

444

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

MODELOS COSMOLÓGICOS DE
FRIEDMANN CON PRODUCCIÓN
DE RADIACIÓN GRAVITACIONAL

1990

TESIS
QUE PRESENTA
JORGE LUIS CERVANTES COTA
PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN FÍSICA

México, D.F. septiembre, 1990

Agradezco al Dr. Pablo Chauvet A. haber fungido como asesor de esta tesis. Al doctor Jaime Klapp E. agradezco también su apoyo permanente.

Agradezco el apoyo recibido por el CONACyT, a través del programa nacional de becas de posgrado, sin el cual no hubiera sido posible realizar los estudios de maestría y este trabajo de investigación.

INDICE

I. Introducción	1
1. Formalismo de las soluciones aproximadas	3
2. Consideraciones físicas de los modelos	12
3. Descripción de los modelos	17
4. Cálculos numéricos y análisis	22
5. Algunas consideraciones termodinámicas	28
6. Conclusiones	30
7. Apéndice A	32
8. Apéndice B	34
9. Apéndice C	35
10. Apéndice D	39
11. Apéndice E	40
12. Referencias	42

I. Introducción

Una onda gravitatoria es un ‘rizo’ en la curvatura del espacio-tiempo que se propaga con la velocidad de la luz. En el universo real las ondas gravitacionales se propagan en el ‘fondo’ de la gran escala cambiando lentamente la curvatura del espacio-tiempo creada por la distribución de materia del universo.

Ahora bien, el estudio de las ondas gravitatorias como soluciones a las ecuaciones de Einstein data desde la fundación de la teoría de la Relatividad General, no obstante tomó cuarenta años para que la comunidad científica estableciera su realidad física a nivel teórico.

A principios de los sesentas, J. Weber empezó el análisis de las ondas gravitacionales desde el punto de vista experimental. En los años siguientes realizó la pionérica labor de desarrollar los fundamentos teóricos que describen la interacción de las ondas gravitatorias con un detector, que incluso llegó a construir, aún cuando en aquella época no se conocían fuentes realistas de radiación gravitatoria. Transcurriría poco tiempo para que se pensara en nuevos objetos astrofísicos como los cuasares, pulsares, sistemas binarios y agujeros negros en colapso, por mencionar algunos.

A principios de los setentas Weber anunció la detección de flujos de ondas gravitacionales, lo cual motivó la construcción de nuevos detectores; sin embargo, todavía no se ha podido confirmar la existencia experimental de dichas ondas.

En años recientes, el propósito de los experimentales es lograr fundamentos sólidos para el estudio de lo que se ha llamado ‘astronomía de las ondas gravitacionales’.

Paralelamente, desde el punto de vista teórico, el objetivo ha sido concebir y estudiar fuentes realistas de radiación gravitacional. Los modelos que pueden ser resueltos analíticamente también han sido estudiados, y la complejidad de las ecuaciones no lineales ha motivado métodos numéricos para integrar y analizar las ecuaciones de Einstein, dando lugar a una nueva rama de la relatividad llamada ‘relatividad numérica’.

Desde la perspectiva astrofísica, la tarea es, en parte, dar límites más precisos para conocer el ritmo con el cual las galaxias emiten esta radiación.

Desde el punto de vista de la cosmología, también a principios de los setentas, se empezaron a estudiar modelos cosmológicos que contemplan producción de ondas gravitatorias [3] [13] [20]. Sin embargo, el escaso conocimiento que se tiene de los mecanismos que producen radiación ha conducido a proponer modelos simples de interacción entre la materia y la radiación gravitatoria.

El trabajo que desarrollamos y que presentamos aquí es el estudio de modelos cosmológicos que contemplan la interacción de materia con radiación gravitatoria.

En la primera parte se repasa el formalismo teórico desarrollado por Isaacson [11] [12] y Swinerd [19]. En la sección dos, explicamos las consideraciones físicas para que una ecuación de estado politrópica pueda representar la interacción entre la materia y la radiación gravitacional a nivel cosmológico. En la sección tres, describimos las etapas de nuestro modelo; en la cuatro, hacemos algunos cálculos numéricos sobre las posibles consecuencias cosmológicas del mismo. En la sección quinta examinamos brevemente sus implicaciones termodinámicas, y por último en la sección seis planteamos nuestras conclusiones.

Finalmente y a manera de apéndices incluimos algunos cálculos que consideramos de importancia pero que resultaban largos o secundarios, así como presentamos las gráficas que ilustran el contenido.

1. Formalismo de las soluciones aproximadas

Hemos adoptado la convención para la signatura de la métrica total que sea -2 , los índices griegos corren de 1 a 4, y la convención de suma de los índices repetidos es válida, a no ser que sea explícitamente especificado lo contrario.

Una coma separando los índices denota derivación parcial, mientras que el semicolon indica la derivada covariante con respecto a la métrica de fondo $\gamma_{\mu\nu}$. Todos los índices son subidos y bajados usando el tensor métrico, y las convenciones adoptadas para el tensor de Riemann-Cristoffel y de Ricci son

$$v_{\sigma;\mu\nu} - v_{\sigma;\nu\mu} = R^{\eta}_{\sigma\mu\nu} v_{\eta}$$

donde v_{σ} es un vector covariante arbitrario, y

$$R_{\mu\nu} = \gamma^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\nu\beta}, \quad R = \gamma^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}.$$

Las ecuaciones de campo de Einstein para la variedad del espacio-tiempo que contiene una distribución de materia $T_{\mu\nu}$, son descritas por

$$G_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{1.1}$$

donde c es la velocidad de la luz, G la constante de gravitación universal y $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu}(g_{\alpha\beta}) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(g_{\alpha\beta})$. La métrica contiene radiación gravitacional de frecuencia alta si y sólo si existe una familia de sistemas coordenados en los cuales la métrica total $g_{\mu\nu}$ de la región que contiene materia, toma la siguiente forma:

$$g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \eta h_{\mu\nu}, \quad 0 < \eta \ll 1 \tag{1.2}$$

donde η es un parámetro de pequeñez, $h_{\mu\nu}$ son funciones rápidamente cambiantes del espacio-tiempo, que describen el campo de radiación gravitatoria. Las $\gamma_{\mu\nu}$ son funciones que comparativamente varían más lentamente y representan las componentes de la métrica que describe la geometría curva de fondo a través de la cual la radiación se propaga.

Sustituyendo la métrica total (1.2) en las ecuaciones de Einstein (1.1) y expandiendo términos en potencias de η , Isaacson [11,12] demostró para el caso de vacío y Swinerd [19] para el caso de materia, que la radiación gravitacional posee un tensor de energía-momento que es de segundo rango, simétrico e invariante de norma en el límite de alta frecuencia para la radiación gravitatoria.

A continuación describiremos brevemente el método empleado por Swinerd, análogo al de Isaacson, en su demostración.

Sustituyamos la ecuación (1.2) en el tensor total de Ricci

$$R_{\mu\nu}(g_{\alpha\beta}) = R_{\mu\nu}^{(0)} + \eta R_{\mu\nu}^{(1)} + \eta^2 R_{\mu\nu}^{(2)} + \eta^3 R_{\mu\nu}^{(3+)} \quad (1.3)$$

donde $R_{\mu\nu}^{(3+)}$ representa los ordenes superiores en potencias de η , y donde

$$R_{\mu\nu}^{(0)} = R_{\mu\nu}(\gamma_{\alpha\beta}), \quad (1.4)$$

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \Theta_{\mu\sigma;\nu}^{\sigma} - \Theta_{\mu\nu;\sigma}^{\sigma}, \quad (1.5)$$

$$R_{\mu\nu}^{(2)} = (h^{\sigma}_{\alpha}\Theta_{\mu\nu}^{\alpha})_{;\sigma} - (h^{\sigma}_{\alpha}\Theta_{\mu\sigma}^{\alpha})_{;\nu} + \Theta_{\mu\sigma}^{\alpha}\Theta_{\nu\alpha}^{\sigma} - \Theta_{\mu\nu}^{\alpha}\Theta_{\alpha\sigma}^{\sigma}, \quad (1.6)$$

con $\Theta_{\mu\nu}^{\alpha}$ definida por

$$\Theta_{\mu\nu}^{\alpha} \equiv \frac{1}{2}(h^{\alpha}_{\mu;\nu} + h^{\alpha}_{\nu;\mu} - h^{\alpha}_{\mu\nu}). \quad (1.7)$$

Así, la parte izquierda de las ecuaciones de Einstein se convierte

$$G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^{(0)} + \eta G_{\mu\nu}^{(1)} + \eta^2 G_{\mu\nu}^{(2)} + \eta^3 G_{\mu\nu}^{(3+)}, \quad .8)$$

$G_{\mu\nu}^{(3+)}$ representa los ordenes superiores en potencias de η , y donde

$$G_{\mu\nu}^{(0)} = R_{\mu\nu}^{(0)} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}R^{(0)}, \quad (1.9)$$

$$G_{\mu\nu}^{(i)} = R_{\mu\nu}^{(i)} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}R^{(i)} - \Delta_{\mu\nu}^{(i-1)}, \quad i = 1, 2, \quad (1.10)$$

$$R^{(j)} = \gamma^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}^{(j)}, \quad \Delta_{\mu\nu}^{(j)} \equiv \frac{1}{2}h_{\mu\nu}R^{(j)}, \quad i = 0, 1, 2. \quad (1.11)$$

La parte derecha de las ecuaciones de Einstein, el contenido material de la variedad, es representado a este nivel por un fluido general caracterizado por un cuadrivector de velocidad u_μ , una densidad ρ_m , una presión p_m , una temperatura T y las variables ζ , ξ y χ representan la viscosidad cortante, la viscosidad de bulto y la conductividad térmica, respectivamente. Se asume que en presencia de la radiación estas cantidades son perturbadas de sus valores que tenían en la métrica de fondo sin perturbar, de tal manera que

$$u_\mu = u_\mu^{(0)} + \eta u_\mu^{(1)}, \quad \rho_m = \rho_m^{(0)} + \eta \rho_m^{(1)}, \quad p_m = p_m^{(0)} + \eta p_m^{(1)}, \quad (1.12)$$

y las correspondientes para la temperatura, viscosidades y conductividad. Al sustituir estas cantidades perturbadas en $T_{\mu\nu}$, se obtiene una serie de potencias en η ,

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(0)} + \eta T_{\mu\nu}^{(1)} + \eta^2 T_{\mu\nu}^{(2)} + \eta^3 T_{\mu\nu}^{(3+)}, \quad (1.13)$$

donde $T_{\mu\nu}^{(3+)}$ representa los ordenes superiores en potencias de η . De esta manera, las ecuaciones de Einstein pueden ser escritas explícitamente como

$$G_{\mu\nu}^{(0)} + \eta G_{\mu\nu}^{(1)} + \eta^2 G_{\mu\nu}^{(2)} + \eta^3 G_{\mu\nu}^{(3+)} = -\frac{8\pi G}{c^4} (T_{\mu\nu}^{(0)} + \eta T_{\mu\nu}^{(1)} + \eta^2 T_{\mu\nu}^{(2)} + \eta^3 T_{\mu\nu}^{(3+)}). \quad (1.14)$$

Al considerar el esquema de vacío de Isaacson [11,12], se sugiere que la presencia de radiación gravitatoria en una región del espacio-tiempo dará lugar a una densidad de energía efectiva ahí, la cual puede ser atribuida a la radiación. En nuestro caso, hay dos fuentes de energía, a saber, la de la radiación y la de la materia, que actúan para crear la curvatura de fondo. Esta hipótesis es considerada en la siguiente ecuación

$$G_{\mu\nu}^{(0)} = -\frac{8\pi G}{c^4} (T_{\mu\nu}^{(0)} + E_{\mu\nu}^{ef}), \quad (1.15)$$

donde $E_{\mu\nu}^{ef}$ denota al tensor de energía efectivo del campo de radiación. Al igual que en el modelo del vacío, se supone que

$$E_{\mu\nu}^{ef} = \frac{c^4}{8\pi G} \eta^2 G_{\mu\nu}^{(2)}. \quad (1.16)$$

La separación de las ecuaciones de Einstein queda hecha al sustituir la ecuación (1.15) en la (1.14) y empleando la (1.16), se encuentra que

$$\eta G_{\mu\nu}^{(1)} + \eta^3 G_{\mu\nu}^{(3+)} = -\frac{8\pi G}{c^4} (\eta T_{\mu\nu}^{(1)} + \eta^2 T_{\mu\nu}^{(2)} + \eta^3 T_{\mu\nu}^{(3+)}). \quad (1.17)$$

De esta manera, empleando las ecuaciones acopladas (1.15) y (1.17), con ayuda de (1.16), se obtienen soluciones aproximadas a las ecuaciones de Einstein, que representan a la radiación gravitacional viajando a través de un medio material. Este conjunto de ecuaciones representa el formalismo general de la teoría.

