



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE DISERTACIÓN PÚBLICA

No. 00064

Matrícula: 208388022

TRANSPORTE DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO DEL FLUJO DISPERSO DE DOS FASES FLUIDAS INMISCIBLES EN MEDIOS POROSOS

En la Ciudad de México, se presentaron a las 11:00 horas del día 13 del mes de diciembre del año 2016 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

- DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA
- DR. ALBERTO SORIA LOPEZ
- DR. BENITO SERRANO ROSALES
- DR. HUGO JIMENEZ ISLAS
- DRA. ELIZABETH MARITZA SALINAS BARRIOS

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretaria la última, se reunieron a la presentación de la Disertación Pública cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

DOCTOR EN CIENCIAS (INGENIERIA QUIMICA)

DE: OSCAR ABEL LUEVANO RIVAS

y de acuerdo con el artículo 78 fracción IV del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:



OSCAR ABEL LUEVANO RIVAS
ALUMNO

Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

REVISÓ

LIC. JULIO CESAR DE LARA ISASSI
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JOSE GILBERTO CORDOBA HERRERA

PRESIDENTE

DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA

VOCAL

DR. ALBERTO SORIA LOPEZ

VOCAL

CANCELADO

DR. BENITO SERRANO ROSALES

VOCAL

DR. HUGO JIMENEZ ISLAS

SECRETARIA

DRA. ELIZABETH MARITZA SALINAS BARRIOS

**Transporte de Cantidad de Movimiento del Flujo Disperso de
Dos Fases Fluidas Inmiscibles en Medios Porosos**

Tesis que presenta

Oscar Abel Luévano Rivas

Para obtener el grado de
Doctor en Ciencias (Ingeniería Química)



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Iztapalapa

**Transporte de Cantidad de Movimiento del Flujo Disperso de
Dos Fases Fluidas Inmiscibles en Medios Porosos**

Tesis que presenta

Oscar Abel Luévano Rivas

Para obtener el grado de
Doctor en Ciencias (Ingeniería Química)

Asesor: Dr. Francisco José Valdés Parada

Jurado calificador:

Presidente: Dr. Jesús Alberto Ochoa Tapia

Secretaria: Dra. Elizabeth Salinas Barrios

Vocal: Dr. Alberto Soria López

Vocal: Dr. Hugo Jiménez Islas

Vocal: Dr. Benito Serrano Rosales

Ciudad de México, Diciembre, 2016



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Iztapalapa

TRANSPORTE DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO DEL
FLUJO DISPERSO DE DOS FASES FLUIDAS INMISCIBLES
EN MEDIOS POROSOS

TESIS

Que para obtener el grado de

DOCTOR EN CIENCIAS
(INGENIERÍA QUÍMICA)

PRESENTA:

M. en C. Oscar Abel Luévano Rivas

Asesor:

Dr. Francisco José Valdés Parada

Agradecimientos

Al *Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT)* por la beca doctoral 27403. Esta tesis fue desarrollada gracias al apoyo recibido del proyecto *Fondo Sectorial de Investigación para la Educación* apoyada por *CONACyT* (Número de proyecto: 12511908; Número de Convenio: 112087).

Agradecimientos personales

Quisiera agradecer en primera instancia al Dr. Francisco Valdés-Parada, asesor de esta tesis, por su empeño, dedicación, paciencia, y esfuerzo involucrados en esta tesis. Parte de su conocimiento heredado a mí persona, por sus sinceros consejos y por su valiosa amistad, que lograron el crecimiento de mi persona y que permitió llegar a concluir este proyecto.

A mis sinodales: la Dra. Elizabeth Maritza Salinas Barrios, el Dr. Alberto Soria López, el Dr. J. Alberto Ochoa Tapia, el Dr. Benito Serrano Rosales y el Dr. Hugo Jiménez Islas, a cada uno por sus valiosas observaciones y sugerencias que permitieron mejorar enormemente este trabajo, permitiéndome apreciar aun más mi investigación doctoral.

Le agradezco a mi Familia por su apoyo incondicional, cariño y ánimos de mis padres y hermanos. A mis amigos, participes en el ánimo de concluir el proyecto, especialmente a Andrés Tavizón, mi hermano, y Raquel de los Santos, por ser amiga y compañera participe de este proyecto con sus valiosos consejos y ayuda.

Oscar Abel Luévano Rivas

Resumen

El modelado del flujo disperso de dos fases fluidas inmiscibles en medios porosos se puede obtener a partir del escalamiento de las ecuaciones gobernantes de transporte de masa y cantidad de movimiento del flujo multifásico, a la escala microscópica. El método del promedio volumétrico es una técnica de escalamiento que permite desarrollar ecuaciones de transporte promedio en términos de coeficientes efectivos, los cuales incorporan la información no redundante del transporte a la microescala. En sistemas multifásicos es frecuente suponer la hipótesis del equilibrio local, que permite reducir las ecuaciones gobernantes de transporte de cada fase a una sola ecuación, en términos de variables ponderadas de equilibrio. Esto sin embargo significa suponer restricciones adicionales al proceso de escalamiento. Los medios porosos son más complejos y están formados por regiones que pueden considerarse homogéneas. Los modelos que describen el transporte entre estas regiones homogéneas se pueden realizar mediante dos alternativas. En una primera opción se obtiene una ecuación válida en todo el sistema cuyos coeficientes son dependientes de la posición (modelo de un sólo dominio). La transición entre las regiones, zona donde ocurren cambios significativos de la microestructura (inter-región), se logra mediante los cambios continuos de estos coeficientes. En la segunda opción se utilizan ecuaciones con coeficientes constantes para cada región homogénea (modelo de dos dominios), donde la inter-región se reemplaza por una frontera hipotética y el transporte se considera en condiciones de frontera en términos de coeficientes de salto. Se ha determinado que ambos modelos se relacionan por medio de la información que capturan del transporte en la inter-región.

En este trabajo, se utiliza el marco teórico del promedio volumétrico para desarrollar las ecuaciones escaladas para modelar el transporte de cantidad de movimiento del flujo disperso de dos fases fluidas inmiscibles en el seno de un medio poroso homogéneo y la zona cercana a la frontera de dos medios homogéneos (inter-región). Los modelos se obtienen bajo la hipótesis de equilibrio y no-equilibrio local mecánico y en el análisis de la inter-región se utiliza el enfoque de un sólo dominio. Además se desarrolla el esquema de cerradura de los modelos obtenidos para el seno del medio poroso que permite el cálculo de los coeficientes efectivos de transporte. Estos resultados se comparan con los datos experimentales de la literatura para predecir la reducción de la permeabilidad debido al flujo de una emulsión estable en un medio poroso homogéneo.

La cerradura del modelo de un solo dominio se realiza mediante el cálculo de las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos que se obtuvo del campo de la solución numérica directa de las ecuaciones de la microescala en una representación de geometría simple de la inter-región. Las predicciones de los coeficientes efectivos se obtuvieron para diferentes tipos de inter-región que incluyeron: medio poroso - fluido, medio poroso- medio poroso y medio poroso -fractura - medio poroso. Finalmente la precisión del modelo, y la validez de las condiciones que sustentan la hipótesis del equilibrio local mecánico en la inter-región, se analizaron a través la comparación de los perfiles de velocidad predichos con los resultados de la simulaciones numéricas directas.

El jurado designado por la
Comisión Académica del Posgrado en Ingeniería Química
de la Unidad Iztapalapa, aprobó la tesis que presentó

OSCAR ABEL LUÉVANO RIVAS

El día **13** de **diciembre** del año **2016**

Miembros del Jurado

Dr. Jesús Alberto Ochoa Tapia

Presidente

Dra. Elizabeth Salinas Barrios

Secretaria

Dr. Alberto Soria López

Vocal

Dr. Hugo Jiménez Islas

Vocal

Dr. Benito Serrano Rosales

Vocal

Índice general	I
Índice de figuras	V
Índice de tablas	IX
Nomenclatura	XI
Introducción	1
1. Revisión bibliográfica	7
1.1. Modelos matemáticos para el flujo disperso a través de medios porosos	8
1.1.1. Modelos homogéneos	8
1.1.2. Modelo de retardo de gota	10
1.1.3. Modelo de filtración	13
1.1.4. Modelo de redes capilares	16
1.1.5. Otros modelos	21
1.2. Métodos de escalamiento para el flujo de dos fases fluidas inmiscibles a través de medios porosos	23
1.2.1. Método de homogeneización espacial	23
1.2.2. Método de promediado de ensamblajes de fase	25
1.2.3. Teoría de promediado termodinámicamente restringida	28
1.2.4. Método del promedio volumétrico	32

1.3.	Condición de equilibrio local	35
1.3.1.	Modelos de equilibrio para transferencia de calor y masa multifásica	36
1.3.2.	Condición de equilibrio local mecánico	40
1.4.	Análisis en la inter-región	41
	Objetivos	47
	I Análisis en el seno de la región homogénea	49
	2. Ecuaciones de transporte promedio	51
2.1.	Modelo microscópico	51
2.2.	Escalamiento	53
2.3.	Modelo de no-equilibrio local mecánico	56
2.3.1.	Ecuación de continuidad	56
2.3.2.	Ecuación de cantidad de movimiento	58
2.4.	Observaciones del modelo	64
2.5.	Resumen	68
	3. Modelo de equilibrio local mecánico	71
3.1.	Equilibrio local mecánico	72
3.1.1.	Ecuación de continuidad	72
3.1.2.	Ecuación de cantidad de movimiento	72
3.2.	Observaciones del modelo de equilibrio local mecánico	76
3.3.	Predicción de coeficientes de medio efectivo	79
3.3.1.	Análisis paramétrico de los coeficientes efectivos	80
3.3.2.	Comparación con experimentos	85
3.3.3.	Discusión de resultados	93
3.4.	Resumen	96
	II Análisis en la frontera entre regiones homogéneas	99
	4. Ecuaciones de transporte promedio generalizadas	101

4.1. Modelo de no-equilibrio local mecánico	101
4.1.1. Observaciones del modelo	104
4.2. Modelo de equilibrio local mecánico	106
4.2.1. Ecuación de continuidad	107
4.2.2. Ecuación de cantidad de movimiento	107
4.3. Observaciones	112
4.4. Resumen	120
5. Predicción de coeficientes efectivos y comparación con DNS	125
5.1. Predicción del tensor de permeabilidad	125
5.1.1. Fluido - medio poroso	127
5.1.2. Medio poroso - medio poroso	140
5.1.3. Medio poroso - fractura - medio poroso	148
5.2. Observaciones	159
5.3. Resumen	164
Conclusiones	167
Bibliografía	171
A. Problemas de cerradura	A.1
A.1. Cerradura para el modelo de no equilibrio local mecánico	A.1
A.1.1. Ecuación de continuidad	A.1
A.1.2. Ecuación de cantidad de movimiento	A.3
A.1.3. Condiciones de frontera	A.3
A.1.4. Periodicidad	A.4
A.1.5. Problemas de cerradura	A.5
A.1.6. Solución numérica de los problemas de cerradura	A.9
A.1.7. Determinación de los tensores y vectores efectivos	A.11
A.2. Cerradura para el modelo de equilibrio local mecánico	A.16
A.2.1. Problemas de cerradura	A.16

B. Equilibrio local mecánico	B.1
B.1. Restricciones para el equilibrio local mecánico	B.1
C. Modelo de un sólo dominio	C.1
C.1. Restricciones para el equilibrio local mecánico en la inter-región	C.1
C.2. Predicción de coeficientes efectivos y comparación con la DNS	C.8
C.2.1. Fluido - medio poroso	C.10
C.2.2. Medio poroso - medio poroso	C.11
C.2.3. Medio poroso - fractura - medio poroso	C.12

ÍNDICE DE FIGURAS

1. Enfoque de uno y dos dominios para modelar la frontera entre dos regiones homogéneas.	3
1.1. Deformación de la gotas en las gargantas de los poros que provoca la reducción de la velocidad de la fase continua.	11
1.2. Mecanismos englobados en el factor de retardo capilar (Devereux, 1974a).	12
1.3. Mecanismos de captura de la fase dispersa dentro de los poros (Soo y Radke, 1986).	13
1.4. (a) Reconstrucción de los espacios de los poros de micrografías (Oren <i>y col.</i> , 1998). (b) Red capilar correspondiente.	17
2.1. Sistema del flujo disperso de dos fases fluidas inmiscibles en un medio poroso homogéneo.	52
2.2. Vectores asociados a un volumen promediante.	54
3.1. Esquema de celda unitaria periódica representativa del flujo disperso en un medio poroso homogéneo.	80
3.2. Predicciones del componente longitudinal del coeficiente efectivo, K^e , como función de ε . Bajo la condición de: $Ca \ll 1$ y $Bo \ll 1$	82
3.3. Predicciones del factor de corrección, K_m como función de ε y de ν , tomando $S_\beta = 0.8$. Bajo la condición de: $Ca \ll 1$ y $Bo \ll 1$	84
3.4. Sistema experimental usado por Soo y Radke (1984).	87

3.5. Celda unitaria y campo de las variables A_β y A_γ usadas para la predicción de K^e/K , correspondiente al Experimento 3 de Soo y Radke (1984). Bajo la condición de: $Ca \ll 1$ y $Bo \ll 1$	90
3.6. (a) Comparación de la reducción de la permeabilidad experimental reportados por Soo y Radke (1984) (Experimental) con las predicciones calculadas (Teórico) K^e/K . (b) Porcentaje de error relativo entre predicciones y experimentos.	91
3.7. (a) Comparación de la reducción de la permeabilidad experimental reportados por Jain y Demond (2002a) con las predicciones calculadas K^e/K . (b) Porcentaje de error relativo entre predicciones y experimentos.	93
4.1. Sistema del flujo disperso que muestra el volumen promediado en las regiones homogéneas e inter-región.	102
4.2. Análisis en la inter-región del modelo de equilibrio para el flujo disperso.	121
5.1. Dominio de solución de la DNS representativo de los sistemas: (a) Fluido medio-poroso, (b) Medio poroso - medio poroso y (c) Medio poroso - fractura - medio poroso.	128
5.2. Región de promediado localizada en diferentes posiciones en la inter-región. (a) En el medio poroso; (b) - (d) Inter-región; (e) Fluido cercano a la pared.	130
5.3. Predicción de la variación espacial en la inter-región medio poroso-fluido del tensor de permeabilidad de equilibrio.	133
5.4. Predicción de los perfiles de velocidad obtenidos con la DNS (\dots) y el ODA de ELM ($—$) para $S_\beta = 0.7$: $\varepsilon_\omega = 0.4$ (a) - (c) y $\varepsilon_\omega = 0.8$ (d) - (f) y $\nu = 1$. Bajo la condición de: $Ca \ll 1$ y $Bo \ll 1$	136
5.5. Predicción de los perfiles de velocidad obtenidos con la DNS(\dots) y el ODA de ELM ($—$) en la inter-región para $S_\beta = 0.7$: $\varepsilon_\omega = 0.4$ (a) y (b) $\varepsilon_\omega = 0.8$ (c) y (d). Bajo la condición de: $Ca \ll 1$ y $Bo \ll 1$	138
5.6. Predicción de la variación espacial en la inter-región medio poroso - medio poroso del tensor de permeabilidad de equilibrio: (a) $\varepsilon_\omega = 0.4$, (b) = 0.5 (c) = 0.6. Donde: $S_{\beta\omega} = S_{\beta\eta} = 0.7$	142

5.7. Predicción de los perfiles de velocidad obtenidos con la DNS(\dots) y el ODA de ELM (—) en la inter-región medio poros-medio poroso para $\nu = 1$. Bajo la condición de: $Ca \ll 1$ y $Bo \ll 1$	146
5.8. Predicción de la variación espacial en la inter-región: medio poroso - fractura - medio poroso del tensor de permeabilidad de equilibrio con relación de porosidad: (a),(d) y (c) $\varepsilon_{\eta\omega} = 0$ y (d), (e) y (f) $\varepsilon_{\eta\omega} = 5$	151
5.9. Predicción de los perfiles de velocidad obtenidos con la DNS(\dots) y el ODA de ELM (—) en la inter-región medio poros-fractura-medio poroso para $\nu = 1$ con $\varepsilon_{\eta} = \varepsilon_{\omega} = 0.4$. Bajo la condición: $Ca \ll 1$ y $Bo \ll 1$	155
5.10. Predicción de los perfiles de velocidad obtenidos con la DNS(\dots) y el ODA de ELM (—) en la inter-región medio poros-fractura-medio poroso para $\nu = 1$ con $\varepsilon_{\eta} = 9$ $\varepsilon_{\omega} = 0.4$. Bajo la condición: $Ca \ll 1$ y $Bo \ll 1$	156
A.1. Celda unitaria periódica representativa del flujo disperso.	A.11
A.2. Ejemplos de las variables de cerradura $A_{xx,\beta}$ y $A_{xx,\gamma}$. Para $\varepsilon = 0.5$: (a) $S_{\beta} = 0.35$ $\nu = 0.1$, (b) $S_{\beta} = 0.35$ $\nu = 1$ y (c) $S_{\beta} = 0.8$ $\nu = 10$. Para $\varepsilon = 0.8$: (d) $S_{\beta} = 0.35$ $\nu = 0.1$, (e) $S_{\beta} = 0.8$ $\nu = 1$ y (f) $S_{\beta} = 0.8$ $\nu = 10$. Bajo la condición: $Ca \ll 1$ y $Bo \ll 1$	A.12
C.1. Dominio de solución para la DNS representativo de la inter-región fluido-medio poroso.	C.10
C.2. Campo de solución de la DNS para el sistema fluido-medio poroso en diferentes posiciones: (a) Región del medio poroso (b) Inter-región (c) Región fluida (d) Pared superior. $\varepsilon_{\omega} = 0.5$ y $S_{\gamma\omega} = 0.6$. Bajo la condición: $Ca \ll 1$ y $Bo \ll 1$	C.11
C.3. Dominio de solución para la DNS representativo de la inter-región fluido-medio poroso.	C.12
C.4. Campo de solución de la DNS para el sistema fluido-medio poroso en diferentes posiciones: (a) región- ω con $\varepsilon_{\omega} = 0.4$, (b) inter-región y (c) región- η con $\varepsilon_{\eta} = 0.9$. $S_{\gamma i} = 0.7, i = \eta, \omega$. Bajo la condición: $Ca \ll 1$ y $Bo \ll 1$	C.13
C.5. Dominio de solución para la DNS representativo de la inter-región fluido-medio poroso.	C.14

- C.6. Campo de solución de la DNS para el sistema fluido-medio poroso en diferentes posiciones: (a) Región - ω con $\varepsilon_\omega = 0.4$ (b) medio poroso- ω -fractura (c) Inter-región (d) fractura - medio poroso- η (e) Región- η , con porosidad igual a $\varepsilon_\eta = 0.4$. Tamaño de fractura $f = 1\ell_c$ y saturación $S_{\gamma i} = 0.7, i = \eta, \omega$. Bajo la condición: $Ca \ll 1$ y $Bo \ll 1$ C.15
- C.7. Campo de solución de la DNS para el sistema fluido-medio poros en diferentes posiciones: (a) Región - ω con $\varepsilon_\omega = 0.4$ (b) Inter-región (c) Región- η con porosidad igual a $\varepsilon_\eta = 0.4$. Tamaño de fractura $f = 6\ell_c$ y saturación $S_{\gamma i} = 0.7, i = \eta, \omega$. Bajo la condición: $Ca \ll 1$ y $Bo \ll 1$ C.16
- C.8. Campo de solución de la DNS para el sistema fluido-medio poroso en diferentes posiciones: (a) Región - ω con $\varepsilon_\omega = 0.4$ (b) medio poroso- ω -fractura (d) fractura - medio poroso- η (d) Región- η con porosidad igual a $\varepsilon_\eta = 0.4$. Tamaño de fractura $f = 10\ell_c$ y saturación $S_{\gamma i} = 0.7, i = \eta, \omega$. Bajo la condición: $Ca \ll 1$ y $Bo \ll 1$. . C.17
- C.9. Campo de solución de la DNS para el sistema fluido-medio poroso en diferentes posiciones: (a) Región - ω con $\varepsilon_\omega = 0.4$ (b) Inter-región (c) Región- η con porosidad igual a $\varepsilon_\eta = 0.9$. Tamaño de fractura $f = 1\ell_c$, porosidades igual a $\varepsilon_\eta = 0.4$ y saturación $S_{\gamma i} = 0.7, i = \eta, \omega$. Bajo la condición: $Ca \ll 1$ y $Bo \ll 1$. . C.18
- C.10. Campo de solución de la DNS para el sistema fluido-medio poroso en diferentes posiciones: (a) Región - ω con $\varepsilon_\omega = 0.4$ (b) Inter-región (c) Región- η con porosidad igual a $\varepsilon_\eta = 0.4$. Tamaño de fractura $f = 6\ell_c$ y saturación $S_{\gamma i} = 0.7, i = \eta, \omega$. Bajo la condición: $Ca \ll 1$ y $Bo \ll 1$ C.19
- C.11. Campo de solución de la DNS para el sistema fluido-medio poros en diferentes posiciones: (a) Región - ω con $\varepsilon_\omega = 0.4$ (b) medio poroso- ω -fractura (d) fractura - medio poroso- η (d) Región- η con porosidad igual a $\varepsilon_\eta = 0.9$. Tamaño de fractura $f = 10\ell_c$ y saturación $S_{\gamma i} = 0.7, i = \eta, \omega$. Bajo la condición: $Ca \ll 1$ y $Bo \ll 1$. . C.20

ÍNDICE DE TABLAS

3.1. Parámetros experimentales.	88
5.1. Parámetros de a_0 y a_1 para el ajuste de ε en la inter-región del sistema: medio poroso - fluido, con $2r_0 = 10\ell_c$	131
5.2. Parámetros para la predicción de S_β en la inter-región del sistema: medio poroso - fluido, con $2r_0 = 10\ell_c$	131
5.3. Parámetros de la Ec. (5.7) para la predicción del coeficiente de permeabilidad de equilibrio del sistema: medio poroso - fluido, con $2r_0 = 10\ell_c$	133
5.4. Porcentaje de error relativo de la ODA de ELM respecto a la DNS para predecir la velocidad en la inter-región del sistema: medio poroso - fluido, con $2r_0 = 10\ell_c$	139
5.5. de $a_i, i = 0, 1$ para el ajuste de ε en la inter-región del sistema: medio poroso - fluido, con $2r_0 = 10\ell_c$ y $S_{\beta,i} = 0.7$	141
5.6. Parámetros de la Ecuación (5.7) para la predicción del coeficiente de permeabilidad de equilibrio del sistema: medio poroso - medio poroso, $S_{\beta,i} = 0.7, i = \eta, \omega$ y $2r_0 = 10\ell_c$	143
5.7. Porcentaje de error relativo de la ODA de ELM respecto a la DNS para predecir la velocidad en la inter-región del sistema: medio poroso - medio poroso, con $2r_0 = 10\ell_c$	145
5.8. Parámetros de $a_i, i = 0, \dots, 4$ para el ajuste de ε en la inter-región del sistema: medio poroso - fluido, con $2r_0 = 10\ell_c$ y $S_{\beta,i} = 0.7$	152

5.9. Coeficientes de la Ec. (5.7) para la predicción del coeficiente de permeabilidad de equilibrio del sistema: medio poroso - medio poroso, $S_{\beta i} = 0.7, i = \eta, \omega$ con $2r_0 = 10\ell_c$	153
5.10. Porcentaje de error relativo de la ODA de ELM respecto a la DNS para predecir la velocidad en la inter-región del sistema: medio poroso - fractura - medio poroso, con $2r_0 = 10\ell_c, S_{\beta} = 0.7$ y $\nu = 1$	158
A.1. Valores del parámetro λ_i	A.10

$\mathcal{A}_{\beta\gamma}$	interfase entre las fases continua-dispersa, m^2
$\mathcal{A}_{\beta\kappa}$	interfase entre las fases solida-continua, m^2
\mathbf{A}_α	Tensor de cerradura que mapea $\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta$ en $\tilde{\mathbf{v}}_\alpha$ ($\alpha = \beta, \gamma$)
$\mathbf{A}_{\alpha\lambda}$	Tensor de cerradura que mapea $\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma$ en $\tilde{\mathbf{v}}_\alpha$ ($\alpha = \beta, \gamma$)
\mathbf{a}_α	vector de cerradura que mapea $\mu_\alpha \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta$ en $\tilde{\mathbf{p}}_\alpha$ ($\alpha = \beta, \gamma$), m^{-1}
$\mathbf{a}_{\alpha\lambda}$	vector de cerradura que mapea $\mu_\alpha (\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma)$ en $\tilde{\mathbf{p}}_\alpha$ ($\alpha = \beta, \gamma$), m^{-1}
Bo ,	número de Bond = $\frac{g(\rho_\beta - \rho_\gamma) \text{máx } \ell_\alpha}{\sigma}$, adimensional
$Bo_{\beta\gamma}$	número de Bond multifásico = $\frac{\ell^2(\rho_\beta - \rho_\gamma)g}{\sigma}$, adimensional
Ca	número capilar = $\frac{\text{máx } \mu_\alpha \langle v_\alpha \rangle^\alpha}{\sigma}$, adimensional
$Ca_{\beta\gamma}$	número capilar multifásico = $\frac{\mu_{\beta\gamma} (\langle v_\beta \rangle^\beta - \langle v_\gamma \rangle^\gamma)}{\sigma}$, adimensional
\mathbf{d}_α	vector de cerradura que mapea $\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma$ en $\tilde{\mathbf{v}}_\alpha$ ($\alpha = \beta, \gamma$), $m \text{ s}^{-1} \text{ Pa}^{-1}$
d_κ ,	diámetro de las partículas solidas, m
$d_{\gamma i}$,	diámetro de las gotas dispersas ($i = 1, \dots, 5$), m
d_p	diámetro de poro en la celda unitaria (= $(\sqrt{1/2}) \ell_c - 2r_\kappa$), m
\mathbf{f}_α	vector de cerradura que mapea H en $\tilde{\mathbf{v}}_\alpha$ ($\alpha = \beta, \gamma$), ms^{-1}
\mathbf{g}	aceleración gravitatoria, ms^{-2}
$\mathbf{\Gamma}$,	tensor efectivo, m^{-1}
H	curvatura principal, m^{-1}
\mathbf{h}_α	vector efectivo de curvatura ($\alpha = \beta, \gamma$), $\text{Pa } m^{-1}$
\mathbf{h}^e	vector efectivo de curvatura de equilibrio, $\text{Pa } m^{-1}$

