)^2\right]\omega, \quad (5.55)$$

y

$$b(\omega) = \frac{\alpha_{ou}}{M\beta}(1-\omega^2)^3, \quad (5.56)$$

tomando en cuenta el límite superior de la velocidad  $v_{+} = c = 1$ . En el apéndice B podemos ver que (5.45) tiene la siguiente forma explícita

$$\mathcal{D}_{\infty}^{ROUP} = (\alpha_{ou}\chi)^{-1} = \kappa_B \mathcal{T} / M\alpha_{ou}, \quad (5.57)$$

que es el mismo resultado obtenido del proceso de Ornstein-Uhlenbeck no relativista. Lo anterior es de alguna forma satisfactorio y en principio era de esperarse, pues se ha utilizado la distribución de Jüttner que al ser una distribución estacionaria, similar a lo que ocurre en el caso no relativista con la distribución de Maxwell.

### Coefficiente de fricción constante (Ito-Inverso)

Es interesante considerar un modelo alternativo al movimiento Browniano relativista, que difiere del proceso de Ornstein-Uhlenbeck por el uso de un coeficiente de fricción constante en una ecuación diferencial estocástica tomando en cuenta la regla de discretización de Ito-Inverso. Es decir, consideramos el caso de las relaciones generales de Einstein correspondiente a Ito-Inverso (5.33), con lo cual si  $\alpha_\bullet(P) \equiv \bar{\alpha}$  entonces

$$D(P) = \frac{\bar{\alpha}P^0}{\beta}. \quad (5.58)$$

La ecuación diferencial estocástica, tipo Langevin, correspondiente al modelo descrito es

$$dP(t) = -\bar{\alpha}P dt + \left(\frac{2\bar{\alpha}P^0}{\beta}\right)^{1/2} \bullet dB(t), \quad (5.59)$$

sin embargo, para poder usar la fórmula (5.45) necesitamos usar la ecuación diferencial estocástica correspondiente a la regla de discretización de Ito

$$dP(t) = -\bar{\alpha} \left(\frac{\beta P^0 - 1}{\beta P^0}\right) P dt + \left(\frac{2\bar{\alpha}P^0}{\beta}\right)^{1/2} * dB(t). \quad (5.60)$$

Para este modelo la ecuación asociada a la velocidad (5.39) esta dada por

$$dV(t) = -\bar{\alpha} \left[ (1 - V^2) - \frac{3}{M\beta} (1 - V^2)^{3/2} \right] V dt + \left[ \frac{2\bar{\alpha}}{M\beta} (1 - V^2)^{5/2} \right]^{1/2} \bullet dB(t), \quad (5.61)$$

$$dV(t) = -\bar{\alpha} \left[ (1 - V^2) + \frac{2}{M\beta} (1 - V^2)^{3/2} \right] V dt + \left[ \frac{2\bar{\alpha}}{M\beta} (1 - V^2)^{5/2} \right]^{1/2} * dB(t). \quad (5.62)$$

De manera análoga al proceso de Ornstein-Uhlenbeck relativista, seguimos el método propuesto por Lindner, por lo tanto para el modelo alterno tenemos ahora

$$\mu_*(v) = \bar{\alpha} \left[ (1 - V^2) + \frac{2}{M\beta} (1 - V^2)^{3/2} \right], \quad (5.63)$$

$$b(v) = \frac{2\bar{\alpha}}{M\beta} (1 - V^2)^{5/2}. \quad (5.64)$$

De igual forma tenemos que considerar  $v_+ = c = 1$  y la integral puede calcularse como se muestra en el apéndice A, obteniéndose lo siguiente

$$D_\infty^{RBM} = \frac{\bar{\alpha}}{M\beta} \frac{K_0(M\beta)}{K_1(M\beta)}. \quad (5.65)$$

Este resultado puede interpretarse mejor de acuerdo con las gráficas de  $D_\infty$  que se muestran en las figuras (5.1) y (5.2). Para bajas temperaturas, es decir cuando  $\beta M := \frac{M}{\kappa_B \mathcal{T}} \rightarrow \infty$ , se obtiene el resultado del desplazamiento cuadrático medio no relativista  $D_\infty = \kappa_B \mathcal{T} / M\bar{\alpha}$ , lo cual tiene sentido si queremos hacer una comparación del sistema llevándolo al límite de bajas velocidades. Por otro lado, para altas temperaturas,  $\beta M := \frac{M}{\kappa_B \mathcal{T}} \ll 1$  se observa dependencia logarítmica [51].

### Coeficiente de fricción constante (Ito)

Finalmente vamos a considerar el caso donde el coeficiente de fricción es constante, pero ahora adoptamos la ecuación diferencial estocástica de Langevin correspondiente a la discretización de Ito

$$dP(t) = -\alpha_* P dt + \left[ \frac{2\alpha_*}{\beta^2} (1 + \beta P^0) \right]^{1/2} * dB(t), \quad (5.66)$$

en este caso se puede verificar que  $D_* = \frac{\alpha_*}{\beta^2} (1 + \beta P^0)$ , satisface la ecuación (5.33) con  $\sigma_* = p^0/p$  y utilizando que  $P^0 = (M^2 + P^2)^{1/2}$ , la ecuación de Langevin asociada a la velocidad será entonces

$$\begin{aligned} dV(t) = & -\alpha_* \left[ (1 - V^2) + \frac{3}{M\beta} (1 - V^2)^{3/2} + \frac{3}{(M\beta)^2} (1 - V^2)^2 \right] V dt \\ & + \left\{ \frac{2\alpha_*}{M\beta} \left[ (1 - V^2)^{5/2} + \frac{1}{M\beta} (1 - V^2)^3 \right] \right\}^{1/2} * dB(t). \end{aligned} \quad (5.67)$$

De nueva cuenta, para calcular  $D_\infty$  de (5.45) tenemos

$$\mu_*(\omega) = \alpha_* \left[ (1 - \omega^2) + \frac{3}{M\beta} (1 - \omega^2)^{3/2} + \frac{3}{(M\beta)^2} (1 - \omega^2)^2 \right], \quad (5.68)$$

$$b(\omega) = \frac{\alpha_*}{M\beta} \left[ (1 - \omega^2)^{5/2} + \frac{1}{M\beta} (1 - \omega^2)^3 \right]. \quad (5.69)$$