Para asegurar que la radiación sea de alta frecuencia, se introducen las distancias características L y λ que son, respectivamente, los intervalos en los cuales cambia significativamente la métrica de fondo y la radiación. Entonces, éstas cumplen con

$$L \gg \lambda \quad (1.18)$$

λ es identificada con la longitud de onda de la radiación. Éste es el llamado límite de la óptica geométrica de Relatividad General.

Además, se suponen los siguientes ordenes de magnitud

$$\begin{aligned} \gamma_{\mu\nu} = O(1), \quad h_{\mu\nu} = O(1), \quad \gamma_{\mu\nu,\alpha} = O(1), \quad h_{\mu\nu,\alpha} = O(\eta^{-1}), \\ \gamma_{\mu\nu,\alpha\beta} = O(1), \quad h_{\mu\nu,\alpha\beta} = O(\eta^{-2}), \end{aligned} \quad (1.19)$$

y como

$$|\gamma_{\mu\nu,\alpha}| \approx L^{-1} |\gamma_{\mu\nu}|, \quad |h_{\mu\nu,\alpha}| \approx \lambda^{-1} |h_{\mu\nu}|, \quad (1.20)$$

obtenemos que

$$\lambda \approx \eta, \quad L \approx 1 \quad (1.21)$$

es decir, el parámetro pequeño de expansión que aparece en la ecuación (1.2) es identificado con la longitud de onda de la radiación. El hecho de haber escogido esta opción para los parámetros (λ y L) nos lleva a examinar sólo aquellas situaciones en las cuales el orden de magnitud de la energía de la radiación es por lo menos comparable con la energía del medio material.

Por un lado, empleando las condiciones (1.19) se llega a la conclusión de que el término dominante de la parte izquierda de (1.17) es

$$\eta G_{\mu\nu}^{(1)} = O(\eta^{-1}). \quad (1.22)$$

Por otro lado, cuando la distribución material es descrita por un fluido perfecto (el cual será nuestro caso), el orden de magnitud de la parte derecha de la ecuación (1.17) puede ser calculado al resolver las ecuaciones de flujo del fluido (material) hasta primer orden, durante el paso de la radiación. Este análisis [19], nos lleva a que la parte derecha es a lo más del orden de η . Juntando esto con lo anterior obtenemos que (1.17) puede ser escrita, para el caso no disipativo, de la siguiente manera

$$\eta^2 G_{\mu\nu}^{(1)} + O(\eta^2) = 0, \quad (1.23)$$

que es de orden de la unidad. Esta ecuación debe ser analizada y resuelta, para lo cual se supone una solución del tipo WKB (método aproximativo) para la $h_{\mu\nu}$, a saber,

$$h_{\mu\nu} = \text{Re}(aq_{\mu\nu}e^{i\phi}), \quad (1.24)$$

donde a , $q_{\mu\nu}$ y ϕ son la amplitud, polarización y la fase de la radiación, respectivamente. Esta solución es válida en el espacio plano, pero como la radiación cumple con (1.18), la onda se encuentra en una región aproximadamente plana.

Además, se imponen las condiciones suplementarias al fijar la norma

$$h^{\mu\nu}_{;\nu} = 0, \quad h = \gamma^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = 0. \quad (1.25)$$

para asegurar que el campo de energía es positivo definido y que el campo es sólo de partículas de espín 2.

Con las ecuaciones (1.5), (1.7), (1.10) y (1.25), la ecuación (1.23) puede ser escrita de la siguiente manera

$$k^\sigma k_\sigma = 0, \quad (a^2 k^\sigma)_{;\sigma} = 0, \quad q_{\mu\nu;\sigma} k^\sigma = 0, \quad (1.26)$$

donde $k = \phi_{,\alpha}$. Además, se cumplen las siguientes condiciones

$$q_{\mu\nu}q^{\mu\nu} = 1, \quad k^\beta q_{\alpha\beta} = 0, \quad \gamma^{\alpha\beta} q_{\alpha\beta} = 0, \quad (1.27)$$

las últimas dos ecuaciones de (1.27) son las condiciones sobre las coordenadas escritas en el formalismo de WKB.

La comparación de estas ecuaciones con las obtenidas por Isaacson [11] revela que la radiación gravitatoria en un fluido perfecto tiene la misma forma funcional que las correspondientes para el caso de vacío. Esto nos indica que la radiación no es absorbida por el fluido perfecto, en esta aproximación. En el caso del fluido disipativo, se puede mostrar que la radiación es absorbida por el fluido.

Examinemos ahora al campo de energía efectivo de la radiación, ecuación (1.16), y con ayuda de ecuaciones (1.10) y (1.11) toma la siguiente forma,

$$E_{\mu\nu}^{ef} = \frac{c^4}{8\pi G} \eta^2 (R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} R^{(2)}), \quad (1.28)$$

esta expresión es idéntica a la expresión para el caso del vacío obtenida por Isaacson [12]. Al tratar esta ecuación se demuestra que su promedio, denotado por $E_{\mu\nu} \equiv \langle E_{\mu\nu}^{ef} \rangle$, es invariante en el límite de alta frecuencia ante cambios infinitesimales del sistema coordenado. Más aún, suponiendo la solución (1.24) y las ecuaciones (1.26) y (1.27), se encuentra que

$$E_{\mu\nu} = \frac{c^4 a^2 \eta^2}{64\pi G} k_\mu k_\nu + O(\eta). \quad (1.29)$$

Este formalismo general aplicado al fluido perfecto puede servir para describir a radiación gravitacional que se propaga en un espacio-tiempo de fondo que cumple con la ecuación (1.18), es decir, para una variedad de longitudes de onda.

Ahora, consideremos un campo isotrópico de esta radiación en un espacio-tiempo con métrica total que cumple con la ecuación (1.2), y con una métrica de fondo dada por el elemento de línea de Robertson-Walker (RW), que en coordenadas polares esféricas r , ω , ψ y el tiempo cósmico t es

$$ds^2 = dt^2 - \frac{R^2(t)}{c^2} \left(\frac{dr^2 + r^2 d\omega^2 + r^2 \text{sen}^2 \omega d\psi^2}{(1 + \kappa r^2/4)^2} \right), \quad (1.30)$$

donde $R(t)$ es el factor de escala del modelo que describe la dinámica y κ es la constante de curvatura. Empleando esta métrica de fondo se demuestra [19], utilizando soluciones del tipo (1.29) con amplitud constante para todo el campo isotrópico, que el tensor efectivo de la radiación gravitatoria $E_{\mu\nu}$ cumple con lo siguiente

$$E_{\mu\nu} = 0, \quad \mu \neq \nu, \quad E_{11} = E_{22} = E_{33} \quad (1.31)$$

e identificando estas componentes con la presión y densidad de la radiación, esto es,

$$E_i^i \equiv -p_r, \quad i = 1, 2, 3, \quad E_4^4 \equiv \rho_r c^2, \quad (1.32)$$

donde convención de la suma no es válida. Además, con las soluciones encontradas se puede demostrar que $E_\alpha^\alpha = 0$, con lo que finalmente obtenemos

$$p_r = \frac{1}{3} \rho_r c^2, \quad (1.33)$$

que es la ecuación de estado para la radiación gravitatoria. Con estas ecuaciones se puede identificar a $E_{\mu\nu}$ con las componentes de tensor de fluido perfecto, dado por

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)u_\mu u_\nu - \gamma_{\mu\nu} p \quad (1.34)$$

si es que se cumple que

$$u_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad u_4 = 1. \quad (1.35)$$

De esta manera, al considerar un sistema coordenado comóvil, el campo radiativo efectivo de energía puede ser representado por un fluido perfecto con ecuación de estado

$$p_r = \frac{1}{3} \rho_r c^2.$$

2. Consideraciones físicas de los modelos

En esta sección estudiamos la manera con la cual la curvatura de fondo del espacio-tiempo es influenciada por un contenido energético de materia $T_{\mu\nu}^{(0)}$, y por el contenido energético de un campo radiativo efectivo $E_{\mu\nu}^{ef}$, descrito por la ecuación (1.15), que toma la siguiente forma:

$$R_{\mu\nu}^{(0)} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}R^{(0)} = -\frac{8\pi G}{c^4}(T_{\mu\nu}^{(0)} + E_{\mu\nu}^{ef}). \quad (2.1)$$

Para la métrica de fondo escogimos la de Robertson-Walker, además el campo radiativo es isotrópico en un sistema coordenado comóvil. Usando estas suposiciones, se encuentra [20] que la ecuación (2.1) del formalismo general se reduce a las ya conocidas ecuaciones de campo con constante cosmológica nula (ver apéndice E),

$$\left[\frac{\dot{R}}{R}\right]^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\kappa c^2}{R^2}, \quad (2.2)$$

$$\left[\frac{\dot{R}}{R}\right]^2 = -\frac{8\pi G}{c^2}p - \frac{\kappa c^2}{R^2} - 2\frac{\ddot{R}}{R}. \quad (2.3)$$

$p = p_r + p_m$ y $\rho = \rho_r + \rho_m$ son la presión y densidad totales (radiación gravitacional más materia) respectivamente, R es el factor de escala y los puntos representan derivadas temporales.

Debido a que estamos considerando un modelo de dos componentes en interacción, la materia y la radiación gravitatoria, tenemos que especificar, por un lado, sus ecuaciones de estado, y por otro, su interacción.

