Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00157
Matrícula: 2143805692

EL TEOREMA DE EXTENSIÓN DE WHITNEY-FEFFERMAN

OMAR SANCHEZ ANTONIO
ALUMNO

REVISÓ

LIC. JULIO CESAR DE LARA ISASSI
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

En la Ciudad de México, se presentaron a las 16:00 horas del día 3 del mes de abril del año 2017 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DRA. SHIRLEY THELMA BROMBERG SILVERSTEIN
DR. CARLOS HERNANDEZ GARCIADIEGO
DR. VICTOR ALBERTO CRUZ BARRIGUETE

Bajo la Presidencia de la primera y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

DE: OMAR SANCHEZ ANTONIO

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, la presidenta del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JOSE GILBERTO CORDOBA HERRERA

PRESIDENTA

DRA. SHIRLEY THELMA BROMBERG SILVERSTEIN

VOCAL

DR. CARLOS HERNANDEZ GARCIADIEGO

SECRETARIO

DR. VICTOR ALBERTO CRUZ BARRIGUETE

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

EL TEOREMA DE EXTENSIÓN DE WHITNEY-FEFFERMAN

Tesis que presenta
Omar Sánchez Antonio
Para obtener el grado de
Maestro en ciencias (Matemáticas)

Asesor:	Dra. Shirley Thelma Bromberg Silverstein

Jurado Calificador:

Presidente:	Dra. Shirley Thelma Bromberg Silverstein
Secretario:	Dr. Victor Alberto Cruz Barriguete
Vocal:	Dr. Carlos Hernández Garciadiego

Ciudad de México, 3 de abril de 2017

Agradecimientos

De las muchas cosas que agradezco:

A la Universidad Autónoma Metropolitana, por la estadía durante estos últimos 2 años, en particular a los profesores del departamento de Matemáticas que he tenido la oportunidad de conocer y que me han mostrado su amistad.

A Carlos Garciadiego, por formar parte de la revisión de la tesis.

A Victor Cruz, por su amistad siempre mostrada y su apoyo en la minuciosa revisión de este trabajo.

A mi familia, de los cuales siempre recibí palabras de ánimo para continuar.

Finalmente, a mi asesora Shirley Bromberg, por haberme introducido en los problemas que esta tesis trata, por tantas horas de discusión y de paciencia, el apoyo incondicional mostrado, así como sus consejos.

Índice general

Introducción I
1 Problemas de extensión y aproximación 1
1.1 Preliminares 1
1.2 Caracterización de $C^{m-1,1}(E)$ 5
1.3 Problemas de extensión y aproximación 7
1.4 Lemas débil y fuerte 15
2 El teorema de Helly 27
2.1 Aplicación del teorema de Helly 27
3 Demostración de los lemas de inducción 35
3.1 La descomposición de Calderón-Zygmund 35
3.2 Demostración del lema 1.3 38
3.3 Lema de rescalamiento 46
4 Control de polinomios 57
4.1 Control de polinomios 1 57
4.2 Control de polinomios 2 68
Conclusiones 75
Bibliografía 77

Introducción

Dada $f : U \to \mathbb{R}$ con $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, se dice que f es **continuamente diferenciable de orden** m **en** U si para cada $r \leq m$ y para cada $x \in U$, la derivada

$$D^r f(x)$$

existe y es continua, lo que se denota por $f \in C^m(U)$. Cuando el dominio de f no es un conjunto abierto, ¿es posible definir que la función f sea clase $C^m(U)$?, por ejemplo para U cerrado. En el sentido de extensión se tiene la siguiente definición.

Una función $f : U \to \mathbb{R}$ **es de clase** $C^m(U)$ **si existe** $F \in C^m(\mathbb{R}^n)$ **tal que** $F|_U = f$.

La definición anterior realmente plantea el **problema de extensión**. La dificultad en el problema de extensión es que U puede ser de una naturaleza geométrica complicada, por ejemplo fractal, en general sin ninguna estructura diferencial asociada. El primer acercamiento a una solución de este problema fue hecho en 1933 por H. Whitney en [13], caracterizando el espacio de m-jets, es decir, polinomios de Taylor de funciones en $C^m(\mathbb{R}^n)$. Supóngase que $F \in C^m(\mathbb{R}^n)$, entonces el teorema de Taylor con residuo integral implica

$$F(x) - \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!} D^i F(y)(x-y)^i = \int_0^1 \frac{(1-t)^{m-1}}{(m-1)!} [D^m F(z) - D^m F(y)](x-y)^m dt,$$

donde $z = (1-t)y + tx$. Se denota por

$$T_y F(x) = \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!} D^i F(y)(x-y)^i.$$

Se tiene que el límite

$$\lim_{x \to y} \frac{|D^r P(x) - D^r T_y F(x)|}{|x-y|^{m-r}} = 0$$

es uniforme en subconjuntos compactos. Un recíproco del hecho anterior, es conocido como el **teorema de extensión de Whitney**. Una formulación es la siguiente.

Teorema de extensión de Whitney. *Supóngase* $E \subset \mathbb{R}^n$ *cerrado, una función* $f : E \to \mathbb{R}$ *y una constante* $C > 0$. *Si para cada* $x \in E$ *existe* P_x *polinomio de grado* m *que satisface las siguientes condiciones:*

- $P_x(x) = f(x)$ *para* $x \in E$.
- $|D^r P_x(x)| \leq C$ *para* $x \in E$ *y* $r \leq m$.
- $|D^r(P_x - P_y)(y)| \leq C \cdot |x - y|^{m-r}$ *para* $x, y \in E$ *y* $r \leq m$.

Entonces existe $F \in C^m(\mathbb{R}^n)$ *tal que* $T_x F = P_x$ *para cada* $x \in E$.

Otra visión del problema de extensión es la caracterización de espacios traza. Considérese un espacio de funciones $X(\mathbb{R}^n)$. Se escribe $X(E)$ para denotar al **espacio traza**, el cual consiste de las restricciones $F|_E$ donde $F \in X(\mathbb{R}^n)$. En este sentido $f \in X(E)$, si f es la restricción de una función en $X(\mathbb{R}^n)$. Para el teorema de extensión de Whitney, a cada función $F \in C^m(\mathbb{R}^n)$, se asocia una colección de funciones $\{F_i\}_{i=1}^m$ llamada m-jet, donde

$$D^i F = F_i \text{ para } i \leq m.$$

Se define el espacio de m-jets $J^m(\mathbb{R}^n)$ que consiste de los m-jets $\{f_i\}_{i=1}^m$ tal que existe $F \in C^m(\mathbb{R}^n)$ con $D^i F = f_i$. De esta forma el teorema de extensión de Whitney caracteriza al espacio traza $J^m(E)$. El problema consiste en caracterizar el espacio traza $C^m(E)$, en términos intrínsecos.

Después del resultado de H. Whitney distintos avances surgieron sobre el problema de extensión o traza:

- En 1934, H. Whitney resuelve en [14] por completo el problema de traza, en el caso $C^m(\mathbb{R}^1)$ haciendo uso de diferencias finitas. El título del artículo sugería la intención de Whitney por resolver el caso n-dimensional, esté nunca llegó a aparecer.

- En 1958, G. Glaeser en [11] encuentra el resultado análogo al teorema de extensión de Whitney, esta vez para m-jets generados por funciones en $C^{m,\omega}(\mathbb{R}^n)$, el espacio de funciones en $C^m(\mathbb{R}^n)$ con módulo de continuidad ω y dió una solución geométrica al caso $C^1(\mathbb{R}^n)$.

- Desde la década de los setenta hasta la presente surgieron más contribuciones a la solución del problema de extensión, esta vez por Y. Brudnyi y P. Shvarstman. Ellos resolvieron en [4] el problema de traza en el espacio $C^{1,\omega}(\mathbb{R}^n)$.

- En 2003, otro progreso fue hecho por E. Bierstone, P. Milman y W. Pawlucki, ellos resuelven en [1] la variante del problema de extensión, en el caso donde E es un conjunto sub-analítico generalizando las ideas de G. Glaeser.

- Finalmente, C. Fefferman comienza en 2004 influenciado por el trabajo de Y. Brudnyi y P. Shvarstman, el estudio de los problemas de extensión caracterizando al espacio $C^{m-1,1}(E)$.

En esta tesis se retoma el trabajo de C. Fefferman y se da una exposición de la solución basada en el artículo [7], con la característica que se han modificado ciertos pasos a manera de una clara exposición. Este trabajo consta de cuatro capítulos:

- En el primero de ellos, partiendo del teorema de caracterización para el espacio $C^{m-1,1}(E)$, se explica cómo surgen los teoremas de extensión y aproximación, así como la notación que será usada durante el trabajo. También, se da un esquema de una técnica de inducción sobre subconjuntos de multi-índices diseñada por C. Fefferman, planteando los lemas débil y fuerte.

- En el segundo capítulo, el teorema de Helly, resultado clásico para subconjuntos convexos, juega un papel importante. Se demuestra que las propiedades de los polinomios en el lema débil, pueden extenderse a toda una vecindad. La importancia de construir tales polinomios es la aplicación de la hipótesis de inducción.

- En el tercer capítulo, se presenta la descomposición de Calderón-Zygmund y se demuestran los lemas débil y fuerte, lo cual permite completar la técnica de inducción. Además, se muestra la conexión que existe entre la hipótesis de inducción y la descomposición de Calderón-Zygmund.

- Finalmente, en el último capítulo se lleva a cabo el estudio del control de los polinomios. Esto es, tener un control de las derivadas de los polinomios hallados en el capítulo 2, en términos de los cubos Calderón-Zygmund.

1 Problemas de extensión y aproximación

1.1 Preliminares

Nociones de análisis diferencial. Sean $m, n \geq 1$, se denota por $C^m(\mathbb{R}^n)$ al espacio que consta de funciones $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, cuyas derivadas de orden menor o igual a m son continuas y para las cuales la norma

$$\|F\|_{C^m(\mathbb{R}^n)} = \max_{r \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^r F(x)|$$

es finita. Por $C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)$ se denota al espacio de funciones $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, cuyas derivadas de orden menor o igual a $m-1$ son continuas y cuya norma

$$\|F\|_{C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)} = \max_{r \leq m-1} \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^r F(x)| + \sup_{\substack{x,y \in \mathbb{R}^n \\ x \neq y}} \frac{|D^r F(x) - D^r F(y)|}{|x-y|} \right\}$$

es finita. Si $F \in C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)$, entonces existe una constante $C > 0$ tal que

$$|D^{m-1} F(x) - D^{m-1} F(y)| \leq C|x-y|,$$

es decir, la derivada de orden $m-1$ es **Lipschitz**. Ahora, considérense $F \in C^m(\mathbb{R}^n)$ y $x \in \mathbb{R}^n$, por análisis diferencial se sabe que la derivada

$$D^r F(x) \in L^r_{sim}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}),$$

esto es, $D^r F$ es una función r-lineal simétrica. Si $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$D^r F(x) h^r = \sum_{|\beta|=r} a_\beta \cdot \partial^\beta F(x) h^\beta,$$

donde

$$\begin{aligned}\beta &= (\beta_1, \dots, \beta_n),\\ |\beta| &= \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n,\\ h^\beta &= h_1^{\beta_1} \dots h_n^{\beta_n}\end{aligned}$$

y

$$\partial^\beta F(x) = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}} F(x) = D^{|\beta|} F(x)(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}).$$

Cuando sea necesario se usará la notación de parciales $\partial^\beta F$ o bien la de derivadas $D^r F$.

Considérese **el espacio vectorial de los polinomios** $\mathcal{P}$ de grado menor o igual a $m-1$ definidos en $\mathbb{R}^n$ y sea D su dimensión. Para cada $F \in C^m(\mathbb{R}^n)$ y $y \in \mathbb{R}^n$, se define el **jet de F en y** por

$$J_y(F)(x) = \sum_{r=0}^{m-1} \frac{1}{r!} D^r F(y)(x-y)^r.$$

En notación de multi-índices

$$J_y(F)(x) = \sum_{|\beta| \le m-1} \frac{1}{\beta!} \partial^\beta F(y)(x-y)^\beta,$$

donde

$$\beta! = (\beta_1!)(\beta_2!)\cdots(\beta_n!).$$

Para $F_1, F_2 \in C^m(\mathbb{R}^n)$ y una constante $c \in \mathbb{R}$, se tiene

$$J_y(F_1 + cF_2) = J_y(F_1) + c J_y(F_2),$$

es decir, la aplicación que a cada $F \in C^m(\mathbb{R}^n)$ asigna el jet $J_y(F)$ es lineal. Para referirse a tal propiedad se dirá que **el jet es lineal**. Se denota por $\mathcal{P}_y$ al conjunto de polinomios centrados en y. Se observa que $J_y F \in \mathcal{P}_y$ y que $\mathcal{P}_y$ es un subespacio afín de $\mathcal{P}$.

Una herramienta que será de gran utilidad es el teorema de Taylor en su versión integral.

Teorema de Taylor con residuo integral. *Supóngase $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $F : U \to \mathbb{R}$ de clase C^m en U. Si para $a \in U$ y $x \in \mathbb{R}^n$ el segmento que une x y a está en U, entonces*

$$F(x) - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{i!} D^i F(a)(x-a)^i = \int_0^1 \frac{(1-t)^{m-1}}{(m-1)!} D^m F(z)(x-a)^m \, dt,$$

donde $z = (1-t)a + tx$.

Una demostración de este resultado puede encontrarse en el libro de R. Coleman [5, pág. 112]. Si $F \in C^m(\mathbb{R}^n)$, para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$, se tiene

$$F(x) - J_y(F)(x) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{m-1}}{(m-1)!} D^m F(z)(x-y)^m dt.$$

Entonces para cada $r \leq m$, se tiene

$$D^r F(x) - D^r J_y(F)(x) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{m-1-r}}{(m-1-r)!} D^m F(z)(x-y)^{m-r} dt.$$

Formas cuadráticas en $\mathcal{P}$. Sean $P \in \mathcal{P}$ y $x \in \mathbb{R}^n$, se define

$$\|P\|_x = \max_{r \leq m-1} |D^r P(x)|.$$

Para puntos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ distintos y polinomios $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$, se define

$$\|P_1 - P_2\|_{x_1,x_2} = \max_{r \leq m-1} \frac{|D^r(P_1 - P_2)(x_2)|}{|x_1 - x_2|^{m-r}}.$$

Como se observa las normas definidas son similares a las condiciones impuestas sobre los jets en el teorema de extensión Whitney. Considérese

$$\begin{aligned} \vec{x} &= (x_1, \ldots, x_k) \text{ con } x_i \text{ puntos distintos en } \mathbb{R}^n \text{ y} \\ \vec{P} &= (P_1, \ldots, P_k) \in \mathcal{P}^k, \text{ donde } \mathcal{P}^k = \underbrace{\mathcal{P} \times \cdots \times \mathcal{P}}_{k \text{ veces}}, \end{aligned}$$

tales que cada $P_i \in \mathcal{P}_{x_i}$. Se define la forma cuadrática positiva definida sobre $\mathcal{P}^k$ respecto a $\vec{x}$, como

$$\mathcal{Q}(\vec{P}) = \sum_{i=1}^{k} \|P_i\|_{x_i}^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{k} \|P_i - P_j\|_{x_i,x_j}^2.$$

Si $f : E \to \mathbb{R}$, para $x_1, \ldots, x_k \in E$ distintos, se define la norma respecto a $\vec{x}$ por

$$\|f\|_{C^m(\vec{x})}^2 = \text{ mínimo de } \mathcal{Q}(\vec{P}) \text{ sobre los } \vec{P} \in \mathcal{P}^k \text{ tales que } P_i(x_i) = f(x_i).$$

En la definición anterior, la forma $\mathcal{Q}(\vec{P})$ calcula la norma del mejor posible jet de f en los puntos x_i.

Cubos. Se define el cubo centrado en el punto y de radio $\ell > 0$ por

$$Q_y = \{x \in \mathbb{R}^n : \max_{i \leq n} |x_i - y_i| \leq \ell\}$$

y se denota por δ_{Q_y} su diámetro.

Particiones de la unidad. Considérese una función $\phi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, tal que

$$0 \leq \phi \leq 1 \text{ en } \mathbb{R}^n \quad \text{y} \quad \operatorname{sop} \phi = [0,1]^n.$$

La función ϕ se llama **función de corte**. Para $y \in \mathbb{R}^n$ y $\ell > 0$, se ajusta la función de corte ϕ de la siguiente manera

$$\phi_y(x) = \phi\Big(\frac{x-y}{\ell}\Big).$$

Entonces $\operatorname{sop} \phi_y$ es el cubo centrado en y de arista ℓ. Las funciones de corte juegan un papel central en el teorema de extensión de Whitney. Considérese $E \subset \mathbb{R}^n$ cerrado, existe una familia $\mathcal{F}$ de cubos cerrados cuyos interiores son mutuamente disjuntos, tal que

$$\mathbb{R}^n \setminus E = \bigcup_{Q \in \mathcal{F}} Q \quad \text{y} \quad \delta_Q \leq 1.$$

Además, existen constantes c_1 y c_2 tales que

$$c_1 \delta_Q \leq d(Q, E) \leq c_2 \delta_Q \quad \text{para cada} \quad Q \in \mathcal{F}.$$

La familia $\mathcal{F}$ se llama **descomposición de Whitney** asociada a E. Sea y_Q el centro del cubo Q, una partición de la unidad respecto a la descomposición de Whitney es una familia $\{\phi_{y_Q}\}_{Q \in \mathcal{F}}$ de funciones de corte tales que

1. $\displaystyle\sum_{Q \in \mathcal{F}} \phi_{y_Q}(x) = 1$ para $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$.

2. $\operatorname{sop} \phi_{y_Q} \subset Q$.

3. $|D^r \phi_{y_Q}| \leq C \delta_Q^{-r}$ para $r \leq m$.

Constantes controladas. Se usarán ρ, C, C', C_i y A, A', A_i donde $i \in \mathbb{N}$, para denotar a constantes que dependen de m y n. Se escribirá $C(m,n)$ o bien $C = C(m,n)$ para enfatizar su dependencia.

1.2 Caracterización de $C^{m-1,1}(E)$

Considérese $E \subset \mathbb{R}^n$ arbitrario, se denota por $C^m(E)$ al conjunto de restricciones $F|_E$, donde $F \in C^m(\mathbb{R}^n)$. La norma en $C^m(E)$ se define por

$$\|f\|_{C^m(E)} = \text{ínf}\{\|F\|_{C^m(\mathbb{R}^n)} : F \in C^m(\mathbb{R}^n) \text{ y } F = f \text{ en } E\}.$$

Dado un $\varepsilon > 0$, se define $C^m(E, A\cdot\varepsilon)$ como el conjunto de funciones f tales que para una constante $A > 0$, existe una función $F \in C^m(\mathbb{R}^n)$ que satisface

$$\|F\|_{C^m(\mathbb{R}^n)} \leq A \;\text{ y }\; |F(x) - f(x)| \leq A\cdot\varepsilon \text{ para } x \in E.$$

Si $f \in C^m(E, A\cdot\varepsilon)$, se define la norma $\|f\|_{C^m(E,A\cdot\varepsilon)}$, como el ínfimo de las constantes A que satisfacen la propiedad anterior.

En la sección anterior se definió una forma cuadrática en el conjunto $\mathcal{P}^k$, por

$$\mathcal{Q}(\vec{P}) = \sum_{i=1}^{k}\|P_i\|_{x_i}^2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k}\|P_i - P_j\|_{x_i,x_j}^2.$$

La forma cuadrática caracteriza el espacio $C^{m-1,1}(E)$.

Teorema 1.1. *Existe un número natural $k^\#$ que depende de m y n con la siguiente propiedad. Supóngase $E \subset \mathbb{R}^n$ arbitrario y $f : E \to \mathbb{R}$. Entonces $f \in C^{m-1,1}(E)$ si y solamente si*

$$\sup_{\vec{x}}\|f\|_{C^m(\vec{x})} < \infty,$$

donde $\vec{x}$ varía sobre las sucesiones $(x_1, \ldots, x_k)$ con a lo más $k^\#$ elementos de E distintos entre sí.

Demostración. [$\Rightarrow$] Supóngase que $f \in C^{m-1,1}(E)$, entonces existe $F \in C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|F\|_{C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)} \leq C \;\text{ y }\; F = f \text{ en } E.$$

Considérense $x_1, x_2, \ldots, x_k \in E$ puntos distintos tales que $k \leq k^\#$. Los puntos x_i definen polinomios

$$P_i = J_{x_i}(F).$$

Para cada $i \leq k$, se satisface

$$P_i(x_i) = f(x_i) \;\text{ y }\; |D^r P_i(x_i)| \leq C \text{ donde } r \leq m-1.$$

Se sigue que

$$\sum_{i=1}^{k} \|P_i\|_{x_i}^2 \leq C.$$

Para cada $r \leq m-1$, se estima $|D^r(P_i - P_j)(x_j)|$. Para esto, como se ha visto

$$D^r P_i(x_j) - D^r P_j(x_j) = D^r J_{x_i}(F)(x_j) - D^r F(x_j).$$

El teorema de Taylor implica

$$D^r P_i(x_j) - D^r P_j(x_j) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{m-r-2}}{(m-r-2)!} D^{m-1}(F(z) - F(x_i))(x_i - x_j)^{m-1-r} dt,$$

donde $z = (1-t)x_j + tx_i$. La condición de Lipschitz para la derivada de orden $m-1$ de F implica

$$|D^r P_i(x_j) - D^r P_j(x_j)| \leq C \cdot |x_i - x_j| \cdot |x_i - x_j|^{m-1-r} \leq C \cdot |x_i - x_j|^{m-r}. \quad (1.1)$$

De la desigualdad (1.1), para cada $i, j \leq k$, se obtiene que

$$\|P_i - P_j\|_{x_i, x_j} \leq C$$

y para $\vec{P} = (P_1, \ldots, P_k) \in \mathcal{P}^k$, se sigue que

$$\mathcal{Q}(\vec{P}) \leq C.$$

Por tanto

$$\sup_{\vec{x}} \|f\|_{C^m(\vec{x})} \leq C.$$

[$\Leftarrow$] Supóngase que $\sup_{\vec{x}} \|f\|_{C^m(\vec{x})} < C$. Considérese $S = \{x_1, \ldots, x_k\}$ tal que $x_i \in E$ y $k \leq k^\#$. Por hipótesis existen polinomios $P_1, \ldots, P_k$, tales que

$$P_i(x_i) = f(x_i)$$

y que satisfacen

$$\|P_i\|_{x_i} \leq C \text{ y } \|P_i - P_j\|_{x_i, x_j} \leq C,$$

donde C es independiente de los puntos $x_1, \ldots, x_k$. El teorema de extensión de Whitney implica que existe una función $F^S \in C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)$ definida por

$$F^S = \begin{cases} f, & \text{en } S \\ \sum_j \phi_j \cdot P_i, & \text{en } \mathbb{R}^n \setminus S. \end{cases}$$

Aquí $\{\phi_j\}$ es una partición de la unidad subordinada a la partición de Whitney de $\mathbb{R}^n \backslash S$. Para cada cubo Q_j en la partición de Whitney, se ha tomado un punto $x_i \in S$ tal que

$$d(Q_j, S) = d(Q_j, x_i).$$

La función F^S satisface

$$\|F^S\|_{C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)} \leq C' \text{ y } F^S = f \text{ en } S,$$

donde la constante C' es independiente de S. Como consecuencia de aplicar el teorema de extensión de Whitney, se ha obtenido la siguiente condición:

> **Hipótesis de extensión finita en $C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)$:** *Para cada $S \subset E$ con $\#S \leq k^\#$ existe $F^S \in C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)$ tal que $F^S = f$ en S y $\|F^S\|_{C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)} \leq C$.*

El teorema 1.1 queda demostrado si se prueba que la hipótesis de extensión finita implica que existe $F \in C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|F\|_{C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)} \leq A \text{ y } F = f \text{ en } E,$$

donde A depende solamente de m y n, es decir, $f \in C^{m-1,1}(E)$. La demostración de este hecho se explicará en la siguiente sección y con lo cual se concluye la prueba. ■

1.3 Problemas de extensión y aproximación

En esta sección lo único que hay que comprobar es que la hipotesis de extensión finita implica que $f \in C^{m-1,1}(E)$ con E arbitrario. De forma más precisa se demostrará:

Teorema de extensión infinita en $C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)$. *Existe un número natural $k^\#$ que depende solamente de m y n, con la siguiente propiedad. Supóngase $E \subset \mathbb{R}^n$ arbitrario y $f : E \to \mathbb{R}$. Si para cada $S \subset E$ con a lo más $k^\#$ puntos existe $F^S \in C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\|F^S\|_{C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)} \leq 1 \text{ y } F^S = f \text{ en } S.$$

Entonces existe $F \in C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|F\|_{C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)} \leq C \text{ y } F = f \text{ en } E,$$

donde C es una constante que solo depende de m y n.

Es posible relajar la hipótesis sobre E a expensas de modificar el espacio de funciones $C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)$ por el espacio $C^m(\mathbb{R}^n)$, de tal manera se obtiene:

Teorema de extensión finita en $C^m(\mathbb{R}^n)$. *Existe un número natural $k^\#$ que depende solamente de m y n, con la siguiente propiedad. Supóngase $E \subset \mathbb{R}^n$ arbitrario y $f : E \to \mathbb{R}$. Si para cada $S \subset E$ con a lo más $k^\#$ puntos existe $F^S \in C^m(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\|F^S\|_{C^m(\mathbb{R}^n)} \leq 1 \ \text{ y } \ F^S = f \text{ en } S.$$

Entonces existe $F \in C^m(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|F\|_{C^m(\mathbb{R}^n)} \leq C \ \text{ y } \ F = f \text{ en } E,$$

donde C es una constante que solo depende de m y n.

Localmente

Teo. de extensión finita en $C^m(\mathbb{R}^n) \Rightarrow$ ***Teo. de extensión infinita en*** $C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)$.

La demostración requiere de la regularización de funciones. Considérense una constante $\varepsilon > 0$ y una función regularizadora $\phi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Por convolución ϕ_ε lleva funciones de $C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)$ a funciones en $C^m(\mathbb{R}^n)$ y se deduce un problema de aproximación.

Teorema de aproximación finita en $C^m(\mathbb{R}^n)$**.** *Existen un entero $k^\#$ y una constante A que depende solamente de m y n con la siguiente propiedad. Sean $E \subset \mathbb{R}^n$ finito, $f : E \to \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$. Si para cada subconjunto $S \subset E$ con a lo más $k^\#$ puntos*

$$f \in C^m(S, \varepsilon),$$

entonces

$$f \in C^m(E, A \cdot \varepsilon)$$

y la norma de f en este espacio es menor que A.

Se tiene la siguiente implicación

Teo. de aproximación finita en $C^m(\mathbb{R}^n) \Rightarrow$ ***Teo. de extensión finita en*** $C^m(\mathbb{R}^n)$.

Supóngase que para $y_0 \in \mathbb{R}^n$ se ha demostrado una versión local del teorema de extensión finita, es decir, existe $\rho > 0$ tal que $f \in C^m(E \cap B(y_0, \rho))$.