Como se puede observar los parámetros involucrados son mucho más complejos que en los casos anteriores, y es de esperarse entonces que el cálculo sea más complicado. El potencial de velocidad en este caso es

$$\begin{aligned} U(V) = & \int_0^V d\omega \frac{M\beta \left[ (1 - \omega^2) + \frac{3}{M\beta} (1 - \omega^2)^{3/2} + \frac{3}{(M\beta)^2} (1 - \omega^2)^2 \right]}{\left[ (1 - \omega^2)^{5/2} + \frac{1}{M\beta} (1 - \omega^2)^3 \right]} \\ = & \ln \left[ \frac{M\beta + 1}{M\beta (1 - V^2) + (1 - V^2)^{3/2}} \right] - M\beta \left[ 1 - (1 - V^2)^{-1/2} \right]. \end{aligned} \quad (5.70)$$

Esto nos lleva a la expresión para la constante de difusión asintótica

$$D_\infty = \frac{1}{\alpha_* K_1 (M\beta)} \int_0^1 dV \frac{\exp \left[ -M\beta (1 - V^2)^{-1/2} \right]}{M\beta (1 - V^2) + (1 - V^2)^{3/2}}, \quad (5.71)$$

dicha integral puede ser evaluada numéricamente.

Los tres resultados para  $D_\infty$  han sido estudiados y permiten diferenciar de manera cualitativa el comportamiento de cada modelo. Nos ayudamos de las figuras 5.1 y 5.2 tomadas de [50]. La gráfica expuesta en la Fig. 5.2 vemos la evolución temporal del desplazamiento cuadrático medio  $D_t := \langle [X(t) - X(0)]^2 \rangle / 2t$  a la misma temperatura y masa. Para los tres

modelos propuestos es evidente que se tiende a un valor constante para tiempos grandes, es decir tenemos el comportamiento de relajación de la función de distribución de probabilidad aunque difiere entre modelos. Para el proceso de Ornstein-Uhlenbeck relativista (ROUP) el estado de relajación tarda más que en los dos modelos de movimiento Browniano con coeficientes de fricción constantes (RBM y RBM(I)), y el que tarda menos en relajarse es el modelo correspondiente a la EDE de Ito (RBM(I)). Esto se debe principalmente a la interacción entre las fuerzas de fricción y de disipación.

En la gráfica mostrada en Fig. 5.2 apreciamos la dependencia de temperatura con la constante de difusión asintótica para los modelos estudiados. Primero podemos resaltar que los tres modelos son consistentes con el régimen no relativista, es decir, a bajas temperaturas se exhibe una dependencia de tipo lineal idéntica a dicho régimen, incluso en los dos primeros modelos se recupera la misma expresión. En segundo lugar, dado que la constante de difusión y la constante de fricción mantienen las relaciones de fluctuación-disipación generalizadas, en cada caso dependiendo de la regla de discretización considerada y la correspondiente relación de Einstein nos lleva a diferentes expresiones para ambos coeficientes, por lo tanto podemos apreciar que a temperaturas altas la constante de difusión puede variar entre los diferentes modelos de fricción. Entonces cuando medimos simultáneamente la temperatura y la constante de difusión podemos obtener información sobre las interacciones microscópicas dadas por la constante de fricción.

Los modelos aquí expuestos consideran casos donde la ecuación de Langevin correspondiente está expresada a partir de la elección de los coeficientes de fricción de manera arbitraria. Sin embargo, dan lugar a un primer acercamiento con modelos físicos modelados usando este formalismo, para tener modelos más realistas es necesario estudiar modelos de interacciones microscópicas. Por ejemplo en [53] se estudia mediante procesos estocásticos relativistas la difusión de un plasma de quark-gluón en el RHIC, en el estudio realizado se considera una aproximación de los coeficientes de difusión y de arrastre usando teoría cinética relativista. Y se implementa un método iterativo para establecer la ecuación de Langevin correspondiente.



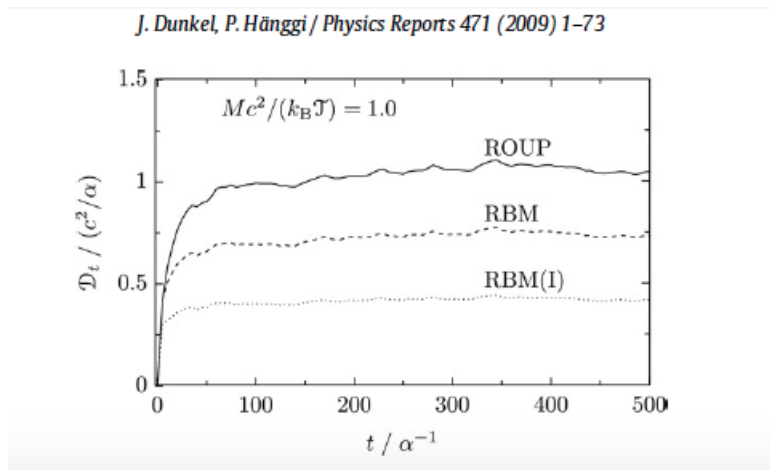


Figura 5.1: Evolución del desplazamiento cuadrático medio para los tres modelos propuestos, Proceso de Ornstein-Uhlenbeck Relativista (*ROUP*), Coeficiente de fricción constante con Ito-Inverso (*RBM*) y Coeficiente de fricción constante con Ito (*RBM (I)*).