Específicamente, asumiendo el límite de la óptica geométrica de Relatividad General para la radiación gravitacional: esto es, $\lambda \ll R$, donde λ es la longitud de onda de la radiación gravitacional y R es el factor de escala, [19] estableció que uno puede tratar a esta radiación como un fluido perfecto con ecuación de estado

$$p_r = \frac{1}{3} \rho_r c^2, \quad (2.4)$$

y para la materia asumimos polvo, i.e.,

$$p_m = 0. \quad (2.5)$$

De las ecuaciones(2.2) y (2.3) se obtiene la ecuación que representa la conservación de la energía

$$(\rho R^3)' + 3c^{-2} p (\ln R)' R^3 = 0. \quad (2.6)$$

La interacción entre los dos fluidos es expresada a través de la transferencia de energía de materia a radiación, U_r , y correspondientemente, una razón de energía (negativa) transferida de radiación a materia, U_m . Esto le permite a uno separar la ecuación (2.6) en dos, una para cada fluido:

$$(\rho_r R^3)' + 3c^{-2} p_r (\ln R)' R^3 = U_r. \quad (2.7)$$

$$(\rho_m R^3)' + 3c^{-2} p_m (\ln R)' R^3 = U_m. \quad (2.8)$$

con $U_r + U_m = 0$ para acoplar la interacción y para recuperar la conservación de la energía. Claramente, parte de la energía de la materia es convertida a radiación. Para materia en forma de polvo (ecuación 2.5) esto implica que $U_m = -U_r = (\rho_m R^3)'$ (una presentación similar se da en [15]).

U_r (o U_m) es una función indeterminada que tiene la información de la interacción materia-radiación. La falta de conocimiento preciso sobre la generación de ondas gravitacionales, necesariamente impone una descripción fenomenológica de dicha interacción. Por la tanto, es necesario decir algo acerca de la evolución de la interacción a medida que

el universo se expande, el llamado “perfil radiativo de energía”. Esta evolución se escogió que está dada a través de una ecuación de estado politrópica, ver [18]:

$$p = \beta c^2 \rho^{1+\frac{1}{n}} \quad (2.9)$$

donde β y n (llamado índice politrópico) son constantes.

La ecuación de estado politrópica se ha utilizado en cosmología por algunos autores [18] y ahora nosotros la introducimos para describir la interacción entre la radiación gravitatoria y la materia.

Nótese que la politropa proporciona la relación entre la densidad total y la presión total, es decir la densidad y presión de la materia y de la radiación tomadas juntas. Con la politropa sustituida en la ecuación de conservación, uno encuentra después de una integración analítica, la relación funcional entre la densidad total y el factor de escala R (ver apéndice A):

$$\rho = \frac{1}{\beta^n F^n} \quad ; \quad \text{con} \quad F \equiv \frac{\alpha}{\beta} R^{\frac{3}{n}} - 1, \quad (2.10)$$

La relación entre la densidad de la materia ρ_m y R es (ver apéndice A)

$$\rho_m = \frac{F - 3}{\beta^n F^{n+1}}, \quad (2.11)$$

y entre la densidad de la radiación ρ_r y R es (ver apéndice A)

$$\rho_r = \frac{3}{\beta^n F^{n+1}}, \quad (2.12)$$

la cual da, dependiendo principalmente de n , los diferentes perfiles radiativos de energía. La figura 1 y 2 muestran, para valores positivos y negativos de n , respectivamente, la evolución de la densidad de materia (línea segmentada) y la densidad de radiación como funciones del factor de escala. Para n positivas las densidades ρ_m y ρ_r divergen en $R = R_i > 0$: la

introducción de la ecuación politrópica a nivel cosmológico mueve la singularidad donde la densidad y la presión son infinitas, de $R = 0$ a $R = R_i$, ver [18]. Por otro lado, para valores negativos de n , entre -1 y 0, encontramos un comportamiento muy diferente: la densidad de radiación es inicialmente cero y se incrementa con el tiempo, que es precisamente lo que necesitamos para poder interpretar el modelo como uno de producción gravitatoria postgaláctica. Es decir, para $-1 < n < 0$ tenemos que $\rho_r \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0$, condición que asegura que la radiación gravitatoria no es de origen primordial sino generada mediante procesos galácticos. Esta idea fue introducida por [13] y usada también por [20], quien la nombró la “hipótesis galáctica”. Nótese que nuestro modelo de producción de radiación puede ir desde un comportamiento concavo a uno convexo (ver figura 3). Por otro lado, observamos de la figura 2 que ρ_m es una función decreciente de R , por lo que representa un modelo físico aceptable. Este análisis se publicó en [5].

Anterior a esta investigación ya se habían publicado trabajos sobre modelos cosmológicos análogos a éste pero con otros perfiles de radiación gravitatoria. En el primero de ellos [3] se supone que razón de producción de radiación es constante, de tal manera que

$$\rho_r = 0 \quad \text{para } t < t_g$$

$$\rho_r = \text{const. para } t > t_g$$

donde t_g es en tiempo en el cual se formaron las galaxias. Éste es un modelo bastante simple, ya que además, supone que la producción de radiación empezó de manera constante y hasta hoy en día continua igual.

Un modelo más “realista”, por lo menos fenomenológicamente, es el descrito en [13] y corregido en [20]. Aquí, el perfil de radiación es de la forma

$$\rho_r \sim R^\delta, \text{ con } \delta > -2 \quad \text{para } 0 < t < t_c.$$

donde t_c es el tiempo en el cual se tiene que parar la producción de ondas, para evitar tener densidad de materia negativa. Este perfil de radiación se asemeja al nuestro cuando $n \rightarrow 0$, sin embargo el comportamiento de producción convexo ($n \rightarrow -1$) no es reproducible en este modelo. Esta última característica permite que la intensidad de la interacción aumente, y por ende, que el efecto gravitatorio también lo haga.

3. Descripción de los modelos

Hemos visto que las densidades tanto de materia como de radiación presentan un comportamiento adecuado al considerar la ecuación politrópica como agente de la interacción materia-radiación gravitatoria, de manera que podemos construir nuestro modelo cosmológico. Sin embargo, como el comportamiento de ρ_r es creciente y ρ_m es decreciente siempre (ver figura 2), llega un momento $t = t_1$, $R = R_1$ para el cual $\rho_m(R_1) = 0$, que nos diría que toda la materia presente en el universo se convierte en radiación gravitatoria. Nótese de la ecuación (2.11) que si el factor de escala crece arriba de cierto punto, la condición $\rho_m \geq 0$ no se puede tener (esta característica también está presente en el modelo presentado en [13,20]). En nuestro modelo esta condición requiere que $R \leq R_1 = \left(\frac{4\beta}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}}$. Por lo tanto, en nuestros modelos la producción de radiación gravitatoria se da durante la expansión antes de que el factor de escala alcance el valor R_1 .

Así entonces, nuestro modelo tiene dos etapas diferentes, la primera caracterizada por la producción de radiación gravitatoria emanada de la materia hasta un cierto momento $t = t_c < t_1$, cuando la interacción debe ser arbitrariamente suspendida. Si no es así, los modelos críticos y abiertos ($\kappa \leq 0$) y algunos modelos cerrados ($\kappa > 0$) eventualmente contendrán una densidad de materia negativa la cual no es física. Después de que la interacción ha cesado, para $t \geq t_c$, consideramos una segunda etapa de evolución en la cual la materia y la radiación gravitacional coexisten sin interacción. Así, el modelo es representado por una “época interactiva” ($t < t_c$) seguido de una “época no interactiva” ($t \geq t_c$). Un esquema de nuestro modelo cosmológico es presentado en la figura 4 (análogo al presentado en [20]).

$t = 0$	$t < t_c$	$t = t_c < t_1$	$t > t_c$
	PRIMERA ETAPA (E)		SEGUNDA ETAPA (E')
$R = 0$ $\rho_r = 0$	FORMACION DE LAS GALAXIAS : EL CONTENIDO MATERIAL DEL MODELO ES CONVERTIDO A RAD. GRAV.	TIEMPO EN EL CUAL CESA LA INTERACCION	LA MATERIA Y LA RADIACION COEXISTEN EN UN ESTADO DE NO INTERACCION

Figura 4. Descripción esquemática de los modelos.

Como la distribución de energía del modelo es diferente en cada lado de la frontera en $t = t_c$, el comportamiento del modelo en cada lado de dicha frontera será descrito por diferentes soluciones a la ecuación (2.2). La transición del modelo de E a E' es considerada físicamente aceptable si las condiciones de unión en el 3-espacio $t = t_c$ aseguran la continuidad de la presión y de la densidad total de energía en ese punto. De acuerdo con [16,20], las condiciones matemáticas de unión que permiten una transición física aceptable de una etapa a la otra son que el tensor métrico $\gamma_{\mu\nu}$ y todas sus primeras derivadas parciales sean continuas en la frontera, es decir, que se cumpla lo siguiente:

$$R_c|_E = R_c|_{E'} \quad y \quad \dot{R}_c|_E = \dot{R}_c|_{E'} \quad . \quad (3.1)$$

Según las ecuaciones (2.2) y (2.3), las condiciones (3.1) implican que la densidad total es continua, pero no necesariamente la presión total. Sin embargo, la ecuación de estado para la radiación (2.4) nos dice que si la densidad es continua en $t = t_c$, la presión también lo es. De esta manera, la imposición de las condiciones de Lichnerowicz (3.1) es suficiente para asegurar un modelo físico aceptable.

Debido a las condiciones de unión, tenemos que referirnos a las condiciones que prevalecían en el tiempo t_c . De esta manera, la mayoría de las ecuaciones deben de

contener una combinación de las condiciones aludidas a ambos: al tiempo t_c y al tiempo presente t_o , etiquetados por un subíndice “c” y “o”, respectivamente.

Antes de proceder a integrar la ecuación que da la dinámica (2.2), necesitamos especificar cuanto valen las constantes que en ella se encuentran: por un lado, tenemos que al sustituir la ecuación de la densidad (2.10) en la ecuación (2.2), aparecen las constantes α , β y n , pero el intervalo de valores para n ya ha sido especificado; y por otro, la constante κ que determina la curvatura del espacio.

Las constantes α y β se definen de la siguiente manera:

$$\alpha \equiv \frac{1 + \epsilon}{R_c^{3/n} \rho_c^{1/n}} \quad y \quad \beta \equiv \epsilon \rho_c^{-1/n} \quad (3.2)$$

en términos de ϵ determinada por

$$\epsilon = \frac{p_c}{c^2 \rho_c}. \quad (3.3)$$

Así definida, la constante ϵ determina la cantidad de materia convertida a radiación en $t = t_c$ (ver apéndice B). De esta manera, lo que hemos hecho es cambiar a las constantes α y β por las constantes R_c , ρ_c y ϵ . Esto se debe a que la ecuación de la dinámica la vamos a integrar en variables reescaladas en $t = t_c$, i.e., resolveremos la ecuación diferencial para obtener la solución en las variables ($\frac{R}{R_c}$ vs. tH_c). La constante κ se puede reescribir en términos de los parámetros cosmológicos medibles (ver apéndice C). Los parámetros cosmológicos utilizados son:

$$H = \frac{\dot{R}}{R}, \quad \text{parametro de Hubble}$$

$$\sigma_m = \frac{4\pi G}{3H_o^2} \rho_m, \quad \text{parametro de la densidad}$$

y

$$\mathbf{f} \equiv -(\ln \rho_m R^3)' = (\ln \int_0^t U_r dt)' \quad \text{parametro de la produccion de radiacion.} \quad (3.4)$$

En los modelos de un solo fluido (e.g. materia, radiación electromagnética o radiación gravitacional) para determinar la constante curvatura κ se escogen dos parámetros, a saber, la constante de Hubble H_o y la densidad de materia ρ_{m_o} o el parámetro de desaceleración q_o (ver sección 4); sin embargo, en nuestros modelos como tenemos dos fluidos, necesitamos un parámetro extra para el fluido extra, el cual lo escogimos ser \mathbf{f}_o , introducido por primera vez en [13].

