



Casa abierta al tiempo

**Acoplamiento no-mínimo
para campos de espín $3/2$
a partir de Relatividad
General Linealizada**

Tesis que presenta:

Víctor Manuel Villanueva Sandoval

para la obtención del grado de Maestro
en Ciencias, especialidad en Física

Noviembre, 1995

Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa
División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar a toda mi familia por el apoyo que me han brindado desde siempre. En particular quiero agradecer a mi esposa Rosy por todo su cariño, paciencia y comprensión durante los últimos años de mis estudios. Asimismo quiero agradecer a mis padres Nicanor y Ofelia y a mis hermanas Gabriela y Alejandra por todo el cariño y apoyo que he recibido por parte de ellos durante toda mi vida. También quiero agradecer el apoyo que he recibido por parte de mis asesores el Dr. Juan Antonio Nieto y el Dr. Octavio Obregón por sus continuas motivaciones a mi desarrollo como persona y como científico.

Por otro lado quiero hacer patente mi agradecimiento y mi reconocimiento a mis amigos, los señores Doctores José Socorro García, José Luis Lucio, Miguel Vargas y Mauro Napsuciale por sus continuas sugerencias y contribuciones a mi formación a lo largo de mis estudios de Maestría.

Reconocimientos

Quiero agradecer el apoyo económico recibido Durante mis estudios de Maestría por parte del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), así mismo al Sistema Nacional de Investigadores por haberme otorgado una beca como ayudante de Investigador Nacional Nivel III del Dr. Octavio José Obregón Díaz.

De la misma manera quiero agradecer al CONACyT y al Instituto de Física de la Universidad de Guanajuato (IFUG) que a través de sus proyectos de Investigación me han otorgado el apoyo económico necesario para realizar los viajes en los que tuve a bien participar en eventos científicos tanto nacionales como internacionales.

Quiero también agradecer al Personal de la División de Ciencias Básicas de la Universidad Iberoamericana Plantel León por su atención en brindarme trabajo de tiempo parcial, en particular al Maestro en Ciencias Juan Francisco Martínez, Director de la División.

Indice

INTRODUCCION		1
CAPITULO 1	Acoplamiento no-mínimo para espín $3/2$ de Gravedad Lineal	9
CAPITULO 2	Campo de espín $3/2$ y campo de Einstein lineal de Supergravedad $N=1$	21
CAPITULO 3	Interacción electromagnética para espín $3/2$ de Supergravedad $N=2$	26
CAPITULO 4	Interacción de Yang-Mills para espín $3/2$ de Supergravedad $N=4$	32
CONCLUSIONES		38
REFERENCIAS		42

Introducción

Las partículas elementales de espín $3/2$ no han sido descubiertas experimentalmente. No obstante, el interés teórico por estas partículas se ha visto reforzado por varias razones. Primero, la supersimetría necesariamente predice que la partícula asociada al gravitón (gravitino) tenga espín $3/2$. Cabe mencionar que la supersimetría se considera una teoría fundamental de la naturaleza que brinda una forma consistente de unificar campos bosónicos (espín entero) con campos fermiónicos (espín semientero). Segundo, la combinación de varios gravitinos permite unificar interacciones fundamentales, tales como la gravitación con electromagnetismo o con fuerzas electrodébiles o fuertes vía supergravedad extendida. También surgen gravitinos en teorías efectivas obtenidas de la teoría de supercuerdas. Por último, desde un punto de vista fenomenológico, es necesario buscar diferentes alternativas teóricas tendientes a verificar experimentalmente la existencia de tales partículas elementales de espín $3/2$.

Por otro lado, el acoplamiento mínimo para partículas de espín $1/2$ surge como una consecuencia de la invariancia local (de norma) de la teoría de Dirac. Tal acoplamiento mínimo es uno de los mayores logros de la teoría de Dirac para el estudio de partículas relativistas en interacción con el campo electromagnético. Otro logro importante de la teoría de Dirac es la predicción de la razón giro-magnética $g = 2$ para el electrón.

El estudio estándar de campos libres no masivos de espín $3/2$ se lleva a cabo mediante el formalismo de campo espinorial-vectorial de Rarita y Schwinger. Sin embargo se desconoce como es que estos campos interactúan con otros campos de norma, en particular se sabe que el acoplamiento con campo electromagnético estándar (acoplamiento mínimo) produce serias inconsistencias en las ecuaciones de campo. Así mismo surgen problemas de causalidad debido a la propagación de las señales a velocidades superlumínicas, lo cual contradice los postulados fundamentales de la relatividad especial.

En 1970 Weinberg encontró que al demandar que las amplitudes de dispersión para partículas de espín arbitrario en interacción con campo electromagnético tuvieran un buen comportamiento a altas energías es necesario que la razón giro-magnética de tales partículas tuviera el valor $g = 2$.

Siguiendo un desarrollo lagrangiano consistente al requisito de que $g = 2$, Ferrara *et al* encontraron que a nivel de árbol debía implementarse en el lagrangiano un término de interacción electromagnética dipolar. Como consecuencia de esto, las ecuaciones de campo debían contener tal término de interacción. De este modo modificaban el acoplamiento mínimo usual, apuntando hacia un acoplamiento electromagnético no-mínimo para campos de espín $3/2$. Debemos mencionar que la introducción del término dipolar en las ecuaciones de campo cancela las divergencias y los problemas de causalidad mencionados anteriormente.

Por otro lado, recientemente Nieto y Obregón desarrollaron una teoría para partículas clásicas supersimétricas de espín $3/2$ en analogía a la teoría de Galvao y Teitelboim para partículas clásicas supersimétricas de espín $1/2$. En su trabajo,

Nieto y Obregón demostraron que si las matrices γ que aparecen en las ecuaciones del campo de Rarita-Schwinger se interpretan como variables de Grassman (debido a sus propiedades de anticonmutación), entonces los paréntesis de Poisson de las constricciones asociadas a las ecuaciones de Rarita-Schwinger (R-S) en espacio tiempo plano producen las ecuaciones de Einstein completas linealizadas (sin imponer condiciones de norma sobre el campo gravitacional lineal).

Como es de esperarse, si las matrices γ se preservan en el operador diferencial del campo de Rarita-Schwinger se obtiene el mismo resultado, pero en lugar de usar paréntesis de Poisson debemos usar anticonmutadores de los operadores.

En el resultado de Nieto y Obregón están involucradas todas las componentes de las ecuaciones de Rarita-Schwinger, las cuales reproducen el conjunto completo de ecuaciones de relatividad general linealizada. Debe notarse que este resultado es una analogía con el resultado de supergravedad canónica, en la cual la construcción de transformaciones supersimétricas es la raíz cuadrada de la construcción de traslaciones. Sin embargo en esta última formulación el cuadrado de las constricciones supersimétricas involucra sólo una parte de las ecuaciones dinámicas de relatividad general, ya que la construcción supersimétrica representa sólo una componente de las ecuaciones de R-S.

El resultado del trabajo de Nieto y Obregón muestra por lo tanto que las ecuaciones de campo de R-S son la raíz cuadrada de las ecuaciones de campo de relatividad general linealizada en el mismo sentido que la ecuación de Dirac es la raíz cuadrada de la ecuación de Klein-Gordon. De este modo, siguiendo esta analogía y sabiendo como es que la gravedad acopla con cualquier tipo de materia

o campo de norma, es de esperarse que la relatividad general nos dicte cómo debe ser el acoplamiento entre el campo de espín $3/2$ y los campos de norma o materia, particularmente el campo electromagnético y el campo de Yang-Mills.

Las observaciones anteriores son la principal fuente de motivación para este trabajo, ya que en principio podemos agregar un tensor de energía momento al lado derecho de las ecuaciones de campo de Einstein e investigar su raíz cuadrada en una manera similar a la desarrollada por Nieto y Obregón. Como resultado de este proceso se espera obtener ecuaciones de Rarita-Schwinger modificadas. En efecto, estas ecuaciones deben incluir los términos de interacción con campos de materia y campos de norma. Así, uno esperaría que estos términos de interacción nos digan cómo es que debe ser el acoplamiento de los campos de espín $3/2$ con cualquier tipo de materia o campos de norma.

El plan de la obra es el siguiente: En el Capítulo 1 generalizamos el operador hamiltoniano que representa las ecuaciones de relatividad general linealizada al incluir tensores de energía momento consistentes con la estructura matemática de este hamiltoniano para campo electromagnético así como para campos de Yang-Mills. Basándonos en la forma particular de estos términos extra de materia en las ecuaciones de campo linealizadas de Einstein buscamos los correspondientes términos extra en las ecuaciones de Rarita-Schwinger. Así, cuando elevemos al cuadrado tales términos de interacción en las ecuaciones de R-S obtenemos en particular el tensor de energía momento que se implementó originalmente. Procediendo de este modo, encontramos la interacción para el campo de espín $3/2$ con campo electromagnético y campo de Yang-Mills.

Como ya se ha mencionado anteriormente, cuando la ecuación de Dirac se eleva al cuadrado se obtiene la ecuación de Klein-Gordon libre. Sin embargo introduciendo el acoplamiento mínimo en la ecuación de Dirac se obtiene no sólo la ecuación de Klein-Gordon sino además el cuadrado del campo electromagnético y términos de interacción que nos dan el acoplamiento del momento magnético del electrón con el campo electromagnético aplicado (términos de acoplamiento espín-campo electromagnético). En analogía a lo anterior es de esperarse que al elevar al cuadrado las ecuaciones de Rarita-Schwinger modificadas resulten no sólo las ecuaciones de Einstein linealizadas sino además potenciales que incluyen un término de interacción análogo al término de acoplamiento espín-campo de la teoría de Dirac. De modo que el cuadrado de las ecuaciones de Rarita-Schwinger modificadas nos da un hamiltoniano generalizado que incluye todos los términos de interacción anteriormente descritos.

El resultado de Nieto y Obregón es que las ecuaciones de R-S están relacionadas en una manera directa con la gravedad linealizada en la misma forma en que la ecuación de Dirac está relacionada con la ecuación de Klein-Gordon. Por otro lado, las ecuaciones de espín 3/2 juegan papeles análogos a los de las supercargas en la cosmología cuántica, por lo que es natural pensar que la Supergravedad puede ser útil en nuestro formalismo, ya que algunos modelos de esta teoría incorporan naturalmente el campo gravitacional, el campo de espín 3/2 y los campos de norma electromagnético y de Yang-Mills.

El resultado más importante de nuestra propuesta es que la interacción de campos de R-S con campo electromagnético o campo de Yang-Mills es de la forma $F_{\mu\nu} + \gamma_5 \tilde{F}_{\mu\nu}$ donde $F_{\mu\nu}$ representa el tensor de campo electromagnético o el tensor

de Yang-Mills y $\tilde{F}_{\mu\nu}$ es el dual del campo en cuestión.