Teo. extensión finita ⇒ Teo. extensión infinita. Considérese $S \subset E$ tal que $\#S \leq k^\#$. Por hipótesis existe $F^S \in C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|F^S\|_{C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)} \leq 1 \ \text{ y } \ F^S(x) = f(x) \ \text{ para } \ x \in S.$$

Dado un $\varepsilon > 0$, se toma la función regularizadora $\phi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon(x)dx = 1, \ \operatorname{sop}\phi_\varepsilon \subset B(0,\varepsilon) \ \text{ y } \ \|\phi_\varepsilon\|_{C^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C,$$

donde $C = C(m,n)$. Se define por convolución $F_\varepsilon^S = \phi_\varepsilon * F^S$, donde como es usual

$$F_\varepsilon^S(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon(x-y)F^S(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon(y)F^S(x-y)dy.$$

Ya que $D^r F_\varepsilon^S(x) = (D^r\phi_\varepsilon) * F^S(x)$, se obtiene

$$|D^r F_\varepsilon^S(x)| \leq C \cdot \|F^S\|_{C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)}.$$

Se tiene que $F_\varepsilon^S \in C^m(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|F_\varepsilon^S\|_{C^m(\mathbb{R}^n)} \leq C.$$

Además, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene

$$F_\varepsilon^S(x) - F^S(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon(z)F^S(x-z)dz - F^S(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon(z)[F^S(x-z) - F^S(x)]dz.$$

Ya que F^S es Lipschitz, cuando $z \in \operatorname{sop}\phi_\varepsilon \subset B(0,\varepsilon)$, se obtiene

$$|F_\varepsilon^S(x) - F^S(x)| \leq \varepsilon,$$

y por tanto

$$|F_\varepsilon^S(x) - f(x)| \leq |F_\varepsilon^S(x) - F^S(x)| + |F^S(x) - f(x)| \leq \varepsilon \text{ para } x \in S.$$

Dados $E_1 \subset E$ finito y un $\varepsilon > 0$, se deduce la siguiente propiedad:

> **Hipótesis de aproximación finita en $C^m(\mathbb{R}^n)$:** *Para cada $S \subset E_1$ con $\#S \leq k^\#$, existe $F^S \in C^m(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|F^S\|_{C^m(\mathbb{R}^n)} \leq C$ y $|F^S(x) - f(x)| \leq C \cdot \varepsilon$ para $x \in S$.*

Se demostrará que la hipótesis anterior implica que existe $F \in C^m(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|F\|_{C^m(\mathbb{R}^n)} \leq A \ \text{ y } \ |F(x) - f(x)| \leq A \cdot \varepsilon \text{ para } x \in E_1,$$

donde A depende solo de m y n, es decir

$$f \in C^m(E_1 \cap B(y_0,\rho), A \cdot \varepsilon).$$

La demostración de este hecho se explicará en la siguiente sección. La solución al problema de extensión finita se obtiene si $\varepsilon = 0$. De tal manera que

$$f \in C^m(B(y_0, \rho) \cap E_1).$$

Por tanto, se tiene que existen funciones en $C^m(\mathbb{R}^n)$ que extienden a f en subconjuntos finitos de E. El siguiente paso es encontrar una extensión de f en $E \cap B(y_0, \rho)$ vía el teorema de Arzela-Ascoli. Para $C > 0$, se define

$$\mathcal{B} = \{F \in C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n) : \|F\|_{C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)} \leq C\}.$$

Sea $\mathbb{B} = \operatorname{cl} B(y_0, \rho')$ con $\rho' > \rho$, se tiene que $\mathcal{B} \subset C^{m-1}(\mathbb{B})$ y se demostrará que $\operatorname{cl}\mathcal{B}$ es compacto con la topología inducida por la norma $C^{m-1}(\mathbb{R}^n)$. Para cada $r \leq m-1$, se define el conjunto $\mathcal{B}_r \subset C(\mathbb{B})$ como

$$\mathcal{B}_r = \{D^r F : F \in \mathcal{B}\} \text{ donde } D^r F \colon X \to L^r_{sim}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}).$$

Nótese que $C(\mathbb{B}) = \{F \colon \mathbb{B} \to E \text{ continuas }\}$, donde E es un espacio normado. Cada $D^r F \in \mathcal{B}_r$ satisface las siguientes propiedades

$$\frac{|D^r F(x) - D^r F(y)|}{|x-y|} \leq C \quad \text{y} \quad |D^r F(x)| \leq C \text{ para } x \neq y \text{ en } \mathbb{B}.$$

Entonces cada $\mathcal{B}_r$ es equicontinuo y acotado uniformemente. El teorema de Arzela-Ascoli implica

$$\operatorname{cl}\mathcal{B}_r \subset C(\mathbb{B})$$

es compacto, en donde la cerradura se toma respecto a la norma infinito. El siguiente paso es demostrar que una sucesión en $\mathcal{B}$ tiene una sub-sucesión convergente. Sea $(F_\nu) \subset \mathcal{B}$ sucesión, (F_ν) como sucesión en $\mathcal{B}_0$ tiene una sub-sucesión (F_ν) convergente. Las derivadas de la sub-sucesión (F_ν) tienen una sub-sucesión convergente en $\mathcal{B}_1$. Procediendo inductivamente se encuentra una sub-sucesión convergente $(D^{m-1}F_\nu)$ en $\mathcal{B}_{m-1}$. Sea (F_ν) la sub-sucesión en $\mathcal{B}$ tal que cada $(D^r F_\nu)$ converge en $\mathcal{B}_r$. Lo único que queda demostrar es que en la topología de $C^{m-1}(\mathbb{B})$ la sucesión encontrada converge. De manera más precisa se demuestra:

1. Si $D^r F_\nu \to G$ uniformemente en X y $F_\nu \to F$ converge uniformemente en $\mathbb{B}$ entonces $D^r F = G$.
2. $F_\nu \to F$ en la norma de $C^{m-1}(\mathbb{B})$.

Se demuestra 1, en el caso $r = 1$. Como F_ν es clase C^1 el teorema de Taylor implica

$$F_\nu(y) - F_\nu(x) - G(x)(y-x) = \int_0^1 [DF_\nu(z) - G(x)](y-x)dt,$$

donde $z = (1-t)x + ty$. Sumando $F(y) - F(x)$ en ambos lados se obtiene

$$F(y) - F(x) - G(x)(y-x) = \int_0^1 [DF_\nu(z) - G(x)](y-x)dt \\ + [F(y) - F(x) - F_\nu(y) + F_\nu(x)].$$

Como $F_\nu \to F$, se tiene

$$F(y) - F(x) - F_\nu(y) + F_\nu(x) = \lim_\mu [F_\mu(y) - F_\mu(x) - F_\nu(y) + F_\nu(x)].$$

Luego

$$|F_\mu(y) - F_\mu(x) - F_\nu(y) + F_\nu(x)| \leq \int_0^1 [DF_\mu - DF_\nu](z)(x-y)dt.$$

Entonces por la convergencia de DF_ν, se obtiene

$$|F(y) - F(x) - F_\nu(y) + F_\nu(x)| \leq \varepsilon \cdot |y-x|.$$

Por otra parte

$$|DF_\nu(z) - G(x)| \leq |DF_\nu(z) - G(z)| + |G(z) - G(x)|.$$

Para el mismo $\varepsilon > 0$, la convergencia de DF_ν y la continuidad de G implican

$$|DF_\nu(z) - G(x)| \leq 2\,\varepsilon.$$

Luego

$$|F(y) - F(x) - G(x)(y-x)| \leq 2\,\varepsilon \cdot |y-x| + \varepsilon \cdot |y-x|,$$

y se sigue que

$$DF(x) = G(x).$$

Para demostrar el inciso 2. La definición de norma en $C^{m-1}(\mathbb{B})$ implica

$$\|F_\nu - F\|_{C^{m-1}(\mathbb{B})} = \sup_{x\in\mathbb{B}} \max_{r\leq m-1} |D^r F_\nu(x) - D^r F(x)|.$$

Ya que $D^r F_\nu \to D^r F$ uniformemente en $\mathbb{B}$. Si $\nu \to \infty$, entonces

$$\|F_\nu - F\|_{C^{m-1}(\mathbb{B})} \to 0.$$

Por tanto (F_ν) converge a F en $C^{m-1,1}(\mathbb{B})$ lo cual implica que $\operatorname{cl}\mathcal{B}$ es compacto. Para cada $x \in B(y_0, \rho) \cap E$ se define

$$\mathcal{B}(x) = \{F \in \mathcal{B} : F(x) = f(x)\}.$$

Se tiene que $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{B}$ es cerrado en la topología $C^{m-1}(B(y_0, \rho))$. La hipótesis de extensión finita para $E_1 \subset E \cap B(y_0, \rho)$ finito implica

$$\bigcap_{x \in E_1} \mathcal{B}(x) \neq \varnothing.$$

Es decir, las familias $\{\mathcal{B}(x) : x \in E \cap B(y_0, \rho)\}$ tienen la propiedad de intersección finita. La compacidad de $\operatorname{cl} \mathcal{B}$ implica que

$$\bigcap_{x \in E \cap B(y_0, \rho)} \mathcal{B}(x) \neq \varnothing.$$

Esto asegura que existe $\tilde{F} \in \bigcap_{x \in E \cap B(y_0,\rho)} \mathcal{B}(x)$ que es extensión de f en $E \cap B(y_0, \rho)$ y su norma es menor que C. Por último, considérese $\phi \in C^m(\mathbb{R}^n)$ una función de corte en y_0 tal que $\operatorname{sop} \phi \subset B(y_0, \frac{1}{2}\rho)$, se define

$$F = \phi \cdot \tilde{F}.$$

Por tanto $f \in C^{m-1,1}(E \cap B(y_0, \frac{1}{2}\rho))$, y esto termina la demostración. ∎

En la demostración del anterior se ha hecho una reducción en las hipótesis y se ha obtenido un resultado local. A continuación, se demuestra que el teorema local implica el caso E compacto.

Caso E compacto. Existe una constante $\rho = \rho(m, n)$ tal que

$$E \subset \bigcup_{y \in E} B\Big(y, \frac{\rho}{5}\Big),$$

y $f \in C^{m-1,1}(E \cap B(y, \frac{\rho}{5}))$. Por compacidad existen $y_1, \ldots, y_N \in E$ tales que

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{N} B\Big(y_i, \frac{\rho}{5}\Big).$$

El teorema de la cubierta de Vitali (véase [6, pág. 35]) implica que existen

$$\{y'_1, \ldots, y'_M\} \subset \{y_1, \ldots, y_N\}$$

tales que

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{M} \operatorname{cl} B\Big(y'_j, \rho\Big)$$

y los abiertos $B(y_j', \frac{\rho}{5})$ son mutuamente disjuntos. Considérese una partición de la unidad $\{\phi_j\}_{j=1}^M$ tal que cada ϕ_j satisface

$$\operatorname{sop} \phi_j \subset B\Big(y_j', \frac{6}{5}\rho\Big).$$

Por hipótesis, para cada $j \leq M$ existe una función $F_j \in C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|F_j\|_{C^m(\mathbb{R}^n)} \leq C \quad \text{y} \quad F_j = f \quad \text{en} \quad E \cap B(y_j', \rho),$$

donde $C = C(m, n)$. Se define una función $F \in C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)$ por

$$F = \sum_{j=1}^{M} \phi_j \cdot F_j.$$

Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ existe un número k_{vitali} tal que $x \in \operatorname{sop} \phi_j$ en a lo más k_{vitali} soportes. Esta propiedad implica

$$F(x) - f(x) = \sum_i \phi_i(x)[F_i(x) - f(x)] = 0 \text{ para } x \in E$$

y

$$\|F\|_{C^m(\mathbb{R}^n)} \leq A,$$

en donde $A = A(m, n)$. Por tanto $f \in C^{m-1,1}(E)$. ■

Supóngase que para cada compacto el problema de extensión tiene solución.

Caso E cerrado. Considérese $\{Q_i\}_{i=1}^{\infty}$ una familia de cubos en $\mathbb{R}^n$ tal que $\delta_{Q_i} = 1$ y $\mathbb{R}^n = \bigcup_i Q_i$. Cada $E_i = Q_i \cap E$ es compacto y del caso compacto $f \in C^{m-1,1}(E_i)$. Se toma $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ una partición de la unidad subordinada a la familia de cubos. Para cada existe $F_i \in C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)$ que es extensión de f en E_i, esto es

$$\|F_i\|_{C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)} \leq C \quad \text{y} \quad F_i(x) = f(x) \text{ para } x \in E_i.$$

Se define $F \in C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)$ como

$$F = \sum_i \phi_i \cdot F_i.$$

La función F satisface las propiedades requeridas. Por tanto $f \in C^{m-1,1}(E)$. ■

El resultado que hace falta establecer es el teorema de aproximación finita local. Tal resultado se enuncia a continuación.

Teorema 1.2. *Existen constantes $k^\#$, A y ρ que dependen solamente de m y n con la siguiente propiedad. Sean $E \subset \mathbb{R}^n$ finito, una función $f : E \to \mathbb{R}$, una constante $\varepsilon > 0$ y un punto $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Si para cada $S \subset E$ tal que $\#S \leq k^\#$, se tiene que*

$$f \in C^m(S, \varepsilon),$$

entonces

$$f \in C^m(E \cap B(y_0, \rho), A \cdot \varepsilon).$$

y la norma de f en este espacio es menor que A.

Para concluir con la sección se demuestra que localmente el teorema de aproximación implica el teorema de extensión.

Teo. aproximación $\Rightarrow$ Teo. extensión. Por hipótesis para cada $\varepsilon > 0$, se tiene

$$f \in C^m(E \cap B(y_0, \rho), A \cdot \varepsilon).$$

Sea $F_\varepsilon \in C^m(\mathbb{R}^n)$ una aproximación de f en $E \cap B(y_0, \rho)$. Se define la función $g_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} F_\varepsilon(x) - f(x), & \text{en } E \cap B(y_0, \rho) \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Existe una función $G_\varepsilon \in C^m(\mathbb{R}^n)$ de tal forma que $G_\varepsilon = g_\varepsilon$ en $E \cap B(y_0, \rho)$. Como E es finito, se tiene

$$E \cap B(y_0, \rho) = \{x_1, \ldots, x_N\}.$$

Entonces

$$G_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{N} \phi_i(x) g_\varepsilon(x_i),$$

donde $\phi_i \in C^m(\mathbb{R}^n)$ es una función de corte en el punto x_i. Se sigue que

$$\|G_\varepsilon\|_{C^m(\mathbb{R}^n)} \leq C(x_1, \ldots, x_N) \cdot \max_i |g_\varepsilon(x_i)| \quad \text{y}$$

$$|G_\varepsilon(x)| \leq C \cdot \varepsilon \text{ para } x \in \mathbb{R}^n.$$

Se define $F \in C^m(\mathbb{R}^n)$ por

$$F = F_\varepsilon - G_\varepsilon.$$

Para $x \in E \cap B(y_0, \rho)$, se tiene

$$\begin{aligned} F(x) - f(x) &= F_\varepsilon(x) - G_\varepsilon(x) - f(x) \\ &= F_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(x) - f(x) = 0. \end{aligned}$$

Tomando $\varepsilon < 1/C$, se obtiene

$$\|F\|_{C^m(\mathbb{R}^n)} \leq C^2 \cdot \varepsilon + C \leq 2C.$$

Por tanto $f \in C^m(E \cap B(y_0, \rho))$ y esto termina la demostración. ∎

1.4 Lemas débil y fuerte

La demostración del teorema 1.2 requiere de establecer sobre subconjuntos de multi-índices una técnica de inducción y de establecer los lemas débil y fuerte. La formulación de los lemas débil y fuerte requiere de nuevos elementos que se presentan a continuación. Se denota por $\mathcal{M}$ al conjunto de multi-índices $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ tales que

$$|\beta| = \beta_1 + \cdots + \beta_n \leq m - 1.$$

Si $\alpha, \beta \in \mathcal{M}$ son distintos, entonces existe un entero k tal que

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_k \neq \beta_1 + \cdots + \beta_k.$$

Sea $\bar{k}$ el entero más grande de los k tales que

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_{\bar{k}} \neq \beta_1 + \cdots + \beta_{\bar{k}}.$$

Se escribe

$$\alpha < \beta \text{ si y solo si } \alpha_1 + \cdots + \alpha_{\bar{k}} < \beta_1 + \cdots + \beta_{\bar{k}}.$$

Se tiene que la relación $<$ induce un orden total sobre $\mathcal{M}$.

Otro ingrediente que será necesario para formular los lemas débil y fuerte son conjuntos de polinomios. Para $M > 0$, $S \subset \mathbb{R}^n$ y $y \in \mathbb{R}^n$, se define

$$\begin{aligned} \Gamma^s(y, S, M) =& \{P \in \mathcal{P} : \text{ Existe } G^S \in C^m(\mathbb{R}^n) \text{ tal que } \|D^m G^S\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq M, \\ & |G^S| \leq M \cdot \varepsilon \text{ en } S \text{ y } J_y(G^S) = P\}. \end{aligned}$$

Dado $a_0 > 0$, se define

$$\begin{aligned} \Gamma^w(y, S, M, a_0) =& \{P \in \mathcal{P} : \text{ Existe } G^S \in C^m(\mathbb{R}^n) \text{ tal que } \|D^m G^S\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq a_0, \\ & |G^S| \leq M \cdot \varepsilon \text{ en } S \text{ y } J_y(G^S) = P\}. \end{aligned}$$

Nótese que $\Gamma^s(y, S, M)$ y $\Gamma^w(y, S, M, a_0)$ son subconjuntos convexos de $\mathcal{P}$ y que

$$\Gamma^s(y, S, M), \Gamma^w(y, S, M, a_0) \subset \mathcal{P}_y$$

La técnica de inducción sobre subconjuntos de $\mathcal{M}$ depende de los lemas débil y fuerte. En los siguientes lemas $\delta_{\beta\alpha}$ denota la delta de Kronecker.

Lema débil. *Sea $\mathcal{A}$ un subconjunto de $\mathcal{M}$. Existen constantes $k^\#$ y a_0 que dependen solamente de m y n, tales que dados:*

- *Una constante $W > 0$.*

- *Un conjunto* $E \subset \mathbb{R}^n$ *finito, una función* $f : E \to \mathbb{R}$ *y una constante* $\varepsilon > 0$.
- *Un punto* $y_0 \in \mathbb{R}^n$.
- *Polinomios* $P_\alpha \in \mathcal{P}$ *indexados por* $\mathcal{A}$.

Si la familia de polinomios P_α *satisface:*

HD1. $\partial^\beta P_\alpha(y_0) = \delta_{\beta\alpha}$ *para cada* $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$.

HD2. $|\partial^\beta P_\alpha(y_0)| \leq a_0$ *para* $\beta \notin \mathcal{A}$,

y para cada $S \subset E$ *con* $\#S \leq k^\#$, *se tiene*

HD3. $P_\alpha \in \Gamma^w(y_0, S, W, a_0)$.

HD4. $f \in C^m(S, W \cdot \varepsilon)$.

Entonces existen constantes A *y* ρ, *que dependen solamente de* W, m *y* n *tales que*

$$f \in C^m(E \cap B(y_0, \rho), A \cdot \varepsilon).$$

Además, la norma de f *en este espacio es menor que* A.

Lema fuerte. *Sea* $\mathcal{A}$ *un subconjunto de* $\mathcal{M}$. *Existe un entero* $k^\#$ *que depende solamente de* m *y* n, *tal que dados:*

- *Una constante* $W > 0$.
- *Un conjunto* $E \subset \mathbb{R}^n$ *finito, una función* $f : E \to \mathbb{R}$ *y una constante* $\varepsilon > 0$.
- *Un punto* $y_0 \in \mathbb{R}^n$.
- *Polinomios* $P_\alpha \in \mathcal{P}$ *indexados por* $\mathcal{A}$.

Si la familia de polinomios P_α *satisface:*

HF1. $\partial^\beta P_\alpha(y_0) = \delta_{\beta\alpha}$ *para* $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$.

HF2. $|\partial^\beta P_\alpha(y_0)| \leq W$ *para* $\beta \geq \alpha$,

y para cada $S \subset E$ *con* $\#S \leq k^\#$, *se tiene*

HF3. $P_\alpha \in \Gamma^s(y_0, S, W)$.

HF4. $f \in C^m(S, W \cdot \varepsilon)$.

Entonces existen constantes A y ρ, que dependen solamente de W, m y n tales que

$$f \in C^m(E \cap B(y_0, \rho), A \cdot \varepsilon).$$

Además, la norma de f en este espacio es menor que A.

Sea $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ el primer multi-índice. La demostración del lema débil y fuerte es sencilla para ciertos conjuntos.

Lema 1.1. *El lema débil y fuerte son válidos para $\mathcal{A}$, cuando $\mathbf{0} \in \mathcal{A}$, con $k^\# = 1$ y $F = 0$.*

Demostración. Supóngase que para $\mathcal{A}$ se satisfacen las hipótesis del lema débil. El polinomio $P_\mathbf{0} \in \mathcal{P}$ satisface

$$P_\mathbf{0}(x) = 1 + \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{A} \\ \alpha \neq \mathbf{0}}} \frac{c_{\mathbf{0},\alpha}}{\alpha!}(x - y_0)^\alpha \quad \text{y} \quad |c_{\mathbf{0},\alpha}| \leq a_0.$$

De la hipótesis $HD3$, para cada $y \in E$ existe $\varphi_\mathbf{0}^y \in C^m(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|D^m \varphi_\mathbf{0}^y\| \leq a_0.$$

El teorema de Taylor implica

$$\varphi_\mathbf{0}^y(x) - 1 = \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{A} \\ \alpha \neq \mathbf{0}}} \frac{c_{\mathbf{0},\alpha}}{\alpha!}(x - y_0)^\alpha + \int_0^1 \frac{(1-t)^{m-1}}{(m-1)!} D^m \varphi_\mathbf{0}^y(z)(x - y_0)^m dt,$$

donde $z = (1-t)y_0 + tx$. Para $x \in B(y_0, 1)$, se cumple

$$|\varphi_\mathbf{0}^y(x) - 1| \leq \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{A} \\ \alpha \neq \mathbf{0}}} \frac{a_0}{\alpha!} + \frac{a_0}{m!} \leq a_0 \sum_{\alpha \neq \mathbf{0}} \frac{1}{\alpha!}.$$

Considérese a_0 de manera que

$$a_0 \leq \frac{1}{2(\mathrm{e} - 1)}.$$

Se tiene que

$$|\varphi_\mathbf{0}^y(x) - 1| \leq \frac{1}{2}.$$

Si $y \in B(y_0, 1) \cap E$, por $HD3$ se satisface

$$\frac{1}{2} \leq |\varphi_\mathbf{0}^y(y)| \leq W \cdot \varepsilon.$$

La constante W cumple que
$$W \leq 2W^2 \cdot \varepsilon.$$
Por $HD4$, para $y \in B(y_0, 1) \cap E$, existe $F^y \in C^m(\mathbb{R}^n)$ tal que
$$\|F^y\|_{C^m(\mathbb{R}^n)} \leq W \;\text{ y }\; |F^y(y) - f(y)| \leq W \cdot \varepsilon.$$
Tómese $W' = W + 2\,W^2$, se tiene
$$|f(y)| \leq W'\varepsilon.$$
Por tanto $F = 0$ es una aproximación de f en $E \cap B(y_0, 1)$.

Ahora, supóngase que para $\mathcal{A}$ se satisfacen las hipótesis del lema fuerte. El polinomio $P_{\mathbf{0}} \in \mathcal{P}$ satisface
$$|c_{\mathbf{0},\alpha}| \leq W.$$
Además, si $k = 1$, entonces para cada $y \in E$ existe $\varphi_{\mathbf{0}}^y \in C^m(\mathbb{R}^n)$ tal que
$$\|D^m \varphi_{\mathbf{0}}^y\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq W.$$
El teorema de Taylor implica
$$|\varphi_{\mathbf{0}}^y(x) - 1| \leq \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{A} \\ \alpha \neq \mathbf{0}}} \frac{W}{\alpha!}|x - y_0|^{|\alpha|} + \frac{W}{m!}|x - y_0|^m.$$
Sea $\rho > 0$ tal que
$$|\varphi_{\mathbf{0}}^y(x) - 1| \leq \frac{1}{2} \;\text{ para }\; x \in B(y_0, \rho).$$
Entonces de forma similar al caso del lema débil, se tiene que $F = 0$ aproxima a f en $B(y_0, \rho) \cap E$. ■

A continuación, se establece un orden en los subconjuntos de $\mathcal{M}$. Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{M}$ distintos, se tiene
$$\mathcal{A} \triangle \mathcal{B} \neq \varnothing.$$
Sea α el mínimo de $\mathcal{A} \triangle \mathcal{B}$ bajo el orden definido en $\mathcal{M}$. Se escribe
$$\mathcal{A} < \mathcal{B} \;\text{ si y solo si }\; \alpha \in \mathcal{A}.$$
La relación $<$ induce un orden total sobre los subconjuntos de $\mathcal{M}$. Nótese que bajo esta relación el elemento mínimo es $\mathcal{M}$ y el elemento máximo es el conjunto vacío.

En el orden definido, se demuestran los lemas débil y fuerte para cada $\mathcal{A}$. Es decir, se hace una inducción sobre los subconjuntos de $\mathcal{M}$. La inducción comienza en $\mathcal{A} = \mathcal{M}$ y termina en $\mathcal{A} = \varnothing$, donde para este último caso las hipótesis correspondientes a los polinomios P_α son vacías. Como consecuencia se obtendrá el teorema 1.2 y se habrá demostrado el teorema de aproximación finita local. Los siguientes dos lemas forman parte del paso de inducción.

Lema 1.2. *Sea $\mathcal{A}$ un subconjunto propio de $\mathcal{M}$. Si el lema débil es válido para cada $\bar{\mathcal{A}} \leq \mathcal{A}$, entonces el lema fuerte válido para $\mathcal{A}$.*

Lema 1.3. *Sea $\mathcal{A}$ un subconjunto propio de $\mathcal{M}$. Si el lema fuerte es válido para cada $\bar{\mathcal{A}} < \mathcal{A}$, entonces el lema débil es válido para $\mathcal{A}$.*

Por el lema 1.1, se sigue que el lema débil y fuerte se satisfacen para todos los conjuntos $\mathcal{A}$ que tienen al multi-índice $\mathbf{0}$. El siguiente conjunto en el orden es

$$\mathcal{M} \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

Entonces para $\mathcal{M} \setminus \{\mathbf{0}\}$ se satisfacen las hipótesis del lema 1.3. En este caso la familia de polinomios P_α con $\alpha \neq \mathbf{0}$ está dada por

$$P_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha!}(x - y_0)^\alpha + c_\alpha.$$

El problema es definir correctamente un polinomio $P_{\mathbf{0}}$ de manera que se satisfagan las hipótesis del lema débil.

Otro caso sencillo de demostrar es cuando el conjunto es no monótono. Un conjunto $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ es **monótono**, si para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, se tiene que $\alpha + \gamma \in \mathcal{A}$ siempre que $\alpha + \gamma \in \mathcal{M}$.