Para $t \leq t_c$ (etapa E) la evolución del factor de escala determinada por la ecuación (2.2), utilizando la ecuación (2.10) además de los parámetros definidos arriba, es (ver apéndice C)

$$\left[\frac{\dot{R}}{\dot{R}_c} \right]^2 = 1 + 2\sigma_{m_o} \left(\frac{H_o}{H_c} \right)^2 \frac{F_o^{n+1}}{F_o - 3} \left[\frac{(R/R_c)^2}{F^n} - \epsilon^n \right], \quad (3.5)$$

como tenemos que referirnos directamente a las condiciones de unión, también en términos de estos parámetros la ecuación de la dinámica fue escrita para realizar los cálculos. Para integrarla necesitamos calcular F_o y $\frac{H_o}{H_c}$ en términos de los parámetros cosmológicos $\sigma_{m_o}, H_o, \mathbf{f}_o$ y de los parámetros ajustables de la politropa n y ϵ (ver apéndice C).

Para $t \geq t_c$, el universo está en una segunda etapa de evolución (E') en la cual la materia y la radiación gravitatoria coexisten sin interacción y es descrita por (análogo a [8], ver apéndice D).

$$\left[\frac{\dot{R}}{\dot{R}_c} \right]^2 = 1 + 2\sigma_{m_o} \epsilon^n \left(\frac{H_o}{H_c} \right)^2 \frac{F_o^{n+1}}{F_o - 3} \left[\frac{1 - 3\epsilon}{(R/R_c)} + \frac{3\epsilon}{(R/R_c)^2} - 1 \right], \quad (3.6)$$

donde

$$\left(\frac{\rho_{mc}}{\rho_m}\right)^{1/3} = \frac{R}{R_c} = \left(\frac{\rho_{rc}}{\rho_r}\right)^{1/4}. \quad (3.7)$$

ρ_{mc} , ρ_{rc} son constantes determinadas por la condición de continuidad de ρ a través de la unión. Su expresión explícita en términos de los parámetros cosmológicos utilizados se puede calcular de C.2 y C.3 con ayuda de C.4 (ver apéndice C).

4. Cálculos numéricos y análisis

Para obtener resultados numéricos se necesitan dar las condiciones iniciales de los modelos, y debido a que éstos tienen singularidades, escogimos que en $t = 0$, $R = 0$. Con esta condición inicial, la dinámica queda completamente determinada.

Como las ecuaciones a integrar (3.5) y (3.6) no se pueden poner en forma de cuadraturas, hemos empleado un método de integración numérico de Runge-Kutta de quinto orden, el cual resulta adecuado debido a la “suavidad” de las funciones a integrar.

En la figura 5 se muestran [6] modelos para diferentes valores de los parámetros cosmológicos con un único valor para el índice politrópico n y para ϵ . También se incluye para comparación un Modelo Estándar de Friedmann (MEF) de polvo descrito por

$$\left[\frac{\dot{R}}{R_o} \right]^2 = 1 + 2\sigma_{mo} \left(\frac{R_o}{R} - 1 \right). \quad (4.1)$$

$$\frac{R}{R_o} = \left(\frac{\rho_{mo}}{\rho_m} \right)^{1/3}. \quad (4.2)$$

En algunos modelos cerrados el factor de escala alcanza su máximo antes que $\rho_m = 0$, aún en este caso, es necesario parar la producción de radiación. La razón de esto es que nuestros modelos como son estrictamente fenomenológicos, las densidades dependen solamente del factor de escala, y por lo tanto, invierten sus roles después de alcanzar el punto máximo y entonces en lugar de producción de ondas gravitatorias tendríamos absorción, la cual no es permitida en ausencia de viscosidad, que es nuestro caso, como se mencionó en la sección 1 y según se demuestra en [9,19].

Nuestros modelos predicen que si σ_{mo} , H_o , $\frac{R_o}{R_c}$, n y ϵ están en los siguientes intervalos:

$$0 \leq \sigma_{m_o} \leq 1,$$

$$30 \leq H_o \leq 100 \quad (\text{km por megaparsec}),$$

$$\frac{R_o}{R_c} < 1,$$

$$-1 < n < 0,$$

$$0 < \epsilon < \frac{1}{3}, \quad (4.3)$$

obtenemos, con ayuda de C.18, que la conversión fraccional \mathbf{f}_o está en el intervalo

$$10^{-12} \leq \mathbf{f}_o \leq 10^{-8} \quad (\text{año}^{-1}),$$

que es un orden de magnitud más pequeño comparado con los resultados de [13].

La suposición $\frac{R_o}{R_c} < 1$, significa que hoy en día todavía se están produciendo ondas gravitatorias en las galaxias. En la tabla 1, ver [14], se marcan con un * los valores que no cumplen esta condición, sin embargo, se han incluido para facilitar el análisis del modelo.

El parámetro σ_{m_o} está definido en las ecuaciones (3.4) y se determina con ayuda de la constante de Hubble H_o y la densidad de materia actual, que es del orden de $\rho_{m_o} \sim 10^{-31} \text{gr/cm}^3$, ver [3].

La razón de conversión fraccional \mathbf{f}_o mide qué tanta radiación gravitatoria se está produciendo en el interior de las galaxias. Isaacson y Winicour [13] acotaron el valor de \mathbf{f}_o entre $10^{-11} \leq \mathbf{f}_o \leq 10^{-7} \text{ año}^{-1}$ como valores razonables y con los cuales obtienen consecuencias en la dinámica de su modelo. Aquí, nosotros tenemos un modelo en el que \mathbf{f}_o aún siendo un orden de magnitud menor que el acotado por ellos, se obtienen consecuencias cosmológicas notables (ver abajo).

Con los valores de los parámetros cosmológicos arriba mencionados, podemos derivar intervalos para valores de otros parámetros cosmológicos medibles hoy en día. Por ejemplo, el parámetro de la densidad de energía de radiación gravitatoria σ_{ro} y el parámetro de desaceleración q_o , definidos por:

$$\sigma_{ro} \equiv \frac{4\pi G}{3H_o^2} \rho_{ro} \quad y \quad q_o \equiv -\frac{\ddot{R}_o R_o}{\dot{R}_o^2}, \quad (4.4)$$

la ecuación C.9 evaluada hoy en día da directamente

$$\sigma_{ro} = \frac{3}{F_o - 3} \sigma_{mo} \quad (4.5)$$

y según apéndice E se tiene

$$q_o = \sigma_{mo} + 2\sigma_{ro}. \quad (4.6)$$

Esta ecuación nos dice que σ_{ro} contribuye el doble de lo que lo hace σ_{mo} . Sin embargo, observacionalmente se cree que $\sigma_{mo} \gg \sigma_{ro}$, mientras $\sigma_{mo} \sim 1$, $\sigma_{ro} \sim 10^{-4}$, ver [20]. Por pequeña que σ_{ro} sea, contribuye y en principio su existencia puede determinar la constante de curvatura κ del modelo, ver C.15. Esto es muy importante porque si determinamos valores para $\sigma_{mo} < \frac{1}{2}$ (curvatura negativa), con una pequeña contribución de σ_{ro} podríamos obtener que la densidad total, la cual determina la curvatura del espacio κ (ver ec. C.15 o C.16), $\sigma_o = \sigma_{mo} + \sigma_{ro} > \frac{1}{2}$, lo cual cambia la curvatura del espacio de abierto a cerrado.

También, podemos comparar a las cantidades evaluadas hoy en día con las evaluadas en el momento en que cesa la producción de radiación, según las fórmulas C.17 y C.18, ver tabla 1.

De la tabla 1 se puede ver que la densidad actual de radiación gravitacional σ_{ro} , para n fija, es una función creciente de \mathbf{f}_o , que es lo esperado, ya que si se está produciendo mayor cantidad de radiación hoy en día, debemos de observar más. Por otro lado, σ_{ro}

n	$\mathbf{f}_o(a\bar{n}o^{-1})$	σ_{ro}	q_o	R_o/R_c	H_o/H_c
-0.9	10E-09	4.30E-1	0.96	1.29*	3.99
-0.9	10E-10	4.36E-2	0.19	1.00*	0.99
-0.9	10E-11	4.39E-3	0.11	0.57	1.94
-0.9	10E-12	4.39E-4	0.10	0.29	3.86
-0.5	10E-09	2.47E-1	0.59	1.13*	2.03
-0.5	10E-10	2.64E-2	0.15	0.95	1.09
-0.5	10E-11	2.71E-3	0.11	0.68	1.61
-0.5	10E-12	2.72E-4	0.10	0.46	2.39
-0.1	10E-09	5.56E-2	0.21	1.01*	0.99
-0.1	10E-10	6.04E-3	0.11	0.95	1.08
-0.1	10E-11	6.13E-4	0.10	0.88	1.18
-0.1	10E-12	6.14E-5	0.10	0.82	1.29
-0.01	10E-08	5.65E-2	0.21	1.00*	0.99
-0.01	10E-09	6.20E-3	0.11	0.99	1.01
-0.01	10E-10	6.31E-4	0.10	0.99	1.02
-0.01	10E-11	6.32E-5	0.10	0.98	1.03
-0.01	10E-12	6.32E-6	0.10	0.97	1.04

Tabla 1. Los parámetros cosmológicos σ_{ro} , q_o , R_o/R_c and H_o/H_c como función de n y \mathbf{f}_o para $\epsilon = 0.1$, $\sigma_{mo} = 0.1$ y $H_o = 50$ km por megaparsec, fijos.

también se incrementa cuando $n \rightarrow -1$; el efecto de $n \rightarrow -1$ incrementa la interacción por lo que tendríamos que medir más radiación. Debido a que la radiación gravitacional

contribuye al parámetro de desaceleración (es el doble de la contribución de la materia), según ecuación (4.6), q_o se incrementa cuando \mathbf{f}_o se incrementa o cuando $n \rightarrow -1$.

En la figura 6 observamos que cuando $n \rightarrow -1$ el efecto de la interacción politrópica aumenta. Otra vez, el MEF correspondiente es incluido para comparar. Esto era de esperarse porque cuando n va de 0 a -1 el perfil de radiación, dado por ecuación (2.12), va de cóncavo a convexo, corroborando así que para $n \rightarrow -1$ la producción de radiación se incrementa (también ver figura 3).

Es importante señalar que cuando $n \rightarrow -1$, \mathbf{f}_o puede ser incluso más pequeño y aún obtenemos consecuencias cosmológicas notables en la dinámica del modelo. Esto lo podemos observar a través del comportamiento de σ_{ro} . Si este parámetro se incrementa, aumenta la “densidad de masa activa” que provoca la desaceleración en la expansión, y por lo tanto, influye en la dinámica del modelo. Ahora bien, según tabla 1 si $n = -0.01$ y $\mathbf{f}_o = 10^{-10}$ o si $n = -0.9$ y $\mathbf{f}_o = 10^{-12}$ obtenemos que $\sigma_{ro} \sim 10^{-4}$, esto es, a medida que $n \rightarrow -1$ y \mathbf{f}_o disminuye, obtenemos densidades de radiación similares.