I	tensor unitario
K	tensor de permeabilidad de Darcy, m^2
K^e	tensor de permeabilidad de equilibrio, m^2
K_m	factor de corrección de la permeabilidad,
K_{αα}^{ne}	tensor efectivo de no-equilibrio, ($\alpha = \beta, \gamma$), m^2
K_{αλ}^{ne}	tensor efectivo de no-equilibrio ($\alpha, \lambda = \beta, \gamma, \alpha \neq \lambda$), m^{-2}
l	longitud característica de la microescala, m
l_c	ancho de la celda unitaria, m
l_α	longitud característica de la fase- α , ($\alpha = \beta, \gamma$), m
l_p	representación de la escala más pequeña del diámetro promedio del poro, m
i ,	vector que indica el patrón de periodicidad, m
L	longitud característica asociada con las cantidades promedio, m
n_{βκ}	vector normal unitario dirigido de la fase- β hacia la fase- κ
n_{βγ}	vector normal unitario dirigido de la fase- β hacia la fase- γ ($= -\mathbf{n}_{\gamma\beta}$)
O ,	indica orden de magnitud,
p_α	presión en la fase- α , ($\alpha = \beta, \gamma$), Pa
$\langle p_\alpha \rangle^\alpha$	promedio intrínseco de la presión de la fase- α , ($\alpha = \beta, \gamma$), Pa
$\langle p_\alpha \rangle$	promedio superficial de la presión de la fase- α ($= \varepsilon_\alpha \langle p_\alpha \rangle^\alpha$), $\alpha = \beta, \gamma$), Pa
\tilde{p}_α	desviación espacial microscópicas de la presión de la fase- α ($\alpha = \beta, \gamma$), Pa
\hat{p}_α	desviación del equilibrio local mecánico de la presión de la fase- α ($\alpha = \beta, \gamma$), Pa
$\langle p \rangle$	presión promedio de equilibrio, Pa
r_0	radio del volumen de promediado, m
r	vector de posición, m
r_α	vector que localiza la fase- α con respecto a un marco de referencia externo ($\alpha = \beta, \gamma$), m
r_κ	radio de la fase- κ en la celda unitaria ($= \sqrt{(1 - \varepsilon)/\pi}$), m
r_γ	radio de la fase- γ en la celda unitaria, m
S_α	saturación de la fase- α ($= \varepsilon_\alpha/\varepsilon$, $\alpha = \beta, \gamma$)
s_α	escalar que mapea $\mu_\alpha \left(\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\beta \right)$ en $\tilde{\mathbf{v}}_\alpha$, Pa s^{-1}
Σ	tensor efectivo, m^{-2}
t	tiempo, s

t^*	tiempo característico del proceso, s
\mathbf{u}_α	vector efectivo ($\alpha = \beta, \gamma$), $(\text{Pa} \cdot \text{m} \cdot \text{s})^{-1}$
$\mathbf{u}_{\beta\gamma}$	vector efectivo, s^{-1}
\mathbf{v}_α	vector de velocidad de la fase- α , ms^{-1}
$\langle \mathbf{v}_\alpha \rangle^\alpha$	promedio intrínseco del vector de velocidad de la fase- α ($\varepsilon_\alpha \langle \mathbf{v}_\alpha \rangle^\alpha$), $\alpha = \beta, \gamma$, ms^{-1}
$\langle \mathbf{v}_\alpha \rangle$	promedio superficial del vector de velocidad de la fase- α ($\alpha = \beta, \gamma$), ms^{-1}
$\tilde{\mathbf{v}}_\alpha$	desviación espacial microscópicas del vector de velocidad de la fase- α , ms^{-1}
$\hat{\mathbf{v}}_\alpha$	desviación del equilibrio local mecánico del vector de velocidad de la fase- α ($\alpha = \beta, \gamma$), ms^{-1}
$\langle \mathbf{v} \rangle$	promedio de equilibrio del vector de velocidad, ms^{-1}
$\langle v \rangle$	componente-x de equilibrio del vector de velocidad o $= \ \langle \mathbf{v}_\alpha \rangle^\alpha\ $, $\alpha = \beta, \gamma$, ms^{-1}
V_α	volumen de la fase- α , contenida dentro del volumen de promediado, m^3
V	volumen de promediado, m^3
V_f	dominio de promediado ocupado por las fases fluidas ($= V_\beta + V_\gamma$), m^3
\mathcal{V}	magnitud del volumen del dominio de promediado, m^3
bfx	vector que localiza el centroide de la región de promediado con respecto a un marco de referencia externo
\mathbf{m}	
\mathbf{y}_α	vector de posición que localiza los puntos de la fase- α relativo al centroide de V , m

Letras griegas

ε	porosidad
ε_α	fracción volumétrica de la fase- α ($= V_\beta + V_\gamma$)
$\varepsilon_{\eta\omega}$	diferencia de porosidades ($= \varepsilon_\eta - \varepsilon_\omega$)
μ_α	viscosidad de la fase- α , $\text{Pa} \cdot \text{s}$
$\langle \mu \rangle$	viscosidad promedio de equilibrio, $\text{Pa} \cdot \text{s}$
ρ_α	densidad de la fase- α ($= V_\beta + V_\gamma$), $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
$\langle \rho \rangle$	densidad promediada espacialmente, $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
ν	relación de viscosidad, ($= \mu_\beta / \mu_\gamma$)
σ	tensión interfacial entre la fase- β y $-\gamma$, N/m
φ_α	escalar que mapea $\mu_\alpha H$ en $\tilde{\mathbf{v}}_\alpha$
Φ	fuerza de cantidad de movimiento relacionada con las desviaciones de la condición

de equilibrio local mecánico, $N m^{-3}$

Sub y superíndices

β fase fluida continua

γ fase fluida dispersa

κ fase sólida

ne modelo de no-equilibrio

e modelo de equilibrio

Acrónimos

DNS Direct Numerical Simulation (Simulación Numérica Directa)

GTE Generalized Transport Equation (Ecuación de Transporte Generalizada)

ELM Equilibrio Local Mecánico

NELM No-Equilibrio Local Mecánico

ODA One-Domain Approach (Enfoque de un Sólo Dominio)

TDA Two-Domain Approach (Enfoque de Dos Dominios)

El flujo de fluidos en medios porosos ha sido y sigue siendo un tema de interés considerable en Ingeniería Química; en especial, cuando más de una fase fluida satura los espacios vacíos del medio poroso (Nogueira *y col.*, 2013). Entre las diversas formas de flujo multifásico en medios porosos, se encuentra el caso en el que una de las fases fluidas se encuentra dispersa en otra fase fluida continua. La relevancia de este tipo de sistemas trasciende el rango de aplicación de la ingeniería química; de hecho, algunas aplicaciones de este tipo de flujo son:

- La recuperación mejorada petróleo (McAuliffe, 1973; Jennings *y col.*, 1974; Schmidt *y col.*, 1984; Schramm, 1992).
- Remediación de suelos y mantos acuíferos (Ouyang *y col.*, 1995; Mulligan *y col.*, 2001; Jain y Demond, 2002a; Mayer y Hassanizadeh, 2009).
- Rectores catalíticos de flujo multifásico (Trambouze, 1990; Duduković *y col.*, 2002).
- Coalescedores porosos (Bitten, 1970; Hadjiev y Kuychoukov, 1989).
- Secuestro de CO_2 en formaciones geológicas (Durucana *y col.*, 2013).

El flujo de una fase fluida a través de un medio poroso rígido (*i.e.* sin deformaciones) y homogéneo (*i.e.* sin variaciones espaciales de la porosidad) puede modelarse por la ley de Darcy, y las características principales de este flujo se han estudiado por más de 150 años. De acuerdo a esta ley, la velocidad de una sola fase fluida- β en un medio poroso, $\langle \mathbf{v}_\beta \rangle$ se obtiene de la relación

con el gradiente de presión de la fase: $\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta - \rho_\beta \mathbf{g}$, de acuerdo a

$$\varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta = -\frac{\mathbf{K}}{\mu_\beta} \cdot \left(\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta - \rho_\beta \mathbf{g} \right) \quad (1)$$

donde, \mathbf{K} , es el tensor de permeabilidad intrínseca y el cual es función únicamente de la topología de la fase sólida del medio poroso homogéneo, \mathbf{g} , es el vector de gravedad, μ_β , es la viscosidad del fluido y ε_β , la fracción volumétrica del fluido en el medio poroso. Esta misma relación entre el gradiente de presión y la velocidad superficial del fluido se ha obtenido de forma teórica escalando las ecuaciones de transporte descriptivos del flujo de un fase fluida a través de un medio poroso usando métodos como: homogeneización (Bear y Cheng, 2010) o promedio volumétrico (Whitaker, 1999). Sin embargo, el flujo multifásico en medios porosos es un proceso conceptualmente más complicado y aún representa un enorme desafío teórico. De hecho, existe una gran brecha entre los modelos empíricos utilizados en aplicaciones industriales y la comprensión del transporte de cantidad de movimiento que se lleva a cabo dentro de los poros y cómo estos procesos pueden ser determinantes en sistemas prácticos. En los modelos empíricos, este transporte es modelado mediante una generalización multifásica de la ley de Darcy (Dullien, 1992):

$$\varepsilon_\alpha \langle \mathbf{v}_\alpha \rangle^\alpha = -\frac{\mathbf{K}K_\alpha}{\mu_\alpha} \cdot (\nabla \langle p_\alpha \rangle^\alpha - \rho_\alpha \mathbf{g}), \alpha = \beta, \gamma \quad (2)$$

aquí, K_α , representa la permeabilidad relativa de la fase- α ($\alpha = \beta, \gamma$), la cual es función de su respectiva saturación, S_α (fracción relativa del volumen vacío del medio poroso ocupado por esa fase, donde: $S_\beta + S_\gamma = 1$). En estos modelos se propone la presión capilar, definida como: $p_c = \langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma$, para relacionar las presiones de ambas fases fluidas y representar el equilibrio entre las interfases de los fluidos. La presión capilar depende de la saturación y es obtenida experimentalmente (Mayer y Hassanizadeh, 2013).

En el flujo disperso, los modelos desarrollados extienden la ley de Darcy incorporando los mecanismos de transporte al coeficiente de permeabilidad y se define una sola diferencia de presión global para el flujo de ambas fases (Schramm, 1992). La predicción de los coeficientes de permeabilidad como función de las propiedades estructurales del sólido y la saturación es uno de los desafíos principales en el desarrollo de modelos para este flujo multifásico.

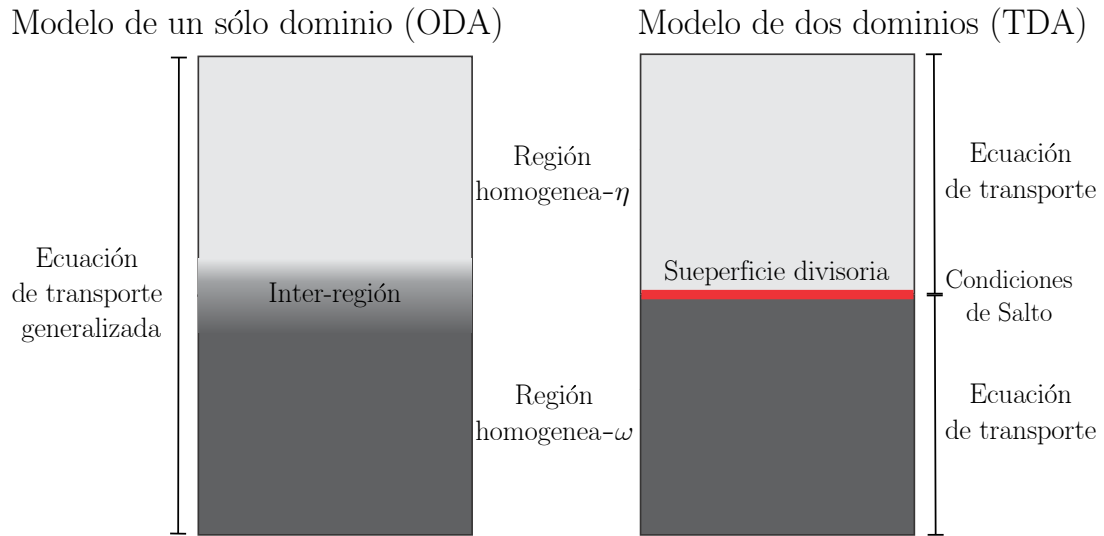


Figura 1. Enfoque de uno y dos dominios para modelar la frontera entre dos regiones homogéneas.

Este tipo de flujo opera a diferentes niveles de escala, desde la escala del poro hasta la escala de campo. Para reducir esta complejidad, se han propuesto metodologías de escalamiento con el objetivo de desarrollar modelos macroscópicos que describan el transporte multifásico en términos de variables promedio y coeficientes efectivos que capturen las características esenciales de la escala del poro. El desarrollo de modelos macroscópicos (o *promedio*) consiste en aplicar operadores de promediado a las ecuaciones gobernantes a la escala del poro. Uno de los métodos para llevar a cabo el escalamiento, y usado en esta disertación doctoral, es el *método del promedio volumétrico* (Whitaker, 1999), el cual proporciona el marco teórico para desarrollar, de manera rigurosa, el modelo a la escala de campo para el flujo multifásico. El método permite: (1) Obtener la definición de las variables promedio. (2) Definir los coeficientes de medio efectivo, contenidos en el modelo escalado, en términos de variables de cerradura que son la liga con los fenómenos de transporte a escala de poro. (3) Plantear los problemas de valores a la frontera de las variables de cerradura que permiten la predicción de los coeficientes efectivos. (4) Identificar la secuencia de simplificaciones (a través de *postulados de escalamiento*, Wood y Valdés-Parada, 2013), que permiten obtener las restricciones que validan el modelo escalado.

La deducción de modelos escalados se centra en la región homogénea del medio poroso. En este contexto, la región homogénea se refiere a una parte del sistema donde los coeficientes de medio efectivo son independientes de la posición. La región cercana a la frontera de dos regiones homogéneas, denominada *inter-región* se caracteriza por variaciones rápidas en las propiedades efectivas (Valdés-Parada *y col.*, 2009b, 2013). Existen dos enfoques para modelar

el transporte en la inter-región, y se muestran en la Figura 1: (1) Modelo de un *sólo dominio* (*One-Domain Approach, ODA*), aquí las ecuaciones de transporte son válidas para todo el sistema: *región homogénea - inter-región - región homogénea*, considerándolo como un *pseudo-continuo* y los coeficientes efectivos dependen de la posición. (2) Modelo de dos dominios (*Two-Domain Approach, TDA*), aquí las ecuaciones deducidas para las regiones homogéneas son complementadas por condiciones de frontera, denominados *condiciones de salto*, donde la inter-región es remplazada por una *superficie divisoria*, y las condiciones de frontera están en términos de coeficientes de salto.

En este trabajo se desarrollan los modelos cerrados del flujo disperso de dos fases fluidas inmiscibles tanto en la región homogénea del medio poroso como en la inter-región, en esta última desde el enfoque ODA, donde además se plantea la suposición del *equilibrio local mecánico*. Esto para ser comparativos con las propuestas experimentales de (Beavers y Joseph, 1967) planteadas en la literatura. Finalmente el modelo ODA se extiende al análisis de sistemas conformados por regiones porosas de diferente porosidad (medio poroso heterogéneo) y otro de regiones porosas separadas por un canal (medio poros fracturado).

El trabajo está organizado de la siguiente manera: en el Capítulo 1 se presenta la revisión bibliográfica que se enfoca en los tipos de modelos para describir el flujo disperso en medios porosos homogéneos mediante propuestas de modelos semi-empíricos. Además, se presentan un resumen de varias propuestas metodológicas para desarrollar modelos escalados. En este capítulo se incluye, además, la aplicación del principio de equilibrio local como una suposición válida para reducir a modelos de una sola ecuación la descripción de procesos de transporte multifásico de calor, masa y cantidad de movimiento. También se presentan los diferentes enfoques, en el marco teórico del método del promedio volumétrico, que se han usado para el análisis de fenómenos de transporte en la frontera entre medios homogéneos. Posteriormente, se presentan los objetivos generales y particulares de este trabajo; los cuales se plantean para un análisis del flujo disperso inmiscible en un medio poroso homogéneo y en la frontera cercana entre dos medios homogéneos.

El resto del trabajo se divide en dos partes. En la Parte I (Capítulo 2 y Capítulo 3), se enfoca en el desarrollo de los modelos cerrados para el transporte de cantidad de movimiento en el seno de un medio poroso. En el Capítulo 2 se lleva a cabo la deducción del modelo escalado para el transporte disperso de dos fases fluidas inmiscibles usando el método del promedio volumétrico. La cerradura del modelo se obtiene a partir de la deducción de los problemas de valores a la

frontera asociados a la predicción de los coeficientes efectivos involucrados en las ecuaciones promedio obtenidas. En el Capítulo 3, se desarrolla el modelo bajo la suposición del equilibrio local mecánico, en la cual se deduce un modelo de una sola ecuación en términos de variables de equilibrio, para describir el flujo disperso. Además, en este capítulo se presentan las predicciones de los coeficientes efectivos, donde se examina el efecto de la fase dispersa en el flujo global. La validez de los valores calculados se evalúa mediante la comparación con datos experimentales disponibles de la literatura de los coeficientes efectivos.

En la Parte II del trabajo (Capítulo 4 y Capítulo 5), se presenta el análisis cercano a la frontera entre dos regiones homogéneas, donde se obtiene el modelo cerrado ODA de equilibrio local mecánico. En el Capítulo 4, se desarrollan las ecuaciones promedio de transporte generalizada bajo el principio del equilibrio local mecánico; se deducen las condiciones que permiten validar esta suposición dentro del inter-región en términos de restricciones de longitudes características. La cerradura del modelo ODA de equilibrio local mecánico se realiza determinando la funcionalidad con la posición de los coeficientes efectivos presentes en las ecuaciones promedio. En el Capítulo 5, se muestran las predicciones de los coeficientes efectivos a partir de la solución de las ecuaciones microscópicas en un dominio de solución de geometría representativa del sistema; los cálculos se realizan para diferentes tipos de inter-región: medio poroso - fluido, medio poroso - medio poroso y medio poroso - fractura -medio poroso. Finalmente en este capítulo, la precisión del modelo se evalúa de la comparación entre los perfiles de velocidad obtenidas de la ecuación promedio y de la solución de las ecuaciones microscópicas.

Por último, se presentan las Conclusiones generales, comentarios finales y prospectivas de este trabajo, que en general plantean la deducción del modelo TDA para el flujo disperso en la inter-región. Finalmente, se presentan las referencias que sustentan los antecedentes del trabajo y los apéndices complementarios. En el Apéndice A, se desarrolla el esquema de cerradura de los modelos de equilibrio y no-equilibrio local mecánico en el seno del medio poroso y la correspondiente predicción de los coeficientes efectivos asociados. En el Apéndice B, se detalla la deducción de las restricciones del modelo de equilibrio, en términos de estimados de órdenes de magnitud. Por el otro lado, en el Apéndice C, se deducen las restricciones asignadas a la suposición de equilibrio en la inter-región, así como información adicional para la predicción de las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos presentes en el modelo ODA de equilibrio local mecánico.

CAPÍTULO 1

REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

En este capítulo se presenta la revisión bibliográfica donde se exponen los trabajos más relevantes relacionados con la presente investigación. En esta revisión se identifican, particularmente cuatro temas. El primer tema trata sobre los diferentes tipos de modelos para describir el flujo disperso en medios porosos homogéneos que se han desarrollado a partir de la evidencia experimental y las teorías disponibles para describir este proceso. Al operar el flujo disperso desde la escala del poro a la escala de estudio, es posible aplicar metodologías de escalamiento en el desarrollo de modelos del flujo disperso. Por consiguiente, el segundo tema se enfoca en los trabajos relacionados con la aplicación de métodos de escalamiento para la derivación de modelos del flujo de dos fases fluidas inmiscibles en medios porosos homogéneos, que sirven como precedente para abordar su aplicación para el flujo disperso. Para los procesos multifásicos, es común aplicar la suposición de *equilibrio local* para reducir la complejidad en los modelos obtenidos del escalamiento, por ello, el tercer tema se centra en los estudios de transporte multifásico de masa, calor y cantidad de movimiento en medios porosos homogéneos. Se debe tener en cuenta que las ecuaciones deducidas en el proceso de escalamiento se restringen a la región del medio poroso homogéneo, por lo tanto el último tema se trata sobre el modelado del transporte entre regiones homogéneas (inter-región).

1.1. Modelos matemáticos para el flujo disperso a través de medios porosos

El flujo disperso en medios porosos es un proceso complejo, y su modelado matemático representa un enorme desafío. Actualmente, algunas de las teorías citadas para desarrollar modelos que describen el flujo disperso en medios porosos son (Schramm, 1992; Cobos *y col.*, 2009):

1. Modelos homogéneos (Savins, 1969; McAuliffe, 1973; Alvarado y Marsden, 1979; Abou-Kassem y Farouq Ali, 1995).
2. Modelo de retardo de gotas (Devereux, 1974a,b).
3. Modelo de filtración (Soo y Radke, 1986; Soo *y col.*, 1986; Jain y Demond, 2002a).
4. Modelo de redes capilares (Cobos *y col.*, 2009; Romero *y col.*, 2011; Nogueira *y col.*, 2013).

1.1.1. Modelos homogéneos

La suposición básica en estos modelos es que el sistema de fases dispersa-continua, comúnmente llamada emulsión, se consideran como un continuo, es decir, conforman una sola fase fluida *pseudo-homogénea*. Esto significa que las características locales del flujo de las fases fluidas dentro de los poros no son importantes en el transporte global a través el medio poroso. Así, las interacciones de las gotas de la fase dispersa entre ellas mismas y con la superficie del sólido se consideran despreciables. Al considerarse la emulsión como una sola fase fluida, su transporte a través de un medio poroso se modela usando los conceptos para el flujo de fluidos Newtonianos y no-Newtonianos en medios porosos (Savins, 1969; Alvarado y Marsden, 1979). El trabajo experimental de Alvarado y Marsden (1979) señala que, a concentraciones volumétricas de la fase dispersa menores al 50% (emulsión diluida), la emulsión muestra un comportamiento semejante a un fluido Newtoniano, por lo contrario, a concentraciones mayores el comportamiento tiende a ser no-Newtoniano.

En el caso de emulsiones Newtonianas, la viscosidad es independiente de la deformación del fluido, y la ley de Darcy se usa para modelar su flujo en un medio poroso. El modelo considera que el coeficiente de permeabilidad depende de factores como: la concentración de la fase dispersa,

la relación de viscosidades de las fases dispersa y continua, las propiedades interfaciales entre los fluidos y los fluidos con el sólido, el tamaño y distribución de las gotas de la fase dispersa, entre otras que se incluyen en una viscosidad efectiva (Savins, 1969; Alvarado y Marsden, 1979). En la literatura se presentan una serie de correlaciones para determinar esta viscosidad de las emulsiones (Abou-Kassem y Farouq Ali, 1995; Sherman, 1983; Schramm, 1992). La evidencia experimental (McAuliffe, 1973; Alvarado y Marsden, 1979; Soo y Radke, 1984) muestra que existe una reducción de la permeabilidad superior al 50 % del valor inicial, a medida que se inyecta de manera constante una emulsión de concentración diluida a través del medio poroso homogéneo. Esta reducción de permeabilidad no puede ser predicha por este modelo. Lo anterior se debe a que no se consideran las interacciones de la fase dispersa dentro de los canales del poro y ésta con la superficie del sólido. Posteriormente, se presentaron extensiones a la ley de Darcy para describir el flujo de emulsiones Newtonianas para tratar de incluir estas interacciones por medio de un coeficiente de permeabilidad modificado (Alvarado y Marsden, 1979; Soo y Radke, 1984).

Para las emulsiones no-Newtonianas, la viscosidad es función de la deformación del fluido, por lo tanto la ley de Darcy se modifica para describir este comportamiento. Las emulsiones generalmente exhiben un comportamiento semejante a un fluido pseudo-plástico (McAuliffe, 1973; Alvarado y Marsden, 1979). Se ha propuesto el uso de modelos matemáticos desarrollados para polímeros no-Newtonianos para describir el flujo de emulsiones. Dentro de los métodos para predecir el comportamiento del flujo no-Newtoniano en medios porosos, se identifican aquellos que acoplan una descripción particular del medio poroso con un modelo reológico específico para la emulsión (McKinley *y col.*, 1966; Savins, 1969). El modelo de tubos capilares para medios porosos y ley de potencias para la emulsión se ha usado como referente para modelar este tipo de flujo de emulsiones (McAuliffe, 1973; Alvarado y Marsden, 1979). En este modelo se relaciona una velocidad promedio de poro con la velocidad de flujo por medio de la ecuación de Dupuit-Forchheimer (Scheidegger, 1974). El modelo de tubo capilar-ley de potencia considera las siguientes suposiciones:

- La emulsión es un fluido pseudo-homogéneo dentro de la escala de campo. Sin embargo sus parámetros reológicos son funciones de la temperatura, presión, composición de agentes surfactantes, tamaño de gota y la concentración (McKinley *y col.*, 1966; Savins, 1969).

