

Universidad Autónoma Metropolitana

Unidad Iztapalapa

División Ciencias Básicas e Ingeniería

Maestría en Ciencias

Análisis de Velocidad de Fase y Atenuación Ultrasónica en Hueso Trabecular

Fis. Alejandro Villarreal López

Asesores: Dra. Lucía Medina Gómez
Dr. Joaquín Azpiroz Leehan

Sinodales:
Ing. Dipl. Enrique Luis Hernández Matos
Dr. Michel Picquart

Fecha:15/02/11



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00060

Matrícula: 208180262

ANÁLISIS DE VELOCIDAD DE
FASE Y ATENUACIÓN
ULTRASONICA EN HUESO
TRABECULAR

En México, D.F., se presentaron a las 11:00 horas del día 14 del mes de abril del año 2011 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. MICHEL PICQUART
DRA. LUCIA MEDINA GOMEZ
DIPL. ING. ENRIQUE LUIS HERNANDEZ MATOS



ALEJANDRO VILLARREAL LOPEZ
ALUMNO

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (INGENIERIA BIOMEDICA)
DE: ALEJANDRO VILLARREAL LOPEZ

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

APROBAR

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

REVISÓ

LIC. JULIO CESAR DE LARA ISASSI
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JOSÉ ANTONIO DE LOS REYES
HEREDIA

PRESIDENTE

DR. MICHEL PICQUART

VOCAL

DRA. LUCIA MEDINA GOMEZ

SECRETARIO

DIPL. ING. ENRIQUE LUIS HERNANDEZ
MATOS

Índice general

Introducción	XI
1. Conceptos Básicos	1
1.1. Medios elásticos	2
1.2. Velocidad de onda	5
1.3. Medio Infinito	7
1.3.1. Ecuación de onda en medios elásticos	8
1.3.2. Solución general de las ecuaciones de Helmholtz	9
1.4. Materiales Heterogéneos	11
1.5. Fenómenos acústicos	12
1.5.1. Resonancia	13
1.5.2. Absorción	13
1.5.3. Reflexión	13
1.5.4. Difracción	14
1.5.5. Refracción	14
1.5.6. Transmisión	14
1.5.7. Dispersión	14
2. Modelos de Dispersión múltiple	16
2.1. Teoría de Biot	17
2.2. Teoría de Foldy	20

2.3. Modelo propuesto por Waterman y Truell en coordenadas cilíndricas	23
2.4. Modelo Auto-consistente propuesto por Sabina y Willis	25
2.5. Modelo Dinámico Generalizado Auto-consistente (MDGAC)	27
3. Métodos de homogenización aplicados a hueso trabecular	37
3.1. Hueso trabecular	37
3.2. Hueso como un medio bifásico	39
3.3. Implementación del modelo	39
3.4. Modelo para un medio fluido en coordenadas Cilíndricas	42
3.4.1. Enfoque de alta atenuación en uno de los sólidos [22]	43
3.4.2. Enfoque de condiciones de frontera fluido-sólido	45
3.5. Validación del modelo para dispersores cilíndricos	51
3.6. Análisis del tamaño del dispersor	56
4. Discusión y Conclusiones	60
Bibliografía	66
A. Coordenadas Esféricas	73
B. Modelo propuesto por Waterman y Truell en coordenadas esféricas	77
C. Modelo Dinámico Generalizado Auto-consistente	79
D. Modelo Auto-Consistente propuesto por Sabina y Willis en coordenadas esfericas	88
E. Resultados para dispersores esféricos	89

Índice de figuras

1.	Micro-estructura de hueso trabecular	XIII
2.	Imagen de rayos X de cadera con osteoporosis [2]	XV
3.	Índice Singh[1]	XVI
1.1.	Estructura de un material en dos dimensiones vista como puntos unidos por resortes	3
1.2.	Movimiento longitudinal y transversal, la flecha indica la dirección de propa- gación de la onda	3
1.3.	Desplazamiento en un medio sólido	3
1.4.	Velocidad de fase de una onda	6
1.5.	Conversión de onda longitudinal a transversal al cambiar de medio	11
2.1.	Modelo de Waterman y Truell	24
2.2.	Modelo Dinámico Generalizado Auto-consistente	28
2.3.	Ondas incidentes y dispersadas por un único dispersor	29
3.1.	Composición del hueso: Hueso trabecular y cortical	38
3.2.	Phantom de hueso trabecular propuesto por Wear [57]	39
3.3.	Velocidad de fase vs frecuencia considerando los parámetros reológicos de la Tabla 3.1. Se consideran dispersores cilíndricos con una concentración de 7.9% y diámetro $a = 254\mu m$	44
3.4.	Atenuación vs frecuencia con las propiedades reológicas de la Tabla 3.1	45

3.5. Velocidad de fase vs frecuencia bajo condiciones de frontera de un fluido con dispersores cilíndricos[32]	46
3.6. Atenuación vs frecuencia con las condiciones de frontera de un fluido	48
3.7. Velocidad de fase vs concentraciones que van desde el 2 hasta el 90% a una frecuencia fija de 500 <i>KHz</i>	48
3.8. Velocidad de fase vs diámetro del dispersor, éste ultimo en el rango de 150 a 300 μm	49
3.9. Atenuación para diferentes concentraciones de dispersores de 2 hasta el 80% a una frecuencia fija de 500 <i>KHz</i>	50
3.10. Atenuación vs diámetro del dispersor con rango de 150 a 300 μm	51
3.11. Velocidad de fase para dispersores cilíndricos con una concentración de 7.9% y un diámetro $a = 254 \mu m$	52
3.12. Velocidad de fase vs diámetro del dispersor desde 150 a 300 μm	53
3.13. Velocidad de fase vs concentración a una frecuencia fija de 500 <i>KHz</i>	53
3.14. Atenuación vs Frecuencia para phantom de hueso trabecular	54
3.15. Atenuación vs concentración para phantom de hueso trabecular	55
3.16. Atenuación vs diametro del dispersor para phantom de hueso trabecular	55
3.17. Velocidad de fase de los tres modelos contra d/λ	56
3.18. Velocidad de fase contra frecuencia para el MDGAC	57
3.19. Velocidad de fase para el MDGAC para diferentes diámetros de dispersor	58
3.20. Velocidad de fase para el MDGAC para diferentes diámetros de matriz	58
E.1. Velocidad de fase vs frecuencia usando las condiciones de frontera de un fluido y los datos de la Tabla 3.1 para dispersores esféricos	90
E.2. Velocidad de fase vs diámetro del dispersor con rango de 150 a 300 μm	90
E.3. Velocidad de fase vs concentraciones que van desde el 2 hasta el 12% a una frecuencia fija de 500 <i>KHz</i>	91

Indice de Tablas

1.	Porcentaje de hueso cortical y trabecular en el esqueleto	XIII
2.	Índice de Singh[1]	XVI
3.1.	Parámetros reológicos para hueso, la velocidad V_0 y atenuación α_x fueron obtenidos por Dussik[13]y Njeh[37]	44
3.2.	Valores utilizados para simular la velocidad en el Phantom de Wear	52

Resumen

En la actualidad la Osteoporosis es una enfermedad común entre la población de edad avanzada, por esta razón su temprano diagnóstico permite un adecuado tratamiento para minimizar las consecuencias que pueda tener a largo plazo, como son las fracturas de cadera.

El método mas común utilizado es la absorciometría dual de rayos X, el cual es un método ionizante. Existen propuestas de uso de radiación no ionizante y no invasiva como es el caso de energía ultrasónica, que permite obtener información sobre la microestructura del medio de propagación. Para ello se aborda el efecto de la dispersión de las ondas ultrasonicas cuando se transmiten a través de los materiales, para establecer métodos y técnicas que permiten la caracterización de sus parámetros microestructurales tales como: la matriz compuesta por médula ósea, el tamaño y concentración de las trabeculas, entre otros.

Para analizar la interacción entre un medio heterogéneo y el ultrasonido se presentan varios modelos que son capaces de predecir la dependencia de la velocidad y atenuación con la frecuencia del pulso ultrasónico cuando este ultimo viaja a través de un material bifásico a distintas concentraciones de dispersores.

La validación experimental de los modelos se realizo utilizando datos publicados por otros autores, considerando varias frecuencias ultrasónicas, concentraciones y tamaños de dispersores.

Nomenclatura

α	Atenuación
η	Viscosidad del fluido
γ_{ik}	Tensor de deformación
κ	Permeabilidad
λ	Longitud de onda
λ_l	Primer coeficiente de Lamé
$\langle \sigma \rangle$	Tensor de esfuerzo
$\langle e \rangle$	Tensor de deformación
μ	Módulo transversal
ω	Frecuencia Angular
Φ	Potencial escalar
Ψ	Potencial vectorial
ρ	Densidad del medio
\vec{r}	Radio vector
\vec{u}	Vector de desplazamiento

$f(0)$	Campo dispersado hacia adelante
$f(\pi)$	Campo dispersado hacia atras
$H_n^1(z)$	Función de Hankel de primera especie de orden n
$H_n^2(z)$	Función de Hankel de segunda especie de orden n
h_m^1	Función esferica de Hankel de primer tipo de orden m
h_m^2	Función esferica de Hankel de segundo tipo de orden m
$J_n(z)$	Función de Bessel de primera especie de orden n
$j_m(z)$	Función esferica de Bessel de primer tipo de orden m
$KV_{s,m,f}$	Modulo volumetrico del solido, la matriz o el fluido
$N_n(z)$	Función de Bessel de segunda especie de orden n
$n_m(z)$	Función de Bessel de segundo tipo de orden m
v_f	Velocidad de fase
v_g	Velocidad de grupo
v_p	Velocidad de las partículas
v_l	Velocidad longitudinal de la onda
v_t	Velocidad transversal de la onda
a	Radio del dispersor
b	Radio de la Matriz
c	Concentración de los dispersores
G	Coefficiente de dispersión

K	Número de onda transversal
k	Número de onda longitudinal
L	Modulo elástico
P	Presión Acústica
p	Momento
Z	Impedancia acústica

Agradecimientos

Agradezco al Concejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico recibido durante el año 2009, así como a la Dirección General de Asuntos del Personal Académico de la Universidad Nacional Autónoma de México a través del Proyecto IN107207.

A la Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa por darme la oportunidad de continuar mi desarrollo y a la Universidad Nacional Autónoma de México por ser la institución que me permitió realizar este proyecto.

A mi familia por estar siempre a mi lado y por contar siempre con su apoyo.

Mi más sincero agradecimiento a mi directora de tesis Dra. Lucía Medina Gómez por la paciencia y apoyo brindados desde siempre y sobre todo por esa gran amistad que me brindó y me brinda, por escucharme y aconsejarme siempre.

Un agradecimiento especial al Dr. Miguel Angel Molero Armenta por la colaboración brindada durante toda la tesis y sobre todo en ésta última etapa.

A las personas que dedicaron su tiempo a revisar esta tesis.

En general quisiera agradecer a todas y cada una de las personas que han vivido conmigo la realización de esta tesis de maestría, con sus altos y bajos y que no necesito nombrar porque tanto ellas como yo sabemos que desde los más profundo de mi corazón les agradezco el haberme brindado todo el apoyo, colaboración, ánimo y sobre todo cariño y amistad.

Introducción

En este capítulo planteamos la problemática de la osteoporosis, además de las diversas técnicas existentes hoy en día para su diagnóstico, incluyendo los parámetros establecidos actualmente para diagnosticar esta enfermedad.

Osteoporosis

Clásicamente se define a la osteoporosis como una enfermedad ósea sistémica caracterizada por una menor cantidad de masa ósea, lo que causa un compromiso en la resistencia del hueso, es decir, un deterioro de la micro-arquitectura del tejido óseo, este deterioro consistente en trabéculas óseas más delgadas y con discontinuidades en su extensión, lo que condiciona una mayor fragilidad del hueso y aumenta la predisposición a fracturas [58].

Aún cuando existen diversos tipos de osteoporosis (diferenciados por sus aspectos epidemiológicos, fisiopatológicos, terapéuticos, etc.) éstos pueden superponerse en un mismo sistema, conduciendo indefectiblemente a una misma alteración sistémica. La osteoporosis posmenopáusicas es la afección más frecuente y se presenta comunmente entre los 45 y los 75 años como consecuencia del hipoestrogenismo [6, 17, 10], aumentando la incidencia en personas con factores de riesgo asociados (fumadoras, antecedentes de fracturas, etc.) [47]. Las fracturas por osteoporosis más comunes son las que involucran al hueso trabecular, como es el de la columna vertebral y, en menor grado, el radio distal y el fémur proximal, siendo la fractura de este último la más seria. En la actualidad el estándar de oro para la medición de la densidad mineral ósea es

la absorciometría dual de rayos X (DEXA) la cual se explicará mas adelante. De acuerdo con la Organización Mundial de la Salud, el diagnóstico de osteoporosis se realiza cuando existe una densidad mineral ósea menor a 2.5 desviaciones estándar (DE) por debajo del valor medio del pico de masa ósea en personas sanas jóvenes. En México se reporta una prevalencia de osteoporosis de 16 %, así como de 57 % en lo referente a osteopenia (disminución de la cantidad de hueso) [35]. Debido a que la osteoporosis no presenta síntomas visibles (excepto una fractura, cuando el hueso ya está sumamente debilitado) es necesario poder diagnosticarla antes de que ocurra esta, por esto se han desarrollado varios métodos asertivos, en general no invasivos, para valorar la cantidad de la masa ósea.

La estructura del hueso

Los materiales biológicos son estructuras complejas, el hueso en particular es una estructura fibrosa compuesta fundamentalmente de sales de calcio y fosfato depositadas en una matriz de fibras de colágeno. Los primeros le otorgan al hueso su dureza, mientras las fibras protéicas le dan al hueso su flexibilidad relativa. El hueso tiene como componente principal en su estructura una parte mineral (65 %), seguido de una matriz orgánica (33 %), y finalmente, una fracción celular (2 %). Los huesos se clasifican en dos clases, hueso trabecular y hueso compacto (ver Tabla 1), el hueso trabecular (huesos cortos y vértebras) consta de una malla de pequeñas espículas entre las cuales hay cavidades con médula ósea y el hueso compacto (hueso largo) aparece como una masa sólida y continua cuya matriz ósea mineralizada está depositada en laminillas (ver Figura 1).

Los diferentes huesos del esqueleto presentan los dos tipos de hueso en diferentes proporciones como lo muestra la Tabla 1

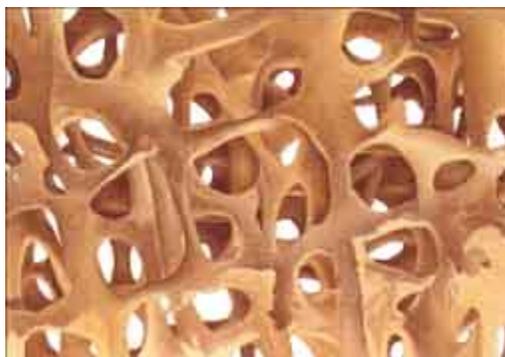


Figura 1: Micro-estructura de hueso trabecular
en los espacios observados se encuentra la médula ósea

Proporción relativa de hueso cortical (compacto) y trabecular (esponjoso) en diferentes zonas del esqueleto		
Sitio del esqueleto	Hueso compacto	Hueso trabecular
Calcáneo	< 25%	> 75%
Vértebra (T10-L1)	< 25%	> 75%
Vértebra (L2-L5)	< 34%	> 66%
Fémur proximal		
Intertrocánter	50%	50%
Cuello	75%	25%
Radio distal	75%	25%
Radio proximal	> 95%	< 5%

Tabla 1: Porcentaje de hueso cortical y trabecular en el esqueleto

Resistencia ósea

La resistencia de un material está normalmente determinada por sus características intrínsecas, en el caso del hueso estas son: [38]:

1. Propiedades estructurales; tamaño, forma y la microarquitectura cortical y trabecular del hueso
2. El entramado de conexiones que lo conforman.
3. Morfología.
4. El grosor de las trabéculas y su conectividad
5. La porosidad.
6. El grado de acumulación de microgrietas.

También influyen las propiedades materiales del hueso, es decir, su composición mineral y el colágeno; la combinación equilibrada de todos los componentes determinan la resistencia ósea.

Valoración de la osteoporosis

El diagnóstico temprano de la osteopenia o de la osteoporosis en etapas iniciales es de gran importancia debido a que permite iniciar medidas para detener la pérdida de masa ósea. Los métodos para detección de la osteoporosis mas comunmente utilizadas para realizar el diagnóstico son:

Radiografías

Las radiografías simples de hueso trabecular muestran un patrón definido, la osteoporosis produce cambios característicos en este patrón y diferencias distintivas en la apariencia de un hueso sano y un hueso osteoporótico como se ve en la Figura 2. Para subrayar la utilidad de ésta técnica para evaluar la osteoporosis, el sistema de clasificación de Índice Singh fue ideado



Figura 2: Imagen de rayos X de cadera con osteoporosis [2]

en la década de 1960 mediante el uso de radiografías del fémur proximal [48]. El índice de Singh evalúa la presencia y continuidad de las trabéculas compresivas y tensiles de la cadera, tiene una sensibilidad de 35% y una especificidad de 90%. Singh clasificó por siete grados descendentes la desaparición de las trabéculas, comenzando con grado VII, presentando este una imagen radiológica normal, la Figura 3 y la Tabla 2 muestra esquemáticamente como se verían las radiografías. Esta técnica ya se encuentra en desuso en los Estados Unidos debido a que las radiografías tradicionales no son adecuadas para el diagnóstico de la osteoporosis, por que se debe tener una pérdida de entre el 30 % y el 50 % de la cantidad total del hueso para tener imágenes “sospechosas”, las cuales se modifican, a su vez, de acuerdo con la calidad del método, sin embargo en México todavía es común su uso. Recientemente, Hernández et al. [24], reportaron la presencia de anomalías en las vértebras sugestivas de osteoporosis en solamente el 20 % de 3 500 casos potenciales, mediante el estudio de rayos X de tórax laterales. Wagner et al. [54], publicaron sus observaciones con respecto a la precisión diagnóstica de la radiografía digital en la medición de la osteopenia/osteoporosis, ellos mostraron que no supera significativamente a la radiografía convencional.

La absorciometría dual de rayos X (DEXA)

El estudio clínico de la densidad mineral ósea (DMO) se realiza en la actualidad fundamentalmente con el método de absorciometría dual de rayos X (DEXA), esta técnica DEXA se emplea principalmente para hacer evaluaciones de la columna lumbar y el fémur proximal. La técnica de absorciometría dual de rayos X consiste en pasar dos haces de rayos X a través del objeto de estudio midiendo la cantidad de rayos X absorbidos por el tejido. Uno de los haces es de

Índice de Singh					
Grado Singh	Adelgazamiento de la cortical	Trabéculas secundarias tensiles	Trabéculas secundarias compresivas	Trabéculas primarias tensiles	Trabéculas primarias compresivas
VII	0	Normales	Normales	Oscurecidas	Oscurecidas
VI	0	Normales	Normales	Perceptibles	Perceptibles
V	0	Normales	Discontinuas	Acentuadas	Acentuadas
IV	+	Ausentes o Discontinuas	Ausentes	Intactas	Intactas
III	+	Ausentes	Ausentes	Interrumpidas cerca del trocante mayor	Intactas
II	+	Ausentes	Ausentes	Pérdida en el cuello femoral superior	Intactas
I	+	Ausentes	Ausentes	Ausentes	Disminuidas

Tabla 2: Índice de Singh[1]

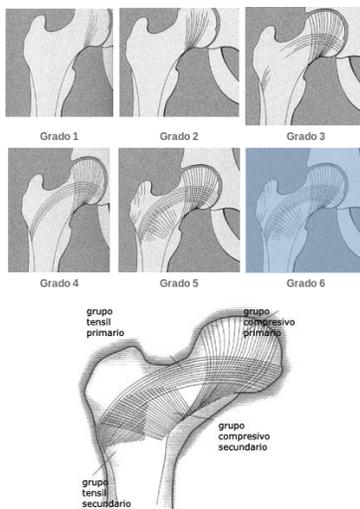


Figura 3: Índice Singh[1]

alta intensidad y el otro es de baja intensidad, por lo que la absorción relativa es un indicador de la densidad del tejido por el que han pasado los haces. Cuanto mayor sea la densidad de los tejidos, mayor es la reducción de la intensidad de los rayos X. El DEXA reúne en un solo estudio las ventajas de precisión, resolución espacial, tiempo de adquisición de las diferentes regiones, reproducibilidad y baja exposición a la radiación (10 mrem).

La unidad de medida de la DMO es gramos de contenido mineral óseo (hidroxiapatita de calcio), por área en cm^2 , los cuales se convierten a un T-Score, el T-score es una comparación de la DMO del paciente con el de una persona sana de 30 años del mismo sexo y etnia. Ese valor es usado en hombres y mujeres postmenopáusicas de más de 50 años, ya que hace mejor predicción del riesgo de futuras. La DMO de un hueso se considera normal cuando tiene un valor comprendido entre -1 y $+1$ desviaciones estándar (DE) con respecto a la media de un adulto joven. En la práctica clínica, la DMO de la columna vertebral y del fémur es muy útil para predecir las fracturas vertebrales y para realizar seguimientos de tratamientos [20]. Recientemente se han introducido nuevos equipos que permiten realizar los estudios en tiempos menores, disminuir la dosis de exposición, digitalizar las imágenes y realizar valoraciones vertebrales laterales en casos de presencia de muchos artefactos en la columna, lo cual minimiza los errores de la DMO convencional antero-posterior. Por otro lado, sabemos que la DMO por sí sola no es suficiente para evaluar el riesgo de fractura y la eficacia del tratamiento, debido a que algunas personas al caerse pueden fracturarse y otras no, aun con niveles de DEXA similares. Por esta razón es necesario tener una mayor comprensión de los factores que dan la fuerza al hueso, por consiguiente, las nuevas tecnologías intentan determinar las propiedades estructurales del hueso, tales como su geometría (tamaño y forma), y microarquitectura (grosor de las trabéculas, conectividad, espesor cortical y porosidad), para asociarlo al grado de DEXA y establecer un riesgo de fractura más preciso [16].

Tomografía computarizada cuantitativa (TCC)

Es otro método para evaluar la DMO, la TCC se basa en la absorción diferencial de la radiación ionizante por el tejido calcificado, es decir, utiliza el mismo principio que DEXA. Los equipos utilizados son scanners normales y las mediciones de atenuación obtenidas se comparan con un patrón de referencia obtenido de sujetos sanos para calcular el equivalente mineral ósea. A diferencia de otras técnicas, esta permite calcular directamente la DMO en 3 dimensiones. La TCC es la única técnica que puede distinguir entre hueso cortical y trabecular, su precisión para detectar osteoporosis es similar a la DEXA, aunque tiene las ventajas de la evaluación volumétrica, además tiene una mayor exactitud para el seguimiento de los resultados de la terapia [28]. Las desventajas radican en que la comparación entre las mediciones y el patrón para predecir el riesgo de fractura no han sido validadas, además que produce mayor exposición a la radiación que la DEXA [29] y tiene mayor costo.

La biopsia ósea

Por el momento es el único método para medir en forma confiable y sin ninguna ambigüedad los parámetros de calidad ósea, el inconveniente del método es que es invasivo, para efectuar la evaluación es necesario obtener una muestra del hueso en estudio para su posterior análisis mediante un microscopio; por esta razón en la actualidad se está progresando en el desarrollo de equipos para hacerlo en forma no invasiva. La biopsia ósea puede ser útil para estudiar la arquitectura ósea y valorar la disminución en la interconexión trabecular o para evaluar el efecto de un tratamiento. La biopsia es una técnica principalmente empleada en investigación, debido a su connotación invasiva, a diferencia de los otros métodos mencionados [5, 7].

El ultrasonido

En años recientes se han desarrollado muchas técnicas para el estudio de materiales dispersivos, ejemplo de estas técnicas son las evaluaciones no destructivas por ultrasonido (END-U); el procedimiento de estas evaluaciones consiste en la incidencia de energía al material y la medición de la respuesta correspondiente. Las END-U se basan en la comprensión de los fenómenos de propagación de las ondas en materiales dispersivos ó compuestos, la interpretación de los datos de las pruebas es en general un problema inverso de propagación de ondas, es decir, se obtiene la velocidad y atenuación de la onda después de su paso por el material y se debe deducir las interacciones que provocaron esta determinada respuesta. Es por esto que para una mejor comprensión de las END-U se debe desarrollar el modelado y simulación de los fenómenos de ondas en materiales compuestos. Los fenómenos de dispersión de una onda en materiales heterogéneos implica tanto dispersión simple como múltiple de ondas elásticas; en general, la dispersión de una onda se refiere al fenómeno en el que la onda cambia su dirección de propagación o se divide en varias ondas al encontrar un límite físico, este límite puede ser una falla a lo largo de su camino de propagación; la falla en este caso puede recibir el nombre de dispersor. El término dispersión individual y dispersión múltiple se utiliza para distinguir los fenómenos relacionados con un número diferente de dispersores. Esta tesis se enfocara en los fenómenos de dispersión múltiple en materiales dispersivos; se supondrá que los problemas de dispersión con un único dispersor ya han sido resueltos.