Demostración del lema 1.3 para $\mathcal{A}$ no monótono. Como $\mathcal{A}$ no es monótono, existen multi-índices

$$\bar{\alpha} \in \mathcal{A}, \bar{\gamma} \in \mathcal{M},$$

tales que $\bar{\alpha} + \bar{\gamma} \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{A}$. Se define $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cup \{\bar{\alpha} + \bar{\gamma}\}$, entonces $\bar{\mathcal{A}} < \mathcal{A}$. Sean $k^\#, a_0, W$ y P_α como en las hipótesis del lema débil para $\mathcal{A}$. Se deben encontrar polinomios $\bar{P}_\alpha \in \mathcal{P}$ con $\alpha \in \bar{\mathcal{A}}$, que satisfagan las hipótesis del lema fuerte con la constante $k^\#$ y una nueva constante W'. Se define

$$P_{\bar{\alpha}+\bar{\gamma}}(x) = \frac{\bar{\alpha}!}{(\bar{\alpha} + \bar{\gamma})!} \sum_{|\bar{\beta}| \leq m-1-|\bar{\gamma}|} \frac{1}{\bar{\beta}!} \partial^{\bar{\beta}} P_{\bar{\alpha}}(y_0)(x - y_0)^{\bar{\beta}+\bar{\gamma}}.$$

Si $\beta = \bar{\beta} + \bar{\gamma} \in \mathcal{M}$, entonces

$$\partial^{\beta} P_{\bar{\alpha}+\bar{\gamma}}(y_0) = \frac{\bar{\alpha}!}{(\bar{\alpha}+\bar{\gamma})!}\frac{\beta!}{\bar{\beta}!}\partial^{\bar{\beta}} P_{\bar{\alpha}}(y_0),$$

y en otro caso $\partial^{\beta} P_{\bar{\alpha}+\bar{\gamma}}(y_0) = 0$. Por la hipótesis $HD2$ para $\bar{\beta} \notin \mathcal{A}$, se tiene

$$|\partial^{\beta} P_{\bar{\alpha}+\bar{\gamma}}(y_0)| \leq \frac{\bar{\alpha}!}{(\bar{\alpha}+\bar{\gamma})!}\frac{(\bar{\beta}+\bar{\gamma})!}{\bar{\beta}!} \cdot a_0 \leq m^{2n} \cdot a_0,$$

luego para $\alpha \in \bar{A}$ y $\beta \in \mathcal{M} \setminus \bar{\mathcal{A}}$, se obtiene

$$|\partial^{\beta} P_{\alpha}(y_0)| \leq m^{2n} \cdot a_0.$$

Si la constante a_0 satisface

$$a_0 \leq \frac{1}{2m^{2n}},$$

entonces la matriz $M = [\partial^{\beta} P_{\alpha}(y_0)]_{\beta,\alpha\in\bar{\mathcal{A}}}$ es invertible. Se definen polinomios $\bar{P}_{\alpha} \in \mathcal{P}$ indexados por $\bar{\mathcal{A}}$, como

$$\bar{P}_{\alpha} = \sum_{\alpha'\in\bar{\mathcal{A}}} P_{\alpha'} \cdot M^{-1}_{\alpha',\alpha}.$$

Los polinomios $\bar{P}_{\alpha}$ satisfacen

$$\partial^{\beta} \bar{P}_{\alpha}(y_0) = \delta_{\beta\alpha} \text{ para } \beta, \alpha \in \bar{\mathcal{A}}.$$

Existe una constante $C_1 = C_1(m,n)$, tal que M^{-1} satisface $|M^{-1}_{\beta,\alpha}| \leq C_1$ y para $\beta \notin \bar{A}$ se tiene

$$|\partial^{\beta} \bar{P}_{\alpha}(y_0)| \leq C_1.$$

La hipótesis $HD3$ implica que para $S \subset E$ tal que $\#S \leq k^{\#}$ y $\alpha \in \mathcal{A}$, se tiene que $P_{\alpha} \in \Gamma^{w}(y_0, S, W, a_0)$, esto es, existe una función $\varphi^{S}_{\alpha} \in C^{m}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|D^m \varphi^{S}_{\alpha}\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq a_0 \ \text{ y } \ |\varphi^{S}_{\alpha}(x)| \leq W \cdot \varepsilon \text{ para } x \in S.$$

Se define la función $\varphi_{\bar{\alpha}+\bar{\gamma}} \in C^{m}(\mathbb{R}^n)$, por

$$\varphi_{\bar{\alpha}+\bar{\gamma}}(x) = \phi(x)\varphi^{S}_{\bar{\alpha}}(x),$$

donde

$$\phi(x) = \frac{\bar{\alpha}!}{(\bar{\alpha}+\bar{\gamma})!}(x-y_0)^{\bar{\gamma}}\phi(x)$$

y $\phi \in C^m(\mathbb{R}^n)$ es una función de corte en y_0 tal que $\operatorname{sop}\phi \subset B(y_0, 2)$. El teorema de Taylor para $x \in \mathbb{R}^n$ implica

$$D^{m-1}\varphi_{\bar{\alpha}}^S(x) = D^{m-1}\varphi_{\bar{\alpha}}^S(y_0) + \int_0^1 D^m\varphi_{\bar{\alpha}}^S(z)(x - y_0)dt,$$

donde $z = (1-t)x + ty_0$. Cuando $x \in B(y_0, 2)$, se tiene

$$|D^{m-1}\varphi_{\bar{\alpha}}^S(x)| \leq C_2 + 2a_0 \leq C_3.$$

Inductivamente, se obtiene

$$\|\varphi_{\bar{\alpha}}^S\|_{C^m(B(y_0,2))} \leq C_4.$$

Además, ya que $\operatorname{sop}\phi \subset B(y_0, 2)$, la fórmula de Leibniz implica

$$\|D^m\varphi_{\bar{\alpha}+\bar{\gamma}}\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq C_5.$$

Como $J_{y_0}(\varphi_{\bar{\alpha}}^S) = P_{\bar{\alpha}}$ y ϕ es plana en y_0, se tiene

$$\partial^\beta\varphi_{\bar{\alpha}+\bar{\gamma}}(y_0) = \sum_{|\alpha|\leq|\beta|}\binom{\beta}{\alpha}\partial^\alpha\phi(y_0)\partial^{\beta-\alpha}\varphi_{\bar{\alpha}}^S(y_0) = \frac{\bar{\alpha}!}{(\bar{\alpha}+\bar{\gamma})!}\frac{\beta!}{(\beta-\bar{\gamma})!}\partial^{\beta-\bar{\gamma}}P_{\bar{\alpha}}(y_0).$$

Se toma $\bar{\beta} = \beta - \bar{\gamma}$ obteniendo

$$J_{y_0}(\varphi_{\bar{\alpha}+\bar{\gamma}}) = P_{\bar{\alpha}+\bar{\gamma}}.$$

Cuando $x \in S$ se tiene

$$|\varphi_{\bar{\alpha}+\bar{\gamma}}(x)| \leq \frac{\bar{\alpha}!}{(\bar{\alpha}+\bar{\gamma})!}|x - y_0|^{|\bar{\gamma}|} \cdot |\varphi_{\bar{\alpha}}^S(x)| \leq C_6 \cdot \varepsilon, \text{ donde } C_6 = C_6(W, m, n).$$

En resumen, dados $S \subset E$ con $\#S \leq k^\#$ y $\alpha \in \bar{\mathcal{A}}$, existe $\varphi_\alpha^S \in C^m(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|D^m\varphi_\alpha^S\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq C_5, \ |\varphi_\alpha^S(x)| \leq C_6 \cdot \varepsilon \text{ para } x \in S \ \text{ y } \ J_{y_0}(\varphi_\alpha) = P_\alpha.$$

Se definen funciones

$$\bar{\varphi}_\alpha^S = \sum_{\alpha' \in \bar{\alpha}} \varphi_{\alpha'}^S \cdot M_{\alpha',\alpha}^{-1}.$$

Entonces, para cada $S \subset E$ con $\#S \leq k^\#$ y $\alpha \in \bar{\mathcal{A}}$, existe $\bar{\varphi}_\alpha^S \in C^m(\mathbb{R}^n)$ con la siguiente propiedad:

1. $\|D^m\bar{\varphi}_\alpha^S\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq W'$.

2. $|\bar{\varphi}^S_\alpha(x)| \leq W' \cdot \varepsilon$ para $x \in S$.

3. $J_{y_0}(\bar{\varphi}^S_\alpha) = \bar{P}_\alpha$.

Esto es, $\bar{P}_\alpha \in \Gamma^s(y_0, S, W')$ donde W' resulta ser una constante controlada por W, m y n. Los polinomios $\bar{P}_\alpha \in \mathcal{P}$ satisfacen las hipótesis del lema fuerte. La hipótesis inductiva implica que el lema fuerte es cierto para $\bar{\mathcal{A}}$ con la misma $k^\#$ y la nueva W'. Por tanto existen constantes $A = A(W, m, n)$ y $\rho = \rho(W, m, n)$ tales que

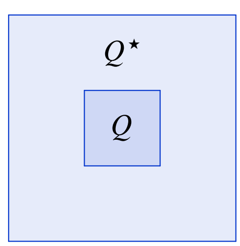
$$f \in C^m(E \cap B(y_0, \rho), A \cdot \varepsilon).$$

Entonces f satisface la conclusión del lema débil para $\mathcal{A}$ y esto termina la demostración. ■

El último tipo de subconjuntos de $\mathcal{M}$ para lo cuales resta demostrar el lema débil, son los monótonos. El estudio de este caso se hará en los siguientes capítulos.

Sea $y_0 \in \mathbb{R}^n$, supóngase que en cada punto de un cubo centrado en y_0, se ha demostrado el lema fuerte con cierto $\mathcal{A}' < \mathcal{A}$. Entonces en cada punto del cubo existe una aproximación. Es posible "pegar" las aproximaciones para obtener una función que aproxime a la función en todo el cubo. El siguiente lema se concentra en demostrar esta situación. En capítulos posteriores se utilizará el lema en dos situaciones. La primera es extender la aproximación a un cubo centrado en y_0 y segundo como herramienta en el paso de inducción para el lema débil.

Para formular el lema, se establece la siguiente notación. Sea $Q \subset \mathbb{R}^n$ un cubo, recuérdese que δ_Q denota el diámetro de Q. El cubo $Q^\star$ denota al cubo centrado en Q tal que $\delta_{Q^\star} = 3\delta_Q$.



Cubo Q y su cubo $Q^\star$.

En el siguiente lema, considérese $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ y supóngase que el lema fuerte es válido para cada $\mathcal{A}' < \mathcal{A}$.

Lema 1.4. *Existe un número natural $k^{\#}_{ant}$ que depende solamente de m y n, tal que dados:*

- *Una constante $A > 0$.*
- *Un cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\delta_Q = 1$, un conjunto $\hat{E} \subset \mathbb{R}^n$ finito.*
- *Una función $\hat{f} : \hat{E} \to \mathbb{R}$.*
- *Una constante $\varepsilon > 0$.*

Si para cada $y \in Q^{\star\star}$ existen un subconjunto $\bar{\mathcal{A}}^y < \mathcal{A}$ y polinomios $\bar{P}^y_\alpha \in \mathcal{P}$ con $\alpha \in \mathcal{A}$, que satisfacen:

G1. Si $\beta, \alpha \in \bar{\mathcal{A}}^y$, entonces $\partial^\beta \bar{P}^y_\alpha(y) = \delta_{\beta\alpha}$.

G2. Si $\alpha \in \bar{\mathcal{A}}^y$ y $\beta \in \mathcal{M} \setminus \bar{\mathcal{A}}^y$ con $\beta \geq \alpha$, entonces $|\partial^\beta \bar{P}^y_\alpha(y)| \leq A$.

Dado $S \subset \hat{E}$ con $\#S \leq k^{\#}_{ant}$, se tiene

G3. Para cada $\alpha \in \bar{\mathcal{A}}^y$ existe $\varphi^S_\alpha \in C^m(\mathbb{R}^n)$ tal que

a. $\|D^m \varphi^S_\alpha\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq A$.
b. $|\varphi^S_\alpha(x)| \leq A \cdot \varepsilon$ para $x \in S$.
c. $J_y(\varphi^S_\alpha) = \bar{P}^y_\alpha$.

G4. Existe $F^S \in C^m(\mathbb{R}^n)$ tal que

a. $\|D^r F^S\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq A$ para $r \leq m$.
b. $|F^S(x) - \hat{f}(x)| \leq A \cdot \varepsilon$ para $x \in S$.

Entonces existe una constante A' que depende solo de A, m y n tal que

$$\hat{f} \in C^m(\hat{E} \cap Q^\star, A' \cdot \varepsilon).$$

Además, si $F \in C^m(\mathbb{R}^n)$ es una aproximación de $\hat{f}$ en $E \cap Q^\star$, entonces

$$\|D^r F\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq A'.$$

Demostración. Dado $y \in Q^{\star\star}$, por hipótesis existen un subconjunto $\bar{\mathcal{A}}^y < \mathcal{A}$ y polinomios $\bar{P}^y_\alpha \in \mathcal{P}$ con $\alpha \in \bar{\mathcal{A}}^y$ que satisfacen las hipótesis del lema fuerte con $\hat{E}$, $\hat{f}$, ε y A. El lema fuerte implica que

$$\hat{f} \in C^m(\hat{E} \cap B(y, \rho), C \cdot \varepsilon),$$

donde C y ρ dependen solamente de A, m y n. Se toma $k^{\#}_{ant}$ como el máximo de las $k^{\#}$ asociadas al lema fuerte en cada $\mathcal{A}' < \mathcal{A}$. Por un lado, los abiertos $B(y, \rho/5)$ con $y \in Q^{\star}$ cubren a $Q^{\star}$. Por compacidad existen $y_1, \ldots, y_N \in Q^{\star}$ tales que

$$Q^{\star} \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(y_i, \rho/5).$$

Por otro lado, por el teorema de la cubierta de Vitali existen $y'_1, \ldots, y'_M \in Q^{\star}$ tales que

$$\{y'_1, \ldots, y'_M\} \subset \{y_1, \ldots, y_N\}$$

y

$$Q^{\star} \subset \bigcup_{j=1}^{M} \operatorname{cl} B(y'_j, \rho).$$

Considérese una partición de la unidad $\{\phi_j\}_{j=1}^{M}$ tal que

$$\operatorname{sop} \phi_j \subset B\Big(y_j, \frac{6}{5}\rho\Big).$$

Se define $F \in C^m(\mathbb{R}^n)$ por

$$F = \sum_{j=1}^{M} \phi_j \cdot F_j,$$

en donde cada $F_j \in C^m(\mathbb{R}^n)$ es una aproximación de $\hat{f}$ en $\hat{E} \cap B(y'_j, \rho)$. Se tiene que F es una aproximación de $\hat{f}$ en $\hat{E} \cap Q^{\star}$. En efecto, por definición se cumple

$$\|F\|_{C^m(\mathbb{R}^n)} \leq \sum_{j=1}^{M} \|\phi_j\|_{C^m(\mathbb{R}^n)} \|F_j\|_{C^m(\mathbb{R}^n)} \leq A_1,$$

con $A_1 = A_1(A, m, n)$. Para $x \in \hat{E} \cap Q^{\star}$, se tiene la siguiente estimación

$$|F(x) - \hat{f}(x)| \leq \sum_{j=1}^{M} \phi_j(x) |F_j(x) - \hat{f}(x)| \leq C \cdot \varepsilon.$$

Sea $A' = \text{máx}\{C, A_1\}$, esto demuestra que F es una aproximación de $\hat{f}$ en $\hat{E} \cap Q^{\star}$ con norma menor que A'. ■

Como consecuencia, en el caso general para un cubo Q tal que $\delta_Q \neq 1$, se tiene:

Corolario 1. *Existe un número natural $k^{\#}_{ant}$ que depende solamente de m y n, tal que dados:*

- *Una constante $A > 0$.*
- *Un cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$, un conjunto $\hat{E} \subset \mathbb{R}^n$ finito.*
- *Una función $\hat{f}: \hat{E} \to \mathbb{R}$.*
- *Una constante $\varepsilon > 0$.*

Si para cada $y \in Q^{\star\star}$ existen un subconjunto $\bar{\mathcal{A}}^y < \mathcal{A}$ y polinomios $\bar{P}^y_\alpha \in \mathcal{P}$ con $\alpha \in \mathcal{A}$, que satisfacen:

G1. Si $\beta, \alpha \in \bar{\mathcal{A}}^y$, entonces $\partial^\beta \bar{P}^y_\alpha(y) = \delta_{\beta\alpha}$.

G2. Si $\alpha \in \bar{\mathcal{A}}^y$ y $\beta \in \mathcal{M} \setminus \bar{\mathcal{A}}^y$ con $\beta \geq \alpha$, entonces $|\partial^\beta \bar{P}^y_\alpha(y)| \leq A \cdot \delta_Q^{|\alpha|-|\beta|}$.

Dado $S \subset \hat{E}$ con $\#S \leq k^{\#}_{ant}$, se tiene

G3. Para cada $\alpha \in \bar{\mathcal{A}}^y$ existe $\varphi^S_\alpha \in C^m(\mathbb{R}^n)$ tal que

a. $\|D^m \varphi^S_\alpha\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq A \cdot \delta_Q^{|\alpha|-m}$.

b. $|\varphi^S_\alpha(x)| \leq A \cdot \delta_Q^{|\alpha|-m} \varepsilon$ para $x \in S$.

c. $J_y(\varphi^S_\alpha) = \bar{P}^y_\alpha$.

G4. Existe $F^S \in C^m(\mathbb{R}^n)$ tal que

a. $\|D^r F^S\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq A \cdot \delta_Q^{m-r}$ para $r \leq m$,

b. $|F^S(x) - \hat{f}(x)| \leq A \cdot \varepsilon$ para $x \in S$.

Entonces existe una constante A' que depende solo de A, m y n tal que

$$\hat{f} \in C^m(\hat{E} \cap Q^\star, A' \cdot \varepsilon).$$

Ademńas, si $F \in C^m(\mathbb{R}^n)$ es una aproximación de $\hat{f}$ en $E \cap Q^\star$, se tiene que

$$\|D^r F\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq A' \cdot \delta_Q^{m-r}.$$

Demostración. Considérese la homotecia $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $L(x) = \delta_Q^{-1} x$. Se tiene que $\delta_{L(Q)} = 1$. Entonces para:

1. Una función $\tilde{f}: L(\hat{E}) \to \mathbb{R}$ dada por $\tilde{f} = \delta_Q^{-m} \hat{f} \circ L^{-1}$.

2. Polinomios $\tilde{P}_\alpha^y = \delta_Q^{-|\alpha|} \bar{P}_\alpha^{\delta_Q y} \circ L^{-1}$ con $\alpha \in \mathcal{A}$.

3. Funciones $\tilde{\varphi}_\alpha^{L(S)} = \delta_Q^{-|\alpha|} \varphi_\alpha^S \circ L^{-1}$ con $\#S \leq k_{ant}^\#$.

Si $Q, \hat{E}, \hat{f}, \varepsilon$ cumplen $G1,\ldots,G4$ entonces también $L(Q), L(\hat{E}), \tilde{f}, \varepsilon$ con la misma constante A. Por el lema 1.4, se tiene

$$\tilde{f} \in C^m(L(\hat{E}) \cap L(Q)^\star, A' \cdot \varepsilon).$$

Es decir, existe una función $\tilde{F} \in C^m(\mathbb{R}^n)$ que aproxima a $\tilde{f}$ en $L(\hat{E}) \cap L(Q)^\star$. Se define $F \in C^m(\mathbb{R}^n)$ por

$$F(x) = \delta_Q^m \cdot \tilde{F}(L(x)).$$

Se tiene que F es una aproximación de $\hat{f}$ con las propiedades requeridas. ■

2 El teorema de Helly

El teorema de Helly sobre la intersección de conjuntos convexos de $\mathbb{R}^D$ es uno de los grandes resultados sobre convexidad. Fue demostrado por el matemático Eduard Helly en 1913. La importancia en este resultado es la amplia variedad de aplicaciones. Para nuestro interés, el teorema de Helly juega un rol central en la construcción de polinomios con ciertas características.

Considérese un conjunto monótono $\mathcal{A}$. Supóngase la hipótesis del lema 1.3 y que las hipótesis del lema débil para $\mathcal{A}$, se satisfacen con $W = 1$ y una constante a_1 menor que una constante lo suficientemente pequeña determinada por m y n. Esto es, para $S \subset E$ con $\#S \leq k^\#$, la familia de polinomios $P_\alpha \in \mathcal{P}$ satisface que

$$P_\alpha \in \Gamma^w(y_0, S, 1, a_1) \ \text{ y } \ f \in C^m(S, \varepsilon).$$

2.1 Aplicación del teorema de Helly

Esta sección consta de varios lemas, en cada uno de ellos se construyen polinomios mediante el teorema de Helly. La versión del teorema de Helly que será usada es la finita. Una demostración se puede encontrar en el libro de R. Webster [12, pág. 316].

Teorema de Helly. *Sea $\mathcal{F}$ una familia finita de conjuntos convexos en $\mathbb{R}^D$. Si la intersección de toda subfamilia de $\mathcal{F}$ con $D + 1$ elementos es no vacía, entonces la intersección de $\mathcal{F}$ es no vacía.*

Para aplicar el teorema de Helly se necesita definir conjuntos convexos de $\mathcal{P}$. Sean $M > 0$, $S \subset \mathbb{R}^n$ y $y \in \mathbb{R}^n$, se define

$$\begin{aligned}\Gamma_f(y, S, M) = \{P \in \mathcal{P} : \text{ Existe } F^S \in C^m(\mathbb{R}^n) \text{ tal que } \|F^S\|_{C^m(\mathbb{R}^n)} \leq M,\\ |F^S - f| \leq M \cdot \varepsilon \text{ en } S \text{ y } J_y(F^S) = P\},\end{aligned}$$

y para $k \geq 1$ se define

$$\begin{aligned}\Gamma_f(y,k,M) &= \bigcap_{\substack{S\subset E\\ \#S\leq k}} \Gamma_f(y,S,M)\\ &= \{P \in \mathcal{P} : \text{ Para cada } S \subset E \text{ con } \#S \leq k, \text{ existe } F^S \in C^m(\mathbb{R}^n)\\ &\qquad \text{tal que } \|F^S\|_{C^m(\mathbb{R}^n)} \leq M, |F^S - f| \leq M \cdot \varepsilon \text{ en } S \text{ y } J_y(F^S) = P\},\end{aligned}$$

el cual también es convexo. Nótese que si $k' > k$, entonces

$$\Gamma_f(y,k',M) \subset \Gamma_f(y,k,M).$$

Es importante decir que en los siguientes lemas se puede prescindir del origen de las constantes $k^\#, k_1^\#$ y $k_2^\#$.

La primera consecuencia directa de la hipótesis $HD4$ es la siguiente.

Lema 2.1. *Supóngase que*

$$k^\# \geq (D+1)k_1^\# \quad con \quad k_1^\# \geq 1.$$

Entonces para cada $y \in \mathbb{R}^n$ el conjunto $\Gamma_f(y, k_1^\#, C)$ es no vacío.

Demostración. Considérense $S_1, \ldots, S_{D+1}$ subconjuntos de E tales que $\#S_i \leq k_1^\#$. Se tiene que $S = \bigcup_{i=1}^{D+1} S_i$ es un subconjunto de E tal que $\#S \leq (D+1)k_1^\# \leq k^\#$. La hipótesis $HD4$ implica que existe $F^S \in C^m(\mathbb{R}^n)$ que satisface

$$\|F^S\|_{C^m(\mathbb{R}^n)} \leq 1 \;\text{ y }\; |F^S(x) - f(x)| \leq \varepsilon \;\text{ para } x \in S.$$

Tómese $P = J_y(F^S)$, luego para cada $i = 1, \ldots, D+1$ se cumple que $P \in \Gamma_f(y, S_i, 1)$. Se sigue que

$$\bigcap_{i=1}^{D+1} \Gamma_f(y, S_i, 1) \neq \varnothing.$$

Al aplicar el teorema de Helly a la familia de subconjuntos convexos $\Gamma_f(y, S, 1)$, se obtiene

$$\Gamma_f(y, k_1^\#, C) = \bigcap_{\substack{S\subset E\\ \#S\leq k_1^\#}} \Gamma_f(y,S,C) \neq \varnothing,$$

donde $C > 1$, y esto termina la demostración. ∎

Del lema 2.1, se deduce que cada $\Gamma_f(y, k_1^\#, C) \subset \mathcal{P}$ consta de jets de funciones clase $C^m(\mathbb{R}^n)$ que aproximan a f en subconjuntos de E con $k_1^\#$ elementos. Es natural pensar que satisfacen condiciones de residuo de Taylor.

Lema 2.2. *Supóngase que*
$$k_1^\# \geq (D+1)k_2^\#$$
y $P \in \Gamma_f(y, k_1^\#, C)$. *Entonces para cada* $y' \in \mathbb{R}^n$ *existe* $P' \in \Gamma_f(y', k_2^\#, C')$ *tal que*

$$|D^r(P-P')(y)|, |D^r(P-P')(y')| \leq C'|y-y'|^{m-r} \ \textit{para} \ r \leq m-1.$$

Demostración. Para cada $S \subset E$ y $M > 0$, se define el convexo

$$\begin{aligned}\Gamma(S, M) = \{P' \in \mathcal{P} : \ & \text{Existe } F \in C^m(\mathbb{R}^n) \text{ tal que } \|F\|_{C^m(\mathbb{R}^n)} \leq M, \\ & |F(x) - f(x)| \leq M \cdot \varepsilon \text{ para } x \in S, J_y(F) = P, \text{ y } J_{y'}(F) = P'\}.\end{aligned}$$

Considérense $S_1, \ldots, S_{D+1}$ subconjuntos de E tales que $\#S_i \leq k_2^\#$. Se tiene que $S = \bigcup_{i=1}^{D+1} S_i$ es un subconjunto de E tal que $\#S \leq k_1^\#$. Por hipótesis existe un polinomio $P \in \Gamma_f(y, k_1^\#, C)$, lo que significa que existe $F^S \in C^m(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|F^S\|_{C^m(\mathbb{R}^n)} \leq C, \ |F^S(x) - f(x)| \leq C \cdot \varepsilon \text{ para } x \in S_i \ \text{ y } \ J_y(F^S) = P,$$

para cada $i = 1, \ldots, D+1$. Si $P' = J_{y'}(F^S)$, se tiene que $P' \in \Gamma(S_i, C)$, pues $S_i \subset E$ y se sigue que
$$\bigcap_{i=1}^{D+1} \Gamma(S_i, C) \neq \varnothing.$$
El teorema de Helly implica que existe

$$P' \in \bigcap_{\substack{S \subset E, \\ \#S \leq k_2^\#}} \Gamma(S, C'), \text{ donde } C' > C.$$

Entonces para $S \subset E$ con $\#S \leq k_2^\#$ existe $F \in C^m(\mathbb{R}^n)$ que satisface

$$\|F\|_{C^m(\mathbb{R}^n)} \leq C', \ |F(x) - f(x)| \leq C' \cdot \varepsilon \text{ para } x \in S, \ J_y(F) = P \ \text{ y } \ J_{y'}(F) = P'.$$

Por tanto $P' \in \Gamma_f(y', k_2^\#, C')$. Resta demostrar la conclusión del lema, para esto el teorema de Taylor implica

$$\begin{aligned}D^r P'(y') - D^r P(y') &= D^r P'(y') - \sum_{i \leq m-1-r} \frac{1}{i!} D^{i+r} P(y)(y'-y)^i \\ &= D^r F(y') - \sum_{i \leq m-1-r} \frac{1}{i!} D^{i+r} F(y)(y'-y)^i \\ &= \int_0^1 \frac{(1-t)^{m-1-r}}{(m-1-r)!} D^m F(z)(y'-y)^{m-r} dt,\end{aligned}$$

donde $z = (1-t)y + ty'$. Esta última igualdad implica que

$$|D^r P'(y') - D^r P(y')| \leq C'|y' - y|^{m-r}, \tag{2.1}$$

de manera que $r \leq m-1$. Intercambiando y' por y en la desigualdad (2.1), se obtiene la otra desigualdad y esto termina la demostración. ■

En el siguiente lema se demuestra que la hipótesis del lema débil sobre los polinomios P_α en el punto y_0, se puede tener en una vecindad de y_0.