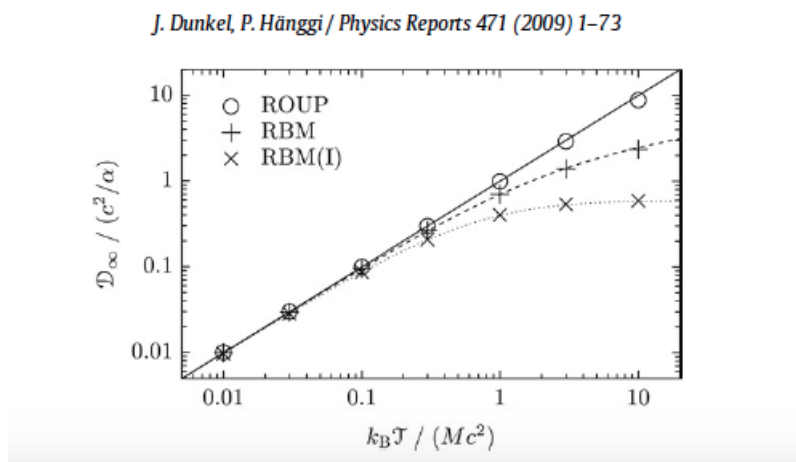


Figura 5.2: Dependencia con la temperatura de la constante de difusión asintótica  $D_\infty$  para los tres modelos estudiados.



# Capítulo 6

## Discusión, conclusiones y perspectivas.

Las observaciones de Robert Brown en 1827 del movimiento errático de las partículas de polen sumergidas en agua fueron reconsideradas por Einstein en 1905 [8] como un proceso de colisiones entre las partículas de polen y las moléculas del agua, dando lugar a la descripción del proceso de difusión y sustentando la hipótesis molecular de la materia. Subsecuentemente en 1908 Langevin [10] propuso interpretar, mediante la segunda ley de Newton, la fuerza que actúa sobre las partículas de polen como formada de dos contribuciones: una que caracteriza la fricción con el medio (el agua) y otra que captura la información desordenada o aleatoria de sus colisiones con las moléculas, conocida como fuerza fluctuante o ruido. Claramente el concepto de probabilidad y los correspondientes procesos estocásticos juegan un papel central en la descripción de este fenómeno conocido como movimiento Browniano. Notablemente este marco teórico tiene aplicaciones en ámbitos tan diversos [42, 50] como son la economía, los sistemas biológicos y reacciones entre partículas elementales a altas energías que requieren de la incorporación de elementos de la relatividad especial o inclusive la general en presencia de campos gravitacionales intensos. Hoy en día el ejemplo más sobresaliente de los procesos estocásticos relativistas es el caso del plasma de cuarks y gluones que se produce en la colisión de núcleos de átomos de oro en el colisionador de iones pesados relativistas (RHIC por sus siglas en inglés [1]), siendo los cuarks los constituyentes de los protones y neutrones que conforman el núcleo atómico, mientras que los gluones son las partículas que intercambian los cuarks. Sorprendentemente, a diferencia de los experimentos usuales, estos cuarks y gluones en RHIC se presentan libres, es decir no ligados. En este caso el análogo de las partículas de polen son los cuarks, mientras que los gluones juegan el papel del medio en el que están sumergidos, permitiendo aplicar de este modo la teoría del movimiento Browniano relativista.

En esta tesis hemos estudiado el movimiento Browniano relativista usando la extensión pertinente de los formalismos tanto de Langevin como de Einstein, es decir analizamos las ecuaciones diferenciales estocásticas y sus correspondientes ecuaciones de Fokker-Planck para la función de distribución de probabilidad de las partículas relativistas, siguiendo esencialmente la estrategia planteada recientemente por Dunkel y Hänggi [50].

En contraste con el caso de una ecuación diferencial determinista como la segunda ley de Newton, la solución de una ecuación diferencial estocástica no se puede obtener de manera

exacta dada una condición inicial. Por ejemplo, para una partícula Browniana, dada una condición inicial, no es posible determinar de manera exacta los valores de su posición y velocidad en cualquier instante de tiempo posterior al inicial. Esto se debe a que es imposible determinar el valor exacto del ruido en cada instante de tiempo. En el mejor de los casos sólo es posible determinar una distribución de valores para el ruido y por consiguiente una distribución de valores de las variables dinámicas. El problema del movimiento Browniano abrió el camino para desarrollar la teoría de los procesos estocásticos, con base en el proceso de Wiener, que describe la ecuación de Langevin para la posición en el régimen sobreamortiguado (fuerza de fricción mucho más grande que la fuerza inercial, es decir  $m\mathbf{a} \ll \text{fricción}$ ), y el proceso de Ornstein-Uhlenbeck, asociado a la ecuación de Langevin para la velocidad; en este caso incluyendo el término inercial.

Actualmente existen en la literatura algunos métodos de solución de las ecuaciones diferenciales estocásticas, en particular en este trabajo de tesis hemos estudiado un método basado en diferenciales [42]. Este método es adecuado para discutir técnicamente los procesos estocásticos evitando el manejo del formalismo matemático completo [54], el cual es indispensable para definir rigurosamente el marco teórico. Para interpretar la contribución del término estocástico a la solución de la ecuación diferencial estocástica, adoptamos una distribución Gaussiana para cada incremento de la variable aleatoria, con promedio cero y varianza proporcional al incremento del tiempo,  $dt$ . La hipótesis del carácter Gaussiano de la distribución es apropiada de acuerdo con el teorema de límite central, el cual es aplicable a un número muy grande de variables aleatorias, en nuestro caso una gran cantidad de partículas. El término estocástico antes mencionado es una variable aleatoria que depende del tiempo, y que identificamos antes como proceso de Wiener [55]. A cada incremento del proceso de Wiener se le denota como  $dW$ , y el hecho de que la varianza sea proporcional a  $dt$ , como vimos en el capítulo 2 [42] nos lleva al resultado conocido como Lema de Ito

$$(dW)^2 = dt, \quad (6.1)$$

el cual juega un papel fundamental para resolver ecuaciones diferenciales estocásticas que consideren ruido Gaussiano. Es decir, los términos que contribuyen a la solución de las ecuaciones diferenciales estocásticas son los que contienen las diferenciales  $dt$ ,  $dW$  y  $(dW)^2$ . A este tipo de cálculo se le conoce como cálculo de Ito.