En vista de los argumentos anteriores es razonable que al linealizar la supergravedad seremos capaces de obtener el mismo tipo de resultados que se obtienen en el análisis de la gravedad lineal en los casos sin materia y con materia presente. El caso sin materia presente corresponderá a Supergravedad N=1 linealizada y será estudiado en el Capítulo 2 en analogía al trabajo de Nieto y Obregón. A la vez, mostramos como llevar a cabo la linealización de tal teoría, lo cual será útil en los siguientes capítulos.

En el Capítulo 3 linealizamos Supergravedad N=2, como se sabe, esta teoría unifica el campo de relatividad general (gravitón), el campo electromagnético (fotón) y dos campos de Rarita-Schwinger (los compañeros supersimétricos del gravitón y el fotón). Al elevar al cuadrado las ecuaciones para los campos de R-S obtenidas de esta teoría llegamos al mismo resultado que se obtuvo a partir de gravedad lineal al implementar el tensor de energía momento generalizado de campo electromagnético. Es decir, obtenemos un término de interacción idéntico al obtenido vía relatividad general linealizada con materia. Esta interacción nos da un término exactamente igual al obtenido por Ferrara *et al* quienes aplicaron procedimientos totalmente distintos.

Es conveniente hacer incapié en que la teoría propuesta en el Capítulo 1 sólo requiere de un campo de R-S, en contraste con el resultado de Supergravedad N=2 en la cual surgen dos gravitinos (campos de R-S) acoplados con el campo electromagnético. En este sentido, es posible deducir que nuestra propuesta es más simple que el resultado obtenido vía Supergravedad N=2 y puede resultar

más útil desde un punto de vista fenomenológico.

La interacción de campos de Yang-Mills con campos de Rarita-Schwinger se investiga en el Capítulo 4 al linealizar Supergravedad N=4. En este caso se complican aún más las expresiones dado que incrementa el número de campos interactuantes de Rarita-Schwinger con otro tipo de campos. Esto se debe a que los campos de R-S interactúan con otros campos, tales como campos escalares, pseudoescalares, vectoriales, pseudovectoriales y tensoriales. Lo anterior pone de manifiesto nuevamente que nuestra formulación es mucho más sencilla y clara que el tratamiento obtenido por medio de las teorías de supergravedad. Al imponer que sólo interactúen los 4 campos de Rarita-Schwinger con los campos de Yang-Mills en las ecuaciones obtenidas del lagrangiano de Supergravedad N=4, obtenemos la interacción para los campos de R-S con campos de Yang-Mills. Tal interacción es en esencia una generalización de la que se obtiene por medio de nuestra propuesta desarrollada en el Capítulo 1, que consiste en agregar a las ecuaciones de relatividad general linealizada un tensor de energía momento de Yang-Mills.

Por otra parte, es importante subrayar que la estructura de los términos de interacción $F_{\mu\nu} + \gamma_5 \tilde{F}_{\mu\nu}$ que obtuvimos en el Capítulo 1 vía el mecanismo de raíz cuadrada para los campos de norma electromagnético y de Yang-Mills es consistente con la interacción obtenida vía supergravedad extendida N=2 y N=4 respectivamente.

En resumen, el hecho de que las ecuaciones de Rarita-Schwinger son la raíz cuadrada de las ecuaciones de Einstein linealizadas nos permitió obtener un acoplamiento no-mínimo para partículas de espín 3/2 con los campos de norma

electromagnético y de Yang-Mills. Este hecho es reforzado cuando linealizamos Supergravedad y analizamos las constricciones que resultan de tal linealización. Las ecuaciones de Rarita-Schwinger obtenidas de supergravedad son muy similares a las que obtenemos por medio de tomar la raíz cuadrada de la gravedad linealizada que obtenemos en el Capítulo 2. Sin embargo, estas expresiones son mucho más complicadas debido a que la aparición de más campos complica la estructura matemática de las expresiones.

Debemos comentar que quizá la relación existente entre las ecuaciones del campo de Rarita-Schwinger y las ecuaciones de relatividad general linealizada no había sido descubierta a partir de supergravedad debido a su complicada estructura cuando incluimos materia y también debido a la necesaria linealización de las teorías de supegravedad extendida.

Por último, dado que la gravedad acopla con cualquier tipo de materia, es de esperar que el formalismo propuesto en el Capítulo 1 nos permita obtener el acoplamiento de los campos de R-S con cualquier tipo de materia o campos de norma. Además los resultados de este formalismo serán más simples que aquellos que pudieran obtenerse vía supergravedades extendidas.

Más aún, siguiendo el mecanismo propuesto es posible construir modelos particulares que involucren interacciones de interés fenomenológico.

Capítulo 1

Acoplamiento No-Mínimo para Espín 3/2 de Gravedad Linealizada

En este capítulo hacemos uso del hecho de que el campo gravitacional se acopla con cualquier tipo de materia o campos de norma. Esto es realizado por medio de agregar un tensor de energía momento al operador hamiltoniano que representa las ecuaciones de relatividad general linealizada. Dicho de otra forma, agregamos un potencial al hamiltoniano de la gravedad linealizada.

En particular tomando en cuenta la estructura del hamiltoniano postulamos la estructura matemática de los tensores de energía momento para los casos del campo electromagnético y del campo de Yang-Mills. De acuerdo a la implementación de estos tensores de energía momento obtenemos, aplicando el método de raíz cuadrada, las correspondientes ecuaciones que describen campos de espín 3/2 en interacción con el campo correspondiente al tensor de energía momento implementado.

Cabe mencionar que nuestro formalismo es consistente con otros formalismos, ya que obtenemos el mismo término de interacción para partículas de espín 3/2 con campos electromagnéticos que se ha obtenido requiriendo que la interacción entre estos campos tenga buen comportamiento a altas energías y que no tenga inconsistencias físicas tales como la propagación superlumínica de las señales.

Capítulo 1

Acoplamiento no-mínimo para espín 3/2 de Gravedad Lineal

La teoría cuántica relativista para partículas de espín 1/2 queda descrita por medio de la teoría de Dirac. Tal teoría parte del lagrangiano [1,2]

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(x)(\gamma^\mu \hat{p}_\mu + m)\Psi(x), \quad (1.1)$$

donde γ_μ son las matrices gamma de Dirac 4×4 , $\hat{p}_\mu = -i\partial_\mu$, m es la masa de la partícula, $\Psi(x)$ es la función de onda espinorial de cuatro componentes y $\bar{\Psi}(x) = \Psi(x)^\dagger \gamma_0$. En estas expresiones hemos tomado la convención $\hbar = c = 1$ y $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, +, +)$.

El lagrangiano (1.1) es invariante bajo transformaciones globales (donde los parámetros de transformación no dependen de las coordenadas). Entre éstas se encuentran las transformaciones de Lorentz (rotaciones en el espacio tetra-dimensional). En particular para los espinores $\Psi(x)$ de Dirac, tenemos que la representación espinorial del grupo de Lorentz conduce a las transformaciones de la forma

$$\Psi'(x') = \exp(i\epsilon_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu})\Psi(x), \quad (1.2)$$

donde $\epsilon_{\mu\nu}$ es el parámetro de rotación del eje x_μ al eje x_ν y $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2i}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)$, ver referencia [2].

De este modo, tomando en cuenta que $\hat{p}_\mu = -i\partial_\mu$, puede demostrarse que las expresiones

$$\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\Psi(x),$$

y

$$\bar{\Psi}(x)\Psi(x),$$

son invariantes bajo la transformación (1.2). Por lo tanto, el lagrangiano (1.1) es invariante bajo transformaciones de Lorentz.

Considérese la transformación unitaria (de fase)

$$\Psi'(x') = \exp i\alpha\Psi(x), \quad (1.3)$$

donde α es la fase o el parámetro de transformación, entonces nuevamente las expresiones

$$\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\Psi(x),$$

y

$$\bar{\Psi}(x)\Psi(x),$$

son invariantes y consecuentemente lo es el lagrangiano (1.1).

Existe otro tipo de invariancia del lagrangiano (1.1), ésta es la invariancia de norma o local. En este tipo de transformaciones se requiere que los parámetros de transformación dependan de las coordenadas. Sin embargo cuando este tipo de transformaciones se lleva a cabo, surgen campos que compensan la acción del requerimiento local, estos campos reciben el nombre de campos de calibración o campos de norma.

En el caso particular en que hacemos una transformación de fase (aplicamos el grupo $U(1)$) y requerimos que el parámetro α dependa de las coordenadas x^μ , se obliga la introducción del campo electromagnético A_μ como campo de norma. Esto es explícito cuando en la ecuación de Dirac

$$(\gamma^\mu \hat{p}_\mu + m)|\Psi\rangle = 0, \quad (1.4)$$

se lleva a cabo el acoplamiento mínimo vía la sustitución

$$\hat{p}_\mu \rightarrow \hat{p}_\mu - eA_\mu.$$

De este modo la ecuación de Dirac para una partícula de masa m , espín $1/2$ y carga e en interacción con el campo electromagnético queda dada por

$$(\gamma^\mu (\hat{p}_\mu - eA_\mu) + m)|\Psi\rangle = 0. \quad (1.5)$$

Uno de los logros más importantes de la sustitución de acoplamiento mínimo es que la ecuación (1.5) predice una razón giromagnética $g = 2$ para el electrón, lo cual está en plena concordancia con el experimento, según la teoría clásica de Pauli [3].

Sin embargo, cuando el acoplamiento mínimo se introduce en las ecuaciones que describen partículas de espín mayor que $1/2$ surgen inconsistencias físicas. Este problema ha estado con nosotros por un largo tiempo, Fierz y Pauli [4] habían estudiado ya este problema en 1939.

Las ecuaciones que describen partículas elementales de espín $3/2$ se obtienen a partir del lagrangiano de Rarita-Schwinger [5, 6]

$$L_{RS} = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\Psi}_\mu(x)\gamma_5\gamma_\nu(\partial_\rho + \frac{im}{2}\gamma_\rho)\Psi_\sigma(x). \quad (1.6)$$

Este lagrangiano conduce a las ecuaciones de campo

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_5\gamma_\nu(\partial_\rho + \frac{im}{2}\gamma_\rho)\Psi_\sigma(x) = 0. \quad (1.7)$$

En el caso de campos no masivos, la ecuación (1.7) se reduce a

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_5\gamma_\nu\partial_\rho\Psi_\sigma = 0. \quad (1.8)$$

Debido a las invariancias de norma del lagrangiano (1.6) con $m = 0$ se pueden fijar las constricciones

$$\gamma^\mu\Psi_\mu(x) = 0, \quad (1.9a)$$

$$\partial^\mu\Psi_\mu(x) = 0. \quad (1.9b)$$

La primera de estas constricciones anula la parte de espín 1/2 de las componentes del vector espinor Ψ_μ . La segunda de ellas es una consecuencia directa de la primera al insertarse en (1.7).