Lema 2.3. *Supóngase que*

$$k^\# \geq (D+1)k_1^\#.$$

Si $y \in B(y_0, a_1)$, entonces existen polinomios $P_\alpha^y \in \mathcal{P}$ con $\alpha \in \mathcal{A}$ y una constante $C > 1$ tales que:

HD1(y). $\partial^\beta P_\alpha^y(y) = \delta_{\beta\alpha}$ para $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$.

HD2(y). $|\partial^\beta P_\alpha^y(y)| \leq C \cdot a_1$ para $\beta \notin \mathcal{A}$.

HD3(y). Para cada $S \subset E$ con $\#S \leq k_1^\#$ y $\alpha \in \mathcal{A}$, se tiene

$$P_\alpha^y \in C \cdot \Gamma^w(y, k_1^\#, 1, a_1).$$

Demostración. Para $\alpha \in \mathcal{A}$, $S \subset E$ y $M > 0$, se define el conjunto convexo

$$\Gamma_\alpha^w(S, M) = \{P' \in \mathcal{P} : \text{ Existe } \varphi_\alpha^S \in C^m(\mathbb{R}^n), \text{ tal que } \|D^m \varphi_\alpha^S\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq M a_1,$$
$$|\varphi_\alpha^S(x)| \leq M \cdot \varepsilon \text{ para } x \in S, J_{y_0}(\varphi_\alpha^S) = P_\alpha \text{ y } J_y(\varphi_\alpha^S) = P'\}.$$

Considérense $S_1, \ldots, S_{D+1} \subset E$ tales que $\#S_i \leq k_1^\#$. Se tiene que $S = \bigcup_{i=1}^{D+1} S_i$ es un subconjunto de E tal que $\#S \leq k^\#$. Por hipótesis, se tiene que $P_\alpha \in \Gamma^w(y, S, 1, a_1)$, es decir, existe $\varphi_\alpha^S \in C^m(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|D^m \varphi_\alpha^S\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq a_1, \; |\varphi_\alpha^S(x)| \leq \varepsilon, \text{ para } x \in S \text{ y } J_{y_0}(\varphi_\alpha^S) = P_\alpha.$$

Sea $P' = J_y(\varphi_\alpha^S)$. Luego $P' \in \Gamma_\alpha^w(S_i, 1)$ para cada $i = 1, \ldots, D+1$. Se sigue que

$$\bigcap_{i=1}^{D+1} \Gamma_\alpha^w(S_i, 1) \neq \varnothing.$$

Para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, dados $S \subset E$ con $\#S \leq k_1^\#$ y $C_1 > 1$, el teorema de Helly implica que la intersección de los conjuntos $\Gamma_\alpha^w(S, C_1)$ es no vacía. Entonces para cada $\alpha \in \mathcal{A}$ existe $\bar{P}_\alpha^y \in \Gamma_\alpha^w(S, C_1)$, esto es, existe $\bar{\varphi}_\alpha \in C^m(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|D^m \bar{\varphi}_\alpha\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \cdot a_1, \; J_{y_0}(\bar{\varphi}_\alpha) = P_\alpha \text{ y } J_y(\bar{\varphi}_\alpha) = \bar{P}_\alpha^y. \tag{2.2}$$

El teorema de Taylor implica

$$\begin{aligned} D^r \bar{P}^y_\alpha(y) - D^r P_\alpha(y_0) &= D^r \bar{\varphi}_\alpha(y) - D^r \bar{\varphi}_\alpha(y_0) \\ &= \sum_{i=1}^{m-1-r} \frac{1}{i!} D^{r+i} \bar{\varphi}_\alpha(y_0)(y-y_0)^i \\ &+ \int_0^1 \frac{(1-t)^{m-1-r}}{(m-1-r)!} D^m \bar{\varphi}_\alpha(z)(y-y_0)^{m-r}\, dt, \end{aligned}$$

donde $z = (1-t)y_0 + ty$ y $r \leq m-1$. Por hipótesis $y \in B(y_0, a_1)$, se tiene

$$|D^r \bar{P}^y_\alpha(y) - D^r P_\alpha(y_0)| \leq \sum_{i=1}^{m-1-r} C_2 \cdot a_1^i + C_1 \cdot a_1^{m-r+1} \leq C_3 \cdot a_1,$$

y para $\beta \in \mathcal{M}$, se deduce

$$|\partial^\beta \bar{P}^y_\alpha(y) - \delta_{\beta\alpha}| \leq |\partial^\beta \bar{P}^y_\alpha(y) - \partial^\beta P_\alpha(y_0)| + |\partial^\beta P_\alpha(y_0) - \delta_{\beta\alpha}| \leq (C_3 + 1) \cdot a_1.$$

La matriz $M = [\partial^\beta \bar{P}^y_\alpha(y)]_{\beta,\alpha\in\mathcal{A}}$ es invertible con a_1 adecuado. Los polinomios $P^y_\alpha \in \mathcal{P}$ con $\alpha \in \mathcal{A}$ definidos por

$$P^y_\alpha = \sum_{\alpha' \in \mathcal{A}} \bar{P}^y_\alpha \cdot M^{-1}_{\alpha',\alpha},$$

satisfacen

$$|\partial^\beta P^y_\alpha(y)| \leq C_4 \cdot a_1 \text{ para } \beta \notin \mathcal{A}.$$

En virtud de (2.2) para cada $S \subset E$ tal que $\#S \leq k_1^\#$ y $\alpha \in \mathcal{A}$, existe $\bar{\varphi}^S_\alpha \in C^m(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|D^m \bar{\varphi}^S_\alpha\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \cdot a_1,\ |\bar{\varphi}^S_\alpha(x)| \leq C_1 \cdot \varepsilon \text{ para } x \in S \ \text{ y } \ J_y(\bar{\varphi}^S_y) = \bar{P}^y_\alpha.$$

Se definen funciones $\tilde{\varphi}^S_\alpha \in C^m(\mathbb{R}^n)$ por

$$\tilde{\varphi}^S_\alpha = \sum_{\alpha' \in \mathcal{A}} \bar{\varphi}^S_{\alpha'} \cdot M^{-1}_{\alpha'\alpha},$$

y para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, se tiene que

$$\|D^m \tilde{\varphi}^S_\alpha\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq C \cdot a_1,\ |\tilde{\varphi}^S_\alpha(x)| \leq C \cdot \varepsilon \text{ para } x \in S \ \text{ y } \ J_y(\tilde{\varphi}^S_\alpha) = P^y_\alpha.$$

y con lo cual el lema queda demostrado. ■

Lema 2.4. *Supóngase que*

$$k^{\#} \geq (D+1)k_1^{\#} \ \text{ y } \ k_1^{\#} \geq (D+1)k_2^{\#}.$$

Si $y \in B(y_0, a_1)$ y se tienen polinomios $P_\alpha^y \in \mathcal{P}$ como en el lema 2.3, entonces para $y' \in \mathbb{R}^n$ existen polinomios $P_\alpha^{y'} \in \mathcal{P}$ indexados por $\mathcal{A}$ tales que, para $S \subset E$ con $\#S \leq k_2^{\#}$, se tiene

$$P_\alpha^{y'} \in C \cdot \Gamma^w(y', S, 1, a_1).$$

Demostración. Para $\alpha \in \mathcal{A}$, $M > 0$ y $S \subset E$, se define el convexo

$$\begin{aligned}\Gamma^{[\alpha]}(S, M) = \{P' \in \mathcal{P} :\ &\text{Existe } \varphi \in C^m(\mathbb{R}^n), \text{ tal que } \|D^m\varphi\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq Ma_1, \\ &|\varphi(x)| \leq M\varepsilon \text{ para } x \in S, J_y(\varphi) = P_\alpha^y, \text{ y } J_{y'}(\varphi) = P'\}.\end{aligned}$$

Considérense $S_1, \ldots, S_{D+1} \subset E$ tales que $\#S_i \leq k_2^{\#}$. Se tiene que $S = \bigcup_{i=1}^{D+1} S_i$ es un subconjunto de E tal que $\#S \leq k_1^{\#}$. Por hipótesis, existe $P_\alpha^y \in C \cdot \Gamma^w(y, S, 1, a_1)$. Esto es, existe $\varphi_\alpha^S \in C^m(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|D^m\varphi_\alpha^S\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq C \cdot a_1, \ |\varphi_\alpha^S(x)| \leq C \cdot \varepsilon, \text{ para } x \in S \text{ y } J_y(\varphi_\alpha^S) = P_\alpha^y.$$

Tómese $P' = J_{y'}(\varphi_\alpha^S)$, luego $P' \in \Gamma^{[\alpha]}(S_i, C)$ para cada $i = 1, \ldots, D+1$. Se sigue que

$$\bigcap_{i=1}^{D+1} \Gamma^{[\alpha]}(S_i, C) \neq \varnothing.$$

Dados $S \subset E$ con $\#S \leq k_2^{\#}$ y $C' > C$, el teorema de Helly implica que la intersección de los conjuntos $\Gamma^{[\alpha]}(S, C')$ es no vacía . Así, para cada $\alpha \in \mathcal{A}$ existe un polinomio $P_\alpha^{y'} \in C' \cdot \Gamma(y', S, 1, a_1)$, con lo cual se termina la demostración. ∎

Dado $\mathcal{A}$ subconjunto monótono de $\mathcal{M}$, se define para cada $y \in \mathbb{R}^n$, $k \geq 1$ y $M > 0$, el conjunto

$$\Gamma_f^{\#}(y, k, M) = \{P \in \Gamma_f(y, k, M) : \partial^\beta P(y) = 0, \text{ para cada } \beta \in \mathcal{A}\}.$$

Obsérvese que

$$\Gamma_f^{\#}(y, k, M) \subset \Gamma_f(y, k, M)$$

y en una vecindad de y_0 se puede asegurar que tal conjunto es distinto de vacío.

Lema 2.5. *Supóngase que*

$$k^{\#} \geq (D+1)k_1^{\#} \ \text{ y } \ k_1^{\#} \geq 1.$$

Si $y \in B(y_0, a_1)$, entonces para C suficientemente grande, el conjunto $\Gamma_f^{\#}(y, k_1^{\#}, C)$ es no vacío.

Demostración. Por el lema 2.3 existen polinomios $P_\alpha^y \in \mathcal{P}$ con $\alpha \in \mathcal{A}$ tales que $P_\alpha^y \in C_1 \cdot \Gamma^w(y, k_1^\#, 1)$. El lema 2.1 implica que existe $P \in \Gamma_f(y, k_1^\#, C_2)$ con $C_2 > 1$. El polinomio $\tilde{P} \in \mathcal{P}$ definido por

$$\tilde{P} = P - \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} [\partial^\alpha P(y)] \cdot P_\alpha^y,$$

satisface que

$$\partial^\beta \tilde{P}(y) = 0 \text{ para cada } \beta \in \mathcal{A}.$$

Resta demostrar que $\tilde{P} \in \Gamma(y', k_1^\#, C)$. Considérese $S \subset E$ tal que $\#S \leq k_1^\#$. Entonces existe $F^S \in C^m(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|F^S\|_{C^m(\mathbb{R}^n)} \leq C_2, \ |F^S(x) - f(x)| \leq C_2 \cdot \varepsilon \text{ para } x \in S \ \text{ y } \ J_y(F^S) = P.$$

Además, para cada $\alpha \in \mathcal{A}$ existe $\varphi_\alpha^S \in C^m(\mathbb{R}^n)$, que satisface

$$\|D^m \varphi_\alpha^S\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \cdot a_1, \ |\varphi_\alpha^S(x)| \leq C_1 \cdot \varepsilon \text{ para } x \in S \ \text{ y } \ J_y(\varphi_\alpha^S) = P_\alpha^y.$$

Se define la función

$$\tilde{F}^S = F^S - \phi \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} [\partial^\alpha P(y)] \cdot \varphi_\alpha^S,$$

donde $\phi \in C^m(\mathbb{R}^n)$ es una función de corte en y tal que $\operatorname{sop} \phi \subset B(y, 1)$. La regla de Leibniz implica que

$$\|\varphi_\alpha^S \cdot \phi\|_{C^m(\mathbb{R}^n)} \leq C_3,$$

para C_3 suficientemente grande. Lo cual implica

$$\|\tilde{F}^S\|_{C^m(\mathbb{R}^m)} \leq C'.$$

Cuando $x \in S$, se tiene la siguiente estimación

$$|\tilde{F}^S(x) - f(x)| \leq |F^S(x) - f(x)| + [|\partial^\alpha P(y)|] \cdot |\varphi^S(x)\phi(x)| \leq [C_2 + C_1] \cdot \varepsilon.$$

Se sigue que

$$|\tilde{F}^S(x) - f(x)| \leq C'' \cdot \varepsilon \text{ para } x \in S.$$

Además

$$D^r(\varphi_\alpha^S \phi)(y) = D^r(\varphi_\alpha^S)(y) \ \text{ para } r \leq m - 1,$$

y esto implica que $J_y(\tilde{F}^S) = \tilde{P}$. Por tanto $\tilde{P} \in \Gamma_f^\#(y, k_1^\#, C)$, donde se ha tomado $C = \text{máx}\{C', C''\}$. Lo que termina la demostración. ■

Para el caso del primer monótono no trivial $\mathcal{M} \setminus \{\mathbf{0}\}$, las hipótesis $HD1$ y $HD2$ implican que la familia de polinomios $P_\alpha \in \mathcal{P}$ satisface

$$P_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha!}(x - y_0)^\alpha + c_\alpha \text{ y } |c_\alpha| \leq a_1.$$

Fijado $y \in B(y_0, a_1)$. El lema 2.3 implica que existen polinomios $P_\alpha^y \in \mathcal{P}$ con $\alpha \neq \mathbf{0}$ tales que

$$P_\alpha^y(x) = \frac{1}{\alpha!}(x - y)^\alpha + d_\alpha,$$

de manera que

$$|d_\alpha| \leq C \cdot a_1.$$

Ahora, considérese $S \subset E$ tal que $\#S \leq k_1^\#$. La hipótesis $HD4$ del lema débil implica que $f \in C^m(S, \varepsilon)$, es decir, existe $F^S \in C^m(\mathbb{R}^n)$ que aproxima a f en S. Por tanto, si $\bar{P} = J_y(F^S)$, entonces como en el lema 2.5 el polinomio P definido por

$$P = \bar{P} - \sum_{\alpha \neq \mathbf{0}} [\partial^\alpha \bar{P}(y)] \cdot P_\alpha^y,$$

satisface que $P \in \Gamma_f^\#(y, k_1^\#, C')$. Además es constante

$$P(x) = F^S(y) - \sum_{\alpha \neq \mathbf{0}} [\partial^\alpha F^S(y)] \cdot d_\alpha.$$

y $|P| \leq C'(m, n)$.

3 Demostración de los lemas de inducción

En este capítulo se demuestra el lema débil para $\mathcal{A}$ monótono bajo la hipótesis de inducción del lema 1.3, es decir, se supone que para cada $\mathcal{B} < \mathcal{A}$ el lema fuerte es cierto. Se toma $k^{\#}_{ant}$ como el máximo de las constantes $k^{\#}$ generadas por el lema fuerte en cada $\mathcal{B} < \mathcal{A}$.

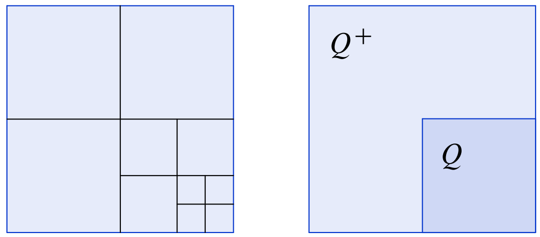
Considérese un cubo Q_0 centrado en y_0 de diámetro fijo. Se descompone Q_0 en una familia de cubos $\{Q_\nu\}$ que será llamada descomposición de Calderón-Zygmund. La manera de hacer la descomposición es por bisección de Q_0. La bisección termina en Q_ν cuando, después de una homotecia al cubo unitario, se tiene que en cada punto de $Q_\nu^{\star\star}$ se satisfacen las hipótesis del lema fuerte para algún $\mathcal{B} < \mathcal{A}$. Entonces la hipótesis de inducción del lema 1.3 implicará que una función $\hat{f}$ puede ser aproximada localmente. La función $\hat{f}$ se ajustará de tal forma que f pueda ser aproximada localmente. Después, una partición de la unidad asociada a la descomposición de Calderón-Zygmund permitirá obtener una aproximación en todo Q_0, con lo cual se obtendrá la conclusión del lema débil para $\mathcal{A}$.

3.1 La descomposición de Calderón-Zygmund

En análisis armónico el lema de Calderón-Zygmund plantea la descomposición de $\mathbb{R}^n$ en cubos, de tal forma que para una función $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, su promedio en cada cubo está controlado. Para nuestro interés, se tiene una versión del lema de Calderón-Zygmund adaptada a familias de polinomios y en nuestro caso en cada cubo se satisfacen hipótesis parciales del lema fuerte.

La familia de **cubos diádicos** respecto a un cubo Q, consiste de Q junto con todos los cubos que se generan por bisección a Q. Un cubo de la familia se dice **diádico**. Sea Q un cubo diádico tal que $Q \subset Q^+$ y $\delta_{Q^+} = 2\delta_Q$. Al cubo Q^+ se le llama

cubo padre de Q. Los cubos Q y Q' se dicen **adyacentes** si son distintos y tienen intersección no vacía.



Descomposición diádica de Q_0 y cubo padre.

Considérese un cubo centrado en y_0 denotado por Q_0, tal que $(Q_0)^{\star\star\star} \subset B(y_0, a_1)$, donde a_1 es como en el capítulo 2 y una constante $c > 0$ tal que

$$ca_1 < \delta_{Q_0} < a_1.$$

Sea $Q \subset Q_0$ un cubo diádico, se dice que Q es un **cubo bueno** si satisface las siguientes condiciones:

B1. Para cada $y \in Q^{\star\star}$, existe un conjunto $\bar{\mathcal{A}}^y < \mathcal{A}$ y una familia de polinomios $\bar{P}_\alpha^y \in \mathcal{P}$ indexada por $\bar{\mathcal{A}}^y$.

B2. Para cada $\beta, \alpha \in \bar{\mathcal{A}}^y$, se tiene $\partial^\beta \bar{P}_\alpha^y(y) = \delta_{\beta\alpha}$.

B3. $\delta_Q^{|\beta|-|\alpha|} |\partial^\beta \bar{P}_\alpha^y(y)| \leq a_1^{-(m+1)}$ para cada $\beta \in \mathcal{M}$ y $\beta \geq \alpha$.

B4. Dado $\alpha \in \bar{\mathcal{A}}^y$ y $S \subset E$ con $\#S \leq k_{ant}^\#$, se tiene

$$\bar{P}_\alpha^y \in \Gamma^s(y, S, a_1^{-(m+1)}) \cdot \delta_Q^{|\alpha|-m}.$$

Un cubo diádico $Q \subset Q_0$ se dice **cubo Calderón-Zygmund** si es bueno y ningún cubo que contiene propiamente a Q es bueno. Nótese que dos cubos Calderón-Zygmund tienen interiores ajenos.

La bisección comienza con Q_0 y se detiene cuando $Q \subset Q_0$ es un cubo bueno. El siguiente resultado dice que el número de bisecciones es finito.

Lema 3.1. *Si $Q \subset Q_0$ es diádico y $\delta_Q < \varepsilon$, entonces Q es un cubo bueno.*

Demostración. Se verifican las propiedades de un cubo bueno. Considérese $y \in Q^{\star\star}$, por B2 los polinomios deben satisfacer $\partial^\beta \bar{P}_\alpha^y(y) = \delta_{\beta\alpha}$. Si $\bar{\mathcal{A}}^y = \mathcal{M}$, los polinomios $\bar{P}_\alpha^y \in \mathcal{P}$ son de la forma

$$\bar{P}_\alpha^y(x) = \frac{1}{\alpha!}(x-y)^\alpha,$$

y se sigue que $\partial^\beta \bar{P}_\alpha^y(y) = \delta_{\beta\alpha}$. Como $a_1 < 1$, se tiene que $a_1^{-(m+1)}$ es suficientemente grande y se tiene B3. Para demostrar B4, sean $\alpha \in \mathcal{M}$ y $S \subset E$ con $\#S \leq k^\#_{ant}$. Se define la función $\varphi_\alpha^S \in C^m(\mathbb{R}^n)$ por

$$\varphi_\alpha^S(x) = \bar{P}_\alpha^y(x) \cdot \phi(x),$$

donde ϕ es una función de corte en y tal que $\operatorname{sop} \phi \subset B(y, 1)$. La regla de Leibniz implica

$$\|D^m \varphi_\alpha^S\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq C.$$

Como $\delta_Q < a_1$, se tiene

$$\delta_Q^{m-|\alpha|} \|D^m \varphi_\alpha^S\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq C \cdot a_1^{m-|\alpha|} \leq a_1^{-(m+1)}.$$

Para $x \in S$, se cumple

$$\delta_Q^{m-|\alpha|} |\varphi_\alpha^S(x)| \leq \delta_Q < \varepsilon \leq a_1^{-(m+1)} \cdot \varepsilon.$$

Finalmente el jet de φ_α^S coincide con $\bar{P}_\alpha^y$, pues ϕ es lo suficiente plana alrededor de y, con lo que se concluye demostración ■

Corolario 2. *La descomposición de Calderón-Zygmund de un cubo Q_0 es finita.*

Demostración. Si Q_0 es bueno, entonces es Calderón-Zygmund y no se requiere seguir subdividiendo. De lo contrario, después de un número finito de bisecciones se tiene que

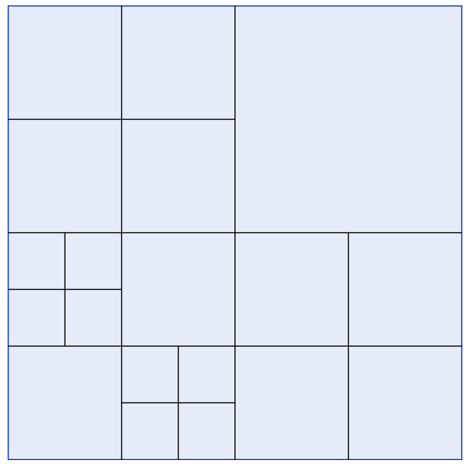
$$\frac{\delta_{Q_0}}{2^N} < \varepsilon,$$

con lo cual se obtendrá un cubo bueno. ■

El siguiente lema da información sobre la geometría de los cubos Calderón-Zygmund.

Lema 3.2. *Si Q y Q' son Calderón-Zygmund y adyacentes, entonces*

$$\frac{1}{2}\delta_Q \leq \delta_{Q'} \leq 2\delta_Q.$$



Descomposición de Calderón-Zygmund en $\mathbb{R}^2$.

Demostración. Supóngase que $\delta_{Q'} \geq \delta_Q$ y que $\delta_Q \leq \frac{1}{4}\delta_{Q'}$. Por hipótesis el cubo Q^+ no es Calderón-Zygmund, pero es adyancente a Q'. Como $\delta_{Q^+} = 2\delta_Q$ se sigue que $\delta_{Q^+} \leq \frac{1}{2}\delta_{Q'}$. Se deduce

$$(Q^+)^{\star\star} \subset (Q')^{\star\star}.$$

Luego para $y \in (Q^+)^{\star\star}$, se tiene que $y \in (Q')^{\star\star}$ y como Q' es Calderón-Zygmund existen $\bar{\mathcal{A}}^y < \mathcal{A}$ y polinomios $\bar{P}_\alpha^y \in \mathcal{P}$ indexados por $\bar{\mathcal{A}}^y$ que satisfacen las propiedades de un cubo bueno para Q'. Resta demostrar que las propiedades Calderón-Zygmund del cubo Q' son válidas para el cubo Q^+. La propiedad B2 se satisface, pues no depende del cubo. Si se toma $\beta \geq \alpha$, se tiene $|\beta| - |\alpha| \geq 0$. De donde

$$(\delta_{Q^+})^{|\beta|-|\alpha|} \leq (\delta_{Q'})^{|\beta|-|\alpha|}.$$

Se sigue que Q^+ es un cubo bueno, lo que contradice que Q sea Calderón-Zygmund. Por tanto, los únicos casos posibles para que Q y Q' sean adyacentes son $\delta_Q = \delta_{Q'}$ y $\delta_Q = \frac{1}{2}\delta_{Q'}$, de los cuales la conclusión se sigue inmediatamente ■

De los lemas 3.1 y 3.2, nótese que la descomposición de Calderón-Zygmund depende de ε y $\mathcal{A}$.

3.2 Demostración del lema 1.3

En esta sección se completa la demostración del lema 1.3. Por el corolario 2 existe un entero N tal que

$$Q_0 = Q_1 \cup \cdots \cup Q_N,$$

donde cada Q_ν es un cubo Calderón-Zygmund. Para cada $\nu \leq N$ se denota por y_ν al centro de Q_ν y δ_ν a su diámetro.

Tómese $\{\phi_\nu\}_{\nu=1}^N$ una colección de funciones de corte tales que

$$\operatorname{sop} \phi_\nu \subset Q_\nu^{\star\star} \ \text{ y } \ \phi_\nu = 1 \text{ en } Q_\nu^\star.$$

A continuación, se estudia el lema 1.3 en el caso del primer monótono no trivial.

Demostración del lema débil caso $\mathcal{M} \setminus \{\mathbf{0}\}$. Considérense las siguientes constantes

$$k_{ant}^\# = 1 \ \text{ y } \ k^\# = (D+1)^3.$$

Para cada $\nu \leq N$, el polinomio $P_\nu \in \Gamma_f^\#(y_\nu, (D+1)^2, C)$ hallado en el lema 2.5, es constante. Se define una función $f_\nu \colon E \to \mathbb{R}$ por

$$f_\nu(x) = \phi_\nu(x)[f(x) - P_\nu].$$

Se sabe que el lema fuerte es válido para subconjuntos de $\mathcal{M}$ que contienen al multiíndice $\mathbf{0}$. Entonces la hipótesis de inducción del lema 1.3 se satisface. Además, de las propiedades del cubo Q_ν se obtiene el siguiente resultado.