El diagnóstico por Ultrasonido consiste en pasar una onda de ultrasonido a una frecuencia entre 200 y 1000 KHz por la región en estudio. Para ello, se emplea un transductor emisor-receptor a cada lado del hueso a estudiar. En su paso por el hueso, la onda experimenta cambios en la velocidad y atenuación que están en relación con la densidad del hueso; de esta manera, la dureza del tejido óseo cuantificada por el ultrasonido, tiene como parámetros de referencia la atenuación de la onda de ultrasonido (BUA) la cual mide la absorción de la energía del sonido a través del hueso expresado en dB/MHz , la información arrojada aporta datos sobre la densidad ósea, la cantidad, estructura y orientación de las trabéculas, por lo que se podría definir como

una medición indirecta de la calidad ósea. La velocidad de transmisión del sonido (SOS) es la velocidad con que atraviesa la onda ultrasónica el hueso, y podría definirse como una medición indirecta de la densidad ósea, esta velocidad se encuentra expresada en m/s [42]. Su resultado depende del módulo de Young o de elasticidad y de la densidad ósea. Es así como se combina la densidad ósea, con la organización del tejido, en términos estructurales, para dar como resultado las características del hueso en cuanto a fragilidad, dureza y elasticidad.

Se ha observado que el análisis de la atenuación ósea del ultrasonido predice las fracturas osteoporóticas y demuestra la respuesta a la terapia mejor que otras técnicas, sin embargo, todavía no iguala la capacidad de la DEXA. Para la determinación de la DMO comúnmente se realiza la medición ultrasonica en el hueso calcáneo, éste refleja uniformemente la influencia de la actividad física, además de ser un hueso fundamentalmente de tipo trabecular [42].

El ultrasonido ha despertado gran interés por su bajo costo, calidad no invasiva, ausencia de radiación ionizante y portabilidad, sin embargo, la principal desventaja es que no permite el estudio de las partes que se afectan con más frecuencia, como son las vértebras y el fémur debido a la dificultad para ubicar los transductores en estas zonas. En general, el método de densimetría ósea por ultrasonido conduce a un subdiagnóstico de osteoporosis en el 23 % de los casos [26]. A pesar de esto, la densitometría ósea por ultrasonido es en la actualidad un método de diagnóstico de osteoporosis aceptado, la velocidad del sonido (SOS) en el hueso trabecular está altamente correlacionada con la densidad mineral ósea. Las mediciones ultrasónicas en calcáneo han mostrado predecir fractura de cadera, esta técnica ha mostrado ser tan efectiva como la absorciometría de rayos X para identificar el riesgo de fractura en vertebras [57].

A pesar de la utilidad clínica de la SOS y la BUA el mecanismo responsable de las variaciones de estas en hueso trabecular no está del todo entendido, varias técnicas ultrasónicas, incluyendo medidas por transmisión o pulso-eco se han introducido para la evaluación de la calidad de hueso, la mayoría de los dispositivos miden la atenuación ultrasónica y velocidad de sonido en el hueso calcáneo. Aunque los parámetros de ultrasonido cualitativo relacionan la densidad, estructura y propiedades mecánicas del hueso trabecular, muchos factores incluyendo la médula ósea afectan

la propagación del ultrasonido en una forma todavía desconocida.

Al incidir la onda ultrasónica en el medio dispersivo esta interactúa con el medio, esto hace que la señal que se mide en el transductor sea diferente a la incidente, los cambios en la onda proporcionan de manera indirecta información sobre la estructura interna del material, por esta razón, al analizar la onda podemos rescatar esta estructura de manera que podemos inferir las características del medio que originaron esos cambios.

En los siguientes capítulos, se expondrá en forma breve una introducción general al tema, basándose en elementos de la teoría de la elasticidad. Se hará hincapié en los aspectos físicos de la propagación de ondas, sobre todo en los que consideramos claves como los conceptos de atenuación y velocidad de fase. Se expondrán los distintos tipos de ondas que pueden generarse, sobre todo en sólidos, a partir de transductores ultrasónicos.

El presente trabajo de investigación se enfocó en el estudio y análisis de modelos de interacción de ultrasonido con un medio dispersivo, este estudio permitirá un avance en la comprensión de los efectos de la micro estructura del medio en la velocidad de fase y atenuación que sufre la onda ultrasónica en medios dispersivos tales como el hueso trabecular.

Objetivos

General

Encontrar mediante distintos métodos de homogenización la relación entre la velocidad de fase y la atenuación de la onda ultrasónica con la micro-estructura del hueso trabecular.

Específico

Estudiar y analizar los cambios de velocidad de fase y atenuación a distintas concentraciones y tamaños de trabeculas.

Estructura

El presente trabajo está estructurado en cinco capítulos.

En la introducción se da la problemática de la osteoporosis y las técnicas más comunes de diagnóstico.

En el primer capítulo se dan algunos conceptos básicos de la propagación de una onda en un medio así como de las características de los medios elásticos.

En el segundo capítulo se mencionan algunos métodos de estudio de materiales dispersivos, el capítulo se enfoca en los métodos de dispersión múltiple, en particular se desarrollan los modelos de Biot [3], Waterman y Truell [55] y Sabina y Willis [45]. Del Modelo Dinámico Generalizado Auto-consistente (DGACM) [61] sólo se presentan características generales ya que se desarrollara extensamente en el capítulo 3.

En el tercer capítulo se desarrolla el Modelo Dinámico Generalizado Autoconsistente [61], este modelo estudia la dispersión de una onda ultrasónica observando la influencia de parámetros físicos de un material homogéneo con dispersores inmersos, ejemplo de estos parámetros son la constante de Lamé λ , la constante de rigidez o transversal μ y la densidad ρ , también se considera el tamaño y concentración de los dispersores y los cambios en las propiedades de estos

así como la dependencia en la frecuencia de la velocidad de fase y la atenuación, se presentan las consideraciones que fueron necesarias para implementar el modelo al hueso trabecular y la implementación del modelo, también se presentan los resultados obtenidos por el modelo.

Por último, en el capítulo cuatro se presenta la discusión, conclusiones y contribuciones en el campo de diagnóstico por ultrasonido de hueso, así como también las líneas de investigación que se pretenden realizar en el futuro, tomando como partida este trabajo de investigación.

Capítulo 1

Conceptos Básicos

Se introducen los conceptos más importantes para explicar el fenómeno de propagación de una onda acústica en materiales elásticos, se definen los fenómenos presentes en la propagación de una onda en estos materiales y las características principales de los materiales dispersivos.

Una onda es la propagación de una perturbación sin transporte neto de materia, estas pueden clasificarse en ondas mecánicas u ondas electromagnéticas dependiendo de su naturaleza.

Las ondas electromagnéticas se propagan por el espacio sin necesidad de un medio, por lo que pueden propagarse en el vacío. Esto es debido a que las ondas electromagnéticas son producidas por las oscilaciones de un campo eléctrico, en relación con un campo magnético asociado.

Las ondas mecánicas necesitan un medio elástico (sólido, líquido o gaseoso) para propagarse, este medio puede ser considerado como una serie de puntos conectados por resortes como se ve en la Figura 1.1. Las partículas del medio pueden oscilar alrededor de un punto fijo respondiendo a las variaciones de la presión. Estas variaciones se deben a esfuerzos ejercidos sobre el sistema, que según su dirección producen ondas longitudinales (compresiones y expansiones), si coincide con la dirección de la perturbación Figura 1.2a y ondas transversales; si la dirección de propagación es perpendicular a la perturbación Figura 1.2b. Las ondas transversales pueden viajar solo a través de los sólidos, ya que los fluidos (líquidos y gases) no soportan esfuerzos de

corte. El sonido es una onda mecánica longitudinal, esto significa que para propagarse necesita de un medio que transmita la perturbación mediante compresiones y expansiones, es por esto que el medio precisa ser un medio elástico, para que las partículas microscópicas que forman la materia respondan a las variaciones de presión acústica que produce el sonido, lo cual se traduce en oscilaciones entre estas partículas del medio. Las oscilaciones dependerán de dos factores: por un lado, de las características de la fuente (intensidad y frecuencia); a mayor intensidad en la fuente, mayor amplitud de las oscilaciones y a mayor frecuencia mayor velocidad de las oscilaciones. Por otro lado, según sea el medio y las partículas que lo constituyan, la onda viajara a una determinada velocidad (cuanto más cerca estén las partículas, más rápido oscilaran, y por tanto, la velocidad de propagación sera mayor). Esto está relacionado con la medida de oposición por parte del medio a la propagación de las ondas conocida como impedancia acústica Z , se caracteriza como la medida de la eficiencia con que la onda se propaga en un material, matemáticamente es la presión acústica P dividida por la velocidad de las partículas v_p y la superficie S (en algunas ocasiones $v_p S$ es referido como la velocidad del volumen), $Z = P/v_p S$ [49]. La unidad de la impedancia acústica es el Rayleigh (Rayl). La impedancia acústica de un medio tambien puede definirse como:

$$Z = \rho \cdot v_l \quad (1.1)$$

en donde ρ es la densidad del medio y v_l la velocidad de la onda en el medio, la velocidad de la onda permanece constante en un medio homogéneo. También hay que tener en cuenta que no todos los medios son perfectamente homogéneos y que pueden ir cambiando según la región (puede pasar la onda por distintos medios, agua, aire, sólido, etc).

1.1. Medios elásticos

El movimiento ondulatorio aparece en casi todas las ramas de la física. En este trabajo centraremos nuestra atención en las ondas que se propagan en los medios deformables o elásticos.

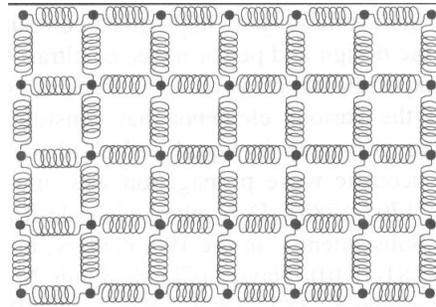


Figura 1.1: Estructura de un material en dos dimensiones vista como puntos unidos por resortes

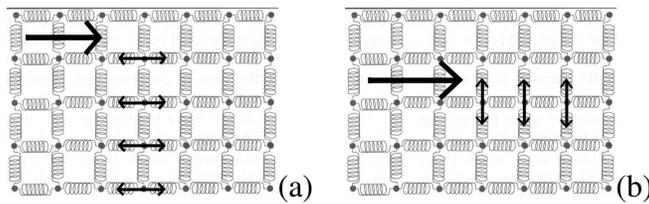


Figura 1.2: Movimiento longitudinal y transversal, la flecha indica la dirección de propagación de la onda

La teoría de la elasticidad describe cómo un sólido (o fluido totalmente confinado) se mueve y/o deforma como respuesta a fuerzas exteriores, para explicar la deformación de un medio elástico consideremos un punto en particular del material con \vec{r} su radio vector antes de una deformación y \vec{r}' después de la misma (Figura 1.3). El desplazamiento de este punto debido a la deformación está determinado por el vector $\vec{r}' - \vec{r}$, para cualquier posición i se tiene.

$$\vec{u}_i = \vec{r}'_i - \vec{r}_i \tag{1.2}$$

donde al vector \vec{u} se le denomina vector de desplazamiento.

Cuando un cuerpo se deforma, varían las distancias entre sus puntos. Consideremos ahora

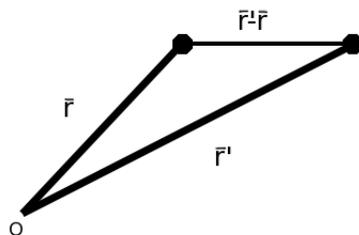


Figura 1.3: Desplazamiento en un medio sólido

dos puntos muy próximos, si antes de la deformación se encuentran separados una distancia determinada por las componentes dx_i , y después de la deformación se encuentran a una distancia determinada por las componentes $dx'_i = dx_i + du_i$, la distancia entre los dos puntos antes y después de la deformación es

$$dl = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2} \quad (1.3)$$

$$dl' = \sqrt{dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2} \quad (1.4)$$

sustituyendo la ecuación 1.3 en 1.4 la distancia entre los dos puntos queda definida como

$$dl'^2 = dl^2 + 2\gamma_{ik}dx_i dx_k \quad (1.5)$$

donde el tensor γ_{ik} se define como [43]

$$\gamma_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \quad (1.6)$$

Este tensor es conocido con el nombre de tensor de deformación y el segundo término por lo general es despreciado por ser un término de segundo orden; la deformación se puede definir como el efecto debido a una fuerza sobre el cuerpo, expresada a través del concepto de esfuerzo, que no es más que la componente de la fuerza por unidad de área que actúa sobre una de las caras de un elemento de volumen deformable en el cuerpo. Esta relación causa - efecto se conoce como ley de Hooke.

Para establecer las ecuaciones generales que gobiernan el comportamiento mecánico de los sólidos deformables, es necesario complementar las ecuaciones de la estática, cinemática y dinámica, con ecuaciones que relacionen las tensiones y deformaciones en el entorno de un punto en el medio. Estas leyes de comportamiento se pueden postular de acuerdo con el conocimiento experimental sobre el comportamiento de los materiales o bien se pueden derivar, en un contexto

más amplio de consideraciones termodinámicas.

1.2. Velocidad de onda

Todas las ondas tienen una velocidad de propagación finita, en su valor influyen las fuerzas recuperadoras elásticas del medio y determinados factores de la masa del medio y la densidad lineal en las cuerdas; la profundidad del agua bajo la superficie, o el coeficiente adiabático, la masa molecular y la temperatura en el caso de la propagación del sonido en un gas.

Existe una división según el rango de frecuencia para clasificar las ondas mecánicas que se propagan en un medio, basada en la capacidad de oír que tenemos los seres humanos. Las ondas mecánicas con frecuencia superior a 20 KHz, se clasifican como ondas ultrasónicas. Se llama infrasonido a las ondas mecánicas cuya frecuencia es inferior a 20 Hz. Queda por tanto el sonido ubicado formalmente entre 20 Hz y 20 KHz, que es lo que puede percibir el oído humano aproximadamente.

Como se dijo anteriormente la velocidad así como la atenuación depende de las características del medio por lo que es importante medirlos e interpretar sus cambios para caracterizar el medio de propagación. El concepto de velocidad es fundamental en las aplicaciones que detectan defectos en materiales, mediciones de espesores, en aplicaciones en medicina (en particular en densitometría) y en la resistencia de materiales de la construcción. Para las aplicaciones de pulso-eco y pulso-transmisión es necesario conocer las dos definiciones de velocidad, nos referimos a los conceptos de velocidad de fase y velocidad de grupo, el desplazamiento en un caso muy simple de onda plana puede expresarse por la ecuación:

$$u = u_0 e^{i(\omega t - kx)} \quad (1.7)$$

donde $\omega = 2\pi f$ es la frecuencia angular, y $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, es el llamado número de onda, definido a través de la longitud de onda λ , esta solución refleja la propagación de una onda continua de frecuencia única (propagación armónica), permite definir la velocidad de fase como:

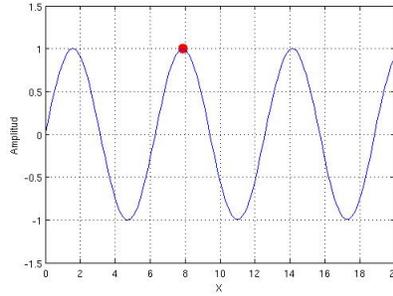


Figura 1.4: Velocidad de fase de una onda

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \lambda f \quad (1.8)$$

Que significa la propagación de una onda con fase constante, como se muestra en la Fig. 1.4. A diferencia del clásico concepto de velocidad que tenemos de la mecánica, donde medimos el tiempo transcurrido durante la traslación de un cuerpo de una posición a otra, la velocidad de fase considera la traslación de un punto de la onda, no de la onda en si, pues la misma es de extensión infinita; esto es muy diferente al caso de un pulso, donde se podría tener una analogía más cercana a la traslación de un cuerpo en mecánica. Para este segundo caso debemos definir el concepto de velocidad de grupo dado por:

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} \quad (1.9)$$

Se considera que a partir de una portadora infinita, la velocidad de grupo es la velocidad con que viaja la información. Este enfoque, aunque válido no es muy adecuado para los ultrasonidos porque se trabaja frecuentemente en muchas aplicaciones médicas con pulsos. Veamos por tanto que ocurre con las velocidades de fase y de grupo de los ultrasonidos. La relación entre la velocidad de fase y de grupo puede obtenerse de forma simple teniendo en cuenta la ecuación 1.8.

$$v_g = \frac{d}{d\lambda}(v_f \lambda) = v_f + \lambda \frac{dv_f}{d\lambda} \quad (1.10)$$

Si examinamos la expresión anterior veremos que ambas velocidades son iguales si v_g es independiente de λ , o de la frecuencia, es decir $dv_f/d\lambda = 0$; la relación 1.10 lleva intrínseco el concepto de dispersión ya que esta está asociada a la dependencia de la velocidad de fase (y de grupo) con la frecuencia. Existen situaciones en donde se pueden excitar ondas mecánicas continuas o de pulso y no se cumple esta relación, por tanto ambas velocidades dependerán de la frecuencia y serán diferentes. El origen se debe a las características geométricas del material o a las propiedades no elásticas del mismo, y reciben el nombre de dispersión geométrica o viscoelástica según sea el caso.

1.3. Medio Infinito

Las leyes de la física se expresan generalmente por ecuaciones diferenciales. El caso del movimiento ondulatorio no es una excepción. De la ecuación del movimiento ondulatorio, se obtiene como es el desplazamiento “ \vec{u} ” en función del espacio y el tiempo o sea $u = u(x, y, z, t)$. En el caso de fluidos es más conveniente no utilizar el desplazamiento y se trabaja con una ecuación de onda donde la variable a determinar será la presión acústica y su variación en el espacio y el tiempo.

Consideremos el caso de un material homogéneo (densidad constante) e isotrópico (constantes elásticas independientes de la dirección). Utilizando la segunda ley de Newton y la ley de Hooke se obtiene la siguiente ecuación de onda conocida como ecuación vectorial de Lamé:

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = (\lambda_l + 2\mu) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \mu \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{u} \quad (1.11)$$

Donde λ_l y μ son las constantes de Lamé y ρ es la densidad, el primer termino del lado derecho da el desplazamiento longitudinal mientras que el segundo termino da el desplazamiento transversal, para resolver esta ecuación se necesita conocer además las condiciones geométricas del medio que determina lo que se conoce como condiciones de frontera, normalmente también es necesario conocer las condiciones iniciales temporales, para evitar esto se considera el

caso armónico en el que se toma que el fenómeno siempre existió y existirá, por tanto no tiene condiciones iniciales. Consideremos el problema continuo (solución armónica) para comenzar.

1.3.1. Ecuación de onda en medios elásticos

El vector de desplazamiento \vec{u} puede ser expresado por la ecuación de Helmholtz como el gradiente de un escalar y el rotacional de un vector cuya divergencia es cero, como se observa en la ecuación (1.12). La onda asociada con el potencial escalar Φ se propaga a velocidad v_l , esta onda es llamada *onda longitudinal*. La onda asociada con el potencial vectorial Ψ se propaga a velocidad v_t , esta onda es llamada *onda transversal*.

$$u = \nabla\Phi + \nabla \times \Psi \quad \nabla \cdot \Psi = 0 \quad (1.12)$$

en el caso de un campo acústico $\nabla\Phi$ se refiere al desplazamiento longitudinal y $\nabla \times \Psi$ se refiere al desplazamiento transversal, sustituyendo en la ecuación de Lamé (ecuación)se obtiene.

$$\begin{aligned} (\lambda_l + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot (\nabla\Phi + \nabla \times \Psi)) - \mu (\nabla(\nabla \cdot (\nabla\Phi + \nabla \times \Psi)) - \nabla^2(\nabla\Phi + \nabla \times \Psi)) = \\ = \rho \left(\nabla \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \nabla \times \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \right) \end{aligned} \quad (1.13)$$

De la ecuación (1.13) se llega a dos ecuaciones de onda simplificadas

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= \frac{1}{v_l^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} & v_l &= \sqrt{\frac{\lambda_l + 2\mu}{\rho}} \quad \textit{longitudinal} \\ \nabla^2 \Psi &= \frac{1}{v_t^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} & v_t &= \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad \textit{transversal} \end{aligned} \quad (1.14)$$

donde

$$k = \frac{\omega}{v_l} = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\lambda_l + 2\mu}} \quad \text{y} \quad K = \frac{\omega}{v_t} = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} \quad (1.15)$$

Son los números de onda de las ondas longitudinales y transversales, ω es la frecuencia angular y v_l y v_t las velocidades longitudinal y transversal de la onda en el medio.

Estas ecuaciones indican que para un medio infinito existen dos modos de propagación asociados a los potenciales, los llamados longitudinal y transversal con velocidades v_l y v_t respectivamente, con λ_l y μ las constantes de Lamé.

1.3.2. Solución general de las ecuaciones de Helmholtz

En este trabajo se resuelve las ecuaciones de Helmholtz en coordenadas cilíndricas y esféricas para obtener el comportamiento de las ondas; la expresión en coordenadas cilíndricas es:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{v_l^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.16)$$

Donde las ondas incidentes perpendiculares al cilindro no existe propagación de la onda en el eje Z si y solo si se considera un cilindro infinito, por lo que 1.16 se puede escribir como:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{v_l^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.17)$$

Si se supone que Φ es lineal entonces podemos tomar a Φ como un producto de funciones $\Phi = R(r)\Theta(\theta)T(t)$, esta representación la sustituimos en la ecuación 1.17

$$\frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} + \frac{\Theta''}{r^2\Theta} = \frac{1}{v_l^2} \frac{T''}{T} \quad (1.18)$$

Estableciendo ambos lados igual a una constante $-C^2$ entonces

$$\frac{1}{v_l^2} \frac{T''}{T} = -C^2 \Rightarrow T(t) = Ae^{iv_l ct}$$

Analizando esta ecuación vemos que c tiene que ser $C = 2\pi/\lambda$

Manipulando la ecuación 1.18 se pueden separar las partes r y θ

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} = -C^2 r^2 \quad (1.19)$$

La parte dependiente de θ de la ecuación 1.19 es

$$\frac{\Theta''}{\Theta} = - \left[C^2 r^2 + r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} \right] = -n^2$$

la solución de esta ecuación es:

$$\Theta(\theta) = B_n e^{in\theta} \quad (1.20)$$

El dominio normal $0 < \theta < 2\pi$. En este caso m debe ser entero por que el campo debe ser el mismo en $\theta + 2\pi$ y en θ . La parte dependiente de r es

$$rR'' + R' + C^2 r - \frac{n^2}{r} R = 0$$

la cual es la ecuación diferencial de Bessel de orden m y valores propios C de la función de Bessel. Tiene como soluciones

$$R(r) = DJ_n(Cr) + EN_n(Cr) \quad (1.21)$$

En donde $J_n(z)$ y $N_n(z)$ son las funciones de Bessel y Neumann respectivamente.

Entonces hacia el interior del cilindro se tiene para la onda longitudinal y la transversal para $r \rightarrow 0$

$$\Phi_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n J_n(kr) e^{in\theta} e^{i\omega t} \quad \Psi_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n J_n(Kr) e^{in\theta} e^{i\omega t} \quad (1.22)$$

para el exterior del cilindro para la onda longitudinal y transversal para $r \rightarrow \infty$

$$\Phi_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [C_n J_n(kr) + D_n N_n(kr)] e^{in\theta} e^{i\omega t} \quad (1.23)$$

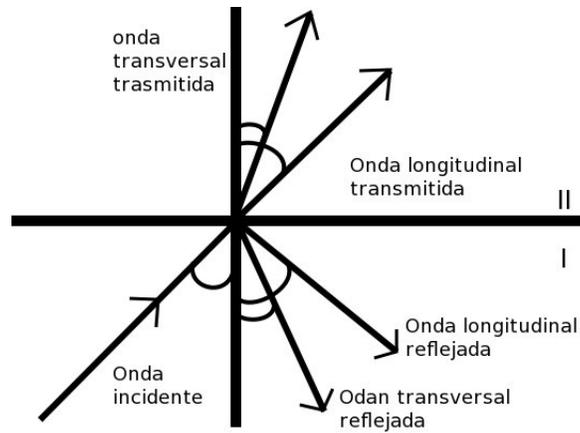


Figura 1.5: Conversión de onda longitudinal a transversal al cambiar de medio

$$\Psi_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [E_n J_n(Kr) + F_n N_n(Kr)] e^{in\theta} e^{i\omega t} \quad (1.24)$$

con A_n, B_n, C_n y D_n valores propios de la función de Bessel.