Velo y Zwanzinger [7] demostraron que para partículas de espín mayor que 1/2 la inserción de acoplamiento mínimo en las ecuaciones (1.7)-(1.9b) produce incompatibilidad en las ecuaciones de movimiento, así como inconsistencias físicas, entre las que resalta la propagación de las señales a velocidades superlumínicas.

En este trabajo, usando el formalismo de partículas clásicas supersimétricas de espín 3/2 de Nieto y Obregón [8] abordamos el problema del acoplamiento de campos de espín 3/2. En su trabajo, Nieto y Obregón demostraron que siguiendo un análisis similar al desarrollado por Galvao y Teitelboim [9] para partículas supersimétricas de espín 1/2, las ecuaciones del campo de Rarita-Schwinger resultan ser la raíz cuadrada de las ecuaciones del campo de relatividad general linealizada.

Es el objetivo de este trabajo extender el resultado de Nieto y Obregón al implementar un tensor de energía momento de materia (campos de norma) a las ecuaciones de relatividad general linealizada. Así, sabiendo cómo el campo gravitacional se acopla con cualquier campo de norma y aplicando un procedimiento de raíz cuadrada similar al desarrollado por Nieto y Obregón al sistema de ecuaciones de relatividad general linealizada mas el tensor de energía momento implementado encontramos el acoplamiento del campo de R-S con el campo correspondiente al tensor de energía momento implementado.

Explícitamente, si a la ecuación de R-S (1.8) asociamos el operador

$$\hat{S}^{\alpha\mu} \equiv \epsilon^{\alpha\mu\rho\sigma} \hat{\theta}_\rho \hat{p}_\sigma = 0, \quad (1.10)$$

donde $\hat{\theta}_\rho = \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_5 \gamma_\rho$ y $\hat{p}_\sigma = -i\partial_\sigma$, entonces usando los anticonmutadores

$$\{\hat{\theta}_\mu, \hat{\theta}_\nu\} = \eta_{\mu\nu}, \quad (1.11)$$

tenemos el álgebra

$$\{\hat{S}_\mu^\alpha, \hat{S}_\nu^\beta\} = \hat{\mathcal{H}}_{\mu\nu}^{\alpha\beta}, \quad (1.12)$$

donde

$$\hat{\mathcal{H}}_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = \epsilon_\mu^{\alpha\rho\sigma} \epsilon_\nu^{\beta\lambda\gamma} \eta_{\rho\lambda} \hat{p}_\sigma \hat{p}_\gamma, \quad (1.13)$$

es el operador “hamiltoniano” que actua sobre el campo gravitacional lineal $h_{\alpha\beta}$ en gravedad linealizada estándar, *i. e.*,

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_{\mu\nu}^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} &= (\eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} p_\lambda p^\lambda - \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta p_\lambda p^\lambda \\ &\quad - \eta_{\mu\nu} p^\alpha p^\beta - \eta^{\alpha\beta} p_\mu p_\nu + \delta_\mu^\alpha p^\beta p_\nu + \delta_\nu^\alpha p^\beta p_\mu) h_{\alpha\beta} = 0, \end{aligned} \quad (1.14)$$

Por lo anterior es razonable suponer que a nivel del hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ podemos introducir un tensor de energía momento generalizado $T_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ a manera de potencial

que describa campos de materia o de norma. Tal procedimiento nos permitirá obtener la raíz cuadrada del “hamiltoniano total” $H_t = \text{“hamiltoniano + potencial”}$ $= \hat{\mathcal{H}}_{\mu\nu}^{\alpha\beta} + \mathcal{T}_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ por medio de anticonmutadores, la cual nos dará las ecuaciones de R-S conteniendo la información del acoplamiento con el campo de norma descrito por el potencial implementado.

El tensor de energía momento $\mathcal{T}_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ a ser implementado debe satisfacer varios requisitos: primero, debe ser un tensor de 4^o rango; segundo, debe tener unidades de energía (las mismas que p^2 en $\hat{\mathcal{H}}_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$); y tercero, debe contener símbolos de Levi-Civita como en $\hat{\mathcal{H}}_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$. El último requisito impuesto sobre $\mathcal{T}_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ es con objeto de poder factorizar los símbolos de Levi-Civita en el sistema total $\hat{\mathcal{H}}_{\mu\nu}^{\alpha\beta} + \mathcal{T}_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ y de esa manera nos permita obtener la raíz cuadrada del hamiltoniano total.

En particular, para el campo electromagnético encontramos que hay dos tensores a nuestra disposición; el tensor de campo electromagnético $F_{\mu\nu}$ y su dual. Sabemos que con ellos es posible construir expresiones con unidades de energía para poder tener un término de potencial. Por otro lado, como se mencionó anteriormente, la estructura matemática de la ecuación (1.13) nos obliga a acompañar los términos F^2 con dos símbolos de Levi-Civita. De modo que el tensor de energía momento que satisface los requisitos anteriores debe ser de la forma,

$$\mathcal{T}_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \sim \epsilon_{\mu}^{\alpha}{}^{\rho\sigma} \epsilon_{\nu}^{\beta}{}^{\lambda\gamma} (A F_{\rho\sigma} F_{\lambda\gamma} + B F_{\rho\sigma} \tilde{F}_{\lambda\gamma} + C \tilde{F}_{\rho\sigma} \tilde{F}_{\lambda\gamma}), \quad (1.15)$$

donde

$$F_{\rho\sigma} = \partial_{\rho} A_{\sigma} - \partial_{\sigma} A_{\rho}, \quad (1.16)$$

es el tensor de campo electromagnético usual y $\tilde{F}_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \epsilon_{\rho\sigma\mu\nu} F^{\mu\nu}$. A, B y C son matrices constantes 4×4 (aquí estamos anticipando el hecho de poder aplicar los operadores sobre espinores vectoriales con 4 índices espinoriales).

Como puede apreciarse, la estructura matemática del tensor de energía momento anterior es análoga a la de (1.13), así que el sistema combinado de expresiones nos permite factorizar los símbolos de Levi-Civita en el cálculo de la raíz cuadrada del hamiltoniano generalizado conteniendo la parte libre $\hat{\mathcal{H}}_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ y la parte de potencial $\mathcal{T}_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$.

La raíz cuadrada de este hamiltoniano mas términos de potencial debe darnos la ecuación de R-S con el término de acoplamiento. Es de esperar que cuando elevemos al cuadrado esta ecuación de R-S modificada, debe darnos el hamiltoniano completo que resultará en el hamiltoniano libre $\hat{\mathcal{H}}_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$, el término de potencial $\mathcal{T}_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$, y términos extra de interacción como sucede en el caso de las ecuaciones de Dirac y Klein-Gordon.

Después de factorizar los tensores de Levi-Civita en el hamiltoniano total, H_t observamos que el término de acoplamiento debe ser a nivel de raíz cuadrada de la forma

$$F_{\mu\nu} + \Gamma \tilde{F}_{\mu\nu}, \quad (1.17)$$

donde Γ puede ser en general un producto de matrices de Dirac. Por conveniencia tomaremos esta Γ como γ_5 . Esto lo sugiere el álgebra con que estamos trabajando [8] y al hecho de que cuando elevamos al cuadrado el término de interacción (1.17), esperamos obtener directamente términos cuadráticos en el campo electromagnético y su dual.

Usando (1.17) en las ecuaciones de campo de R-S encontramos que el acoplamiento debe estar dado por

$$\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} [\hat{\theta}_\mu \hat{p}_\nu + g_1 \{ \tilde{F}_{\mu\nu} + \gamma_5 F_{\mu\nu} \}] \Psi_\beta = 0, \quad (1.18)$$

donde hemos factorizado el símbolo de Levi-Civita y hemos introducido una constante de acoplamiento g_1 que debe estar relacionada con la constante gravitacional κ , puesto que ésta última acompaña al tensor de energía momento que hemos implementado en el hamiltoniano de relatividad general linealizada.

Como se mencionó anteriormente, es de esperarse que el cuadrado de la ecuación (1.18) deba darnos no sólo el hamiltoniano generalizado; el cual contiene no sólo la parte libre $\hat{\mathcal{H}}_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ mas la parte de potencial $\mathcal{T}_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$, sino además términos extra de interacción $\hat{\mathcal{I}}_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$.

El hamiltoniano libre es el mismo que el de la ecuación (1.13)

$$\hat{\mathcal{H}}_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = \epsilon_{\mu}^{\alpha} \epsilon_{\nu}^{\rho\sigma} \epsilon^{\beta}{}_{\lambda\gamma} \eta_{\rho\lambda} \hat{p}_{\sigma} \hat{p}_{\gamma}.$$

El tensor de energía momento está dado por

$$\mathcal{T}_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = 2 g_1^2 \epsilon_{\mu}^{\alpha} \epsilon_{\nu}^{\rho\sigma} \epsilon^{\beta}{}_{\lambda\gamma} (F_{\rho\sigma} F_{\lambda\gamma} + \tilde{F}_{\rho\sigma} \tilde{F}_{\lambda\gamma} + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\theta}_5 (F_{\rho\sigma} \tilde{F}_{\lambda\gamma} + \tilde{F}_{\rho\sigma} F_{\lambda\gamma})), \quad (1.19)$$

mientras que los términos extra de interacción $\hat{\mathcal{I}}_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ están dados por

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{I}}_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = & g_1 (\hat{\theta}_{\rho} (-i \tilde{F}_{\lambda\gamma,\sigma} + F_{\lambda\gamma} \hat{p}_{\sigma} - \sqrt{2} i \hat{\theta}_5 F_{\lambda\gamma,\sigma}) \\ & + \hat{\theta}_{\lambda} (-i \tilde{F}_{\rho\sigma,\gamma} + F_{\rho\sigma} \hat{p}_{\gamma} - \sqrt{2} i \hat{\theta}_5 F_{\rho\sigma,\gamma})). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Aquí hemos hecho la identificación $\hat{\theta}_5 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_5$ y hemos usado el álgebra de $\hat{\theta}_5$:

$$\{\hat{\theta}_5, \hat{\theta}_5\} = 1. \quad (1.21)$$

La aparición de las relaciones de conmutación entre $\hat{p}_{\sigma}$ y $F_{\lambda\gamma}$ en (1.20) son el análogo al término extra que aparece cuando la ecuación de Dirac con acoplamiento

mínimo (1.5) se eleva al cuadrado vía los anticonmutadores (1.11) y (1.21). Este término nos da la interacción de espín-campo electromagnético para el momento magnético de las partículas de espín 1/2. Esta analogía nos lleva a problemas interesantes relativos a la interpretación física del acoplamiento y es tema de trabajo para subsecuentes investigaciones, donde debemos buscar un valor de la razón giromagnética de las partículas de espín 3/2.