Es importante recalcar que el término de ruido de una ecuación diferencial estocástica más generalmente puede ser de carácter multiplicativo, esto significa que el incremento de Wiener aparezca como factor multiplicando a una función que puede depender explícitamente de las variables dinámicas involucradas y del tiempo. En el caso de la partícula Browniana dichas variables dinámicas son la posición y la velocidad. Si la función antes mencionada es una constante, entonces se dice que el ruido es aditivo. La solución formal de una ecuación estocástica en diferenciales contiene una integral estocástica, la cual se define como una suma infinita de incrementos de Wiener (ruido multiplicativo discretizado). Existen tres reglas de discretización para dicha integral estocástica, conocidas como regla de Ito, de Stratonovich e Ito inverso, mismas que fueron presentadas en el capítulo 3.

En términos generales, la solución de una ecuación diferencial estocástica con ruido multiplicativo no es una tarea fácil, aunque ciertos avances han sido reportados en la literatura [57]. Sin embargo, si el ruido es aditivo entonces la solución de la ecuación estocástica en di-

ferenciales es independiente de la regla de discretización, y por lo tanto la integral estocástica o suma infinita se realiza únicamente sobre los incrementos de Wiener. Éste es el caso del movimiento Browniano no relativista estudiado en el capítulo 3 mediante el cálculo de Ito. Los resultados son los mismos obtenidos mediante el cálculo usual basado en diferenciales a lo más lineales.

Toda ecuación diferencial estocástica tiene asociada una ecuación de Fokker-Planck para la densidad de probabilidad. Esta ecuación es una alternativa para estudiar los procesos estocásticos. La información estadística que se obtiene de la solución de la ecuación diferencial estocástica es la misma que se obtiene de la solución de la ecuación de Fokker-Planck. Por ejemplo en el caso del movimiento Browniano no relativista, a la ecuación de Langevin sobrearmortiguada le corresponde la ecuación de difusión para la densidad de probabilidad asociada a la posición  $P(\mathbf{x}, t)$ , y a la ecuación de Langevin para la velocidad le corresponde la ecuación de Fokker-Planck para la densidad de probabilidad asociada a la velocidad  $P(\mathbf{v}, t)$ . Contrario al proceso de Wiener, el proceso de Ornstein-Uhlenbeck es un proceso estocástico estacionario que satisface la relación de fluctuación-disipación. Ésta relación cuantifica la existencia, en el estado estacionario, de un balance entre las fuerzas disipativas que tienden a frenar el movimiento de la partícula Browniana y las fuerzas fluctuantes que la mantienen en movimiento. La distribución de probabilidad estacionaria en este caso es la conocida distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann.

Para estudiar el movimiento Browniano relativista es necesario tener presente varios conceptos de la relatividad especial y esto lo realizamos en el capítulo 4. En particular para la termoestadística relativista de equilibrio estudiamos las transformaciones de Lorentz (cambio de marco de referencia) de las funciones de densidad de probabilidad. Destacamos la función de distribución de Jüttner que es la generalización de la de Maxwell-Boltzmann al régimen relativista.

El estudio del movimiento Browniano relativista ha sido desarrollado en el capítulo 5. Comenzamos por establecer las ecuaciones diferenciales estocásticas tipo Langevin multiplicativo (5.2) y (5.3) para la posición y momento espaciales, respectivamente. Las ecuaciones de Fokker-Planck (5.15-5.17), asociadas a las ecuaciones estocásticas anteriores, corresponden a las distintas reglas de discretización. Es importante subrayar que para el caso espacialmente homogéneo e isótropo la solución estacionaria de las ecuaciones de Fokker-Planck anteriores es la función de distribución de Jüttner. Estas mismas condiciones permiten establecer la relación de fluctuación-disipación relativista (5.26). Notablemente, la relación de fluctuación-disipación de Einstein no relativista se obtiene al considerar la regla de discretización de Ito-Inverso, reemplazando la masa por la energía de la partícula  $p^0$ . Esto muestra la consistencia de la Ec. (5.26) con el régimen no relativista.

El análisis anterior lo aplicamos a un problema en un espacio tiempo  $(1+1)$ -dimensional. Como consecuencia obtenemos la constante de difusión asintótica (5.38), la cual corresponde al límite de tiempos grandes del desplazamiento cuadrático medio dividido entre el tiempo, usando la fórmula integral de Kubo. Dicha constante se calcula para tres modelos particulares: el proceso de Ornstein-Uhlenbeck relativista y dos modelos con coeficientes de fricción constante (Ito inverso e Ito). El modelo de Ornstein-Uhlenbeck relativista tiene un coeficiente de difusión asintótica con la misma forma que el correspondiente al estudiado en el capítulo 3 en el régimen no relativista. Una de las razones de esta concordancia es la estructura ma-

temática común a las ecuaciones de Langevin estacionarias (no relativista y relativista). Si bien el cálculo de Kubo conduce a este resultado, su interpretación requiere un análisis más detallado en el caso relativista.

Para concluir nuestro trabajo estudiamos otros dos ejemplos del movimiento Browniano relativista considerando coeficientes de fricción constantes y diferentes reglas de discretización. Ello implica diferentes relaciones de fluctuación-disipación relativistas. A diferencia del modelo de Ornstein-Uhlenbeck relativista, los coeficientes de difusión asintóticos incluyen correcciones relativistas, sin embargo, en el régimen de bajas temperaturas, se obtiene el resultado no relativista.

El presente trabajo nos permite plantear las siguientes conclusiones

- Los procesos de colisiones entre dos especies de partículas pueden describirse usando las ecuaciones de Langevin y de Fokker-Planck para el movimiento Browniano bajo el formalismo del cálculo de Ito, que incluye hasta incrementos cuadráticos de Wiener.
- El movimiento Browniano no relativista bajo el formalismo del cálculo de Ito coincide con los mismos resultados del cálculo usual si el ruido es aditivo.
- Hay tres diferentes integrales estocásticas correspondientes a diferentes reglas de discretización, conocidas como de Ito, Stratonovich e Ito inverso. Cuando se tiene ruido multiplicativo cada regla arroja resultados diferentes, que se pueden relacionar mediante ciertas transformaciones.
- Un aspecto importante de esta descripción estocástica relativista, es un análisis del problema bajo las hipótesis de homogeneidad e isotropía del baño térmico en condiciones de estado estacionario. Tomando en cuenta estas hipótesis, es posible obtener la relación de fluctuación-disipación relativista si la densidad de probabilidad satisface la distribución de Jüttner. El caso no relativista se obtiene usando Ito inverso y cambiando la masa por la energía de la partícula.
- El proceso de Ornstein-Uhlenbeck relativista lleva a un coeficiente de difusión asintótica igual al del régimen no relativista. Los otros dos modelos estudiados arrojan coeficientes de difusión asintóticas que contienen correcciones relativistas respecto al caso no relativista.