El desarrollo para el caso esférico se encuentra en el apéndice A

1.4. Materiales Heterogéneos

Como mencionamos anteriormente el estudio efectuado de la propagación de ondas hasta este momento es en materiales elásticos homogéneos, no todos los materiales son así, algunos materiales poseen una estructura interna compleja formada por pequeños reflectores (fracturas, capas, partículas en suspensión en un medio sólido o fluido, etc.) el tamaño de estos pequeños reflectores puede ser menor al de la longitud de onda del haz ultrasónico, cuando esto ocurre se presenta el fenómeno de *dispersión* en la onda. El hueso trabecular es un material que por sus características puede considerarse como un material compuesto. En general para caracterizar un material es necesario realizar una descripción tanto del material en sí como de la interacción de las ondas que se propagan en él, como de las propiedades de las ondas.

En la Fig. 1.2 se observa una representación de la propagación longitudinal y transversal, cuando cualquier ondas se encuentra con una frontera ocurre el fenómeno de reflexión y/o re-

fracción, en estos fenómenos puede presentarse la conversión de un modo de propagación a otro, es decir, cuando una onda ya sea longitudinal o transversal se encuentra con una frontera parte de la energía sera reflejada y parte sera transmitida en forma de ondas longitudinales y transversales, tal como se observa en la Fig. 1.5.

1.5. Fenómenos acústicos

Pensemos ahora en una onda armónica Φ_1 , de frecuencia angular ω y número de onda k , que se propaga en un material homogéneo, por simplicidad supongamos que pasa de izquierda a derecha en la dirección del eje x . La onda incide perpendicularmente en una pared perfectamente reflejante (esto podría ser la frontera del medio o la interfaz entre dos medios), de forma que da lugar a una onda reflejada, Φ_2 , que tendrá la misma amplitud, la misma frecuencia angular y el mismo número de onda que la onda incidente, pero el sentido de propagación va de derecha a izquierda en la dirección del eje x .

$$\Phi_1 = \Phi_0 \text{sen}(kx - \omega t) \text{ y } \Phi_2 = \Phi_0 \text{sen}(kx + \omega t) \quad (1.25)$$

Ambas ondas se superponen dando lugar a lo que se denomina onda estacionaria:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \Phi_0 [\text{sen}(kx - \omega t) + \text{sen}(kx + \omega t)] = 2\Phi_0 \cos(\omega t) \text{sen}(kx) \quad (1.26)$$

La superposición de las dos ondas viajeras de la ecuación 1.25 da lugar a una onda que no es del mismo tipo que la onda original [43].

Cuando ocurre la superposición de ondas se generan distintos fenómenos acústicos, un ejemplo es cuando se tienen dos ondas superpuestas con la misma fase, esto genera el fenómeno de resonancia.

1.5.1. Resonancia

La *resonancia*, se produce cuando un cuerpo capaz de vibrar es sometido a la acción de una fuerza periódica, cuyo periodo de vibración coincide con el periodo de vibración característico de dicho cuerpo. En estas circunstancias el cuerpo vibra, aumentando de forma progresiva la amplitud del movimiento tras cada una de las actuaciones sucesivas de la fuerza.

1.5.2. Absorción

Supongamos ahora que tenemos una onda propagándose en un medio elástico, esta onda al pasar por el medio sufre cambios los cuales dependerán de las características de este [50, 31, 14].

Para visualizar el fenómeno de absorción conviene notar que al perturbar sólo una partícula del medio, toda la energía de la perturbación será transferida a la partícula; sin embargo, a medida que la perturbación se propaga, el número de vecinos se incrementa y la energía tiene que distribuirse entre más partículas. Esto es, entre más alejados estén los vecinos, del sitio originalmente perturbado, menor será la amplitud de su oscilación. Esa reducción de amplitud puede representarse por $A = A_0 e^{-\alpha x}$, donde A_0 es la amplitud inicial, x es la distancia recorrida por la perturbación y α es la constante de atenuación. Conviene mencionar que existe otra forma de dispersión (“scattering”)¹ la cual es producida por la presencia de zonas con distintas propiedades acústicas de tamaño similar al de la longitud de onda.

1.5.3. Reflexión

Es el fenómeno que ocurre al encontrarse una onda que viaja en un medio con otro medio, la onda al encontrarse con la interfaz entre ellos regresa al medio inicial.

¹En este trabajo siempre que hablemos de dispersión haremos referencia al “scattering”

1.5.4. Difracción

En el caso en que en el medio exista un obstáculo o una abertura, la onda rodea al obstáculo o se propaga a través de la apertura, a este fenómeno se le conoce como *difracción*. Su magnitud depende de la relación que existe entre la longitud de onda y el tamaño del obstáculo o abertura. Si una abertura u obstáculo es grande en comparación con la longitud de onda, el efecto de la difracción es pequeño, y la onda se propaga en líneas rectas o rayos, de forma semejante a como lo hace un haz de partículas. Sin embargo, cuando el tamaño del obstáculo es comparable a la longitud de onda, los efectos de la difracción son grandes y la onda no se propaga simplemente en la dirección de los rayos rectilíneos, sino que se dispersa como si procediese de una fuente puntual localizada en el obstáculo.

1.5.5. Refracción

Cuando una onda viaja en diferentes medios existen cambios en la distribución de su energía al propagarse de un medio a otro debido a la diferencia de impedancias entre los medios,

Cuando una onda incide sobre una superficie frontera de dos medios, de distintas propiedades mecánicas, ópticas, etc, parte de la onda se refleja, parte se disipa y parte se transmite.

1.5.6. Transmisión

La velocidad de propagación de las ondas, cambia al pasar de un medio homogéneo a otro también homogéneo, pero no cambia la frecuencia angular. Cuando la onda incidente llega a la frontera con cierto ángulo, la onda transmitida modifica su dirección original acercándose o alejándose de la normal. A esta desviación del rayo transmitido se le denomina refracción.

1.5.7. Dispersión

Una onda es separada en sus componentes frecuenciales a medida que pasa a través de un medio dispersivo, normalmente esto se mide por la tasa de cambio de la velocidad con la frecuen-

cia. Esto ocurre cuando la onda viajante encuentra obstáculos (de menor tamaño o comparables a la longitud de onda) o discontinuidades en el medio e incluso con cambios continuos en el medio acústico.

El fenómeno de dispersión en medios compuestos ya sea por uno o por múltiples dispersores se refiere a un fenómeno en el cual la onda cambia su dirección de propagación o se divide en varias ondas cuando se encuentra con una frontera, la cual puede ser una falla u objeto a lo largo de la trayectoria de propagación de la onda, podemos decir que este objeto es un dispersor y en el material pueden existir uno o varios objetos, la dispersión por un objeto se ha estudiado extensamente, sin embargo la dispersión por múltiples objetos se ha estudiado poco, en este trabajo nos enfocaremos en la dispersión múltiple por ser el fenómeno observado en el hueso.

La dispersión de una onda elástica es un proceso en el que una onda interactúa con una o más discontinuidades o fronteras y genera ondas que contienen componentes que pueden propagarse en todas direcciones. El estudio del fenómeno de dispersión requiere de herramientas de la elastodinámica, es por esto que en la primera parte de este capítulo se discutieron algunos temas que se requieren para entender el fenómeno físico involucrado, posteriormente se presenta un resumen de algunos modelos empleados para estudiar la propagación de ondas en materiales no homogéneos.

Cuando se realizan mediciones en un material dispersivo los datos que se obtienen directamente son la velocidad y la atenuación, conociendo estos datos podemos obtener de manera indirecta las características del material, es por esta razón que lo que se pretende hacer con las simulaciones es abordar el problema inverso; obtener en base a características conocidas de un material bifásico el número de onda para obtener la velocidad mediante la ecuación C.41, esta velocidad en función de la frecuencia refleja las propiedades del material dadas por las constantes de Lamé así como por la cantidad y tamaño de los dispersores, de esta forma se caracterizan los materiales.

En estos modos de propagación no se considera el fenómeno de dispersión, por tanto las velocidades de fase y de grupo coinciden.

Capítulo 2

Modelos de Dispersión múltiple

En este capítulo presentaremos varios métodos para estudiar la dispersión múltiple, los modelos se desarrollan para dispersores con geometría cilíndrica y esférica, los modelos presentados consideran únicamente materiales viscoelásticos, estos modelos dan la expresión para el número de onda k con el que se caracteriza al material para obtener los valores de velocidad de fase y atenuación de la onda efectiva.

Como se mencionó en el capítulo 1 la dispersión es un proceso físico en el que un haz se desvía de su trayectoria al encontrar obstáculos de tamaño menor o comparable a la longitud de onda λ .

La dispersión por un único obstáculo y por múltiples obstáculos es un tema de estudio en las áreas de elasto-dinámica, óptica, acústica y electromagnetismo, la teoría de dispersión múltiple de las ondas en un medio que consiste de un número infinito de dispersores ubicados de acuerdo a una determinada distribución de probabilidad, se encarga de ver por que un sistema se comporta como un continuo descrito por un número de onda complejo k y de la forma de calcular este número de onda en función de la distribución de inclusiones. Estas investigaciones tienen una larga historia, los primeros trabajos se deben a Rayleigh y un gran número de documentos aparecieron a principios del siglo XX [51]. Sin embargo, estos primeros trabajos utilizan sólo la

más simple de las aproximaciones, es decir usando la aproximación de un solo dispersor y despreciando la dispersión múltiple o interacción entre los dispersores, las investigaciones modernas datan de 1945 por Foldy y Lax [15][30] que precisamente definieron la onda coherente como el conjunto promedio de las ondas dispersadas, y establecieron claramente las dificultades que hay en el cálculo.

Además de la formulación del problema, los autores presentan el "método de jerarquía", como una forma de calcular el número de onda complejo de una onda coherente y, por tanto, las características del medio en donde se propaga la onda. Se pueden hacer diferentes aproximaciones considerando algunos supuestos, la aproximación "cuasi-cristalina" de Lax [30], permite expresar el promedio de un conjunto de dispersores de orden superior en términos de los promedios de conjuntos de dispersores de orden menor. Se puede obtener un conjunto cerrado de ecuaciones con lo que, a su vez puede ser resuelto el sistema. Aunque, en principio, se pueden hacer aproximaciones cada vez más precisas de esta manera, en la práctica sólo las de menor orden se pueden evaluar por la complejidad que adquieren las aproximaciones de mayor orden.

En la actualidad existen varios métodos para estudiar la dispersión múltiple, aquí sólo mostraremos los métodos que en alguna forma contribuyeron para desarrollar el modelo dinámico generalizado autoconsistente propuesto por Yang [61]; seleccionamos este modelo por ser el que mejor respuesta presenta ante altas concentraciones de dispersores[9].

2.1. Teoría de Biot

M. Biot desarrolló una teoría para estudiar la propagación de ondas elásticas en sólidos porosos saturados por una fase fluida simple y viscosa mostrando la existencia de ondas con velocidades diferentes [4]. Consideremos un sólido poroso saturado por una única fase compresible y viscosa, y supongamos además que el sistema es isotrópico y que está caracterizado por v_l , v_t y ρ (velocidades longitudinal, transversal y densidad). Sean u^s y u^f los desplazamientos promedio de las fases sólida y fluida respectivamente, se tiene:

$$U = c(u^f - u^s) \quad (2.1)$$

U representa el desplazamiento del medio compuesto, medido en terminos del volumen por unidad de área del medio volumetrico, donde c denota la concentración de porosidades efectiva del sólido. De acuerdo a Biot, las relaciones de esfuerzo-deformación pueden escribirse de la forma [3]:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= He - 2\mu^* (U_y + U_z) - C\zeta \\ \tau_{yy} &= He - 2\mu^* (U_z + U_x) - C\zeta \\ \tau_{zz} &= He - 2\mu^* (U_x + U_y) - C\zeta \\ \tau_{xy} &= \gamma_z \mu^* \\ \tau_{yz} &= \gamma_x \mu^* \\ \tau_{zx} &= \gamma_y \mu^* \\ P_f &= M\zeta - Ce \end{aligned} \quad (2.2)$$

Con τ_{ij} las componentes del esfuerzo y P_f la presión del fluido, el coeficiente μ^* es el módulo transversal del sólido, γ_i es el tensor de deformación y H, M y C son constantes de Biot, las cuales están relacionadas a los parámetros del medio y del fluido y son:

$$\begin{aligned} H &= \frac{(K-K^*)}{D-K^*} + KV^* + \frac{4\mu^*}{3} \\ C &= \frac{KV(KV-KV^*)}{D-KV^*} \\ M &= \frac{KV^2}{(D-KV^*)} \end{aligned}$$

en donde

$$D = K [1 + c (KV/KV_f - 1)]$$

donde KV_s , KV_m y KV_f denotan los módulos volumétricos de los granos sólidos que componen a la matriz seca, de la matriz y del fluido saturante, respectivamente. Los parámetros del medio pueden ser determinados usando la teoría auto consistente, lo cual resulta en un cálculo

iterativo

$$\begin{aligned} (KV^*)_{n+1} &= \frac{\sum_{i=1}^2 c_i KV_i (P^{*i})_n}{\sum_{i=1}^2 c_i (P^{*i})_n} \\ (\mu^*)_{n+1} &= \frac{\sum_{i=1}^2 c_i \mu_i (Q^{*i})_n}{\sum_{i=1}^2 c_i (Q^{*i})_n} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Biot considero el movimiento del fluido y del medio usando el movimiento del fluido relativo al medio y la ecuación de esfuerzo para dar la ecuación de onda que gobierna la propagación de las ondas longitudinales y transversales, como la ecuación mostrada a continuación

$$\nabla^2 (-M\zeta + Ce) = \frac{d^2}{dt^2} (\rho_f e - m\zeta) - \frac{\eta F}{\kappa} \frac{d\zeta}{dt} \quad (2.4)$$

en donde $c_i = \sum_i a_i^3 / a$ con a el radio y P^{*i} y Q^{*i} son los factores de forma (Berryman 1980b)

$$(H - \mu^*) \nabla^2 e + \mu \nabla^2 e - C \nabla^2 \zeta = \frac{d^2}{dt^2} (\rho e - \rho_f \zeta) = H \nabla^2 e - C \nabla^2 \zeta \quad (2.5)$$

en donde ρ_f y ρ son las densidades del fluido y del compuesto respectivamente, κ es la permeabilidad y η es la viscosidad del fluido. m es definido como

$$m = \frac{\alpha \rho_f}{c}$$

El factor de estructura usado por Biot es un parámetro ajustable y es frecuentemente considerado como una función de la permeabilidad. La dependencia de la frecuencia de la viscosidad del fluido es incluida en el factor de Biot y es dada por

$$\begin{aligned} F(\chi) &= \frac{1}{4} \chi T(\chi) / (1 - 2T(\chi) / i\kappa) \\ T(\chi) &= (ber'(\kappa) + ibei'(\chi)) / (ber(\kappa) + ibei(\kappa)) \\ \chi &= a (\omega \rho_f / \eta)^{0.5} \end{aligned}$$

Con e y ζ las ecuaciones de onda tomadas de la forma

$$e = A_1 \exp [i(\omega t - lx)]$$

$$\zeta = A_2 \exp [i(\omega t - lx)]$$

Los supuestos subyacentes en la derivación incluye poros isotropicos en el material de porosidad constante.

Físicamente este modelo establece relaciones entre los esfuerzos y las deformaciones para encontrar la deformación estática.

2.2. Teoría de Foldy

Foldy propone resolver el problema de la dispersión múltiple de ondas escalares por una distribución isotrópica de dispersores considerando ondas coherentes [15]. La introducción del concepto de "aleatoriedad" requiere considerar un promedio que debe obtenerse sobre un conjunto estadístico de configuraciones de dispersores (promediado configuracional). Las ecuaciones se derivan para el valor medio de la función de onda, el valor medio del cuadrado de su valor absoluto, y el flujo promedio realizado por la onda.

El modelo de Foldy se basa en expresiones que representan las ecuaciones fundamentales en la dispersión múltiple:

- El campo en un punto r_j es la suma de una onda cualquiera incidente, $\Phi_0(r)$, y de las ondas que divergen de todos los objetos dispersores que haya en el medio, por tanto, en la suma hay tantos términos como objetos dispersores j , haya en el medio.

$$\Phi(r) = \Phi_0(r) + \sum_j G_j \Phi^j(r_j) E(r, r_j) \quad (2.6)$$

donde G_j esta relacionada con el coeficiente de dispersión del j - esimo dispersor y $E(r, r_j)$ está dada por

$$E(r, r_j) = \frac{e^{ik_0|r-r_j|}}{|(r-r_j)|} \quad (2.7)$$

- El campo externo actúa sobre el dispersor j –esimo como la suma de la onda incidente y las ondas divergentes de todos los dispersores que hay en el medio, excepto el dispersor j –esimo.

$$\Phi^j(r_j) = \Phi_0(r_j) + \sum_{j' \neq j} G_{j'} \Phi^j(r_{j'}) E(r_j, r_{j'}) \quad (2.8)$$

Donde $\Phi_0(r_j)$ representa la onda entrante y $G_{j'}$ es un coeficiente de dispersión.

Estas representan las ecuaciones fundamentales de la dispersión múltiple.

La teoría desarrollada por Foldy está basada en la distribución aleatoria de los dispersores y usó los valores promedios de los parámetros relacionados con la dispersión, donde los promedios se tomaron de un conjunto de posibles configuraciones de los dispersores.

El metodo directo de resolver el problema es resolver el conjunto de ecuaciones algebraicas lineales simultáneamente (2.8) para $\Phi^j(r_j)$ y sustituirlas en la ecuación 2.6, para obtener $\Phi(r)$ como función de las posiciones y parámetros de los dispersores, tomando el promedio configuracional y el cuadrado de su valor absoluto. Desafortunadamente, esto no es posible llevarlo acabo por la complejidad de las integraciones, y es necesario recurrir a otro procedimiento, por lo tanto trataremos de encontrar las ecuaciones mostradas para $\langle |\Phi(r)| \rangle$ y $\langle |\Phi(r)|^2 \rangle$ y luego resolver estas ecuaciones para las cantidades deseadas promediadas.

Este modelo considera el promedio de los cuadrados de las funciones de onda mediante la expresión:

$$\langle |\Phi(r)|^2 \rangle = |\langle \Phi(r) \rangle|^2 + \frac{1}{4\pi} \int S_s(r^j) \langle |\Phi(r_j)|^2 \rangle L(r, r', r_j) dr_j \quad (2.9)$$

Donde L es la función de onda en el punto r debida a una fuente puntual situada en el punto r' , y S_s es la sección de dispersión de la muestra por unidad de volumen, S_s representa un área virtual que describe cuánta energía de la onda original es desviada.

La potencia por unidad de volumen en los puntos dispersores es proporcional al valor del campo excitador $\langle |\Phi(r_j)|^2 \rangle$ en esos puntos y a la sección del elemento dispersor por unidad de volumen $S_s(r^j)$. Las distintas contribuciones se combinarán como si las ondas fueran incoherentes, es decir, como una relación de fases aleatorias entre elementos y dispersores.

El primer término de la ecuación 2.9 es el valor promedio de la onda entrante definida por:

$$\langle \Phi(r) \rangle = Ae^{-ikR_0} \quad (2.10)$$

Donde el número de onda k es en general un número complejo y R_0 es la distancia total recorrida por la onda en el medio dispersor. El hecho de que la onda se atenúe con la distancia es considerado al tener k como un número complejo. Foldy establece una expresión para el número de onda de un material compuesto en términos del número de onda del medio sin dispersores k_0 y del número de dispersores N [23].

$$k^2 = k_0^2 + 4\pi NG \quad (2.11)$$

en donde G es la amplitud del campo dispersado por un solo dispersor

De esta forma el campo total aportado por la ecuación 2.9 consta de dos contribuciones, una coherente y otra incoherente. La contribución coherente es la onda promedio, y la contribución incoherente es debida a todas las ondas dispersadas de 1 a n veces.

Foldy propuso una solución para la ecuación 2.9 calculada por iteración en la que solamente hay que considerar los primeros términos de $L(r, r', r_j)$ si el cambio en la velocidad de fase es pequeño.

Este modelo se basa en el estudio de una onda dispersada por una colección de dispersores aleatoria, se obtienen las propiedades del medio considerando los promedios de las cantidades físicas sobre el ensamble de dispersores.

2.3. Modelo propuesto por Waterman y Truell en coordenadas cilíndricas

En este modelo de homogenización se retoma el concepto de promediado de la configuración definido por Foldy en la sección 2.2. Este modelo describe las ecuaciones que gobiernan el movimiento de una onda en base a las características del medio en donde se encuentran los dispersores y de los dispersores mismos.

Un modelo de homogenización se basa en proponer un medio homogéneo con las características del medio real en base a las propiedades y características de los diferentes medios que lo componen. Usando la aproximación estadística de Foldy y Lax[30] se calcula el campo en un solo dispersor en una posición dada. El campo incidente primario al interactuar con un dispersor genera un campo dispersado en todas direcciones. Este campo dispersado junto con el incidente primario interactuará con los demás dispersores generando otros campos dispersados. El campo incidente en el dispersor $n+1$ consistirá en la contribución de los campos dispersados por los N dispersores más el incidente primario, de un total de N dispersores se tiene N ecuaciones con N incógnitas; por la complejidad que adquiere el sistema es necesario emplear un procedimiento de aproximación.

Consideremos una onda plana que incide sobre un material de características conocidas con inclusiones también con características conocidas como se ve en la Figura 2.1.

Suponiendo que se tiene simetría cilíndrica en los dispersores, la onda incidente, las ondas reflejadas y las ondas transmitidas en cada uno de los medios pueden escribirse como:

$$r > a$$

$$\Phi_{mat}^1 = e^{ik_1x} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^1(k_1 r) e^{in\theta} \quad (2.12)$$

$$\Psi_{mat}^1 = e^{iK_1x} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n H_n^1(K_1 r) e^{in\theta} \quad (2.13)$$

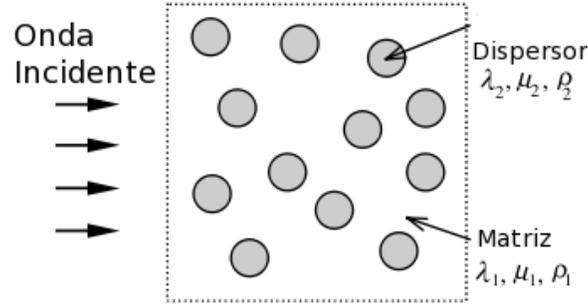


Figura 2.1: Modelo de Waterman y Truell

$r < a$

$$\Phi_d^2 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n J_n(k_2 r) e^{in\theta} \quad (2.14)$$

$$\Psi_d^2 = \sum_{n=0}^{\infty} D_n J_n(k_2 r) e^{in\theta} \quad (2.15)$$

A_n, B_n, C_n y D_n son constantes de dispersión y se pueden determinar aplicando condiciones de frontera entre los dispersores y el medio de propagación.

El campo dispersado está definido como

$$f(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n A_n \quad \text{y} \quad f(\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (i)^n A_n \quad (2.16)$$

Conociendo los campos es posible obtener la expresión para k sustituyéndolos en la ecuación obtenida por Waterman y Truell [55], esta ecuación da el comportamiento del medio dispersivo caracterizado por un número de onda complejo k , el cual está en términos del número de dispersores por unidad de volumen n_0 y la amplitud del campo lejano obtenido por los dispersores $f(0)$ y $f(\pi)$.

$$\left(\frac{\langle k(\omega) \rangle}{k_1} \right)^2 = \left(1 - \frac{2in_0 f(0)}{k_1^2} \right)^2 - \left(\frac{2in_0 f(\pi)}{k_1^2} \right)^2 \quad (2.17)$$

Este modelo físicamente considera la suma de los campos dispersados por todos los disper-

sores, en base a ellos, al número de dispersores y a las propiedades de los medios se determinan las propiedades del medio homogéneo.

El caso esférico esta en el apéndice B.