De la tabla 1 observamos que (R_o/R_c) disminuye al disminuir \mathbf{f}_o , con n fija. Esto es explicable ya que \mathbf{f}_o mide la cantidad de producción de radiación hoy en día, entonces si este parámetro disminuye, se está convirtiendo menos masa en forma de ondas gravitatorias y tardará más tiempo en consumirse la masa. De manera análoga, notamos que nuestro modelo predice que mientras más pequeño es el parámetro actual de densidad gravitacional σ_{ro} , menor es el valor de (R_o/R_c) , es decir, mayor será el tiempo para el cual la materia y la radiación se desacoplarán. Esto último se observa del hecho de que el factor de escala es una función creciente del tiempo en la época de producción gravitatoria (ver figura 5), es decir, la interacción se da durante la expansión.

Como la producción de ondas gravitatorias se da durante la etapa de expansión y como el parámetro de la desaceleración es siempre positivo durante la expansión ($\dot{q}_o, q_c > 0$, ver

apéndice E), se sigue que $H_o > H_c$. Los valores que no están de acuerdo con la anterior desigualdad, en parte corresponden a valores $R_o > R_c$, ya eliminados con un *. En la tabla 1, hemos incluido los valores para H_o/H_c . Finalmente, un chequeo de consistencia es el siguiente: como nuestros modelos siempre tienen desaceleración positiva, R_o/R_c debería disminuir al aumentar H_o/H_c , tal como se muestra en la tabla 1.

En la tabla 1 hemos dejado fijos las variables ϵ , σ_{mo} y H_o . Si aumentamos ϵ , aumentamos la cantidad de materia que se convertirá a radiación en $t = t_c$, por lo tanto, σ_{ro} y q_o aumentarán, según ecuaciones (4.5), (4.6), C.1 y C.18, pero $\frac{R_o}{R_c}$ disminuirá. Por otro lado, si aumentamos σ_{mo} , aumentamos σ_{ro} y q_o , y $\frac{R_o}{R_c}$ permanecerá constante.

5. Algunas consideraciones termodinámicas

En esta sección analizaremos brevemente las consecuencias termodinámicas de nuestro modelo [7].

Se sabe que las ecuaciones de campo de Einstein con un término de fuente $T_{\mu\nu}$, deben de ser suplementadas con la “ecuación de estado” para el fluido. Usualmente se asume que tal fluido es isentrópico, es decir, que la entropía S es una constante a lo largo de las líneas de flujo, y que la presión del fluido obedece una ecuación de la forma $p = p(\rho)$. En nuestro modelo, nosotros proponemos dos ecuaciones de estado, una para cada fluido, a saber, ecuaciones (2.4) y (2.5), acopladas por una ecuación politrópica $p = p_m + p_r = \beta c^2 \rho^{1+\frac{1}{n}}$. Para resolver la dinámica del modelo, esta ecuación debe ser sustituida en la ecuación de conservación de energía (2.6), la cual tiene implícita la información termodinámica del modelo. Así,

$$(\rho R^3)' + 3c^{-2} p (\ln R)' R^3 = dU + p dV = T dS = 0, \quad (5.1)$$

donde V , U y T son el volumen, energía y temperatura del modelo, respectivamente. De esta manera vemos que S es constante .

La introducción de una ecuación politrópica de estado en astrofísica es empleada usualmente para representar procesos en los que el calor específico permanece constante durante el proceso, ver [4]. Así, tenemos que

$$\frac{dQ}{dT} = \text{const.} \quad (5.2)$$

En nuestro modelo, la politropa usada para representar la interacción entre materia y radiación gravitacional es supuesta ser una adiabática, es decir, una politrópica de calor específico nulo, por lo que, el exponente politrópico $\gamma = 1 + \frac{1}{n}$ está relacionado con los

calores específicos a presión constante C_p y volumen constante C_v , mediante la siguiente fórmula, ver [4]

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}. \quad (5.3)$$

Ahora, como nuestro índice politrópico n toma valores en el intervalo $-1 < n < 0$, se puede ver que γ también es negativo. En este caso, se obtienen capacidades caloríficas negativas, las cuales están en contra de la creencia común, sin embargo no son necesariamente ajenas a la física. Por el contrario, los calores específicos negativos son conocidos en astronomía [17] y como lo demostró Hawking [10] y Beckenstein [1,2] los agujeros negros también exhiben esta propiedad.

Este comportamiento singular parece ser una característica de una interacción gravitatoria. Así, algunas de sus consecuencias se derivan de la expresión politrópica, $p \sim \rho^\gamma$ con $\gamma < 0$, por lo que a medida que el universo se expande la presión de la interacción aumenta. Además, $T V^{\gamma-1} = const.$, implica que la temperatura de la interacción también se incrementa. El aumento de la temperatura debe ser atribuido a la perturbación de la métrica RW debido al comportamiento siempre creciente de las ondas gravitatorias a medida que el universo se expande. Como se dijo anteriormente, estos hechos sorprendentes están en acuerdo con las propiedades esperadas de los fenómenos gravitacionales.

Todavía, se debe distinguir entre los procesos actuales que pueden producir radiación gravitacional, como las explosiones de supernova las cuales son siempre fenómenos localizados, que contrastan con nuestro modelo esparcido donde la producción de ondas es un fenómeno no local.

6. Conclusiones

La suposición del límite de la óptica geométrica de Relatividad General ($\lambda \ll R$) para la radiación gravitatoria, permite construir un modelo cosmológico en el cual la energía del campo isotrópico de radiación puede ser representado por un fluido perfecto con ecuación de estado $p_r = \frac{1}{3}\rho_r c^2$.

La introducción de una ecuación de estado politrópica, con n positivas, en un contexto cosmológico mueve la singularidad, donde la presión y la densidad son infinitas, a $R = R_i > 0$. En nuestro caso, el intervalo de valores escogidos de n son negativos, y por lo tanto, la singularidad ocurrirá en $R = 0$. Más aún, con estos valores para el índice politrópico, obtenemos la hipótesis galáctica.

Los modelos considerados aquí están sujetos a la condición de que la densidad de materia, y también la de radiación, son siempre positivas. Esto pone una restricción en nuestros modelos: la interacción politrópica no puede continuar después que $t = t_1$, por lo que, siempre se debe tener $R < R_1 = (4\beta/\alpha)^{n/3}$ durante la etapa de producción de ondas gravitatorias.

En ausencia de viscosidad, la radiación gravitatoria no puede ser absorbida por un fluido perfecto, ver [9,19]. Respecto a esto, la ecuación politrópica puede representar de manera sencilla y aceptable modelos cosmológicos con producción de radiación gravitacional debido a la materia que ellos contienen. Por otro lado, la simplicidad de nuestros modelos tiene una desventaja seria: aún en los modelos en los que ρ_m nunca es cero, se debe suspender arbitrariamente la producción de radiación gravitacional para evitar la reabsorción.

El modelo politrópico de interacción da resultados plausibles para los parámetros cosmológicos medibles hoy en día σ_{ro}, q_o y para el parámetro estimado \mathbf{f}_o . El intervalo de

valores de los parámetros cosmológicos utilizados determinan los valores de los parámetros de desaceleración, q_o y q_c , los cuales son siempre positivos. Éstos son resultados esperados ya que la producción de radiación gravitatoria incrementa la “densidad de masa activa” la cual determina el ritmo de desaceleración (ver ecuación 4.6), de esta manera tendiendo a detener la expansión del modelo y a disminuir su edad. Por esto, en los modelos cerrados siempre tendremos que $q_c > q_o > 0$. Esto se puede corroborar en la figura 5 donde se puede ver que los modelos interactivos cerrados tienen una edad de evolución más corta que los comparados con los MEF respectivos, similar a otros resultados obtenidos por [3], [13] y [20].

Un análisis sencillo de la termodinámica implícita en el modelo, nos lleva a considerarlo como uno de entropía constante, en el cual el calor específico es nulo, y por lo tanto, obtenemos $\gamma < 0$, implicando que a medida que el universo se expande, la presión y la temperatura de la interacción politrópica se incrementan.

7. Apéndice A. Deducción de las ecuaciones (2.10), (2.11) y (2.12)

Desarrollando la ecuación de conservación de la energía (ec. 2.6), se obtiene lo siguiente:

$$3 \rho R^2 \dot{R} + R^3 \dot{\rho} + 3 c^{-2} p (\ln R) R^3 = 0, \quad (\text{A.1})$$

dividiendo entre R^3 y agrupando, tenemos que

$$\frac{\dot{\rho}}{(\rho + c^{-2} p)} = -3 (\ln R), \quad (\text{A.2})$$

sustituyendo la ecuación de la politropa (ec. 2.9) implica que

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho (1 + \beta \rho^{1/n})} = -3 (\ln R), \quad (\text{A.3})$$

o bien,

$$\int \frac{d\rho}{\rho (1 + \beta \rho^{1/n})} = -3 \int \frac{dR}{R} \quad (\text{A.4})$$

esto se integra para dar, según [18],

$$\ln (\beta + \rho^{-1/n})^n + \text{const.} = \ln R^3, \quad \Rightarrow \quad (\text{A.5})$$

$$R^3 = \frac{1}{\alpha^n} (\beta + \rho^{-1/n})^n \quad (\text{A.6})$$

con α una constante de integración. Despejando ρ obtenemos la ecuación (2.10).

Para encontrar $\rho_r = \rho_r(R)$ utilizamos la ecuación de la politropa (ec. 2.9)

$$p_m + p_r = \beta c^2 \rho^{1+\frac{1}{n}} \quad (\text{A.7})$$

sustituyendo las ecuaciones de estado (2.4) y (2.5) \Rightarrow

$$\frac{1}{3}\rho_r c^2 = \beta c^2 \rho^{1+\frac{1}{n}} \Rightarrow \quad (\text{A.8})$$

$$\rho_r = 3 \beta \rho^{1+\frac{1}{n}} \quad (\text{A.9})$$

y sustituyendo ecuación (2.10) encontramos la ecuación (2.12).

Finalmente la ecuación (2.11) se obtiene directamente de la siguiente

$$\rho_m = \rho - \rho_r. \quad (\text{A.10})$$

8. Apéndice B

La ecuación de la politropa evaluada en $t = t_c$ es

$$p_c = \beta c^2 \rho_c^{1+\frac{1}{n}} \quad (B.1)$$

sustituyendo las ecuaciones (2.4) y (2.5) \Rightarrow

$$\frac{1}{3} \rho_{rc} c^2 = \beta c^2 \rho_c^{1+\frac{1}{n}} \quad (B.2)$$

ahora utilizando la definición de β , ecuación (3.2),

$$\frac{1}{3} \rho_{rc} = \epsilon \rho_c \quad (B.3)$$

es decir

$$3\epsilon = \frac{\rho_{rc}}{\rho_{rc} + \rho_{mc}} \quad (B.4)$$

se observa que ϵ determina la cantidad de materia convertida a radiación en $t = t_c$.

Analizemos los casos límite:

$\epsilon = 1/3$ implica que $\rho_{mc} = 0$, de modo que toda la materia es convertida a radiación en t_c .