La diversidad de aplicaciones de la teoría del movimiento Browniano enriquece también el caso relativista. Posible trabajo a futuro incluye los siguientes problemas.

- Dilucidar una forma covariante en el marco de la relatividad especial para las ecuaciones de Langevin y Fokker-Planck [36].
- Incorporar efectos gravitacionales extendiendo las ecuaciones anteriores a una forma covariante general .
- Abordar la relación entre las ecuaciones de Langevin y de Fokker-Planck con la teoría cinética relativista y sus aplicaciones en altas energías, así como en modelos relativistas cósmicos como el universo temprano u otros procesos estocásticos [59].

- Desarrollar simulaciones numéricas para el proceso de Wiener y Ornstein-Uhlenbeck relativistas [50, 3].
- Generalizar los procesos de Levy o de Poisson al caso relativista en lugar de tomar un proceso Gaussiano, tomando como motivación la ecuación del telegrafista [50].
- Investigar el comportamiento de un chip de Grafeno que aparentemente involucra aspectos relativistas del movimiento Browniano [58].





# Bibliography

- [1] R. Rapp, V. Greco, H. van Hees, Heavy-quark spectra at RHIC and resonances in the QGP, *Nuclear Phys. A* 774 (2006) 685688.
- [2] M. Abdel-Aziz, S. Gavin, Causal diffusion and the survival of charge fluctuations in nuclear collisions, *Phys. Rev. C* 70 (3) (2004) 034905.
- [3] M. Abdel-Aziz, S. Gavin, Causal diffusion at RHIC, *J. Phys. G* 31 (2005) S77S84.
- [4] B. Svetitsky, Diffusion of charmed quarks in the quark-gluon plasma, *Phys. Rev. D* 37 (9) (1988) 24842491.
- [5] H. van Hees, R. Rapp, Thermalization of heavy quarks in the quark-gluon plasma, *Phys. Rev. C* 71 (3) (2005) 034907.
- [6] G. Wolschin, M. Biyajima, T. Mizoguchi, N. Suzuki, Time evolution of relativistic dC Au and Au C Au collisions, *Ann. Phys.* 15 (6) (2006) 369378.
- [7] H. van Hees, V. Greco, R. Rapp, Heavy-quark probes of the quark-gluon plasma and interpretation of recent data taken at the BNL relativistic heavy ion collider, *Phys. Rev. C* 73 (2006) 034913.
- [8] A. Einstein, On the Motion of Small Particles Suspended in a Stationary Liquid, as Required by the Molecular Kinetic Theory of Heat, *Ann. Phys. (Leipzig)* 17 (4) (1905) 549560.
- [9] A. Einstein, M. von Smoluchowski, Untersuchungen über die Theorie der Brownschen Bewegung/Abhandlungen über die Brownsche Bewegung und verwandte Erscheinungen, 3rd ed., vol. 199, Harri Deutsch, Frankfurt, 1999.
- [10] P. Langevin, Sur la théorie du mouvement brownien, *C. R. Acad. Sci. (Paris)* 146 (1908) 530533.
- [11] J. Perrin, Mouvement brownien et réalité moléculaire, *Ann. Chim. Phys.* 18 (1909) 5114.
- [12] G.E. Uhlenbeck, L.S. Ornstein, On the theory of the Brownian motion, *Phys. Rev.* 36 (1930) 823841.
- [13] L.J.S. Allen, *Stochastic Processes with Applications to Biology*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 2002.

- [14] D. Wilkinson, Stochastic Modelling for Systems Biology, in: Mathematical and Computational Biology Series, vol. 11, Chapman & Hall/CRC, London, 2006.
- [15] R.J. Elliott, P.E. Kopp, Mathematics of Financial Markets, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [16] J.-P. Bouchaud, M. Potters, Theory of Financial Risks: From Statistical Physics to Risk Management, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [17] P. Glasserman, Monte Carlo Methods in Financial Engineering, in: Applications of Mathematics, vol. 53, Springer, New York, 2004.
- [18] Pierre Henry-Labordère, Analysis, Geometry, and Modeling in Finance: Advanced Methods in Option Pricing, Chapman & Hall/CRC, London, 2008
- [19] A. Einstein, Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen, Jahrbuch Radioaktivität Elektron. 4 (1907) 411462.
- [20] M. Planck, Zur Dynamik bewegter Systeme, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., Berlin, 1907, pp. 542570.
- [21] M. Planck, Zur Dynamik bewegter Systeme, Ann. Phys. (Leipzig) 26 (1908) 134.
- [22] H. Ott, Lorentz-Transformation der Wärme und der Temperatur, Z. Phys. 175 (1963) 70104.
- [23] F. Jüttner, Das Maxwellsche Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung in der Relativtheorie, Ann. Phys. (Leipzig) 34 (5) (1911) 856882.
- [24] J. Lopuszanski, Relativisierung der theorie der stochastischen prozesse, Acta Phys. Polon. 12 (1953) 8799.
- [25] G. Schay, The equations of diffusion in the special theory of relativity, Ph.D. Thesis, Princeton University, 1961. Available through University Microfilms, Ann Arbor
- [26] R. Hakim, Relativistic stochastic processes, J. Math. Phys. 9 (1968) 18051818.
- [27] K. Ito, Stochastic integral, Proc. Imp. Acad. Tokyo 20 (1944) 519524.
- [28] K. Ito, On stochastic differential equations, Mem. Amer. Math. Soc. 4 (1951) 5189.
- [29] R.L. Stratonovich, A new representation for stochastic integrals and equations, Vestnik Moskov. Univ., Ser. I: Mat., Mekh. 1 (1964) 312.
- [30] R.L. Stratonovich, A new representation for stochastic integrals and equations, SIAM J. Control 4 (1966) 362371.
- [31] D. Fisk, Quasi-martingales and stochastic integrals. Ph.D. Thesis, Michigan State University, Dept. of Statistics, 1963.