- El medio poroso se representa por un conjunto de tubos capilares con un radio hidráulico equivalente (Scheidegger, 1974).
- La permeabilidad no se ve afectada por el flujo de la emulsión a través del medio poroso. Alvarado y Marsden (1979) definen una permeabilidad de flujo ajustable para caracterizar la reducción de la permeabilidad.
- El flujo es laminar, y los efectos visco-elásticos son despreciables.
- El comportamiento reológico del fluido es independiente de la geometría del medio poroso y se representa por un modelo válido en un rango de deformaciones del fluido dentro del medio poroso.

La ley de Darcy modificada para el flujo de una emulsión no-Newtoniana, a través de un medio poroso se encuentra en términos de la viscosidad efectiva dependiente de los parámetros reológicos, la permeabilidad, la porosidad, la velocidad y caída de presión del modelo de tubo capilar del medio poroso. Varios modelos para la viscosidad efectiva se encuentran reportados en la literatura (Abou-Kassem y Farouq Ali, 1995; Schramm, 1992). El modelo de tubo capilar-ley de potencia, sin embargo, tiene las siguientes limitaciones: (1) existen desviaciones del comportamiento reológico de la emulsión respecto a la ley de potencia, (2) la reducción gradual de la permeabilidad no puede ser predicha, (3) el modelo es válido para concentraciones altas de la fase dispersa en la emulsión y con tamaños de gota pequeños comparado con el radio de los poros, como lo señalan los experimentos de McAuliffe (1973); Alvarado y Marsden (1979).

1.1.2. Modelo de retardo de gota

Este modelo se basa en el concepto de una reducción de la velocidad de la fase continua debido a la deformación de la gota a lo largo de su flujo a través de las reducciones de diámetro de los poros. Cuando las gotas entran a una reducción del poro, con un tamaño mayor al diámetro de la garganta del poro, ésta se deforma para fluir a través de él, como se muestra la Figura 1.1. Durante este proceso, las gotas experimentan una fuerza de resistencia capilar que provoca que la fase dispersa se mueva a una velocidad menor que la fase continua y como consecuencia la permeabilidad se reduce.

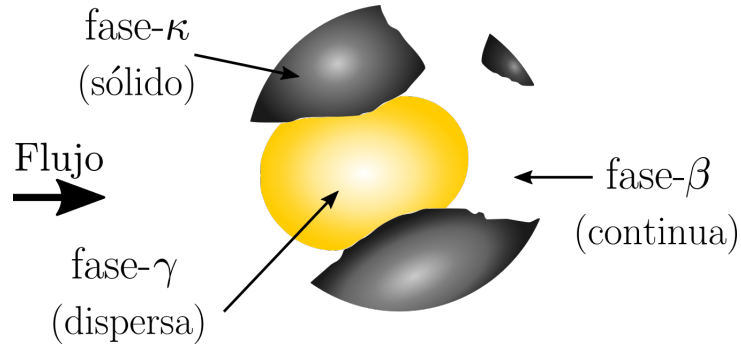


Figura 1.1. Deformación de la gotas en las gargantas de los poros que provoca la reducción de la velocidad de la fase continua.

La formulación matemática de este modelo fue propuesta por Devereux (1974a), quien se basó en la teoría clásica de Buckley y Leverett (1942), usada para el estudio del flujo bifásico en medios porosos, y las ecuaciones desarrolladas por Scheidegger (1974). En esta teoría se propone la solución del siguiente conjunto de ecuaciones:

- La ley de Darcy y la ecuación de continuidad para las fases continua y dispersa.
- Identidades usadas para reducir la ecuación de estado para la densidad, planteadas en la propuesta original de Buckley y Leverett (1942).
- Establecer un flujo total constante.
- Ecuación que define la resistencia capilar debido al retardo de las gotas a través de las gargantas de los poros.

El modelo de Devereux (1974a) supone que las fases son incompresibles y ausente de efectos gravitatorios, a diferencia del modelo de Buckley y Leverett (1942). Este modelo requiere conocer, como función de la saturación de la fase dispersa en el medio poroso, la permeabilidad relativa de las fases dispersa y continua y un coeficiente denominado: *fuerza de retardo capilar*. Estos parámetros de flujo deben determinarse antes de usar el modelo. Además, se debe conocer el flujo volumétrico total, la porosidad y las condiciones iniciales del sistema.

El valor del coeficiente de la fuerza de retardo capilar depende de la saturación de la fase dispersa, y a su vez, de la distribución del tamaño de las gotas. Este coeficiente engloba, los siguientes efectos de fuerzas capilares por unidad de volumen del medio poroso, que no pueden ser calculados directamente:

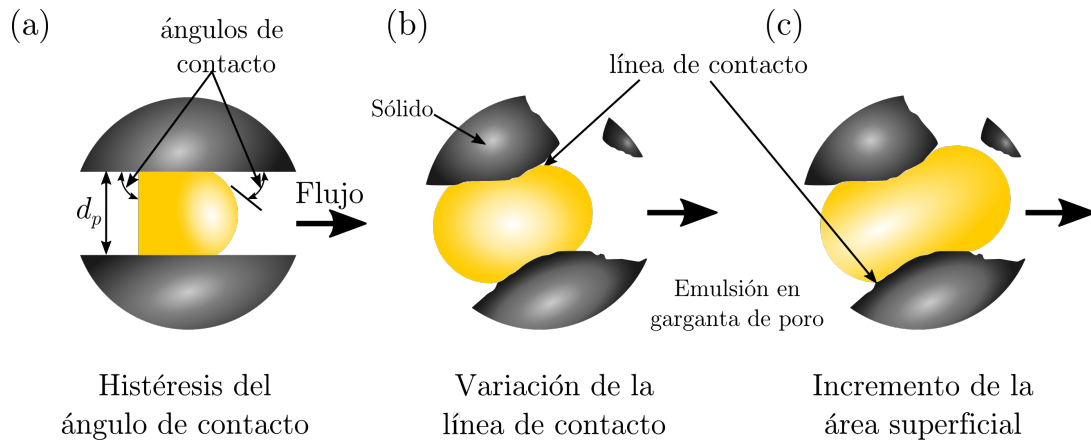


Figura 1.2. Mecanismos englobados en el factor de retardo capilar (Devereux, 1974a).

- histéresis del ángulo de contacto de las gotas de la fase dispersa moviéndose a través de un tubo capilar (Figura 1.2 a),
- variación en la longitud de avance contra el retroceso de la línea de contacto para una gota que se mueve a través de un poro de sección transversal variable, cuyas paredes forman un ángulo de contacto definido (Figura 1.2 b)
- incremento de la área de superficie debido a la deformación de la gota moviéndose a través de las variaciones de la sección transversal del poro, cuando no existe contacto con las paredes (Figura 1.2 c).

Dentro de las ventajas del modelo de retardo de gotas se pueden enumerar las siguientes: (1) describe adecuadamente la reducción de la permeabilidad como función del incremento de la concentración de la fase dispersa en el medio poroso, (2) los efectos capilares se incorporan mediante un coeficiente que permite relacionar el tamaño de las gotas y los poros junto con la saturación de la fase dispersa (Devereux, 1974a). Los resultados experimentales de Devereux (1974b) demostraron que incluir los efectos capilares, para describir el flujo de emulsiones en medios porosos, predice adecuadamente (con errores menores al 10 % para concentraciones menores al 50 %) el flujo total de la emulsión como función del tiempo. Este modelo, sin embargo, tiene las siguientes limitaciones: (1) el modelo no predice adecuadamente el comportamiento del flujo del sistema disperso a saturación superior al 50 %, ya sea debido a la coalescencia de la emulsión o las interacciones de las gotas dentro del medio poroso (Devereux, 1974b). (2) No es clara la interpretación física del coeficiente de fuerza capilaridad. (3) No considera la captura

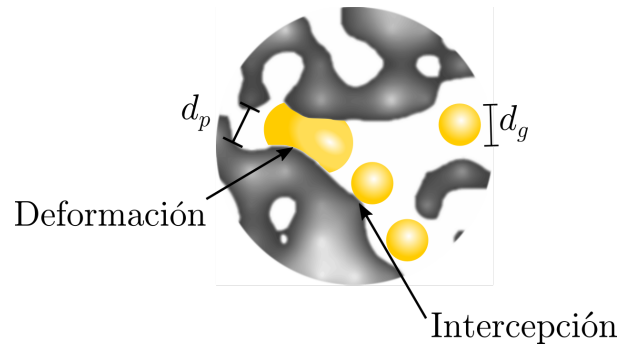


Figura 1.3. Mecanismos de captura de la fase dispersa dentro de los poros (Soo y Radke, 1986).

de las gotas dentro de los poros, como consecuencia el valor de la permeabilidad inicial, incluida en el modelo, se recupera al restablecer el flujo de la fase continua a través del medio poroso. Evidencias experimentales (McAuliffe, 1973; Soo y Radke, 1984), sin embargo, sugieren que la reducción de la permeabilidad se mantiene hacia un valor constante y no se recupera su valor inicial en su totalidad.

1.1.3. Modelo de filtración

Este modelo se basa en los principios de filtración profunda (Herzig *y col.*, 1970) y fue propuesto por Soo y Radke (1986); Soo *y col.* (1986), quienes sugirieron que las gotas, que conforman la fase dispersa, no sólo se retardan debido a fuerzas capilares sino que además son capturadas en las reducciones del diámetro de los poros. Estos autores proponen que las gotas son capturadas en el medio poroso debido a dos mecanismos de captura, ilustrados en la Figura 1.3:

- *Deposición.* Se refiere a la condición que resulta cuando las gotas son atrapadas en las reducciones de los poros de tamaño similares a éstas. La velocidad de captura de las gotas es directamente proporcional al flujo total.
- *Intercepción.* Es el proceso donde las gotas son atraídas entre ellas, son capturadas por la superficie del sólido del medio poroso o dentro de cavidades mediante recirculación de gotas. Esta atracción entre gotas y de gotas con la superficie del sólido dentro de las paredes del poro se atribuye a fuerzas de van der Waals, eléctricas, gravitacionales e hidrodinámicas.

La captura cerca de las reducciones del poro, reducen la efectividad del diámetro de los poros afectando el flujo de otras gotas. La retención de las gotas diversifican el flujo dentro de los poros y donde el flujo se desvía a los poros más grandes, donde la probabilidad de captura son menores debido al aumento de tamaño de los poros. Esta captura, y la consecuente diversificación del flujo, genera la reducción de la permeabilidad del medio poroso.

Estos mecanismos son similares a los presentes en el proceso de filtración de lecho profundo (Herzig *y col.*, 1970). Sin embargo, en el proceso de filtración la relación entre tamaño de partículas y el diámetro de los poros es pequeña. Como consecuencia, la captura de las partículas mediante intercepción es dominante y la distribución del flujo no se altera en el medio poroso. La reducción de la permeabilidad causada por las partículas retenidas en la superficie del sólido no es significativa y frecuentemente se desprecia. El reingreso de las gotas capturadas al flujo puede ocurrir como resultado de una deformación debido a un incremento en la presión local de las gotas para superar la resistencia de las fuerzas capilares. La forma que adquieran las gotas dependerá de la mojabilidad de la superficie del sólido.

En el modelo propuesto por Soo y Radke (1986) para el flujo disperso se caracteriza por los tres parámetros siguientes:

1. *Coefficiente de filtrado*. Está relacionado con la eficiencia de captura de las gotas en un tamaño de poro. El inverso de este coeficiente indica la distancia en tamaños de poro que la gota es capturada. Cuando el tamaño de las gotas y del diámetro de los poros son similares (*i.e.* deposición) la eficiencia de la captura es cercana a uno. Por el contrario cuando los tamaños de las gotas son mucho menores al diámetro del poro (*i.e.* intercepción) su valor tiende a cero.
2. *Redistribución de flujo*. Toma en cuenta la diversificación del flujo mencionado previamente. Describe el efecto de la redistribución en la cinética de retención de las gotas capturadas en los poros y el estado estacionario de la retención de las gotas. Si el mecanismo dominante es la deposición este parámetro se vuelve constante e independiente del coeficiente de filtrado.
3. *Restricción de flujo*. Mide la efectividad de las gotas retenidas sobre la reducción de la permeabilidad por unidad de volumen de gotas. Este parámetro refleja la diferencia en la efectividad de una sola gota de tamaño similar al diámetro de poro, en comparación

de un conjunto de gotas de tamaño más pequeñas que tiene el mismo volumen, sobre la reducción de la permeabilidad local. Si el mecanismo dominante es la deposición este parámetro es un valor constante cercano a la unidad.

En este modelado, la permeabilidad se expresa en términos de la porosidad y de los parámetros arriba mencionados, agrupando el coeficiente de filtrado y parámetro de redistribución en un coeficiente de retención global. Estos parámetros, por falta de un tratamiento teórico, son estimados de los siguientes datos experimentales: diámetro promedio de gota y poro, distribución de tamaño del poro, diámetro promedio de las partículas sólidas, porosidad y la concentración inicial de la fase dispersa. Al suponer que sólo las gotas no capturadas son desplazadas, en el modelo de filtración, la reducción de la permeabilidad se mantiene sin importar si se restablece el flujo sólo de la fase continua a través del medio poroso después de el flujo de un sistema disperso, como lo sugiere la evidencia experimental (McAuliffe, 1973; Soo y Radke, 1984). Una comparación de los perfiles de la reducción de la permeabilidad obtenidos por el modelo de filtración y retardo se presenta en el trabajo de Soo y Radke (1986), señalando que este último predice que las gotas en el medio poroso eventualmente se diluyen y la permeabilidad se incrementa gradualmente a su valor inicial.

La comparación cualitativa del modelo de filtración con los datos experimentales mostraron una correspondencia exitosa de la estimación de la reducción del coeficiente permeabilidad y los perfiles de concentración de la fase dispersa (Soo *y col.*, 1986). La estimación requirió del ajuste adecuado del coeficiente de filtrado y de los parámetros de redistribución y restricción de flujo usando los perfiles experimentales de concentración de la fase dispersa. El modelo, en general, predice adecuadamente los mecanismos de transporte planteados en esta teoría, para describir el flujo de una emulsión estable, de concentración diluida dentro de un medio poroso de permeabilidad y porosidad conocida. Sin embargo, al considerar la independencia con la concentración inicial de los parámetros de captura, la reducción de permeabilidad puede ser subestimada para concentraciones mayores consideradas para el flujo una emulsión diluida establece a través de un medio poroso. La comparación con datos experimentales obtenidos por Soo *y col.* (1986), señalan que la reducción de la permeabilidad, determinada por esta teoría, muestra una desviación con los datos experimentales cuando la concentración inicial de la fase dispersa se incrementa, atribuida al incremento de las resistencias hidrodinámicas o una

dependencia no lineal de captura. Además, debido a que el modelo presenta simplificaciones en la estimación de parámetros, que supone que las partículas sólo forman una monocapa en la superficie de las partículas sólidas, mecanismos adicionales en el parámetro restricción de flujo no considera que varias gotas de diámetro más pequeño que el poro pueden tener la misma eficiencia que un sola gota de diámetro cercano al del poro. Sin embargo, experimentalmente se ha determinado que un aumento en la fuerzas de atracción, las gotas capturadas por intercepción actúan como una superficie adicional de captura; por consiguiente una multicapa es generada y se ve afectada por el grado de interacción entre las gotas y las gotas previamente capturadas en la superficie del sólido (Darby y Lawler, 1990; Liu *y col.*, 1995).

Jain y Demond (2002a) modificaron el modelo de filtración con el objetivo de incluir el fenómeno de la multicapa en la estimación de la reducción de la permeabilidad. El efecto de la multicapa se incorpora a través de un factor adicional dentro del parámetro de redistribución, que extiende los cambios dominados por la deposición y/o intercepción y de las gotas emulsificadas. Lo anterior, a medida que las gargantas de los poros se reducen y la agregación de las gotas se incrementan. En los trabajos de Jain y Demond (2002a), además se estimó la reducción de las conductividades hidráulicas de varios sistemas porosos y expresaron la variación de la viscosidad como un incremento lineal dependiente del flujo gradual de la emulsión. A partir de sus datos experimentales se sugiere que el flujo, inclusive de una emulsión diluida con gotas de diámetro pequeñas en comparación del poro, reducen significativamente la conductividad hidráulica del sistema.

1.1.4. Modelo de redes capilares

En este tipo de modelo se incorpora la información relevante de la física del flujo de la fase dispersa en un medio poroso (*i.e.* flujo de las gotas a través de los poros estrechos), a la escala del poro, basados en datos experimentales. El modelo de redes capilares se construye con el objetivo de obtener parámetros macroscópicos del escalamiento del transporte a la escala del poro (Cobos *y col.*, 2009; Romero *y col.*, 2011).

El método para desarrollar el modelo para el flujo disperso en un medio poroso mediante redes capilares se puede resumir a continuación (Romero *y col.*, 2011; Nogueira *y col.*, 2013):

1. Se requiere conocer previamente una *red capilar*, la cual es una descripción geométrica

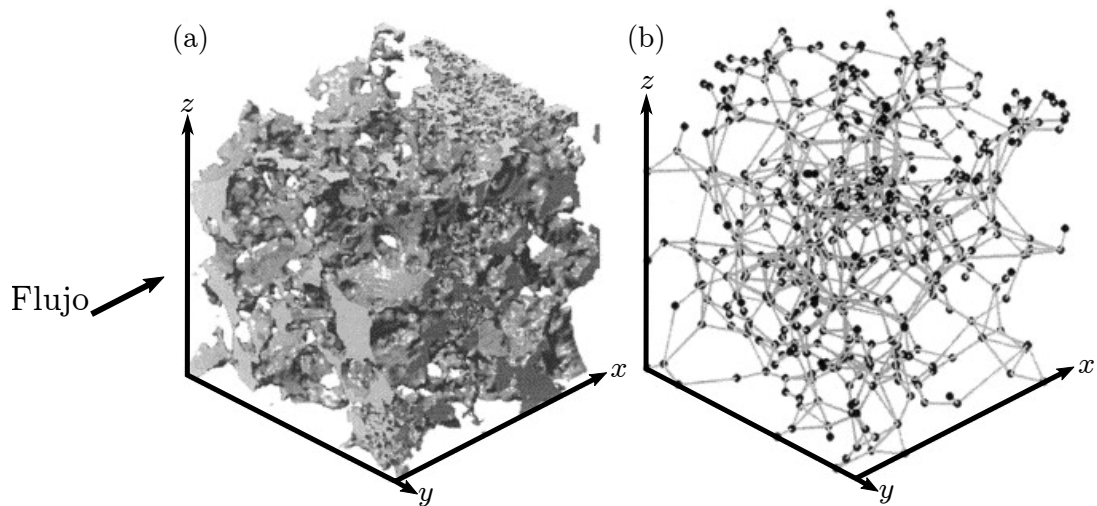


Figura 1.4. (a) Reconstrucción de los espacios de los poros de micrografías (Oren *y col.*, 1998). (b) Red capilar correspondiente.

cuantitativa de la complejidad estructural del medio poroso real. La construcción de esta representación de la microestructura se desarrolla de imágenes tridimensionales de los espacios de los poros obtenidas por medio de micrografías digitalizadas del sólido de interés (Oren y Bakke, 2002). La red capilar consiste de espacios vacíos, llamados nodos, interconectados por tubos capilares, donde cada elemento de la red tiene asignado un radio, una longitud y un factor de forma para presentar la geometría compleja del medio poroso, como lo muestra la Figura 1.4.

2. La velocidad flujo de la fase dispersa en cada poro de la red capilar se describe mediante ecuaciones constitutivas. Estas ecuaciones se proponen empíricamente a partir de relaciones algebraicas que extrapolan datos experimentales obtenidos a la escala local. Las caídas de presión local, asociada con el flujo a las entradas y salidas del capilar, frecuentemente se considera Δp . Finalmente, junto con las ecuaciones de conservación de masa en cada poro, para el total de poros que conforman la red, se obtiene un sistema de ecuaciones que relacionan la presión de cada nodo en la red capilar; en forma similar a las ecuaciones de Kirchhoff para una red de resistores eléctricos.

Para el flujo disperso, se ha usado la ecuación de Poiseuille para relacionar la velocidad del flujo a través de un elemento capilar, de longitud dada, con una diferencia de presión entre dos nodos conectados por un capilar. Esta funcionalidad está expresada en términos de una *conductancia capilar*, la cual es determinada por la geometría de la sección transversal

del capilar, la viscosidad de la fase continua y un factor que incorpora el efecto de las gotas de la fase dispersa en el flujo de la emulsión a través de los poros, denominado *factor de movilidad* (Cobos *y col.*, 2009).

3. El sistema de ecuaciones se resuelve iterativamente por medio de métodos numéricos (*i.e.* Método de gradiente conjugado). La primera aproximación supone sólo el flujo de la fase continua. Posteriormente, se calcula la presión en cada nodo y la velocidad del flujo en cada capilar, suponiendo un factor de movilidad inicial. El factor de movilidad se actualiza y el campo de la presión se calcula. Finalmente, se lleva a cabo la solución numérica hasta que se obtiene una convergencia con un valor de error aceptable.
4. De la solución del campo de presión se determina el factor de movilidad macroscópico para toda la red capilar, el cual agrupa el efecto global de la fase dispersa sobre el flujo del medio poroso. De este parámetro global, se puede determinar el valor del coeficiente de permeabilidad relativa, para usarla en una ecuación tipo Ley de Darcy y así finalmente describir el flujo disperso. Estudios en la literatura muestran que el comportamiento del coeficiente de permeabilidad es similar al obtenido en otros tipos de modelos (*i.e.* modelo de retardo de gota y modelo de filtración) (Nogueira *y col.*, 2013).

El uso del método de redes capilares para proponer el modelo del flujo disperso frecuentemente requiere establecer las siguientes suposiciones (Romero *y col.*, 2011):

- Las gotas de emulsión son lo suficientemente pequeñas que no ocupan más de un elemento de la red capilar, por lo tanto el efecto sobre el flujo es local y se puede describir por un factor de movilidad definido sobre cada capilar en la red.
- La emulsión es estable y mono dispersa (variaciones de tamaño de gota relativamente pequeñas).
- Una sola gota dispersa es suficientemente representativa para evaluar la reducción del factor de movilidad para cada capilar. Esta suposición resulta aceptable si se toma en cuenta que las gotas grandes¹ dominan la caída de presión y la cantidad de ellas en la emulsión es pequeña.

¹Gotas con diámetros cercanos a los diámetros de los poros.

El modelo de redes capilares requiere de conocer previamente el factor de movilidad, para ello Cobos *y col.* (2009) realizaron experimentos que consistían en el flujo de una emulsión a través de tubos capilares con reducción gradual de diámetro con el objetivo de imitar el flujo dentro del poro. En estos experimentos, el factor de movilidad se definió como la relación empírica entre la caída de presión entre la entrada y la salida del tubo capilar del flujo de la fase continua con el flujo ambas fases: dispersa y continua, para una misma velocidad global de flujo. La interpretación física dada a este factor corresponde a una corrección adimensional de la movilidad originada por el efecto del flujo de las gotas dentro de las gargantas de los poros, que reduce la movilidad de la fase continua (Romero *y col.*, 2011). Los experimentos señalan que gotas pequeñas, respecto a las reducciones del diámetro del tubo capilar, el factor de movilidad es cercano a uno e independiente del número capilar local. Por lo contrario, cuando las gotas son del mismo tamaño o mayores que el diámetro capilar, el factor depende del número capilar y tiende asintóticamente a un valor constante a números capilares altos, $O(10^{-2})$; la transición entre estas dos regiones ocurre a un número capilar crítico ². De manera general, Cobos *y col.* (2009) propusieron que el factor de movilidad es función de: (1) las características de la emulsión (tamaño de las gotas y la concentración de la fase dispersa), (2) geometría del flujo (radios equivalentes) y (3) el número capilar local (relación de la velocidad del flujo a través del tubo capilar y la tensión interfacial entre las fases). Posteriormente, Romero *y col.* (2011) propusieron una funcionalidad conveniente del factor de movilidad que satisface el comportamiento de los experimentos, en función del número capilar local y la relación de los radios de las gotas y del poro. La definición del factor de movilidad se da como una relación exponencial de los siguientes parámetros empíricos que describen el flujo a través de un sólo capilar:

- La relación crítica entre los diámetros del poro y las gargantas del poro. Por arriba de su valor, el flujo es afectado por la presencia de la fase dispersa.
- El número de capilar crítico . Debajo de su valor, la deformación de las gotas dispersas contribuyen a reducir la movilidad.
- Parámetros de ajuste. Describen como el factor de movilidad varia con el número capilar y el diámetro de gota.

²Valor de transición donde el factor de movilidad es independiente del número capilar.

Posteriormente, Nogueira *y col.* (2013) definieron el factor de movilidad con el objetivo de incluir el efecto de la concentración de la fase dispersa, usando para ello, una interpolación tipo ley de potencia donde el exponente se determinó por ajustes de las mediciones experimentales de Cobos *y col.* (2009) y Guillen *y col.* (2012a).

El resultado final del modelo de redes capilares es la determinación del factor de movilidad macroscópico y su funcionalidad con los parámetros que caracterizan el sistema disperso localmente (*i.e.* diámetros de gotas y poros, y número capilar). Cabe señalar que Romero *y col.* (2011), presentaron los resultados de la estimación del factor de movilidad macroscópico, los cuales mostraron que una reducción en el factor de movilidad se asociaba a una presión extra necesaria para deformar las gotas que pasan por poros estrechos. Además, señalaron que para sistemas dispersos, con gotas de diámetros pequeños (comparadas con el tamaño de poro promedio) y números de capilar altos ($\mathbf{O} 10^{-2}$), los efectos de la fase dispersa son débiles, y dan como resultado un factor de movilidad macroscópico aproximado de 0.95. En contraste, para gotas con diámetro similar a los poros más estrechos, la fase dispersa ocupa una mayor área de la sección transversal que incrementa la caída de presión necesaria para mantener una velocidad de flujo constante, provocando una disminución del factor de movilidad a un valor aproximado de 0.65.