Es interesante notar que $\mathcal{T}_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ puede ser interpretado como parte de un tensor de energía momento total el cual debe contener también la parte de interacción $\hat{\mathcal{T}}_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$, ésto sugiere que el tensor de energía momento implementado debe contener tales términos de interacción.

Es muy importante mencionar que el término de acoplamiento (1.17) deducido vía relatividad lineal ha sido obtenido por Ferrara *et al* [10] por un procedimiento distinto al nuestro. Este procedimiento es un procedimiento lagrangiano, el cual requiere $g = 2$ a nivel de árbol en las interacciones de partículas de espín 3/2 con campo electromagnético. La razón de este requisito es que las amplitudes de dispersión tengan un buen comportamiento a altas energías para partículas de espín arbitrario, ésto fue deducido por Weinberg [11] en 1970.

Una característica sumamente importante de este término de interacción obtenido es que evita el mal comportamiento a altas energías de las interacciones de partículas de espín 3/2. Otra característica de este término es que además previene la propagación superlumínica de las señales, esto ha sido mostrado por Ferrara *et al* [10] usando un análisis similar al que usaron Velo y Zwanzinger [7].

Ahora estamos en posición de estudiar el acoplamiento de campos de R-S con otro campo de norma interesante: el campo no-abeliano de Yang-Mills. Tal campo de norma surge como consecuencia de requerir que el lagrangiano (1.1) sea invariante bajo la acción del grupo $SU(2)$. Es importante mencionar que el espinor $\Psi(x)$ debe representar un isodoblete tal como el sistema protón-neutrón, *i. e.* $\Psi(x) = \begin{pmatrix} p(x) \\ n(x) \end{pmatrix}$.

La contribución al lagrangiano de Dirac (1.1) de un campo no-abeliano de Yang-Mills está dada por el tensor

$$A_{\rho\sigma}^k = \partial_\rho A_\sigma^k - \partial_\sigma A_\rho^k + f^{ijk} A_\rho^i A_\sigma^j, \quad (1.22)$$

donde k es el índice interno del campo, $A_{\rho\sigma}^k$ es el campo de Yang-Mills en sí y f^{ijk} son las constantes de estructura del campo asociadas a un grupo compacto G . Puesto que en general se manejan simetrías internas de los campos en consideración, tendremos que el tensor de Yang-Mills estará dado por

$$F_{\rho\sigma} = \alpha^k A_{\rho\sigma}^k, \quad (1.23)$$

donde las α 's son las matrices generadoras de la simetría interna bajo consideración.

De este modo, en analogía al caso electromagnético implementamos un tensor de energía momento como potencial en el hamiltoniano de relatividad general linealizada de la forma

$$\mathcal{T}_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \sim \epsilon_\mu^{\alpha\rho\sigma} \epsilon_\nu^{\beta\lambda\gamma} (A F_{\rho\sigma} F_{\lambda\gamma} + B F_{\rho\sigma} \tilde{F}_{\lambda\gamma} + C \tilde{F}_{\rho\sigma} \tilde{F}_{\lambda\gamma}), \quad (1.24)$$

donde nuevamente A, B y C son matrices constantes 4×4 . Nuestra interacción resultante será análoga a (1.17), ésto es

$$F_{\mu\nu} + \gamma_5 \tilde{F}_{\mu\nu}, \quad (1.25)$$

y por lo tanto el acoplamiento a nivel de ecuaciones de R-S será

$$\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}[\hat{\theta}_\mu \hat{p}_\nu + g_2\{\tilde{F}_{\mu\nu} + \gamma_5 F_{\mu\nu}\}] = 0, \quad (1.26)$$

donde también g_2 es una constante de acoplamiento que debe estar relacionada con la constante gravitacional κ .

Siguiendo el mismo procedimiento aplicado anteriormente para encontrar el hamiltoniano generalizado correspondiente. Encontramos en este caso que los términos de potencial $\mathcal{T}_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ y de interacción $\hat{\mathcal{I}}_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ resultan ser esencialmente los mismos que en el caso electromagnético, sólo es necesario reemplazar g_1 por g_2 y el tensor de campo electromagnético (1.16) por el tensor de campo de Yang-Mills (1.23), ésto es

$$\mathcal{T}_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = 2g_2^2 \epsilon_\mu^{\alpha\rho\sigma} \epsilon_\nu^{\beta\lambda\gamma} (F_{\rho\sigma} F_{\lambda\gamma} + \tilde{F}_{\rho\sigma} \tilde{F}_{\lambda\gamma} + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\theta}_5 (F_{\rho\sigma} \tilde{F}_{\lambda\gamma} + \tilde{F}_{\rho\sigma} F_{\lambda\gamma})), \quad (1.27)$$

y

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{I}}_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = & g_2 (\hat{\theta}_\rho (-i \tilde{F}_{\lambda\gamma,\sigma} + F_{\lambda\gamma} \hat{p}_\sigma - \sqrt{2} i \hat{\theta}_5 F_{\lambda\gamma,\sigma}) \\ & + \hat{\theta}_\lambda (-i \tilde{F}_{\rho\sigma,\gamma} + F_{\rho\sigma} \hat{p}_\gamma - \sqrt{2} i \hat{\theta}_5 F_{\rho\sigma,\gamma})). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Nótese que el índice interno k de (1.22) no aparece en estas expresiones, ya que ha sido absorbido en (1.23).

Al igual que para el caso electromagnético, los términos de acoplamiento de espín-campo para el campo de Yang-Mills son materia de futuras investigaciones.

Capítulo 2

Campo de espín $3/2$ y campo de Einstein lineal de Supergravedad $N=1$

En este capítulo demostramos que Supergravedad linealizada $N=1$ conduce a los mismos resultados obtenidos por Nieto y Obregón y al mismo tiempo mostramos como llevar a cabo la linealización de la teoría, lo cual será usado en los capítulos posteriores. Nieto y Obregón mostraron que las ecuaciones de Rarita-Schwinger son la raíz cuadrada de las ecuaciones de Einstein linealizadas. Esto es, cuando asociamos a las ecuaciones de Rarita-Schwinger operadores diferenciales, obtenemos como cuadrado de ellos el operador que representa las ecuaciones de la gravedad linealizada.

Es conveniente mencionar que Supergravedad $N=1$ no tiene campos que describan interacción con materia y los únicos campos interactuantes son el campo gravitacional lineal y el campo de Rarita-Schwinger.



Capítulo 2

Campo de espín 3/2 y campo de Einstein lineal de Supergravedad N=1

El objetivo principal de este capítulo es mostrar que el formalismo desarrollado por Nieto y Obregón [8] para partículas de espín 3/2 puede ser también obtenido al linealizar Supergravedad $N = 1$.

Es importante mencionar que el hecho de que las constricciones asociadas a las ecuaciones de R-S sean la raíz cuadrada de la gravedad linealizada es un resultado análogo al resultado de supergravedad canónica mostrado por Teitelboim [12] y Tabenski y Teitelboim [13], donde la constricción de transformaciones supersimétricas es la raíz cuadrada de la constricción de traslaciones de la relatividad general canónica.

La formulación canónica de la supergravedad se puede escribir en forma hamiltoniana mediante

$$H = \int d^3x (V_0^a \mathcal{H}_a + \frac{1}{2} \omega_{0ab} \mathcal{J}^{ab} + \bar{\Psi}_0 \mathcal{S}), \quad (2.1)$$

donde V_0^a , ω_{0ab} y $\bar{\Psi}_0$ son multiplicadores de Lagrange y $\mathcal{H}_a$ son los generadores de traslaciones, $\mathcal{J}^{ab}$ son los generadores de rotaciones y $\mathcal{S}$ son los generadores de las transformaciones supersimétricas y el álgebra de éstas variables está dado por

$$\begin{aligned}
 \{\mathcal{S}(x), \bar{\mathcal{S}}(x')\} &= \delta(x, x') \gamma^a \mathcal{H}_a, \\
 [\mathcal{S}(x), \mathcal{H}_c(x')] &= \frac{1}{2} \delta(x, x') \Sigma_{cab} \mathcal{J}^{ab}, \\
 [\mathcal{S}(x), \mathcal{J}^{ab}(x')] &= -\delta(x, x') \sigma^{ab} \mathcal{S}, \\
 [\mathcal{H}_a(x), \mathcal{H}_b(x')] &= \delta(x, x') \left(\frac{1}{2} \Omega_{abcd} \mathcal{J}^{cd} + \bar{H}_{ab} \mathcal{S} \right), \\
 [\mathcal{H}_c(x), \mathcal{J}^{ab}(x')] &= \delta(x, x') (\delta_c^b \mathcal{H}^a - \delta_c^a \mathcal{H}^b), \\
 [\mathcal{J}^{ab}(x), \mathcal{J}^{cd}(x')] &= \delta(x, x') (\eta^{ac} \mathcal{J}^{bd} - \eta^{bc} \mathcal{J}^{ad} + \eta^{bd} \mathcal{J}^{ac} - \eta^{ad} \mathcal{J}^{bc}),
 \end{aligned}$$

donde Σ_{cab} , Ω_{abcd} y $\bar{H}_{ab}$ juegan el papel de términos de curvatura.

Como puede apreciarse, en esta formulación la constricción de transformaciones supersimétricas es la raíz cuadrada de sólo una parte de las ecuaciones de relatividad general, en esencia ésto es una consecuencia de que la constricción supersimétrica $\mathcal{S}$ es la ecuación cero de Rarita-Schwinger. En el resultado de Nieto y Obregón, las constricciones supersimétricas contienen todas las ecuaciones de R-S, por lo cual al elevar al cuadrado tal constricción, obtenemos el conjunto completo de ecuaciones de relatividad general linealizada.

Comenzemos usando el lagrangiano para Supergravedad N=1 dado en la referencia [14]

$$\mathcal{L} = -\frac{e}{2} \mathcal{R} - \frac{1}{2} \bar{\Psi}_\mu \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_5 \gamma_\nu D_\rho \Psi_\sigma, \quad (2.2)$$

donde $e = \det e_\mu^m$ es el determinante de la tétrada, $\mathcal{R}$ es la curvatura, Ψ_μ es el campo del gravitino (espín 3/2), y D_ρ es la derivada covariante que incluye la conexión de espín.