$\epsilon = 0$ implica que $\rho_{rc} = 0$, de modo que nada de materia se convierte a radiación, es decir, no hay interacción.

En todos nuestros cálculos hemos asumido que el valor de $\epsilon = 0.1$, que corresponde a una conversión de aproximadamente 43% de materia a radiación en $t = t_c$.

9. Apéndice C

Sustituyendo las definiciones de α y β en las ecuaciones (2.10), (2.11) y (2.12) se obtienen

$$\rho = \frac{\rho_c}{\epsilon^n F^n} \quad ; \quad \text{con} \quad F = \frac{1 + \epsilon}{\epsilon} \left(\frac{R}{R_c} \right)^{\frac{3}{n}} - 1, \quad (C.1)$$

$$\rho_m = \frac{(F - 3)\rho_c}{\epsilon^n F^{n+1}}, \quad (C.2)$$

$$\rho_r = \frac{3\rho_c}{\epsilon^n F^{n+1}}. \quad (C.3)$$

Para encontrar $\rho_c = \rho_c(\rho_{mo})$, evaluamos C.2 en $R = R_o$ y obtenemos

$$\rho_c = \frac{\epsilon^n F_o^{n+1}}{F_o - 3} \rho_{mo}, \quad (C.4)$$

y para encontrar $\rho_o = \rho_o(\rho_{mo})$, evaluamos C.1 en $R = R_o$

$$\rho_c = \epsilon^n F_o^n \rho_o, \quad (C.5)$$

y con la ayuda de C.4 obtenemos

$$\rho_o = \frac{F_o}{F_o - 3} \rho_{mo}, \quad (C.6)$$

es decir, hemos expresado las constantes ρ_c y ρ_o en términos de la densidad de materia ρ_{mo} medible hoy en día.

Con estas ecuaciones, evaluamos C.2 y C.3 en $R = R_c$ y dividiéndolas obtenemos

$$\frac{\rho_{rc}}{\rho_{mc}} = \frac{3\epsilon}{1 - 3\epsilon}, \quad (C.7)$$

que es consistente con lo explicado al final del apéndice B.

Ahora ya podemos calcular la densidad de materia, densidad de radiación y, por ende, la densidad total, en términos del parámetro σ_{mo} , respectivamente: con C.2 y C.4 obtenemos

$$\sigma_m = \frac{4\pi G}{3H_o^2} \rho_m = \sigma_{mo} \left(\frac{F-3}{F_o-3} \right) \left(\frac{F_o}{F} \right)^{n+1}, \quad (C.8)$$

con C.3 y C.4 obtenemos

$$\sigma_r = \frac{4\pi G}{3H_o^2} \rho_r = \frac{3\sigma_{mo}}{F_o-3} \left(\frac{F_o}{F} \right)^{n+1}, \quad (C.9)$$

$$\sigma = \frac{4\pi G}{3H_o^2} \rho = \sigma_m + \sigma_r. \quad (C.10)$$

Para integrar la ecuación de la dinámica aparte de reescribir las densidades de manera conveniente, es necesario reescribir la propia ecuación (2.2) en términos de los parámetros cosmológicos observacionales, los cuales en nuestro caso son σ_{mo} , H_o y \mathbf{f}_o , y de los parámetros ajustables de la politropa son n y ϵ .

Para convertir la ecuación (2.2) en una ecuación reescalada en $t = t_c$, primero la escribimos de la siguiente manera

$$\left[\frac{dR}{dt} \right]^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho R^2 - \kappa c^2, \quad (C.11)$$

después la dividimos entre la constante \dot{R}_c^2 para reescalar el tiempo y el factor de escala, tenemos que

$$\left[\frac{d(R/R_c)}{d(H_c t)} \right]^2 = \left[\frac{\dot{R}}{\dot{R}_c} \right]^2 = \frac{8\pi G}{3H_c^2} \rho \left[\frac{R}{R_c} \right]^2 - \frac{\kappa c^2}{(H_c R_c)^2}, \quad (C.12)$$

evaluada en $t = t_c$, $R = R_c$ implica que

$$\frac{\kappa c^2}{(H_c R_c)^2} = 2 \sigma_c - 1. \quad (C.13)$$

donde introducimos el parámetro de la densidad evaluado en $t = t_c$.

De las ecuaciones C.12 y C.13 y con la definición C.10, tenemos que

$$\left[\frac{\dot{R}}{\dot{R}_c} \right]^2 = 2\sigma \left[\frac{H_o}{H_c} \right]^2 \left[\frac{R}{R_c} \right]^2 - 2\sigma_c + 1, \quad (C.14)$$

ésta es la ecuación reescalada para la dinámica. Finalmente, con C.8, C.9 y C.4 en C.10, la ecuación C.14 se transforma en la ecuación (3.5).

Para llevar a cabo la integración de la ecuación (3.5) necesitamos calcular F_o y H_o/H_c . Para esto, necesitamos relacionar las cantidades físicas evaluadas en $t = t_o$ con aquellas en $t = t_c$. Para hacerlo, evaluemos de nuevo la ecuación C.12, pero ahora en $t = t_o$, $R = R_o$ y obtenemos

$$\frac{\kappa c^2}{(H_c R_c)^2} = 2 \sigma_o \left[\frac{R_o H_o}{R_c H_c} \right]^2 - \left[\frac{\dot{R}_o}{\dot{R}_c} \right]^2 = (2 \sigma_o - 1) \left[\frac{R_o H_o}{R_c H_c} \right]^2 \quad (C.15)$$

de nuevo introducimos el parámetro de la densidad pero ahora evaluado en $t = t_o$.

Igualando las ecuaciones C.13 y C.15, se obtiene la siguiente expresión:

$$\left[\frac{H_o R_o}{H_c R_c} \right]^2 = \frac{2\sigma_c - 1}{2\sigma_o - 1}, \quad (C.16)$$

la cual relaciona a la época presente con otras, en particular con t_c , a través del parámetro de la densidad total. Esta ecuación compara que tan cerrado o abierto es el modelo en épocas distintas. Se deduce que si el modelo es abierto o cerrado en algún instante (es decir, si $2\sigma_o - 1 > 0 < 0$), se mantendrá igual tiempo después (entonces $2\sigma_c - 1 > 0 < 0$, respectivamente), independientemente del valor de $H_o R_o / H_c R_c$. Como era de esperarse, la geometría no cambia.

De la ecuación C.16, con la ayuda de las ecuaciones C.10 y las constantes C.4 y C.6, implica que

$$\left[\frac{H_o}{H_c}\right]^2 = \left[\frac{R_c}{R_o}\right]^2 \frac{F_o(2\sigma_{mo}\epsilon^n F_o^n - 1) + 3}{F_o(2\sigma_{mo} - 1) + 3} \quad (C.17)$$

donde F_o como función de R_o/R_c es obtenida de la ecuación (C.1). Necesitamos el valor de H_o/H_c , como función de los parámetros cosmológicos usados aquí. Para encontrar el valor de R_o/R_c en términos de \mathbf{f}_o , H_o , n , y ϵ , empleamos la ecuación (3.4) junto con la ecuación C.2 y C.4, despejando obtenemos

$$\frac{R_o}{R_c} = \left[\frac{3H_o}{2\mathbf{f}_o} \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \left[1 + \frac{5\mathbf{f}_o}{3H_o} - \frac{3}{n} + \left(\left(\frac{\mathbf{f}_o}{H_o} \right)^2 - 2\frac{n+5}{n} \frac{\mathbf{f}_o}{H_o} + \frac{n^2 - 6n + 9}{n^2} \right)^{1/2} \right] \right]^{n/3}. \quad (C.18)$$

Para el intervalo de valores escogidos de los parámetros cosmológicos, siempre tenemos que $R_o < R_c$, es decir, se encuentra que la radiación gravitacional todavía se produce en el interior de las galaxias.

Esta última ecuación acompleta nuestro proposito de expresar las cantidades evaluadas en $t = t_c$, $R = R_c$ en términos de las evaluadas (y conocidas) en $t = t_o$, $R = R_o$.

10. Apéndice D. Deducción de las ecuaciones (3.6) y (3.7)

En el modelo no interactivo tanto U_r como U_m son nulas. De esta manera, la ecuación (2.7) implica

$$(\rho_r R^3)' + 3c^{-2} p_r (\ln R)' R^3 = 0. \quad (D.1)$$

sustituyendo la ecuación de estado para la radiación, ec. (2.4), tenemos

$$\frac{\dot{\rho}_r}{\rho_r} = -4(\ln R)', \quad (D.2)$$

su integración es la parte derecha de la ecuación (3.7).

Análogamente de ecuación (2.8) obtenemos

$$(\rho_m R^3)' + 3c^{-2} p_m (\ln R)' R^3 = 0 \quad (D.3)$$

y con la ecuación de estado para el polvo, ec. (2.5), se obtiene

$$(\rho_m R^3)' = 0, \quad (D.4)$$

su integración es la parte izquierda de la ecuación (3.7)

Sustituyendo σ , definida en C.10 pero ahora determinada por ecuaciones (3.7), en la ecuación de la dinámica C.14 y con ayuda de C.4 se obtiene la ecuación (3.6).

11. Apéndice E.

De las ecuaciones de campo de Einstein para nuestros modelos obtenemos la componente tiempo-tiempo

$$3\ddot{R} = -4\pi G(\rho + 3p/c^2)R, \quad (E.1)$$

y las componentes espacio-espacio implican

$$\ddot{R}R = -4\pi G(\rho - p/c^2)R^2 - 2\dot{R}^2 - 2\kappa c^2 \quad (E.2)$$

Realizando la operación $-3(E.2) + R(E.1)$ obtenemos la ecuación (2.2), mientras que la (2.3) se obtiene al despejar ρ de E.1 y sustituirla en E.2 .

Evaluando E.1 en $t = t_o$, $R = R_o$ y dividiendola entre $H_o^2 R_o$ obtenemos

$$\frac{3\ddot{R}_o}{H_o^2 R_o} = -\frac{4\pi G}{H_o^2}(\rho_o + 3p_o/c^2), \quad (E.3)$$

de donde obtenemos q_o definido en (4.4)

$$3q_o = \frac{4\pi G}{H_o^2}\rho_o + \frac{4\pi G}{H_o^2}3p_o/c^2, \quad (E.4)$$

empleando las ecuaciones (2.4) y (2.5) evaluadas en $t = t_o$, $R = R_o$ obtenemos

$$q_o = \sigma_o + \sigma_{ro}, \quad (E.5)$$

que es otra manera de escribir la ecuación (4.6). Sustituyendo C.9 y C.10 evaluadas en $t = t_o$, $R = R_o$ obtenemos

$$q_o = \left(\frac{F_o + 3}{F_o - 3} \right) \sigma_{mo}, \quad (E.6)$$

que es siempre positiva al exigir que $\rho_{mo} > 0$.

Análogamente podemos calcular q_c

$$q_c = \sigma_c + \sigma_{rc}, \quad (E.7)$$

sustituyendo C.9 y C.10 evaluadas en $t = t_c$, $R = R_c$, con ayuda de C.4 obtenemos

$$q_c = \epsilon^n(1 + 3\epsilon) \left(\frac{F_o^{n+1}}{F_o - 3} \right) \left(\frac{H_o}{H_c} \right)^2 \sigma_{mo}, \quad (E.8)$$

también es siempre positivo.