La dependencia del factor de movilidad macroscópico con la concentración de la fase dispersa fue obtenida recientemente por Nogueira *y col.* (2013), sus resultados muestran una reducción del factor de movilidad hacia un valor asintótico cuando se incrementa la concentración de la fase dispersa, en una forma similar a las reducción de la permeabilidad obtenidos por Soo y Radke (1986). Además, estos autores señalaron que la reducción de la movilidad es apreciable cuando las gotas son suficientemente grandes, a números capilares suficientemente pequeños ($\mathbf{O} 10^{-7}$) o ambos, corroborando las estimaciones y resultados experimentales presentados por Romero *y col.* (2011). De forma similar a los trabajos previos para el flujo de emulsiones en medios porosos (McAuliffe, 1973; Soo y Radke, 1986), Nogueira *y col.* (2013) determinaron el efecto del flujo sólo de la fase continua en una red capilar saturada por la emulsión para determinar si las gotas permanecen dentro de los espacios de los poros. Sus resultados muestran que el factor de movilidad macroscópico se incrementa asintóticamente hasta alcanzar el valor inicial de movilidad para valores específicos de los parámetros. Nogueira *y col.* (2013) modificaron los parámetros en la funcionalidad del factor de movilidad local para obtener una condición donde

el flujo local tenga una mayor dependencia de la concentración y el número capilar, al fluir la fase continua en la red capilar saturada por la emulsión, el factor de movilidad se incrementa sin llegar al valor inicial. Los resultados en los perfiles de flujo en la red capilar indican que una fracción de las gotas permanece inmovilizada dentro de la red capilar, provocando que la fase continua cambie su patrón de flujo y se modifique permanentemente, como se había señalado previamente mediante los experimentos de emulsiones en medios porosos de McAuliffe (1973); Soo y Radke (1984); Jain y Demond (2002a); Guillen *y col.* (2012a). Estos resultados, sin embargo, discrepan con la evidencia experimental presentada con anterioridad por McAuliffe (1973); Soo y Radke (1986) para el coeficiente de permeabilidad relativo, donde al hacer fluir la fase continua en el medio poroso el coeficiente de permeabilidad no cambia.

El modelo de redes capilares sin embargo, presenta limitaciones. El carácter predictivo del modelo se ve limitado a la información previa con la que se debe de contar para realizar las estimaciones del factor de movilidad macroscópico. Debido a esto, pueden existir discrepancias entre el modelo y los experimentos, como lo señalan Romero *y col.* (2011), respecto al uso de una red capilar que no caracterice adecuadamente la distribución del tamaño y forma de los poros. Además, la determinación del factor de movilidad local está limitada a las condiciones experimentales, que en algunos casos, no considera la variación de la concentración de la fase dispersa, la viscosidad, la distribución del tamaño de las gotas y el número capilar (Cobos *y col.*, 2009). También, a pesar de que los experimentos en capilares muestran que el efecto de las gotas pequeñas son despreciables, se ha demostrado que en medios porosos reales, las gotas pequeñas pueden atraerse entre ellas y formar multicapas en las gargantas de poro cuyo efecto puede ser equivalente al de una gota de tamaño cercano del diámetro del poro (Jain y Demond, 2002a).

1.1.5. Otros modelos

Además de los modelos presentados Islam y Ali (1994) desarrollaron un modelo para describir el flujo disperso de emulsiones estables en medios porosos basado en las ecuaciones de transporte para las fases dispersa y continua. La ecuación de transporte para la fase continua se definió en términos de un retardo generado por la velocidad del flujo de la fase dispersa. La velocidad de flujo de ambas fases es acoplada a una ecuación de transporte que describe el flujo de la emulsión en términos del parámetro de filtración propuesto por Soo y Radke (1986), que considera los mecanismos de captura las gotas. En este modelo, la reducción de la permeabilidad relativa se

expresa como una relación empírica de la permeabilidad intrínseca y del coeficiente de filtrado de la teoría de Soo y Radke (1986). El ajuste de los parámetros de filtración permitió obtener por ellos una comparación aceptable de los resultados numéricos con los experimentos para varias emulsiones.

Por otra parte, Abou-Kassem y Farouq Ali (1995) propusieron un modelo tipo Ley de Darcy basado en el comportamiento reológico de la emulsión a través de la relación de la Ley de Poiseuille con la ley de Darcy, y en combinación con la ecuación Dupuit-Forchheimer. En la descripción matemática propuesta, incorporaron las características del medio poroso suponiéndolo como un conjunto de tubos capilares, cuyo diámetro depende de la distribución de tamaños de los poros y un parámetro asociado a la reducción de la permeabilidad relativa. La reología de la emulsión se consideraba a través de un parámetro a través de un factor de tortuosidad expresado por una ley de potencia. La ecuación se reducía a la ley de Darcy para fluidos Newtonianos. El modelo se limitaba a flujos unidimensionales e isotérmicos.

Los diferentes tipos de modelado presentados en esta sección, muestran una tendencia generalizada para describir matemáticamente el flujo Newtoniano y no-Newtoniano de emulsiones, a través de un medio poroso, por medio de ecuaciones tipo ley de Darcy. Estos modelos están en términos de parámetros que incorporan la información de los mecanismos de flujo multifásico, de las propiedades de los fluidos, de la microestructura de medio poroso, entre otros. Donde estos parámetros se obtienen generalmente de forma semi-empírica de datos de laboratorio. Es evidente que el flujo disperso en medios porosos opera a diferentes niveles de escala, desde la escala de poro, en el cuál se señalan los diferentes mecanismos involucrados de flujo de la emulsión, hasta la escala Darcy, donde se presentan ecuaciones tipo ley de Darcy para describir el flujo global de la emulsión a través del coeficiente de permeabilidad, que relacionan todos los procesos de transporte de la microescala.

Teniendo en cuenta lo visto en esta sección, y a pesar del progreso en el estudio del flujo disperso señalado en las diferentes metodologías matemáticas presentadas, aún se requiere de una comprensión fundamental de los mecanismos fenomenológicos del flujo disperso a través de medios porosos con el objetivo de desarrollar modelos físicamente válidos para este tipo de transporte. Por lo tanto, en el desarrollo de modelos escalados de forma teórica se deberá de tener en cuenta los diferentes procesos de transporte multifásico que se señalaron en los modelos presentados, de tal forma, que las predicciones teóricas de los coeficientes efectivos involucrados

en estos modelos permitan ser comparativas, en cierta medida, con los resultados de estos modelos. Por ejemplo, la predicción teórica de la reducción experimental de la permeabilidad debido al flujo de una emulsión en un medio poroso presentada por Soo y Radke (1984); Jain y Demond (2002a). En la siguiente sección, se presentan una serie de métodos de escalamiento que se han aplicado para desarrollar modelos para el flujo de dos fases fluidas inmiscibles a través de medios porosos, propiamente no involucra el flujo disperso, sin embargo su uso se puede extender al flujo disperso en un medio poroso.

1.2. Métodos de escalamiento para el flujo de dos fases fluidas inmiscibles a través de medios porosos

Evidentemente, el flujo disperso opera a diferentes niveles de estudio, desde la escala del poro hasta la escala de campo. Este tipo de sistemas de multiescala sugiere por lo tanto el uso de métodos de escalamiento, los cuales permiten pasar desde una descripción de la escala microscópica a la macroscópica. Los modelos resultantes se suelen expresar por ecuaciones en términos coeficientes efectivos, los cuales capturan la información esencial de la escala inferior y son resultado del proceso de promediado implícito en el escalamiento. Aunque propiamente no se han aplicado técnicas de escalamiento para modelar el flujo disperso en un medio poroso, se han llevado a cabo el desarrollo de modelos para flujo de dos fases fluidas inmiscibles en medios porosos mediante diferentes enfoques de escalamiento, tales como: *homogeneización* (Auriault y col., 1989), método del promedio volumétrico (Whitaker, 1986b), y recientemente TCAT (Gray y Miller, 2014).

1.2.1. Método de homogeneización espacial

El método de homogeneización es una técnica matemática aplicada a las ecuaciones diferenciales que describen el fenómeno de transporte asociado a un dominio que exhibe heterogeneidades y/o características geométricas de dos o más escalas (*i.e.* escala microscópica y escala macroscópica). En el proceso de homogeneización, cada ecuación es separada en un número de ecuaciones que señalan el fenómeno físico dominante en cada una de las escalas. Algunas de las características esenciales de esta metodología son las siguientes (Sanchez-Palencia, 1980; Bear y Cheng, 2010):

- La deducción de modelos por homogeneización requiere suponer una estructura periódica a la escala más pequeña. Esta suposición proporciona las condiciones de frontera necesarias para un análisis matemático riguroso, asegurando la existencia de una solución única.
- La herramienta básica en la técnica de homogeneización es la expansión asintótica, que permite separar las ecuaciones gobernantes en un número de escalas, donde cada una gobierna el proceso en una escala específica. La expansión se da en términos del parámetro que relaciona el tamaño de la celda periódica y del patrón periódico total (*parámetro de expansión asintótico*). La homogeneización busca la solución asintótica del límite que tiende a cero de este parámetro. La suposición de periodicidad permite promediar (integrar) los efectos de la escala más pequeña para generar coeficientes efectivos.
- La periodicidad se introduce con el objetivo de facilitar la homogeneización y se considera como un modelo conceptual de la escala pequeña en la deducción de los modelos a la escala superior.

Por medio del proceso de homogeneización, descrito anteriormente, Auriault (1987) y Auriault *y col.* (1989) dedujeron la descripción macroscópica para el flujo de dos fases fluidos inmiscibles en un medio poroso para los casos cuasi-estático y dinámico, respectivamente. El modelo presentado resultaba en leyes de Darcy acopladas para cada fase fluida. Los coeficientes efectivos involucrados en este modelo macroscópico se pueden calcular de la representación periódica de la estructura del poro. El modelo se cierra por la relación entre la presión capilar y la saturación, la cual no se puede deducir por el método homogeneización y se determina experimentalmente. Auriault *y col.* (1989) calcularon los coeficientes efectivos presentes en el modelo para configuraciones simplificadas del flujo bifásico inmiscible: canales planos y cilíndricos, donde sólo una de las fases fluida está en contacto con la superficie del sólido. Las predicciones en el caso dinámico señalan la importancia de la viscosidad en la descripción macroscópica, a través de los coeficientes de Darcy definidos en el modelo.

Las suposiciones involucradas en el desarrollo de Auriault (1987); Auriault *y col.* (1989), se listan a continuación:

1. El medio poroso es un sólido rígido (no deformable) y los fluidos son viscosos Newtonianos.

2. La región de volumen ocupada por cada fase fluida está conectada. La interfase entre ambos fluidos se mueve lentamente.
3. Una de las fases fluidas rodea completamente a la otra, y por consiguiente la interfase entre los fluidos no interacciona con la superficie con el sólido (en el caso del flujo dinámico).
4. La geometría del medio poroso es un sistema periódico y supone que el parámetro de expansión asintótico sea mucho menor a uno.
5. Los efectos inerciales son ignorados (en el caso del flujo cuasi-estático).
6. Los dos fluidos se mueven en relación con los poros.
7. Se consideran los efectos capilares en la interfase entre los fluidos, pero la tensión interfacial con el sólido es despreciable. Inicialmente, la interfase entre los fluidos es una superficie con una curvatura constante (en el caso del flujo dinámico).
8. No hay transferencia de masa entre los fluidos.

1.2.2. Método de promediado de ensambles de fase

El método de promediado de ensambles fue propuesto por Zhang y Prosperetti (1994, 1997), siguiendo la mecánica estadística en el desarrollo de ecuaciones promedio para el flujo bifásico disperso, y posteriormente se extendió a flujos multifásicos continuos (Zhang *y col.*, 2007). En este método las ecuaciones gobernantes se deducen de las ecuaciones para la distribución de probabilidad de un sistema multifásico. Para esto, se considera un *ensamble* de las probabilidades de obtención de una configuración específica de flujo, con base en una distribución de probabilidad. El promedio de un ensamble de una cantidad del flujo, perteneciente a una fase analizada en un tiempo y posición específicos, se define por la integración sobre la distribución de probabilidad de una configuración específica de la fase mediante una función indicadora de fase y la cantidad perteneciente a esta. Así, el promediado se realiza sobre todas las posibilidades de flujo de acuerdo a la probabilidad de lograr un sistema de flujo específico. A grandes rasgos, el método consiste en lo siguiente:

- Se define un flujo perteneciente a un ensamble y una función indicadora de fase. La cual, si la posición espacial está ocupada por una fase específica en el flujo y tiempo dado, es igual

a uno y es cero en caso contrario. La fracción volumétrica de la fase se calcula mediante el promediado de los valores de la función indicadora sobre todos los flujos posibles en el ensamble.

- Las propiedades promedio, perteneciente a cada fase, se obtienen mediante el promediado de la propiedad y la función indicadora sobre todos los posibles flujos en el ensamble dividida por la fracción volumétrica. Un operador de promediado se define a través de una integral sobre todos los posibles flujos en el ensamble de acuerdo a la probabilidad de una configuración específica.
- El promediado de gradientes y derivadas temporales del ensamble de la propiedad se trata mediante teoremas desarrollados por Zhang y Prosperetti (1994) que permiten intercambiar diferenciación e integración.
- Las ecuaciones que modelan el sistema a la microescala se promedian usando estos operadores y teoremas de ensambles. El resultado son ecuaciones en términos de tensores sensibles a las propiedades del flujo a la macroescala que contienen también la información del fenómeno microscópico. Los tensores se definen de acuerdo a relaciones de cantidades puntuales y de promedios de la probabilidad del ensamble, que indican la separación entre escalas de las propiedades microscópicas y macroscópicas.
- Se plantean una familia de posibles relaciones de cerraduras que satisfagan una serie de restricciones y suposiciones al modelo obtenido que permitan definir estos tensores.
- Finalmente, se obtiene la solución de la cerradura de forma analítica o numérica que definen o predicen los tensores como función de los parámetros que describen el proceso del flujo.

Yang *y col.* (2009); Zhang (2009) usaron el método de promediado de ensamble de fase para el desarrollo de modelos escalados del flujo multifásico a través de un medio poroso. El resultado es un modelo de forma similar a la ley de Darcy multifásica con términos adicionales que representan el efecto de la interacción sobre las interfases y además una ecuación de cantidad de movimiento para el sólido donde son considerados los efectos de deformación y las interacciones de la línea de contacto y la curvatura de la interfase de los fluidos. En este enfoque, para

considerar las interacciones en la interfase, se supuso que la masa e inercia asociadas a la línea de contacto son despreciables. Con esto, se obtuvo un balance de fuerzas de las interacciones de los esfuerzos entre los fluidos y las fuerzas de tensión superficial. Para las interfases fluido-sólido, en el balance sólo se incluyeron los esfuerzos del sólido con los fluidos. El producto de ambos balances incluyen términos integrales de superficie del gradiente de la función indicadora, los cuales representan en el modelo el efecto de la morfología del sistema poroso sobre las ecuaciones de promedio de cantidad de movimiento. Por otra parte, se hace uso de restricciones de longitudes de escala características para despreciar los esfuerzos viscosos promedio en la ecuación de cantidad movimiento. La principal restricción empleada en el modelo obtenido señala que la sección transversal del poro debe ser más pequeña comparada con longitud de escala macroscópica, la cual se usa frecuentemente en otros desarrollos teóricos para modelar flujos multifásicos (Auriault *y col.*, 1989; Whitaker, 1999; Bear y Cheng, 2010).

Específicamente, para el caso de flujo viscoso en medios porosos, Zhang (2009) definieron las fuerzas en las interfases proporcionales a la diferencia de la velocidad de la fase fluida y el sólido y en términos de un coeficiente de arrastre viscoso. En el modelo final, las ecuaciones macroscópicas presentan términos de fuerzas adicionales como correcciones a la ley de Darcy y se descartan los términos inerciales; en el caso de la ecuación para el sólido además se presentan promedios de ensambles sobre las interfases y líneas de contacto. En este enfoque para calcular estas integrales, basado en su significado físico, se propone calcular la contribución de todas las interfases y líneas de contacto con una forma específica y promediar sobre todas las formas posibles. Esto define un número de densidad de interfaces, con una forma en un punto en tiempo y espacio, que en principio, se puede medir o calcular sumando todas las formas posibles. Lo que da como resultado tensores adicionales de cerradura, los cuales se pueden calcular de la integración sobre la superficie o curva, en el flujo del primer ensamble. La integración de estas regiones implica restricciones de longitudes de escala intrínsecas al sistema físico del orden del tamaño del poro. La aproximación de la interfase en esta metodología recupera información del flujo multifásico que se identifican como esfuerzos de las interfases y línea de contacto. En su análisis, Yang *y col.* (2009) obtuvieron las relaciones de cerradura (coeficientes de arrastre viscoso) para el modelo promedio. Como modelo del medio poroso, consideraron un conjunto de tubos con una distribución de radios, obteniendo con las ecuaciones que describen el flujo en este tipo de sistemas (Ley de Hagen-Poiseuille), definiciones analíticas y predicciones de estas

relaciones de cerradura como funciones de la saturación y del tiempo. Finalmente, Yang *y col.* (2009) determinaron que el coeficiente de arrastre es prácticamente independiente del tiempo que determina la saturación y que la diferencia de presión no necesariamente está relacionada con los efectos de la tensión superficial.

1.2.3. Teoría de promediado termodinámicamente restringida

Recientemente, se ha propuesto la teoría de promediado termodinámicamente restringida (*Thermodynamically constrained averaging theory*, TCAT), desarrollada por Gray y Miller (2014), para el escalamiento de ecuaciones de cantidades de propiedades microscópicas a escalas espaciales superiores. En este enfoque, se emplea de manera rigurosa el escalamiento de las ecuaciones termodinámicas, de conservación y balances. Los elementos esenciales de esta teoría son los siguientes: (1) ecuaciones de conservación a la microescala, (2) desigualdad entrópica a la microescala, (3) termodinámica a la microescala, (4) condiciones de equilibrio a la microescala, (5) teoremas de promediado, (6) ecuaciones de conservación a la macroescala, (7) desigualdad entrópica a la macroescala, (8) termodinámica a la macroescala, (9) condiciones de equilibrio a la macroescala, (10) ecuaciones de evolución, (11) restricciones para la desigualdad entrópica, (12) simplificaciones para la desigualdad entrópica, (13) relaciones de cerradura, (14) modelos cerrados y finalmente (15) modelado del sistema. En la formulación por el TCAT, la desigualdad entrópica se refiere al balance de entropía para cada una de las especies y en cada entidad que comprende el sistema, el cual se puede promediar formalmente a una mayor escala; el cambio de escala proporciona un conjunto de balances que se pueden sumar para obtener una sola ecuación de balance de entropía escalada, esta suma no puede ser negativa de acuerdo a la segunda ley de la termodinámica. En general, la deducción de modelos escalados mediante el enfoque TCAT se puede resumir en la siguiente metodología (Gray y Miller, 2014):

- Se genera una expresión para la desigualdad de entropía para todo el sistema de estudio.
- El conjunto de ecuaciones apropiadas para los balances de masa, cantidad de movimiento y conservación de energía, a la escala deseada, para todas las entidades relevantes (volúmenes, áreas, curvas comunes, y puntos comunes) se formulan basándose sobre definiciones claras del promedio de cantidades microscópicas.

- Una apropiada teoría termodinámica a la microescala se promedia a la escala deseada, y se generan formas diferenciales de la dependencia espacial y temporal de la energía interna.
- La desigualdad de entropía es aumentada usando los productos de multiplicadores de Lagrange con ecuaciones de conservación y ecuaciones diferenciales termodinámicas, escaladas consistentemente, que relaciona las derivadas materiales de la entropía a las derivadas materiales que aparecen en las ecuaciones de conservación. Esto se interpreta como un enunciar la restricción de la segunda ley de la termodinámica, para asegurar que ésta satisfice las ecuaciones e identidades termodinámicas de la teoría termodinámica seleccionada (*p. ej.* la termodinámica irreversible clásica)
- La presencia de multiplicadores de Lagrange en la ecuación permiten eliminar aquellos términos que específicamente contribuyen a la generación de entropía (*i.e.* procesos irreversibles). El conjunto de multiplicadores de Lagrange se determina para seleccionar la combinación de ecuaciones de conservación que describe la física de interés y elimina las derivadas temporales de la ecuación de la desigualdad de entropía aumentada. Esta es guiada por las condiciones de equilibrio escaladas; la ecuación se expresa en lo posible en una suma de términos que involucran un producto de factores denominados “flux” y “fuerzas” termodinámicas. El resultado es la desigualdad de entropía restringida, expresión importante que se aplica bajo restricciones asociadas a la naturaleza del fenómeno modelado (*i.e.* especificando el número de fases, especies, flujos bifásicos, etc.) y proporciona un punto de inicio para formular relaciones de cerradura aproximadas al imponer restricciones sobre el sistema de estudio.
- Identidades geométricas y aproximaciones necesarias son aplicadas a la desigualdad de entropía restringida para eliminar derivadas temporales restantes para generar la desigualdad de entropía restringida simplificada. La imposición de restricciones adicionales proporciona condiciones sobre el modelado del fenómeno que define la composición general del sistema, sus entidades, y la escala del modelo.
- La desigualdad de entropía simplificada resultante se usa para guiar el desarrollo de la forma general de las relaciones de cerradura, que son consistentes con las propiedades del sistema en el equilibrio y la segunda ley de la termodinámica. Las relaciones de cerradura,

o ecuaciones constitutivas, proporcionan una conexión entre las variables existentes en las ecuaciones. Estas son aproximaciones que dependen de las suposiciones hechas acerca del comportamiento del sistema para generar un modelo cerrado resoluble.

- Finalmente, experimentación y modelos de la microescala y macroescala son usados para deducir formas apropiadas de las relaciones de cerradura.

Un aspecto importante de la TCAT es que las restricciones y aproximaciones son detalladas y los modelos pueden ser revisados si resultan ser inadecuados. El enfoque de la TCAT proporciona un marco teórico para generar modelos cerrados de fenómenos de transporte en medios porosos, así como sistemas compuestos por cualquier mezcla de fases, en escalas que van de la microscópica a la escala de estudio deseada (Gray y Miller, 2005; Miller y Gray, 2005).

El modelo escalado para el flujo bifásico de fases fluidas usando esta teoría fue desarrollado por Jackson *y col.* (2009). El sistema propuesto supone que el sistema está conformado por dos fases fluidas inmiscibles y un sólido, cuya unión generan tres interfases y una curva común. Las fases son consideradas continuas. Por otra parte, señalan la existencia de una disparidad de longitudes de escala características entre la microescala y macroescala, usada comúnmente en teorías de escalamiento (*Método del promedio volumétrico*, Whitaker (1994); *Método de homogeneización*, Auriault *y col.* (1989)). La termodinámica clásica irreversible se aplica a la microescala de los sistemas porosos, la cual se usa para definir la desigualdad de entropía restringida, expresión clave dentro de la TCAT. Esta expresión se simplifica usando una serie de aproximaciones que permiten relacionar las fuentes y flux de calor y entropía, los cuales postulan que estos procesos no contribuyen a la producción de entropía, y que además pueden ser comprobables con base en simulaciones a la microescala (Gray y Miller, 2014). En las relaciones de cerradura, los gradientes no contribuyen significativamente a los tensores de esfuerzo macroscópicos. La restricción a un sistema isotérmico elimina la necesidad de resolver las ecuaciones de conservación de energía y las relaciones de cerradura involucradas en el flux de calor. Debido a que las fases son completamente inmiscibles, no existe transferencia de masa en las interfases. La densidad de las interfases y de la curva común se suponen igual a cero, eliminando la necesidad de ecuaciones de conservación para estas entidades. Las propiedades del sólido en este desarrollo se proponen como: ligeramente compresible, elástico, isotrópico, ligeramente deformable en la dirección vertical y la curvatura del sólido es independiente de

la superficie de contacto con los fluidos. Lo anterior permite la inclusión de un caso simple de deformación y permite tratar la curvatura sólido-fluido constante e independiente de las condiciones de saturación. El sistema se describe por ecuaciones de estado, promediadas a la macroescala para relacionar las densidades másicas a la presión de los fluidos.

Finalmente, en la formulación del modelo propuesta por Jackson *y col.* (2009), se incluye la especificación apropiada de las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento para describir el flujo de dos fases fluidas. Además, la inclusión de las relaciones de cerradura como identidades exactas (relaciones de porosidad, saturación y fracción superficial del sólido) y ecuaciones de estado (ecuaciones de Gibbs-Duhem y potencial químico), permiten definir la presión como potenciales químicos y un módulo de compresibilidad que relaciona la porosidad con la presión. En la deducción del modelo de Jackson *y col.* (2009), proponen ecuaciones constitutivas para la curvatura en la interfase fluido-fluido (definen la presión capilar como una dependencia funcional obtenida experimentalmente), y el ángulo de contacto, donde estas cantidades son propiedades termodinámicas del sistema. Dentro de la formulación del modelo, se desarrollaron ecuaciones para la dinámica de las variables geométricas (*i.e.* fracción volumétrica y curva común) para finalmente obtener un modelo general completamente cerrado con interfases y una curva común. En resumen, el modelo obtenido por Jackson *y col.* (2009) cuenta con 31 ecuaciones que consisten en: 2 ecuaciones de conservación de masa, 18 ecuaciones de transporte de cantidad de movimiento, tres condiciones de desigualdad entrópica, 5 relaciones de ecuaciones de estado y tres condiciones dinámicas.

Al despreciar las propiedades y la dinámica en la curva común, Jackson *y col.* (2009) ignoran, en el modelo general obtenido, la ecuación de cantidad de movimiento para la curva común y su condición dinámica. Esto reduce el modelo a 25 ecuaciones que consisten en: 2 ecuaciones de conservación de masa, 15 ecuaciones de transporte de cantidad de movimiento, tres condiciones de desigualdad entrópica, 3 relaciones de ecuaciones de estado y 2 condiciones dinámicas. Sí además se desprecia la contribución de la interfase, se presenta un modelo donde las velocidades de las interfaces, las densidades geométricas de las interfaces, la área de la superficie del sólido, relaciones geométricas y los ángulos de contacto son despreciados. También, las ecuaciones de estado las interfaces y curva común, las condiciones dinámicas, las relaciones resultantes de la desigualdad entrópica, relacionadas con el balance de fuerzas, no son necesarias. Al igual que análisis anteriores, la presión capilar resultante se define sólo en función de la

saturación. De esta manera, el modelo resultante se reduce a 2 ecuaciones de conservación de masa, 6 ecuaciones de transporte de cantidad de movimiento, 2 condiciones de desigualdad entrópica y 2 relaciones de ecuaciones de estado. El modelo final presentado por Jackson *y col.* (2009), recupera el modelo tradicional de la extensión de la ley de Darcy para el flujo bifásico (Dullien, 1992).