2.4. Modelo Auto-consistente propuesto por Sabina y Willis

En este modelo se usa un esquema auto-consistente muy simple para el análisis aproximado de las ondas en un compuesto que consiste en una matriz con propiedades desconocidas que contiene inclusiones, cada una con un subíndice asignado $r = 1, 2, \dots, N - 1$; se emplea una solución aproximada para la dispersión de una única inclusión, lo que permite el desarrollo de ecuaciones explícitas simples, comparables con las ya conocidas en la elastostática, las cuales son fáciles de resolver por iteración. Consideremos una matriz con módulo elástico L_{n+1} y densidad ρ_{n+1} en la que hay n dispersores con módulos L_r y densidades ρ_r , $r = 1, 2, \dots, n$ los dispersores se encuentran de forma isotrópica en el material, así que un dispersor está en el dominio $x' + \Omega$ en donde Ω define la forma y el tamaño del dispersor. El desplazamiento u en el compuesto dependerá de la configuración de las inclusiones, entonces el problema a resolver será determinar el campo promedio $\langle u \rangle$ en ausencia de fuerzas, la respuesta del compuesto está dada por:

$$\nabla \cdot \sigma = \dot{p} \quad (2.18)$$

con σ es el tensor de esfuerzos y p el momento; el modulo elástico L y la densidad ρ varían con la posición x , así que

$$L(x) = \sum_{r=1}^{n+1} L_r f_r(x), \quad \rho(x) = \sum_{r=1}^{n+1} \rho_r f_r(x) \quad (2.19)$$

en donde

$$f_r(x) = \begin{cases} 1 & x \in \text{matriz} \\ 0 & x \in \text{dispersor} \end{cases} \quad (2.20)$$

promediando la ecuación 2.18 la respuesta media del compuesto está dada por:

$$\nabla \cdot \langle \sigma \rangle = \langle \dot{p} \rangle \quad (2.21)$$

$\langle u \rangle$ se puede encontrar si las relaciones constitutivas se conocen, análogamente ρ y p se pueden determinar relacionando $\langle \sigma \rangle$ y $\langle p \rangle$ a $\langle e \rangle$ y $\langle \dot{u} \rangle$ de lo que se tiene:

$$\langle e \rangle = \sum_{r=1}^{n+1} c_r e_r \text{ y } \langle \dot{u} \rangle = \sum_{r=1}^{n+1} c_r \dot{u}_r \quad (2.22)$$

Con $\langle \sigma \rangle$ el tensor de promedios de los esfuerzo $\langle e \rangle$ el tensor de promedios de la deformación, e_r la deformación por cada dispersor en el ensamble y c_r la fracción volumétrica. Para el caso estático [25] se tiene que

$$\langle \sigma \rangle = L_{n+1} \langle e \rangle + \sum_{r=1}^n c_r (L_r - L_{n+1}) e_r \quad (2.23)$$

$$\langle p \rangle = \rho_{n+1} \langle \dot{u} \rangle + \sum_{r=1}^n c_r (\rho_r - \rho_{n+1}) \dot{u}_r \quad (2.24)$$

Las relaciones constitutivas deseadas pueden obtenerse si e_r y \dot{u}_r son determinadas en términos de $\langle e \rangle$ y $\langle \dot{u} \rangle$. Un procedimiento simple para obtener e_r y \dot{u}_r es considerando sólo un dispersor de tipo r en un material homogéneo con las propiedades efectivas del compuesto de lo que se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$L = L_1 + \sum_{r=1}^n c h_r(k) h_r(-k) (L_1 - L_2) \left[I^{(4)} + \bar{S}_x^r (L_2 - L) \right]^{-1} \quad (2.25)$$

$$\rho = \rho_1 + \sum_{r=1}^n c h_r(k) h_r(-k) (\rho_1 - \rho_2) \left[I^{(2)} + \bar{M}_x^r (\rho_2 - \rho) \right]^{-1} \quad (2.26)$$

con el factor de estructura dado por $h_r(k) = \frac{1}{V} \int_V e^{ikx} dx$, El tensor $I^{(n)}$ es el tensor unitario de rango n , \bar{S}_x^r y \bar{M}_x^r operadores definidos en términos del tensor de Green.

2.5. Modelo Dinámico Generalizado Auto-consistente (MDGAC)

Este modelo según Christensen[8] proporciona un modelo físico realista de la interacción entre los elementos de sistemas de dos fases abarcando una amplia gama en la fracción volumétrica, desde bajas concentraciones de dispersores hasta altas concentraciones ($\approx 60\%$).

El método desarrollado por Yang [61], puede considerar altas concentraciones de dispersores o inclusiones para el caso de materiales bifásicos tanto para inclusiones cilíndricas [61] como para esféricas [60]. El modelo físico en que se basa el (MDGAC) se muestra en la Figura 2.2, aquí una esfera o cilindro de un material específico está rodeado por una capa de otro material, esta capa la llamaremos matriz por ser la que contiene a cada uno de los dispersores. La concentración volumétrica de las inclusiones está en relación a los volúmenes de las dos esferas o cilindros.

$$c = \frac{a^3}{b^3} \quad \text{esfera} \quad \text{ó} \quad c = \frac{a^2}{b^2} \quad \text{cilindro} \quad (2.27)$$

Estas esferas o cilindros (inclusión y matriz) se encuentran recubiertas por un medio hipotético el cual tiene las propiedades reales del material en estudio. Una onda incidente que consiste únicamente en una onda longitudinal viaja en el material hipotético e incide en la esfera o el cilindro de la matriz, esto hace que exista dispersión del haz, al analizar los coeficientes de dispersión, como se mencionó en la sección 2.3, podemos conocer las propiedades del material mediante la siguiente expresión dada por Yang[59] para coordenadas cilíndricas para encontrar el número de onda.

$$1 = \left(1 + \frac{2in_0f(0)}{k^2}\right)^2 - \left(\frac{2in_0f(\pi)}{k^2}\right)^2 \quad (2.28)$$

El MDGAC[59] así como el modelo de Waterman y Truell [55] explican la dispersión múltiple en un material, el MDGAC toma un medio con propiedades conocidas, inmersos en este

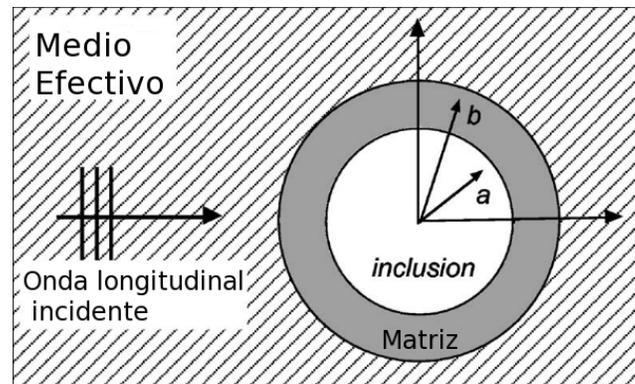


Figura 2.2: Modelo Dinámico Generalizado Auto-consistente

medio se encuentran dispersores también con propiedades conocidas, Yang desarrollo la ecuación (2.28) mediante la cual, conociendo el campo dispersado por los dispersor y las propiedades de los medios que lo componen es posible conocer el número de onda del material equivalente.

Para poder desarrollar el modelo propuesto por Yang es necesario primero plantear en detalle el fenómeno que ocurre cuando una onda que viaja por un material homogéneo se encuentra con un dispersor de radio b^1 (se considerará sin pérdida de generalidad que no existe componente transversal de la onda incidente), supongamos que los dispersores son cilíndricos y que la onda viaja en una dirección determinada, en este caso se tendrá que la onda al incidir en el dispersor una parte de ella se refleja y la otra parte se transmite, en la onda transmitida y reflejada se vera que hay un cambio de modo, es decir ahora se tendrán una onda longitudinal y una transversal adicionales (ver sección 1.4). Supongamos ahora que dentro del dispersor de radio b se encuentra otro dispersor, con la misma geometría pero con un radio menor a , en este caso se tendría que las ondas longitudinal y transversal transmitidas al dispersor de radio b se convierten en las ondas incidentes del dispersor interno de radio a , al incidir la onda en el dispersor se tendrá nuevamente que una parte de la onda se refleja y la otra se transmite, nuevamente se tendrá un cambio de modo en las ondas, por lo que tendremos ondas longitudinales y transversales. Esto provocará que en el espacio entre los dispersores de radio a y b una superposición del campo transmitido por el dispersor de radio b y el campo reflejado por el dispersor de radio a tanto para las ondas

¹para el caso de un dispersor esférico la demostración se encuentra en el Apéndice C

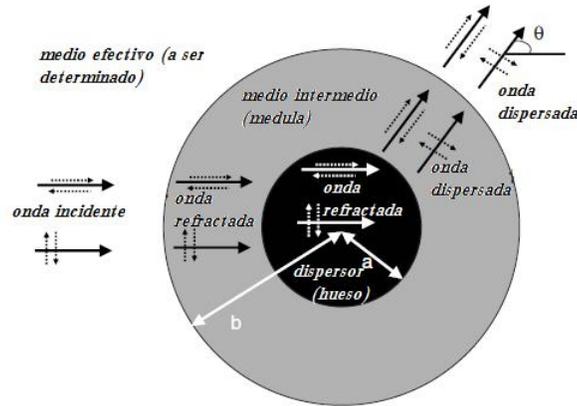


Figura 2.3: Ondas incidentes y dispersadas por un único dispersor

longitudinales como para las transversales, como se ve en la Figura 2.3.

Las ondas longitudinales incidentes en el material se pueden expresar como:

$$\Phi_i^m = \Phi_0 \sum_{n=0}^{\infty} i^n J_n(kr) e^{in\theta} \quad (2.29)$$

Las ondas dispersadas por el dispersor de radio b se pueden tomar como ondas salientes de este (longitudinal y transversal), es decir, en lugar de un dispersor se puede considerar como una fuente y por lo tanto se usa la función de Hankel de primer tipo (H_n^1)

$$\Phi_s^m = \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^1(kr) e^{in\theta} \quad (2.30)$$

$$\Psi_s^m = \sum_{n=0}^{\infty} B_n H_n^1(Kr) e^{in\theta} \quad (2.31)$$

con $K = \frac{\omega}{V_t}$, $k = \frac{\omega}{V_l}$, $H_n^1(z)$ la función de Hankel definida como $H_n^1 = J_n(z) + N_n(z)$ con $N_n(z)$ la función de Bessel de segundo tipo o Neumann y A_n y B_n los coeficientes de dispersión a ser determinados.

La onda en el material es la superposición de la onda incidente y las ondas dispersadas, por lo tanto para la onda longitudinal se tiene

$$\Phi^m = \Phi_i^m + \Phi_s^m = \Phi_0 \sum_{n=0}^{\infty} i^n J_n(kr) e^{in\theta} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n^1(kr) e^{in\theta} \quad (2.32)$$

con Φ_i la onda incidente dada por 2.29 y Φ_s la onda dispersada dada por 2.30 para la onda transversal, en este caso la onda en el material está dada únicamente por la onda dispersada

$$\Psi_t^m = \Psi_s^m \quad (2.33)$$

Conociendo las ondas en cada uno de los medios se podrá aplicar las condiciones de continuidad en desplazamiento y tensión.

$$u_r^x(r) \Big|_{r=a,b} = u_r^y(r) \Big|_{r=a,b} \quad (2.34)$$

$$u_\theta^x(r) \Big|_{r=a,b} = u_\theta^y(r) \Big|_{r=a,b} \quad (2.35)$$

$$\sigma_r^x(r) \Big|_{r=a,b} = \sigma_r^y(r) \Big|_{r=a,b} \quad (2.36)$$

$$\sigma_{r\theta}^x(r) \Big|_{r=a,b} = \sigma_{r\theta}^y(r) \Big|_{r=a,b} \quad (2.37)$$

con $x = mat, b$ y $y = b, a$ respectivamente.

Como se mencionó estas nos servirán para obtener los coeficientes de dispersión.

Sustituyendo las ondas 2.32 y 2.33 de los diferentes medios en las ecuaciones para los desplazamientos y las torsiones se tiene para el caso del material envolvente denotado por el superíndice *mat*:

el desplazamiento

$$\begin{aligned} u_r^{mat} &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[i^n \frac{\partial}{\partial r} J_n(kr) + A_n \frac{\partial}{\partial r} H_n^1(kr) \right] e^{in\theta} + \frac{in}{r} \{ B_n H_n^1(kr) \} e^{in\theta} \right\} \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned}
 u_{\theta}^{mat} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \Psi}{\partial r} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{in}{r} \{ i^n J_n(kr) + A_n H_n^1(kr) \} e^{in\theta} - \left\{ B_n \frac{\partial}{\partial r} H_n^1(kr) \right\} e^{in\theta} \right\}
 \end{aligned}$$

ahora para las torsiones

$$\begin{aligned}
 \sigma_r^{mat} &= \mu \left[-\frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} - k^2 \Phi + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right] \\
 &= \mu \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ -\frac{2}{r} \left[i^n J_n(kr) + A_n \frac{\partial}{\partial r} H_n^1(kr) \right] + \frac{2n^2}{r^2} [i^n J_n(kb) + A_n H_n^1(kr)] - K^2 [i^n J_n(kr) + A_n H_n^1(kr)] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2in}{b} \left[B_n \frac{\partial}{\partial r} H_n^1(Kr) \right] - \frac{2in}{r^2} [B_n H_n^1(Kr)] \right\} e^{in\theta} \tag{2.39}
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 \sigma_{r\theta}^{mat} &= \mu \left[\frac{2}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + k^2 \Psi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right] \\
 &= \mu \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{2in}{r} \left[i^n \frac{\partial}{\partial r} J_n(kr) + A_n \frac{\partial}{\partial r} H_n^1(kr) \right] - \frac{2in}{b^2} [i^n J_n(kr) + A_n H_n^1(kr)] - \frac{2m^2}{b^2} [B_n H_n^1(Kb)] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{b} \left[B_n \frac{\partial}{\partial r} H_n^1(Kr) \right] + K^2 [B_n H_n^1(Kr)] \right\} e^{in\theta}
 \end{aligned}$$

para los campos de desplazamientos en el cilindro de radio b denotados por el superíndice b se tienen las ondas longitudinales y transversales transmitidas del material y las ondas dispersadas por el cilindro de radio a

$$\Phi_{tr}^b = \sum_{n=0}^{\infty} C_n H_n^1(kr) e^{in\theta} \tag{2.40}$$

$$\Phi_s^b = \sum_{n=0}^{\infty} E_n H_n^2(kr) e^{in\theta} \quad (2.41)$$

las correspondientes ondas transversales

$$\Psi_{tr}^b = \sum_{n=0}^{\infty} D_n H_n^1(Kr) e^{in\theta} \quad (2.42)$$

$$\Psi_s^b = \sum_{n=0}^{\infty} F_n H_n^2(Kr) e^{in\theta} \quad (2.43)$$

C_n, E_n, D_n, F_n los coeficientes de dispersión, de esto se tiene al igual que el caso anterior los campos totales como

$$\Phi_t^b = \Phi_{tr}^b + \Phi_s^b \quad \text{y} \quad \Psi_t^b = \Psi_{tr}^b + \Psi_s^b$$

análogo al procedimiento anterior para el desplazamiento obtenemos ahora para el dispersor de radio b

$$\begin{aligned} u_r^b &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \Psi}{\partial r} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{in}{r} \{C_n H_n^1(kr) + D_n H_n^2(kr)\} - E_n \frac{\partial}{\partial r} H_n^1(kr) - F_n \frac{\partial}{\partial r} H_n^2(kr) \right] e^{in\theta} \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} u_\theta^b &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[C_n \frac{\partial}{\partial r} H_n^1(kr) + D_n \frac{\partial}{\partial r} H_n^2(kr) + \frac{in}{r} \{E_n H_n^1(Kr) + F_n H_n^2(Kr)\} \right] e^{in\theta} \end{aligned}$$

y para las torsiones

$$\sigma_r^b = \mu \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ -\frac{2}{r} \left[C_n \frac{\partial}{\partial r} H_n^1(kr) + D_n \frac{\partial}{\partial r} H_n^2(kr) \right] + \frac{2m^2}{b^2} [C_n H_n^1(kr) + D_n H_n^2(kr)] - \right. \\ \left. - k^2 [C_n H_n^1(kr) + D_n H_n^2(kr)] + \frac{2in}{r} \left[E_n \frac{\partial}{\partial r} H_n^1(Kr) + F_n \frac{\partial}{\partial r} H_n^2(Kr) \right] - \right. \quad (2.45)$$

$$\left. - \frac{2in}{r^2} [E_n H_n^1(kr) + F_n H_n^2(kr)] \right\} e^{in\theta} \quad (2.46)$$

y

$$\sigma_{r\theta}^b = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{2im}{r} \left[C_n \frac{\partial}{\partial r} H_n^1(k_1r) + D_n \frac{\partial}{\partial r} H_n^2(kr) \right] - \frac{2im}{r^2} [C_n H_n^1(kr) + D_n H_n^2(kr)] - \right. \\ \left. - \frac{2m^2}{r^2} [E_n H_n^1(Kr) + F_n H_n^2(Kr)] + \frac{2}{r} \left[E_n \frac{\partial}{\partial r} H_n^1(Kr) + F_n \frac{\partial}{\partial r} H_n^2(Kr) \right] + \right. \quad (2.47)$$

$$\left. + K^2 [E_n H_n^1(Kr) + F_n H_n^2(Kr)] \right\} e^{in\theta} \quad (2.48)$$

finalmente, dentro del dispersor de radio a sólo se tienen las ondas transmitidas del cilindro de radio b , que son

$$\Phi_{tr}^a = \sum_{n=0}^{\infty} G_n H_n^1(k_1r) e^{in\theta} \quad (2.49)$$

y

$$\Psi_{tr}^a = \sum_{n=0}^{\infty} I_n H_n^1(K_1r) e^{in\theta} \quad (2.50)$$

con G_n e I_n los coeficientes de dispersión. Los desplazamientos y torsiones quedan de la forma

$$\begin{aligned}
 u_r^a &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[G_n \frac{\partial}{\partial r} H_n^1(kr) \right] e^{in\theta} + \frac{in}{r} \{ I_n H_n^1(kr) \} e^{in\theta} \right\}
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

$$u_\theta^a = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \Psi}{\partial r} \tag{2.52}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{in}{r} \{ G_n H_n^1(kr) \} e^{in\theta} - \left\{ I_n \frac{\partial}{\partial r} H_n^1(kr) \right\} e^{in\theta} \right\} \tag{2.53}$$

y

$$\begin{aligned}
 \sigma_r^a &= \mu \left[-\frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} - k^2 \Phi + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right] \\
 &= \mu \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ -\frac{2}{r} \left[G_n \frac{\partial}{\partial r} H_n^1(kr) \right] - \frac{2n^2}{r^2} [G_n H_n^1(kr)] - K^2 [G_n H_n^1(kr)] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2in}{b} \left[I_n \frac{\partial}{\partial r} H_n^1(Kr) \right] - \frac{2in}{r^2} [I_n H_n^1(Kr)] \right\} e^{in\theta}
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{r\theta}^a &= \mu \left[\frac{2}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + k^2 \Psi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right] \\
 &= \mu \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{2in}{r} \left[G_n \frac{\partial}{\partial r} H_n^1(kr) \right] - \frac{2in}{r^2} [G_n H_n^1(kr)] - \frac{2n^2}{r^2} [I_n H_n^1(Kb)] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{r} \left[I_n \frac{\partial}{\partial r} H_n^1(Kr) \right] + K^2 [I_n H_n^1(Kr)] \right\} e^{in\theta}
 \end{aligned}$$

Con esto obtenemos el sistema de ecuaciones a resolver para calcular los coeficientes de dispersión

$$\begin{bmatrix} P_i & -P'_1 & -P_1 & 0 \\ Q_i & -Q'_1 & -Q_1 & 0 \\ 0 & -P'_2 & -P_2 & P_i \\ 0 & -Q'_2 & -Q_2 & Q_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \\ E_n \\ F_n \\ G_n \\ H_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P'_i \\ \alpha Q'_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

con

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n\zeta_n(x) - x\zeta_{n+1}(x) & n\zeta_n(y) \\ -n\zeta_n(x) & -n\zeta_n(y) + y\zeta_{n+1}(y) \end{bmatrix}$$

y

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(n^2 - n - \frac{y^2}{2}\right) \zeta_n(x) + x\zeta_{n+1}(x) & n[(n-1)\zeta_n(y) - y\zeta_{n+1}(y)] \\ -n[(n-1)\zeta_n(x) - x\zeta_{n+1}(x)] & -\left(n^2 - n - \frac{y^2}{2}\right) \zeta_n(y) - y\zeta_{n+1}(y) \end{bmatrix}$$

En donde ζ puede ser $J_n(x)$ o $H_n^1(x)$, esto estará determinado por la región, sustituyendo $x = kr$ y $y = Kr$ y resolviendo el sistema de ecuaciones (2.55) suponiendo en un inicio $k = k_b$, $K = K_b$ y ρ y μ calculados con el modelo de Sabina y Willis se obtienen los valores de los coeficientes de dispersión A_n los que recordando del método de Waterman 2.17 se sustituyen en la ecuación (2.16) para obtener los campos dispersados hacia adelante y hacia atrás. Conociendo estos valores y sustituyéndolos en la ecuación (2.28) obtenemos una primera expresión para el número de onda k o K en el material, una vez que se tienen los nuevos valores de k y K se repite el proceso, se resuelve nuevamente el sistema de ecuaciones para obtener un nuevo valor de k y

K , es decir se itera hasta obtener la aproximación deseada. Molero [32] desarrolló una expresión para las iteraciones de k , en esta ecuación podemos ver que el valor $p + 1$ de k esta determinado por el valor anterior de k_p , la concentración de dispersores c , el radio del dispersor a y los campos dispersados[34]

$$\langle k_{p+1} \rangle^2 = \langle k_p \rangle^2 - (4in)f(0) + \frac{4n^2}{\langle k_p \rangle^2} (f^2(\pi) - f^2(0)) \quad (2.56)$$

Conociendo el valor de k podemos obtener la velocidad de propagación y la atenuación mediante la fórmula

$$k(\omega) = \frac{\omega}{v_l} + i\alpha(\omega) \quad (2.57)$$

con ω la frecuencia angular, v_l la velocidad longitudinal y α la atenuación.

Capítulo 3

Métodos de homogenización aplicados a hueso trabecular

Este capítulo presenta las consideraciones hechas para adaptar el modelo desarrollado por Yang[61], Sabina y Willis[45] y Waterman y Truell[55] al caso de la microestructura del hueso trabecular, se muestran los resultados de la velocidad de fase y atenuación de la onda ultrasónica obtenidos de las simulaciones realizadas para dispersores cilíndricos para hueso, en el Apéndice E se pueden ver las simulaciones para dispersores esféricos, en ambos casos las características del hueso utilizadas son las reportadas por Njeh [37], para el caso en coordenadas cilíndricas se presentan también las mediciones realizadas a un phantom de hueso trabecular publicadas por Wear[57]¹

3.1. Hueso trabecular

El hueso trabecular consiste en una red de trabeculas rodeadas de médula ósea; la médula ósea puede dividirse en médula amarilla, compuesta principalmente de adipocitos y médula roja que consiste principalmente de heritrocitos.

¹Resultados publicados en el IEEE Ultrasonics Symposium[33] y en IEEE EMBC [53]

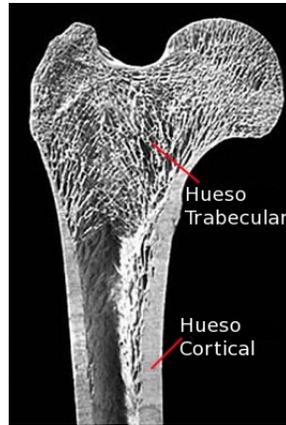


Figura 3.1: Composición del hueso: Hueso trabecular y cortical

Los huesos en los humanos y otros mamíferos son generalmente clasificados en dos tipos 1) hueso cortical, conocido como hueso compacto y 2) el hueso trabecular o hueso esponjoso. Estos dos tipos se clasifican utilizando como base la porosidad y la micro-estructura. El hueso cortical es mucho más denso con una porosidad que oscila entre el 5% y el 30%. El hueso cortical se encuentra principalmente en el eje de los huesos largos y forma el exterior de todo hueso esponjoso en el final de las articulaciones y las vértebras. Un esquema que muestra la corteza alrededor de un hueso largo cualquiera se muestra en la Figura 3.1.

Una gran parte de las variaciones de las propiedades mecánicas del hueso cortical están determinadas por la porosidad y el grado de mineralización, las características mecánicas del hueso cortical cambian con la edad, disminuyendo la fuerza de este del 2 al 5% por década.