12. Referencias

- [1] Bekenstein, J.P. (1973), Phys. Rev. **D7**, 2333.
- [2] Bekenstein, J.P. (1974), Phys. Rev. **D9**, 3292.
- [3] Bertotti, B. and Cavaliere, A. (1971), Nuovo Cimento, **2B**, no.2, 223.
- [4] Chandrasekhar. Stellar Structure (1958), Dover Publications, Inc.
- [5] Chauvet, P., Cervantes-Cota, J. and Klapp, J. (1989). "Third Canadian Conference on General Relativity and Relativistic Astrophysics". Proceedings. World Scientific Publishers. B.O.J. Tupper and F. Cooperstock (Eds.)
- [6] Chauvet, P., Cervantes-Cota, J. and Klapp, J. (1990), Inter. J. Mod. Phys. **A**, enviado.
- [7] Chauvet, P., Cervantes-Cota, (1990), Inter. J. Mod. Phys. **A**, enviado.
- [8] Chernin, A.D. (1966), Soviet Astron., **9**, no.5, 871.
- [9] Hawking, S. W. (1966), Ap. J., **145**, 544.
- [10] Hawking, S. W. (1972), Commun. Math. Phys. **25**, 152.
- [11] Isaacson, R. A. (1968a), Phys. Rev. **166**, no.5, 1263.
- [12] Isaacson, R. A. (1968b), Phys. Rev. **166**, no.5,1272.
- [13] Isaacson, R. A. and Winicour, J. (1973), Ap. J. **184**, 49.
- [14] Klapp, J., Cervantes-Cota J. y Chauvet P. (1990), Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica **20** .
- [15] Lansberg, P.T. and Park, D. (1975), Proc. R. Soc. Lond. **A 346**, 485.
- [16] Lichnerowicz, A. (1955). Theories Relativistes de la Gravitation et de l'Electromagnetisme (Masson, Paris). capítulos 1, 3.
- [17] Lynden-Bell, E. y Lynden-Bell R.M. (1977), Mon. Not. R. Astrom. Soc. **181**, 405.

- [18] Stabell, R. (1968), *M. N. R. A. S.* **138**, 313.
- [19] Swinerd, G. G. (1977a), *Proc. R. Soc. Edinburgh* **77A**, 49.
- [20] Swinerd, G. G. (1977b), *Gen. Rel. Grav.* **8**, no.6, 379.

FIGURAS

Figura 1: La materia (línea segmentada) y la radiación gravitatoria como funciones del factor de escala, para $n = 3$ y $\epsilon = 0.1$. R^* es una constante arbitraria de escalamiento. Las densidades están dadas en unidades de $\rho^* \equiv \rho(R^*)$.

Figura 2: La materia (línea segmentada) y la radiación gravitatoria como funciones del factor de escala, para $n = -0.5$ y $\epsilon = 0.1$. Las densidades están dadas en unidades de la constante ρ_c , adelante definida.

Figura 3: La radiación gravitatoria como función del factor de escala, para $n = -0.9$, y para $n = -0.3$ con $\epsilon = 0.1$. Las densidades están dadas en unidades de ρ_c .

Figura 5: El factor de escala como función del tiempo para $n = -0.5$ y $\epsilon = 0.1$, $H_o = 40$ km por megaparsec, $\mathbf{f}_o = 10^{-10}$ año $^{-1}$, con $\sigma_{mo} = 0.1$ (espacio abierto) y con $\sigma_{mo} = 1$ (espacio cerrado). Para comparar se incluyen los correspondientes modelos de polvo no-interactivos (líneas segmentadas).

Figura 6: El factor de escala como función del tiempo para $n = -0.5$ y para $n = -0.1$ con $\epsilon = 0.1$, $H_o = 40$ km por megaparsec, $\mathbf{f}_o = 10^{-10}$ año $^{-1}$, y $\sigma_{mo} = 1$. Para comparar se incluye el correspondiente modelo de polvo no-interactivo.

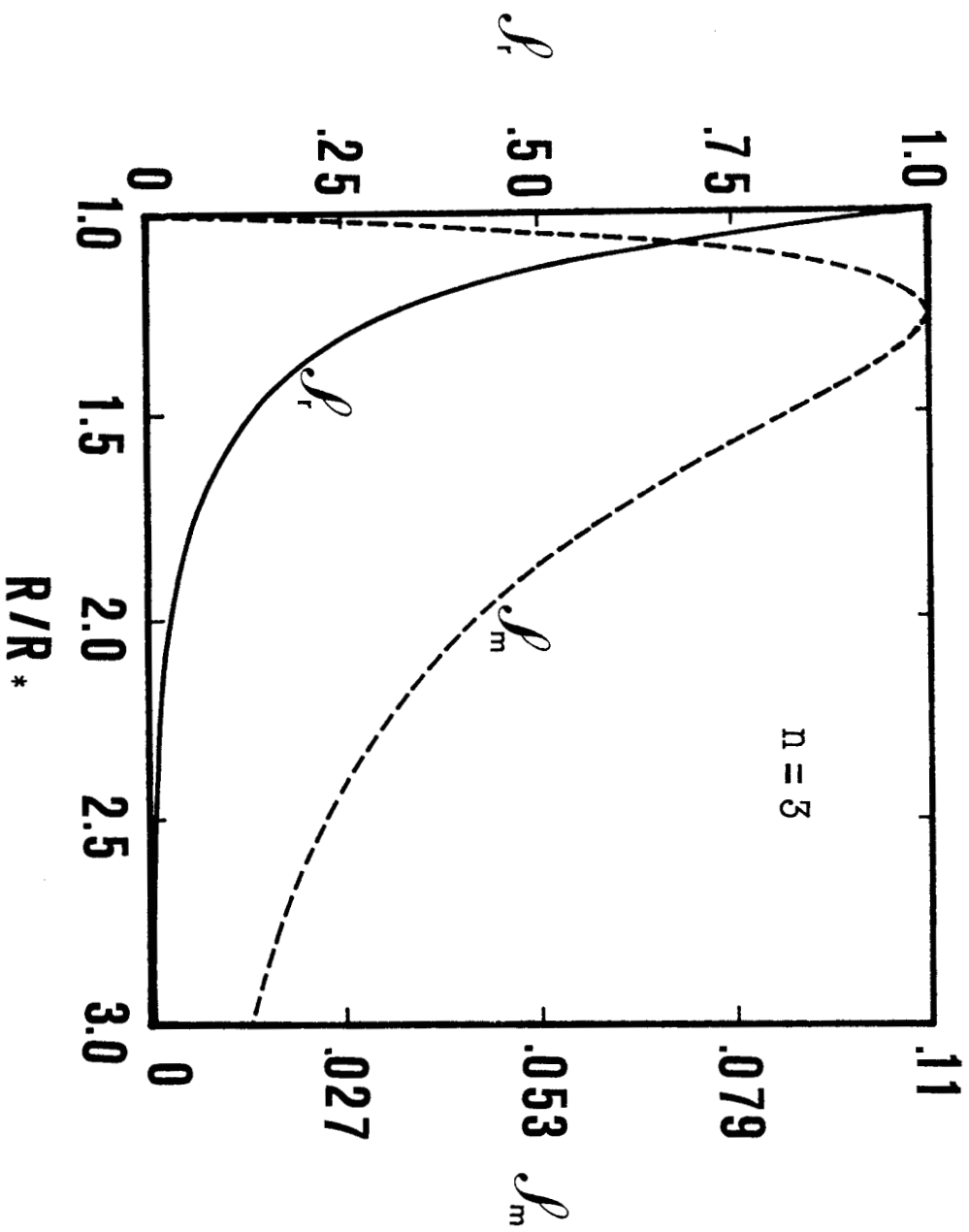
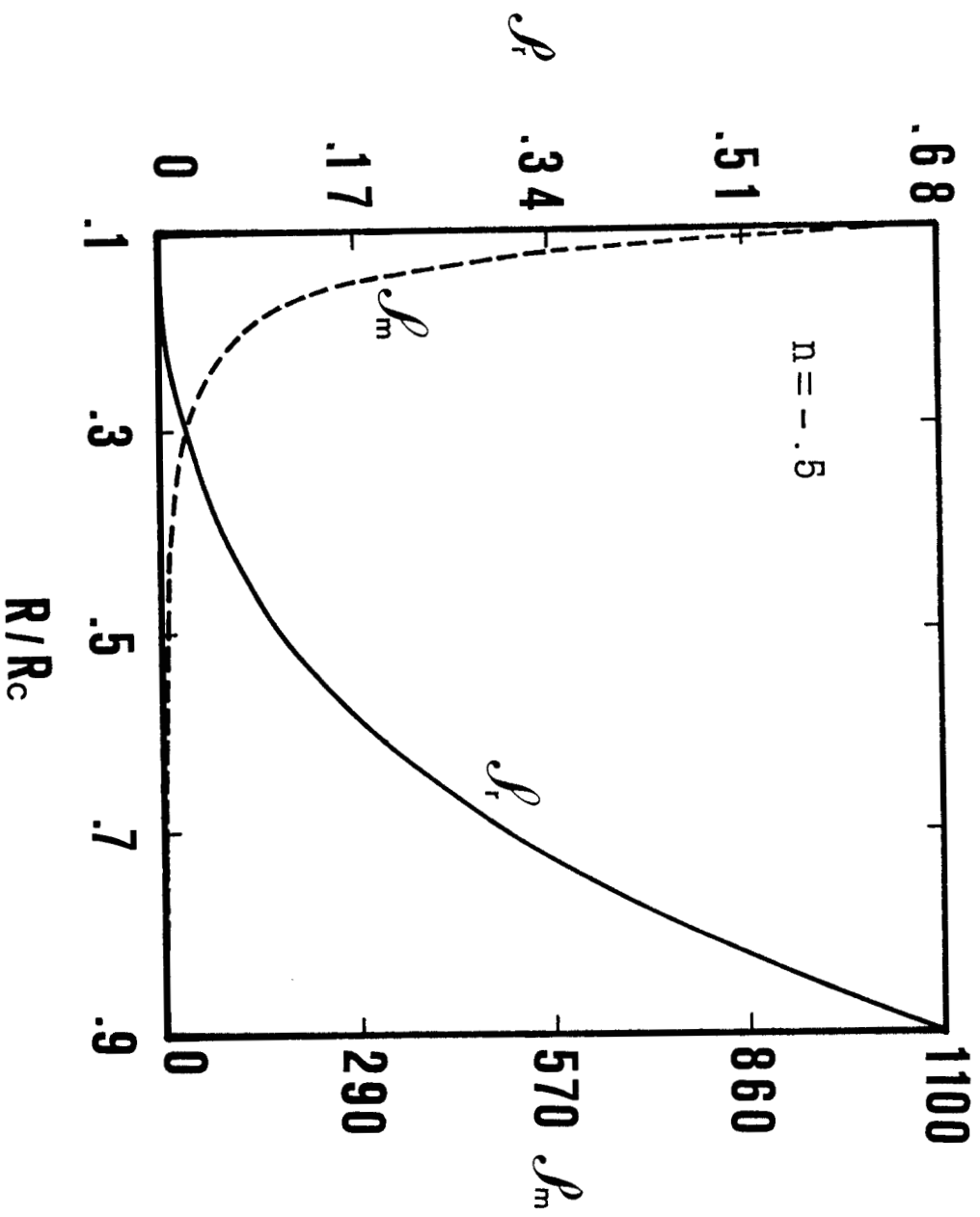