1.2.4. Método del promedio volumétrico

Uno de los métodos más usados para llevar el escalamiento, como ya se mencionó en la Introducción, es el método del promedio volumétrico (Whitaker, 1999). El método proporciona un marco teórico riguroso que permite desarrollar modelos promedio (macroscópicos) a partir de la aplicación de operadores de promediados sobre las ecuaciones gobernantes a la microescala (microscópico). El resultado es una reducción sistemática de la cantidad de información proveniente de la microescala y contenida en los coeficientes efectivos presentes en los modelos escalados (Wood y Valdés-Parada, 2013).

Usando el método del promedio volumétrico, Whitaker (1986b, 1994) analizó el flujo de dos fluidos inmiscibles en un medio poroso homogéneo, desarrollando ecuaciones de medio efectivo para cada una de las fases fluidas. Estas ecuaciones resultantes son similares a la intuitiva ley de Darcy para estos sistemas (Dullien, 1992), pero incluían términos adicionales que fueron asociados a la influencia del arrastre interfacial entre las fases fluidas que acoplaban las ecuaciones de transporte de ambas fases. Los coeficientes de permeabilidad y de arrastre viscoso involucrados en esta teoría se pueden calcular a partir de la solución problemas de cerradura asociados. Los coeficientes de permeabilidad presentes en las ecuaciones promedio se definieron como tensores simétricos que exhiben una clara dependencia con las fracciones volumétricas de las fases fluidas y señalan la posible dependencia con la relación de viscosidades de las fases. Además se determinó, por un análisis de órdenes de magnitud, la relación entre los coeficientes de arrastre viscoso. El problema de cerradura presentado originalmente por Whitaker (1986b) involucraba problemas de valores a la frontera que contenían términos integro-diferenciales para campos tensoriales de segundo orden. En trabajos posteriores, Whitaker (1994) dedujo problemas de valores a la frontera con ecuaciones diferenciales similares a la ecuación de Stokes como problemas de cerradura del modelo promedio, y Lasseux *y col.* (1996) desarrollaron las relaciones entre los tensores de arrastre viscoso y de permeabilidad, demostrando que ambos

coeficientes pueden calcularse de los mismos dos problemas de cerradura. Como lo indica Whitaker (1986b, 1994), el modelo desarrollado, con el enfoque de la teoría del promedio volumétrico, involucra un conjunto de suposiciones y de restricciones de longitudes de escala características, de las cuales se pueden resumir las siguientes:

1. Se impone la restricción longitudes de escala características: $\ell_\alpha \ll r_0 \ll L$, $\alpha = \beta, \gamma$. Esto significa, que la longitud de escala característica asociada con el tamaño del dominio de promediado, r_0 , debe ser mucho menor que la longitud característica asociadas con las cantidades promedio a la escala macroscópica, L , y su vez r_0 debe ser mucho mayor a las longitudes características de las fases fluidas, ℓ_β y ℓ_γ . Donde ℓ_β y ℓ_γ , pueden representar el diámetro del poro (d_p) o el diámetro de la gota (d_g).
2. No hay variaciones significativas en la curvatura de la interfase, dentro del dominio de promediado. Esta suposición se justifica cuando los números capilar y de Bond son mucho menores a uno. Esto involucra que los efectos viscosos y gravitatorios son despreciables y no influyen la localización de la interfase entre los fluidos.
3. El problema de cerradura no incluye el efecto de la línea de contacto, por lo que el modelo se restringe a flujos cuasi-estacionarios.

A pesar de la deducción del modelo para el flujo de dos fases fluidas en medios porosos propuesta por Whitaker (1986b) y el respectivo método de solución del problema de cerradura (Whitaker, 1994; Lasseux *y col.*, 1996), aún no se han presentado predicciones numéricas de los coeficientes efectivos de permeabilidad y arrastre viscoso. Lo anterior debido a la dificultad que involucra incorporar el fenómeno de la línea de contacto en el marco de un análisis cuasi-estacionario, sin considerar un efecto transitorio en el problema de cerradura (Whitaker, 1986b, 1994; Lasseux *y col.*, 1996).

El modelo propuesto por Whitaker (1986b, 1994), para los casos donde los términos de acoplamiento entre ambas fases fluidas son despreciables, el modelo se reduce a la extensión intuitiva de la ley Darcy para el flujo bifásico. En este modelo la permeabilidad efectiva se debe calcular de la permeabilidad intrínseca del medio poroso y de la permeabilidad relativa de la fase fluida considerada (como una función de la saturación de dicha fase)

Posteriormente, Lasseux *y col.* (2008) extendieron el análisis para desarrollar un modelo

macroscópico considerando el flujo inercial. El resultado fue un modelo en términos de los coeficientes efectivos acoplados de permeabilidad y arrastre viscoso, definidos previamente por Whitaker (1994); Lasseux *y col.* (1996), y de coeficientes de corrección inercial acoplados.

Comparación entre modelos

El método del promedio volumétrico y el método de homogeneización permiten, sistemáticamente, obtener las suposiciones y restricciones de longitudes de escala para las cuales los modelos escalados desarrollados son válidos y permiten la predicción del coeficientes efectivos involucrados en el modelo, generando en muchos casos modelos iguales. Sin embargo, el primero proporciona un marco teórico que permite un desarrollo de modelos mas consistentes con el proceso físico. En este método no es necesario hacer aproximaciones al instante, ya que el primer paso involucra sólo el promediado en el espacio. Esto da como resultado una interpretación física del proceso de promediado que facilita la intuición física. Especialmente en sistemas multifásicos, es más fácil tratar los términos interfaciales dentro de esta técnica de promediado. Además, presenta una mayor flexibilidad e interpretación física en el desarrollo de modelos para diferentes procesos (Davit *y col.*, 2013).

El método de promediado de ensambles de fases es otra herramienta que permite la obtención de modelos escalados de forma sistemática mediante operadores y teoremas de promediado realizados sobre todos los posibles flujos de acuerdo a la probabilidad del sistema de flujo, de forma análoga a los utilizados en el método del promedio volumétrico para una región de promediado. Este método resulta conveniente al analizar la contribución de las interacciones entre las fases y la línea de contacto mediante su contribución en los coeficientes efectivos y términos adicionales dentro del modelo escalado obtenido. Sin embargo, la determinación adecuada de las relaciones de cerradura requieren de información disponible a la escala del poro, que resulta en la necesidad de una gran cantidad de datos obtenidos sobre simulaciones numéricas del proceso de transporte dentro de los poros. Por otro lado, en el método del promedio volumétrico, la cerradura de los modelos deducidos se obtienen de resolver problemas de valores a la frontera cuyo dominio de solución es una representación periódica del proceso de transporte a la microescala, que no involucra necesariamente el conocimiento del fenómeno en todo el sistema del medio poroso. Obteniendo con ello primeras predicciones de los coeficientes efectivos.

La TCAT resulta una herramienta sumamente robusta para realizar el promediado de las ecuaciones de transporte, el tratamiento riguroso de la termodinámica y la información del proceso físico que conecta la microescala con la macroescala. Sin embargo los modelos obtenidos resultan en sistemas complejos donde las cerraduras se encuentran relacionadas íntimamente con la termodinámica de las interfaces, lo que resulta impráctico para muchos sistemas la obtención una solución numérica o analítica. En el caso del promedio volumétrico, el desarrollo sistemático de modelos y las restricciones y suposiciones involucradas en el proceso de deducción de las ecuaciones macroscópicas, permite una acercamiento a la descripción del proceso macroscópico con la información de la microescala, suficiente para obtener un modelo adecuado e inicial para la descripción a la macroescala.

1.3. Condición de equilibrio local

Los modelos escalados obtenidos usando el método del promedio volumétrico para describir el flujo inmisible en medios porosos homogéneos por Whitaker (1986a, 1994); Lasseux *y col.* (1996) se pueden considerar como modelos de dos ecuaciones o de *no equilibrio*, ya que se deducen ecuaciones de transporte de cantidad de movimiento y de continuidad para cada una de las fases fluidas. Para la descripción de sistemas multifásicos es frecuente recurrir a una *condición de equilibrio local* que permite sumar las ecuaciones que describen el transporte de cada fase con una sola ecuación, donde una sola variable describe el proceso global. De esta forma, los modelos para describir el flujo disperso a través de medios porosos que se presentaron anteriormente pueden considerarse como *modelos de equilibrio*, donde una sola ecuación de medio efectivo, (similar a la ley de Darcy) modela la transferencia de todo el sistema. La intuición ciertamente motiva el uso de un modelo de equilibrio para describir el flujo disperso, siempre que el tamaño de las partículas dispersas sean suficientemente pequeñas respecto a los poros o que las propiedades de los fluidos sean suficientemente similares.

La condición de equilibrio local, bajo el marco teórico del método del promedio volumétrico, se ha usado para analizar diferentes procesos de transporte de sistemas multifásico que incluyen: calor, masa y cantidad de movimiento. En ellos se han deducido las restricciones y suposiciones adicionales que permiten identificar cuando la hipótesis de equilibrio local es válida, algunos de estos trabajos se presentan continuación.

1.3.1. Modelos de equilibrio para transferencia de calor y masa multifásica

El equilibrio local térmico se refiere al estado en el cual una sola temperatura promedio se puede usar para describir el proceso de transferencia de calor en un sistema multifásico. Cuando esta condición ocurre, un modelo de una sola ecuación se puede usar y el análisis de la transferencia de calor se simplifica. Para el transporte de calor por conducción y convección en un sistema de dos fases, Nozad *y col.* (1985); Whitaker (1986c), respectivamente, dedujeron un modelo escalado bajo la condición de equilibrio local térmico, desarrollando las condiciones, basado en estimados de órdenes de magnitud, que se deben de satisfacer para considerar el modelo válido para un sistema homogéneo. Quintard y Whitaker (1993), presentaron análisis de los modelos de equilibrio y no equilibrio local térmico en estado transitorio donde se determinaron las restricciones temporales y de escalas, basados en estimados ordenes de magnitud, bajo las cuales los modelos escalados se podían simplificar. El modelo de equilibrio deducido involucra la determinación de un solo coeficiente de conductividad térmica efectivo, mientras que el modelo de no equilibrio requería del cálculo de cuatro coeficientes. A través de comparación de la predicción de la temperatura promedio, determinadas con experimentos teóricos, con los resultados de los modelos de equilibrio y no equilibrio, los resultados sugieren que ambos modelos son confiables para un rango de parámetros térmicos en el análisis del proceso difusivo térmico transitorio de dos fases. Posteriormente, Quintard *y col.* (1997), extendieron al análisis incluyendo la transferencia convectiva de calor en la fase fluida, obteniendo un modelo de equilibrio donde el tensor efectivo incluía los efectos dispersivos de calor y los efectos de la hidrodinámica en la microescala; mientras que el modelo de no equilibrio involucraba una serie de coeficientes efectivos con este mismo efecto hidrodinámico. Los resultados numéricos de las predicciones efectivos, para las variaciones de relaciones de conductividades térmicas de las fases y números de Péclet obteniendo concordancias aceptables entre los experimentos y las predicciones del coeficiente de conductividad efectiva de equilibrio.

Como ya se mencionó, el principio del equilibrio local térmico permite utilizar una sola temperatura promedio para describir el transporte en la macroescala, y por lo tanto es suficiente una sola ecuación de medio efectivo. En caso de que no sea adecuada una sola temperatura, se necesita recurrir al modelo de no-equilibrio que implica una ecuación de transporte promedio para cada fase acopladas entre sí, donde la necesidad de predecir los coeficientes efectivos

incremente la complejidad del modelo. Por lo tanto, es deseable utilizar, en la medida de lo posible, un modelo de equilibrio y definir las condiciones para las cuales es válido dicho modelo. Whitaker (1991), identificó las restricciones asociadas al modelo de equilibrio local mecánico a través de un análisis de órdenes de magnitud utilizando el método del promedio volumétrico. Las restricciones para simplificar las ecuaciones de transporte promedio y el problema de cerradura asociado, para describir la transferencia de calor en términos de una sola temperatura, se presentan a través de desigualdades que se deben de satisfacer. Las cuales se expresan en términos de órdenes de magnitud de longitudes características del sistema, relaciones de las propiedades térmicas y del medio poroso, (ver en Whitaker, 1991, Ecs. 3.38- 3.40 y Ecs. 4.34,4.35, 4.38 4.41 y 4.85). En trabajos posteriores, Quintard y Whitaker (1995), la condición de equilibrio se dedujo en razón de un estimado de órdenes de magnitud de la relación de la diferencia de las temperaturas promedio del sólido y el fluido y la temperatura promedio de equilibrio

$$\frac{\langle T_\beta \rangle^\beta - \langle T_\sigma \rangle^\sigma}{\Delta \langle T \rangle} = \mathbf{O} \left(\frac{\ell_{\beta\sigma}}{L} \right)^2 \times \left[\frac{\mathbf{O} \left(L^2 \frac{(\rho C_P)_\beta - (\rho C_P)_\sigma}{k_{\beta\sigma} t^*} \right) - \mathbf{O} \left(\frac{k_\beta - k_\sigma}{k_{\beta\sigma}} \right) (1 + C_{\beta\sigma})}{1 + \mathbf{O} \left(\frac{\ell_{\beta\sigma}}{L} \right)^2 + \mathbf{O} \left(\frac{\ell_{\beta\sigma}^2}{\alpha_{\beta\sigma} t^*} \right)} \right] \quad (1.1)$$

donde \mathbf{O} significa orden de magnitud; $\langle T_\beta \rangle^\beta$ y $\langle T_\sigma \rangle^\sigma$ son las temperaturas una fase fluida (β) y una sólida (σ), respectivamente y la temperatura promedio de equilibrio $\langle T \rangle = \varepsilon_\beta \langle T_\beta \rangle^\beta + \varepsilon_\sigma \langle T_\sigma \rangle^\sigma$; $\ell_{\beta\sigma}$ es una longitud microscópica asociada con el sistema fluido-sólido; L es una longitud del sistema macroscópico, $(\rho C_P)_i$ es la capacidad calorífica de la fase- i ($i = \beta, \sigma$); k_i es la conductividad térmica de la fase- i ; la combinación de las capacidades caloríficas de las fases $(\rho C_P)_{\beta\sigma} = \varepsilon_\sigma (\rho C_P)_\beta + \varepsilon_\beta (\rho C_P)_\sigma$; la conductividad térmica combinada es $k_{\beta\sigma} = \varepsilon_\sigma k_\beta + \varepsilon_\beta k_\sigma$; ε_α es la porosidad de la fase- α ; $\alpha_{\beta\sigma} = k_{\beta\sigma} / (\rho C_P)_{\beta\sigma}$, y $C_{\beta\sigma}$ es la magnitud de un tensor denominado de *tortuosidad* asociado a la diferencia $\langle T_\beta \rangle^\beta - \langle T_\sigma \rangle^\sigma$. De acuerdo con esta expresión, se puede indicar de manera cuantitativa que la condición del equilibrio local mecánico se requiere que $(\langle T_\beta \rangle^\beta - \langle T_\sigma \rangle^\sigma) / \Delta \langle T \rangle \ll 1$, la cual se puede aceptar siempre cualquiera de las siguientes condiciones ocurran (Whitaker, 1999),

- El fluido o el sólido se encuentre en una menor proporción respecto al otro, ε_β o $\varepsilon_\sigma \ll 1$
- Las propiedades físicas de las fase- β y - σ sean similares, $k_\beta \sim k_\sigma$ y $(\rho C_P)_\beta \sim (\rho C_P)_\sigma$
- Exista una disparidad de longitudes de escalas del sistema, $\left(\frac{\ell_{\beta\sigma}}{L} \right)^2 \ll 1$

Por otra parte, el equilibrio local másico es análogo al de equilibrio local térmico, para este caso se considera viable un modelo de una sola ecuación en términos de una concentración promedio describe el proceso de transporte de masa dentro de un sistema multifásico. En el análisis proceso de difusión y reacción en una modelo micro-macroporo de una partícula catalítica, Whitaker (1983) impuso el principio del equilibrio local másico obteniendo un modelo de una sola ecuación para una concentración promedio global intrínseca en términos de una difusión efectiva. Las restricciones de este modelo se basan en una análisis de estimados de órdenes de magnitud que involucran relaciones de tiempo y longitudes características y el módulo de Thiele (relación entre los procesos difusivo y reactivo). Una variación de este principio se usó para sistemas celulares por Ochoa *y col.* (1986), en el cual una membrana o resistencia interfacial puede ser importante. La concentración ponderada de equilibrio para este tipo de sistemas biológicos se define en términos de un coeficiente de distribución de equilibrio, obteniendo un modelo de una sola ecuación para la difusión y reacción en sistemas celulares. Los coeficientes efectivos en este análisis se predijeron resolviendo problemas de cerradura asociados en representaciones simples de los sistemas celulares. Las restricciones del modelo se determinaron mediante estimados de órdenes de magnitud y expresadas como relaciones de tiempos tiempos característicos, área interfacial por unidad de volumen, longitudes características de las fases y del sistema macroscópico y un módulo de Thiele macroscópico (Ver en Ochoa *y col.*, 1986, Ec. 2.34). Posteriormente Wood y Whitaker (1998), desarrollaron modelos para la difusión y reacción en biopelículas, identificando tres regímenes para las cuales las ecuaciones de transporte promedio toman formas especiales; (1) de una sola ecuación, modelo de equilibrio local másico (2) de dos ecuaciones o de no-equilibrio y (3) pseudo-equilibrio local másico. En la definición de la concentración ponderada de equilibrio se incluye un coeficiente de equilibrio, y el modelo obtenido se presenta en términos de esta concentración donde se involucran coeficientes efectivos de difusión y parámetros efectivos de la reacción de Michaelis-Menten. En estos análisis se presentan las restricciones de acumulación, difusión y reacción que se deben de satisfacer para considerar válido el modelo de equilibrio y el problema de cerradura que se debe resolver para predecir el tensor efectivo de difusión, el cual ilustra la importancia de la microestructura y de los parámetros microscópicos. Si la condición de equilibrio local másico no se cumple se debe recurrir a un modelo de dos ecuaciones o de no-equilibrio para describir el proceso de difusión y reacción en una biopelícula, cuya forma

general de deducción se puede inferir de forma similar a la transferencia de calor por conducción. Cuando la reacción se supone instantánea, una forma especial del modelo de dos ecuaciones se identifica como modelo de pseudo-equilibrio donde la concentración en una fase es igual a cero. El uso del principio del equilibrio local másico se ha extendido al análisis del crecimiento celular de sistema biológicos donde se supone que una concentración ponderada de equilibrio describe el proceso de transporte en una membrana (Wood y Whitaker, 1999, 2000; Wood *y col.*, 2002; Chung *y col.*, 2006; Golfier *y col.*, 2009; Orgogozo *y col.*, 2010).

El principio de equilibrio local másico se basa sobre la suposición que un proceso de difusión y reacción se puede expresar en términos de una sola concentración promedio ponderada en un modelo de equilibrio de una sola ecuación. Las restricciones necesarias para considerar que un modelo de equilibrio local másico es válido, se desarrollan con base en estimados de órdenes de magnitud de las ecuaciones macroscópicas y del proceso de cerradura. Específicamente, se identifican de la diferencia de las concentraciones promedio en cada fase, la cual se presentan en términos de longitudes de escalas características de la micro y macroescala y parámetros asociados a los procesos de: *Acumulación* (tiempo característico), *Difusión* (difusión molecular en las fases y constantes de equilibrio) y *Reacción* (parámetros cinéticos). El estimado se obtienen de las ecuaciones diferenciales gobernantes de esta diferencia de concentraciones en un enfoque idéntico al seguido en el estudio del equilibrio local térmico. A diferencia del proceso térmico, las condiciones se deben identificar para los casos particulares de la cinética involucrada y de los procesos de equilibrio en cada fase. Para el proceso de difusión y reacción en biopelículas, Wood y Whitaker (1999) dedujeron las restricciones para cada ecuación de transporte que indicaban cuando el modelo de una sola ecuación de equilibrio másico es válido, y las cuales se puede resumir en la siguiente expresión

$$\frac{\langle c_{A\beta} \rangle^\beta - \alpha_1 \langle c_{A\sigma} \rangle^\sigma}{\Delta \{c_A\}} = \left(\frac{\ell_{\beta\sigma}}{L} \right)^2 \times \left[\frac{\mathbf{O} \left(\frac{\alpha_1 D'_{eff}}{\varepsilon_\sigma \mathcal{D}_{\beta\sigma}} \right) + \mathbf{O} \left(\frac{\varepsilon_\sigma + \alpha_1 \varepsilon_\beta}{\varepsilon_\sigma} \frac{L^2}{\mathcal{D}_{\beta\sigma} t^*} \right) + \mathbf{O} \left(\frac{\mathcal{D}_{A\beta} + \alpha_1 \mathcal{D}_{A\sigma}}{\mathcal{D}_{\beta\sigma}} \right) (1 + \mathbf{C}_{\beta\sigma})}{1 + \mathbf{O} \left(\frac{\ell_{\beta\sigma}}{L} \right)^2 + \mathbf{O} \left(\frac{\ell_{\beta\sigma}^2}{\mathcal{D}_{\beta\sigma} t^*} \right)} \right] \quad (1.2)$$

donde $\langle c_{A\beta} \rangle^\beta$ y $\langle c_{A\sigma} \rangle^\sigma$ es la concentración de la especie-*A* en la fase extracelular (β) e intracelular (σ) y la concentración promedio de equilibrio $\{c_A\} = \varepsilon_\beta \langle c_{A\beta} \rangle^\beta + \alpha_1 \varepsilon_\sigma \langle c_{A\sigma} \rangle^\sigma$; $\ell_{\beta\sigma}$ es una longitud microscópica asociada al proceso reactivo en la membrana celular; L es una longitud del sistema macroscópico; α es un coeficiente de equilibrio; ε_i y \mathcal{D}_{Ai} , porosidad y difusión

molecular para la especie A en la fase- i ($i = \beta, \sigma$), respectivamente; la difusión combinada $\mathcal{D}_{\beta\sigma} = \varepsilon_\sigma \mathcal{D}_{A\beta} + \varepsilon_\beta \alpha_1 \mathcal{D}_{A\sigma}$, D'_{eff} es la magnitud del tensor de difusión efectiva para el modelo de equilibrio, y $C_{\beta\sigma}$ es la magnitud de un *tensor de tortuosidad* que se asocia a la diferencia $\langle c_{A\beta} \rangle^\beta - \alpha_1 \langle c_{A\sigma} \rangle^\sigma$. Con base en la ecuación anterior y sobre los estimados de cada término en la fracción es del orden o menor a $\mathbf{O}(1)$, se puede simplificar a

$$\frac{\langle c_{A\beta} \rangle^\beta - \alpha_1 \langle c_{A\sigma} \rangle^\sigma}{\Delta \{c_A\}} = \mathbf{O} \left(\frac{\ell_{\beta\sigma}}{L} \right)^2 \quad (1.3)$$

Por lo tanto para este proceso de transporte celular, el equilibrio local másico requerirá, en general y de forma cualitativa, que $\ell_\beta \ll L^2$, de tal forma que se cumpla la desigualdad $\langle c_{A\beta} \rangle^\beta - \alpha_1 \langle c_{A\sigma} \rangle^\sigma \ll \Delta \{c_A\}$.

1.3.2. Condición de equilibrio local mecánico

En los modelos de una sola ecuación de equilibrio para la transferencia de calor y masa, se define una temperatura o concentración promedio de equilibrio mediante una *relación algebraica ponderada* de las temperaturas o una concentraciones de las fases individuales. En el estudio para flujo de dos fases fluidas inmiscibles en un medio poroso heterogéneo Quintard y Whitaker (1988), el *principio de equilibrio local mecánico* se refiere a la relación de la presión capilar - curvas de saturación con la fracción de volumen de la fase fluida β , en cada una de las regiones porosas- η y ω . Cuando el principio de equilibrio local mecánico se impone en este análisis, las ecuaciones de continuidad promedio de cada región se suman para obtener un sola ecuación de continuidad promedio a *gran-escala* para la fase- β . En estos análisis se precisa el significado de un *sistema homogéneo*, de acuerdo a la definición de Quintard y Whitaker (1987)

“Un medio poroso es *homogéneo* con respecto a una región de promedio y a un proceso dado cuando los coeficientes de transporte efectivos β en las ecuaciones de transporte promedio son independientes de la posición. Si el medio poroso no es homogéneo, entonces es *heterogéneo*”.