Linealizemos las ecuaciones obtenidas a partir del lagrangiano (2.2) eliminando términos cuadráticos y potencias mayores de Ψ así como términos de

orden uno en $h_{\alpha\beta}$ en la conexión de espín que está contenida en D_ρ que a su vez es aplicada sobre Ψ . Explícitamente, la derivada covariante está dada por

$$D_\rho \Psi_\sigma = (\partial_\rho + \frac{1}{2} \omega_\rho^{mn} \sigma_{mn}) \Psi_\sigma, \quad (2.3)$$

donde la conexión de espín está dada por

$$\omega_{\rho mn} = \omega_{\rho mn}(\epsilon) + \frac{\kappa^2}{4} (\bar{\Psi}_\rho \gamma_m \Psi_n - \Psi_\rho \gamma_n \Psi_m + \Psi_m \gamma_\mu \Psi_n), \quad (2.4)$$

y $\omega_{\rho mn}(\epsilon)$ es de orden $h_{\alpha\beta}$, de modo que a orden lineal $D_\rho \rightarrow \partial_\rho$.

Después de haber hecho la linealización, encontramos que las ecuaciones de R-S lineales son

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_5 \gamma_\nu \partial_\rho \Psi_\sigma = 0. \quad (2.5)$$

A estas ecuaciones podemos asociar el operador (constricción)

$$\hat{S}^{\mu\nu} \equiv \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \hat{\theta}_\rho \hat{p}_\sigma = 0, \quad (2.6)$$

donde los operadores $\hat{\theta}_\rho$ y $\hat{p}_\sigma$ han sido ya definidos en el capítulo anterior.

Luego, haciendo uso de los anticonmutadores de $\hat{\theta}_\mu$ [8] dados por

$$\{\hat{\theta}_\mu, \hat{\theta}_\nu\} = \eta_{\mu\nu}, \quad (2.7)$$

obtenemos el cuadrado de la constricción (2.6). Específicamente, tenemos

$$\{\hat{S}_\mu^a, \hat{S}_\nu^\beta\} = \hat{\mathcal{H}}_{\mu\nu}^{\alpha\beta}, \quad (2.8)$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_{\mu\nu}^{\alpha\beta} &= \epsilon_\mu^{\alpha\rho\sigma} \epsilon_\nu^{\beta\lambda\gamma} \eta_{\rho\lambda} \hat{p}_\sigma \hat{p}_\gamma \\ &= \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} p_\lambda p^\lambda - \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta p_\lambda p^\lambda \\ &\quad - \eta_{\mu\nu} p^\alpha p^\beta - \eta^{\alpha\beta} p_\mu p_\nu + \delta_\mu^\alpha p^\beta p_\nu + \delta_\nu^\alpha p^\beta p_\mu \end{aligned} \quad (2.9)$$

es el operador “hamiltoniano” que actúa sobre $h_{\alpha\beta}$ en gravedad linealizada estándar como se ha descrito en el capítulo anterior y en la referencia [8].

Como ya se había anunciado, las ecuaciones de Rarita-Schwinger en espacio-tiempo plano resultan ser la raíz cuadrada de las ecuaciones de campo de Einstein linealizadas.

Nótese que no tenemos contribución ni interacciones con campos de norma o de materia, la inclusión de campos de norma será desarrollada en los capítulos siguientes.

Capítulo 3

Interacción electromagnética para espín 3/2 de Supergravedad N=2

Una de las interacciones más interesantes de los campos de espín 3/2 es la interacción electromagnética. Tal interacción será estudiada, en el presente capítulo, bajo la visión de Supergravedad N=2. Esta teoría involucra la interacción del campo gravitacional, 2 campos de Rarita-Schwinger y el campo electromagnético.

Debemos anticipar que surgirán complicaciones matemáticas debido a la aparición de dos campos de Rarita-Schwinger. Sin embargo, a pesar de la aparición de los dos campos de Rarita-Schwinger obtenemos un término de acoplamiento análogo al obtenido en el Capítulo 1.

Capítulo 3

Interacción electromagnética para espín 3/2 de Supergravedad N=2

En este capítulo estudiamos el acoplamiento de campos de espín 3/2 con campo electromagnético. La idea es analizar el acoplamiento electromagnético para campos de espín 3/2 usando Supergravedad N=2 linealizada [14]. La razón de hacer ésto es que la teoría involucra naturalmente el campo de espín 3/2, el campo gravitacional y el campo electromagnético.

El lagrangiano para Supergravedad N=2 está dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{e}{2}\mathcal{R} - \frac{1}{2}\bar{\Psi}_\mu^i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_5 \gamma_\nu D_\rho \Psi_\sigma^i - \frac{e}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \\ & + \frac{\kappa}{4\sqrt{2}}\bar{\Psi}_\mu^i [e(F^{\mu\nu} + \hat{F}^{\mu\nu}) + \gamma_5(\tilde{F}^{\mu\nu} + \tilde{\hat{F}}^{\mu\nu})]\Psi_\nu^j \epsilon_{ij}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde los elementos de este lagrangiano tienen la misma definición que en el capítulo anterior, $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ es el dual usual del tensor de campo electromagnético y $\hat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \frac{\kappa}{2\sqrt{2}}[\Psi_\mu^i \Psi_\nu^j - \Psi_\nu^i \Psi_\mu^j]\epsilon_{ij}$ es el rotor supercovariante.

La aparición de los símbolos $\epsilon_{ij}(i, j = 1, 2.)$ en el lagrangiano y en la expresión para el super-rotor es consecuencia del hecho de que estamos trabajando con una supersimetría mayor, la cual involucra la aparición de dos campos de R-S. En las expresiones anteriores se refleja este hecho debido a que el símbolo ϵ_{ij} mezcla los

dos gravitinos. Cabe mencionar que una simplificación podría lograrse al escribir el par de gravitinos como las componentes de un bi-espinor mayor (ocho componentes espinoriales). Sin embargo, tendríamos que asumir una formulación matricial de las ecuaciones de los campos, en la cual las ecuaciones mismas serían componentes matriciales de operadores que actúan sobre los campos.

Optaremos por conservar los índices latinos en las ecuaciones que se refieren a cada uno de los gravitinos al mantener las ϵ_{ij} en lugar de una descripción en términos matriciales. Obviamente nuestra formulación de raíz cuadrada de la gravedad linealizada propuesta en el Capítulo 1 es mucho más simple en el sentido de que podemos obtener el mismo acoplamiento con campo electromagnético pero para un sólo campo de R-S.

Al desarrollar variaciones de la acción respecto a $\bar{\Psi}_\alpha^l$, obtenemos las ecuaciones de campo para los gravitinos;

$$\begin{aligned} & -\frac{e}{2}\Gamma^{\alpha\rho\beta}D_\rho\Psi_\beta^l + \frac{\kappa}{4\sqrt{2}}\{[e(F^{\alpha\beta} + \hat{F}^{\alpha\beta}) + \tfrac{1}{2}\gamma_5\epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}(F_{\rho\sigma} + \hat{F}_{\rho\sigma})]\Psi_\beta^k\epsilon_{lk} \\ & - \frac{\kappa}{2\sqrt{2}}\bar{\Psi}^{k\beta}[e(\delta^{\alpha\beta}\Psi^{j\gamma} - \delta^{\alpha\gamma}\Psi^{j\beta}) + \tfrac{1}{2}\gamma_5\epsilon^{\beta\gamma\rho\sigma}(\delta_\rho^\alpha\Psi_\sigma^j - \delta_\sigma^\alpha\Psi_\rho^j)]\Psi_\gamma^h\epsilon^{lj}\epsilon^{hk}\} = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Después de linealizar las ecuaciones anteriores usando el mismo procedimiento que en el capítulo anterior, las ecuaciones se reducen a

$$\epsilon^{\alpha\mu\nu\beta}\gamma_5\gamma_\mu\partial_\nu\Psi_\beta^i - \frac{\kappa\epsilon^{ij}}{\sqrt{2}}[F^{\alpha\beta} + \tfrac{1}{2}\gamma_5\epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}F_{\rho\sigma}]\Psi_\beta^j = 0. \quad (3.3)$$

Nótese que el término que está encerrado en paréntesis cuadrados $F^{+\alpha\beta} \equiv F^{\alpha\beta} + \tfrac{1}{2}\gamma_5\epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ es exactamente el término de interacción previamente obtenido en el Capítulo 1. En el contexto presente, tal término se ha obtenido a partir de

una teoría de campos de norma consistente, lo cual refuerza nuestro resultado de haber obtenido este término de interacción a partir de nuestra formulación de la raíz cuadrada de la relatividad general linealizada.

También debe advertirse que este término de interacción fue encontrado por Ferrara *et al* [10] siguiendo un formalismo lagrangiano basado en el requerimiento de dar a la razón giromagnética el valor $g = 2$ para partículas de espín arbitrario. La razón del requerimiento anterior para g es que este valor cancela el mal comportamiento a altas energías de los sistemas de partículas de espín arbitrario en interacción con el campo electromagnético y conduce a la continuidad de la matriz de dispersión de los procesos involucrados [11]. Una característica sumamente importante de este término de interacción es que cuando se introduce a nivel de árbol en los lagrangianos que involucran partículas de espín 3/2 y campo electromagnético, éste modifica las ecuaciones del movimiento de los campos de R-S. La aparición de este término dipolar extra en las ecuaciones de campo cancela divergencias y además previene las inconsistencias físicas mencionadas, entre las cuales resalta la propagación de las señales a velocidades superlumínicas.

Por las razones mencionadas es de esperar que las soluciones a las ecuaciones (3.3) no tengan inconsistencias físicas como las antes mencionadas.

Después de factorizar un símbolo de Levi-Civita, las ecuaciones (3.3) pueden escribirse en la forma alternativa

$$\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}[\delta_{ij}\hat{\theta}_\mu\hat{p}_\nu + g_1\epsilon_{ij}(\tilde{F}_{\mu\nu} + \sqrt{2}\hat{\theta}_5 F_{\mu\nu})]\Psi_\beta^j = 0, \quad (3.4)$$

donde $g_1 = \frac{i\kappa}{8}$ es la constante de acoplamiento, que como se había comentado en el Capítulo 1 está directamente relacionada con la constante gravitacional.