El hueso trabecular tiene una porosidad del 50 al 98% y consiste de un marco de filamentos de hueso (trabéculas) entre las cuales se encuentra la médula ósea. Las propiedades mecánicas de los huesos trabeculares son muy diferentes a las del hueso cortical por la cantidad de porosidades. El hueso trabecular es mecánicamente anisotrópico, pero la anisotropía puede ser pequeña, por ejemplo, en la cabeza del fémur o muy marcada como en el caso del cuerpo vertebral.

Las mediciones por ultrasonido de las propiedades elásticas del hueso trabecular son complicadas por la alta porosidad y el hecho de que el tamaño de las porosidades son comparables al de la longitud de onda, estas porosidades producen dispersión de la onda ultrasónica; para analizar la propagación de la onda en el hueso es necesario incorporar estos efectos.

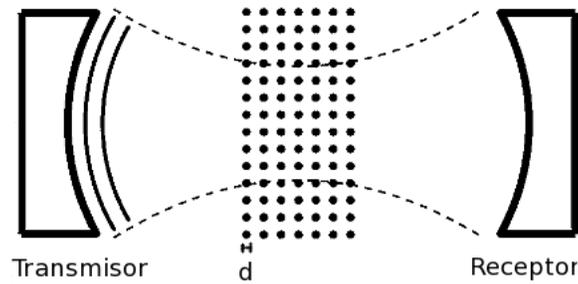


Figura 3.2: Phantom de hueso trabecular propuesto por Wear [57]

3.2. Hueso como un medio bifásico

Como se mencionó el hueso es un material con una complejidad muy alta, sin embargo se puede observar que en su mayor parte está constituido por minerales (hasta un 65%) y por tejido vivo (hasta un 33%), por lo anterior una buena aproximación del hueso trabecular es considerarlo como un material bifásico, es decir, que está compuesto solamente por dos materiales, uno, el que da la dureza del hueso (minerales) y el segundo el que da la elasticidad (médula), en base a esto y con algunas simplificaciones mencionadas más adelante podemos usar los modelos descritos anteriormente para calcular la velocidad de fase y atenuación con respecto a la microestructura del hueso.

3.3. Implementación del modelo

El modelado de sistemas físicos permite estudiar un fenómeno en base a variables que intervienen en éste, éstas variables se pueden interrelacionar entre sí y modificar para ver como modifican al fenómeno estudiado.

Los modelos de homogenización aplicados en este trabajo permitirán conocer la influencia del tamaño y concentración de las inclusiones sobre la dependencia frecuencial de la velocidad y atenuación del haz ultrasónico.

La implementación de los modelos en general consiste en los siguientes pasos

1. Condiciones de frontera para el caso dispersor sólido matriz fluido.

2. Aplicar las condiciones de frontera para calcular los coeficientes de dispersión o las propiedades del medio para así obtener la velocidad de fase y atenuación bajo distintos esquemas:
 - a) Concentración y tamaño de dispersor fijos variando la frecuencia de la onda incidente primaria.
 - b) Frecuencia y tamaño de dispersor fijos variando la concentración.
 - c) Frecuencia y concentración fijos variando el tamaño del dispersor.

Los primeros resultados son la comparación teórica de los tres métodos de homogenización de la velocidad de fase y de la atenuación.

Con los modelos de Waterman y Truell, Sabina y Willis y el MDGAC utilizando los datos de densidad, velocidad longitudinal y transversal mostrados en la tabla (3.1)[13, 37] se encuentran las constantes de Lamé y las propiedades del medio homogéneo para conocer el comportamiento de la onda ultrasónica en el hueso trabecular.

Los resultados obtenidos son la comparación de la velocidad de fase de los métodos arriba mencionados con datos experimentales obtenidos de un phantom de hueso trabecular, al no contar con datos experimentales de la atenuación solo se presentan los datos obtenidos por los métodos sin efectuar comparación con datos experimentales. Wear propone[57] un phantom de hueso trabecular el cual consiste en hilos de nylon paralelos en un arreglo bidimensional (ver figura 3.2), el diámetro de los hilos (d) corresponde al de las trabeculas, Wear utiliza 4 valores diferentes $152\mu\text{m}$, $203\mu\text{m}$, $254\mu\text{m}$ y $305\mu\text{m}$, el valor promedio de las trabeculas es $127\mu\text{m}$ [52]

Christensen[8] determinó que al utilizar el MDGAC en lugar del modelo de Waterman-Truell[55] es posible realizar el estudio de medios dispersivos a concentraciones más altas de dispersores.

Como mencionamos anteriormente además de considerar al hueso como un material bifásico debemos hacer otras consideraciones adicionales para aplicar estos modelos al hueso trabecular, si analizamos la estructura del hueso veremos que la dispersión ocurre por los filamentos de hueso en sí, no por la médula, por esta razón el hueso debe considerarse como el dispersor, por

lo tanto debemos invertir los valores de concentraciones de la matriz y los dispersores, es decir, debemos considerar una matriz de fluido con las características de la médula ósea con dispersores inmersos, los cuales tienen las propiedades del hueso trabecular, al hacer esto el porcentaje de dispersores considerados en el modelo es bajo (entre el 2 y el 50%).

Para implementar el MDGAC es necesario tener como valores iniciales el número de onda, el módulo volumétrico, la densidad y el módulo transversal efectivos k_0 , KV_0 , ρ y μ_0 respectivamente, estos valores dependen tanto de los dispersores (medio 2) como del medio fluido (medio 1) y son los valores efectivos obtenidos por el modelo de Sabina-Willis dados por las ecuaciones 3.1 y 3.2, se tiene:

$$KV = KV_1 + c \frac{h^2(k)(KV_2 - KV_1)}{1 + 4\kappa_s(KV_2 - KV_1)} \quad (3.1)$$

$$\mu = \mu_1 + c \frac{h^2(k)(\mu_2 - \mu_1)}{1 + 4\mu_s(\mu_2 - \mu_1)} \quad (3.2)$$

$$\rho = \rho_1 + c \frac{h^2(k)(\rho_2 - \rho_1)}{1 + 4\rho_m(\rho_2 - \rho_1)} \quad (3.3)$$

en donde KV_s , μ_s y ρ_m están dados por

$$\begin{aligned} KV_s &= \frac{1}{4} \frac{I_l + I_t}{\rho v_l^2} \\ \mu_s &= \frac{1}{8} \left(\frac{I_l + 1}{\rho v_l^2} + \frac{I_t + 1}{\rho v_t^2} \right) \\ \rho_m &= -\frac{1}{2} \frac{I_l + I_t}{\rho} \end{aligned}$$

con $h(k) = \frac{2}{ka} J_1(ka)$, $J_1(z)$ la función de Bessel de primer orden e $I_{l,t} \equiv I(k_{l,t})$

$$\begin{aligned} I(k) &= \frac{1}{2} i \pi (ka)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)!}{(n+2)(n!(n+1)!)^2} \left(\frac{ka}{2}\right)^{2n} \times \\ &\left\{ 1 + \frac{2i}{\pi} \left[\chi(2n+2) - \chi(n+2) - \chi(n+1) + \ln\left(\frac{ka}{2}\right) - \frac{1}{2n+4} \right] \right\} \end{aligned}$$

y $\chi(n) = -\gamma + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m}$ con γ la constante de Euler.

Las propiedades para dispersores esféricos obtenidas por el Método de Sabina y Willis estan en el Apéndice D

Los números de onda longitudinal y trasversal k_0 y K_0 quedan determinados por

$$k_0 = \sqrt{\frac{KV + \frac{4}{3}\mu}{\rho}} \quad (3.4)$$

$$K_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (3.5)$$

con KV_1 , KV_2 y KV los modulos volumetricos, μ_1 , μ_2 y μ los modulos transversales y ρ_1 , ρ_2 y ρ las densidades del medio 1 correspondiente al medio intermedio en la figura 2.3, el medio 2 correspondiente al dispersor en la figura 2.3 y el medio virtual correspondiente al medio efectivo en la figura 2.3.

Estos valores se utilizan para resolver el sistema de ecuaciones (2.55), con lo que se obtendrá el valor de las constantes de dispersión $A_n - H_n$; con estas constantes se pueden obtener los campos dispersados (2.16) y, sustituyendolos en (2.56) se obtendrá el número de onda; una vez que se conoce el número de onda k del material efectivo se itera, esto es, se resuelve nuevamente el sistema para encontrar un nuevo valor de k , esto se repite hasta alcanzar la convergencia de k o un umbral fijado por nosotros, en este caso este umbral sera una diferencia entre dos valores consecutivos de k de 10^{-2} ; ya que se realizó el calculo de k podemos conocer la velocidad y atenuación por (2.57).

3.4. Modelo para un medio fluido en coordenadas Cilíndricas

El modelo desarrollado en el capitulo anterior considera que tanto el medio como los dispersores son materiales visco elásticos, en el caso del hueso debemos recordar (como se mencionó en el capitulo 1) que está compuesto por una matriz de minerales y médula (fluido) en los espacios de ésta, para aplicar los modelos descritos es necesario adaptarlos para el caso en el que uno de los medios es un fluido.

En este caso nos enfocaremos en el intervalo en frecuencias más conveniente, el intervalo de frecuencias se determina dependiendo del tamaño de las trabeculas; para el caso de hueso trabecular este es aproximadamente de $\sim 10^{-4}$ lo que limita el estudio a frecuencias entre 200 y 1000 KHz.

Para obtener el número de onda del material efectivo se resuelve el sistema de ecuaciones dado por la ecuación 2.55 para el MDGAC y el sistema de ecuaciones equivalente del modelo de Waterman [22], calculando el número de onda k_0 con las velocidades dadas por la ecuación 3.6 y sustituyendo en la ecuación 2.57, en este caso al incorporar la atenuación en los parámetros de entrada podemos resolver el modelo tal cual lo plantean Waterman [55] y Yang [59].

Para suponer uno de los medios como fluido presentaremos dos enfoques reportadas en la literatura.

3.4.1. Enfoque de alta atenuación en uno de los sólidos [22]

Para considerar la atenuación que existe cuando se tiene un medio fluido Haiat propone utilizar las propiedades reológicas² de la matriz y el dispersor, estas propiedades corresponden a los datos de entrada del modelo, la relación entre la velocidad y la frecuencia está determinada por las relaciones Kramers-Kronig [39, 40], lo mismo ocurre para el coeficiente de atenuación. Específicamente estas relaciones suponen que la atenuación varía linealmente con la frecuencia $\alpha_j(f) = \beta f$ [21], en donde f y α_j están respectivamente en MHz y en dB/cm y j es el medio, la velocidad de fase está dada por

$$V_j^i(f) = \left(\frac{1}{V_0} - \frac{1.15 \times 10^{-5} \beta}{\pi^2} \ln \left(\frac{f}{f_0} \right) \right)^{-1} \quad (3.6)$$

V_0 es la velocidad a la frecuencia f_0 de referencia.

Al usar estas propiedades incorporamos dependencia de la velocidad con la frecuencia así como atenuación muy grande en la velocidad transversal de la onda, por lo que esta tiende muy rápidamente a cero en cuanto se encuentra en el medio fluido.

²propiedades de los fluidos, ej. viscosidad aparente, coeficiente de esfuerzos, etc.

Para este estudio tomaremos los valores de la Tabla 3.1 para el hueso.

medio	α_l	V_l	α_r	V_r	ρ
medula	f	$\left(\frac{1}{1480} - \frac{1.15 \times 10^{-5}}{\pi^2} \ln\left(\frac{f}{f_0}\right)\right)^{-1}$	$27800f$	$\left(\frac{1}{3.5} - \frac{0.32}{\pi^2} \ln\left(\frac{f}{f_0}\right)\right)^{-1}$	1000
dispersor	$4 \times f$	$\left(\frac{1}{4000} - \frac{4.6 \times 10^{-5}}{\pi^2} \ln\left(\frac{f}{f_0}\right)\right)^{-1}$	$7.6f$	$\left(\frac{1}{1800} - \frac{8.74 \times 10^{-5}}{\pi^2} \ln\left(\frac{f}{f_0}\right)\right)^{-1}$	1850

Tabla 3.1: Parámetros reológicos para hueso, la velocidad V_0 y atenuación α_x fueron obtenidos por Dussik[13]y Njeh[37]

Con estos valores como datos de inicio en los modelos propuesto por Sabina-Willis, Waterman-Truell y el MDGAC podemos observar el comportamiento de la velocidad a diferentes frecuencias.

En la Figura 3.3 observamos la velocidad de fase en función de la frecuencia obtenida para dispersores cilíndricos usando los parámetros reológicos propuestos por Haïat y manteniendo fijo el tamaño del dispersor y la concentración, en verde (---) observamos la velocidad calculada por el método auto consistente propuesto por Sabina y Willis, el valor absoluto de la pendiente asociada a la dispersión ($\frac{dv_l}{df}$) de este modelo es 14.39 MHz/m/s , en rojo por el método propuest por Waterman y Truell con dispersión 23.57 MHz/m/s y en azul la curva de velocidad obtenida por el MDGAC con dispersión de 23.04 MHz/m/s .

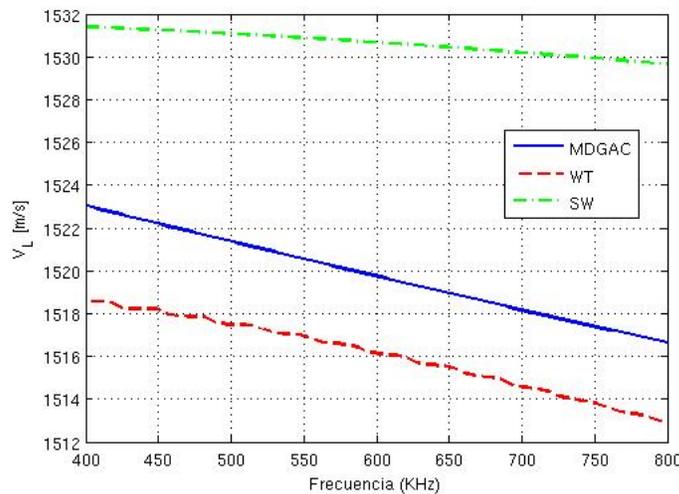


Figura 3.3: Velocidad de fase vs frecuencia considerando los parámetros reológicos de la Tabla 3.1. Se consideran dispersores cilíndricos con una concentración de 7.9% y diámetro $a = 254 \mu\text{m}$

En el caso de la atenuación en la Figura 3.4 observamos también un comportamiento muy

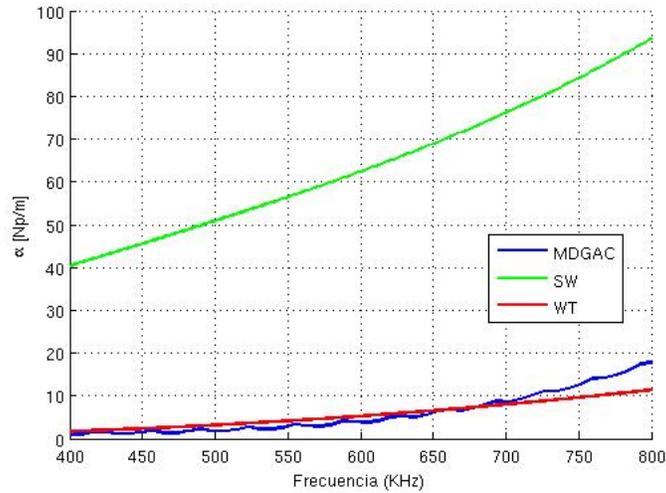


Figura 3.4: Atenuación vs frecuencia con las propiedades reológicas de la Tabla 3.1

similar entre el modelo de Waterman y el modelo de Yang, el modelo de Sabina-Willis da valores mayores para la atenuación.

3.4.2. Enfoque de condiciones de frontera fluido-sólido

Otra forma de abordar el problema de tener uno de los medios fluido es resolver el sistema de ecuaciones considerando desde un inicio las condiciones de frontera dadas por el medio fluido como lo propone Molero[32], en este caso las condiciones de continuidad cambian, ya que en un fluido sólo existe desplazamiento radial y la tensión transversal es cero, es decir, se tiene para el MDGAC un sistema de 6 ecuaciones y para el modelo de Waterman se tiene un sistema de 3 ecuaciones, el sistema de ecuaciones para el MDGAC esta determinado por:

$$\begin{aligned}
 u_r^m &= u_r^b \\
 \sigma_r^m &= \sigma_r^b \\
 \sigma_{r\theta}^m &= 0 \\
 u_r^b &= u_r^a \\
 \sigma_r^b &= \sigma_r^a \\
 0 &= \sigma_{r\theta}^a
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

resolviendo nuevamente para una onda incidente el sistema de ecuaciones (2.55) queda de la forma:

$$\begin{bmatrix} P_m & -P'_b & -P_b & 0 \\ Q_m & -Q'_b & -Q_b & 0 \\ 0_{1 \times 2} & -P'_a & -P_a & P_i^f \\ 0 & -Q'_a & -Q_a & P_i^f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \\ E_n \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P'_m \\ \alpha Q'_m \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

con

$$\begin{aligned} P_i^f &= nJ_n(kaa) - (kaa)J_{n+1}(kaa) \\ Q_i^f &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \frac{\rho_a}{\rho_b} K_b^2 a^2 J_n(kaa) \\ 0 \end{bmatrix} \\ P'_a &= \begin{bmatrix} nJ_n(kaa) - kaaJ_{n+1}(kaa) & -n(n+1)J_n(Kaa) \end{bmatrix} \\ P_a &= \begin{bmatrix} nH_n^1(kaa) - kaaH_{n+1}^1(kaa) & -n(n+1)H_n^1(Kaa) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.9)$$

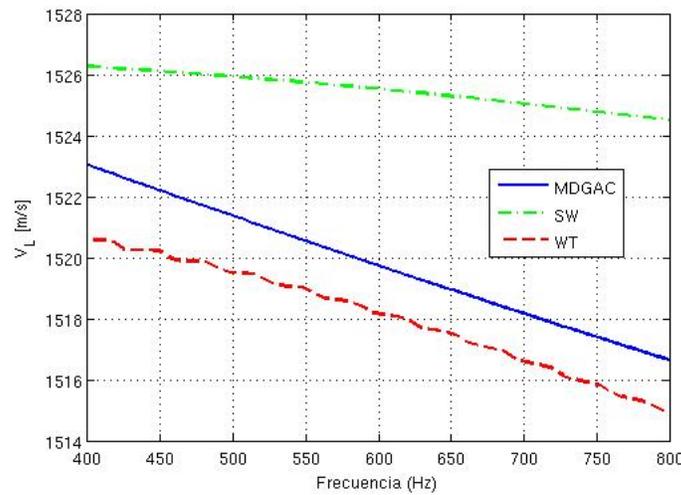


Figura 3.5: Velocidad de fase vs frecuencia bajo condiciones de frontera de un fluido con dispersores cilíndricos[32]

La Figura 3.5 muestra el comportamiento de la velocidad dado por los métodos descritos anteriormente, usando las condiciones de frontera para un fluido, se observa comportamiento decreciente al aumentar la frecuencia, en rojo la velocidad obtenida por Waterman y Truell con valor absoluto de la dispersión de 23.77 MHz/m/s , en azul la velocidad obtenida por el MDGAC con valor absoluto de la dispersión 23.48 MHz/m/s y en verde la velocidad obtenida por el modelo de Sabina y Willis [41] con valor absoluto de la dispersión 14.01 MHz/m/s .

De las figuras 3.3 y 3.5 observamos que las dos formas de tratar a un sistema con un medio fluido dan resultados similares, se obtuvieron diferencias máximas entre las dos aproximaciones del 0.2%.

Otro resultado importante que se puede observar es que el método de Waterman y Truell produce para estas concentraciones resultados muy similares al método desarrollado por Yang [33], a diferencia del modelo propuesto por Sabina que da valores mayores de las velocidades.

En las figuras presentadas se observa el mismo comportamiento decreciente de la velocidad de fase al aumentar la frecuencia manteniendo fija la concentración y el radio de los dispersores, en la Figura 3.3 se observan valores ligeramente mayores que los valores obtenidos por el modelo que considera las condiciones de frontera de un fluido (Figura 3.5), en la Figura 3.4 y en la Figura 3.6 observamos comportamiento similares de los dos enfoques para la atenuación, observando que al aumentar la frecuencia se tiene mayor diferencia entre los resultados obtenidos por los modelos (hasta 5%), en vista de la similitud entre estos resultados para estudiar la dependencia de la velocidad con la concentración y con el tamaño del dispersor mostraremos sólo las modificaciones para medios fluidos propuestas por Molero [33] por ser la que se aproxima más a la realidad del fenómeno estudiado, sin embargo es posible usar cualquiera de las dos aproximaciones.

Para poder estudiar la relación que existe entre la velocidad de fase y la cantidad de dispersores se muestra ahora en la Figura 3.7 la velocidad a diferentes concentraciones de dispersores, debemos recordar que por las consideraciones hechas al disminuir la cantidad de dispersores disminuimos la cantidad de material óseo en el modelo por lo que sería equivalente a una dis-

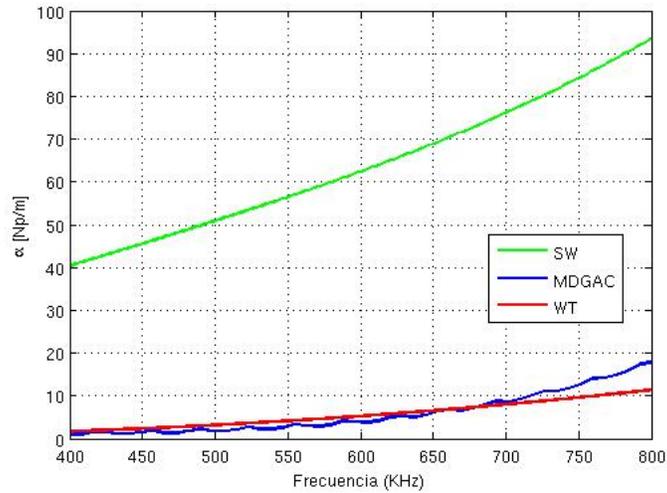


Figura 3.6: Atenuación vs frecuencia con las condiciones de frontera de un fluido

minución en la cantidad de hueso o de la densidad ósea.

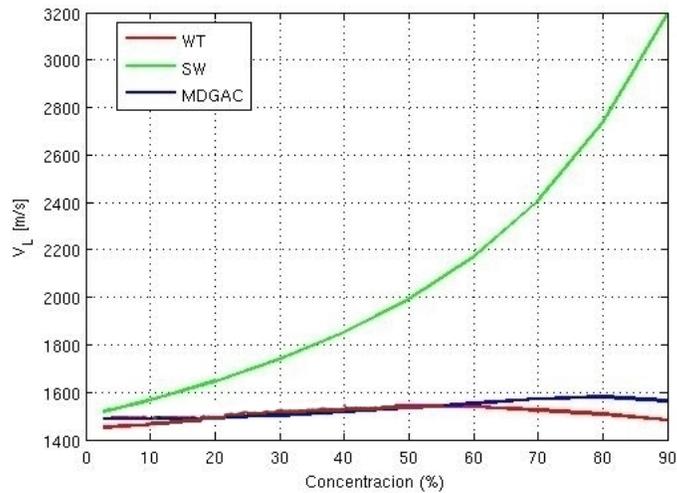


Figura 3.7: Velocidad de fase vs concentraciones que van desde el 2 hasta el 90% a una frecuencia fija de 500 KHz

Observamos en la Figura 3.7 que al aumentar la cantidad de dispersores aumentará la velocidad en el medio efectivo, el modelo de Sabina-Willis da resultados siempre muy por arriba de los obtenidos por los modelos de Waterman-Truell y el MDGAC, observamos que al aumentar la concentración de dispersores el modelo comienza a dar resultados mucho mayores; el modelo de Waterman-Truell observamos que tiene un comportamiento creciente hasta concentra-

ciones de dispersores de 30-40%, a concentraciones mayores comienza a disminuir la velocidad, el MDGAC da resultados similares, este modelo presenta velocidad creciente hasta valores de 60-70% y a concentraciones de dispersores mayores comienza a disminuir la velocidad. Estos resultados indican que el modelo de Sabina-Willis funciona aceptablemente para concentraciones menores al 10%, el modelo desarrollado por Waterman y Truell funciona bien para concentraciones de hasta 30-40% y el modelo desarrollado por Yang (MDGAC) funciona correctamente hasta concentraciones de 60-70%. Otro cambio que podemos introducir en el modelo es cambiar el diámetro del dispersor, lo que al igual que el cambio en la concentración también implicará un cambio en la cantidad de hueso en el medio.