Afirmación. *El lema fuerte es válido para el punto $y \in Q_\nu^{\star\star}$ y la función f_ν, con las constantes $k^\# = 1$ y $W = a_1^{-(m+1)}$.*

Como consecuencia para cada $y \in Q_\nu^\star$, se tiene

$$f_\nu \in C^m(E \cap B(y, \rho), A \cdot \varepsilon),$$

donde las constantes ρ y A dependen de a_1, m y n. El lema 1.1 implica que la función $F_y = 0$ aproxima a f_ν en $E \cap B(y, \rho)$. Así, un argumento de compacidad sobre $Q_\nu^\star$ implica que $F_\nu = 0$ aproxima a f_ν en $E \cap Q_\nu^\star$. Sea $\{\bar{\theta}_\nu\}_{\nu=1}^N$ una colección de funciones de corte tales que

$$\operatorname{sop} \bar{\theta}_\nu \subset \tilde{Q}_\nu = \{y \in \mathbb{R}^n : d(y, Q_\nu) \leq (1+\varepsilon_1)\delta_\nu\} \ \text{ donde } \varepsilon_1 > 0 \ \text{ y } \ \bar{\theta}_\nu = 1 \text{ en } Q_\nu.$$

Se define una partición de la unidad subordinada a la descomposición de Calderón-Zygmund $\{\theta_\nu\}_{\nu=1}^N$, donde

$$\theta_\nu = \bar{\theta}_\nu \Big/ \sum_{\mu=1}^N \bar{\theta}_\mu \ \text{ y } \ \theta_\nu(x) = 0 \text{ si } x \notin \bigcup_{\nu=1}^N \operatorname{sop} \theta_\nu. \tag{3.1}$$

Se define $F \in C^m(\mathbb{R}^n)$ por

$$F(x) = \sum_{\nu=1}^{N} \theta_\nu(x) P_\nu.$$

Cuando $x \in Q_0 \cap E$, se tiene

$$|F(x) - f(x)| \leq \sum_{\nu=1}^{N} \theta_\nu(x) |P_\nu - f(x)| \leq A \cdot \varepsilon.$$

Se acota ahora, $|D^r F(x)|$ para $x \in Q_0$. La regla de Leibniz implica que

$$D^r F(x) = \sum_{\nu=1}^{N} D^r \theta_\nu(x) P_\nu \ \text{ para } \ r \leq m,$$

pues P_ν es constante. Además, se tienen las siguientes cotas

$$|D^r \theta_\nu(x)| \leq C_1 \cdot \delta_\nu^{-r} \ \text{ y } \ |P_\nu| \leq C.$$

Por lo tanto

$$|D^r F(x)| \leq A_1.$$

Finalmente, considérese la función de corte $\theta_0 \in C^m(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\theta_0 = 1 \text{ en } B(y_0, ca_1), \ \operatorname{sop} \theta_0 \subset Q_0 \ \text{ y } \ |D^r \theta_0| \leq C_3 a_1^{-r} \text{ para } r \leq m, \tag{3.2}$$

donde $ca_1 \leq \delta_{Q_0}$. Tómese

$$\bar{F} = \theta_0 \cdot F.$$

Se tiene que $\bar{F}$ satisface

$$\|\bar{F}\|_{C^m(\mathbb{R}^n)} \leq A' \ \text{ y } \ |\bar{F}(x) - f(x)| \leq A' \cdot \varepsilon \text{ para } x \in E \cap B(y_0, ca_1),$$

donde la constante A' depende de a_1, m y n. Por tanto

$$f \in C^m(E \cap B(y_0, \rho), A' \cdot \varepsilon).$$

Con lo cual queda terminada la demostración del lema débil en el caso $\mathcal{M} \setminus \{\mathbf{0}\}$. ■

Para demostrar el caso general, considérense las siguientes constantes:

$$k^\# = (D+1)^3 k^\#_{ant} \ \text{ y } \ k^\#_1 = (D+1)^2 k^\#_{ant}.$$

Para cada $\nu \leq N$ se define la función $f_\nu \colon E \to \mathbb{R}$ por

$$f_\nu(x) = \phi_\nu(x)[f(x) - P_\nu(x)],$$

donde $P_\nu \in \Gamma^\#_f(y_\nu, k^\#_1, C)$. En el siguiente lema se muestra la manera de aplicar la hipótesis inducción del lema 1.3 y su relación con los cubos Calderón-Zygmund.

Lema 3.3. *El corolario 1 es válido para E, Q_ν, f_ν y $\mathcal{A}$, con la constante $A = a_1^{-(m+1)}$.*

Demostración. El cubo Q_ν es Calderón-Zygmund, por lo que para cada $y \in Q_\nu^{\star\star}$ existen un subconjunto $\mathcal{A}^y < \mathcal{A}$ y una familia de polinomios P_α^y con $\alpha \in \mathcal{A}^y$ que satisfacen B2, B3 y B4, las cuales corresponden a las hipótesis $G1$, $G2$ y $G3$ del corolario 1. Resta demostrar que se satisface la hipótesis $G4$. Con tal motivo, se toma $S \subset E$ con $\#S \leq k_1^\#$ y dado que $\Gamma_f^\#(y_\nu, k_1^\#, C) \neq \varnothing$, existe una función $F_\nu^S \in C^m(\mathbb{R}^n)$ que satisface

$$\|F_\nu^S\|_{C^m(\mathbb{R}^n)} \leq C \text{ y } |F_\nu^S(x) - f(x)| \leq C \cdot \varepsilon \text{ para } x \in S.$$

Se define $\tilde{F}_\nu^S$ por

$$\tilde{F}_\nu^S = \phi_\nu \cdot [F_\nu^S - P_\nu].$$

Para verificar $G4$ se deben acotar las derivadas de $\tilde{F}_\nu^S$. Para $r \leq m$ y $x \in \operatorname{sop} \theta_\nu$, el teorema de Taylor implica

$$D^r(F_\nu^S - P_\nu)(x) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{m-1}}{(m-1)!} D^m F_\nu^S(z)(x - y_\nu)^m dt,$$

donde $z = tx + (1-t)y_\nu$. Luego

$$|D^r(F_\nu^S - P_\nu)| \leq C \cdot \delta_\nu^m \text{ en } Q_\nu^{\star\star}. \tag{3.3}$$

Como $|D^r \phi_\nu| \leq C_1 \cdot \delta_\nu^{-r}$, se verifica de (3.3) que

$$|D^r \tilde{F}_\nu^S| \leq C_2 \cdot \delta_\nu^{m-r}.$$

Finalmente, para $x \in S \cap Q_\nu^{\star\star}$ se tiene

$$|\tilde{F}_\nu^S(x) - f_\nu(x)| \leq |F_\nu^S(x) - f(x)| \leq C \cdot \varepsilon.$$

Con lo cual termina la demostración. ■

Aplicando el corolario 1, se obtiene que para cada $\nu \leq N$ la función f_ν satisface

$$f_\nu \in C^m(E \cap Q_\nu^\star, A' \cdot \varepsilon),$$

esto es, existe una función $F_\nu \in C^m(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|F_\nu\|_{C^m(\mathbb{R}^n)} \leq A' \text{ y } |F_\nu(x) - f_\nu(x)| \leq A' \cdot \varepsilon \text{ para } x \in E \cap Q_\nu^\star,$$

donde A' solamente depende a_1, m y n. A partir de las funciones F_ν que se obtienen de la hipótesis de inducción, se está en condiciones para demostrar el lema débil para $\mathcal{A}$ monótono.

Demostración del lema 1.3. El plan es hacer un promedio de todas las soluciones locales $F_\nu + P_\nu$ usando una partición de la unidad. Para cada $x \in E \cap Q_\nu^\star$, se tiene

$$|f(x) - (F_\nu(x) + P_\nu(x))| = |f_\nu(x) + P_\nu(x) - F_\nu(x) - P_\nu(x)| = |F_\nu(x) - f_\nu(x)|,$$

lo cual implica

$$|f(x) - (F_\nu(x) + P_\nu(x))| \leq A' \cdot \varepsilon \text{ para cada } x \in E \cap Q_\nu^\star.$$

Se define $\tilde{F} \in C^m(\mathbb{R}^n)$ por

$$\tilde{F} = \sum_{\nu=1}^{N} \theta_\nu \cdot (F_\nu + P_\nu),$$

donde la función de corte θ_ν es como en (3.1). Cuando $x \in E \cap Q_0$, se tiene

$$|\tilde{F}(x) - f(x)| \leq \sum_{\nu=1}^{N} \theta_\nu(x)|F_\nu(x) + P_\nu(x) - f(x)|,$$

luego

$$|\tilde{F}(x) - f(x)| \leq A' \cdot \varepsilon.$$

Lo siguiente es acotar la derivada $D^r\tilde{F}(x)$ para $r \leq m$, cuando $x \in Q_0$. La regla de Leibniz implica

$$\begin{aligned} D^r\tilde{F} &= \sum_{j=0}^{r}\sum_{\nu=1}^{N}\binom{r}{j} D^{r-j}\theta \cdot D^j(F_\nu + P_\nu) \\ &= \sum_{\nu=1}^{N} D^r\theta_\nu \cdot (F_\nu + P_\nu) + \cdots + \sum_{\nu=1}^{N}\theta_\nu \cdot D^r(F_\nu + P_\nu). \end{aligned}$$

Cuando $x \in Q_0$, se tiene que existe $\nu \leq N$ tal que $x \in \operatorname{sop}\theta_\nu$. En el último sumando de la suma, solamente habrá que acotar $|D^r P_\nu(x)|$, pues F_ν es una aproximación de f_ν con norma menor que A'. Si $x \in \operatorname{sop}\theta_\nu$, se tiene

$$|y_\nu - x| \leq C_2 \cdot \delta_\nu.$$

Ya que $P_\nu \in \Gamma_f^\#(y_\nu, k_1^\#, C)$ y de la siguiente expresión

$$D^r P_\nu(x) = \sum_{i=0}^{m-1-r} \frac{1}{i!} D^{r+i} P_\nu(y_\nu)(x - y_\nu)^i,$$

existe una constante C_3 tal que

$$|D^r P_\nu(x)| \le C_3 \text{ para } r \le m-1. \tag{3.4}$$

Por tanto, de (3.4) se sigue que

$$\theta_\nu(x)|D^r F_\nu(x) + D^r P_\nu(x)| \le [A' + C_3] \cdot \theta_\nu(x) \ \text{ para } \ x \in \operatorname{sop}\theta_\nu.$$

De la suma sobre ν, se obtiene

$$\left|\sum_{\nu=1}^{N} \theta_\nu(x)[D^r F_\nu(x) + D^r P_\nu(x)]\right| \le A_1,$$

donde A_1 depende solamente de a_1, m y n. Si Q_μ y Q_ν son adyacentes, entonces $Q_\mu \cap \operatorname{sop}\theta_\nu \neq \varnothing$. Por un lado, existe un entero $M < N$ tal que $x \in \operatorname{sop}\theta_\nu$ en a lo más M soportes. Por otro lado, la partición de la unidad satisface

$$\sum_{\nu=1}^{N} D^{r-i}\theta_\nu(x) = 0 \ \text{ para } \ i < r.$$

Lo cual implica

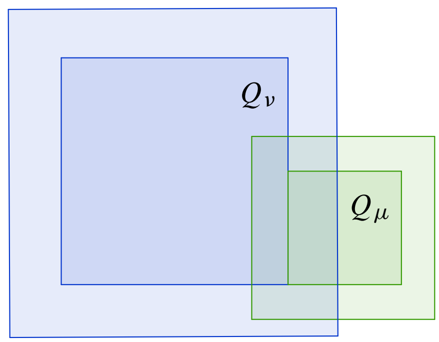
$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{N} D^{r-i}\theta_\nu(x)[D^i P_\nu(x) + D^i F_\nu(x)] &= \sum_{\nu=1}^{N} D^{r-i}\theta_\nu(x)[D^i P_\nu(x) - D^i P_\mu(x)] \\ &\quad + \sum_{\nu=1}^{N} D^{r-i}\theta_\nu(x) D^i F_\nu(x).\end{aligned}$$

Se observa que

$$|D^{r-i}\theta_\nu(x) D^i F_\nu(x)| \le [C_1 \delta_\nu^{i-r}][A' \delta_\nu^{m-i}] \le A_2 \cdot \delta_\nu^{m-r}.$$

Al sumar se obtiene

$$\left|\sum_{\nu=1}^{N} D^{r-i}\theta_\nu(x) D^i F_\nu(x)\right| \le A_3. \tag{3.5}$$



Cubos adyacentes.

Por lo que resta acotar

$$|D^{r-i}\theta_\nu(x)[D^i P_\nu(x) - D^i P_\mu(x)]|,$$

y por tanto solo hace falta probar que:

Control de polinomios para cubos adyacentes:

$$|D^{r+j}(P_\nu - P_\mu)(y_\mu)| \leq C' a_1^{-(m+1)} \delta_\nu^{m-r-j}, \text{ donde } C' = C'(m,n).$$

La demostración de la cota para el control de polinomios será objeto de estudio en el siguiente capítulo. El teorema de Taylor aplicado a $P_\nu - P_\mu$ implica que

$$D^r(P_\nu - P_\mu)(x) = \sum_{j=0}^{m-1-r} \frac{1}{j!} D^{r+j}(P_\nu - P_\mu)(y_\mu)(x - y_\mu)^j.$$

Cuando $x \in \operatorname{sop} \theta_\nu$, el control de polinomios implicará que

$$|D^r(P_\nu - P_\mu)(x)| \leq C' a_1^{-(m+1)} \delta_\nu^{m-r}$$

y se tiene

$$|D^{r-i}\theta_\nu(x)[D^i P_\nu(x) - D^i P_\mu(x)]| \leq [C_1 \delta_\nu^{-(r-i)}][C' a_1^{-(m+1)} \delta_\nu^{m-i}] \leq A_4 \cdot \delta_\mu^{m-r}.$$

Como la suma sobre los ν tales que Q_ν es adyacente a Q_μ es finita, se tiene

$$\left| \sum_{\nu=1}^{N} D^{r-i}\theta_\nu(x)[D^i P_\nu(x) - D^i P_\mu(x)] \right| \leq A_5. \tag{3.6}$$

La desigualdad del triángulo, (3.5) y (3.6) implican

$$\left|\sum_{\nu} D^{r-i}\theta_\nu(x)[D^i P_\nu(x) + D^i F_\nu(x)]\right| \leq A_3 + A_5 \text{ para } x \in \operatorname{sop}\theta_\nu.$$

Por tanto

$$|D^r \tilde{F}(x)| \leq A_6 \text{ para } x \in Q_0 \text{ y } r \leq m.$$

Finalmente, considérese $\theta_0 \in C^m(\mathbb{R}^n)$ que satisface las propiedades (3.2). Tómese

$$\bar{F} = \theta_0 \cdot F.$$

Se tiene que $\bar{F}$ satisface

$$\|\bar{F}\|_{C^m(\mathbb{R}^n)} \leq A'' \text{ y } |\bar{F}(x) - f(x)| \leq A'' \cdot \varepsilon \text{ para } x \in E \cap B(y_0, ca_1),$$

donde A'' solamente depende a_1, m y n. Lo cual concluye la demostración. ■

Recuérdese que en la demostración del lema débil para $\mathcal{A}$ se han tomado como hipótesis

- $W = 1$.
- a_1 menor que una constante que depende de m y n.

Para terminar la prueba del lema 1.3, tómese a_1 que dependa de m y n. En el caso que $W \neq 1$, se toma

$$\bar{\varepsilon} = W \cdot \varepsilon$$

y entonces $HD1$, $HD2$ y $HD3$ se satisfacen para $W' = 1$. Si para cada $S \subset E$ se encuentra $F^S \in C^m(\mathbb{R}^n)$ con norma a lo más W, entonces

$$\bar{F}^S = W^{-1} \cdot F^S,$$

satisface $HD4$ con norma a lo más $W' = 1$. Por el lema débil, existe $F \in C^m(\mathbb{R}^n)$ tal que $|F(x) - f(x)| \leq A \cdot \bar{\varepsilon}$, donde A depende solamente de m, n. Con lo que se concluye

$$|\bar{F}(x) - f(x)| \leq A' \cdot \varepsilon \text{ para } x \in E \cap B(y_0, \rho),$$

donde A' y ρ depende solamente de W, m y n.

3.3 Lema de rescalamiento

Hasta este punto se ha demostrado el lema débil para un subconjunto monótono $\mathcal{A}$ bajo la hipótesis de inducción del lema 1.3. Ahora, se prueba el lema fuerte bajo la hipótesis del lema 1.2. La demostración del lema 1.2 se basa en un rescalamiento de $\mathbb{R}^n$. Se denota por $\mathcal{M}_m$ al conjunto de los multi-índices $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ tales que

$$|\beta| = \beta_1 + \cdots + \beta_n \leq m.$$

Lema de rescalamiento. *Sean $\mathcal{A}$ un subconjunto de $\mathcal{M}$ y números positivos $W, \bar{a}$. Supóngase que se tienen números reales $F_{\alpha,\beta}$ indexados por $\alpha \in \mathcal{A}$ y $\beta \in \mathcal{M}_m$ tales que:*

- *$F_{\alpha,\alpha} \neq 0$ para cada $\alpha \in \mathcal{A}$.*
- *$|F_{\alpha,\beta}| \leq W|F_{\alpha,\alpha}|$ para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, $\beta \in \mathcal{M}_m$ con $\beta > \alpha$.*
- *$F_{\alpha,\beta} = 0$ para cada $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ con $\alpha \neq \beta$.*

Entonces existen números positivos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ y una función $\phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ con las siguientes propiedades:

1. *$c < \lambda_i \leq 1$ para cada $i = 1, \ldots, n$ con c positivo y determinado por $W, \bar{a}, m$ y n.*
2. *$\phi(\alpha) \leq \alpha$ para cada $\alpha \in \mathcal{A}$.*
3. *Para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, se tiene $\phi(\alpha) = \alpha$ o bien $\phi(\alpha) \notin \mathcal{A}$.*
4. *Si se define $\hat{F}_{\alpha,\beta}$ con $\alpha \in \mathcal{A}, \beta \in \mathcal{M}_m$, por*

$$\hat{F}_{\alpha,\beta} = \lambda_1^{\beta_1} \ldots \lambda_n^{\beta_n} F_{\alpha,\beta} \text{ con } \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n).$$

Entonces

$$|\hat{F}_{\alpha,\beta}| \leq \bar{a}|\hat{F}_{\alpha,\phi(\alpha)}| \text{ para cada } \alpha \in \mathcal{A}, \beta \in \mathcal{M}_m \text{ con } \beta \neq \phi(\alpha).$$

La demostración del lema de rescalamiento puede encontrarse en el artículo de C. Fefferman [7]. Las funciones que satisfacen *2* y *3* en el lema de rescalamiento son muy particulares, como establece en el siguiente resultado.

Lema 3.4. *Sean $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ y $\phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{M}$, supóngase que*

1. *$\phi(\alpha) \leq \alpha$ para cada $\alpha \in \mathcal{A}$.*

2. *Para cada* $\alpha \in \mathcal{A}$, $\phi(\alpha) = \alpha$ *o* $\phi(\alpha) \notin \mathcal{A}$.

Entonces $\phi(\mathcal{A}) \leq \mathcal{A}$ *y,* $\phi(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ *si y solo si* $\phi = Id$.

Demostración. Se procede por inducción. Si $\mathcal{A} = \varnothing$ y se tienen *1* y *2*, entonces el resultado es trivial. Se fija $k \geq 1$ y supóngase que el resultado es cierto para cada $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ con $\#\mathcal{A} = k-1$. Se toma $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ con $\#\mathcal{A} = k$ y supóngase que se satisfacen *1* y *2*. Sean α el elemento mínimo de $\mathcal{A}$ y β el elemento mínimo de $\phi(\mathcal{A})$, entonces por *1* se tiene que $\beta \leq \alpha$. Hay dos casos, si $\beta < \alpha$, entonces β es el mínimo de $\phi(\mathcal{A}) \bigtriangleup \mathcal{A}$, así, $\phi(\mathcal{A}) < \mathcal{A}$. Si $\beta = \alpha$, entonces se aplica la hipótesis de inducción a $\mathcal{A} \setminus \{\alpha\}$, pues $\#(\mathcal{A} \setminus \{\alpha\}) = k - 1$. Nótese que

$$(\mathcal{A} \setminus \{\alpha\}) \bigtriangleup \phi(\mathcal{A} \setminus \{\alpha\}) = \mathcal{A} \bigtriangleup \phi(\mathcal{A}),$$

lo cual implica que $\phi(\mathcal{A} \setminus \{\alpha\}) < \mathcal{A} \setminus \{\alpha\}$ y por tanto $\phi(\mathcal{A}) < \mathcal{A}$. Por último, de *2* si $\phi(\mathcal{A}) \neq \mathcal{A}$, entonces ϕ no es la identidad. ■

El nombre rescalamiento se debe a que los números λ_i definen una transformación $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que cambia la escala en $\mathbb{R}^n$ y la función ϕ posibilita el uso de la hipótesis inductiva en la nueva escala.

A continuación se demuestra el lema fuerte en el caso $\mathcal{M} \setminus \{\mathbf{0}\}$. Como se dijo, se supondrá la hipótesis de inducción del lema 1.2.

Demostración del lema fuerte caso $\mathcal{M} \setminus \{\mathbf{0}\}$. Considérese $k^\# > (D+1)^3$ y supóngase las hipótesis del lema 1.2. Por las hipótesis del lema fuerte la familia de polinomios $P_\alpha \in \mathcal{P}$ satisface

$$P_\alpha = \frac{1}{\alpha!}(x - y_0)^\alpha + c_\alpha \quad \text{y} \quad W \geq 1.$$

Nótese que no existe condición alguna sobre las constantes c_α. A manera de simplificar los cálculos, se puede suponer que $y_0 = 0$. Se define la familia $\{F_{\alpha,\beta}\}$ por

$$F_{\alpha,\beta} = \begin{cases} \partial^\beta P_\alpha(0), & \text{para } \alpha \neq \mathbf{0}, \beta \in \mathcal{M} \\ 1, & \text{para } \alpha \neq \mathbf{0}, |\beta| = m. \end{cases} \tag{3.7}$$

La familia $\{F_{\alpha,\beta}\}$ satisface el lema de rescalamiento para una constante $\bar{a}$ que se fijará después. Entonces existen $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ números positivos tales que $c < \lambda_i \leq 1$, los cuales definen una nueva escala en $\mathbb{R}^n$ por medio de la transformación $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$T(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n). \tag{3.8}$$

Se definen

$$\hat{f} = f \circ T, \;\; \hat{P}_\alpha = P_\alpha \circ T \quad \text{y} \quad \hat{E} = T^{-1}(E).$$

El lema de rescalamiento implica que existe una función $\phi\colon \mathcal{M}\setminus\{\mathbf{0}\}\to\mathcal{M}$ tal que $\phi(\mathcal{M}\setminus\{\mathbf{0}\})\leq\mathcal{M}\setminus\{\mathbf{0}\}$. Para cada $\alpha\neq\mathbf{0}$, la función ϕ satisface por *2* en el lema de rescalamiento, que

$$|\hat{F}_{\alpha,\phi(\alpha)}| = \max_{\beta\in\mathcal{M}}|\hat{F}_{\alpha,\beta}|, \tag{3.9}$$

donde

$$\hat{F}_{\alpha,\beta} = \lambda^{\beta}F_{\alpha,\beta} \ \text{ para } \ \beta\in\mathcal{M}_m, \alpha\in\mathcal{A}.$$

La elección de los λ_i implica los siguientes casos:

Caso $\phi(\mathcal{M}\setminus\{\mathbf{0}\})<\mathcal{M}\setminus\{\mathbf{0}\}$. Sea $\mathcal{A}'=\phi(\mathcal{M}\setminus\{\mathbf{0}\})$. Entonces

$$\mathbf{0}\in\mathcal{A}'$$

y existe $\bar{\alpha}\neq\mathbf{0}$ tal que $\phi(\bar{\alpha})=\mathbf{0}$. Se define una familia de polinomios indexada por $\mathcal{A}'$ como

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{\mathbf{0}} &= \frac{1}{c_{\bar{\alpha}}}\hat{P}_{\bar{\alpha}}.\\ \tilde{P}_{\alpha} &= \frac{1}{\lambda^{\alpha}}\hat{P}_{\alpha} \text{ para } \alpha\neq\mathbf{0}.\end{aligned}$$

De la definición de ϕ, se tiene

$$|\hat{F}_{\bar{\alpha},\mathbf{0}}|\geq|\hat{F}_{\bar{\alpha},\bar{\alpha}}|,$$

en particular

$$|c_{\bar{\alpha}}|\geq\lambda^{\bar{\alpha}}>0,$$

lo cual implica que $c_{\bar{\alpha}}\neq 0$ y esto muestra que los polinomios $\tilde{P}_{\alpha}$ están bien definidos. La matriz $M=[\partial^{\beta}\tilde{P}_{\alpha}(0)]_{\beta,\alpha\in\mathcal{A}'}$ es invertible y M^{-1} define polinomios $\bar{P}_{\alpha}\in\mathcal{P}$ indexados por $\mathcal{A}'$. Se tiene

$$\begin{aligned}\bar{P}_{\mathbf{0}} &= \tilde{P}_{\mathbf{0}}.\\ \bar{P}_{\alpha} &= \tilde{P}_{\alpha}-\frac{c_{\alpha}}{\lambda^{\alpha}}\tilde{P}_{\mathbf{0}} \ \text{ para } \alpha\neq\mathbf{0}.\end{aligned}$$

A continuación, se muestra que la familia de polinomios $\bar{P}_{\alpha}$ satisface hipótesis similares a las del lema débil.