Procediendo de forma análoga a la desarrollada en los capítulos anteriores, podemos asociar a las ecuaciones de R-S anteriores el operador (constricción)

$$\hat{\mathcal{S}}_{ij}^{\alpha\beta} = \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} [\delta_{ij} \hat{\theta}_\mu \hat{p}_\nu + g_1 \epsilon_{ij} (\tilde{F}_{\mu\nu} + \sqrt{2} \hat{\theta}_5 F_{\mu\nu})] = 0, \quad (3.5)$$

el cual es esencialmente la constricción (1.18) deducida en el Capítulo 1, salvo factores de δ 's y ϵ 's que están asociados al hecho de la aparición de dos gravitinos.

Usando los anticonmutadores definidos en los capítulos anteriores, obtenemos que el álgebra que la constricción anterior obedece es

$$\begin{aligned} \{\hat{\mathcal{S}}_\mu^{\alpha ij}, \hat{\mathcal{S}}_\nu^{\beta kl}\} &= \epsilon_\mu^{\alpha\rho\sigma} \epsilon_\nu^{\beta\lambda\gamma} [\eta_{\rho\lambda} \hat{p}_\sigma \hat{p}_\gamma \delta^{ij} \delta^{kl} \\ &\quad + 2g_1^2 (F_{\rho\sigma} F_{\lambda\gamma} + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\theta}_5 (F_{\rho\sigma} \tilde{F}_{\lambda\gamma} + F_{\lambda\gamma} \tilde{F}_{\rho\sigma}) + \tilde{F}_{\rho\sigma} \tilde{F}_{\lambda\gamma}) \epsilon^{ij} \epsilon^{lk} \\ &\quad + g_1 (\delta^{ij} \epsilon^{lk} \hat{\theta}_\rho (-i \tilde{F}_{\lambda\gamma,\sigma} + 2 \tilde{F}_{\lambda\gamma} \hat{p}_\sigma - \sqrt{2} i \hat{\theta}_5 F_{\lambda\gamma,\sigma}) \\ &\quad + \epsilon^{ij} \delta^{lk} \hat{\theta}_\lambda (-i \tilde{F}_{\rho\sigma,\gamma} + 2 \tilde{F}_{\rho\sigma} \hat{p}_\gamma - \sqrt{2} i \hat{\theta}_5 F_{\rho\sigma,\gamma}))]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

El primer término en la ecuación anterior es precisamente el operador hamiltoniano asociado a las ecuaciones de relatividad general linealizada descrito por (1.13) salvo factores de deltas;

$$\hat{\mathcal{H}}_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \delta^{ij} \delta^{lk} = \epsilon_\mu^{\alpha\rho\sigma} \epsilon_\nu^{\beta\lambda\gamma} \eta_{\rho\lambda} \hat{p}_\sigma \hat{p}_\gamma \delta^{ij} \delta^{lk}. \quad (3.7)$$

El segundo término es el tensor generalizado de energía momento para el campo electromagnético el cual fue implementado en el Capítulo 1 para obtener la interacción del campo electromagnético con campos de espín 3/2 salvo factores de épsilons. Tal tensor es

$$T_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \epsilon^{ij} \epsilon^{kl} = 2g_1^2 (F_{\rho\sigma} F_{\lambda\gamma} + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\theta}_5 (F_{\rho\sigma} \tilde{F}_{\lambda\gamma} + F_{\lambda\gamma} \tilde{F}_{\rho\sigma}) + \tilde{F}_{\rho\sigma} \tilde{F}_{\lambda\gamma}) \epsilon^{ij} \epsilon^{lk}. \quad (3.8)$$

Este resultado confirma y refuerza nuestra construcción del tensor de energía momento implementado en el formalismo que desarrollamos en el Capítulo 1. Recordemos que nuestra guía para construir tal tensor fue la estructura matemática del operador hamiltoniano (1.13) correspondiente al hamiltoniano (3.7) obtenido en este formalismo.

Sin embargo, como ya se había advertido, aparecen términos extras de interacción. Estos términos son análogos a los que surgen en la ecuación de Klein-Gordon al elevar al cuadrado la ecuación de Dirac con campo electromagnético vía acoplamiento mínimo. Tales términos son

$$\begin{aligned} \hat{T}_{\mu\nu}^{\alpha\beta ijkl} \equiv & g_1 \epsilon_{\mu}^{\alpha\rho\sigma} \epsilon_{\nu}^{\beta\lambda\gamma} (\delta^{ij} \epsilon^{lk} \hat{\theta}_{\rho} (-i\tilde{F}_{\lambda\gamma,\sigma} + 2\tilde{F}_{\lambda\gamma} \hat{p}_{\sigma} - \sqrt{2}i\hat{\theta}_5 F_{\lambda\gamma,\sigma}) \\ & + \epsilon^{ij} \delta^{lk} \hat{\theta}_{\lambda} (-i\tilde{F}_{\rho\sigma,\gamma} + 2\tilde{F}_{\rho\sigma} \hat{p}_{\gamma} - \sqrt{2}i\hat{\theta}_5 F_{\rho\sigma,\gamma})). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Como mencionamos anteriormente, esta interacción debe brindarnos la información de los términos de acoplamiento entre el momento magnético (a través del tensor de espín) y el tensor de campo electromagnético para estas partículas. Además cabe mencionar que si investigamos consecuencias de esta teoría, una de las primeras que tenemos que buscar es la razón giromagnética asociada al gravitino.

Capítulo 4

Interacción de Yang-Mills para espín 3/2 de Supergravedad N=4

Dado su interés fenomenológico, es también muy interesante investigar la interacción de un campo de Rarita-Schwinger con un campo de Yang-Mills. De manera análoga al caso electromagnético, ahora hacemos uso de Supergravedad N=4 como la supergravedad de menor supersimetría que involucra la aparición de campos de norma no-abelianos de Yang-Mills, campos de Rarita-Schwinger, así como otros campos interactuantes.

Nuevamente la estructura matemática de las ecuaciones y los operadores se complican debido a la aparición de índices internos que se refieren a los gravitinos y a las componentes de las matrices que dan la simetría interna de los campos de Yang-Mills.

El término de interacción obtenido es esencialmente el mismo tipo de interacción obtenido en el Capítulo 1 por medio de nuestro formalismo de la raíz cuadrada de la gravedad lineal con el campo electromagnético y el campo de Yang-Mills.

Capítulo 4

Interacción de Yang-Mills para espín 3/2 de Supergravedad N=4

Ahora estamos en posición de explorar el acoplamiento entre un campo de Yang-Mills con el campo de Rarita-Schwinger. Como se recordará, la invariancia de norma de las teorías introduce los campos de norma, en particular el caso de una invariancia $SU(2)$ [2] implica la aparición del campo de Yang-Mills, tal campo es no-abeliano (no conmutativo). Para el estudio de la interacción de los campos de Yang-Mills con el campo de R-S, usaremos Supergravedad N=4 [14, 15].

El lagrangiano de Supergravedad N=4 está dado por

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & -\frac{V}{4\kappa^2}\mathcal{R}(\omega) - \frac{1}{2}\bar{\Psi}_\mu^i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_5\gamma_\nu D_\rho\Psi_\sigma^i + \frac{1}{2}Vg^{\mu\nu}[\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + e^{4\kappa\phi}\partial_\mu B\partial_\nu B] \\
& + \frac{i}{2}V\bar{\chi}^i\gamma^\mu\hat{D}_\mu\chi^i - \frac{1}{4}V(A_{\mu\nu}^n A^{n\mu\nu} + B_{\mu\nu}^n B^{n\mu\nu}) - \frac{1}{2}\kappa B(\tilde{A}_{\mu\nu}^n A^{n\mu\nu} + \tilde{B}_{\mu\nu}^n B^{n\mu\nu}) \\
& + \frac{\kappa V}{4\sqrt{2}}e^{-\kappa\phi}[\bar{\Psi}_\alpha^i(F_{(ij)}^{\alpha\beta} + \hat{F}_{(ij)}^{\alpha\beta})\Psi_\beta^j - i\gamma_5(\tilde{F}_{(ij)}^{\alpha\beta} + \tilde{\hat{F}}_{(ij)}^{\alpha\beta})\Psi_\beta^j] \\
& + \frac{\kappa V}{4i}e^{-\kappa\phi}\bar{\Psi}_\alpha^i F_{(ij)}^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\gamma^\alpha\chi^j - \frac{i\kappa}{4}e^{2\kappa\phi}\partial_\sigma B\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\Psi}_\mu^i\gamma_\rho\Psi_\nu^i - \frac{3\kappa V}{4}e^{2\kappa\phi}\hat{D}_\sigma B\bar{\chi}^i\gamma_5\gamma^\sigma\chi^i \\
& - \frac{\kappa V}{2\sqrt{2}}\bar{\Psi}_\mu^i(\partial\phi + ie^{2\kappa\phi}\partial_\nu B\gamma_5)\gamma^\nu\gamma^\mu\chi^i - \frac{iV}{4\kappa}e^{\kappa\phi}\bar{\chi}^i(e_A - ie_B\gamma_5)\gamma_\mu\Psi^{i\mu} \\
& + \frac{\sqrt{2}V}{4\kappa}e^{\kappa\phi}\bar{\Psi}_\mu^i(e_A + ie_B\gamma_5)\sigma^{\mu\nu}\Psi_\nu^i + \frac{\epsilon_A^2 + \epsilon_B^2}{8\kappa^2}Ve^{2\kappa\phi},
\end{aligned} \tag{4.1}$$

donde los campos interactuantes son la tétrada V_μ^a , los campos de Rarita-Schwinger Ψ_μ^i , los campos de Yang-Mills $A_{\mu\nu}^n$ y $B_{\mu\nu}^n$, los campos de espín 1/2 χ^i , un

campo escalar ϕ y un campo pseudoescalar B .

Después de llevar a cabo la linealización de las ecuaciones y anular los campos que no nos son de interés en el presente trabajo (dejando sólo los campos de R-S y los campos de Yang-Mills) obtenemos las ecuaciones de movimiento para los gravitinos

$$[\epsilon^{\alpha\beta}_{\mu\nu}(\delta_{ij}\hat{\theta}^\mu\hat{p}^\nu + g_2(\tilde{F}_{(ij)}^{\mu\nu} - \sqrt{2}i\hat{\theta}_5 F_{(ij)}^{\mu\nu})) + \frac{i\delta_{ij}}{2\kappa}(e_A + \sqrt{2}ie_B\hat{\theta}_5)\sigma^{\alpha\beta}]\Psi^i_\beta = 0, \quad (4.2)$$

donde los operadores $\hat{\theta}_\rho$, $\hat{p}_\sigma$ y $\hat{\theta}_5$ han sido definidos en los capítulos anteriores.