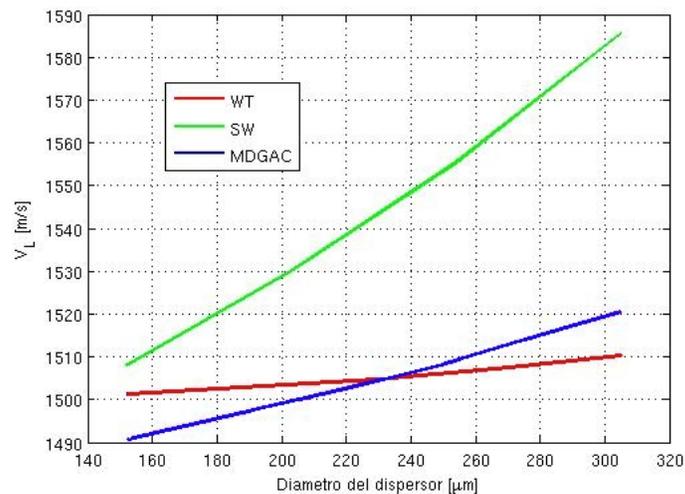


Figura 3.8: Velocidad de fase vs diámetro del dispersor, éste ultimo en el rango de 150 a 300 μm

En este caso nuevamente se observa en la Figura 3.8 un aumento de la velocidad de fase al aumentar el radio del dispersor, en este caso se observa un aumento lineal mayor de la velocidad de fase al aumento presentado en el caso del cambio en la concentración de dispersores, esto se debe al aumento en el área del dispersor, observamos nuevamente que el modelo de Sabina Willis da resultados mucho mayores en cuanto a la velocidad que los obtenidos por el modelo de Waterman-Truell y el MDGAC.

La atenuación para diferentes concentraciones y para diferentes diámetros de dispersor considerando el modelo de Sabina y Willis, el de Waterman-Truell y el MDGAC se observa en las

Figuras 3.9 y 3.10, en la Figura 3.9 vemos que la atenuación dada por el modelo de Sabina y Willis es mucho menor a la obtenida por los otros dos modelos, Los modelo de Waterman y Truell y el MDGAC dan resultados similares, el MDGAC da resultados ligeramente mayores al modelo de Waterman-Truell, aumentando la diferencia entre estos al aumentar la concentración, hasta una diferencia entre ellos menor al 7%. En la Figura 3.10 observamos que al aumentar el diámetro del dispersor también aumenta la atenuación, esto se debe a que aumenta el fenómeno dispersión.

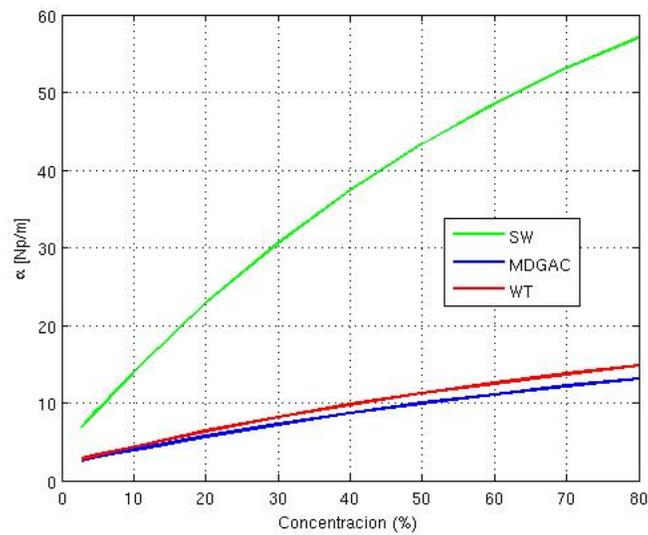


Figura 3.9: Atenuación para diferentes concentraciones de dispersores de 2 hasta el 80% a una frecuencia fija de 500 KHz

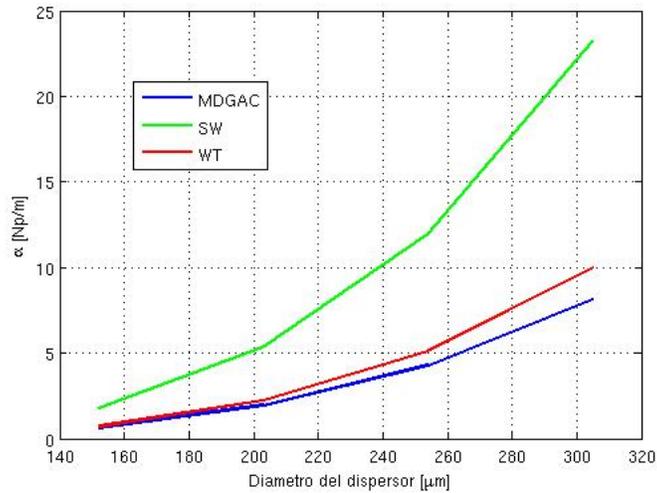


Figura 3.10: Atenuación vs diámetro del dispersor con rango de 150 a 300 μm

3.5. Validación del modelo para dispersores cilíndricos

De la misma manera que hace Haïat en su artículo[22] nosotros con el fin de validar el modelo utilizaremos los datos obtenidos en el caso de dispersores cilíndricos y compararemos nuestros resultados con los datos experimentales obtenidos por Wear [57], quien propone como se menciona en la sección 3.3 realizar un phantom de hueso trabecular utilizando hilos de Nylon paralelos en un arreglo periodico inmersos en agua (ver figura 3.2). La justificación para sustituir en el phantom a la médula ósea por agua es por el hecho de que la velocidad longitudinal del sonido en agua es de 1480 m/s, esta velocidad es proporcional a la de la médula. La medición de velocidad del sonido en médula aislada es difícil de realizar por lo que se utiliza el valor promedio de la velocidad del sonido en los tejidos blandos, este está en el rango de 1400 a 1600 m/s [12]. La velocidad longitudinal del sonido en Nylon es de 2600 m/s la cual es un poco menor que la del material óseo mineralizado (2800 a 4000 m/s a 500 kHz) [12] sin embargo esta velocidad es todavía mucho mayor a la de la médula ósea o el agua, además los cables de Nylon exhiben dispersión dependiente de la frecuencia similar a la exhibida por el hueso trabecular [56].

Utilizando los valores reológicos de agua y Nylon de la Tabla 3.2 obtenemos la curva de velocidad mostrada en la Figura 3.11

material	α_i	V_i	α_t	V_t	ρ
agua	0	1480	500	3.5	1000
nylon	$2.34 \times f$	$\left(\frac{1}{2600} - \frac{2.69 \times 10^{-5}}{\pi^2} \ln\left(\frac{f}{f_0}\right)\right)^{-1}$	$2.34 \times f$	$\left(\frac{1}{1300} - \frac{2.69 \times 10^{-5}}{\pi^2} \ln\left(\frac{f}{f_0}\right)\right)^{-1}$	1100

Tabla 3.2: Valores utilizados para simular la velocidad en el Phantom de Wear

Los Phantoms realizados por Wear tienen hilos con diámetros d que van desde los $152 \mu m$ a $305 \mu m$ y concentraciones c que van desde 1.8% a 11.4 %.

El comportamiento de la velocidad para los modelos de Waterman-Truell, MDGAC y Sabina-Willis junto con los datos experimentales obtenidos de Wear se observan en la Figura 3.11, observamos que la velocidad disminuye al aumentar la frecuencia, el valor absoluto de la pendiente asociada a la dispersión ($\frac{dv_i}{df}$) de los datos experimentales obtenidos por Wear es $11.9 m/s/MHz$ mientras que los valores absolutos de las pendientes de las curvas de velocidades obtenidas por el modelo de Waterman-Truell, el modelo de Sabina-Willis y el MDGAC es de $9.08 m/s/MHz$, $2.8 m/s/MHz$ y $9.03 m/s/MHz$ respectivamente, podemos ver que los valores de velocidad de los modelos son ligeramente mayores que los experimentales.

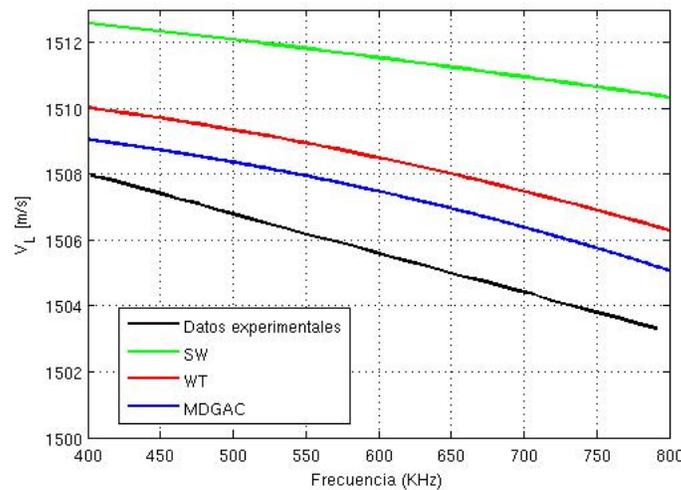


Figura 3.11: Velocidad de fase para dispersores cilíndricos con una concentración de 7.9% y un diámetro $a = 254 \mu m$

Variando ahora el radio de los dispersores se obtiene el perfil de velocidad mostrado en la Figura 3.12, se observa un comportamiento creciente de la velocidad, notamos en este caso que

los valores de los modelos son muy similares a los obtenidos experimentalmente

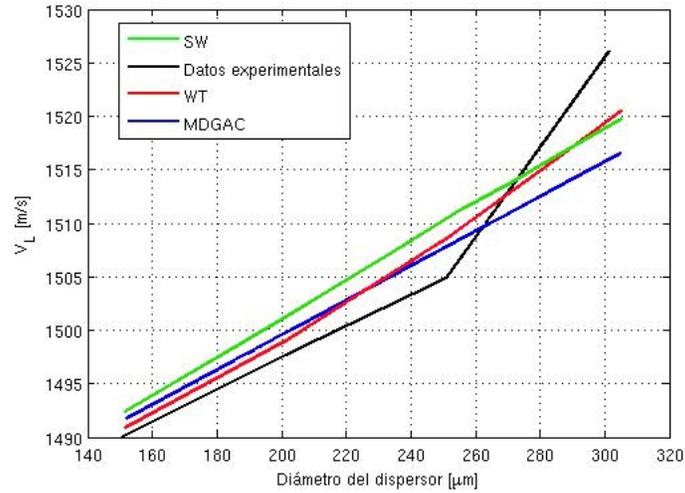


Figura 3.12: Velocidad de fase vs diámetro del dispersor desde 150 a 300μm

Ahora, al cambiar la concentración de los dispersores se observa en la Figura 3.13 que el aumento en la cantidad de dispersores aumenta la velocidad de fase, esto se explica por que al aumentar la concentración de los dispersores aumenta la cantidad de material con velocidad de propagacion mayor, en este caso el nylon.

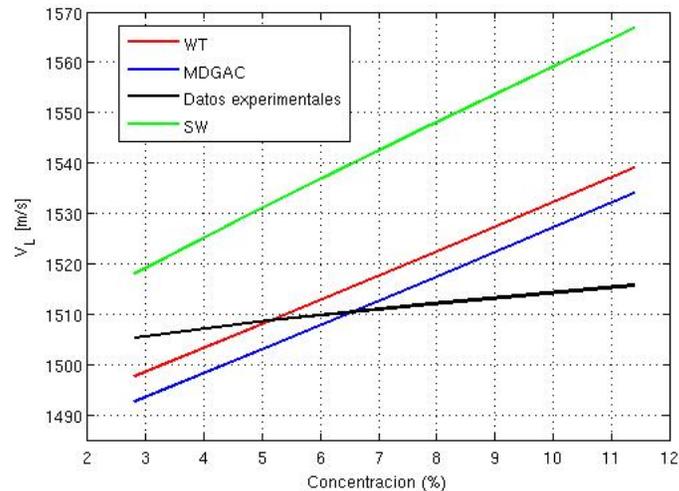


Figura 3.13: Velocidad de fase vs concentración a una frecuencia fija de 500 KHz

La atenuación vs frecuencia que se tiene para este phantom se muestra en la Figura 3.14, en

esta figura no se presentan datos experimentales por no contar con ellos, sin embargo se observa un comportamiento similar entre el modelo de Waterman y Truell y el MDGAC, el modelo de Sabina-Willis da resultados por debajo de los modelos mencionados anteriormente.

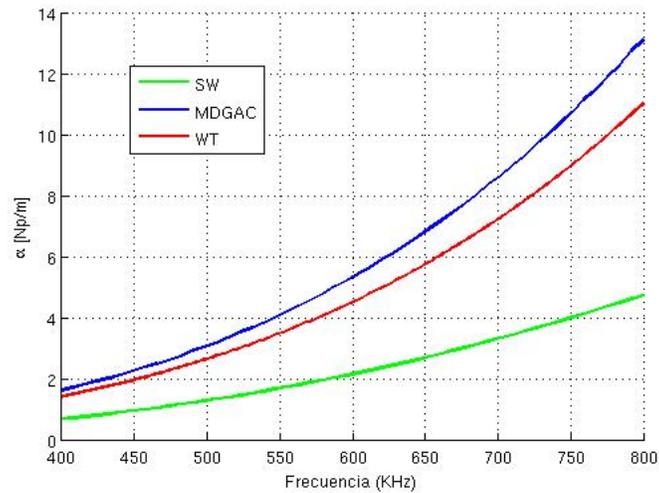


Figura 3.14: Atenuación vs Frecuencia para phantom de hueso trabecular

La atenuación cambiando la concentración de hilos de nylon inmersos en agua se muestra en la Figura 3.15, nuevamente solo se presentan los resultados teóricos por no tener resultados experimentales; se observa que los modelos de Waterman-Truell y MDGAC dan resultados similares mientras que el modelo de Sabina-Willis nuevamente da resultados por debajo de los modelos de Waterman-Truell y MDGAC.

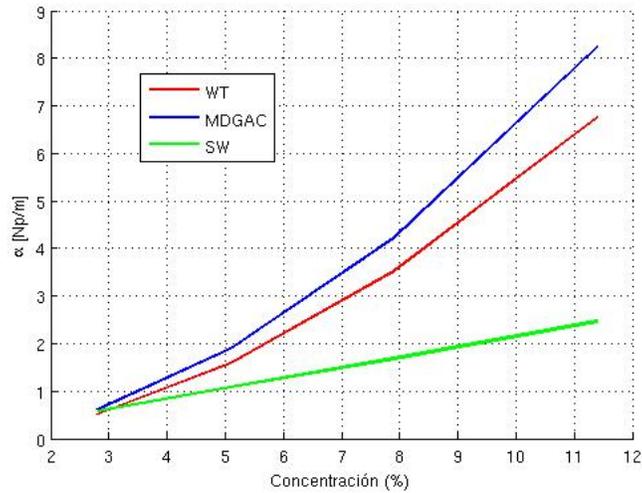


Figura 3.15: Atenuación vs concentración para phantom de hueso trabecular

La atenuación para diferentes diámetros de los hilos se muestra en la Figura 3.16 observamos que los tres modelos dan resultados diferentes, el MDGAC da los mayores resultados mientras que el modelo de Sabina-Willis da resultados muy pequeños.

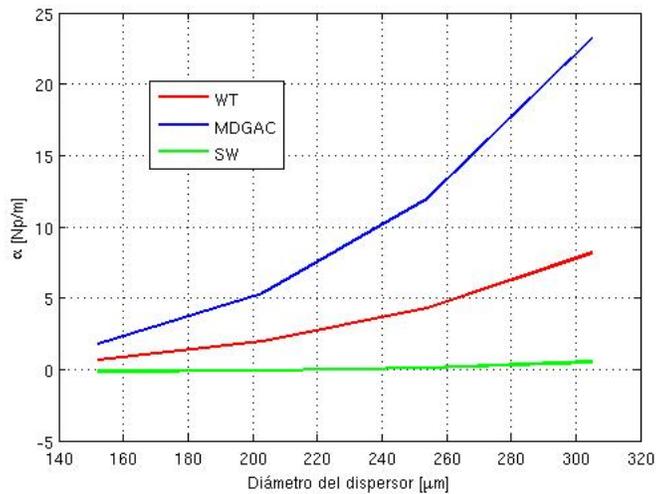


Figura 3.16: Atenuación vs diámetro del dispersor para phantom de hueso trabecular

3.6. Análisis del tamaño del dispersor

Si ampliamos el intervalo de estudio de la frecuencia observamos en la Figura 3.17 las velocidades de fase obtenidas por los modelos descritos anteriormente, se muestra que al aumentar el rango de frecuencias, es decir al hacer la longitud de onda y el tamaño del dispersor comparables ($d/\lambda \approx 1$), todos los modelos tienden a la velocidad de la matriz, esto se debe a que al aumentar la frecuencia la longitud de onda se hace mucho menor al diámetro del dispersor, por lo que lo ve como un reflector ahora, los modelos de Waterman-Truell y el de Sabina-Willis tienden suavemente a la velocidad de la matriz, el MDGAC presenta oscilaciones antes de tender a la velocidad de la matriz.

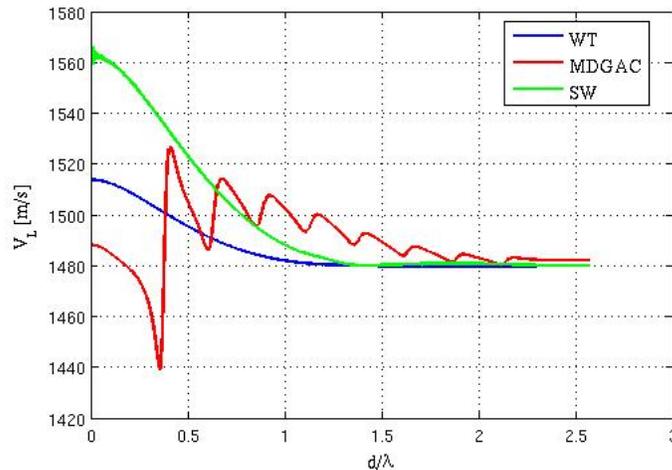


Figura 3.17: Velocidad de fase de los tres modelos contra d/λ

En la Figura 3.18 observamos en mayor detalle la velocidad obtenida por el MDGAC, se observan varios rebotes en el comportamiento de la velocidad hasta que tiende a obtenerse a altas frecuencias la velocidad de la matriz, esto se observa en el intervalo comprendido entre los 2 y los 14 MHz, se observa un pico a los 2 MHz lo cual corresponde a una longitud de onda de $760 \mu\text{m}$ (longitud de onda mayor al tamaño de la matriz que rodea al dispersor ($500 \mu\text{m}$)), la velocidad de la matriz se alcanza cuando la longitud de onda es $105 \mu\text{m}$ (longitud menor al tamaño de la matriz que rodea al dispersor). esto es debido a que el dispersor ya es muy grande en comparación con la longitud de onda, en la zona de rebotes se piensa que el modelo no sabe

como interpretar al objeto, si como un dispersor o como un reflector, para los otros modelos vemos que no se tienen estos problemas, ellos tienden suavemente a la velocidad de la matriz cuando la relación entre la longitud de onda y el diámetro del dispersor tiende a uno.

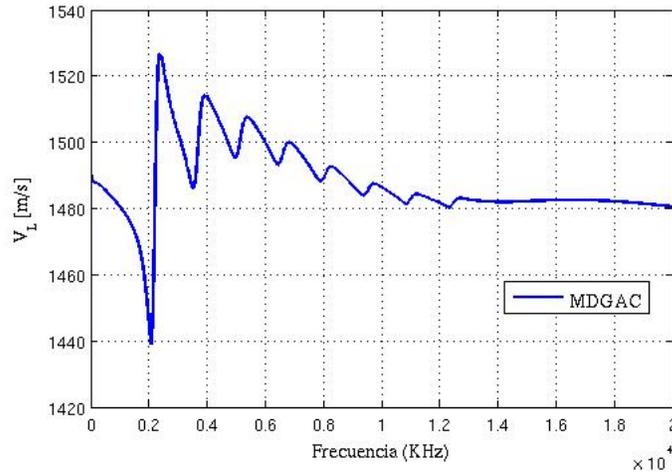


Figura 3.18: Velocidad de fase contra frecuencia para el MDGAC

Cuando se varía el tamaño del dispersor se espera que el primer rebote en el caso del MDGAC cambie de lugar ya que al disminuir el diámetro del dispersor también se cambia la relación con respecto a la longitud de onda, en la Figura 3.19 observamos en rojo la curva de velocidad para un dispersor con diámetro $305 \mu\text{m}$, en verde de $254 \mu\text{m}$ y en azul de $152 \mu\text{m}$, observamos que al aumentar el diámetro el primer rebote se recorre a la izquierda ya que al hacer el dispersor de menor tamaño el modelo requiere de una longitud de onda menor para ver al dispersor como un reflector, en la ordenada mostramos la relación de la longitud de onda con el diámetro del dispersor de mayor tamaño ($305 \mu\text{m}$), vemos que las oscilaciones terminan al llegar la relación prácticamente a uno para luego converger a la velocidad de la matriz, en este punto es cuando el modelo comienza a tomar al dispersor como un reflector.

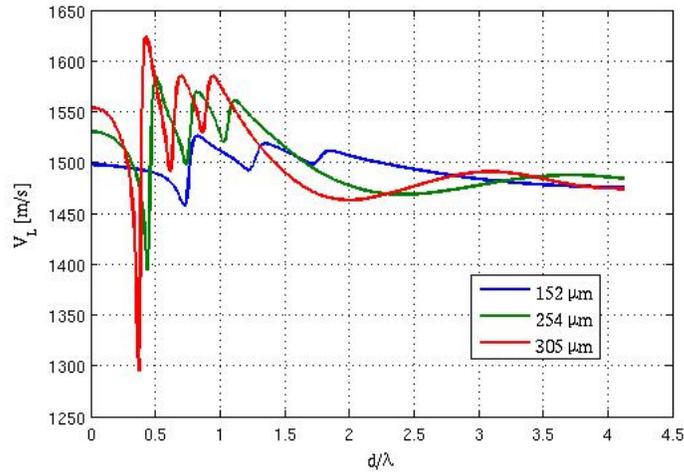


Figura 3.19: Velocidad de fase para el MDGAC para diferentes diámetros de dispersor

Si cambiamos ahora el diámetro de la matriz dejando fijo el diámetro del dispersor a $254 \mu\text{m}$ observamos que el primer rebote no cambia de lugar como es de esperarse por mantenerse la relación entre la longitud de onda y el diámetro del dispersor, sin embargo se observa mayor atenuación cuando aumenta el diámetro de la matriz por aumentar la distancia recorrida por el haz, además que las oscilaciones continúan hasta la relación $d/\lambda = 2$ en la Figura 3.20 se muestra en rojo un diámetro de $400 \mu\text{m}$, en azul un diámetro de $800 \mu\text{m}$ y en negro de $1200 \mu\text{m}$.

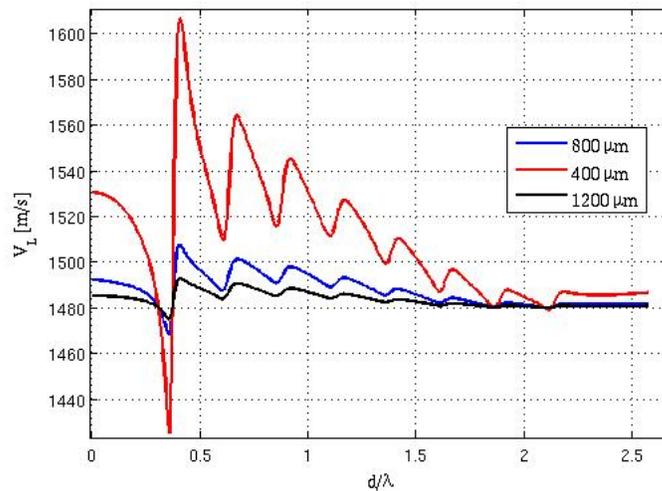


Figura 3.20: Velocidad de fase para el MDGAC para diferentes diámetros de matriz

De las Figuras 3.17-3.20 podemos observar que el intervalo de estudio esta perfectamente

justificado, ya que es en donde los modelos funcionan de mejor manera por encontrarse todavía en la región de dispersión.