FIG. 4



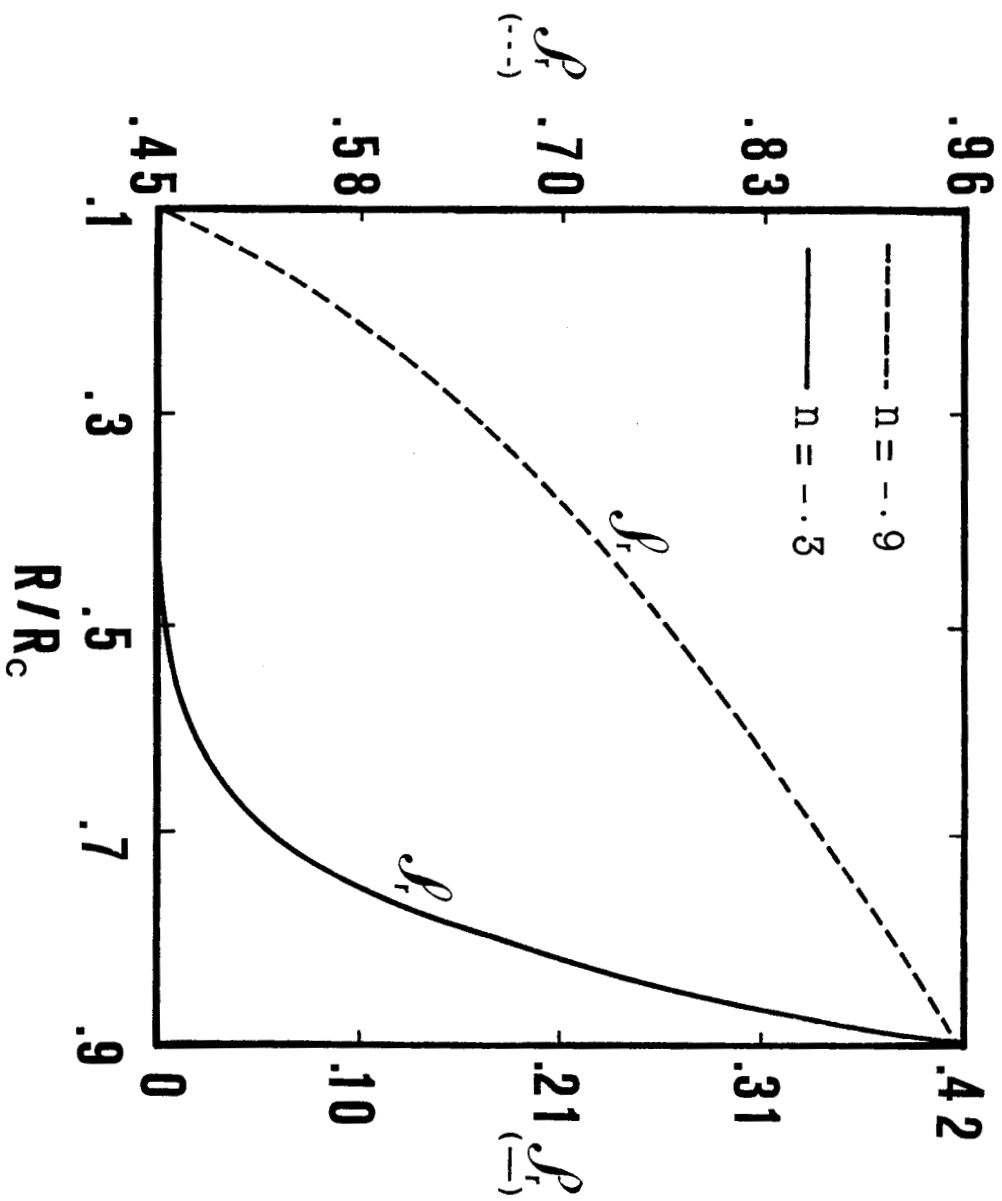


FIG. 3

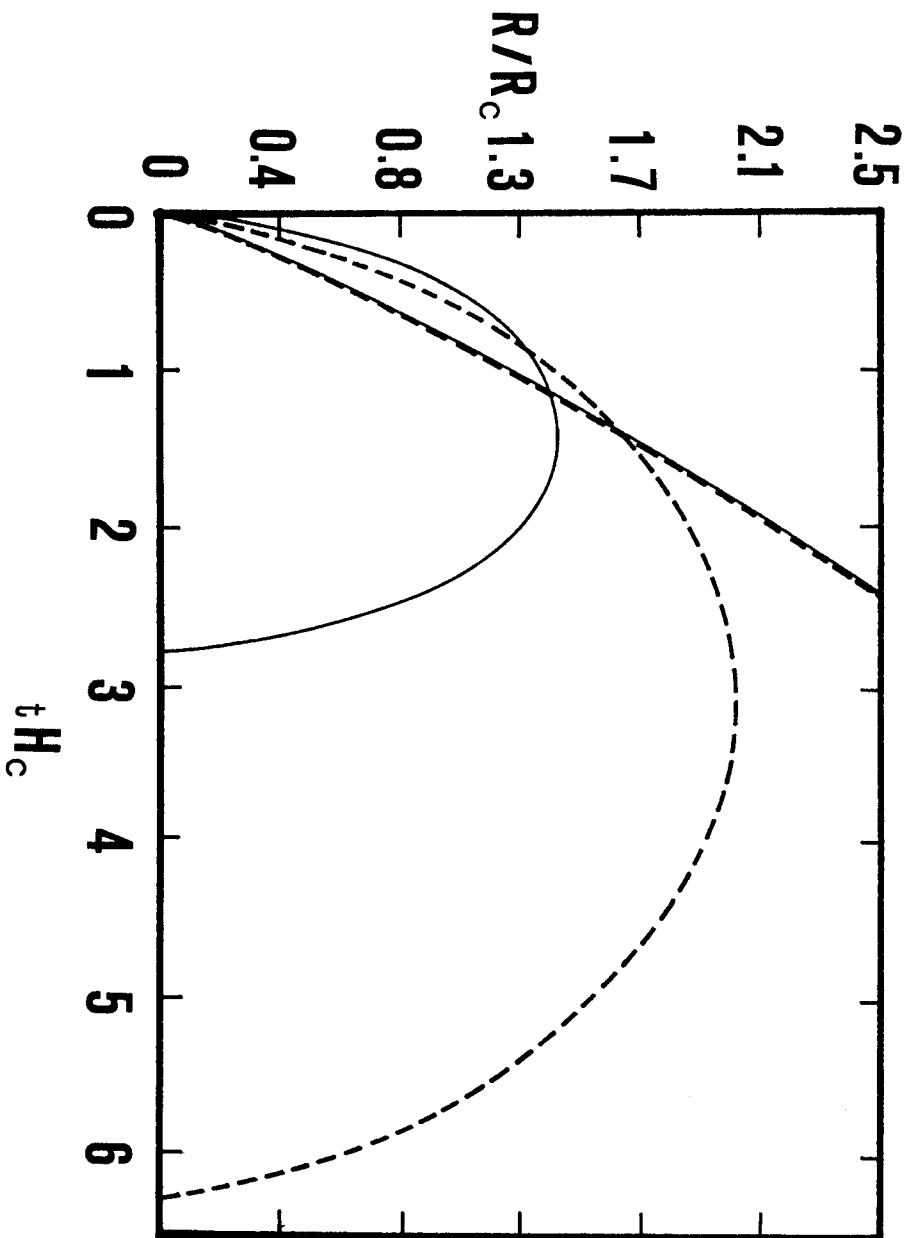


FIG. 5

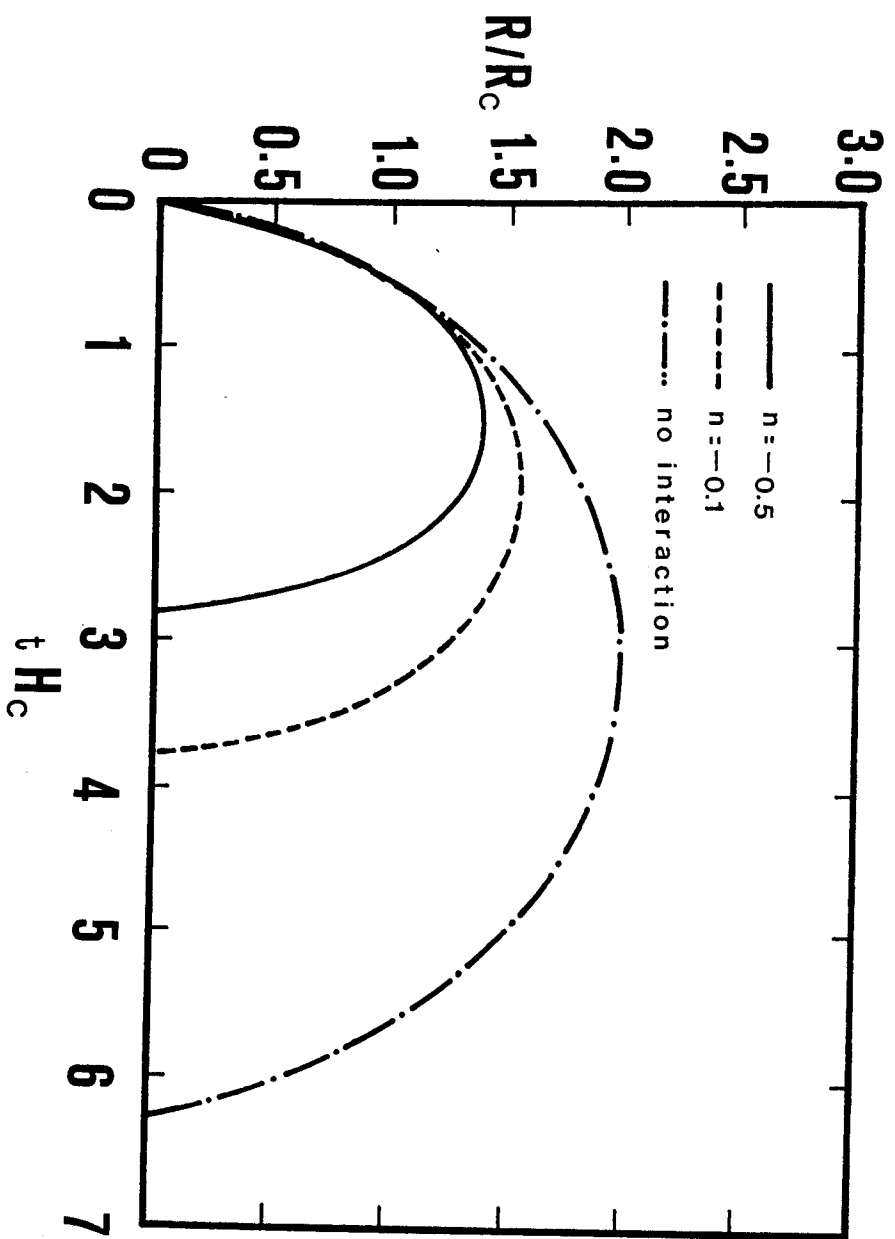


FIG. 6