1. Claramente se tiene

$$\partial^{\beta}\bar{P}_{\alpha}(0)=\delta_{\beta\alpha} \text{ para } \beta,\alpha\in\mathcal{A}'. \tag{3.10}$$

2. Para $\bar{P}_{\mathbf{0}}$, se tiene que la derivada de orden $\bar{\alpha}$ es

$$\partial^{\bar{\alpha}} \bar{P}_{\mathbf{0}}(0) = \frac{\lambda^{\bar{\alpha}}}{c_{\bar{\alpha}}}.$$

   Por otro lado el lema de rescalamiento implica

$$|\hat{F}_{\alpha,\beta}| \leq \overline{a} |\hat{F}_{\alpha,\phi(\alpha)}| \text{ para cada } \alpha \neq \mathbf{0}, \beta \in \mathcal{M}_m \text{ con } \beta \neq \phi(\alpha).$$

   Si $\alpha = \beta = \bar{\alpha}$, entonces

$$\frac{\lambda^{\bar{\alpha}}}{|c_{\bar{\alpha}}|} \leq \bar{a}.$$

   Por lo tanto

$$|\partial^{\bar{\alpha}} \bar{P}_{\mathbf{0}}(0) - \delta_{\mathbf{0},\bar{\alpha}}| \leq \bar{a}.$$

   Para $\bar{P}_\alpha$ con $\alpha \neq \mathbf{0}$, la derivada de orden $\bar{\alpha}$ es

$$\partial^{\bar{\alpha}} \bar{P}_\alpha(0) = \frac{\lambda^{\bar{\alpha}}}{c_{\bar{\alpha}}} \frac{c_\alpha}{\lambda^\alpha}.$$

   Como $\phi(\alpha) = \alpha$, la definición de ϕ implica

$$|\hat{F}_{\alpha,\alpha}| \geq |\hat{F}_{\alpha,\beta}| \text{ para cada } \beta \in \mathcal{M}_m,$$

   en particular si $\beta = \mathbf{0}$, se tiene

$$\lambda^\alpha \geq |c_\alpha|, \text{ lo cual implica que } \frac{|c_\alpha|}{\lambda^\alpha} \leq 1,$$

   por tanto

$$|\partial^{\bar{\alpha}} \bar{P}_\alpha(0) - \delta_{\alpha,\bar{\alpha}}| \leq \bar{a}.$$

   Se obtiene

$$|\partial^\beta \bar{P}_\alpha(0) - \delta_{\alpha,\beta}| \leq \bar{a} \text{ para } \alpha \in \mathcal{A}', \beta \in \mathcal{M}. \tag{3.11}$$

3. Considérese $\hat{S} \subset \hat{E}$ tal que $\#\hat{S} \leq k^\#$, se tiene que $S = T(\hat{S}) \subset E$ y $\#S \leq k^\#$. Si $\alpha \neq \mathbf{0}$, entonces por hipótesis existe $\varphi_\alpha^S \in C^m(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|D^m \varphi_\alpha^S\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq W \text{ y } |\varphi_\alpha^S(x)| \leq W \cdot \varepsilon \text{ para } x \in S,$$

   pues $P_\alpha \in \Gamma^s(0, S, W)$. Se define

$$\hat{\varphi}_\alpha^{\hat{S}} = \varphi_\alpha^S \circ T.$$

Se estudian las derivadas de la función $\hat{\varphi}_\alpha^{\hat{S}}$. Para $|\beta| = m$ y $\alpha \neq \mathbf{0}$, se tiene

$$\|\partial^\beta \hat{\varphi}_\alpha^{\hat{S}}\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq \lambda^\beta \|\partial^\beta \varphi_\alpha^S\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq \lambda^\beta \cdot W.$$

El lema de rescalamiento implica

$$\lambda^\beta \leq \bar{a}|\hat{F}_{\alpha,\phi(\alpha)}|.$$

Entonces existe una constante $C_1 = C_1(m,n)$ tal que

$$\|D^m \hat{\varphi}_\alpha^{\hat{S}}\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 W \cdot \bar{a}|\hat{F}_{\alpha,\phi(\alpha)}|.$$

Para $\hat{x} \in \hat{S}$ se tiene

$$|\hat{\varphi}_\alpha^{\hat{S}}(\hat{x})| = |\varphi_\alpha^S(T\hat{x})| \leq W \cdot \varepsilon.$$

Además, $J_0(\hat{\varphi}_\alpha^{\hat{S}}) = \hat{P}_\alpha$. Se definen las funciones indexadas por $\mathcal{A}'$ dadas por

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{\mathbf{0}}^{\hat{S}} &= \frac{1}{c_{\bar{\alpha}}}\hat{\varphi}_{\bar{\alpha}}^{\hat{S}}. \\ \tilde{\varphi}_\alpha^{\hat{S}} &= \frac{1}{\lambda^\alpha}\hat{\varphi}_\alpha^{\hat{S}} \quad \text{para } \alpha \neq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Se calcula la derivada de orden m de cada función $\tilde{\varphi}_\alpha^{\hat{S}}$. Para la función indexada por $\mathbf{0}$, se tiene

$$\|D^m \tilde{\varphi}_{\mathbf{0}}^{\hat{S}}\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{|c_{\bar{\alpha}}|}\|D^m \hat{\varphi}_{\bar{\alpha}}^{\hat{S}}\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{C_1}{|c_{\bar{\alpha}}|} W \cdot \bar{a} \cdot |\hat{F}_{\bar{\alpha},\mathbf{0}}| = C_1 W \cdot \bar{a},$$

además, para $\hat{x} \in \hat{S}$, se tiene

$$|\varphi_{\mathbf{0}}^{\hat{S}}(\hat{x})| \leq \frac{1}{|c_{\bar{\alpha}}|} W \cdot \varepsilon.$$

Si $\alpha \neq \mathbf{0}$, entonces

$$\|D^m \tilde{\varphi}_\alpha^{\hat{S}}\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{\lambda^\alpha}\|D^m \hat{\varphi}_\alpha^{\hat{S}}\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{C_1}{\lambda^\alpha} W \cdot \bar{a} \cdot |\hat{F}_{\alpha,\alpha}| = C_1 W \cdot \bar{a}$$

y para $\hat{x} \in \hat{S}$, se obtiene

$$|\varphi_\alpha^{\hat{S}}(\hat{x})| \leq \frac{1}{\lambda^\alpha} W \cdot \varepsilon.$$

Se definen nuevas funciones por

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_{\mathbf{0}}^S &= \tilde{\varphi}_{\mathbf{0}}^S. \\ \bar{\varphi}_\alpha^S &= \tilde{\varphi}_\alpha^S - \frac{c_\alpha}{\lambda^\alpha}\tilde{\varphi}_{\mathbf{0}}^S \quad \text{para } \alpha \neq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Para $\alpha \neq \mathbf{0}$, una estimación para la derivada de orden m es

$$\|D^m \bar{\varphi}_\alpha^S\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 W \cdot \bar{a} + \frac{|c_\alpha|}{\lambda^\alpha} C_1 W \cdot \bar{a} \leq 2C_1 W \cdot \bar{a}.$$

Para $\hat{x} \in \hat{S}$ y $\alpha \neq \mathbf{0}$, se tiene

$$|\bar{\varphi}_\alpha^{\hat{S}}(\hat{x})| \leq \frac{1}{\lambda^\alpha} W \cdot \varepsilon + \frac{|c_\alpha|}{\lambda^\alpha} \frac{W}{|c_{\bar{\alpha}}|} \varepsilon \leq \left[\frac{W}{\lambda^\alpha} + \frac{W}{|c_{\bar{\alpha}}|} \right] \varepsilon.$$

Finalmente, el jet de $\bar{\varphi}_\alpha^{\hat{S}}$ con $\alpha \in \mathcal{A}'$ satisface que $J_0(\bar{\varphi}_\alpha^{\hat{S}}) = \bar{P}_\alpha$.

4. Por último, no es difícil mostrar que, si

$$f \in C^m(S, W \cdot \varepsilon), \text{ entonces } \hat{f} \in C^m(\hat{S}, W \cdot \varepsilon).$$

Por hipótesis, para $\mathcal{M} \setminus \{\mathbf{0}\}$ se tiene que los polinomios $P_\alpha \in \mathcal{P}$ satisfacen que

$$P_\alpha \in \Gamma^s(0, S, W).$$

Por (3.10), (3.11) y los puntos 3 y 4, la familia $\bar{P}_\alpha$ con $\alpha \in \mathcal{A}'$ satisface que

$$\bar{P}_\alpha \in \Gamma^w(0, \hat{S}, W'),$$

en donde W' es una constante que será determinada. Por ello se estudian las siguientes constantes

$$\bar{a}, \ 2C_1 W \cdot \bar{a}, \ \frac{W}{\lambda^\alpha} + \frac{W}{|c_{\bar{\alpha}}|} \ \text{ y } \ W.$$

Para la constante $\frac{W}{\lambda^\alpha} + \frac{W}{|c_{\bar{\alpha}}|}$ se tiene la siguiente estimación

$$\frac{W}{\lambda^\alpha} + \frac{W}{|c_{\bar{\alpha}}|} \leq W C_2(\bar{a}) + W C_3(\bar{a}) \leq W \cdot C(\bar{a}),$$

pues $\lambda_i > c(\bar{a})$. Los polinomios $\bar{P}_\alpha \in \mathcal{P}$ satisfacen las hipótesis del lema débil con constantes que dependen de $\bar{a}$. Del lema de rescalamiento, fijo $W > 1$ se toma $\bar{a} > 0$ lo suficiente pequeño para que

$$W \cdot \bar{a} < \frac{1}{2C_1}.$$

Bajo esta condición

$$\bar{a} < 1 \ \text{ y } \ 2C_1 W \cdot \bar{a} < 1.$$

Entonces

$$\frac{W}{\lambda^\alpha} + \frac{W}{|c_{\bar{\alpha}}|} \leq W \cdot C(\bar{a}) \ \text{ y } \ W \leq \frac{1}{2C_1 \bar{a}}.$$

Si la constante $\bar{a}$ depende de m y n, entonces

$$W \cdot C(\bar{a}) \leq W'(W, m, n) \ \text{ y } \ W \leq W'(W, m, n).$$

Se tiene que $W'(W, m, n)$ y la estimación anterior sobre las constantes son suficientes para demostrar que

$$\bar{P}_\alpha \in \Gamma^w(0, \hat{S}, W', 1).$$

Caso $\phi(\mathcal{M} \setminus \{\mathbf{0}\}) = \mathcal{M} \setminus \{\mathbf{0}\}$. La definición de ϕ implica

$$\lambda^\alpha \geq |c_\alpha|.$$

Más aún, la constante $\bar{a}$ satisface

$$\lambda^\alpha \bar{a} \geq |c_\alpha|.$$

Se definen polinomios $\bar{P}_\alpha \in \mathcal{P}$ indexados por $\mathcal{M} \setminus \{\mathbf{0}\}$ como

$$\bar{P}_\alpha = \frac{1}{\lambda^\alpha} \hat{P}_\alpha.$$

Resta estudiar la derivada de orden $\mathbf{0}$ para cada $\bar{P}_\alpha$. Se tiene

$$|\bar{P}_\alpha(0)| = \frac{|c_\alpha|}{\lambda^\alpha} \leq \bar{a}.$$

Lo que implica que

$$|\partial^\beta \bar{P}_\alpha(0) - \delta_{\beta\alpha}| \leq \bar{a}.$$

Para cada $\hat{S} \subset \hat{E}$ con $\#\hat{S} \leq k^\#$, se tiene que $S = T(\hat{S}) \subset E$ y $\#S \leq k^\#$. Si $\alpha \neq \mathbf{0}$ existe $\varphi_\alpha^S \in C^m(\mathbb{R}^n)$ que satisface condiciones del lema fuerte. Se definen funciones

$$\bar{\varphi}_\alpha^{\hat{S}} = \frac{1}{\lambda^\alpha} \varphi_\alpha^S \circ T.$$

Se han obtenido las siguientes condiciones

$$\|D^m \bar{\varphi}_\alpha^{\hat{S}}\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 W \cdot \bar{a}, \ |\bar{\varphi}_\alpha^{\hat{S}}(\hat{x})| \leq \frac{W}{\lambda^\alpha} \varepsilon \text{ para } \hat{x} \in \hat{S} \ \text{ y } \ J_0(\bar{\varphi}_\alpha^{\hat{S}}) = \bar{P}_\alpha.$$

Por hipótesis, si $f \in C^m(S, W \cdot \varepsilon)$, entonces $\hat{f} \in C^m(\hat{S}, W \cdot \varepsilon)$. Resta demostrar que la familia de polinomios $\bar{P}_\alpha$ satisfacen las hipótesis del lema débil. Dado $W > 1$, se toma $\bar{a}$ tal que

$$C_1 W \cdot \bar{a} < 1.$$

Entonces las constantes W/λ^α y W están acotadas por constantes que dependen de $\bar{a}$. Si $\bar{a}$ depende de m y n, entonces se tienen las hipótesis del lema débil. La hipótesis de inducción del lema 1.2 dice que el lema débil es válido para $\mathcal{A}'$ y esto termina la demostración del caso. ■

Caso general. Bajo la hipótesis de inducción del lema 1.2, se toma

$$k^{\#} > \text{máx}\{k : k \text{ es la asociada al lema débil para cada } \mathcal{A}' \leq \mathcal{A}\}$$

Demostración. Supóngase que para $\mathcal{A}$, $k^{\#}$ y W las hipótesis del lema fuerte se satisfacen. Para aplicar el lema de rescalamiento considérese otro parámetro $\bar{a}$ que será determinado después. La familia $\{F_{\alpha,\beta}\}$ definida en (3.7) satisface las hipótesis del lema de rescalamiento y por tanto existen los λ_i con las condiciones requeridas. Considérese la transformación dada por (3.8) y la función dada en (3.9). Se tiene

$$\phi(\mathcal{A}) \leq \mathcal{A}.$$

Sea $\bar{\mathcal{A}} = \phi(\mathcal{A})$. Existe una función

$$\psi : \bar{\mathcal{A}} \to \mathcal{A},$$

tal que

$$\phi(\psi(\bar{\alpha})) = \bar{\alpha} \text{ para } \bar{\alpha} \in \bar{\mathcal{A}}.$$

Se define una familia de polinomios $\tilde{P}_{\bar{\alpha}} \in \mathcal{P}$ para $\bar{\alpha} \in \bar{\mathcal{A}}$, dada por

$$\tilde{P}_{\bar{\alpha}} = \hat{P}_{\psi(\bar{\alpha})}/(\partial^{\bar{\alpha}}\hat{P}_{\psi(\bar{\alpha})}(0)) \text{ para } \bar{\alpha} \in \bar{\mathcal{A}}.$$

Las propiedades de ϕ implican

$$|\partial^{\bar{\alpha}}\hat{P}_{\psi(\bar{\alpha})}(0)| = |\hat{F}_{\psi(\bar{\alpha}),\bar{\alpha}}| \geq \lambda^{\psi(\bar{\alpha})} \neq 0.$$

Por tanto los polinomios $\tilde{P}_{\bar{\alpha}}$ están bien definidos. Se calculan las derivadas del polinomio $\tilde{P}_{\bar{\alpha}}$,

1. Si $\beta = \bar{\alpha}$, entonces
$$\partial^{\bar{\alpha}}\tilde{P}_{\bar{\alpha}}(0) = \frac{\partial^{\bar{\alpha}}\hat{P}_{\psi(\bar{\alpha})}(0)}{\partial^{\bar{\alpha}}\hat{P}_{\psi(\bar{\alpha})}(0)} = 1.$$

2. Si $\beta \neq \bar{\alpha}$, sea $\alpha \in \mathcal{A}$ tal que $\psi(\bar{\alpha}) = \alpha$, entonces
$$|\partial^{\beta}\tilde{P}_{\bar{\alpha}}(0)| \leq \frac{|\partial^{\beta}\hat{P}_{\alpha}(0)|}{|\partial^{\bar{\alpha}}\hat{P}_{\alpha}(0)|} = \frac{|\hat{F}_{\alpha,\beta}|}{|\hat{F}_{\alpha,\phi(\alpha)}|} \leq \bar{a}.$$

Luego

$$|\partial^{\beta}\tilde{P}_{\bar{\alpha}}(0) - \delta_{\beta\bar{\alpha}}| \leq \bar{a}. \tag{3.12}$$

La condición (3.12) implica la invertibilidad de la matriz $M = [\partial^{\beta}\tilde{P}_{\bar{\alpha}}(0)]_{\beta,\overline{\alpha}\in\bar{\mathcal{A}}}$. Entonces existe una constante $C_1 = C_1(m,n)$ tal que

$$|M^{-1}_{\alpha,\alpha'}| \leq C_1 \cdot \bar{a}.$$

Se definen polinomios

$$\bar{P}_{\bar{\alpha}} = \sum_{\alpha' \in \bar{\mathcal{A}}} \tilde{P}_{\alpha'} \cdot M^{-1}_{\alpha'\bar{\alpha}} \text{ para } \bar{\alpha} \in \bar{\mathcal{A}}.$$

Hay que demostrar que los polinomios $\bar{P}_{\bar{\alpha}} \in \mathcal{P}$ satisfacen las hipótesis del lema débil. Si $\beta, \bar{\alpha} \in \bar{\mathcal{A}}$, entonces

$$\partial^\beta \bar{P}_{\bar{\alpha}}(0) = \sum_{\alpha' \in \bar{\mathcal{A}}} \partial^\beta \tilde{P}_{\alpha'}(0) M^{-1}_{\alpha'\bar{\alpha}} = \delta_{\beta\bar{\alpha}}.$$

Para $\beta \notin \bar{\mathcal{A}}$, se tiene siguiente estimación

$$\begin{aligned} |\partial^\beta \bar{P}_{\bar{\alpha}}(0)| &\leq \sum_{\alpha' \in \bar{\mathcal{A}}} |\partial^\beta \tilde{P}_{\alpha'}(0)||M^{-1}_{\alpha'\bar{\alpha}}| \\ &\leq \sum_{\alpha' \in \bar{\mathcal{A}}} \bar{a} \cdot |M^{-1}_{\alpha'\bar{\alpha}}| = \bar{a} \sum_{\alpha' \in \bar{\mathcal{A}}} |M^{-1}_{\alpha'\bar{\alpha}}|. \end{aligned}$$

Lo que implica

$$|\partial^\beta \bar{P}_{\bar{\alpha}}(0) - \delta_{\beta\bar{\alpha}}| \leq C_2 \cdot \bar{a} \text{ para } \bar{\alpha} \in \bar{\mathcal{A}}, \beta \in \mathcal{M}. \tag{3.13}$$

Sea $\hat{S} \subset \hat{E}$ con $\#\hat{S} \leq k^\#$, se tiene que $S = T(\hat{S}) \subset E$ y $\#S \leq k^\#$. Para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, existe $\varphi^S_\alpha \in C^m(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|D^m \varphi^S_\alpha\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq W \;\text{ y }\; |\varphi^S_\alpha(x)| \leq W \cdot \varepsilon \text{ para } x \in S,$$

pues $P_\alpha \in \Gamma^s(0, S, W)$. Se definen funciones

$$\hat{\varphi}^{\hat{S}}_\alpha = \varphi^S_\alpha \circ T.$$

El lema de rescalamiento implica

$$\|D^m \hat{\varphi}^{\hat{S}}_\alpha\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq C' W \cdot \bar{a} |\hat{F}_{\alpha,\phi(\alpha)}|.$$

Para $\hat{x} \in \hat{S}$, se tiene

$$|\hat{\varphi}^{\hat{S}}_\alpha(\hat{x})| = |\varphi^S_\alpha(T\hat{x})| \leq W \cdot \varepsilon.$$

Se definen funciones

$$\tilde{\varphi}^{\hat{S}}_{\bar{\alpha}} = \hat{\varphi}^{\hat{S}}_\alpha / (\partial^{\bar{\alpha}} \hat{P}_\alpha(0)) \text{ para } \alpha = \psi(\bar{\alpha}) \in \mathcal{A}.$$

Como $\partial^{\bar{\alpha}} \hat{P}_\alpha(0) \neq 0$, la función $\tilde{\varphi}_{\bar{\alpha}}^{\hat{S}}$ está bien definida. Para $\beta \in \mathcal{M}_m$ con $|\beta| = m$, se tiene

$$\begin{aligned} \|D^m \tilde{\varphi}_{\bar{\alpha}}^{\hat{S}}\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} &\leq \frac{\|D^m \hat{\varphi}_\alpha^{\hat{S}}\|_{C^0(\mathbb{R}^n)}}{|\partial^{\bar{\alpha}} \hat{P}_\alpha(0)|} \\ &\leq C'W \cdot \bar{a} \, \frac{|\hat{F}_{\alpha,\phi(\alpha)}|}{|\hat{F}_{\alpha,\bar{\alpha}}|} = C'W \cdot \bar{a}. \end{aligned}$$

Para $\hat{x} \in \hat{S}$, se tiene

$$|\tilde{\varphi}_{\bar{\alpha}}^{\hat{S}}(\hat{x})| \leq \frac{|\hat{\varphi}_\alpha^{\hat{S}}(\hat{x})|}{|\partial^{\bar{\alpha}} \hat{P}_\alpha(0)|} \leq \frac{W}{|\hat{F}_{\alpha,\bar{\alpha}}|} \cdot \varepsilon.$$

Las nuevas funciones

$$\bar{\varphi}_{\bar{\alpha}}^{\hat{S}} = \sum_{\alpha' \in \bar{\mathcal{A}}} \tilde{\varphi}_{\alpha'}^{\hat{S}} \cdot M_{\alpha'\bar{\alpha}}^{-1},$$

satisfacen las siguientes propiedades

$$\|D^m \bar{\varphi}_{\bar{\alpha}}^{\hat{S}}\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq C'W \cdot \bar{a} \sum_{\alpha' \in \bar{\mathcal{A}}} |M_{\alpha'\bar{\alpha}}^{-1}|.$$

Para $\hat{x} \in \hat{S}$ de la misma forma, se obtiene

$$|\bar{\varphi}_{\bar{\alpha}}^{\hat{S}}(\hat{x})| \leq W \cdot \varepsilon \sum_{\alpha' \in \bar{\mathcal{A}}} \frac{|M_{\alpha',\bar{\alpha}}^{-1}|}{|\hat{F}_{\alpha,\alpha'}|}.$$

Se tiene las siguientes cotas

$$\begin{aligned} &C' \sum_{\alpha' \in \bar{\mathcal{A}}} |M_{\alpha'\bar{\alpha}}^{-1}| \leq C'' \cdot \bar{a}, \\ &\sum_{\alpha' \in \bar{\mathcal{A}}} \frac{|M_{\alpha',\bar{\alpha}}^{-1}|}{|\hat{F}_{\alpha,\alpha'}|} \leq C''', \text{ donde } C''' = C'''(\bar{a}, m, n). \end{aligned}$$

Se obtiene que para cada $\hat{S} \subset \hat{E}$ con $\#\hat{S} \leq k^\#$ y para cada $\alpha \in \bar{\mathcal{A}}$, existe una función $\bar{\varphi}_\alpha^{\hat{S}} \in C^m(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\begin{aligned} &\|D^m \bar{\varphi}_\alpha^{\hat{S}}\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq C_3(W, m, n) \cdot \bar{a}, \\ &|\bar{\varphi}_\alpha^{\hat{S}}(\hat{x})| \leq C_4(W, \bar{a}, m, n) \cdot \varepsilon \text{ para } \hat{x} \in \hat{S} \quad \text{y} \\ &J_0(\bar{\varphi}_\alpha^{\hat{S}}) = \bar{P}_\alpha. \end{aligned}$$

Además, si
$$f \in C^m(S, W \cdot \varepsilon) \text{ entonces } \hat{f} \in C^m(\hat{S}, W \cdot \varepsilon). \tag{3.14}$$

Se está en condiciones de aplicar la hipótesis de inducción. Se necesita la siguiente condición

$$\bar{a} \text{ más pequeña que: } \min\{a_0 : a_0 \text{ es la asociada al lema débil para cada } \mathcal{A}' \leq \mathcal{A}\}.$$

Entonces
$$\bar{P}_\alpha \in \Gamma^w(0, S, W', a_0'), \text{ donde } a_0' = C_3\bar{a}. \tag{3.15}$$

Las hipótesis $HD2$, $HD4$ y $HD3$ se satisfacen de las condiciones (3.13), (3.14) y (3.15) con constantes $W'(\bar{a})$ y a_0', respectivamente. La hipótesis de inducción implica que el lema débil es cierto para $\bar{\mathcal{A}}$. Por tanto existe una función $\hat{F} \in C^m(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|\hat{F}\|_{C^m(\mathbb{R}^n)} \leq C(\bar{a}) \text{ y } |\hat{F}(\hat{x}) - \hat{f}(\hat{x})| \leq C(\bar{a}) \cdot \varepsilon \text{ para } \hat{x} \in \hat{E} \cap B(0, \rho(\bar{a})).$$

Se define $F \in C^m(\mathbb{R}^n)$ por
$$F = \hat{F} \circ T^{-1}.$$

La regla de la cadena implica

$$\|\partial^\beta F\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq \lambda^{-\beta} \|\partial^\beta \hat{F}\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \text{ para } \beta \in \mathcal{M}_m.$$

Luego existe una constante $A = A(\bar{a})$ tal que

$$\|F\|_{C^m(\mathbb{R}^n)} \leq A.$$

Para $x \in B(0, \rho'(\bar{a})) \cap E$ con $T^{-1}x \in B(0, \rho(\bar{a})) \cap \hat{E}$, se tiene

$$|F(x) - f(x)| = |\hat{F}(T^{-1}x) - \hat{f}(T^{-1}x)| \leq A \cdot \varepsilon.$$

Se toma $\bar{a}$ que dependa de m, n y que satisfaga las hipótesis de lema de rescalamiento. Entonces $A(\bar{a})$ depende solamente de W, m y n lo que demuestra el lema fuerte para $\mathcal{A}$. ■

4 Control de polinomios

El objetivo de este capítulo es demostrar el **control de polinomios** para cubos adyacentes. Esto es, si Q_ν y Q_μ son cubos Calderón-Zygmund adyacentes, entonces se satisface la siguiente estimación

$$|D^r(P_\nu - P_\mu)(y_\mu)| \leq C a_1^{-(m+1)} \delta_\nu^{m-r}, \tag{4.1}$$

donde C depende de m y n. Durante el resto del capítulo se supondrán las hipótesis de inducción del lema 1.3. Es decir, se supone que para cada subconjunto $\mathcal{B} < \mathcal{A}$, el lema fuerte es válido. Una vez demostrado el control de polinomios se completará la demostración del lema débil para $\mathcal{A}$ monótono.

4.1 Control de polinomios 1

Considérese el cubo Q_0 y su descomposición de Calderón-Zygmund

$$Q_0 = Q_1 \cup \cdots \cup Q_N.$$

Para cada $\nu \leq N$, se toma y_ν el centro de Q_ν. El lema 2.3 implica que existen polinomios $P_\alpha^\nu \in \mathcal{P}$ con $\alpha \in \mathcal{A}$, que satisfacen las condiciones similares a las del lema débil. De las propiedades Calderón-Zygmund del cubo Q_ν, se tiene la siguiente primera estimación

$$\max_{\substack{\beta \in \mathcal{M} \\ \alpha \in \mathcal{A}}} \delta_{Q_\nu}^{|\beta|-|\alpha|} |\partial^\beta P_\alpha^\nu(y_\nu)| \leq a_1^{-m}. \tag{4.2}$$

Esta cota provee el primer control de polinomios y será el primer objetivo a demostrar. La utilidad de tener una cota de las derivadas de esos polinomios se explicará en la sección siguiente. Para demostrar la cota (4.2) se procederá por contradicción, pero antes de esto, un resultado que se apega en la maximalidad de los cubos Calderón-Zygmund. Tómese $k_{ant}^\#$ como el máximo de las constantes $k^\#$ generadas por el lema fuerte para cada $\mathcal{B} < \mathcal{A}$ y:

- Un entero $k_1^\# \geq 1$ tal que $k_1^\#(D+1) \geq k_{ant}^\#$.
- Q un cubo diádico y $y \in Q^{\star\star\star}$.
- Polinomios $P_\alpha^y \in \mathcal{P}$ tales que $\alpha \in \mathcal{A}$ y que satisfacen el lema 2.3.
- Las siguientes cotas

$$a_1^{-m} \leq \max_{\substack{\beta \in \mathcal{M} \\ \alpha \in \mathcal{A}}} \delta_Q^{|\beta|-|\alpha|} |\partial^\beta P_\alpha^y(y)| \leq 2^m a_1^{-m}. \tag{4.3}$$

Se demostrará que bajo las hipótesis anteriores el cubo Q^+ es bueno. Lo que será una contradicción, si se parte del supuesto que el cubo Q es Calderón-Zygmund.

Sea $y' \in (Q^+)^{\star\star}$. Por el lema 2.4 existen polinomios $P_\alpha^{y'} \in \mathcal{P}$ con $\alpha \in \mathcal{A}$ tales que dado $S \subset E$ con $\#S \leq k_{ant}^\#$, se tiene

$$P_\alpha^{y'} \in C \cdot \Gamma^w(y', S, 1, a_1).$$

Bajo las condiciones anteriores se tiene que los polinomios $P_\alpha^{y'}$, satisfacen propiedades como:

Lema 4.1. *La familia de polinomios $P_\alpha^{y'} \in \mathcal{P}$, satisface:*

1. $$c a_1^{-m} \leq \max_{\substack{\beta \in \mathcal{M} \\ \alpha \in \mathcal{A}}} \delta_Q^{|\beta|-|\alpha|} |\partial^\beta P_\alpha^{y'}(y')| \leq C a_1^{-m}.$$
2. $\delta_Q^{|\beta|-|\alpha|} |\partial^\beta P_\alpha^{y'}(y')| \leq C a_1$ *para* $\beta \in \mathcal{M}$ *con* $\beta > \alpha$.
3. $|\partial^\alpha P_\alpha^{y'}(y') - 1| \leq C a_1$ *para* $\alpha \in \mathcal{A}$.
4. $\delta_Q^{|\beta|-|\alpha|} |\partial^\beta P_\alpha^{y'}(y')| \leq C$ *para* $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$.

Donde c y C dependen solamente de m y n.