Capítulo 4

Discusión y Conclusiones

Mediante modelos de homogeneización se muestra como se comporta una onda en un medio dispersivo, esto permite observar como afectan las diferentes características de los materiales a la dispersión de las ondas ultrasónicas, para lo que se consideran tres casos i) a un diámetro y concentración constante, ii) a diferentes diámetros del dispersor manteniendo fija la concentración a una determinada frecuencia (500 KHz), y iii) a diferentes fracciones volumétricas manteniendo fijo el diámetro del dispersor y a la misma frecuencia de 500 KHz. Las características que se analizan son la variación de la velocidad de fase y atenuación por dispersión dependientes de la frecuencia, la concentración y el tamaño del dispersor.

En esta tesis, a partir de ecuaciones de ondas en medios elásticos y de las soluciones clásicas para el problema de un único dispersor se obtuvo un sistema que es capaz de obtener soluciones analíticamente exactas para ensambles de múltiples dispersores. El trabajo se limita a la formulación, ejecución y demostración de la capacidad de este modelo. Los logros de la tesis pueden resumirse en lo siguiente.

Comenzamos este trabajo haciendo un análisis previo de los estudios ya realizados por otros autores, con el fin de conocer las líneas en que se están centrando los esfuerzos y prever aquellos aspectos sobre los que nosotros podemos realizar alguna aportación relevante por su novedad, o

para afianzar los resultados obtenidos por otros autores, de este análisis se observa que las pruebas por ultrasonido en hueso trabecular han tenido recientemente un gran avance por las múltiples ventajas que se tienen frente a otros métodos de evaluación, sin embargo todavía existen dificultades en cuanto a la correcta interpretación y obtención de los parámetros macro-estructurales.

Se derivó una solución exacta analítica para el problema de un solo dispersor en simetría esférica y cilíndrica sometido a ondas longitudinales en base a la teoría de homogeneización. Se aplicó la solución para dispersión múltiple y se comprobó en el caso de ondas incidentes longitudinales.

Se mostró el concepto de la matriz formada por los desplazamientos y torsiones tal como la propone Yang [59, 60], se derivaron propiedades impuestas por los principios físicos y por las simetrías del problema de manera de adaptar el modelo a nuestro sistema.

Para modelar la propagación de las ondas se utilizó el Modelo Auto-consistente de Waterman-Truell, el modelo Auto-consistente de Sabina-Willis y el Modelo Dinámico Generalizado Auto-consistente (MDGAC), restringiendo el espectro de frecuencias de las ondas incidentes para asegurar la validez del marco teórico elegido; al observar el comportamiento a altas frecuencias de los modelos (Figura 3.17) se observa que cuando se usan frecuencias por arriba de 1 Mhz los modelos consideran a los dispersores como si fueran reflectores ya que estos se hacen muy grandes en comparación con la longitud de onda del haz, por esta razón para el tamaño de dispersores usados, es decir, para el tamaño promedio de trabeculas en hueso trabecular el análisis debe hacerse a frecuencias por debajo de 1 Mhz.

Se realizó la simulación para un compuesto de fibras de nylon en una matriz de agua así como para una matriz de medula con dispersores de hueso. A través de esto se demostró que este modelo es capaz de realizar simulaciones de materiales bifásicos como es el caso del hueso trabecular a escala completa. Se presentaron ejemplos para demostrar la validez de las simulaciones y se establecieron relaciones entre los resultados de la simulación y los parámetros medibles experimentalmente.

Se obtuvieron la velocidad de fase de una onda longitudinal y la atenuación de los com-

puestos simulados que consisten en partículas esféricas o cilíndricas de nylon ó hueso trabecular (minerales) incrustadas en una matriz fluida homogénea (agua ó médula). Mediciones hechas en un Phantom se compararon con los modelos teóricos de dispersión empleados obteniendo resultados congruentes en el caso de una concentración baja de inclusiones, por otra parte, en concentraciones más altas de los modelos se obtuvieron velocidades de fase mayores a las reportadas experimentalmente [57]; se observó que la atenuación tiene comportamiento creciente al aumentar la frecuencia, este comportamiento se mantuvo al aumentar el tamaño del dispersor o la concentración de estos debido al aumento de la dispersión, sin embargo el modelo no se pudo comparar con datos experimentales de atenuación por no contar con estos.

Más específicamente se tienen los siguientes resultados:

- Al variar la frecuencia manteniendo fija la concentración de dispersores y el radio de estos.

Para las ondas longitudinales, se observó de las Figuras 3.3 y 3.5 que la velocidad de fase en función de la frecuencia disminuye a medida que aumenta la frecuencia debido a volverse la longitud de onda menor y por tanto los dispersores de mayor tamaño comparativamente (la onda es reflejada).

En el caso de la atenuación se observa en la Figura 3.4 y 3.6 que la atenuación aumenta al aumentar la frecuencia debido al aumento de interacciones entre las ondas dispersadas

- Al variar la concentración manteniendo fijo el radio del dispersor a una frecuencia de 500 KHz.

Cuanto mayor es la fracción volumétrica de las partículas, mayor será el efecto de las propiedades de éstas en el material.

En las gráficas de velocidad de fase vs concentración se observa que aumenta la velocidad de fase con el aumento de la concentración. Las constantes de Lamé, y por lo tanto, las propiedades dinámicas de los compuestos siguen esta misma tendencia.

Si observamos la atenuación para diferentes concentraciones (Figura 3.9) vemos nuevamente que presenta un comportamiento creciente, al aumentar el número de dispersores

aumentan las interacciones entre los campos dispersados por cada dispersor, por lo que es congruente observar este comportamiento.

- Al variar el tamaño del dispersor manteniendo fija la concentración a una frecuencia de 500 KHz.

Al cambiar el diámetro del dispersor (Figura 3.10) se observa el mismo comportamiento creciente, en este caso la atenuación crece mas rápidamente por aumentar el área del dispersor y aumentar el fenómeno de dispersión. La presencia de inclusiones sustituye una porción de volumen de la muestra ocupada por la matriz de alta atenuación por la de las inclusiones de atenuación menor, la absorción es comparativamente insignificante al fenómeno de atenuación por dispersión.

Se debe tener en cuenta la dependencia de la fracción volumétrica de los dispersores y el radio de estos, de modo tal que no se sobrestimen las velocidades de propagación en el caso de la concentración o de subestimar en el caso del tamaño del dispersor (Figura 3.13 y 3.14). Los resultados obtenidos corroboran estos Modelos como un marco adecuado para el estudio de materiales dispersivos, en este caso el material de interés es hueso trabecular, se encontró que el Modelo propuesto por Waterman y Truell es suficiente para las bajas concentraciones encontradas en el hueso trabecular [33]; se debe de todas maneras profundizar el estudio, por ejemplo considerando modelos n-fásicos[32]. Se espera reportar resultados en este sentido en trabajos futuros.

El análisis de los resultados de las simulaciones mostró un comportamiento característico de la velocidad de fase para los diferentes parámetros y simetrías de los dispersores a diferentes frecuencias

Se mostró que la velocidad de fase en los materiales depende del número de onda incidente, del tamaño de las partículas y de la fracción de volumen de estas en el medio, lo cual es coherente con los resultado en [55, 59].

Las comparaciones con los datos experimentales y la teoría permiten validar el modelo al nivel del comportamiento de la velocidad de fase en el caso de dispersores cilíndricos. El vínculo

entre la velocidad, el volumen y el tamaño de los dispersores fue descrito correctamente por el modelo.

Los modelos de homogeneización son claramente importantes para explicar la propagación de ultrasonidos en el hueso esponjoso o trabecular, sin embargo observamos que estos modelos todavía presentan deficiencias para reproducir los resultados experimentales suficientemente bien como para ser usado como una explicación completa.

Cabe señalar, por supuesto, que algunos de los valores utilizados en este trabajo se estiman mediante otros métodos [45], y estos valores, en particular, las constantes de Lamé, son parámetros claves. La atenuación de la onda y la velocidad calculada son muy sensibles a los cambios en estos parámetros, así que si más de uno se utiliza como un valor ajustable los resultados obtenidos pueden presentar cambios importantes.

La aplicación de cualquier teoría para simular la propagación de una onda ultrasónica en el hueso esponjoso o trabecular requiere de mayor precisión en los valores de los parámetros estructurales. El objetivo final del trabajo descrito aquí es predecir la densidad ósea, la resistencia y la micro estructura del hueso a partir de mediciones por ultrasonido con el objetivo de identificar la aparición de la osteoporosis lo antes posible. Cualquier teoría existente para estudiar materiales porosos tiene aplicación para estudiar la propagación del haz en el hueso.

Es necesario continuar con trabajo experimental y teórico para seguir proporcionando información adicional necesaria para mejorar los estudios y el diagnóstico de la osteoporosis mediante técnicas de ultrasonido. Debe establecerse una explicación teórica adecuada de la propagación de ultrasonidos en términos de la micro arquitectura ósea y la densidad.

El uso de este modelo en hueso trabecular representa los límites de su aplicabilidad.

En conclusión, es evidente que la atenuación y velocidad ultrasónica en el hueso esponjoso se correlacionan con el volumen de hueso trabecular, sin embargo, este modelo produce resultados que son significativamente diferentes a partir de los parámetros introducidos.

En el futuro, las principales perspectivas para este estudio son a tener en cuenta de manera más realista la morfología de los dispersores, es decir, considerar distintos diámetros o distintas

simetrías, con el fin de apuntar a una validación cuantitativa del problema real, las simulaciones se pueden realizar para observar la relación entre los parámetros de micro y macro escala de las propiedades de materiales compuestos. Estas simulaciones mejorarían la comprensión de hueso trabecular y en última instancia mostrara la relación de los parámetros en estas dos escalas.

Bibliografía

- [1] <http://www.iofbonehealth.org/about-iof/the-organization/committee-of-scientific-advisors-csa/working-groups/bone-imaging.html>, 10 2010.
- [2] <http://www.nhs.uk/news/2007/december/pages/depressedwomenandosteoporosis.aspx>, Diciembre 2007.
- [3] M. A. Biot. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid i low-frequency range. *journal of Acoustical Society of America*, 28(2):168–178, 1956.
- [4] M. A. Biot. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media. *Journal of Applied Physics*, 33(4), abril 1962.
- [5] H. G. Bone, S. L. Greenspan, and C. McKeever. Alendronate and estrogen effects in postmenopausal women with low bone mineral density. *J. Clin Endocrinol. Metab*, 85:720–726, 2000.
- [6] C. Di Carlo, G. A. Tommaselli, and C. Nappi. Effects of sex steroid hormones and menopause on serum leptin concentrations. *Gynecol Endocrinol*, 16:479–491, 2002.
- [7] P. M. Chavassieux, M. E. Arlot, C. Reda, and L. Wei. Histomorphometric assessment of the long-term effects of alendronate on bone quality and remodeling in patients with osteoporosis. *J. Clin. Invest.*, 100:1475–1480, 1997.
- [8] R. M. Christensen. A critical evaluation for a class of micro-mechanics models. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 38:379–404, 1990.

- [9] R. M. Christensen and K. H. Lo. Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinders models. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 27(4):315–330, 1979.
- [10] J. Terán Dávila and A. D. Teppa Garrán. Moduladores selectivos de los receptores estrogénicos (serms): bioquímica, farmacología y aplicación clínica en ginecología. *Ginecol Obst Mex*, 73:424–435, 2005.
- [11] P. D. Delmas. Do we need to change the who definition of osteoporosis? *Osteoporos Int*, 11:189–191, 2000.
- [12] F. A. Duck. Physical properties of tissue. *Cambridge University Press, Cambridge, UK*, 1990.
- [13] K. T. Dussik and D. J. Fritch. Determination of sound attenuation and sound velocity in the structure constituting the joints, and of the ultrasonic field distribution with the joints of living tissues and anatomical preparations, both in normal and pathological conditions. *National Institute of Health Project Progress Report*, (A454), 1956.
- [14] Paul Filippi. *Acoustics: Basic Physics, Theory and Methods*. Academic, San Diego, 1999.
- [15] L. Foldy. The multiple scattering of waves. *Physical Review*, 67:107–119, 1945.
- [16] A. W. Friedman. Important determinants of bone strength: Beyond bone mineral density. *J. Clin. Rheumatol.*, 12:70–77, 2006.
- [17] A. D. Teppa Garrán and I. Terán Dávila. Nuevos aspectos bioquímicos y moleculares de la acción de los estrógenos. *Ginecol Obst Mex*, 73:436–442, 2005.
- [18] F. Gassmann. Über die elastizität poroser medien (on the elasticity of porous media). *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gessellschaft*, 96:1–23, 1951.

- [19] Patricia M. Gauzellino, Juan E. Santos, and Fabio I. Zyserman. Propagación de ondas ultrasónicas en hueso cortical y trabecular. *Mecánica Computacional*, 25:747–758, Noviembre 2006.
- [20] R. A. Rengifo González. *Medicina del climaterio y la menopausia*. Ateproca, 1999.
- [21] S.A. Goss, R.L. Johnston, and F. Dunn. Comprehensive compilation of empirical ultrasonic properties of mammalian tissues. *Journal of Acoustical Society of America*, (64):423–457, 1978.
- [22] G. Haiat et al. Velocity dispersion in trabecular bone: Influence of multiple scattering and of absorption. *Journal of Acoustical Society of America*, 126(6):4047–4058, December 2008.
- [23] Frank S. Henyey. Corrections to foldy’s effective medium theory for propagation in bubble clouds and other collections of very small scatterers. *Journal of Acoustical Society of America*, 105(4):2149–2154, 1999.
- [24] J. L. Hernández, I. Fidalgo González, and M. López Calderon. Diagnosis of osteoporosis by lateral chest x-ray. *Med. Clin*, 117:734–736, 2001.
- [25] R. Hill. A self-consistent mechanics of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13:213–222, 1965.
- [26] M. Kopaliani. Assessment of cortical bone mineral density and biochemical markers of bone metabolism in postmenopausal osteoporosis. *Georgian Med News*, 5:33–36, 2005.
- [27] Tribikram Kundu. *Ultrasonic Nondestructive Evaluation: Engineering and Biological Material Characterization*. CRC Press, primera edición, 2004. ISBN 0-8493-1462-3.
- [28] N. E. Lane. Epidemiology, etiology, and diagnosis of osteoporosis. *Am. J. Obstet. Gynecol.*, 194:3–11, 2006.

- [29] G. Lawrence and M. D. Raisz. Screening for osteoporosis. *N Engl J Med*, 353:164–171, 2005.
- [30] M. Lax. Multiple-scattering of waves. *Reviews of Modern Physics*, 23(4):287–310, 1951.
- [31] Warren Perry Mason. *Physical Acoustics: Principles and Methods*. Academic, New York, 1964.
- [32] Miguel Angel Molero. *Caracterización de materiales cementicios mediante la dispersion ultrasónica*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Madrid, 2009.
- [33] Miguel Angel Molero, Alejandro Villarreal, and Lucia Medina. Application of waterman-truell theory and the dynamic generalised self-consistent model to the study of the trabecular bone case. *IEEE International Ultrasonics Symposium Preceedings*, pages 1594–1597, 2009.
- [34] Miguel Angel Molero, I. Segura, and M.G. Hernández. Characterization of mortar samples using ultrasonic scattering attenuation. *Physics Procedia*, 3(1):839–845, January 2010.
- [35] A. D. Murrillo-Urbe, E. Aguirre, and A. Villa. Osteoporosis en mujeres posmenopáusicas mexicanas. magnitud del problema. estudio multicéntrico. *Ginecol Obst Mex*, 67:227–233, 1999.
- [36] P. H. F. Nicholson, M. J. Haddaway, and M. W. Davie. The dependence of ultrasonic properties on orientation in human vertebral bone. *Physics in Medicine and Biology*, 39: 1013–1024, 1994.
- [37] C. F. Njeh, D. Hans, and T. Fuerst. *Quantitative Ultrasound: Assessment of Osteoporosis and Bone Status*. Martin Dunitz, London, 1999.
- [38] F. J. O’Brien, O. Brennan, and O. D. Kennedy. Microcracks in cortical bone: How do they affect bone biology? *Curr Osteoporos Rep*, 3:39–45, 2005.

- [39] M. O'Donnell, E. Jaynes, and J. G. Miller. General relationships between ultrasonic attenuation and dispersion. *journal of Acoustical Society of America*, 63:1935–1936, 1978.
- [40] M. O'Donnell, E.T Jaynes, and J. G. Miller. Kramers-kroning relationships between ultrasonic attenuation and phase velocity. *journal of Acoustical Society of America*, 69:696–701, 1981.
- [41] Smyshlyaev V. P., Willis J. R., and Sabina F. J. Self-consistent analysis of waves in a matrix-inclusion composite- iii. a matrix containing cracks. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41(12):1809–1824, 1993.
- [42] A. Peretz, V. De Maertelaer, and M. Moris. Evaluation of quantitative ultrasound and dual x-ray absorptiometry measurements in women with and without fractures. *J. Clin. Densitom*, 2:127–133, 1999.
- [43] Allan D. Pierce. *Acoustics: An Introduction to its physical principles and applications*. Acoustical Society of America, Woodbury, New York, 1994.
- [44] B. L. Riggs and L. J. I. Melton. Medical progress: Involutional osteoporosis. *N Engl J Med*, 314:1676–1684, 1986.
- [45] F. J. Sabina and J. R. Willis. A simple self-consistent analysis of wave propagation in particulate composites. *Wave Motion*, 10:127–142, 1988.
- [46] J. E. Santos, J. M. Corberó, and C. L. Ravazzoli. Reflection and transmission coefficients in fluid-saturated porous media. *journal of Acoustical Society of America*, 91:1911–1923, 1992.
- [47] C. W. Siemenda, S. L. Hui, and C. Longcope. Predictors of bone mass in perimenopausal women: A prospective study of clinical data using photon absorptiometry. *Ann Int Med*, 112:96–101, 1990.

- [48] M. Singh, A.R. Nagrath, and P.S. Maini. Changes in trabecular pattern of the upper end of the femur as an index of osteoporosis. *Journal Bone Joint Surg*, 52:457–467, 1970.
- [49] W.M. Telford and L.P. Geldart. *Applied Geophysics*. Cambridge University press, 1978. ISBN 0521291461.
- [50] Samuel Temkin. *Elements of acoustics*. Acoustical Society of America, Estados Unidos, 2001.
- [51] V. Twersky. On scattering of waves by random distributions. ii. two-space scatterer formalism. *Journal of Mathematical Physics*, 3(4):724–734, 1962.
- [52] D. Ulrich, B. Rietbergen, et al. The ability of three-dimensional structural indices to reflect mechanical aspects of trabecular bone. *Bone (N.Y.)*, 25:55–60, 1999.
- [53] A. Villarreal and L. Medina. Phase velocity analysis of acoustic propagation in trabecular bone. *32nd Annual Int. Conf. IEEE EMBS, Buenos Aires Argentina*, sept 2010.
- [54] S. Wagner, A. Stabler, and H. Sittek. Diagnosis of osteoporosis: Visual assessment on conventional versus digital radiographs. *Osteoporos Int*, 25:44–49, 2005.
- [55] P. C. Waterman and R. Truell. Multiple-scattering of waves. *Journal Mathematical Physics*, 2:512–537, 1961.
- [56] K. A. Wear. Measurement of dependence of backscatter coefficient from cylinders on frequency and diameter using focused transducers with applications in trabecular bone. *journal of Acoustical Society of America*, 115:66–72, 2004.
- [57] K. A. Wear. The dependencies of phase velocity and dispersion on trabecular thickness and spacing in trabecular bone-mimicking phantoms. *journal of Acoustical Society of America*, 118:1186–1192, 2005.
- [58] J. R. Weisinger. Avances recientes en el conocimiento de la fisiopatología de la osteoporosis. *Acad Biomed Dig*, 14:1–7, 2003.

- [59] R. B. Yang and A. K. Mal. Multiple-scattering of elastic waves in fiber-reinforced composite. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 42:1945–1968, 1994.
- [60] Ruey-Bin Yang. A dynamic generalized self-consistent model for wave propagation in particulate composites. *Journal of Applied Mechanics*, 70(4):575–582, 2003.
- [61] Ruey-Bin Yang and Ajit K. Mal. Multiple scattering of elastic waves in a fiber-reinforced composite. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 42(12):1945–1968, 1994.

Apéndice A

Coordenadas Esféricas

La ecuación en coordenadas esféricas es:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \text{sen}(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\text{sen}(\theta) \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \text{sen}^2(\theta)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} - k^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A.1})$$

En coordenadas esféricas $\Phi = \Phi(r, \theta, \varphi)$, la ecuación A.1 se puede resolver por separación de variables, es decir, la solución en coordenadas esféricas se asume de la forma

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\xi(\varphi) \quad (\text{A.2})$$

Sustituyendo A.2 en A.1 obtenemos

$$\text{sen}^2 \theta \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + k^2 r^2 + \frac{1}{\text{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\text{sen} \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) \right] = -\frac{\xi''}{\xi} \quad (\text{A.3})$$

Tomemos la constante de separación como m^2 . La ecuación ξ queda como:

$$\xi'' + m^2 \xi = 0 \quad (\text{A.4})$$

con solución

$$\xi = \begin{Bmatrix} e^{im\xi} \\ e^{-im\xi} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

ya que debe ser periódica con periodo 2π m debe ser entero. La separación de R y Θ de la ecuación se realiza de la misma manera, por lo que se obtiene

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + k^2 r^2 = - \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\text{sen} \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right)}{\Theta \text{sen} \theta} + \frac{m^2}{\text{sen}^2 \theta} = C \quad (\text{A.6})$$

Para asegurar que Θ este acotada C debe ser $m(m+1)$, esta selección nos lleva a una ecuación radial cuya solución son las funciones de Bessel esféricas o las funciones esférica de Hankel.

$$\frac{1}{\text{sen} \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\text{sen} \theta \frac{d\Theta}{dz} \right) + \left[m(m+1) - \frac{m^2}{\text{sen}^2 \theta} \right] \Theta = 0 \quad (\text{A.7})$$

tomando $z = \cos \theta$ se tiene

$$(1-z^2) \frac{d^2 \Theta}{dz^2} - 2z \frac{d\Theta}{dz} + \left[m(m+1) - \frac{m^2}{1-z^2} \right] \Theta = 0 \quad (\text{A.8})$$

la cual es llamada la ecuación asociada de Legendre, sus soluciones son los polinomios asociados de Legendre $P_n^m(z)$

$$\Theta = P_n^m(z) = (1-z^2)^{m/2} \frac{d^m}{dz^{m_1}} P_n(z) \quad (\text{A.9})$$

El producto $Y(\theta, \xi)$ es llamado armónicos esférico de superficie

$$Y_{m_1 n} = \begin{Bmatrix} e^{im_1 \xi} \\ e^{-im_1 \xi} \end{Bmatrix} P_n^{m_1}(\cos \theta) \quad (\text{A.10})$$

En resumen cuando una onda depende del eje axial y del polar la solución de la ecuación de onda tiene la forma

$$\Phi = \begin{Bmatrix} j_m(kr) \\ n_m(kr) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e^{im_1\xi} \\ e^{-im_1\xi} \end{Bmatrix} P_m^{m_1}(\cos\theta) \quad (\text{A.11})$$

Para problemas de radiación se tiene la formulación

$$\Phi = \begin{Bmatrix} h_m^1(kr) \\ h_m^2(kr) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e^{im_1\xi} \\ e^{-im_1\xi} \end{Bmatrix} P_m^{m_1}(\cos\theta) \quad (\text{A.12})$$

En donde $j_m(z)$ y $n_m(z)$ son funciones de Bessel de primer y segundo tipo de orden m respectivamente y $h_m^1(z)$ y $h_m^2(z)$ son las funciones de Hankel de primer y segundo tipo de orden m respectivamente. Por lo tanto la solución general completa de la ecuación 1.17 es una de las siguientes:

$$\phi(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} [a_m j_m(kr) + b_m n_m(kr)] \text{sen}(m\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} [c_m j_m(kr) + d_m n_m(kr)] \text{cos}(m\theta) \quad (\text{A.13})$$

$$\phi(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} [a'_m h_m^1(kr) + b'_m h_m^2(kr)] \text{sen}(m\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} [c'_m j_m(kr) + d'_m h_m^2(kr)] \text{cos}(m\theta) \quad (\text{A.14})$$

$$\phi(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [A_m j_m(kr) + B_m n_m(kr)] e^{im\theta} \quad (\text{A.15})$$

$$\phi(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [A'_m h_m^1(kr) + B'_m h_m^2(kr)] e^{im\theta} \quad (\text{A.16})$$

En donde $a_m, b_m, c_m, d_m, a'_m, b'_m, c'_m, d'_m, A_m, B_m, A'_m$ y B'_m son constantes complejas desconocidas, cada una de estas soluciones son equivalentes y cada una tiene sus propias características y la elección de alguna es en concordancia con la naturaleza del problema. Físicamente la función de Hankel de primer y segundo tipo representa las ondas entrantes o salientes respectivamente,

en la mayoría de los problemas de dispersión la onda dispersada es una onda saliente como si se originara del dispersor, por lo que se expresa con $h_n^1(kr)$, también es sabido que $j_n(kr)$ es regular en todo el plano, por lo que se usa para expresar las ondas transmitidas y las ondas incidentes, la función de Bessel de segundo tipo, conocida como función de Neuman se indetermina en el origen, igual que las funciones de Hankel, por lo que si el problema contiene al origen la solución solo debe considerar a $j_n(kr)$.