- [32] C. Chevalier, F. Debbasch, Relativistic diffusions: A unifying approach, *J. Math. Phys.* 49 (2008) 043303.
- [33] F. Debbasch, C. Chevalier, Relativistic stochastic processes: A review, in: O. Descalzi, O.A. Rosso, H.A. Larrondo (Eds.), *Medyfinol 2006: XV Conference on Nonequilibrium Statistical Mechanics and Nonlinear Physics*, in: *A.I.P. Conference Proceedings*, vol. 913, American Institute of Physics, Melville, NY, 2007, pp. 4248.
- [34] C. Chevalier, F. Debbasch, A unifying approach to relativistic diffusions and H-theorems, *Modern Phys. Lett. B* 22 (2008) 383392.
- [35] F. Debbasch, Relativistic stochastic processes: A review, *AIP Conf. Proc.* 861 (2006) 488493.
- [36] F. Debbasch, K. Mallick, J.P. Rivet, Relativistic Ornstein-Uhlenbeck process, *J. Statist. Phys.* 88 (1997) 945966.
- [37] F. Debbasch, J.P. Rivet, A diffusion equation from the relativistic Ornstein-Uhlenbeck process, *J. Statist. Phys.* 90 (1998) 11791199.
- [38] C. Barbachoux, F. Debbasch, J.P. Rivet, The spatially one-dimensional relativistic Ornstein-Uhlenbeck process in an arbitrary inertial frame, *Eur. Phys. J. B* 19 (2001) 3747.
- [39] J. Dunkel, P. Hänggi, Theory of the relativistic Brownian motion: The 1+1-dimensional case, *Phys. Rev. E* 71 (2005) 016124.
- [40] J. Dunkel, P. Hänggi, Theory of the relativistic Brownian motion: The 1+3-dimensional case, *Phys. Rev. E* 72 (2005) 036106.
- [41] B. Lindner, The diffusion coefficient of nonlinear Brownian motion, *New J. Phys.* 9 (2007) 136.
- [42] K. Jacobs, *Stochastic Processes for Physicists*. Cambridge. UK. 2010.
- [43] S. Chandrasekhar, Stochastic problems in physics and astronomy, *Rev. Modern Phys.* 15 (1) (1943) 189.
- [44] H. Risken, T. Frank, *The Fokker-Planck Equation: Methods of Solutions and Applications*, in: *Springer Series in Synergetics*, Springer, Berlin, 1996.
- [45] N.G. van Kampen, Relativistic thermodynamics of moving systems, *Phys. Rev.* 173 (1968) 295301.
- [46] N.G. van Kampen, Lorentz-invariance of the distribution in phase space, *Physica* 43 (1969) 244262.
- [47] N.G. van Kampen, Relativistic thermodynamics, *J. Phys. Soc. Japan Suppl.* 26 (1969) 316321.

- [48] N.G. van Kampen, A model for relativistic heat transport, *Physica* 46 (1970) 315332.
- [49] P.A.M. Dirac, The conditions for statistical equilibrium between atoms, electrons and radiation, *Proc. R. Soc. Lond. A* 106 (1924) 581596.
- [50] J. Dunkel, P. Hänggi, Relativistic Brownian Motion, *Physics Reports* 471 (2009) 1-73.
- [51] J. Angst, J. Franchi, Central limit theorem for a class of relativistic diffusions, *J. Math. Phys.* 48 (8) (2007) 083101.
- [52] A. L. García-Perciante, A. R. Méndez, E. Escobar-Aguilar, Heat Flux for a Relativistic Dilute Bidimensional Gas. *Journal of Statistical Physics.* 167 (2017) 10.1007.
- [53] T. Lang, H. Van Hees, et al. Heavy quark transport in heavy ion collisions at energies available at the BNL Relativistic Heavy Ion Collider and at the CERN Large Hadron Collider within the UrQMD hybrid model. *Physical Review C* 93 (2016).
- [54] J. U. Márquez Urbina. Modelos de cálculo estocástico para el movimiento Browniano relativista. Tesis de licenciatura. Universidad de Guanajuato. 2010
- [55] N. Wiener. *Cybernetics: Or Control and Communication in the Animal and the Machine.* Paris, (Hermann & Cie) & Camb. Mass. (MIT Press). 1948.
- [56] C.W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods*, 2nd ed., in: Springer Series in Synergetics, Springer, Berlin, 2002.
- [57] D. V. Berkov, N. L. Gorn. Thermally activated processes in magnetic systems consisting of rigid dipoles: equivalence of the Ito and Stratonovich stochastic calculus. *J. Phys. Condens. Matter* 14 (2002) 281.
- [58] A. Pototsky, F. Marchesoni, F.V. Kusmartsev, P. Hänggi, and S.E. Savel'ev. Relativistic Brownian motion on a graphene chip, *Eur. Phys. J. B.* 85 (2012) 356
- [59] G. Chacón-Acosta, L. Dagdug, H. Morales-Tecotl. (2010). On the Manifestly Covariant Juttner Distribution and Equipartition Theorem. *Phys. Rev. E*, 81.(2010) 021126.
- [60] Kwok Sau Fa, Analysis of the Relativistic Brownian Motion in Momentum Space, *Brazilian Journal of Physics*, 36 (2006) 3A.