Para el flujo de una sola fase fluida en un sistema heterogéneo (Whitaker, 1999), cuando el principio de equilibrio local mecánico a gran escala es válido, permite obtener un modelo de equilibrio de una sola ecuación en términos de una sola presión promedio, la cual es suficiente para describir las presión de las regiones $-\eta$ y ω . Las restricciones asociadas en este modelo implica la estimación en órdenes de magnitud de la diferencia entre las presiones promedio de

cada región. Las condiciones que se deben de satisfacer (ver en Whitaker, 1999, Ec. 5.2 - 45) indican que para un flujo unidimensional, el modelo de equilibrio siempre será válido. Mientras que para un flujo bidimensional, debe existir una disparidad en las longitudes características del sistema heterogéneo y de las regiones porosas al menos de un orden de magnitud, y cuando no haya una diferencia mayor a dos órdenes de magnitud en las diferencias entre las permeabilidades de las regiones- η y ω para que el modelo de equilibrio se considere como válido

Ciertamente, considerando los estudios previos para el transporte multifásico de calor y masa, el principio de equilibrio local mecánico se puede usar en una manera análoga para la transferencia de cantidad de movimiento de una fase dispersa dentro de una fase continua que satura los poros de un medio poroso. En la literatura no se ha presentado ningún análisis como el que se describe. Esto sugiere aplicar el método del promedio volumétrico y obtener, en una primera instancia, un modelo de *no-equilibrio* de dos ecuaciones (para la fase fluida y dispersa) y posteriormente deducir un modelo de *equilibrio*, de una sola ecuación en términos de una velocidad y presión promedio ponderada y coeficientes de medio efectivo que capturen las características esenciales del flujo disperso global a través del medio poroso. El modelo de equilibrio que se obtenga podrá ser comparado, en cierta medida, con los otros tipos de modelos presentados con anterioridad, debido a que también describen este flujo por medio de una sola ecuación y donde el proceso de transporte del flujo disperso se enfoca en la determinación del coeficiente de medio efectivo que el modelo involucra. Sin embargo, a diferencia de estos modelos y dado el proceso de escalamiento que implica aplicar el método del promedio volumétrico, el modelo que se desarrolle tendrá una comprensión fenomenológica del flujo disperso que incluye la determinación de restricciones que permiten definir las condiciones para las cuales el modelo es válido y las capacidades predictivas de los coeficientes efectivos.

1.4. Análisis en la inter-región

En una descripción completa de los fenómenos de transporte, que implica el análisis de un sistema heterogéneo, es importante la caracterización del proceso de transferencia que toma lugar en la frontera que separa a dos regiones homogéneas. En esta zona, denominada *inter-región*, las propiedades locales de la microestructura del medio poroso presentan cambios espaciales significativos. Debido a esto las propiedades efectivas para la región homogénea (*p.ej.*

la permeabilidad, porosidad, conductividad efectiva) no se pueden aplicar en esta región. En el contexto del método del promedio volumétrico, las restricciones de longitudes características, usadas en la deducción de modelos macroscópicos para las regiones homogéneas, no se satisfacen y por lo tanto estos modelos promedio no son válidos. Desde una perspectiva de escalamiento, para abordar la deducción de modelos de transporte para la inter-región se proponen dos diferentes enfoques, las cuales se ilustran de manera general en la Figura 1 y que se discuten a continuación.

- El enfoque de *Un sólo dominio* u *ODA* (One-Domain Approach, por su siglas en inglés) (Goyeau *y col.*, 2003; Valdés-Parada *y col.*, 2007b, 2013; Aguilar-Madera *y col.*, 2011a). Bajo este, el sistema entero conformado por ambas regiones homogéneas se considera como un solo dominio y la inter-región se supone un pseudo-continuo, donde el modelo se lleva a cabo por ecuaciones de transporte generalizada o *GTE* (Generalized Transport Equation, por sus siglas en inglés), que son válidas en todos lados y no está asociada ninguna restricción de longitudes de escala características. Estas ecuaciones promedio se expresan en términos de coeficientes de medio efectivo dependientes de la posición, que son constantes en el medio homogéneo, y experimentan cambios abruptos y continuos de una región homogénea a la otra. El uso de esta metodología requiere de conocer la dependencia espacial de las propiedades efectivas para cerrar el modelo. Bajo este enfoque, el modelo escalado evita la formulación explícita de una condición de frontera en una inter-fase entre las regiones homogéneas.
- El enfoque de *Dos dominios* o *TDA* (Two-Domain Approach, por sus siglas en inglés) (Ochoa-Tapia y Whitaker, 1995b, 1997b; Valdés-Parada *y col.*, 2009b). En este, cada región homogénea se considera como un sólo dominio y el modelo que se obtiene se presenta con ecuaciones efectivas para cada región, que incluyen coeficientes efectivos constantes. En este caso la inter-región se reemplaza por una frontera discreta denominada *superficie divisoria*. En esta formulación, los fenómenos de transporte en la inter-región se consideran a través de las condiciones de salto en esta frontera “virtual”, mediante coeficientes efectivos de salto asociados. El uso de esta metodología requiere conocer la posición de la superficie divisoria y el método de predicción de los coeficientes efectivos para obtener una forma cerrada del modelo.

Ambas, la ODA y la TDA se pueden formular dentro del marco teórico del método del promedio volumétrico y la utilización de uno respecto a otra es una selección de modelado, que se determina usualmente, por ejemplo del análisis de las propiedades particulares del sistema considerado y de las capacidades computacionales disponibles. La mayoría de los trabajos en la literatura usan la TDA y las primeras formulaciones teóricas se dirigen a la deducción rigurosa de las *condiciones de salto*, usando para ello el escalamiento de las ecuaciones gobernantes a la microescala de diferentes procesos de transferencia de calor, masa y cantidad de movimiento en una frontera cercana entre una región porosa y fluido homogéneo (Prat, 1989, 1990, 1992; Ochoa-Tapia y Whitaker, 1997a, 1998; Valencia-López y Ochoa-Tapia, 2001; Ochoa-Tapia y Whitaker, 1995b, 1997b). Estas condiciones de salto involucran coeficientes efectivos donde se incluyen el efecto de las heterogeneidades de la inter-región que requiere de la derivación de un problema de cerradura asociado para su predicción. Algunas de estas deducciones se presentan en la literatura, las cuales extienden el análisis en el desarrollo de las condiciones de salto y de su cerradura mediante una metodología sistemática, basada en la teoría del promedio volumétrico, que involucra a su vez la imposición de restricciones adicionales. En estos análisis los coeficientes efectivos de cerradura se asocian a cantidades de “exceso” (Valdés-Parada *y col.*, 2006; Valdés-Parada *y col.*, 2009c, 2007a).

En trabajos adicionales Valdés-Parada *y col.* (2007b, 2009b, 2013), se señala que la predicción de los coeficientes de salto en el modelo TDA requiere de información proveniente de la ODA; esencialmente la funcionalidad espacial de los propiedades efectivas presentes en las ecuaciones promedio del ODA, la cual es necesaria para poder calcular de estos coeficientes de salto. Esto debido a que en el proceso de cerradura de la TDA, los coeficientes de salto involucrados en las condiciones de frontera requiere de la solución de la ODA y TDA para poder calcular las propiedades de exceso en las que se definen estos coeficientes usando un método iterativo. La cerradura para el modelo ODA que se presenta en estos trabajos implica la predicción de la dependencia espacial de los coeficientes efectivos mediante la solución numérica de un problema de cerradura asociado, cuyo dominio de solución son celdas unitarias bidimensionales *suficientemente grandes* que se localizan en diferentes posiciones a través de la inter-región. De esta manera, la dependencia espacial del coeficiente efectivo se asocia al centroide de cada celda, las cuales capturan los cambios geométricos de la microestructura dentro de la inter-región.

El enfoque de dos dominios se usa mas frecuente como opción de modelado debido a razones, tales como: (1) Las ecuaciones diferenciales se escriben en términos de parámetros efectivos constantes e independientes de la posición. (2) Debido a que la inter-región se sustituye por una frontera virtual o superficie divisoria en este enfoque, no es necesario tomar en cuenta las rápidas variaciones de las propiedades efectivas (*i.e* porosidad, permeabilidad) en esta parte del sistema. Como consecuencia, las soluciones numéricas desde un enfoque de TDA son teóricamente mas simples que la solución mediante la ODA. (3) Fenómenos de transporte relevantes que toman lugar en la inter-región en la ODA, se incorporan a través de coeficientes efectivos en las condiciones de frontera para la TDA en la superficie divisoria. Sin embargo el enfoque de un sólo dominio resulta una alternativa aceptable debido que es válido para todo el sistema y en general no involucra imponer restricciones de longitudes características, y sólo requiere el conocer las variaciones espaciales de los parámetros de transporte para cerrar las ecuaciones promedio que definen el modelo de transporte.

Recientemente, Valdés-Parada *y col.* (2013), propusieron una metodología para la deducción de condiciones de frontera completando, bajo el enfoque de uno y dos dominios, el análisis completo del transporte de cantidad de movimiento en el sistema de flujo entre un medio poroso y un fluido. Estas condiciones de frontera involucran coeficientes de salto que se pueden calcular de un problema asociado de *cerradura macroscópico* que toma en cuenta las desviaciones del TDA con respecto a la ODA y en cual la posición de la superficie divisoria, donde estas condiciones de salto se aplican, se puede predecir del mismo proceso de cerradura. A diferencia de propuestas anteriores (Valdés-Parada *y col.*, 2009b), la solución del problema macroscópico, y como consecuencia de la predicción de los coeficientes de salto, requieren sólo considerar las variaciones espaciales de los parámetros efectivos de la ODA, como la porosidad y la permeabilidad, y no de los campos de solución de la ODA y TDA. Así, ambas formulaciones se relacionan principalmente por los fenómenos que describen en la vecindad de la frontera entre regiones homogéneas y resulta de importancia de desarrollar a su vez modelos cerrados ODA, dedicado a la predicción de los coeficientes de medio efectivo en la zona de transición que separa los medios homogéneos, que resulta a su vez importante en la deducción posterior de las condiciones de salto y el calculo de los coeficiente efectivos asociados para el modelo cerrado TDA.

La aplicación del principio de equilibrio local para describir el transporte multifásico en una frontera cercana entre medios homogéneos se ha presentado en el desarrollo de modelos para la transferencia de calor. Las condiciones para este proceso fueron analizadas inicialmente por Ochoa-Tapia y Whitaker (1997a, 1998) para la frontera entre un medio poroso y un fluido homogéneo y dedujeron ecuaciones de transporte de no-equilibrio (dos ecuaciones) y de equilibrio local térmico (de una ecuación) usando ambos enfoques, TDA y ODA. Recientemente, Aguilar-Madera *y col.* (2011a), investigaron la validez de la suposición *equilibrio local térmico* desarrollando las ecuaciones de medio efectivo desde un enfoque de un sólo dominio. Los coeficientes efectivos dependientes de la posición involucrados en ambos modelos promedio, de equilibrio y no-equilibrio local térmico, se calcularon de la solución de los problemas asociados, deducidos en el proceso de cerradura, en celdas unitarias que capturaban los cambios geométricos presentes en la inter-región. La comparación de los perfiles predichos con ambos modelos con simulaciones numéricas directas en estado estacionario, muestran que la condición de equilibrio local térmico es, en general, válida en todo el sistema que incluye las regiones homogéneas y la inter-región.

Aunque propiamente no es un desarrollo riguroso de condiciones de salto, un análisis incipiente de la deducción de las condiciones de frontera, y las restricciones asociadas, en la superficie divisoria entre dos medios porosos se presentan en desarrollo del modelo para el flujo de dos fases fluidas inmiscibles en un medio poroso heterogéneo (Ver en Quintard y Whitaker, 1988, Apéndice A). El resultado son condiciones de frontera que permiten relacionar la ley de Darcy de ambas fases fluidas de cada región porosa, en una forma análoga a la TDA aplicada a un proceso de transferencia multifásica de no equilibrio.

Para finalizar, es evidente que el análisis del flujo disperso de dos fases fluidas inmiscibles en un medio poroso involucrará la descripción de la transferencia de cantidad de movimiento tanto en la región homogénea como en la frontera cercana entre dos medios porosos (inter-región), bajo el enfoque de un sólo dominio. De acuerdo con los estudios presentados, centrados inicialmente en el análisis de la región homogénea, el resultado de aplicar el método del promedio volumétrico resultará en un modelo en términos de una ecuación de transporte para la fase continua y otra para la fase dispersa, considerando este modelo como de no equilibrio. La validez de la condición de equilibrio local mecánico dará lugar a modelo de una sola ecuación descriptiva del transporte multifásico. Dada la cerradura de este modelo entorno a la predicción de los

coeficientes involucrados, calculados en celdas periódicas representativas del flujo disperso en un medio poroso, estos resultados pueden ser comparados con aquellos análogos obtenidos de otras metodologías. Posteriormente, el estudio de la inter-región se puede llevar a cabo mediante el desarrollo del modelo a través de un enfoque de un sólo dominio y bajo misma la suposición de un equilibrio local mecánico, para ser precedente a una deducción posterior mediante la TDA. El modelo ODA deducido para este tipo de flujo será válido para todo el sistema y no estará sujeto a restricciones de longitudes características asociadas a un esquema de cerradura sólo a la condición del equilibrio local mecánico, por lo tanto se puede aplicar a diferentes tipos de inter-regiones como: medio poroso - fluido homogéneo (planteada en estos trabajos referenciados), medio poroso - medio poroso y *fracturas* (Sahimi, 2011). La cerradura del modelo ODA se centrará entonces en la determinación de la variación espacial de los coeficientes de medio efectivo dada por la transición de una región homogénea a otra. De acuerdo con los trabajos citados, estos cálculos se pueden obtener de la solución de problemas de cerradura en celdas unitarias que representen el flujo disperso inmiscible en la inter-región. La validez de la condición de equilibrio del modelo ODA, en ausencia de datos experimentales, se puede realizar como se plantea en la literatura (Aguilar-Madera *y col.*, 2011a), mediante las predicciones de los perfiles de velocidad y su comparación con los obtenidos de la simulación numérica directa.

General

Desarrollar un modelo para el transporte de cantidad de movimiento del flujo disperso de dos fases fluidas inmiscibles en un medio poroso homogéneo y cercano a la frontera entre dos regiones homogéneas desde un enfoque de un sólo dominio.

Particulares

- Desarrollar el modelo cerrado para el flujo disperso de dos fases fluidas inmiscibles en un medio poroso homogéneo, considerando el principio del *equilibrio local mecánico*.
- Predecir los valores de los coeficientes de medio efectivo asociado al modelo de equilibrio.
- Comparar las predicciones de los coeficientes de medio efectivo con los datos experimentales disponibles.
- Desarrollar el modelo, desde un enfoque de *un solo dominio*, para el estudio del flujo disperso en la inter-región considerando el principio de equilibrio local mecánico.
- Predecir los cambios espaciales de los coeficientes de medio efectivo involucrados en el modelo de equilibrio para el flujo disperso en la inter-región.
- Validar el modelo de equilibrio de un solo dominio para el flujo disperso mediante la comparación del perfil velocidad con el obtenido de la DNS.

Parte I

Análisis en el seno de la región homogénea

CAPÍTULO 2

ECUACIONES DE TRANSPORTE PROMEDIO

En este capítulo se presenta el desarrollo para obtener el modelo escalado que describe el flujo disperso de dos fases fluidas inmiscibles en un medio poroso homogéneo, usando el método del promedio volumétrico (Whitaker, 1999). El modelo se obtiene a partir de la descripción microscópica y la aplicación de los operadores y teoremas de promediado, empleados en esta teoría. Además, se propone la aplicación del principio de *equilibrio local mecánico*, el cual involucra restricciones adicionales a las originalmente involucradas, en el desarrollo del modelo vía el método del promedio volumétrico. Con el objetivo de que el documento principal incluya sólo las deducciones de mayor interés, los detalles en los desarrollos teóricos se incluyen en los apéndices. Por último, cabe señalar que mucho del contenido en el presente capítulo se publicaron recientemente (Luévano-Rivas y Valdés-Parada, 2015).

2.1. Modelo microscópico

La representación del sistema de flujo disperso de dos fases fluidas en un medio poroso homogéneo se presenta en la Figura 2.1. El sistema considera una fase fluida dispersa, denominada fase- γ , dentro de una fase fluida continua, denominada fase- β , los cuales fluyen a través de la matriz sólida del medio poroso, denominada fase- κ . Un ejemplo de este sistema general se presenta con el flujo de petróleo emulsificado dentro de una corriente de inundación a través del yacimiento en técnicas de recuperación mejorada (Schramm, 1992). Se plantea que el flujo está sujeto a las siguientes suposiciones:

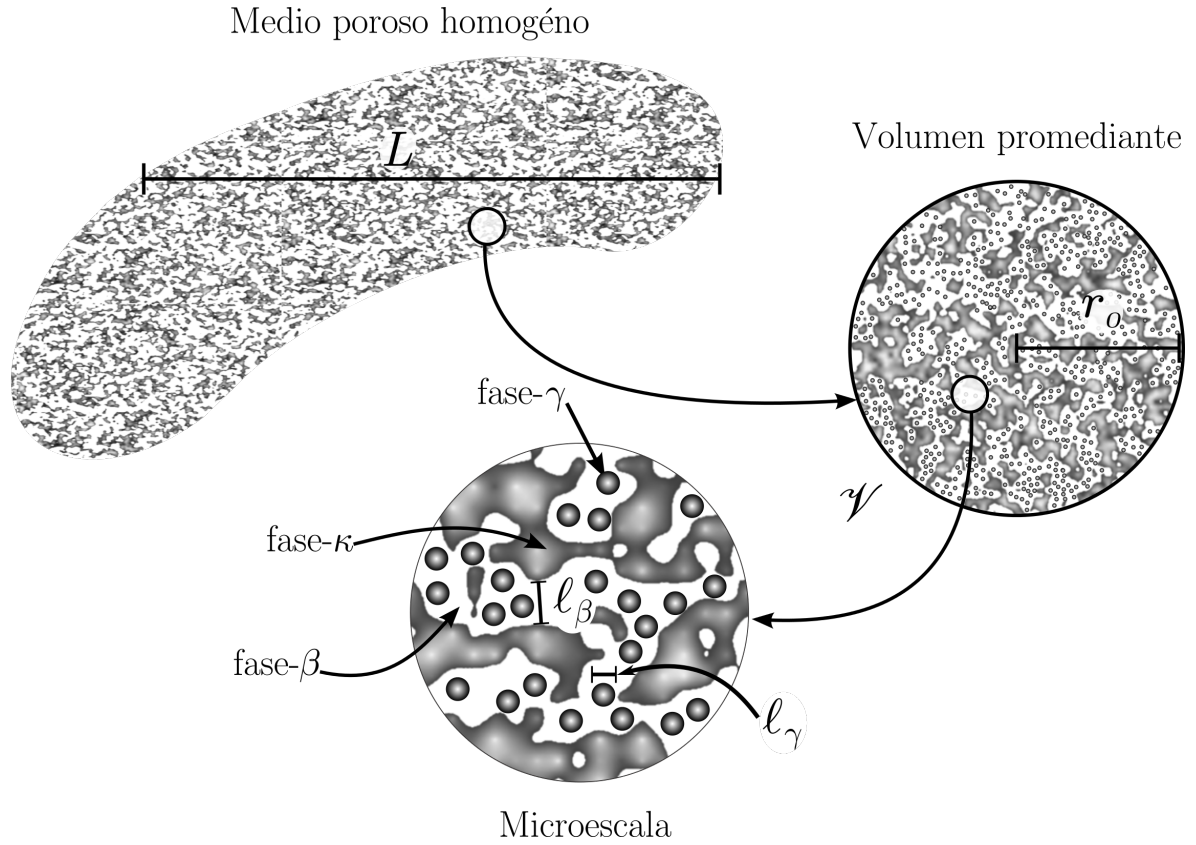


Figura 2.1. Sistema del flujo disperso de dos fases fluidas inmiscibles en un medio poroso homogéneo.

1. Las fases fluidas se consideran incompresibles y Newtonianas.
2. La matriz porosa se supone rígida, homogénea, inerte e impermeable.
3. De las dos fases fluidas, sólo la fase- β está en contacto con el sólido. La fase- γ , se considera una emulsión estable en contacto sólo con la fase- β . Por consiguiente, no se considera la existencia de una línea de contacto entre las dos fases fluidas y la fase sólida.
4. Los efectos inerciales se consideran despreciables y el flujo se considera estacionario (*i.e.* $\rho_\alpha \left(\frac{\partial \mathbf{v}_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla \mathbf{v}_\alpha \right) = 0 \quad \alpha = \beta, \gamma$).
5. Las propiedades físicas, densidad y viscosidad, son constantes dentro del dominio de promediado.
6. La dinámica del tamaño y la forma de la fase dispersa se consideran despreciables y no se considera coalescencia de las gotas que la conforman.
7. El gradiente de la tensión superficial, $\nabla_s \sigma$ se considera despreciable bajo la suposición que las gotas de la fase dispersa son esferas no deformables.

Bajo estas condiciones, el sistema de ecuaciones que gobiernan el transporte de masa y cantidad de movimiento, en la microescala, se expresa de la siguiente forma

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_\alpha = 0, \text{ en la fase-}\alpha \quad \alpha = \beta, \gamma \quad (2.1a)$$

$$0 = -\nabla p_\alpha + \rho_\alpha \mathbf{g} + \mu_\alpha \nabla^2 \mathbf{v}_\alpha, \text{ en la fase-}\alpha \quad \alpha = \beta, \gamma \quad (2.1b)$$

$$\mathbf{v}_\beta = \mathbf{v}_\gamma, \text{ en la interfase } \beta\text{-}\gamma \quad (2.1c)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot [-p_\beta \mathbf{I} + \mu_\beta (\nabla \mathbf{v}_\beta + \nabla \mathbf{v}_\beta^T)] = & \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot [-p_\gamma \mathbf{I} + \mu_\gamma (\nabla \mathbf{v}_\gamma + \nabla \mathbf{v}_\gamma^T)] \\ & + 2\sigma H \mathbf{n}_{\beta\gamma}, \text{ en la interfase } \beta\text{-}\gamma \end{aligned} \quad (2.1d)$$

$$\mathbf{v}_\beta = \mathbf{0}, \text{ en la interfase } \beta\text{-}\kappa \quad (2.1e)$$

donde, ρ_α y μ_α ($\alpha = \beta, \gamma$) representan la densidad y la viscosidad de las fases fluidas, respectivamente \mathbf{v}_α y p_α son la velocidad y presión puntual de la fase fluida- α ($\alpha = \beta, \gamma$), respectivamente. La condición de frontera en la interfase $\beta - \gamma$, Ecuación (2.1c), supone que no existe intercambio de masa, por consiguiente se puede imponer que la velocidad es continua. Por otro lado, la condición de esfuerzos interfacial, Ecuación (2.1d), supone que existe un salto de los esfuerzos puramente normal debido a efectos capilares en la interfase $\beta - \gamma$ y se ignoran los efectos de agentes emulsificantes (Slattery *y col.*, 2007). En esta condición de frontera, σ representa la tensión interfacial y H la curvatura de la interfase. Aquí, el tensor de esfuerzos se expresa de acuerdo con el carácter Newtoniano de ambas fases fluidas. Finalmente, en la Ecuación (2.1e) se impone la condición de no deslizamiento solamente entre la fase continua y el sólido (interfase $\beta - \kappa$), para establecer con ello el carácter disperso del flujo.