Apéndice B

Modelo propuesto por Waterman y Truell en coordenadas esféricas

Waterman y Truell [55] obtuvieron una ecuación para dispersores esféricos, esta ecuación da el número de onda complejo k , el cual esta en términos del número de dispersores por unidad de volumen n_0 y la amplitud del campo lejano obtenido por un solo dispersor $f(0)$ y $f(\pi)$.

$$\left(\frac{\langle k(\omega) \rangle}{k_1}\right)^2 = \left(1 - \frac{2\pi n_0 f(0)}{k_1^2}\right)^2 - \left(\frac{2\pi n_0 f(\pi)}{k_1^2}\right)^2 \quad (\text{B.1})$$

el campo dispersado esta definido como

$$f(0) = \frac{1}{k_1} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) A_n \quad \text{y} \quad f(\pi) = \frac{1}{k_1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) A_n \quad (\text{B.2})$$

Consideremos una onda plana que incide sobre un material de características conocidas con inclusiones como se ve en la Figura 2.1 del Capítulo 2.

Suponiendo que se tiene simetría esférica en los dispersores, la onda incidente, las ondas reflejadas y las ondas transmitidas en cada uno de los medios pueden escribirse como:

$$\Phi_m^1 = e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) A_n H_n^1(k_1 r) P_n(\cos(\theta)) \quad (\text{B.3})$$

$$\Psi_m^1 = e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) B_n H_n^1(K_1 r) P_n(\cos(\theta)) \quad (\text{B.4})$$

$$\Phi_d^2 = e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) D_n J_n(k_2 r) P_n(\cos(\theta)) \quad (\text{B.5})$$

$$\Psi_d^2 = e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) D_n J_n(K_2 r) P_n(\cos(\theta)) \quad (\text{B.6})$$

Aplicando condiciones de continuidad en el desplazamiento y la torsión similares a las mostradas para el sistema en coordenadas cilíndricas se obtiene un sistema de ecuaciones de cuya solución se pueden obtener los coeficientes de dispersión; estos coeficientes determinarán los campos lejanos dispersados dados por las ecuaciones B.2; conociendo los campos es posible obtener la expresión para k sustituyéndolos en la ecuación B.1.

Apéndice C

Modelo Dinámico Generalizado

Auto-consistente

Las ondas longitudinales incidentes en el material se pueden expresar como:

$$\Phi_i = \Phi_0 e^{i(kx \cos(\theta) - \omega t)} \quad (\text{C.1})$$

podemos definir

$$e^{ikx \cos(\theta)} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) J_n(kr) P_n(\cos \theta) \quad (\text{C.2})$$

por lo que la onda incidente se puede escribir como

$$\Phi_i^m = \Phi_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) J_n(kr) P_n(\cos \theta) \quad (\text{C.3})$$

Para las ondas dispersadas por el dispersor de radio b se usa la función de Hankel de primer tipo para expresarlas

$$\Phi_s^m = e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) A_n H_n^1(kr) P_n(\cos \theta) \quad (\text{C.4})$$

$$\Psi_s^m = e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) B_n H_n^1(Kr) P_n(\cos\theta) \quad (\text{C.5})$$

con $K = \frac{\omega}{\bar{v}_t}$, $k = \frac{\omega}{\bar{v}_l}$, $P_n(\cos\theta)$ los polinomios de Legendre, $J_n(z)$ la función de Bessel de primer tipo, $H_n^1(z)$ la función de Hankel definida como $H_n^1(z) = J_n(z) + Y_n(z)$ con $Y_n(z)$ la función de Bessel de segundo tipo y A_n y B_n los coeficientes de dispersión a ser determinados.

La onda en el material es la superposición de la onda incidente y las ondas dispersadas, por lo tanto para la onda longitudinal se tiene

$$\Phi^m = \Phi_i^m + \Phi_s^m = e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) P_n(\cos\theta) [\Phi_0 J_n(kr) + A_n H_n^1(kr)] \quad (\text{C.6})$$

con Φ_i la onda incidente dada por C.3 y Φ_s la onda dispersada dada por C.4

En el caso de la onda transversal la onda en el material esta dada unicamente por la onda dispersada

$$\Psi_t^m = \Psi_s^m \quad (\text{C.7})$$

Conociendo las ondas en cada uno de los medios se podrá aplicar las condiciones de continuidad en desplazamiento y tensión como se vio en el Capitulo 2 para dispersores cilíndricos, como se mencionó estas ecuaciones nos servirán para obtener los coeficientes de dispersión.

El desplazamiento está determinado por

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} (D_\theta \Psi) \quad (\text{C.8})$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} (r\Psi) \right] \quad (\text{C.9})$$

para los esfuerzos

$$\sigma_r = \frac{2\mu}{r^2} \left[r D_\theta \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{K^2 r^2}{2} \Phi - D_\theta \Phi - 2r \frac{\partial \Phi}{\partial r} - D_\theta \Psi \right] \quad (\text{C.10})$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[r \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \Phi + \left(\frac{K^2 r^2}{2} + 1 \right) \Psi + D_\theta \Psi + r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right] \quad (\text{C.11})$$

en donde el subíndice denota la dirección del desplazamiento y la torsión con

$$D_\theta = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (\text{C.12})$$

Ahora, sustituyendo las ondas de los diferentes medios C.6 y C.7 en las ecuaciones C.8-C.11 obtenemos los desplazamientos y las tensiones para el caso del material envolvente denotado por el superíndice m :

$$\begin{aligned} u_r^m &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} (D_\theta \Psi) \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \{ \Phi_0 J_n(kr) + A_n H_n^1(kr) \} P_n(\cos \theta) \\ &\quad + \frac{1}{r} D_\theta \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) B_n H_n^1(Kr) P_n(\cos \theta) \quad (\text{C.13}) \end{aligned}$$

utilizando que $D_\theta P_n = -n(n+1)P_n$ se tiene

$$\begin{aligned} u_r^m &= \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \left\{ \left[\Phi_0 \frac{\partial}{\partial r} J(kr) + \frac{\partial}{\partial r} H(kr) A_n \right] \right. \\ &\quad \left. - n(n+1) H_n^1(Kr) B_n \right\} P_n(\cos \theta) \quad (\text{C.14}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_\theta^m &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} (r \Psi) \right] = \\ &\quad \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \left\{ \Phi_0 J_n(kr) + H_n^1(kr) A_n - \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{\partial}{\partial r} H_n^1(Kr) + H_n^1(Kr) \right] B_n P_n(\cos \theta) \right\} \frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial \theta} \quad (\text{C.15}) \end{aligned}$$

ahora para las torsiones

$$\begin{aligned}
 \sigma_r^m &= \frac{2\mu}{r^2} \left[r D_\theta \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{K^2 r^2}{2} \Phi - D_\theta \Phi - 2r \frac{\partial \Phi}{\partial r} - D_\theta \Psi \right] \\
 &= \frac{2\mu}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \left\{ \Phi_0 \left[\left(n^2 + n - \frac{K^2 r^2}{2} \right) J_n(kr) + 2 \frac{\partial}{\partial r} J_n(kr) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \left[\left(n^2 + n - \frac{K^2 r^2}{2} \right) H_n(kr) + 2 \frac{\partial}{\partial r} H_n^1(kr) \right] A_n + n(n+1) \right. \\
 &\quad \left. \left[H_n^1(Kr) - \frac{\partial}{\partial r} H_n^1(Kr) \right] B_n \right\} P_n(\cos\theta) \quad (C.16)
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 \sigma_{r\theta}^m &= \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[r \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \Phi + \left(\frac{K^2 r^2}{2} + 1 \right) \Psi + D_\theta \Psi + r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right] \\
 &= \frac{2\mu}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \left\{ \Phi_0 \left[r \frac{\partial}{\partial r} J_n(kr) - J_n(kr) \right] + \left[\frac{\partial}{\partial r} H_n^1(kr) - H_n^1(kr) \right] A_n \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{\partial}{\partial r} H_n^1(Kr) - \left(n^2 + n - 1 - \frac{K^2 r^2}{2} \right) H_n^1(Kr) \right] B_n \right\} \frac{\partial P_n(\cos\theta)}{\partial \theta} \quad (C.17)
 \end{aligned}$$

para los campos en la esfera de radio b denotados por el superíndice b se tienen las ondas longitudinales y transversales transmitidas del material y las ondas dispersadas por la esfera de radio a

$$\Phi_{tr}^b = e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) C_n J_n(k_1 r) P_n(\cos\theta) \quad (C.18)$$

$$\Phi_s^b = e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) E_n H_n^1(k_1 r) P_n(\cos\theta) \quad (C.19)$$

las correspondientes ondas transversales

$$\Psi_{tr}^b = e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) D_n H_n^1(K_1 r) P_n(\cos\theta) \quad (\text{C.20})$$

$$\Psi_s^b = e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) F_n H_n^1(K_1 r) P_n(\cos\theta) \quad (\text{C.21})$$

C_n, E_n, D_n, F_n los coeficientes de dispersión, de esto se tiene al igual que el caso anterior los campos totales como

$$\Phi_t^b = \Phi_{tr}^b + \Phi_s^b \quad \text{y} \quad \Psi_t^b = \Psi_{tr}^b + \Psi_s^b \quad (\text{C.22})$$

análogo al procedimiento anterior para el desplazamiento obtenemos ahora para el dispersor de radio b

$$u_r^b = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \left\{ \left[C_n \frac{\partial}{\partial r} J(k_1 r) + \frac{\partial}{\partial r} H_n^1(k_1 r) E_n \right] - \right. \\ \left. - n(n+1) H_n^1(K_1 r) E_n \right\} P_n(\cos\theta) \quad (\text{C.23})$$

$$u_\theta^b = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \left\{ C_n J_n(k_1 r) + H_n^1(k_1 r) E_n - \right. \\ \left. - \left[\frac{\partial}{\partial r} H_n^1(K_1 r) + H_n^1(K_1 r) \right] E_n \right\} \frac{\partial P_n(\cos\theta)}{\partial \theta} \quad (\text{C.24})$$

y para las torsiones

$$\begin{aligned} \sigma_r^b = \frac{2\mu_1}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \left\{ C_n \left[\left(n^2 + n - \frac{K_1^2 r^2}{2} \right) J_n(k_1 r) + 2 \frac{\partial}{\partial r} J_n(k_1 r) \right] \right. \\ \left. + \left[\left(n^2 + n - \frac{K_1^2 r^2}{2} \right) H_n^1(k_1 r) + 2 \frac{\partial}{\partial r} H_n^1(k_1 r) \right] E_n + n(n+1) \right. \\ \left. \left[H_n^1(K_1 r) - \frac{\partial}{\partial r} H_n^1(K_1 r) \right] D_n \right\} P_n(\cos\theta) \quad (C.25) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta}^b = \frac{2\mu_1}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \left\{ C_n \left[\frac{\partial}{\partial r} J_n(k_1 r) - J_n(k_1 r) \right] + \left[\frac{\partial}{\partial r} H_n^1(k_1 r) - H_n^1(k_1 r) \right] E_n \right. \\ \left. + \left[\frac{\partial}{\partial r} H_n^1(K_1 r) - \left(n^2 + n - 1 - \frac{K_1^2 r^2}{2} \right) H_n^1(K_1 r) \right] D_n \right\} \frac{\partial P_n(\cos\theta)}{\partial \theta} \quad (C.26) \end{aligned}$$

finalmente, dentro del dispersor de radio a solo se tienen las ondas transmitidas de la esfera de radio b , que son

$$\Phi_{tr}^a = e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) G_n H_n^1(k_1 r) P_n(\cos\theta) \quad (C.27)$$

y

$$\Psi_{tr}^a = e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) I_n H_n^1(K_1 r) P_n(\cos\theta) \quad (C.28)$$

con G_n e I_n los coeficientes de dispersión. Los desplazamientos y esfuerzos quedan de la forma

$$u_r^a = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \left\{ \left[C_n \frac{\partial}{\partial r} J_n(k_1 r) + \frac{\partial}{\partial r} H_n^1(k_1 r) E_n \right] - n(n+1) H_n^1(K_1 r) E_n \right\} P_n(\cos\theta) \quad (C.29)$$

$$u_{\theta}^a = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \left\{ C_n J_n(k_1 r) + H_n^1(k_1 r) E_n - \left[\frac{\partial}{\partial r} H_n^1(K_1 r) + H_n^1(K_1 r) \right] E_n \right\} \frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial \theta} \quad (\text{C.30})$$

y

$$\begin{aligned} \sigma_r^a = \frac{2\mu_1}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) & \left\{ \Phi_0 \left[\left(n^2 + n - \frac{K_1^2 r^2}{2} \right) J_n(k_1 r) + 2(k_1 r) J_n'(k_1 r) \right] \right. \\ & + \left[\left(n^2 + n - \frac{K_1^2 r^2}{2} \right) H_n^1(k_1 r) + 2(k_1 r) H_n^{1'}(k_1 r) \right] A_n + n(n+1) \\ & \left. \left[H_n^1(K_1 r) - (K_1 r) H_n^{1'}(K_1 r) \right] B_n \right\} P_n(\cos \theta) \quad (\text{C.31}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta}^a = \frac{2\mu_1}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) & \left\{ \Phi_0 \left[\frac{\partial}{\partial r} J_n(k_1 r) - J_n(k_1 r) \right] + \left[\frac{\partial}{\partial r} H_n^1(k_1 r) - H_n^1(k_1 r) \right] A_n \right. \\ & \left. + \left[\frac{\partial}{\partial r} H_n^1(K_1 r) - \left(n^2 + n - 1 - \frac{K_1^2 r^2}{2} \right) H_n^1(K_1 r) \right] B_n \right\} \frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial \theta} \quad (\text{C.32}) \end{aligned}$$

Una vez conociendo los potenciales en los tres materiales que conforman el modelo se aplican condiciones de continuidad para el desplazamiento y la torsión en $r = b$ y en $r = a$

$$u_r^x(r) |_{r=a,b} = u_r^y(r) |_{r=a,b} \quad (\text{C.33})$$

$$u_{\theta}^x(r) |_{r=a,b} = u_{\theta}^y(r) |_{r=a,b} \quad (\text{C.34})$$

$$\sigma_r^x(r) |_{r=a,b} = \sigma_r^y(r) |_{r=a,b} \quad (\text{C.35})$$

$$\sigma_{r\theta}^x(r) |_{r=a,b} = \sigma_{r\theta}^y(r) |_{r=a,b} \quad (\text{C.36})$$

con $x = m, b$ y $y = b, a$ respectivamente, con esto obtenemos el sistema de ecuaciones a

resolver para calcular los coeficientes de dispersión¹

$$\begin{bmatrix} P_m & -P'_b & -P_b & 0 \\ Q_m & -Q'_b & -Q_b & 0 \\ 0 & -P'_a & -P_a & P_i \\ 0 & -Q'_a & -Q_a & P_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \\ E_n \\ F_n \\ G_n \\ H_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P'_m \\ \alpha Q'_m \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.37})$$

con

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n\zeta_n(x) - x\zeta_{n+1}(x) & -n(n+1)\zeta_n(y) \\ \zeta_n(x) & -(n+1)\zeta_n(y) + y\zeta_{n+1}(y) \end{bmatrix} \quad (\text{C.38})$$

y

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(n^2 - n - \frac{y^2}{2}\right)\zeta_n(x) + 2x\zeta_{n+1}(x) & -n(n+1)[(n-1)\zeta_n(y) - y\zeta_{n+1}(y)] \\ (n-1)\zeta_n(x) - x\zeta_{n+1}(x) & -\left(n^2 - 1 - \frac{y^2}{2}\right)\zeta_n(y) - y\zeta_{n+1}(y) \end{bmatrix} \quad (\text{C.39})$$

con $\zeta_m(z)$ igual a $J_m(z)$ o $H_m^1(z)$ los cuales son determinados por la región, sustituyendo $x = kr$ y $y = Kr$ y resolviendo el sistema de ecuaciones (C.37) suponiendo en un inicio $k = k_b$, $K = K_b$ y ρ y μ calculados con el modelo de Sabina y Willis se obtienen los valores de los

¹para mayor referencia de como se obtiene el sistema de ecuaciones consultar el artículo de Yang (2003)[60] o la tesis doctoral de Molero [32]

coeficientes de dispersión A_n los que recordando del método de Waterman B.1 se sustituyen en la ecuación (B.2) para obtener los campos dispersados hacia adelante y hacia atrás. Conociendo estos valores y sustituyendolos en la ecuación (C.40) obtenemos una primera expresión para el número de onda k en el material, una vez que se tiene el nuevo valor de k se repite el proceso, se resuelve nuevamente el sistema de ecuaciones para obtener un nuevo valor de k , es decir se itera hasta obtener la aproximación deseada, Molero [32] desarrolló una expresión para las iteraciones de k , en esta ecuación podemos ver que el valor $p + 1$ de k esta determinado por el valor anterior de k_p , la concentración de dispersores c , el radio del dispersor a y los campos dispersados[34]

$$\langle k_{p+1} \rangle^2 = \langle k_p \rangle^2 + \frac{3c}{a^3} f(0) + \frac{9c^2}{4a^6 \langle k_p \rangle^2} (f^2(0) - f^2(\pi)) \quad (\text{C.40})$$

Conociendo el valor de k podemos obtener la velocidad de propagación y la atenuación mediante la fórmula

$$k(\omega) = \frac{\omega}{v_l} + i\alpha(\omega) \quad (\text{C.41})$$

con ω la frecuencia angular, v_l la velocidad longitudinal y α la atenuación.

Apéndice D

Modelo Auto-Consistente propuesto por Sabina y Willis en coordenadas esféricas

Valores efectivos obtenidos por el modelo de Sabina-Willis para coordenadas esféricas

$$KV = KV_1 + c \frac{h(k)h(-k)(KV_2 - KV_1)(3KV + 4\mu)}{3KV + 4\mu + 3\varepsilon_\alpha(KV_2 - KV)} \quad (D.1)$$

$$\mu = \mu_1 + c \frac{h(k)h(-k)(\mu_2 - \mu_1)[5\mu(3KV + 4\mu)]}{5\mu(3\kappa + 4\mu) + 2[2\mu\varepsilon_\alpha + (3KV + 4\mu)\varepsilon_\beta](\mu_2 - \mu)} \quad (D.2)$$

$$\rho = \rho_1 + c \frac{h(k)h(-k)(\rho_2 - \rho_1)(3\rho)}{3\rho + (3 - \varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)(\rho_2 - \rho)} \quad (D.3)$$

donde

$$h(k) = \frac{3[\text{sen}(ka) - (ka)\cos(ka)]}{(ka)^3} \quad (D.4)$$

y

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \frac{3(1-ika)}{(ka)^3} [\text{sen}(ka) - (ka)\cos(ka)] e^{ika} \\ \varepsilon_\beta &= \frac{3(1-iKa)}{(Ka)^3} [\text{sen}(Ka) - (Ka)\cos(Ka)] e^{iKa} \end{aligned} \quad (D.5)$$

Apéndice E

Resultados para dispersores esféricos

En la Figura E.1 se observa la velocidad de fase en función de la frecuencia obtenida para dispersores esféricos usando las condiciones de frontera de un fluido, en verde observamos la velocidad calculada por el método auto consistente propuesto por Sabina y Willis, en rojo por el método propuesto por Waterman y Truell y en azul la curva de velocidad obtenida por el MDGAC.

Se muestra el comportamiento de la velocidad de fase al aumentar la frecuencia, nuevamente observamos que las velocidades disminuyen al aumentar la frecuencia, la pendiente de la velocidad asociada a la dispersión es -20.78 m/s/MHz , -20.08 m/s/MHz y -21.56 m/s/MHz para el modelo de Sabina y Willis, el modelo de Waterman y Truell y el MDGAC respectivamente .

Podemos observar en la Figura E.2 el comportamiento esta vez en función del diámetro del dispersor, vemos que al aumentar el diámetro la velocidad aumenta, esto es debido al aumento de material óseo en el medio.

La Figura E.3 muestra la dependencia de la velocidad de fase con la concentración, se observa como es de esperarse un incremento en la velocidad al aumentar la concentración, observamos que el modelo de Sabina y Willis funciona para concentraciones bajas, menores al 10%, el modelo de Waterman y Truell funciona para concentraciones de hasta 20% y el MDGAC funciona a concentraciones de hasta 40-50%.

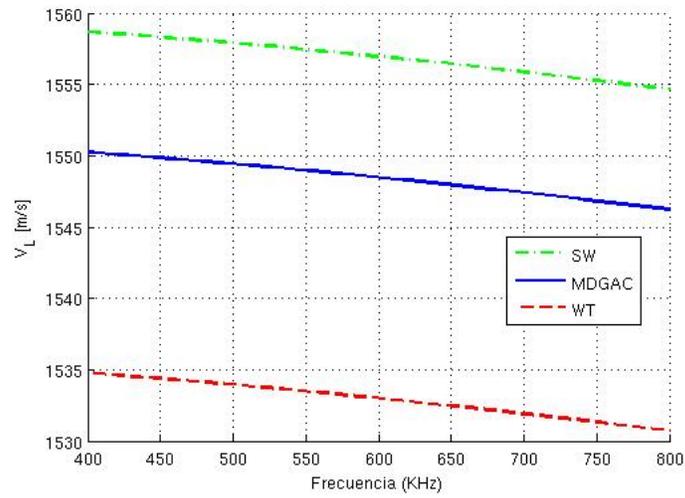


Figura E.1: Velocidad de fase vs frecuencia usando las condiciones de frontera de un fluido y los datos de la Tabla 3.1 para dispersores esféricos

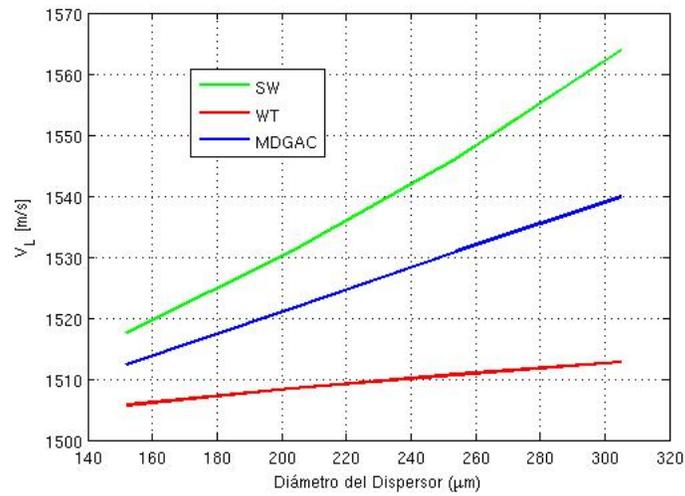


Figura E.2: Velocidad de fase vs diámetro del dispersor con rango de 150 a 300 μm

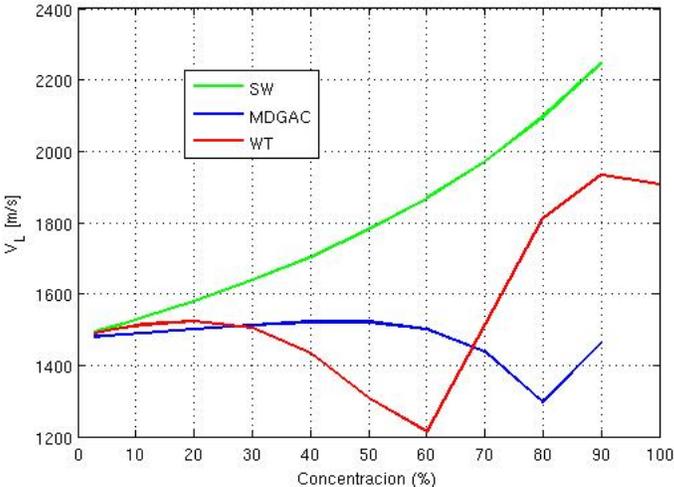


Figura E.3: Velocidad de fase vs concentraciones que van desde el 2 hasta el 12% a una frecuencia fija de 500 KHz