# Apéndice A

En este apéndice revisamos de manera exhaustiva el cálculo involucrado para obtener una ecuación diferencial estocástica para la velocidad  $V = P/P^0$ , a partir de una ecuación diferencial estocástica para la energía. Como la transformación es no lineal, y de acuerdo a lo visto en el capítulo 2, necesitamos usar una ecuación de transformación que depende de la regla de discretización. En este caso, usando la discretización de Ito inverso y la fórmula de transformación correspondiente para una función  $Z(t) = G(Y(t))$  tenemos

$$dZ(t) \equiv \left[ AG' - \frac{1}{2} C^2 G'' \right] dt + CG' \bullet dB(t), \quad (2)$$

esta fórmula de discretización es válida siempre que se tiene una EDE de la forma

$$dY(t) = A(t) dt + C(t) \bullet dB(t). \quad (3)$$

Para obtener la EDE correspondiente a la velocidad partimos de la ecuación para la energía relativista  $P^0$

$$\begin{aligned} dP^0(t) = & \left[ -\alpha(P^0) P^0 \left[ 1 - \left( \frac{M}{P^0} \right)^2 \right] + \lambda_{\odot} \frac{D(P^0)}{P^0} \left( \frac{M}{P^0} \right)^2 \right] dt \\ & + \left\{ 2D(P^0) \left[ 1 - \left( \frac{M}{P^0} \right)^2 \right] \right\}^{1/2} \odot dB^r(t), \end{aligned} \quad (4)$$

primero pasaremos de  $dP^0 \mapsto dP$ , con la idea de obtener la ecuación diferencial estocástica ya conocida para el momento  $P$ . Usamos la regla de discretización de Ito, que corresponde a

$$\odot = * \therefore \lambda_{\odot} = \lambda_* = 1, \quad (5)$$

en (4) y de acuerdo con (2) se sigue que

$$A = -\alpha P^0 \left[ 1 - \left( \frac{M}{P^0} \right)^2 \right] + \frac{D}{P^0} \left( \frac{M}{P^0} \right)^2, \quad (6)$$

$$C = \left\{ 2D \left[ 1 - \left( \frac{M}{P^0} \right)^2 \right] \right\}^{1/2}, \quad G = P = [P^0 - M^2]^{1/2}. \quad (7)$$

Calculamos las derivadas correspondientes

$$G' = \frac{dP}{dP^0} = \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{M}{P^0}\right)^2\right)^{1/2}}, \quad G'' = -\frac{M^2}{(P^0)^3 \left(1 - \left(\frac{M}{P^0}\right)^2\right)^{3/2}}, \quad (8)$$

de tal manera que

$$AG' - \frac{1}{2}C^2G'' = -\alpha P^0 \left[1 - \left(\frac{M}{P^0}\right)^2\right]^{1/2}, \quad (9)$$

$$CG' = (2D)^{1/2}, \quad (10)$$

por lo tanto, obtenemos la ecuación diferencial estocástica para el momento, presentada en el capítulo 5

$$\begin{aligned} dP &= -\alpha P^0 \left[1 - \left(\frac{M}{P^0}\right)^2\right]^{1/2} dt + (2D)^{1/2} * dB(t) \\ &= -\alpha P dt + (2D)^{1/2} * dB(t). \end{aligned} \quad (11)$$

Ahora pasamos  $dP \mapsto dV$ , usando (2) y con la función no lineal

$$G = V(t) = \frac{P}{(M^2 + P^2)^{1/2}}. \quad (12)$$

De acuerdo con la ecuación (11) consideramos

$$A = -\alpha P, \quad C = (2D)^{1/2} \quad (13)$$

de manera análoga al caso anterior, calculamos las derivadas correspondientes

$$G' = \frac{(1 - V^2)^{3/2}}{M}, \quad G'' = -\frac{3V(1 - V^2)^2}{M^2}, \quad (14)$$

y de nueva cuenta se sigue que

$$AG' - \frac{1}{2}C^2G'' = -\alpha V(1 - V^2) + \frac{3D}{M^2}V(1 - V^2)^2, \quad (15)$$

$$CG' = \left[\frac{2D}{M^2}(1 - V^2)^3\right]^{1/2}. \quad (16)$$

Por lo que finalmente se obtiene

$$dV(t) = \left[-\alpha(1 - V^2) + \frac{3D}{M^2}(1 - V^2)^2\right] V dt + \left[\frac{2D}{M^2}(1 - V^2)^3\right]^{1/2} * dB(t). \quad (17)$$

Que es la expresión para el proceso de velocidad, obtenida a partir de la ecuación diferencial estocástica para la energía  $P^0$ .

# Apéndice B

En este apéndice desarrollamos los cálculos necesarios para obtener la constante de difusión asintótica para el proceso de Ornstein-Uhlenbeck relativista, los otros dos modelos de movimiento Browniano propuestos siguen un procedimiento muy similar al aquí expuesto. Partiendo de la expresión propuesta por Lindner, que es una forma integral de la fórmula de Kubo

$$\mathcal{D}_\infty = \frac{\int_0^{v^+} dy \exp [U(y)] \left[ \int_y^{v^+} dx \exp [-U(x)] x/b(x) \right]^2}{\int_0^{v^+} dz \exp [-U(z)] /b(z)}, \quad (18)$$

donde es necesario considerar al potencial efectivo

$$U(v) := \int_0^v d\omega \mu_*(\omega) /b(\omega), \quad (19)$$

y el coeficiente de arrastre de Ito

$$\mu_*(\omega) := \alpha_*(\omega) \omega, \quad (20)$$

dadas las expresiones anteriores, es necesario en primer lugar tener la EDE para la velocidad usando la discretización de Ito

$$dV(t) = -\alpha_*(V) V + [2b(V)]^{1/2} * dB(t). \quad (21)$$

Para el proceso de Ornstein-Uhlenbeck relativista tenemos la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dV(t) = -\alpha_{ou} \left[ (1 - V^2)^{3/2} + \frac{3}{M\beta} (1 - V^2)^2 \right] V dt + \left[ \frac{2\alpha_{ou}}{M\beta} (1 - V^2)^3 \right]^{1/2} * dB(t), \quad (22)$$

donde corresponden las expresiones para el arrastre de Ito

$$\mu_*(\omega) := \alpha_*(\omega) \omega = \alpha_{ou} \left[ (1 - \omega^2)^{3/2} + \frac{3}{M\beta} (1 - \omega^2)^2 \right] \omega, \quad (23)$$

y el coeficiente de difusión

$$b(\omega) = \frac{\alpha_{ou}}{M\beta} (1 - \omega^2)^3. \quad (24)$$

El potencial efectivo, es decir, la integral a realizar es

$$U(v) := \int_0^v d\omega \mu_*(\omega) / b(\omega) \quad (25)$$

$$= \int_0^v d\omega \frac{\alpha_{ou} \left[ (1 - \omega^2)^{3/2} + \frac{3}{M\beta} (1 - \omega^2)^2 \right] \omega}{\frac{\alpha_{ou}}{M\beta} (1 - \omega^2)^3} \quad (26)$$

$$= \frac{3i\pi}{2} + M\beta \left( -1 + \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \right) - \frac{3}{2} \text{Log} [-1 + v^2], \quad (27)$$

aunque dicha expresión no nos alienta mucho, se simplifica un poco al considerar la exponencial del potencial, es decir

$$\exp[U(v)] = \exp \left[ \frac{3i\pi}{2} + M\beta \left( -1 + \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \right) - \frac{3}{2} \text{Log} [-1 + v^2] \right] \quad (28)$$

$$= \frac{i \exp \left[ M\beta \left( -1 + \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \right) \right]}{(1-v^2)^{3/2}}. \quad (29)$$