En la filosofía de los cálculos precedentes, podemos asociar a la ecuación para los gravitinos, el operador

$$\hat{S}^{\alpha\beta}_{ij} \equiv \epsilon^{\alpha\beta}_{\mu\nu}(\delta_{ij}\hat{\theta}^\mu\hat{p}^\nu + g_2(\tilde{F}_{(ij)}^{\mu\nu} - \sqrt{2}i\hat{\theta}_5 F_{(ij)}^{\mu\nu})) + \frac{i\delta_{ij}}{2\kappa}(e_A + \sqrt{2}ie_B\hat{\theta}_5)\sigma^{\alpha\beta} = 0, \quad (4.3)$$

donde ahora la constante de acoplamiento g_2 es $\frac{i\kappa}{4}$. La contribución del campo no-abeliano está dada por el tensor de Yang-Mills

$$F^{\rho\sigma}_{(ij)} = \alpha^k_{(ij)} A^{\rho\sigma}_k + \sqrt{2}i\hat{\theta}_5 \beta^k_{(ij)} B^{\rho\sigma}_k, \quad (4.4)$$

donde

$$A^k_{\rho\sigma} = \partial_\rho A^k_\sigma - \partial_\sigma A^k_\rho + e_A \epsilon^{ijk} A^i_\rho A^j_\sigma, \quad (4.5a)$$

$$B^k_{\rho\sigma} = \partial_\rho B^k_\sigma - \partial_\sigma B^k_\rho + e_B \epsilon^{ijk} B^i_\rho B^j_\sigma, \quad (4.5b)$$

son los campos no-abelianos de Yang-Mills con constantes de estructura $e_A \epsilon^{ijk}$ y $e_B \epsilon^{ijk}$ respectivamente. En las ecuaciones anteriores los índices i y j se refieren a los cuatro gravitinos que se encuentran presentes en esta teoría y a las componentes

de las matrices α y β que son las generadoras de la simetría interna del grupo $SU(2) \times SU(2)$ de Supergravedad N=4. Esta simetría es de la que se había hablado anteriormente como la simetría interna propia del campo. Nótese que en analogía a lo expuesto en el Capítulo 1 relativo a la supresión del índice interno del campo, aquí sucede algo similar, ya que en el tensor de Yang-Mills el índice k de (4.5a) y (4.5b) ha sido absorbido en (4.4).

Debemos hacer notar que en la constricción (4.3) hemos conservado la notación original de la referencia [15]. Para recuperar la notación usada en este trabajo, es necesario llevar a cabo la sustitución $-i\hat{\theta}_5 \rightarrow \hat{\theta}_5$. De este modo, la constricción (4.3) se convierte en

$$\hat{\mathcal{S}}_{ij}^{\alpha\beta} \equiv \epsilon^{\alpha\beta}_{\mu\nu}(\delta_{ij}\hat{\theta}^\mu\hat{p}^\nu + g_2(\tilde{F}_{(ij)}^{\mu\nu} + \sqrt{2}\hat{\theta}_5 F_{(ij)}^{\mu\nu})) + \frac{i\delta_{ij}}{2\kappa}(e_A - \sqrt{2}e_B\hat{\theta}_5)\sigma^{\alpha\beta}, \quad (4.6)$$

Nótese que el término de acoplamiento es en esencia el obtenido en el Capítulo 1 y es de la forma $F_{\mu\nu} + \gamma_5 \tilde{F}_{\mu\nu}$ como sucede en el caso electromagnético.

Al usar los anticonmutadores de los capítulos precedentes, obtenemos el álgebra

$$\begin{aligned} \{\hat{\mathcal{S}}_{\mu ij}^\alpha, \hat{\mathcal{S}}_{\nu kl}^\beta\} = & \epsilon^\alpha_{\mu\rho\sigma}\epsilon^\beta_{\nu\lambda\gamma}[\eta^{\rho\lambda}\hat{p}^\sigma\hat{p}^\gamma\delta_{ij}\delta_{kl} \\ & + 2g_2^2(F_{(ij)}^{\rho\sigma}F_{(kl)}^{\lambda\gamma} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\theta}_5(\tilde{F}_{(ij)}^{\rho\sigma}F_{(kl)}^{\lambda\gamma} + F_{(ij)}^{\rho\sigma}\tilde{F}_{(kl)}^{\lambda\gamma}) + \tilde{F}_{(ij)}^{\rho\sigma}\tilde{F}_{(kl)}^{\lambda\gamma}) \\ & + g_2(\delta_{ij}\hat{\theta}^\rho(-i\tilde{F}_{(kl)}^{\lambda\gamma,\sigma} + 2\tilde{F}_{(kl)}^{\lambda\gamma}\hat{p}^\sigma - \sqrt{2}i\hat{\theta}_5 F_{(kl)}^{\lambda\gamma,\sigma}) \\ & + \delta_{kl}\hat{\theta}^\lambda(-i\tilde{F}_{(ij)}^{\rho\sigma,\gamma} + 2\tilde{F}_{(ij)}^{\rho\sigma}\hat{p}^\gamma - \sqrt{2}i\hat{\theta}_5 F_{(ij)}^{\rho\sigma,\gamma})) \\ & + \frac{i\delta_{kl}}{2\kappa}\epsilon^\alpha_{\mu\rho\sigma}[\delta_{ij}(\sqrt{2}\epsilon_{\nu\tau}^{\rho\beta}\hat{\theta}_5\hat{\theta}^\tau\hat{p}^\sigma - \sqrt{2}e_B\hat{\theta}_5(\delta_\nu^\rho\hat{\theta}^\beta - \delta^{\rho\beta}\hat{\theta}_\nu)\hat{p}^\sigma) \\ & + 2g_2(e_A\tilde{F}_{(ij)}^{\rho\sigma}\sigma_\nu^\beta - \sqrt{2}e_B\hat{\theta}_5\tilde{F}_{(ij)}^{\rho\sigma}\sigma_\nu^\beta - e_B F_{(ij)}^{\rho\sigma}\sigma_\nu^\beta)] \\ & + \frac{i\delta_{ij}}{2\kappa}\epsilon^\beta_{\nu\lambda\gamma}[\delta_{kl}(\sqrt{2}\epsilon_{\mu\tau}^{\lambda\alpha}\hat{\theta}_5\hat{\theta}^\tau\hat{p}^\gamma - \sqrt{2}e_B\hat{\theta}_5(\delta_\mu^\lambda\hat{\theta}^\alpha - \delta^{\lambda\alpha}\hat{\theta}_\mu)\hat{p}^\gamma) \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned}
 & + 2g_2(e_A \tilde{F}_{(kl)}^{\lambda\gamma} \sigma_\mu^\alpha - \sqrt{2}e_B \hat{\theta}_5 \tilde{F}_{(kl)}^{\lambda\gamma} \sigma_\mu^\alpha - e_B F_{(kl)}^{\lambda\gamma} \sigma_\mu^\alpha) \\
 & - \frac{\delta_{ij}\delta_{kl}}{4\kappa^2}[(e_A^2 + e_B^2)(\eta^{\alpha\beta} \sigma_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \sigma^{\alpha\beta} + \delta_\nu^\alpha \sigma_\mu^\beta + \delta_\mu^\beta \sigma_\nu^\alpha) + 2e_B^2 \sigma_\mu^\alpha \sigma_\nu^\beta].
 \end{aligned}$$

Al identificar términos en la ecuación anterior, vemos que el primero de ellos resulta ser esencialmente el mismo tensor que representa las ecuaciones de relatividad general linealizada dado por el hamiltoniano (1.13). En este caso nos da también la ecuaciones de Einstein linealizadas, sin embargo aparecen factores de deltas igual que en el caso electromagnético como consecuencia del tamaño de la supersimetría que estamos empleando. Específicamente encontramos

$$\hat{\mathcal{H}}_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \delta_{ij} \delta_{lk} = \epsilon_\mu^\alpha \epsilon_\nu^{\rho\sigma} \epsilon_\nu^{\beta\lambda\gamma} \eta_{\rho\lambda} \hat{p}_\sigma \hat{p}_\gamma \delta_{ij} \delta_{lk}. \quad (4.8)$$

El segundo término es una generalización del tensor energía momento del campo de Yang-Mills encontrado en el Capítulo 1. Por supuesto el tensor obtenido aquí tiene más términos en un sentido estricto ya que el tensor que representa la interacción del campo de Yang-Mills está expresado como una combinación lineal de dos campos no abelianos, el $A_{\rho\sigma}^k$ y el $B_{\rho\sigma}^k$. Sin embargo, la estructura matemática en términos del tensor $F_{\rho\sigma}$ es esencialmente la misma que la del tensor de energía momento (1.27), salvo ciertos factores de épsilons, ésto es

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{\mu\nu(ijkl)}^{\alpha\beta} &= 2 g_2^2 \epsilon_\mu^\alpha \epsilon_\nu^{\rho\sigma} \epsilon_\nu^{\beta\lambda\gamma} (F_{\rho\sigma(ij)} F_{\lambda\gamma(kl)} \\
 &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\theta}_5 (\tilde{F}_{\rho\sigma(ij)} F_{\lambda\gamma(kl)} + F_{\rho\sigma(ij)} \tilde{F}_{\lambda\gamma(kl)}) + \tilde{F}_{\rho\sigma(ij)} \tilde{F}_{\lambda\gamma(kl)}).
 \end{aligned} \quad (4.9)$$

En este caso los índices latinos se aplican sobre los cuatro gravitinos y también se refieren a las componentes de las matrices α y β . El resultado anterior refuerza nuevamente nuestro método de introducir tensores de energía momento apropiados a las ecuaciones de Einstein lineales, ya que hemos visto que una teoría de

norma formal (supergravedad) da resultados análogos a los que hemos obtenido (en el Capítulo 1) en nuestro formalismo de raíz cuadrada de la gravedad lineal con materia. No está de más repetir que nuestra formulación es mucho menos complicada que la obtenida vía supergravedad, ya que nuestros operadores diferenciales se aplican solamente sobre un gravitino y no sobre dos o cuatro de ellos.