2.2. Escalamiento

Con el objetivo de obtener expresiones de medio efectivo de las ecuaciones a la microescala a través de un proceso de promediado, se define un volumen promediante \mathcal{V} , de norma V , fijo en el tiempo y se representa en la Figura 2.1. En términos de este dominio de promediado, el operador de promediado *superficial* para una propiedad continua ψ_α ($\alpha = \beta, \gamma$), definida en una

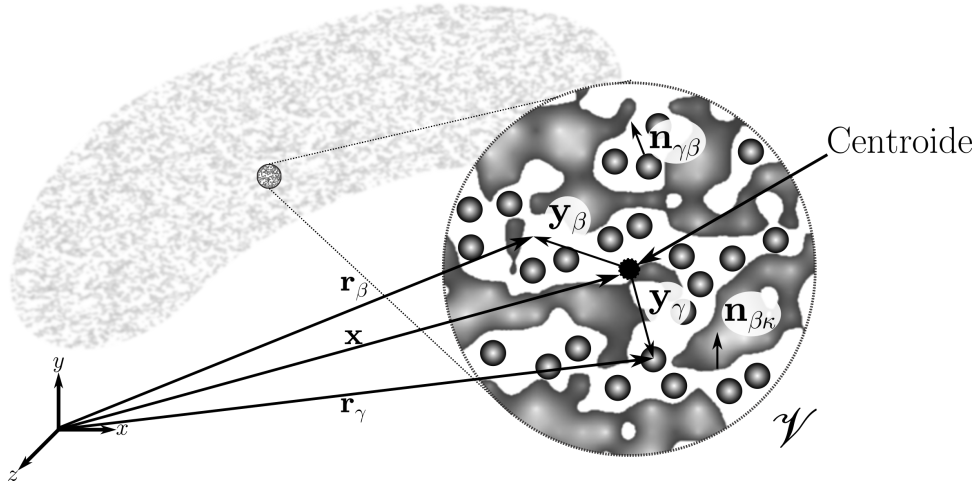


Figura 2.2. Vectores asociados a un volumen promediante.

de la fases fluidas, se expresa como (Whitaker, 1999),

$$\langle \psi_\alpha \rangle |_{\mathbf{x}} = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{V}_\alpha(\mathbf{x})} \psi_\alpha |_{\mathbf{r}_\alpha} dV, \quad \psi = p, \mathbf{v}, \quad \alpha = \beta, \gamma \quad (2.2)$$

donde \mathcal{V}_α , es el dominio ocupado por la fase- α dentro del volumen promediante, \mathcal{V} ; \mathbf{x} es el vector de posición que localiza el centroide de \mathcal{V} , con respecto a un marco de referencia externo y $\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{x} + \mathbf{y}_\alpha$ es el vector que localiza cualquier punto de la fase α , ambos se muestran en la Figura 2.2; además, \mathbf{y}_α es el vector de posición que localiza puntos de la fase- α , dentro de \mathcal{V} , con respecto a la posición del centroide. Por otra parte, el operador de promediado *intrínseco* se define como sigue

$$\langle \psi_\alpha \rangle^\alpha |_{\mathbf{x}} = \frac{1}{V_\alpha(\mathbf{x})} \int_{\mathcal{V}_\alpha(\mathbf{x})} \psi_\alpha |_{\mathbf{r}_\alpha} dV, \quad \psi = p, \mathbf{v}, \quad \alpha = \beta, \gamma \quad (2.3)$$

Ambos operadores se relacionan entre sí de la siguiente manera: $\langle \psi_\alpha \rangle = \varepsilon_\alpha(\mathbf{x}) \langle \psi_\alpha \rangle^\alpha$, donde ε_α , es la fracción volumétrica de la fase- α dentro del dominio de promediado,

$$\varepsilon_\alpha(\mathbf{x}) = \frac{V_\alpha(\mathbf{x})}{V} \quad (2.4)$$

Se debe señalar que es conveniente especificar la posición del volumen promediante en el caso de la deducción de modelos escalados que son válidos en todo el dominio, es decir tanto las región homogénea (analizadas en este Parte de trabajo) como en la frontera cercana entre

dos regiones homogéneas (denominada *inter-región*), la cual se estudiará en la Parte II de este trabajo. Durante la deducción de las ecuaciones promedio, usualmente se requiere intercambiar diferenciación e integración, para ello se hace uso del *teorema del promedio espacial* (Howes y Whitaker, 1985). Para la fase- β , este teorema se expresa como

$$\langle \nabla \psi_\beta \rangle = \nabla \langle \psi_\beta \rangle + \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\kappa}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\beta\kappa} \psi_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} dA + \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \psi_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} dA \quad (2.5)$$

En el caso de la fase- γ , al suponer que sólo existe contacto entre la fases fluidas, el teorema toma la siguiente forma

$$\langle \nabla \psi_\gamma \rangle = \nabla \langle \psi_\gamma \rangle + \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\gamma\beta} \psi_\gamma|_{\mathbf{r}_\gamma} dA \quad (2.6)$$

Una herramienta matemática adicional usada en el escalamiento es el *teorema general del transporte*, el cual permite relacionar el promedio de derivadas temporales parciales de cantidades a la microescala con derivadas temporales parciales de cantidades promedio asociadas a un volumen promediado (Truesdell y Toupin, 1960). En el caso de la fase- β este teorema se escribe como,

$$\left\langle \frac{\partial \psi_\beta}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle \psi_\beta \rangle}{\partial t} - \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}(\mathbf{x})} \psi_\beta \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \mathbf{w} dA - \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\kappa}(\mathbf{x})} \psi_\beta \mathbf{n}_{\beta\kappa} \cdot \mathbf{w} dA \quad (2.7)$$

y para la fase- γ

$$\left\langle \frac{\partial \psi_\gamma}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle \psi_\gamma \rangle}{\partial t} - \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}(\mathbf{x})} \psi_\gamma \mathbf{n}_{\gamma\beta} \cdot \mathbf{w} dA \quad (2.8)$$

Los vectores unitarios normales con dirección de una fase a la otra fase se representan por: $\mathbf{n}_{\beta\gamma} = -\mathbf{n}_{\gamma\beta}$ (de la fase- β hacia la fase- γ y viceversa) y $\mathbf{n}_{\beta\kappa}$ (de la fase- β hacia la fase- κ). En estas relaciones $\mathcal{A}_{\beta\gamma}(\mathbf{x})$ y $\mathcal{A}_{\beta\kappa}(\mathbf{x})$, representan las superficies interfaciales entre las fase β con las fases γ y κ , (de áreas $A_{\beta\gamma}$ y $A_{\beta\kappa}$), contenidas dentro del dominio de promediado, \mathcal{V} . Donde, $\mathbf{n}_\beta \cdot \mathbf{w}$ es la componente normal de la velocidad de la interfase $\beta - \gamma$. Estos teoremas de promediado espacial y temporal completan las herramientas necesarias para poder derivar, a partir de las ecuaciones de transporte del flujo disperso de la microescala, ecuaciones promedio válidas a la macroescala. Como se ha mencionado, durante el proceso de escalamiento usualmente se requiere

que el tamaño del volumen promediante, r_0 , satisfaga la restricción de escalas características siguiente (Whitaker, 1999),

$$\ell_\alpha \ll r_0 \ll L, \quad \alpha = \beta, \gamma \quad (2.9)$$

donde, ℓ_α representan las longitudes características de la fase- α en la microescala y la longitud del sistema macroscópico se denota por L . Para este sistema, se pueden asociar ℓ_β con el orden de magnitud del diámetro del poro, $\mathbf{O}(d_p)$ y ℓ_γ con el orden de magnitud del diámetro de la gota de la fase dispersa, $\mathbf{O}(d_g)$, como se muestra en la Figura 2.1. La restricción de longitudes características de la Ecuación (2.6) permite *suavizar* las heterogeneidades microscópicas de las propiedades que se promedian, filtrando sistemáticamente la información del proceso de transporte procedente de la microescala (Bear y Cheng, 2010).

2.3. Modelo de no-equilibrio local mecánico

En esta sección se aplica sistemáticamente el método del promedio volumétrico con el objetivo de desarrollar un modelo escalado para el proceso del flujo disperso dentro de una región porosa homogénea, sin considerar la condición del *equilibrio local mecánico*; condición que será explicada en detalle en el Capítulo 3. El método inicia con la aplicación de los operadores promediado y teoremas de promediado presentados en la sección anterior, al modelo microscópico, definido por el sistema de ecuaciones (2.1).

2.3.1. Ecuación de continuidad

Aplicando el operador de promediado superficial, Ecuación (2.2), a la ecuación de continuidad microscópica, Ecuación (2.1a), se obtiene para la fase- β

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{v}_\beta \rangle = 0 \quad (2.10)$$

Usando el teorema del promediado espacial, Ecuación (2.5), en la expresión anterior se obtiene

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \mathbf{v}_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} dA = 0 \quad (2.11)$$

Por otro parte, evaluando en el teorema general del transporte, Ecuación (2.7), $\psi_\beta = 1$, en

caso de la fase- β se puede deducir la siguiente relación

$$\frac{\partial \varepsilon_\beta(\mathbf{x})}{\partial t} - \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \mathbf{w} \, dA = 0 \quad (2.12)$$

en la aplicación de ambos teoremas se usó la condición de no deslizamiento en la interfase $\beta - \kappa$, Ecuación (2.1e).

La ecuación de continuidad macroscópica para la fase- β se obtiene al sumar la Ecuación (2.12) a la (2.11), así

$$\frac{\partial \varepsilon_\beta(\mathbf{x})}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot (\mathbf{v}_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} - \mathbf{w}) \, dA = 0 \quad (2.13)$$

Si existe transferencia de masa en la interfase $\beta - \gamma$, el último término de la ecuación anterior no es cero; sin embargo, para este caso de estudio ambas fases fluidas son inmiscibles y como consecuencia en esta interfase se tiene que

$$\mathbf{v}_\beta \cdot \mathbf{n}_{\beta\gamma} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_{\beta\gamma} = \mathbf{v}_\gamma \cdot \mathbf{n}_{\beta\gamma} \quad (2.14)$$

y de esta forma la Ecuación (2.13), se puede simplificar para obtener

$$\frac{\partial \varepsilon_\beta(\mathbf{x})}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle = 0 \quad (2.15)$$

Finalmente, limitando el análisis bajo las suposiciones del modelo. El primer término de la ecuación anterior se descarta para obtener la siguiente ecuación de continuidad macroscópica para la fase- β ,

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle = 0, \quad (2.16a)$$

Siguiendo el mismo procedimiento se deduce la ecuación de continuidad análoga para la fase- γ ,

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle = 0 \quad (2.16b)$$

2.3.2. Ecuación de cantidad de movimiento

El siguiente paso consiste en el promediado del balance de cantidad de movimiento. Usando el operador de promedio superficial, Ecuación (2.2), en el balance de cantidad de movimiento puntual, Ecuación (2.1b), para la fase- β se obtiene,

$$0 = -\langle \nabla p_\beta \rangle + \varepsilon_\beta(\mathbf{x})\rho_\beta \mathbf{g} + \mu_\beta \langle \nabla \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta \rangle \quad (2.17)$$

En este resultando la densidad y viscosidad de las fases fluidas se han considerado constantes dentro del volumen promediante. Haciendo uso del teorema del promediado espacial, Ecuación (2.5), esta última expresión se escribe como

$$\mathbf{0} = -\nabla \langle p_\beta \rangle + \varepsilon_\beta(\mathbf{x})\rho_\beta \mathbf{g} + \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_\beta(\mathbf{x})} \mathbf{n}_\beta \cdot \left[-\mathbf{l} p_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} + \mu_\beta \nabla \mathbf{v}_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} \right] dA + \mu_\beta \nabla \cdot \left(\frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_\beta(\mathbf{x})} \mathbf{n}_\beta \mathbf{v}_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} dA \right), \quad (2.18)$$

donde se ha usado \mathbf{n}_β , que engloba ambos vectores normales unitarios: $\mathbf{n}_{\beta\gamma}$ y $\mathbf{n}_{\beta\kappa}$ y $\mathcal{A}_\beta(\mathbf{x})$ corresponde a sus respectivas interfases, $\mathcal{A}_{\beta\gamma}(\mathbf{x})$ y $\mathcal{A}_{\beta\kappa}(\mathbf{x})$. A partir del teorema del promediado espacial, tomando $\psi_\beta = 1$, se puede deducir la siguiente expresión,

$$\nabla \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) = -\frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_\beta(\mathbf{x})} \mathbf{n}_\beta dA \quad (2.19)$$

Mediante la relación entre ambos promedios, Ecuación (2.4), y aplicando la relación anterior, es posible deducir la siguiente ecuación de cantidad de movimiento macroscópica en términos de promedios intrínsecos,

$$\mathbf{0} = -\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} + \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \mu_\beta \nabla \cdot \left[\frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_\beta(\mathbf{x})} \mathbf{n}_\beta \left(\mathbf{v}_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} - \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \right) dA \right] + \frac{1}{V_\beta(\mathbf{x})} \int_{\mathcal{A}_\beta(\mathbf{x})} \mathbf{n}_\beta \cdot \left[-\mathbf{l} \left(p_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} - \langle p_\beta \rangle^\beta \right) + \mu_\beta \nabla \left(\mathbf{v}_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} - \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \right) \right] dA \quad (2.20)$$

Siguiendo el método del promedio volumétrico, en esta etapa para eliminar las cantidades

puntuales, p_β y \mathbf{v}_β , se definen de acuerdo a la descomposición espacial (Gray, 1975)

$$\psi_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} = \langle \psi_\beta \rangle^\beta|_{\mathbf{r}_\beta} + \tilde{\psi}_\beta|_{\mathbf{r}_\beta}, \quad \psi_\beta = p, \mathbf{v} \quad (2.21)$$

Al sustituir, esta expresión en la Ecuación (2.20)

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = & -\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} + \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \mu_\beta \nabla \cdot \left[\frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_\beta(\mathbf{x})} \mathbf{n}_\beta \left(\tilde{\mathbf{v}}_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} + \Delta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \right) dA \right] \\ & + \frac{1}{V_\beta(\mathbf{x})} \int_{\mathcal{A}_\beta(\mathbf{x})} \mathbf{n}_\beta \cdot \left[-\mathbf{I} \left(\tilde{p}_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} + \Delta \langle p_\beta \rangle^\beta \right) + \mu_\beta \nabla \left(\tilde{\mathbf{v}}_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} + \Delta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \right) \right] dA \quad (2.22a) \end{aligned}$$

donde $\Delta \langle \psi_\beta \rangle^\beta = \langle \psi_\beta \rangle^\beta|_{\mathbf{r}_\beta} - \langle \psi_\beta \rangle^\beta$, $\psi = p, \mathbf{v}$. Siguiendo el mismo procedimiento se puede obtener la ecuación de cantidad de movimiento macroscópica para la fase- γ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = & -\nabla \langle p_\gamma \rangle^\gamma + \rho_\gamma \mathbf{g} + \mu_\gamma \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma + \varepsilon_\gamma^{-1}(\mathbf{x}) \mu_\gamma \nabla \cdot \left[\frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\gamma\beta} \left(\tilde{\mathbf{v}}_\gamma|_{\mathbf{r}_\gamma} + \Delta \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) dA \right] \\ & + \frac{1}{V_\gamma(\mathbf{x})} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\gamma\beta} \cdot \left[-\mathbf{I} \left(\tilde{p}_\gamma|_{\mathbf{r}_\gamma} + \Delta \langle p_\gamma \rangle^\gamma \right) + \mu_\gamma \nabla \left(\tilde{\mathbf{v}}_\gamma|_{\mathbf{r}_\gamma} + \Delta \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) \right] dA \quad (2.22b) \end{aligned}$$

En la deducción de estas expresiones no se han involucrado las restricciones de longitudes características establecidas en la Ecuación (2.9), y por consiguiente esta ecuación de transporte es *no-local* ya que $\langle \psi_\beta \rangle^\beta|_{\mathbf{r}_\beta}$ se evalúa en puntos distintos al centroide, \mathbf{x} . En la Parte II de este trabajo, el modelo obtenido en este punto se usa para describir el transporte disperso en la vecindad de la frontera entre dos regiones homogéneas. Con el objetivo de determinar aproximaciones válidas que permitan simplificar el modelo deducido, se aplica el operador de promediado espacial intrínseco a la descomposición espacial, Ecuación (2.21), esto resulta en la siguiente expresión

$$\langle \psi_\alpha \rangle^\alpha = \frac{1}{V_\alpha(\mathbf{x})} \int_{\mathcal{V}_\alpha(\mathbf{x})} \langle \psi_\alpha \rangle^\alpha|_{\mathbf{r}_\beta} dV + \frac{1}{V_\alpha(\mathbf{x})} \int_{\mathcal{V}_\alpha(\mathbf{x})} \tilde{\psi}_\alpha|_{\mathbf{r}_\alpha} dV, \quad \alpha = \beta, \gamma, \quad \psi_\beta = p, \mathbf{v} \quad (2.23)$$

Para esta ecuación se puede realizar la siguiente simplificación

$$\frac{1}{V_\alpha(\mathbf{x})} \int_{\mathcal{V}_\alpha(\mathbf{x})} \langle \psi_\alpha \rangle^\alpha|_{\mathbf{r}_\beta} dV = \langle \psi_\alpha \rangle^\alpha|_{\mathbf{x}} \quad (2.24)$$

Este tipo de aproximación considera que las variaciones espaciales, de las cantidades promedio dentro del volumen promediante, son despreciables (a la escala r_0) estableciendo un análisis *local* del modelo deducido. Este tipo de aproximaciones se examinan en detalle en los trabajos de Carbonell y Whitaker (1984); Quintard y Whitaker (1994); Whitaker (1999), donde se indica que los términos del tipo: $\langle \mathbf{y}_\alpha \rangle \cdot \nabla \langle \psi_\alpha \rangle^\alpha$, $\langle \mathbf{y}_\alpha \mathbf{y}_\alpha \rangle : \nabla \nabla \langle \psi_\alpha \rangle^\alpha$, derivados de una expansión en series de Taylor de las cantidades promedio y sus gradientes alrededor del centroide, se pueden despreciar cuando se satisface la restricción de longitudes características dada en la Ecuación. (2.9). De esa manera, se sustituye la Ecuación. (2.24) en la Ecuación (2.23), para obtener la siguiente restricción para las desviaciones espaciales

$$\langle \tilde{\psi}_\alpha \rangle^\alpha = 0, \quad \alpha = \beta, \gamma, \quad \psi_\beta = p, \mathbf{v} \quad (2.25)$$

Además, usando una simplificación similar a la Ecuación (2.24), se determina que los términos $\mathbf{O}(\Delta \langle \psi_\alpha \rangle^\alpha) \ll 1$, $\psi = p, \mathbf{v}$, $\alpha = \beta, \gamma$, y de esa manera estos términos en las ecuaciones (2.22a) y (2.22b) son considerados despreciables, pudiendo escribir para la ecuación de cantidad de movimiento de la forma siguiente

$$\mathbf{0} = -\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} + \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \mu_\beta \nabla \cdot \left[\frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_\beta(\mathbf{x})} \mathbf{n}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} dA \right] + \frac{1}{V_\beta(\mathbf{x})} \int_{\mathcal{A}_\beta(\mathbf{x})} \mathbf{n}_\beta \cdot \left[-\mathbf{l} \tilde{p}_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} + \mu_\beta \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} \right] dA \quad (2.26a)$$

En esta forma, los primeros tres términos del lado derecho representan formas análogas, en términos de velocidad y presiones macroscópicas, del balance de cantidad de movimiento establecido en el modelo microscópico, Ecuación (2.1b), y los términos restantes son resultado del escalamiento llevado a cabo vía el método del promedio volumétrico. Además, es posible realizar un estimado de órdenes de magnitud a los dos últimos términos que permita simplificar las Ecuaciones. (2.26a). Los órdenes de magnitud de estos términos se presentan a continuación

$$\frac{1}{V_\beta(\mathbf{x})} \int_{\mathcal{A}_\beta(\mathbf{x})} \mathbf{n}_\beta \cdot [\mu_\beta \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta|_{\mathbf{r}_\beta}] dA = \mathbf{O} \left(\frac{\mu_\beta \tilde{v}_\beta}{\ell_\beta^2} \right), \quad (2.27a)$$

$$\varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \mu_\beta \nabla \cdot \left[\frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_\beta(\mathbf{x})} \mathbf{n}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} dA \right] = \mathbf{O} \left(\frac{\mu_\beta \tilde{v}_\beta}{\ell_\beta L} \right) = \mathbf{O} \left(\frac{\mu_\gamma \tilde{v}_\gamma}{\ell_\gamma L} \right) \quad (2.27b)$$

En estas relaciones las longitudes características del operador gradiente dentro de las integrales es ℓ_β^{-1} , mientras que para el gradiente de cantidades promedio es L^{-1} , además se ha considerado razonable estimar que $A_\beta/V_\beta = \mathbf{O}(1/\ell_\beta)$. En estos órdenes de magnitud $\tilde{v}_\alpha = \|\tilde{\mathbf{v}}_\alpha\|$, $\alpha = \beta, \gamma$. Con base en la relación de longitudes de escala características de la Ecuación (2.9), se puede suponer como válida la siguientes desigualdad,

$$\varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \mu_\beta \nabla \cdot \left[\frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_\beta(\mathbf{x})} \mathbf{n}_\beta \tilde{\mathbf{v}}_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} dA \right] \ll \frac{1}{V_\beta(\mathbf{x})} \int_{\mathcal{A}_\beta(\mathbf{x})} \mathbf{n}_\beta \cdot [\mu_\beta \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta|_{\mathbf{r}_\beta}] dA \quad (2.28)$$

Esto indica que el último término puede descartarse de las ecuaciones de cantidad de movimiento macroscópica, y escribirse para la fase- β como

$$\mathbf{0} = -\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} + \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \frac{1}{V_\beta(\mathbf{x})} \int_{\mathcal{A}_\beta(\mathbf{x})} \mathbf{n}_\beta \cdot [-\mathbf{I} \tilde{p}_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} + \mu_\beta \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta|_{\mathbf{r}_\beta}] dA \quad (2.29a)$$

y utilizando los mismos argumentos, para la fase- γ se tiene

$$\mathbf{0} = -\nabla \langle p_\gamma \rangle^\gamma + \rho_\gamma \mathbf{g} + \mu_\gamma \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma + \frac{1}{V_\gamma(\mathbf{x})} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\gamma\beta} \cdot [-\mathbf{I} \tilde{p}_\gamma|_{\mathbf{r}_\gamma} + \mu_\gamma \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\gamma|_{\mathbf{r}_\gamma}] dA \quad (2.29b)$$

En esta forma, las ecuaciones de cantidad de movimiento no representan una forma final del modelo escalado ya que se encuentran expresadas en términos de desviaciones de la velocidad y la presión. La deducción para determinar la funcionalidad de estas desviaciones en términos de sus correspondientes cantidades promedio se denomina *cerradura*. El desarrollo de la solución del problema de cerradura asociado al modelo promedio es bastante extensa y los detalles se presentan en la Apéndice A. Para conservar la brevedad en la presentación de este trabajo, basta aquí con escribir la solución formal del problema de cerradura del campo de desviaciones

espaciales para ambas fases fluidas

$$\tilde{\mathbf{v}}_\beta = \mathbf{A}_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \mathbf{A}_{\beta\gamma} \cdot \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) + \mathbf{d}_\beta \left(\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma \right) + \mathbf{f}_\beta, \quad (2.30a)$$

$$\tilde{p}_\beta = \mu_\beta \left[\mathbf{a}_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \mathbf{a}_{\beta\gamma} \cdot \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) + s_\beta \left(\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma \right) + \varphi_\beta \right], \quad (2.30b)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_\gamma = \mathbf{A}_\gamma \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \mathbf{A}_{\gamma\beta} \cdot \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) + \mathbf{d}_\gamma \left(\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma \right) + \mathbf{f}_\gamma, \quad (2.30c)$$

$$\tilde{p}_\gamma = \mu_\gamma \left[\mathbf{a}_\gamma \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \mathbf{a}_{\gamma\beta} \cdot \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) + s_\gamma \left(\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma \right) + \varphi_\gamma \right], \quad (2.30d)$$

donde los tensores, \mathbf{A}_β , \mathbf{A}_γ , $\mathbf{A}_{\beta\gamma}$, $\mathbf{A}_{\gamma\beta}$, vectores, \mathbf{a}_β , \mathbf{a}_γ , $\mathbf{a}_{\beta\gamma}$, $\mathbf{a}_{\gamma\beta}$, \mathbf{d}_β , \mathbf{d}_γ , \mathbf{f}_β , \mathbf{f}_γ y escalares, s_β , s_γ , φ_β y φ_γ son denominados *variables de cerradura*. En la realización de los análisis de órdenes de magnitud se ha supuesto que la longitud característica asociada con las variaciones espaciales de las cantidades promedio, sus gradientes y divergencias, pueden representarse por la longitud macroscópica del sistema, L (Whitaker, 1999).

Sustituyendo las ecuaciones (2.30a)-(2.30d) en las ecuaciones (2.29a) y (2.29b), las integrales de las variables de cerradura se pueden identificar como tensores y vectores de coeficientes de medio efectivo (como se muestra en el Apéndice A) y escribir las ecuaciones de cantidad de movimiento cerradas de ambas fases. Para la fase- β la expresión resultante es

$$\mathbf{0} = -\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} + \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \mu_\beta (-\varepsilon_\beta \mathbf{K}_{\beta\beta}^{ne-1}) \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \mu_\beta \mathbf{K}_{\beta\gamma}^{ne} \cdot \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) + \mu_\beta \mathbf{u}_\beta \left(\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma \right) + \mathbf{h}_\beta \quad (2.31)$$

donde los coeficientes de medio efectivo se definen de forma explícita, en términos de las variables de cerradura como,

$$-\varepsilon_\beta \mathbf{K}_{\beta\beta}^{ne-1} = \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_\beta} \mathbf{n}_\beta \cdot [-\mathbf{a}_\beta \mathbf{I} + \nabla \mathbf{A}_\beta] dA \quad (2.32a)$$

$$\mathbf{K}_{\beta\gamma}^{ne} = \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_\beta} \mathbf{n}_\beta \cdot [-\mathbf{a}_{\beta\gamma} \mathbf{I} + \nabla \mathbf{A}_{\beta\gamma}] dA \quad (2.32b)$$

$$\mathbf{u}_\beta = \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_\beta} \mathbf{n}_\beta \cdot [-s_\beta \mathbf{I} + \nabla \mathbf{d}_\beta] dA \quad (2.32c)$$

$$\mathbf{h}_\beta = \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_\beta} \mathbf{n}_\beta \cdot [-\varphi_\beta \mathbf{I} + \nabla \mathbf{f}_\beta] dA \quad (2.32d)$$

En estos coeficientes \mathcal{A}_β indica la sumatoria de ambas interfaces $\mathcal{A}_{\beta\kappa} + \mathcal{A}_{\beta\gamma}$. Mientras que la ecuación cerrada de cantidad de movimiento para la fase- γ , se escribe

$$\mathbf{0} = -\nabla \langle p_\gamma \rangle^\gamma + \rho_\gamma \mathbf{g} + \mu_\gamma \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma + \mu_\gamma (-\varepsilon_\gamma \mathbf{K}_{\gamma\gamma}^{ne-1}) \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \mu_\gamma \mathbf{K}_{\gamma\beta}^{ne} \cdot (\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma) + \mu_\gamma \mathbf{u}_\gamma (\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma) + \mathbf{h}_\gamma \quad (2.33)$$

donde los coeficientes de medio efectivo se definen como

$$-\varepsilon_\gamma \mathbf{K}_{\gamma\gamma}^{ne-1} = \frac{1}{V_\gamma} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\gamma\beta} \cdot [-\mathbf{a}_\gamma \mathbf{I} + \nabla \mathbf{A}_\gamma] dA \quad (2.34a)$$

$$\mathbf{K}_{\gamma\beta}^{ne} = \frac{1}{V_\gamma} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\gamma\beta} \cdot [-\mathbf{a}_{\gamma\beta} \mathbf{I} + \nabla \mathbf{A}_{\gamma\beta}] dA \quad (2.34b)$$

$$\mathbf{u}_\gamma = \frac{1}{V_\gamma} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\gamma\beta} \cdot [-s_\gamma \mathbf{I} + \nabla \mathbf{d}_\gamma] dA \quad (2.34c)$$

$$\mathbf{h}_\gamma = \frac{1}{V_\gamma} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\gamma\beta} \cdot [-\varphi_\gamma \mathbf{I} + \nabla \mathbf{f}_\gamma] dA \quad (2.34d)$$

Los coeficientes de medio efectivo pueden calcularse al resolver los problemas de cerradura asociados, Problemas I - IV presentados en el Sección A.1, cuyos dominios de solución son representaciones periódicas del proceso de flujo disperso en medios porosos. En estos problemas de valores a la frontera, se identifica que los tensores y vectores de medio efectivo son función de la fracción volumétrica de las fase dispersa (ε_γ), la porosidad (ε) y de la relación de viscosidades de las fases, representada como $\nu = \frac{\mu_\beta}{\mu_\gamma}$. Esta última funcionalidad se observa en la condición de frontera de los esfuerzos en la interfase $\beta-\gamma$ en cada uno de los problemas de cerradura asociados. El superíndice, *ne*, en cada uno de los coeficientes definidos con anterioridad se refiere a modelo de *no-equilibrio*, para diferenciarlo del modelo de *equilibrio* que se deducirá posteriormente. En resumen, el modelo de *no-equilibrio local mecánico* (NELM) está constituido por las ecuaciones de continuidad, Ecuación (2.16) y por el balance de cantidad de movimiento, Ecuaciones (2.31) y (2.33), para ambas fases, la dispersa- γ y continua- β . El modelo se cierra a través de la solución de los problemas de valores a la frontera asociados (presentados en el Apéndice A) que permiten la predicción de los coeficientes de medio efectivo presentes en el modelo escalado definidos por

las Ecuaciones (2.34) y (2.32).