Demostración. El lema 2.4, implica que para $\alpha \in \mathcal{A}$ existe $\varphi_\alpha \in C^m(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|D^m \varphi_\alpha\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq C \cdot a_1, \;\; J_y(\varphi_\alpha) = P_\alpha^y, \;\; J_{y'}(\varphi_\alpha) = P_\alpha^{y'}.$$

Por el teorema de Taylor para $D^r \varphi_\alpha$ con $r \leq m-1$, se tiene que

$$D^r \varphi_\alpha(y') - \sum_{i=0}^{m-1-r} \frac{1}{i!} D^{i+r} \varphi_\alpha(y)(y'-y)^i$$
$$= \int_0^1 \frac{(1-t)^{m-1-r}}{(m-1-r)!} D^m \varphi_\alpha(z)(y'-y)^{m-r} dt,$$

donde $z = (1-t)y' + ty$. Como $D^i\varphi_\alpha(y') = D^i P_\alpha^{y'}(y')$ y $D^i\varphi_\alpha(y) = D^i P_\alpha^{y}(y)$ para $i \leq m-1$, se tiene

$$\left| D^r P_\alpha^{y'}(y') - \sum_{i=0}^{m-1-r} \frac{1}{i!} D^{i+r} P_\alpha^{y}(y)(y'-y)^i \right| \leq C \cdot a_1 |y-y'|^{m-r} \tag{4.4}$$

y

$$\left| D^r P_\alpha^{y}(y) - \sum_{i=0}^{m-1-r} \frac{1}{i!} D^{i+r} P_\alpha^{y'}(y)(y-y')^i \right| \leq C \cdot a_1 |y-y'|^{m-r}. \tag{4.5}$$

Por la hipótesis (4.3), se tiene una cota que es independiente del punto y, esto es

$$|\partial^\beta P_\alpha^y(y)| \leq 2^m a_1^{-m} \delta_Q^{|\alpha|-|\beta|} \text{ para } \alpha \in \mathcal{A}.$$

Por un lado, de (4.4) se tiene que

$$\begin{aligned} |D^r P_\alpha^{y'}(y')| &\leq \sum_{i=0}^{m-1-r} \frac{1}{i!} |D^{i+r} P_\alpha^y(y)||y'-y|^i + Ca_1|y'-y|^{m-r} \\ &\leq \sum_{i=0}^{m-1-r} a_1^{-m} \delta_Q^{|\alpha|-r-i} |y'-y|^i + Ca_1|y'-y|^{m-r} \end{aligned}$$

y por el otro lado

$$\begin{aligned} &|y'-y| \leq C_1 \cdot \delta_Q, \\ &\delta_Q < a_1 \text{ y} \\ &a_1 < a_1^{-m}. \end{aligned}$$

Lo anterior implica que existe una constante $C_2 = C_2(m,n)$, tal que

$$|D^r P_\alpha^{y'}(y')| \leq C_2 \cdot a_1^{-m} \cdot \delta_Q^{|\alpha|-r} \text{ para } \alpha \in \mathcal{A}. \tag{4.6}$$

Sea

$$\Omega = \max_{\substack{\beta \in \mathcal{M} \\ \alpha \in \mathcal{A}}} \delta_Q^{|\beta|-|\alpha|} |\partial^\beta P_\alpha^{y'}(y')|.$$

De la estimación (4.6), se tiene

$$\Omega \leq C_2 \cdot a_1^{-m},$$

lo que demuestra la desigualdad a la derecha del inciso *1*. La definición de Ω implica

$$|D^{i+r} P_\alpha^{y'}(y')| \leq \Omega \cdot \delta_Q^{|\alpha|-r-i} \text{ para } i \leq m-1-r \text{ y } \alpha \in \mathcal{A}. \tag{4.7}$$

Luego de (4.5) y por (4.7), para cada $\alpha \in \mathcal{A}$ y $\beta \in \mathcal{M}$, se tiene

$$
\begin{aligned}
|D^r P_\alpha^y(y)| &\leq \sum_{i=1}^{m-1-r} \frac{1}{i!}|D^{i+r} P_\alpha^{y'}(y')||y-y'|^i + Ca_1|y-y'|^{m-r} \\
&\leq \sum_{i=1}^{m-1-r} \Omega\, \delta_Q^{|\alpha|-r-i}|y'-y|^i + Ca_1|y'-y|^{m-r} \\
&\leq C_3[\Omega \delta_Q^{|\alpha|-r} + a_1 \delta_Q^{m-r}],
\end{aligned}
$$

Como además

$$a_1 < 1 \text{ y } m - |\beta| < |\alpha| - |\beta|,$$

entonces

$$a_1 \delta_Q^{m-|\beta|} \leq \delta_Q^{|\alpha|-|\beta|}.$$

De esto, se sigue que

$$\delta_Q^{|\beta|-|\alpha|}|\partial^\beta P_\alpha^y(y)| \leq C_3[\Omega + 1] \text{ para } \beta \in \mathcal{M}, \alpha \in \mathcal{A}.$$

Por (4.3), se tiene que

$$C_3[\Omega + 1] \geq a_1^{-m}.$$

Un primer requisito para escoger a_1, es que exista una constante $c = c(m,n)$ tal que

$$\Omega \geq c \cdot a_1^{-m}$$

y esto termina la demostración del inciso *1* del lema.

Ahora se aborda la demostración del inciso *2*. Se toman $\alpha \in \mathcal{A}$ y $\beta \in \mathcal{M}$ con $\beta > \alpha$. Por la hipótesis $HD2(y)$, se tiene

$$|\partial^{\beta+\gamma} P_\alpha^y(y)| \leq C' a_1$$

y de (4.4) se sigue

$$|\partial^\beta P_\alpha^{y'}(y')| \leq C_4 a_1.$$

Además, $\beta > \alpha$ implica $|\beta| - |\alpha| > 0$, por lo que $\delta_Q^{|\beta|-|\alpha|} < 1$ y esto prueba el inciso *2*.

Para el inciso *3*, tómese $\beta = \alpha$. Por $HD2(y)$ y dado que $\beta + \gamma > \alpha$ para $\gamma \neq \mathbf{0}$, se tiene que

$$|\partial^{\gamma+\beta} P_\alpha^y(y)| \leq C' a_1,$$

Excluyendo el primer término de la suma en (4.4), es decir, el término $\partial^\beta P_\alpha^y(y) = 1$, que se tiene por $HD1(y)$, se obtiene

$$|\partial^\alpha P_\alpha^{y'}(y') - 1| \leq C_4 \cdot a_1,$$

que es la conclusión del inciso *3*.

Por último para probar el inciso *4*, considérense $\beta \in \mathcal{A}$ y $\gamma \in \mathcal{M}$ con $\gamma + \beta \in \mathcal{M}$. Como $\mathcal{A}$ es monótono se tiene que $\beta + \gamma \in \mathcal{A}$, luego por HD1$(y)$ se obtiene

$$\partial^{\beta+\gamma} P_\alpha^y(y) = \delta_{\beta+\gamma,\alpha},$$

con lo cual

$$|\partial^{\beta+\gamma} P_\alpha^y(y)| \leq \delta_Q^{|\alpha|-|\beta|-|\gamma|}.$$

Sustituyendo en (4.4), se obtiene

$$|\partial^\beta P_\alpha^{y'}(y')| \leq C_5 \cdot \delta_Q^{|\alpha|-|\beta|},$$

lo que culmina la demostración. ■

Considérese la matriz $M = [M_{\beta,\alpha}]_{\beta,\alpha\in\mathcal{A}}$, donde cada entrada está dada por

$$M_{\beta,\alpha} = \delta_Q^{|\beta|-|\alpha|} \partial^\beta P_\alpha^{y'}(y').$$

El lema 4.1 implica que para una constante $C = C(m,n)$, se satisface

$$\begin{aligned} |M_{\beta,\alpha}| &\leq Ca_1 \text{ para } \beta > \alpha. \\ |M_{\beta,\alpha} - 1| &\leq Ca_1 \text{ para } \beta = \alpha. \\ |M_{\beta,\alpha}| &\leq C \text{ para } \beta, \alpha \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Se tiene que la matriz $M - I$ es triangular acotada y la matriz inversa M^{-1} satisface

$$\begin{aligned} |M^{-1}_{\alpha',\alpha}| &\leq C'a_1 \text{ para } \alpha' > \alpha. \\ |M^{-1}_{\alpha',\alpha} - 1| &\leq C'a_1 \text{ para } \alpha' = \alpha. \\ |M^{-1}_{\alpha',\alpha}| &\leq C' \text{ para } \alpha', \alpha \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

La matriz M^{-1} define polinomios $\tilde{P}_\alpha^{y'} \in \mathcal{P}$ donde

$$\tilde{P}_\alpha^{y'} = \delta_Q^{|\alpha|} \sum_{\alpha'\in\mathcal{A}} \delta_Q^{-|\alpha'|} P_{\alpha'}^{y'} \cdot M^{-1}_{\alpha',\alpha}. \tag{4.8}$$

Las propiedades de los polinomios $\tilde{P}_\alpha^{y'}$ se enlistan a continuación.

Lema 4.2. *1. Para cada $\beta, \alpha \in \mathcal{A}$, se tiene $\partial^\beta \tilde{P}_\alpha^{y'}(y') = \delta_{\beta\alpha}$.*

2.

$$ca_1^{-m} < \max_{\substack{\beta \in \mathcal{M} \\ \alpha \in \mathcal{A}}} \delta_Q^{|\beta|-|\alpha|} |\partial^\beta \tilde{P}_\alpha^{y'}(y')| < Ca_1^{-m}.$$

3. $\delta_Q^{|\beta|-|\alpha|} |\partial^\beta \tilde{P}_\alpha^{y'}(y')| \leq Ca_1^{-(m-1)}$ para $\alpha \in \mathcal{A}, \beta \in \mathcal{M}$ con $\beta > \alpha$.

4. Dado $\alpha \in \mathcal{A}$ y $S \subset E$ con $\#S \leq k^\#_{ant}$ existe $\tilde{\varphi}_\alpha^S \in C^m(\mathbb{R}^n)$ tal que

a. $\delta_Q^{m-|\alpha|} \|D^m \tilde{\varphi}_\alpha^S\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq Ca_1$.

b. $\delta_Q^{m-|\alpha|} |\tilde{\varphi}_\alpha^S(x)| \leq C\varepsilon$ para cada $x \in S$.

c. $J_{y'}(\tilde{\varphi}_\alpha^S) = \tilde{P}_\alpha^{y'}$.

Donde c y C dependen solamente de m y n.

Demostración. El inciso *1* se obtiene por la definición (4.8) y de las propiedades de M^{-1}. Para el inciso *2*, se toman $\beta \in \mathcal{M}$ y $\alpha \in \mathcal{A}$, se tiene

$$\left[\delta_Q^{|\beta|-|\alpha|} \partial^\beta \tilde{P}_\alpha^{y'}(y')\right] = \sum_{\alpha' \in \mathcal{A}} \left[\delta_Q^{|\beta|-|\alpha'|} \partial^\beta P_{\alpha'}^{y'}(y')\right] M^{-1}_{\alpha',\alpha}. \tag{4.9}$$

Multiplicando por M, se obtiene

$$\sum_{\alpha' \in \mathcal{A}} \left[\delta_Q^{|\beta|-|\alpha|} \partial^\beta \tilde{P}_\alpha^{y'}(y')\right] M_{\alpha',\alpha} = \left[\delta_Q^{|\beta|-|\alpha|} \partial^\beta P_\alpha^{y'}(y')\right]. \tag{4.10}$$

Como se definió en el lema 4.1, tómese

$$\Omega = \max_{\substack{\beta \in \mathcal{M} \\ \alpha \in \mathcal{A}}} \delta_Q^{|\beta|-|\alpha|} |\partial^\beta P_\alpha^{y'}(y')|$$

y sea

$$\tilde{\Omega} = \max_{\substack{\beta \in \mathcal{M} \\ \alpha \in \mathcal{A}}} \delta_Q^{|\beta|-|\alpha|} |\partial^\beta \tilde{P}_\alpha^{y'}(y')|.$$

Para $\beta \in \mathcal{M}$ y $\alpha \in \mathcal{A}$, se tiene

$$\delta_Q^{|\beta|-|\alpha|} |\partial^\beta P_\alpha^{y'}(y')| \leq \Omega.$$

La ecuación (4.9) y el lema 4.1 implican

$$\tilde{\Omega} < C_1 \cdot \Omega \leq C_2 \cdot a_1^{-m}.$$

Para $\beta \in \mathcal{M}$ y $\alpha \in \mathcal{A}$, se tiene

$$\delta_Q^{|\beta|-|\alpha|} |\partial^\beta \tilde{P}_\alpha^{y'}(y')| \leq \tilde{\Omega}.$$

La ecuación (4.10) implica

$$\Omega < C_3 \cdot \tilde{\Omega}$$

y se sigue que

$$\tilde{\Omega} > \frac{\Omega}{C_3} \geq c \cdot a_1^{-m},$$

donde $c = c(m, n)$, con lo que se prueba el inciso *2*.

Para el inciso *3*, considérense $\beta \in \mathcal{M}, \alpha \in \mathcal{A}$, con $\beta > \alpha$. Basta acotar los términos de la suma en (4.9). Por un lado, en el caso que $\beta > \alpha'$, para cada $\alpha' \in \mathcal{A}$ se tiene

$$\delta_Q^{|\beta|-|\alpha'|} |\partial^\beta P_{\alpha'}^{y'}(y')||M_{\alpha'\alpha}^{-1}| \leq C a_1 \cdot C' \leq C_4 \cdot a_1^{-(m-1)},$$

pues $a_1 < 1$. Por otro lado, si existe $\alpha' \in \mathcal{A}$ tal que $\beta < \alpha'$, entonces $\alpha' > \alpha$, luego

$$\delta_Q^{|\beta|-|\alpha'|} |\partial^\beta P_{\alpha'}^{y'}(y')||M_{\alpha'\alpha}^{-1}| \leq C'' a_1^{-m} C' a_1 < C_5 \cdot a_1^{-(m-1)}.$$

El inciso *3* queda demostrado.

Por último, para el inciso *4*, tómese $S \subset E$ con $\#S \leq k_{ant}^{\#}$. Del lema 2.4 se toma la función $\varphi_\alpha^S \in C^m(\mathbb{R}^n)$ y se definen

$$\tilde{\varphi}_\alpha^S = \delta_Q^{|\alpha|} \sum_{\alpha' \in \mathcal{A}} \delta_Q^{-|\alpha'|} \varphi_{\alpha'}^S \cdot M_{\alpha',\alpha}^{-1}.$$

Como $\delta_Q^{-|\alpha'|} < \delta_Q^{-m}$, se tiene

$$\|D^m \tilde{\varphi}_\alpha^S\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq C_6 a_1 \delta_Q^{|\alpha|-m} \text{ para } \alpha \in \mathcal{A}.$$

Si $x \in S$, entonces de igual forma se cumple

$$|\tilde{\varphi}_\alpha^S(x)| \leq C_7 \delta_Q^{|\alpha|-m} \varepsilon.$$

Para el inciso *4*, nótese que el jet es lineal y esto concluye la demostración del lema. ■

Sean $\bar{\beta} \in \mathcal{M}$ y $\bar{\alpha} \in \mathcal{A}$ tales que

$$\tilde{\Omega} = \delta_Q^{|\bar{\beta}|-|\bar{\alpha}|} |\partial^{\bar{\beta}} \tilde{P}_{\bar{\alpha}}^{y'}(y')|.$$

Si $\bar{\beta} \in \mathcal{A}$, entonces
$$c \cdot a_1^{-m} < 1,$$
tomando a_1 adecuado, se tiene que $\bar{\beta} \notin \mathcal{A}$, lo cual es una nueva restricción para a_1. Si $\bar{\beta} > \bar{\alpha}$, entonces el inciso *3* del lema 4.2 implica
$$\tilde{\Omega} \leq C \cdot a_1^{-(m-1)}.$$
Pero por el inciso *2*, se tiene
$$\tilde{\Omega} < C \cdot a_1^{-m},$$
lo cual es una contradicción con a_1 adecuado.

El único caso que resta por estudiar es $\bar{\beta} < \bar{\alpha}$. Se define
$$\bar{\mathcal{A}}^{y'} = (\mathcal{A} \setminus \{\bar{\alpha}\}) \cup \{\bar{\beta}\}$$
y se observa que
$$\mathcal{A} \triangle \bar{\mathcal{A}}^{y'} = \{\bar{\beta}\} \cup \{\bar{\alpha}\}.$$
Lo cual implica que $\bar{\mathcal{A}}^{y'} < \mathcal{A}$. Se definen polinomios $\bar{P}_{\bar{\beta}}^{y'} \in \mathcal{P}$ con $\alpha \in \bar{\mathcal{A}}^{y}$ por
$$\begin{aligned}
\bar{P}_{\bar{\beta}}^{y'} &= \tilde{P}_{\bar{\alpha}}^{y'}/[\partial^{\bar{\beta}}\tilde{P}_{\bar{\alpha}}^{y'}(y')].\\
\bar{P}_{\alpha}^{y'} &= \tilde{P}_{\alpha}^{y'} - [\partial^{\bar{\beta}}\tilde{P}_{\alpha}^{y'}(y')]\bar{P}_{\bar{\beta}}^{y'} \text{ para } \alpha \in \mathcal{A} \setminus \{\bar{\alpha}\}.
\end{aligned}$$

A continuación, se enlistan las propiedades de los polinomios $\bar{P}_{\alpha}^{y'}$.

Lema 4.3. *La familia de polinomios $\bar{P}_{\alpha}^{y'}$ indexada por $\bar{\mathcal{A}}$ satisface:*

1. $\partial^{\beta}\bar{P}_{\alpha}^{y'}(y') = \delta_{\beta\alpha}$ *para* $\beta, \alpha \in \bar{\mathcal{A}}^{y'}$.
2. $\delta_Q^{|\beta|-|\alpha|}|\partial^{\beta}\bar{P}_{\alpha}^{y'}(y')| \leq Ca_1^{-m}$ *para* $\beta \in \mathcal{M}$ *y* $\alpha \in \bar{\mathcal{A}}^{y'}$.
3. *Dado* $\alpha \in \bar{\mathcal{A}}^{y'}$, $S \subset E$ *con* $\#S \leq k_{ant}^{\#}$ *existe* $\bar{\varphi}_{\alpha}^{S} \in C^m(\mathbb{R}^n)$ *con las siguientes propiedades*
   a. $\delta_Q^{m-|\alpha|}\|D^m\bar{\varphi}_{\alpha}^{S}\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq Ca_1^{-(m-1)}$.
   b. $\delta_Q^{m-|\alpha|}|\bar{\varphi}_{\alpha}^{S}(x)| \leq Ca_1^{-m}\varepsilon$ *para* $x \in S$.
   c. $J_{y'}(\bar{\varphi}_{\alpha}^{S}) = \bar{P}_{\alpha}^{y'}$.

Donde la constante C depende solamente de m y n.

Demostración. Para el inciso *1*, si $\alpha = \bar{\beta}$, entonces

$$\partial^{\beta} \bar{P}_{\bar{\beta}}^{y'}(y') = \partial^{\beta} \tilde{P}_{\bar{\alpha}}^{y'}(y')/[\partial^{\bar{\beta}} \tilde{P}_{\bar{\alpha}}^{y'}(y')] = \delta_{\beta\bar{\beta}}.$$

Si $\alpha \neq \bar{\beta}$ y $\beta = \bar{\beta}$, entonces

$$\partial^{\bar{\beta}} \bar{P}_{\alpha}^{y'}(y') = \partial^{\bar{\beta}} \tilde{P}_{\alpha}^{y'}(y') - [\partial^{\bar{\beta}} \tilde{P}_{\alpha}^{y'}(y')]\partial^{\bar{\beta}} \bar{P}_{\bar{\beta}}^{y'}(y') = 0.$$

Para $\beta \neq \bar{\beta}$, se tiene

$$\partial^{\beta} \bar{P}_{\alpha}^{y'}(y') = \partial^{\beta} \tilde{P}_{\alpha}^{y'}(y') - [\partial^{\bar{\beta}} \tilde{P}_{\alpha}^{y'}(y')]\partial^{\beta} \bar{P}_{\bar{\beta}}^{y'}(y') = \delta_{\beta\alpha}.$$

Lo anterior demuestra *1*.

Para el inciso *2*, si $\alpha = \bar{\beta}$, entonces el lema 4.2 implica que

$$\begin{aligned}
\delta_Q^{|\beta|-|\bar{\beta}|}|\partial^{\beta} \bar{P}_{\bar{\beta}}^{y'}(y')| &\leq \frac{\delta_Q^{|\beta|-|\bar{\alpha}|}|\partial^{\beta} \tilde{P}_{\bar{\alpha}}^{y'}(y')|}{\delta_Q^{|\bar{\beta}|-|\bar{\alpha}|}|\partial^{\bar{\beta}} \tilde{P}_{\bar{\alpha}}^{y'}(y')|} \\
&\leq \frac{C \cdot a_1^{-m}}{\delta_Q^{|\bar{\beta}|-|\bar{\alpha}|}|\partial^{\bar{\beta}} \tilde{P}_{\bar{\alpha}}^{y'}(y')|} \leq C \cdot a_1^{-m}.
\end{aligned}$$

Si $\alpha \neq \bar{\beta}$, entonces

$$\begin{aligned}
\delta_Q^{|\beta|-|\alpha|}|\partial^{\beta} \bar{P}_{\alpha}^{y'}(y')| &\leq \delta_Q^{|\beta|-|\alpha|}|\partial^{\beta} \tilde{P}_{\alpha}^{y'}(y')| + \frac{\delta_Q^{|\bar{\beta}|-|\alpha|}|\partial^{\bar{\beta}} \tilde{P}_{\alpha}^{y'}(y')|}{\delta_Q^{|\beta|-|\bar{\beta}|}|\partial^{\beta} \bar{P}_{\bar{\beta}}^{y'}(y')|} \\
&\leq C \cdot a_1^{-m} + C \cdot a_1^{-m} = 2C \cdot a_1^{-m},
\end{aligned}$$

lo cual prueba *2*.

Para el inciso *3*, considérese $S \subset E$ tal que $\#S \leq k_{ant}^{\#}$. Se definen

$$\begin{aligned}
\bar{\varphi}_{\bar{\beta}}^S &= \tilde{\varphi}_{\bar{\alpha}}^S/[\partial^{\bar{\beta}} \tilde{P}_{\bar{\alpha}}^{y'}(y')]. \\
\bar{\varphi}_{\alpha}^S &= \tilde{\varphi}_{\alpha}^S - [\partial^{\bar{\beta}} \tilde{P}_{\alpha}^{y'}(y')]\bar{\varphi}_{\bar{\beta}}^S \text{ para cada } \alpha \in \mathcal{A} \setminus \{\bar{\alpha}\}.
\end{aligned}$$

Para $\alpha = \bar{\beta}$, se tiene

$$\delta_Q^{m-|\bar{\beta}|}\|D^m \bar{\varphi}_{\bar{\beta}}^S\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{\delta_Q^{m-|\bar{\alpha}|}\|D^m \tilde{\varphi}_{\bar{\alpha}}^S\|_{C^0(\mathbb{R}^n)}}{\delta_Q^{|\bar{\beta}|-|\bar{\alpha}|}|\partial^{\bar{\beta}} \tilde{P}_{\bar{\alpha}}^{y'}(y')|} < \frac{C \cdot a_1}{c a_1^{-m}} < C' a_1^{-(m-1)}.$$

En el caso que $\alpha \neq \bar{\beta}$, se tiene

$$\begin{aligned}\delta_Q^{m-|\alpha|}\|\partial^m \bar{\varphi}_\alpha^S\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} &\leq \delta_Q^{m-|\alpha|}\|D^m \tilde{\varphi}_\alpha^S\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \\ &+ \left[\delta_Q^{|\bar{\beta}|-|\alpha|}|\partial^{\bar{\beta}} \tilde{P}_\alpha^{y'}(y')|\right] \cdot \left[\delta_Q^{m-|\bar{\beta}|}\|D^m \tilde{\varphi}_{\bar{\beta}}^S\|_{C^0(\mathbb{R}^n)}\right] \\ &\leq Ca_1 + Ca_1^{-m} \cdot \frac{Ca_1}{ca_1^{-m}} \\ &\leq C'' \cdot a_1^{-(m-1)}.\end{aligned}$$

Cuando $x \in S$ y $\alpha = \bar{\beta}$, se tiene

$$\delta_Q^{m-|\bar{\beta}|}|\bar{\varphi}_{\bar{\beta}}^S(x)| \leq \frac{\delta_Q^{m-|\bar{\alpha}|}|\tilde{\varphi}_{\bar{\alpha}}^S(x)|}{\delta_Q^{|\bar{\beta}|-|\bar{\alpha}|}|\partial^{\bar{\beta}} \tilde{P}_{\bar{\alpha}}^{y'}(y')|} < \frac{C \cdot \varepsilon}{ca_1^{-m}} \leq C \cdot a_1^{-m}\varepsilon.$$

Si $\alpha \neq \bar{\beta}$, entonces

$$\delta_Q^{m-|\alpha|}|\bar{\varphi}_\alpha^S(x)| \leq \delta_Q^{m-|\alpha|}|\tilde{\varphi}_\alpha^S(x)| + \delta_Q^{|\bar{\beta}|-|\alpha|}|\partial^{\bar{\beta}} \tilde{P}_\alpha^{y'}(y)|\delta_Q^{m-|\bar{\beta}|}|\tilde{\varphi}_{\bar{\beta}}^S(x)| \leq C''' \cdot a_1^{-m}\varepsilon.$$

Finalmente la linealidad del jet y la definición de $\bar{\varphi}_\alpha^S$ terminan la demostración. ■

Partiendo de los polinomios $P_\alpha \in \mathcal{P}_{y_0}$ con $\alpha \in \mathcal{A}$ que satisfacen el lema débil. Para $y \in B(y_0, a_1)$, por el teorema de Helly existen polinomios $P_\alpha^y \in \mathcal{P}_y$ con $\alpha \in \mathcal{A}$ que también satisfacen propiedades similares a las del lema débil. Bajo la hipótesis (4.3), dado $y' \in (Q^+)^{\star\star}$ se ha encontrado una familia de polinomios $\bar{P}_\alpha^{y'} \in \mathcal{P}_{y'}$ indexada por $\bar{\mathcal{A}}^{y'} < \mathcal{A}$ que satisface condiciones similares a las del lema fuerte. Por el lema 4.3, se está en condiciones de demostrar que el cubo Q^+ es bueno. Ahora, si se supone que el cubo Q es bueno se tendrá una contradicción.

Lema 4.4. *El cubo Q^+ es bueno.*

Demostración. Basta observar que $\delta_{Q^+} = 2\delta_Q$, luego la demostración es inmediata. ■

Para finalizar la sección, se demuestra la estimación (4.2), es decir, las derivadas de los polinomios P_α^y del lema 2.3 están controladas por a_1.