El siguiente término es el correspondiente al término de interacción (1.28) para el campo de Yang-Mills, ésto es

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathcal{I}}_{\mu\nu(ijkl)}^{\alpha\beta} \equiv & \epsilon_{\mu\rho\sigma}^{\alpha} \epsilon_{\nu\lambda\gamma}^{\beta} [g_2(\delta_{ij}\hat{\theta}^{\rho}(-i\tilde{F}_{(kl)}^{\lambda\gamma,\sigma} + 2\tilde{F}_{(kl)}^{\lambda\gamma}\hat{p}^{\sigma} - \sqrt{2}i\hat{\theta}_5 F_{(kl)}^{\lambda\gamma,\sigma}) \\
 & + \delta_{lk}\hat{\theta}^{\lambda}(-i\tilde{F}_{(ij)}^{\rho\sigma,\gamma} + 2\tilde{F}_{(ij)}^{\rho\sigma}\hat{p}^{\gamma} - \sqrt{2}i\hat{\theta}_5 F_{(ij)}^{\rho\sigma,\gamma}))] \\
 & + \frac{i\delta_{kl}}{2\kappa} \epsilon_{\mu\rho\sigma}^{\alpha} [\delta_{ij}(\sqrt{2}\epsilon_{\nu\tau}^{\rho\beta}\hat{\theta}_5\hat{\theta}^{\tau}\hat{p}^{\sigma} - \sqrt{2}e_B\hat{\theta}_5(\delta_{\nu}^{\rho}\hat{\theta}^{\beta} - \delta^{\rho\beta}\hat{\theta}_{\nu})\hat{p}^{\sigma}) \\
 & + 2g_2(e_A\tilde{F}_{(ij)}^{\rho\sigma}\sigma_{\nu}^{\beta} - \sqrt{2}e_B\hat{\theta}_5\tilde{F}_{(ij)}^{\rho\sigma}\sigma_{\nu}^{\beta} - e_B F_{(ij)}^{\rho\sigma}\sigma_{\nu}^{\beta})] \\
 & + \frac{i\delta_{ij}}{2\kappa} \epsilon_{\nu\lambda\gamma}^{\beta} [\delta_{kl}(\sqrt{2}\epsilon_{\mu\tau}^{\lambda\alpha}\hat{\theta}_5\hat{\theta}^{\tau}\hat{p}^{\gamma} - \sqrt{2}e_B\hat{\theta}_5(\delta_{\mu}^{\lambda}\hat{\theta}^{\alpha} - \delta^{\lambda\alpha}\hat{\theta}_{\mu})\hat{p}^{\gamma}) \\
 & + 2g_2(e_A\tilde{F}_{(kl)}^{\lambda\gamma}\sigma_{\mu}^{\alpha} - \sqrt{2}e_B\hat{\theta}_5\tilde{F}_{(kl)}^{\lambda\gamma}\sigma_{\mu}^{\alpha} - e_B F_{(kl)}^{\lambda\gamma}\sigma_{\mu}^{\alpha})] \\
 & - \frac{\delta_{ij}\delta_{kl}}{4\kappa^2} [(e_A^2 + e_B^2)(\eta^{\alpha\beta}\sigma_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\sigma^{\alpha\beta} + \delta_{\nu}^{\alpha}\sigma_{\mu}^{\beta} + \delta_{\mu}^{\beta}\sigma_{\nu}^{\alpha}) + 2e_B^2\sigma_{\mu}^{\alpha}\sigma_{\nu}^{\beta}].
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Como es claro, estos términos de interacción son mucho más complicados que los que hemos obtenido en (1.28). Sin embargo, éstos nos brindan un enfoque diferente al que obtuvimos nosotros por nuestro procedimiento de raíz cuadrada.

Debido a la importancia de estas interacciones, los resultados que hemos obtenido tanto en el caso electromagnético como en el caso de Yang-Mills éstos deben ser aún sujetos a futuras investigaciones que nos brinden una completa interpretación física del fenómeno de acoplamiento de espín-campo para campos de espín 3/2 con campos de norma.

Conclusiones

Hemos discutido el problema del acoplamiento electromagnético mínimo para los campos de espín $3/2$ y las patologías que surgen en los fenómenos que involucran estos campos. Hemos comentado también la posible solución al problema del acoplamiento por medio del formalismo desarrollado por Weinberg y Ferrara *et al* al asignar un valor fijo a la razón giromagnética para partículas de espín arbitrario.

Sin embargo nuestra formulación parte del trabajo precedente de Nieto y Obregón, en donde demuestran que las ecuaciones del campo de Rarita-Schwinger son la raíz cuadrada de la ecuaciones de Einstein linealizadas en el mismo sentido que la ecuación de Dirac es la raíz cuadrada de la ecuación de Klein-Gordon.

Este resultado es análogo al resultado de supergravedad canónica, ya que en ambos casos las constricciones supersimétricas son la raíz cuadrada de las constricciones de relatividad general. Sin embargo en el caso del trabajo de Nieto y Obregón, al ser consideradas todas las componentes de las ecuaciones de Rarita-Schwinger resultan todas las ecuaciones de campo de relatividad general linealizada. Esto no sucede en el caso de supergravedad canónica, ya que la constricción supersimétrica involucra sólo una parte de las ecuaciones de R-S que como consecuencia al ser elevada al cuadrado produce sólo una parte de las ecuaciones de relatividad general.

El resultado del trabajo anteriormente mencionado es usado para encontrar la forma en que los campos de norma (o de materia) deben interactuar con los campos de espín $3/2$. Específicamente, introduciendo tensores de energía momento apropiados a manera de potencial en el operador hamiltoniano que representa las ecuaciones de relatividad general linealizada encontramos el acoplamiento para campos de espín $3/2$ por medio de interpretar las ecuaciones de R-S con acoplamiento como la raíz cuadrada de las ecuaciones de la relatividad general linealizada con materia (campos de norma).

En particular para el caso del campo electromagnético y el campo no-abeliano de Yang-Mills, estos tensores de energía momento generalizados se contruyeron siguiendo criterios físicos y matemáticos que también eran aplicables al operador que actúa sobre el campo gravitacional linealizado. Estos tensores de energía momento fueron sumados al hamiltoniano linealizado, permitiéndonos así investigar la raíz cuadrada del sistema *gravedad linealizada mas materia*. De esta forma encontramos las ecuaciones de Rarita-Schwinger modificadas, las cuales contienen la información de la interacción entre el campo descrito por el tensor de energía momento y el campo de Rarita-Schwinger. Así, la interacción entre estos campos nos permitió encontrar el acoplamiento buscado, el cual resulta ser un acoplamiento no-mínimo.

Por medio de linealizar los modelos de Supergravedad $N=2$ y $N=4$, obtuvimos resultados similares a los obtenidos por medio de nuestra formulación de raíz cuadrada de la gravedad lineal con materia. Debe mencionarse, sin embargo que nuestra formulación es mucho más simple en el sentido de que en los modelos de supergravedad lineal aparecen muchos más campos en interacción. En particu-

lar el número de gravitinos (campos de espín 3/2 supersimétricos) incrementa de acuerdo a la supersimetría que se maneje.

Como es de esperarse, al elevar los operadores (raíz cuadrada) al cuadrado, obtenemos no sólo las ecuaciones lineales de la gravedad y el tensor de energía momento, sino además obtenemos términos de interacción análogos a los términos de acoplamiento espín-campo electromagnético en las ecuaciones de Dirac y de Klein-Gordon. Necesariamente, la interpretación física de esos términos de acoplamiento merecen estudios posteriores.

En el caso de la interacción electromagnética, el acoplamiento obtenido por nosotros coincide con el obtenido por Weinberg y Ferrara *et al* quienes usaron un procedimiento que involucra el requisito de que la razón giromagnética tome el valor $g = 2$ a nivel de árbol para partículas de espín arbitrario. Estos autores obtuvieron el mismo término de interacción que hemos obtenido en este trabajo por medio de nuestro procedimiento de raíz cuadrada. Este término dipolar de interacción cancela el mal comportamiento a altas energías en sistemas de partículas de espín 3/2, así como las inconsistencias físicas discutidas por Velo y Zwanzinger.

En conclusión, encontramos que los términos de interacción del campo electromagnético y del campo de Yang-Mills con campo de R-S son ambos de la forma

$$Curvatura + \gamma_5 Curvatura \text{ Dual}.$$

Es interesante mencionar que un término de estructura similar ha sido implemen-

tado por Cucchieri, Porrati y Deser [16], al analizar el acoplamiento gravitacional para campos masivos de espín más alto, en particular, el término *Curvatura* en la expresión anterior resulta ser el tensor de Ricci mismo. Esto pasa, cuando consideramos la teoría de campos de espín 5/2.

En el enfoque de raíz cuadrada implementado por nosotros, siempre es posible agregar a la interacción anterior cualquier tipo de materia o campos de norma. Es materia de trabajo futuro el proponer interacciones particulares que puedan implicar algún interés fenomenológico.

Por último, el material presentado en este trabajo de tesis fue aceptado para su publicación en los Proceedings of the First Mexican School on Gravitation and Mathematical Physics (World Scientific Ed.) [17]. Tal evento fue llevado a cabo en la ciudad de Guanajuato Guanajuato en Diciembre de 1994.

Referencias

- [1] P. A. M. Dirac Principles of Quantum Theory Oxford University Press.
(1958)
- [2] M. Chaichian and N. F. Nelipa Introduction to Gauge Field Theories Springer-Verlag (1984)
- [3] C. Itzykson and J. B. Zuber Quantum Field Theory Mc-Graw Hill, Inc.
(1980)
- [4] M. Fierz and W. Pauli Proc. Roy. Soc. A 173, 211 (1939)
- [5] W. Rarita and J. Schwinger Phys. Rev. 60 61 (1941)
- [6] J. Leite Lopes, D. Spheeler and N. Fleury Lett. Nuovo Cimento 35 60 (1982)
.
J. Leite Lopes, J. A. Martins Simoes and D. Spehler Phys. Rev. D 23 797
(1981),

J. Leite Lopes, J. A. Martins Simoes and D. Spehler Phys. Rev. D 25 1854
(1982).
- [7] G. Velo and D. Zwanziger Phys. Rev 186 25 (1969)

- [8] J. A. Nieto and O. Obregón Phys. Lett. A 175 11 (1993)
- [9] C. Galvao and C. Teitelboim J. Math. Phys. 21 1863 (1980)
- [10] S. Ferrara, M. Porrati and V. L. Telegdi Phys. Rev. D 46 3529 (1992)
- [11] S. Weinberg, in Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory
Proceedings of the Summer Institute, Brandeis University, 1970, edited by
S. Deser (MIT Press, Cambridge, MA, 1970), Vol. I.
- [12] C. Teitelboim Phys. Rev. Lett. 38 1106 (1977)
- [13] R. Tabenski and C. Teitelboim Phys. Lett. 69B 453 (1977)
- [14] P. van Nieuwenhuizen Physics Reports 68 No. 4 (1981) 189-398 North-
Holland Publishing Company.
- [15] D. Z. Freedman and J. H. Schwarz Nucl. Phys. B137 333 (1978)
- [16] A. Cucchieri, M. Porrati and S. Deser Phys. Rev. D 51 4543 (1995)
- [17] J. A. Nieto, O. Obregón and V. M. Villanueva en Proccedings of the First
Mexican School on Gravitation and Mathematical Physics (World Scientific)
en prensa.