Una vez calculado el potencial, el divisor para calcular el coeficiente de difusión asintótica  $D_\infty$  es

$$\int_0^{v+} dz \exp[-U(z)] / b(z), \quad (30)$$

calculamos el integrando

$$\exp[-U(\omega)] / b(\omega) = - \frac{iM\beta \exp \left[ M\beta - \frac{M\beta}{\sqrt{1-\omega^2}} \right]}{\alpha_{ou} (-1 + \omega^2)^{3/2}} \quad (31)$$

$$= \frac{iM\beta}{\alpha_{ou}} \exp[M\beta] \exp \left[ -\frac{M\beta}{\sqrt{1-\omega^2}} \right] (1-\omega^2)^{-3/2}, \quad (32)$$

la expresión anterior se simplifica considerando la siguiente definición

$$(-1)^\nu \frac{d^\nu}{d\chi^\nu} K_0(\chi) = \int_0^1 dv \exp \left[ -\frac{\chi}{\sqrt{1-v^2}} \right] (1-v^2)^{-(\nu+2)/2}, \quad (33)$$

donde  $K_n(\chi)$  es la función modificada de Bessel de segunda clase. Entonces, la integral del divisor en (18) considerando  $\chi = M\beta$  queda como

$$\begin{aligned} \int_0^1 d\omega \exp[-U(\omega)] / b(\omega) &= \frac{iM\beta}{\alpha_{ou}} \exp[M\beta] \int_0^1 d\omega \exp \left[ -\frac{M\beta}{\sqrt{1-\omega^2}} \right] (1-\omega^2)^{-3/2} \\ &= -\frac{iM\beta}{\alpha_{ou}} \exp[M\beta] \frac{d}{d(M\beta)} K_0(M\beta). \end{aligned} \quad (34)$$

Para el numerador, usamos el hecho de que

$$\exp[-U(x)] x / b(x) = \frac{i \exp \left[ M\beta \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) \right] M\beta x}{(1-x^2)^{3/2} \alpha_{ou}}, \quad (35)$$



integrando sobre  $x$  y elevando al cuadrado tenemos

$$\left[ \int_y^1 dx \exp[-U(x)] x/b(x) \right]^2 = -\frac{e^{2M\beta - \frac{2M\beta}{\sqrt{1-y^2}}}}{\alpha_{ou}^2}, \quad (36)$$

haciendo un poco de álgebra y considerando la expresión completa del dividendo tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 dy \exp[U(y)] \left[ \int_y^{v^+} dx \exp[-U(x)] x/b(x) \right]^2 &= - \int_0^1 dy \frac{ie^{M\beta - \frac{M\beta}{\sqrt{1-y^2}}}}{(1-y^2)^{3/2} \alpha_{ou}^2} \\ &= \frac{-ie^{M\beta}}{\alpha_{ou}^2} \int_0^1 dy \frac{\exp\left[-\frac{M\beta}{\sqrt{1-y^2}}\right]}{(1-y^2)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (37)$$

una vez más usando la definición (33) tenemos

$$\int_0^1 dy \exp[U(y)] \left[ \int_y^1 dx \exp[-U(x)] x/b(x) \right]^2 = -\frac{ie^{M\beta}}{\alpha_{ou}^2} \left[ \frac{d}{d(M\beta)} K_0(M\beta) \right]. \quad (38)$$

Usando los resultados tanto del dividendo (38) y del divisor (34) tenemos el resultado para la constante de difusión asintótica (18)

$$\mathcal{D}_\infty = \frac{\int_0^{v^+} dy \exp[U(y)] \left[ \int_y^{v^+} dx \exp[-U(x)] x/b(x) \right]^2}{\int_0^{v^+} dz \exp[-U(z)] /b(z)} = \frac{-\frac{ie^{M\beta}}{\alpha^2} \left[ \frac{d}{d(M\beta)} K_0(M\beta) \right]}{-\frac{iM\beta}{\alpha_{ou}} e^{M\beta} \left[ \frac{d}{d(M\beta)} K_0(M\beta) \right]}, \quad (39)$$

simplificando la expresión anterior obtenemos finalmente

$$\mathcal{D}_\infty = \frac{1}{M\beta\alpha_{ou}} = \kappa_B \mathcal{T} / M\alpha_{ou}. \quad (40)$$

Dicho resultado es el que se presenta en el capítulo 5, obteniendo el mismo resultado de la constante asintótica para el régimen no relativista.



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

# ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00060

Matrícula: 2151800861

Introducción al enfoque estocástico del movimiento Browniano relativista

En la Ciudad de México, se presentaron a las 11:00 horas del día 20 del mes de marzo del año 2018 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. TONATIUH MATOS CHASSIN  
DR. GUILLERMO CHACON ACOSTA  
DR. JOSE INES JIMENEZ AQUINO



ERIC SANTIAGO ESCOBAR AGUILAR  
ALUMNO

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA)

DE: ERIC SANTIAGO ESCOBAR AGUILAR

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

A P R O B A R

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

REVISÓ

LIC. JULIO CESAR DE LARA ISASSI  
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JOSE GILBERTO CORDOBA HERRERA

PRESIDENTE

DR. TONATIUH MATOS CHASSIN

VOCAL

DR. GUILLERMO CHACON ACOSTA

SECRETARIO

DR. JOSE INES JIMENEZ AQUINO