Lema 4.5. *Sea $k_1^\#$ un entero que satisface*

$$k^\# \geq (D+1)k_1^\# \text{ y } k_1^\# \geq (D+1)k_{ant}^\#.$$

Si Q es un cubo Calderón-Zygmund, $y \in Q^{\star\star\star}$ y los polinomios $P_\alpha^y \in \mathcal{P}$ con $\alpha \in \mathcal{A}$ satisfacen $HD1(y), HD2(y), HD3(y)$ del lema 2.3, entonces se tiene la siguiente estimación

$$\delta_Q^{|\beta|-|\alpha|}|\partial^\beta P_\alpha^y(y)| \leq a_1^{-m} \text{ para } \alpha \in \mathcal{A} \text{ y } \beta \in \mathcal{M}.$$

Demostración. Por el contrario, supóngase que

$$\delta_Q^{|\beta|-|\alpha|}|\partial^\beta P_\alpha^y(y)| > a_1^{-m} \text{ para cada } \alpha \in \mathcal{A} \text{ y } \beta \in \mathcal{M}.$$

La descomposición de Calderón-Zygmund de Q_0 es finita, lo que implica que para Q hay un número finito de cubos diádicos en Q_0 que contienen a Q. Para cada cubo $\hat{Q}$ que contiene a Q, se define

$$\Phi(\hat{Q}) = \max_{\substack{\beta\in\mathcal{M}\\ \alpha\in\mathcal{A}}} \delta_{\hat{Q}}^{|\beta|-|\alpha|}|\partial^\beta P_\alpha^y(y)|.$$

Obsérvese que

$$\Phi(\hat{Q}) > a_1^{-m} \text{ pues } \delta_Q \le \delta_{\hat{Q}}.$$

Sea $\bar{Q}$ el cubo maximal que contiene a Q, como $\Phi(\bar{Q}) > a_1^{-m}$, pueden ocurrir los siguientes casos, o bien $\bar{Q} = Q_0$ o bien $\Phi(\bar{Q}^+) \le a_1^{-m}$. Se puede descartar el primer caso escogiendo adecuadamente a_1. En efecto, la hipótesis $HD2(y)$ implica que

$$\delta_{Q_0}^{|\beta|-|\alpha|}|\partial^\beta P_\alpha^y(y)| \le \delta_{Q_0}^{|\beta|-|\alpha|} C a_1 \le C\delta_{Q_0}^{-(m-1)} < C a_1^{-(m-1)}.$$

Se toma a_1 de manera que se satisface

$$C a_1^{-(m-1)} < a_1^{-m}$$

y esto contradice que $\Phi(\bar{Q}) > a_1^{-m}$. Entonces el único caso que se debe estudiar es $\Phi(\bar{Q}^+) \le a_1^{-m}$. Ya que $2\delta_{\bar{Q}} = \delta_{\bar{Q}^+}$, la definición de Φ implica

$$\begin{aligned}
\Phi(\bar{Q}) &= \max_{\substack{\beta\in\mathcal{M}\\ \alpha\in\mathcal{A}}} \delta_{\bar{Q}}^{|\beta|-|\alpha|}|\partial^\beta P_\alpha^y(y)| \\
&\le \max_{\substack{\beta\in\mathcal{M}\\ \alpha\in\mathcal{A}}} \left(2^{-1}\delta_{\bar{Q}^+}\right)^{|\beta|-|\alpha|}|\partial^\beta P_\alpha^y(y)| \\
&\le 2^{m-1}\Phi(\bar{Q}^+)
\end{aligned}$$

y por consiguiente

$$\Phi(\bar{Q}) \le 2^{m-1} a_1^{-m}.$$

Así

$$a_1^{-m} \le \max_{\substack{\beta\in\mathcal{M}\\ \alpha\in\mathcal{A}}} \delta_{\bar{Q}}^{|\beta|-|\alpha|}|\partial^\beta P_\alpha^y(y)| \le 2^m a_1^{-m}.$$

Como $Q \subset \bar{Q}$ entonces $y \in (\bar{Q})^{\star\star\star}$. Del lema 4.4, se tiene que $\bar{Q}^+$ es bueno, esto es una contradicción, pues Q es un cubo Calderón-Zygmund. ■

4.2 Control de polinomios 2

En esta sección, finalmente se demuestra el control de polinomios que se necesitó para terminar la demostración del lema débil para $\mathcal{A}$ monótono. Considérese nuevamente Q_0 y su descomposición de Calderón-Zygmund

$$Q_0 = Q_1 \cup \cdots \cup Q_N.$$

Por un lado, en el lema 2.5 del capítulo 2, se demostró que para cada $\nu \leq N$ existe un polinomio

$$P_\nu \in \Gamma_f^\#(y_\nu, k_1^\#, C),$$

donde y_ν es el centro de Q_ν y C es una constante que depende de m y n. Por otro lado, en la demostración del teorema 1.3, se utilizó funciones de corte $\{\phi_\nu\}_{\nu=1}^N$ que son idénticamente uno en $Q_\nu^\star$ y cuyo soporte está en $Q_\nu^{\star\star}$. Con estos elementos, se definieron funciones

$$f_\nu = \phi_\nu \cdot [f - P_\nu].$$

Resulta que la función f_ν, un punto $y \in Q_\nu^{\star\star}$ y el conjunto $\mathcal{A}^y < \mathcal{A}$, que se obtiene de las propiedades Calderón-Zygmund del cubo Q_ν, satisfacen las hipótesis del lema fuerte. Entonces la hipótesis de inducción implica que existe $F_\nu \in C^m(\mathbb{R}^n)$ que aproxima a f_ν en $Q_\nu^\star \cap E$. Por medio de una partición de la unidad $\{\theta_\nu\}_{\nu=1}^N$, se obtiene que el promedio de las funciones $F_\nu + P_\nu$ aproxima a f en Q_0.

Resta estudiar las derivadas de los polinomios $P_\nu - P_\mu$, para cubos adyacentes, lo que llamamos control de polinomios. Para esto, considérense $y \in Q^{\star\star\star}$ y $P \in \Gamma_f^\#(y, k, M)$. Primero se mostrará la existencia de un polinomio

$$P' \in \Gamma_f^\#(y', k', M'),$$

tal que la diferencia $P - P'$ satisface cotas similares a las de residuo de Taylor.

Lema 4.6. *Sean Q y Q' cubos Calderón-Zygmund adyacentes o que coinciden. Si $y \in Q^{\star\star\star}$, $y' \in (Q')^{\star\star\star}$ y $P \in \Gamma_f^\#(y, k_1^\#, C)$ con*

$$k^\# \geq (D+1)k_1^\#, \quad k_1^\# \geq (D+1)k_2^\# \text{ y } k_2^\# \geq k_{ant}^\#,$$

entonces existe $P' \in \Gamma_f^\#(y', k_2^\#, C')$ tal que

$$|D^r(P' - P)(y')| \leq C'' a_1^{-m} \delta_Q^{m-r} \text{ para } r \leq m-1.$$

Donde la constante C'' solamente depende de m y n.

Demostración. Por el lema 2.2 existe $\tilde{P} \in \Gamma_f(y', k_2^\#, C)$ tal que

$$|D^r(P - \tilde{P})(y')| \leq C|y - y'|^{m-r}, \tag{4.11}$$

para cada $r \leq m - 1$. El lema 2.3 aplicado a y' y $k_1^\#$ implica que existen polinomios $P_\alpha^{y'}$ que satisfacen $HD1(y')$, $HD2(y')$ y $HD3(y')$. Se define

$$P' = \tilde{P} - \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} [\partial^\alpha \tilde{P}(y')] \cdot P_\alpha^{y'}.$$

Por $HD1(y')$ para $\beta \in \mathcal{A}$, se tiene

$$\partial^\beta P'(y') = \partial^\beta \tilde{P}(y') - \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} [\partial^\alpha \tilde{P}(y')]\delta_{\beta\alpha} = 0.$$

Tómese $S \subset E$ tal que $\#S \leq k_2^\#$, luego existe $\tilde{F}^S \in C^m(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|\tilde{F}^S\|_{C^m(\mathbb{R}^n)} \leq C,\ |\tilde{F}^S(x) - f(x)| \leq C \cdot \varepsilon \text{ para } x \in S \text{ y } J_y(\tilde{F}^S) = \tilde{P}.$$

Por $HD3(y')$, se tiene que $P_\alpha^{y'} \in C_1 \cdot \Gamma^w(y', S, 1)$, es decir, existe $\varphi_\alpha^S \in C^m(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|D^m \varphi_\alpha^S\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \cdot a_1,\ |\varphi_\alpha^S(x)| \leq C_1 \cdot \varepsilon \text{ y } J_{y'}(\varphi_\alpha^S) = P_\alpha^{y'}.$$

Se define

$$F^S = \tilde{F}^S - \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} [\partial^\alpha \tilde{P}(y')] \cdot \varphi_\alpha^S \cdot \theta,$$

en donde θ es una función de corte en y' con $\operatorname{sop} \theta \subset B(y', 1)$. Para la norma de F^S, se tiene la siguiente estimación

$$\|F^S\|_{C^m(\mathbb{R}^n)} \leq \|\tilde{F}^S\|_{C^m(\mathbb{R}^n)} + \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} |\partial^\alpha \tilde{P}(y')| \|\varphi_\alpha^S \cdot \theta\|_{C^m(\mathbb{R}^n)} \leq C_2.$$

De forma similar, se tiene

$$|F^S(x) - f(x)| \leq C_3 \cdot \varepsilon \text{ para } x \in S,$$

y $J_{y'}(F^S) = P'$ pues θ es plana en y'. Se sigue que

$$P' \in \Gamma_f^\#(y', k_{ant}^\#, C').$$

Resta demostrar la cota en la conclusión del lema. La definición de P' implica

$$|D^r(P - P')(y')| \leq |D^r(P - \tilde{P})(y')| + \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} |\partial^\alpha \tilde{P}(y')| \cdot |D^r P_\alpha^{y'}(y')|.$$

Se tienen las siguientes estimaciones

- Por (4.11) para cada $r \leq m-1$, se tiene
$$|D^r(P-\tilde{P})(y')| \leq C_4 \cdot \delta_Q^{m-r}.$$

- Para $\alpha \in \mathcal{A}$, el teorema de Taylor y la monotonía de $\mathcal{A}$ implican
$$\partial^\alpha P(y') = \sum_{\beta+\alpha \in \mathcal{M}} \frac{1}{\beta!} \partial^{\beta+\alpha} P(y)(y'-y)^\beta = 0,$$
luego por (4.11), se tiene
$$|\partial^\alpha \tilde{P}(y')| = |\partial^\alpha (P-\tilde{P})(y)| \leq C \cdot |y-y'|^{m-|\alpha|}.$$
Así
$$|\partial^\alpha \tilde{P}(y')| \leq C_4 \cdot \delta_Q^{m-|\alpha|}.$$

- Por el lema 4.5, se tiene
$$|\partial^\beta P_\alpha^{y'}(y')| \leq \delta_Q^{|\alpha|-|\beta|} a_1^{-m} \text{ para } \beta \in \mathcal{M} \text{ y } \alpha \in \mathcal{A}.$$

Se concluye
$$|D^r(P-P')(y')| \leq C_5 \cdot a_1^{-m} \cdot \delta_Q^{m-r},$$
donde $C_5 = C_5(m,n)$ y esto termina la demostración. ■

Una ligera modificación en las hipótesis del lema anterior, permite tener el control de polinomios en un mismo cubo Calderón-Zygmund.

Lema 4.7. *Sea $k_1^\#$ un entero tal que*
$$k^\# \geq (D+1)k_1^\# \text{ y } k_1^\# \geq (D+1)k_{ant}^\#.$$
Si Q es un cubo Calderón-Zygmund y $y \in Q^{\star\star}$, entonces dados polinomios $P_1, P_2 \in \Gamma_f^\#(y, k_1^\#, C)$, se tiene
$$|D^r(P_1-P_2)(y)| \leq a_1^{-(m+1)} \delta_Q^{m-r} \textit{ para } r \leq m-1.$$

Demostración. Se procederá por contradicción. Supóngase que
$$|D^r(P_1-P_2)(y)| > a_1^{-(m+1)} \delta_Q^{m-r} \text{ para } r \leq m-1.$$
Se demostrará que Q^+ es un cubo Calderón-Zygmund distinto de Q_0. Si $y' \in (Q^+)^{\star\star}$, entonces $y' \in Q^{\star\star\star}$. Para $y, y' \in Q^{\star\star\star}$ y los polinomios $P_1, P_2 \in \Gamma_f^\#(y, k_1^\#, C)$ el lema 4.6 implica que existen polinomios $P_1', P_2' \in \Gamma_f^\#(y', k_{ant}^\#, C')$ tales que
$$|D^r(P_i-P_i')(y')| \leq C' \cdot a_1^{-m} \delta_Q^{m-r} \text{ para } r \leq m-1 \text{ y } i = 1,2.$$

La desigualdad del triángulo implica que

$$\delta_Q^{r-m}|D^r(P_1 - P_2)(y')| \leq 2C' \cdot a_1^{-m} + \delta_Q^{r-m}|D^r(P_1' - P_2')(y')|. \tag{4.12}$$

Más aún, el teorema de Taylor implica que

$$D^r(P_1 - P_2)(y) = \sum_{i=0}^{m-1-r} \frac{1}{i!} D^{i+r}(P_1 - P_2)(y')(y - y')^i.$$

Existe una constante $C_1 = C_1(m, n)$ tal que

$$\max_r \delta_Q^{m-r}|D^r(P_1 - P_2)(y)| \leq \max_r C_1 \delta_Q^{r-m}|D^r(P_1 - P_2)(y')|.$$

Entonces por la desigualdad (4.12), se tiene

$$a_1^{-(m+1)} < \delta_Q^{r-m}|D^r(P_1 - P_2)(y)| \leq C_2 \cdot a_1^{-m} + \max_r C_1 \cdot \delta_Q^{r-m}|D^r(P_1' - P_2')(y')|.$$

Luego existe una constante $c = c(m, n)$ tal que

$$c \cdot a_1^{-(m+1)} < \delta_Q^{r-m}|D^r(P_1' - P_2')(y')|.$$

Tómese $\bar{\beta} \in \mathcal{M}$ tal que

$$\delta_Q^{|\bar{\beta}|-m}|\partial^{\bar{\beta}}(P_1' - P_2')(y')| = \max_{\beta \in \mathcal{M}} \delta_Q^{|\beta|-m}|\partial^{\beta}(P_1' - P_2')(y')|.$$

Se define $\Omega = \partial^{\bar{\beta}}(P_1' - P_2')(y')$ y se tiene que

$$|\Omega| > c a_1^{-(m+1)} \delta_Q^{m-|\bar{\beta}|},$$

de donde $\Omega \neq 0$. Como $P_1', P_2' \in \Gamma_f^{\#}(y', k_{ant}^{\#}, C')$ se tiene que $\bar{\beta} \notin \mathcal{A}$. Considérense los polinomios $P_\alpha^y \in \mathcal{P}$ obtenidos en el lema 2.3 y sea $\mathcal{A}^{y'} = \mathcal{A} \cup \{\bar{\beta}\}$. Se definen polinomios

$$\bar{P}_{\bar{\beta}} = (P_1' - P_2')/\Omega.$$
$$\bar{P}_\alpha = P_\alpha^{y'} - [\partial^{\bar{\beta}} \bar{P}_\alpha^{y'}(y')] \bar{P}_{\bar{\beta}}.$$

Nótese que $\mathcal{A}^{y'} < \mathcal{A}$. Se tiene que los polinomios $\bar{P}_\alpha$ satisfacen las propiedades de un cubo bueno para Q^+.

Para la propiedad B2, si $\beta, \alpha \in \mathcal{A}^{y'}$ y $\alpha = \bar{\beta}$, entonces la conclusión se obtiene de la definición de Ω. Para $\alpha \neq \bar{\beta}$, se tienen dos casos.

- Si $\beta \neq \bar{\beta}$, entonces

$$\partial^{\beta} \bar{P}_{\alpha}(y') = \delta_{\beta\alpha} - [\partial^{\bar{\beta}} P_{\alpha}^{y'}(y')] \cdot 0 = \delta_{\beta\alpha}.$$

- Si $\beta = \bar{\beta}$, entonces

$$\partial^{\bar{\beta}} \bar{P}_{\alpha}(y') = \partial^{\bar{\beta}} P_{\alpha}^{y'}(y') - [\partial^{\bar{\beta}} P_{\alpha}^{y'}(y')] \cdot 1 = 0.$$

Para la propieadad B3, considérense $\alpha \in \mathcal{A}^{y'}$ y $\beta \in \mathcal{M}$ con $\beta \geq \alpha$.

- Si $\alpha, \beta \in \mathcal{A}^{y'}$ por B2 y ya que $|\beta| \geq |\alpha|$, entonces

$$\delta_{Q+}^{|\beta|-|\alpha|} |\partial^{\beta} \bar{P}_{\alpha}(y')| \leq 1 \leq a_1^{-(m+1)}.$$

- Si $\beta \notin \mathcal{A}^{y'}, \alpha \in \mathcal{A}^{y'}$ y $\alpha = \bar{\beta}$, entonces la definición de Ω implica

$$\delta_{Q}^{|\beta|-|\bar{\beta}|} |\partial^{\beta} \bar{P}_{\bar{\beta}}(y')| \leq 1 \leq a_1^{-(m+1)}.$$

- Si $\beta \notin \mathcal{A}^{y'}, \alpha \in \mathcal{A}^{y'}$ y $\alpha \neq \bar{\beta}$, entonces el lema 4.5 implica

$$|\partial^{\beta} P_{\alpha}^{y'}(y')| \leq \delta_{Q}^{|\alpha|-|\beta|} a_1^{-m}.$$

  Además

$$\delta_{Q}^{|\bar{\beta}|-|\beta|} \geq |\partial^{\beta} \bar{P}_{\bar{\beta}}(y')|$$

  y se tiene

$$|\partial^{\beta} \bar{P}_{\alpha}(y')| \leq \delta_{Q}^{|\alpha|-|\beta|} a_1^{-m} + \delta_{Q}^{|\alpha|-|\overline{\beta}|} \delta_{Q}^{|\overline{\beta}|-|\beta|} a_1^{-m} \leq C_3 \cdot \delta_{Q+}^{|\alpha|-|\beta|} a_1^{-m}.$$

  Si $a_1 < 1/C_3$ en la última desigualdad, se tiene la conclusión para B3.

Para la propiedad B4, tómese $S \subset E$ con $\#S \leq k_{ant}^{\#}$, entonces existen funciones $F_i^S \in C^m(\mathbb{R}^n)$ tales que

$$\|F_i^S\|_{C^m(\mathbb{R}^n)} \leq C, \;\; |F_i^S(x) - f(x)| \leq C \cdot \varepsilon \text{ para } x \in S \;\; \text{y} \;\; J_{y'}(F_i^S) = P_i.$$

Por $HD3(y')$ se tiene $P_{\alpha}^{y'} \in C'' \cdot \Gamma^w(y', S, 1, a_1)$, lo que implica que existe una función $\varphi_{\alpha}^S \in C^m(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|D^m \varphi_{\alpha}^S\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq C'' \cdot a_1, \;\; |\varphi_{\alpha}^S(x)| \leq C'' \cdot \varepsilon \text{ para } x \in S \;\; \text{y} \;\; J_{y'}(\varphi_{\alpha}^S) = P_{\alpha}^y.$$

Se definen funciones

$$\bar{\varphi}_{\bar{\beta}}^S = (F_1^S - F_2^S)/\Omega.$$
$$\bar{\varphi}_{\alpha}^S = \varphi_{\alpha}^S - [\partial^{\bar{\beta}} P_{\alpha}^{y'}(y')] \bar{\varphi}_{\bar{\beta}}^S.$$

Para $\alpha \in \mathcal{A}^{y'}$, se tienen los siguientes casos

- Si $\alpha = \bar{\beta}$, entonces

$$\begin{aligned}\|D^m \bar{\varphi}^S_{\bar{\beta}}\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} &\leq \|D^m(F^S_1 - F^S_2)\|_{C^0(\mathbb{R}^n)}/|\Omega| \\ &\leq 2Ca_1^{m+1}\delta_Q^{|\bar{\beta}|-m} \leq 2C\delta_Q^{|\bar{\beta}|-m} \leq \delta_{Q^+}^{|\bar{\beta}|-m} a_1^{-(m+1)}.\end{aligned}$$

- Si $\alpha \neq \bar{\beta}$, entonces

$$\begin{aligned}\|D^m \bar{\varphi}^S_{\alpha}\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} &\leq \|D^m \varphi^S_\alpha\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} + |\partial^{\bar{\beta}} P^{y'}_\alpha(y')| \|D^m \bar{\varphi}^S_{\bar{\beta}}\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C'' a_1 + 2C\delta_Q^{|\alpha|-|\bar{\beta}|} a_1^{-(m+1)} \delta_Q^{|\bar{\beta}|-m} \\ &\leq C'' a_1 + 2C\delta_Q^{|\alpha|-m} a_1^{-(m+1)} \leq \delta_{Q^+}^{|\alpha|-m} a_1^{-(m+1)}.\end{aligned}$$

Para $x \in S$, se tiene

- Si $\alpha = \bar{\beta}$, entonces

$$\begin{aligned}|\bar{\varphi}^S_{\bar{\beta}}(x)| &\leq |(F^S_1 - F^S_2)(x)|/|\Omega| \\ &\leq 2C \cdot \delta_Q^{|\bar{\beta}|-m} \cdot \varepsilon \leq \delta_Q^{|\bar{\beta}|-m} a_1^{-(m+1)} \varepsilon.\end{aligned}$$

- Si $\alpha \neq \bar{\beta}$, entonces

$$\begin{aligned}|\bar{\varphi}^S_\alpha(x)| &\leq |\varphi^S_\alpha(x)| + |\partial^{\bar{\beta}} P^{y'}_\alpha(y')| |\bar{\varphi}^S_{\bar{\beta}}(x)| \\ &\leq C'' \cdot \varepsilon + 2C \cdot a_1^{-(m+1)} \delta_Q^{|\alpha|-m} \varepsilon \leq \delta_Q^{|\alpha|-m} a_1^{-(m+1)} \varepsilon.\end{aligned}$$

Finalmente de la linealidad del jet se sigue que $J_{y'}(\bar{\varphi}^S_\alpha) = \bar{P}_\alpha$ y por tanto Q^+ es bueno.

Resta demostrar que $Q \neq Q_0$. Para esto basta observar que los polinomios P_1, P_2 satisfacen

$$|D^r(P_1 - P_2)(y)| \leq 2 \cdot C \text{ para } r \leq m-1.$$

Se toma a_1 de manera que se satisface

$$2 \cdot C \leq a_1^{-(m+1)} \delta_{Q_0}^{m-r},$$

entonces $Q \neq Q_0$. Por tanto Q^+ es un cubo Calderón-Zygmund distinto de Q_0, lo cual contradice que Q es un cubo Calderón-Zygmund. ■

Finalmente se tiene el control de polinomios para cubos Calderón-Zygmund adyacentes.

Lema 4.8. *Sean Q y Q' cubos Calderón-Zygmund adyacentes. Si $y \in Q^{\star\star}$, $y' \in (Q')^{\star\star}$ y se tienen polinomios $P \in \Gamma_f^{\#}(y, k_A^{\#}, C)$ y $P' \in \Gamma_f^{\#}(y', k_A^{\#}, C')$ con*

$$k^{\#} \geq (D+1)k_A^{\#} \text{ y } k_A^{\#} \geq (D+1)^2 k_{ant}^{\#}.$$

Entonces

$$|D^r(P'-P)(y')| \leq C'' \cdot a_1^{-(m+1)} \delta_Q^{m-r} \text{ para } r \leq m-1,$$

donde C'' depende solamente de m y n.

Demostración. Sea $k_B^{\#} = (D+1)k_{ant}^{\#}$. El lema 4.6 aplicado a P, y' y Q', implica que existe un polinomio

$$\tilde{P} \in \Gamma_f^{\#}(y', k_B^{\#}, C_1)$$

tal que

$$|D^r(\tilde{P}-P)(y')| \leq C_2 \cdot a_1^{-m} \delta_Q^{m-r} \text{ para } r \leq m-1.$$

Como $k_A^{\#} \geq (D+1)k_B^{\#}$, se tiene

$$\Gamma_f^{\#}(y', k_A^{\#}, C_1) \subset \Gamma_f^{\#}(y', k_B^{\#}, C_1).$$

Entonces $P', \tilde{P} \in \Gamma_f^{\#}(y', k_B^{\#}, C_2)$ y el lema 4.7 implican

$$|D^r(P'-\tilde{P})(y')| \leq a_1^{-(m+1)} \cdot \delta_Q^{m-r} \text{ para } r \leq m-1.$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} |D^r(P'-P)(y')| &\leq |D^r(P'-\tilde{P})(y')| + |D^r(\tilde{P}-P)(y')| \\ &\leq C_2 \cdot a_1^{-m} \delta_Q^{m-r} + a_1^{-(m+1)} \delta_Q^{m-r} \\ &\leq C'' \cdot a_1^{-(m+1)} \delta_Q^{m-r}, \end{aligned}$$

lo cual termina la demostración. ∎

Conclusiones

El teorema de extensión de Whitney es un resultado central dentro del análisis. De manera general tiene distintas formas de abordar. Sean E, F espacios normados y $\mathcal{F}(E, F)$ un espacio de funciones. Para $X \subset E$ se tienen:

1. **Problema de traza**. Caracterizar $f : X \to F$ para las cuales existe $F \in \mathcal{F}(E, F)$ tal que $F|_X = f$.

2. **Problema de operador**. Estudiar las propiedades de los operadores

$$T : \mathcal{F}(X, F) \to \mathcal{F}(E, F),$$

   tales que $Tf|_X = f$.

En esta tesis se abordó el trabajo de C. Fefferman [7], en el cual se resuelve el problema de traza para el espacio $C^{m-1,1}(E)$. Durante este trabajo, se estudiaron distintas técnicas, como los lemas de inducción, la descomposición de Calderón-Zygmund, el lema de rescalamiento y el control de polinomios. El interés en dominar tales técnicas radica en la amplia variedad de aplicaciones. Además, que el trabajo de C. Fefferman en esta dirección se basa en dichas técnicas.

Como resultado del estudio del teorema de extensión de Fefferman, se tienen los siguientes problemas:

1. Un análogo del teorema 1.1 para funciones $f : E \to H$, donde H es espacio de Hilbert.

2. El cálculo óptimo de la constante $k^\#$ en el teorema 1.1. En este trabajo se tiene la siguiente estimación

$$k^\# \leq (D + 1)^{3 \cdot 2^D},$$

   donde D es la dimensión de $\mathcal{P}$.

3. Estudiar el problema de extensión y traza para algún otro espacio de funciones, por ejemplo, el espacio $C^{m,\omega}(\mathbb{R}^n)$ que consta de funciones en $\mathbb{R}^n$ con derivadas de orden m y módulo de continuidad ω, o bien el espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ que consta de funciones en $L^p(\Omega)$ cuyas derivadas de orden m también son funciones en $L^p(\Omega)$, donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio.

Bibliografía

[1] E. Bierstone, P. Milman y W. Pawluki. *Differentiable fuctions defined in closed sets. A problem of Whitney*. Invent. Math. 151 (2003), pp 329-352.

[2] S. Bromberg y J. J. Rivaud. *Análisis diferencial*. Fondo de Cultura Económica, 1976.

[3] Y. Brudny y P. Shvartsman. *A linear extension operator for a space of smooth functions defined on closed subsets of* $\mathbb{R}^n$. Dokl. Akad. Nauk SSSR 280 (1985), pp 268-270.

[4] Y. Brudnyi y P. Shvartsman. *Generalizations of Whitney's extension theorem.* IMRN 3 (1994), pp 129-139.

[5] R. Coleman. *Calculus on normed vector spaces*. Springer, 2010.

[6] L. Evans y R. Gariepy. *Measure theory and fine propierties of functions*. Chapman and Hall, 2014.

[7] C. Fefferman. *A sharp form of Whitney's extension theorem*. Ann. of Mathematics 161 (2005), pp 509-577.

[8] C. Fefferman. *Interpolation and extrapolation of smooth functions by linear operators.* Rev Mat. Iberoamericana 21 (2005) No. 1, pp 313-348.

[9] C. Fefferman. *Whitney's extension theoren for* C^m. Ann. of Mathematics 164 (2006), pp 313-359.

[10] C. Fefferman. *Whitney's problems and interpolation of data.* Bull. AMS Vol. 46 No. 2 (2009), pp 207-220.

[11] G. Glaeser. *Etudes de Quelques Algebres Tayloriennes.* J. d'Analyse 6 (1958), pp 1-124.

[12] R. Webster. *Convexity*. Oxford University Press, 1994.

[13] H. Whitney. *Analytic extensions of differentiable fuctions defined in closed sets.* Trans. Amer. Math. Soc. 36 (1934), pp 63-89.

[14] H. Whitney. *Differentiable functions defined in closed sets I.* Trans. Amer. Math. Soc. 36 (1934), pp 369-387.