2.4. Observaciones del modelo

Respecto al modelo escalado cerrado que se obtuvo, de manera sistemática por medio del método del promedio volumétrico en esta sección, se pueden hacer los siguientes comentarios finales:

- La contribución principal de las ecuaciones de cantidad de movimiento microscópicas (representadas por las variables de cerradura) son capturadas vía los coeficientes de medio efectivo, los cuales se definen en términos de integrales (*i.e.* filtros) de las variables de cerradura. Estos coeficiente son:

 1. Los tensores de permeabilidad $\mathbf{K}_{\beta\beta}^{ne}$ y $\mathbf{K}_{\gamma\beta}^{ne}$, definidos en términos de las variables de cerradura \mathbf{a}_β , \mathbf{A}_β y \mathbf{a}_γ , \mathbf{A}_γ , respectivamente. Esta elección de definición se debe a que la solución de estas variables de cerradura provienen de un problema de valores a la frontera cuya fuente se localiza en la interfase $\beta - \kappa$ (Problema I del Apéndice A). Lo anterior, de forma similar a como se define el tensor de permeabilidad dentro la deducción de la ley de Darcy presentada por Whitaker (ver Ecs. 4.2.27a-4.2.27e Whitaker, 1999, en).
 2. Los tensores efectivos $\mathbf{K}_{\beta\gamma}^{ne}$ y $\mathbf{K}_{\gamma\gamma}^{ne}$, se interpretan como coeficientes de transporte de cantidad de movimiento interfacial vinculados al efecto de la interacción entre las velocidades de las fases dispersa y continua microscópicas, cuando no existe transferencia de masa. Lo anterior, se deduce al analizar el problema de valores a la frontera asociados a las variables de cerradura que definen estos coeficientes, donde el término fuente se localiza en la condición de frontera relacionado con la continuidad de las velocidades, es decir la interfase β - γ (Problema II del Apéndice A).
 3. Los vectores efectivos \mathbf{u}_β y \mathbf{u}_γ , por otro lado, se interpretan como coeficientes de transporte relacionados con las interacciones microscópicas de los esfuerzos interfaciales entre las fases fluidas. Al analizar el problema de cerradura para estos coeficientes el término fuente se localiza en la condición de frontera $\beta - \gamma$, correspondiente al salto en los esfuerzos debido a los efectos capilares de las fases

(Problema III del Apéndice A)

4. Finalmente, los vectores \mathbf{h}_β y \mathbf{h}_γ , se relacionan también con el salto normal de esfuerzos interfaciales $\beta - \gamma$ puramente capilar, sin embargo específicamente toman en cuenta los efectos de la curvatura y la tensión interfacial. En el problema de cerradura asociado la fuente se identifica también como un salto interfacial, similar al salto en los esfuerzos supuesto en el modelo microscópico debido a los efectos capilares (Problema IV del Apéndice A).

A pesar de que no se presentan cálculos de estos coeficientes de medio efectivo, y cerrar de esta forma completamente el modelo de no equilibrio para el flujo disperso en medios porosos homogéneos, en la Apéndice A se proponen una serie de simplificaciones de los problemas de cerradura que permite desarrollar un método conveniente que facilita la determinación numérica estos coeficientes. Las predicciones de estos coeficientes efectivos, que involucran la solución de los problemas de cerradura asociados, se realizarán en trabajos posteriores. La cerradura de modelo de no-equilibrio permitiera analizar la validez de un modelo de equilibrio, el cual se desarrollara en el capítulo siguiente.

- Es importante enfatizar que la validez del modelo desarrollado está limitada por las restricción de longitudes de escala características

$$\ell_\alpha \ll r_0 \ll L, \quad \alpha = \beta, \gamma \quad (2.35)$$

que permite una serie de simplificaciones, con base en órdenes de magnitud, tanto en el desarrollo de las ecuaciones macroscópicas como en el desarrollo de la cerradura. Además, se debe tener en cuenta que la aplicación del modelo se limita al caso de emulsiones estables no coalescentes, razón por la que se supone un flujo cuasi-estacionario y permite que las fracciones volumétricas de las fases fluidas, ε_α , sean consideradas parámetros establecidos. Lo anterior significa que los tensores y vectores efectivos presentes en el modelo (y en el *modelo de equilibrio local mecánico* que se desarrolla en el siguiente capítulo) sean función sólo de la saturación del sistema, la porosidad, y la relación de viscosidades. Esta serie de restricciones y suposiciones pueden visualizarse como una serie de *postulados de escalamiento*, como se sugiere en la literatura (Wood, 2009; Wood y Valdés-Parada, 2013).

- El modelo desarrollado en este punto, para el flujo disperso, se diferencia del modelo deducido por Whitaker (1986b, 1994), para el flujo de dos fases fluidas inmiscibles en medios porosos, debido a que el tratamiento seguido en este trabajo no descarta el salto en los esfuerzos interfaciales en el proceso de cerradura del modelo, generando los dos últimos términos (que involucran los coeficientes \mathbf{u}_α y \mathbf{h}_α) en las ecuaciones (2.31) y (2.33). Siguiendo la propuesta de Whitaker (1994) en el desarrollo de la cerradura que se presenta en el Apéndice A, ésta se puede simplificar mediante el promediado superficial del salto de los esfuerzos sobre la interfase $\beta - \gamma$. Éste permite relacionar la diferencia de presiones, $\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma$, con la curvatura promedio superficial en la interfase fluido-fluido $\langle H \rangle_{\beta\gamma}$, en forma de la presión capilar macroscópica

$$\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma = -2\sigma \langle H \rangle_{\beta\gamma}, \quad (2.36)$$

donde

$$\langle H \rangle_{\beta\gamma} = \frac{1}{A_{\beta\gamma}} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} H dA \quad (2.37)$$

y definir la desviación de la curvatura: $H - \langle H \rangle_{\beta\gamma}$ en la condición de frontera del salto de los esfuerzos (Torres, 1987). La Ecuación (2.36), es válida si satisface la restricción del número capilar $Ca \ll 1$ (donde $Ca = \mu \langle v \rangle / \sigma$, y $\mu \langle v \rangle = \max(\mu_\alpha \langle v_\alpha \rangle^\alpha)$, $\alpha = \beta, \gamma$), bajo la cual se desprecian los efectos viscosos. También, se puede imponer que la curvatura promedio es del orden de magnitud: $\langle H \rangle_{\beta\gamma} = \mathbf{O}(\ell_\gamma)$ y $\ell_\gamma < \ell_\beta \sim d_p$, donde d_p representa el diámetro promedio de poro del medio poroso que se considera una aproximación razonable si la fase sólida se moja sólo de la fase continua, es decir: $\ell_\beta = \mathbf{O}(d_p)$. Bajo estas circunstancias, sólo se requiere que el orden del número capilar tenga un valor máximo de uno, $Ca = \mathbf{O}(1)$. Por otro lado, para suponer que la variaciones de la curvatura promedio sean despreciables dentro de la celda unitaria del problema de cerradura, se requiere que el número de Bond, $Bo \ll 1$ (donde $Bo = (\rho_\beta - \rho_\gamma)g\ell_\beta^2/\sigma$). Esta restricción supone que, además de los efectos viscosos, también los efectos gravitatorios son despreciables y que la diferencia de presiones es del orden magnitud: $(\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma) = \mathbf{O}[(\rho_\beta - \rho_\gamma)g\ell/\sigma]$. En los estudios previos sobre flujo de dos fases fluidas inmiscibles en medios porosos, la desviación de la curvatura se desprecia en comparación con los términos de las desviaciones viscosas y de presión

debido a las dificultades para identificar, dentro del volumen de promediado, la diversidad geométrica de las superficies, el mojado (línea de contacto) y situaciones hidrodinámicas que se puedan encontrar (Auriault, 1987; Whitaker, 1994; Lasseux *y col.*, 1996). Para el flujo inmiscible disperso analizado en este trabajo, el efecto de la línea de contacto no está presente debido a que una sola fase está en contacto con el sólido y al considerar que las partículas dispersas son esferas no deformables, la variedad geométrica de las interfaces se reduce de forma drástica. Sin embargo, la diversidad hidrodinámica resulta un desafío, experimentos numéricos del flujo disperso de fluidos inmiscibles en configuraciones complejas podrían señalar características importantes de esta problemática y proporcionar un criterio de importancia de este término. Bajo los mismos criterios descritos arriba en el desarrollo de cerradura presentado en el Apéndice A los últimos los coeficientes \mathbf{u}_α y \mathbf{h}_α ($\alpha = \beta, \gamma$) se pueden considerar despreciables respecto a los otros términos, y así el balance de cantidad de movimiento del modelo de no equilibrio se puede describir como

$$\mathbf{0} = -\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} + \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \mu_\beta [-\varepsilon_\beta \mathbf{K}_{\beta\beta}^{ne-1} + \mathbf{K}_{\beta\gamma}^{ne}] \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \mu_\beta \mathbf{K}_{\beta\gamma}^{ne} \cdot \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \quad (2.38a)$$

$$\mathbf{0} = -\nabla \langle p_\gamma \rangle^\gamma + \rho_\gamma \mathbf{g} + \mu_\gamma \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma + \mu_\gamma [-\varepsilon_\gamma \mathbf{K}_{\gamma\gamma}^{ne-1} + \mathbf{K}_{\gamma\beta}^{ne}] \cdot \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma - \mu_\gamma \mathbf{K}_{\gamma\beta}^{ne} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \quad (2.38b)$$

Con el objetivo de obtener una formulación similar de estas las ecuaciones con las deducidas por Whitaker (1994) para el flujo bifásico en un medio poroso homogéneo y así obtener un modelo análogo, se introducen las siguiente definiciones

$$[-\varepsilon_\beta \mathbf{K}_{\beta\beta}^{ne-1} + \mathbf{K}_{\beta\gamma}^{ne}] = -\varepsilon_\beta \mathbf{K}_\beta^{-1} \quad (2.39a)$$

$$-\mathbf{K}_{\beta\gamma}^{ne} = \varepsilon_\gamma \mathbf{K}_\beta^{-1} \cdot \mathbf{K}_{\beta\gamma} \quad (2.39b)$$

$$[-\varepsilon_\gamma \mathbf{K}_{\gamma\gamma}^{ne-1} + \mathbf{K}_{\gamma\beta}^{ne}] = \varepsilon_\beta \mathbf{K}_\gamma^{-1} \cdot \mathbf{K}_{\gamma\beta} \quad (2.39c)$$

$$-\mathbf{K}_{\gamma\beta}^{ne} = -\varepsilon_\gamma \mathbf{K}_\gamma^{-1} \quad (2.39d)$$

De esta forma, después de ciertas manipulaciones matemáticas, las ecuaciones (2.38), se

pueden expresar como

$$\varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta = -\frac{\mathbf{K}_\beta}{\mu_\beta} \left(\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} \right) + \mathbf{K}_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \mathbf{K}_{\beta\gamma} \cdot \varepsilon_\gamma \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \quad (2.40a)$$

$$\varepsilon_\gamma \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma = -\frac{\mathbf{K}_\gamma}{\mu_\gamma} \left(\nabla \langle p_\gamma \rangle^\gamma + \rho_\gamma \mathbf{g} \right) + \mathbf{K}_\gamma \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma + \mathbf{K}_{\gamma\beta} \cdot \varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \quad (2.40b)$$

Estas ecuaciones corresponden a la extensión de la Ley de Darcy con la *corrección de Brinkman* y el arrastre viscoso indicado originalmente en trabajos previos (Whitaker, 1986b, 1994; Lasseux *y col.*, 1996). El problema de cerradura asociado a la predicción de los tensores efectivos en estas expresiones corresponde a una manipulación matemática de los Problemas I y II en el Apéndice A, para obtener un problema de cerradura análogo al desarrollado por Whitaker (1994); Lasseux *y col.* (1996), donde la fuente para la descripción de la fase $-\gamma$ indicará el carácter disperso del flujo modelado.

- Finalmente, se remarca que en este trabajo se restringe para el caso donde la fase- γ está dispersa dentro de la fase- β continua, por consiguiente no existe un contacto entre ambas fases fluidas y el sólido que genere una línea de contacto. Esto significa que las predicciones que se obtengan de los coeficientes de transporte expresados en la Ecuación (2.39), no se pueden extender a las situaciones estudiadas por Whitaker (1986a, 1994); Lasseux *y col.* (1996). Sin embargo, en vista de que no se han reportado en la literatura soluciones numéricas de los problemas de cerradura presentados en los trabajos de Whitaker; Lasseux *y col.*, la eventual predicción de los coeficientes efectivos involucrados en el modelo para el caso disperso desarrollado en este capítulo aún constituye un avance relevante que proporciona criterios en la importancia de la serie de procesos físicos involucrados en este tipo de flujo.

2.5. Resumen

Como conclusión de este capítulo, es conveniente comentar los resultados obtenidos en el desarrollo del modelo

- Se aplicó del método del promedio volumétrico para obtener el modelo escalado para el

flujo disperso de dos fases fluidas inmiscibles en un medio poroso homogéneo, considerando las condiciones del flujo de una emulsión estable como modelo a la microescala. El modelo obtenido está constituido por las ecuaciones de cantidad de movimiento y masa en términos de los coeficientes de medio efectivo para cada una de las fases fluidas: continua y dispersa (fase- β y fase- γ , respectivamente). La cerradura del modelo se obtiene de la solución de problemas de valores de frontera asociados a la determinación de los coeficientes efectivos.

- El modelo obtenido está sujeto a restricciones de longitudes características, limitando el modelo a regiones homogéneas de un medio poroso. Por otro lado, las restricciones adicionales del número capilar y de Bond permiten simplificar el modelo y obtener una representación tipo ley Darcy multifásica para el flujo disperso que concuerda con las propuestas experimentales y teóricas que se señalaron en el Capítulo 1.
- Las predicciones de los tensores y vectores efectivos del modelo macroscópico de no-equilibrio se pueden obtener de la solución de los problemas de cerradura presentados en el Apéndice A.1. En la Sección A.1.7, además, se plantea un método computacional conveniente para la determinación de estos coeficientes efectivos.

En el análisis del transporte multifásico se ha sugerido frecuentemente que una sola variable promedio es suficiente para describir todo el proceso de transporte, basándose en un principio de *equilibrio local* entre las cantidades promedio de las fases. Con esto en mente, y con base en el modelo escalado obtenido, en el capítulo siguiente se plantea el desarrollo del modelo para el flujo disperso en medios porosos homogéneos bajo la condición del *equilibrio local mecánico*, y se presentarán predicciones de los valores de los coeficientes de medio efectivo involucrados en este modelo.

CAPÍTULO 3

MODELO DE EQUILIBRIO LOCAL MECÁNICO

El desarrollo realizado en la sección anterior llevó a un modelo para el flujo disperso en medios poroso homogéneos, el cual está constituido por ecuaciones de continuidad y de cantidad de movimiento para cada una de las fases fluidas. En trabajos previos para el transporte de calor y masa en sistemas multifásico se ha sugerido el uso de modelos de *equilibrio local*, los cuales se propone que una sola temperatura, (*equilibrio local térmico*) o concentración (*equilibrio local másico*) promedio ponderada es suficiente para describir, de forma razonable, el transporte global del proceso multifásico. En el caso de transporte de cantidad de movimiento, se ha propuesto el desarrollo de modelos bajo el principio de *equilibrio local mecánico* entre regiones porosas de sistemas heterogéneos para el flujo inmisible, donde una sola presión, velocidad y permeabilidad para cada una de las fases fluidas describen el flujo total en ambas regiones (Quintard y Whitaker, 1987, 1988; Whitaker, 1999). Recordando las ecuaciones gobernantes promedio de no-equilibrio para el transporte de masa y cantidad de movimiento desarrolladas en el capítulo anterior se tiene

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\alpha \rangle = 0, \quad \alpha, \lambda = \beta, \gamma \quad (3.1a)$$

$$\mathbf{0} = -\nabla \langle p_\alpha \rangle^\alpha + \rho_\alpha \mathbf{g} + \mu_\alpha \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\alpha \rangle^\alpha + \mu_\alpha (-\varepsilon_\alpha \mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{ne-1}) \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \mu_\alpha \mathbf{K}_{\alpha\lambda}^{ne} \cdot (\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma) + \mu_\alpha \mathbf{u}_\alpha (\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma) + \mathbf{h}_\alpha, \quad \alpha \neq \lambda \quad (3.1b)$$

3.1. Equilibrio local mecánico

En esta sección se propone la obtención de un modelo bajo la condición de *equilibrio local mecánico* para describir el transporte del flujo disperso en el medio poroso homogéneo. Para llevar a cabo este objetivo, la presión y la velocidad se define en términos de los siguientes promedios intrínsecos (denominadas en adelante como *promedios de equilibrio*)

$$\langle p \rangle = \frac{1}{V_f} \int_{\mathcal{V}_f} p dV = \frac{1}{V_f} \int_{\mathcal{V}_\beta} p_\beta dV + \frac{1}{V_f} \int_{\mathcal{V}_\gamma} p_\gamma dV, \quad (3.2a)$$

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{V_f} \int_{\mathcal{V}_f} \mathbf{v} dV = \frac{1}{V_f} \int_{\mathcal{V}_\beta} \mathbf{v}_\beta dV + \frac{1}{V_f} \int_{\mathcal{V}_\gamma} \mathbf{v}_\gamma dV, \quad (3.2b)$$

donde $V_f = V_\beta + V_\gamma$, es el volumen ocupado por ambas fases fluidas. En este punto, es oportuno definir la fracción vacía o porosidad como $\varepsilon = V_f/V$ (*i.e.* $\varepsilon = \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma$). Usando la definición de las fracción volumétrica de la fase- α ($\alpha = \beta, \gamma$), Ecuación (2.4), y la relación entre promedio intrínseco y superficial, $\langle \psi_\alpha \rangle = \varepsilon_\alpha(\mathbf{x}) \langle \psi_\alpha \rangle^\alpha$, las Ecuaciones (3.2), se expresan como

$$\varepsilon \langle p \rangle = \varepsilon_\beta \langle p_\beta \rangle^\beta + \varepsilon_\gamma \langle p_\gamma \rangle^\gamma = \langle p_\beta \rangle + \langle p_\gamma \rangle \quad (3.3a)$$

$$\varepsilon \langle \mathbf{v} \rangle = \varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \varepsilon_\gamma \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma = \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle \quad (3.3b)$$

3.1.1. Ecuación de continuidad

Con base en esta definición, las ecuaciones de continuidad promedio de cada fase, ecuaciones (2.16a) y (2.16b), se suman para obtener, sin ninguna simplificación adicional, la ecuación de continuidad promedio de equilibrio

$$\nabla \cdot (\varepsilon \langle \mathbf{v} \rangle) = 0 \quad (3.4)$$

3.1.2. Ecuación de cantidad de movimiento

En el caso de la ecuación de cantidad de movimiento, la deducción de las ecuaciones de equilibrio no es tan directa. Siguiendo el procedimiento usado en estudios previos para la transferencia de calor en medios porosos (Whitaker, 1999, ver Cap. 2) es conveniente, como

primer paso en el desarrollo, el descomponer los promedios intrínsecos de la velocidad y presión en términos de promedios de equilibrio, $\langle p \rangle$ y $\langle \mathbf{v} \rangle$, y desviaciones macroscópicas de cada fase, \hat{p}_α y $\hat{\mathbf{v}}_\alpha$, de la siguiente forma

$$\langle p_\alpha \rangle^\alpha = \langle p \rangle + \hat{p}_\alpha, \quad (3.5a)$$

$$\langle \mathbf{v}_\alpha \rangle^\alpha = \langle \mathbf{v} \rangle + \hat{\mathbf{v}}_\alpha, \quad \alpha = \beta, \gamma, \quad (3.5b)$$

a través de las expresiones anteriores y la Ecuación (3.3), se obtienen las siguientes relaciones

$$\varepsilon_\beta \hat{p}_\beta = -\varepsilon_\gamma \hat{p}_\gamma = \frac{\varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma}{\varepsilon} \left(\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma \right) \quad (3.6a)$$

$$\varepsilon_\beta \hat{\mathbf{v}}_\beta = -\varepsilon_\gamma \hat{\mathbf{v}}_\gamma = \frac{\varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma}{\varepsilon} \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) \quad (3.6b)$$

Para deducir la ecuación de cantidad de movimiento, se sustituyen la Ecuación (3.5) en las ecuaciones $\varepsilon_\beta \times (2.31)$ y $\varepsilon_\gamma \times (2.33)$ (*i.e.* su forma intrínseca), correspondientes al modelo de no equilibrio; sumando ambos resultados se obtiene

$$\mathbf{0} = -\nabla \langle p \rangle + \langle \rho \rangle \mathbf{g} + \langle \mu \rangle \nabla^2 \langle \mathbf{v} \rangle - \mu_\beta (\mathbf{K}^e)^{-1} \cdot \varepsilon \langle \mathbf{v} \rangle + \mathbf{h}^e + \Phi \quad (3.7)$$

donde se introdujeron las siguientes definiciones que agrupan parámetros constantes y coeficientes de medio efectivo

$$\langle \rho \rangle = S_\beta \rho_\beta + S_\gamma \rho_\gamma \quad (3.8a)$$

$$\langle \mu \rangle = S_\beta \mu_\beta + S_\gamma \mu_\gamma \quad (3.8b)$$

$$-\mu_\beta \varepsilon (\mathbf{K}^e)^{-1} = S_\beta \mu_\beta (-\varepsilon_\beta \mathbf{K}_{\beta\beta}^{ne-1}) + S_\gamma \mu_\gamma (-\varepsilon_\gamma \mathbf{K}_{\gamma\gamma}^{ne-1}) \quad (3.8c)$$

$$\mathbf{h}^e = S_\beta \mathbf{h}_\beta + S_\gamma \mathbf{h}_\gamma \quad (3.8d)$$

En estas expresiones, $S_\alpha = \varepsilon_\alpha / \varepsilon$ y representa la saturación de la fase- α para una una porosidad y fracción volumétrica dada. El coeficiente \mathbf{K}^e , se denomina tensor de permeabilidad de equilibrio y el vector \mathbf{h}^e es el coeficiente de curvatura de equilibrio, el superíndice e denota esta cualidad. El término Φ en la Ecuación (3.7) resulta de la suma de las ecuaciones de no

equilibrio e incluye todos los términos involucrados de las desviaciones macroscópicas, los cuales, usando las relaciones en la Ecuación (3.6), se expresan en función de diferencias de los promedios intrínsecos

$$\begin{aligned} \Phi = & S_\beta S_\gamma (\mu_\beta - \mu_\gamma) \nabla^2 \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) + (S_\beta \mu_\beta \mathbf{K}_{\beta\gamma}^{ne} + S_\gamma \mu_\gamma \mathbf{K}_{\gamma\beta}^{ne}) \cdot \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) + \\ & [S_\beta \mu_\beta (-\varepsilon_\beta \mathbf{K}_{\beta\beta}^{ne-1}) + S_\gamma \mu_\gamma (-\varepsilon_\gamma S_\gamma \mathbf{K}_{\gamma\gamma}^{ne-1})] \cdot \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) + \\ & (S_\beta \mu_\beta \mathbf{u}_\beta + S_\gamma \mu_\gamma \mathbf{u}_\gamma) \left(\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma \right) \quad (3.9) \end{aligned}$$

Es importante notar en este punto, que la Ecuación (3.7), junto con la Ecuación (3.9), sólo representa otra manera de expresar las ecuaciones de cantidad de movimiento de no equilibrio, dadas por las ecuaciones (2.31) y (2.33). Como se puede observar, en la Ecuación (3.9), se debe determinar un *estimado* de las diferencias de $\langle \psi_\beta \rangle^\beta - \langle \psi_\gamma \rangle^\gamma$, ($\psi = p, \mathbf{v}$), de forma que el término Φ pueda considerarse despreciable con respecto a los otros términos de la Ecuación (3.7) y de esta forma el modelo correspondería al de *equilibrio local mecánico*. La deducción de las suposiciones y restricciones de escalas requeridas para determinar las condiciones, para las cuales el modelo de equilibrio local mecánico es válido, se desarrollan en el Apéndice B, y de manera general se pueden resumirse a continuación

- La fase continua está en mayor proporción que la fase dispersa (*i.e.*, $S_\beta \gg S_\gamma$), que implica que la fase dispersa es diluida.
- Las propiedades físicas de ambas fases son similares (*i.e.*, $\rho_\beta \approx \rho_\gamma$, $\mu_\beta \approx \mu_\gamma$).
- Existe una disparidad de escala del tipo $\ell \ll L$, donde ℓ agrupa todas las longitudes características a la microescala y L agrupa las asociadas a la macroescala. De forma explícita, se determina que debe existir el siguiente estimado de longitudes características de la diferencia de cantidades promedio

$$\frac{\langle v_\beta \rangle^\beta - \langle v_\gamma \rangle^\gamma}{\langle v \rangle} = \mathbf{O} \left(\frac{\ell}{L} \right)^2 \left\{ \frac{1}{1 + \mathbf{O} \left(\frac{\ell}{L} \right) + \mathbf{O} \left(\frac{\ell}{L} \right)^2 + \mathbf{O} \left(\frac{\ell}{L} \right) \left(\frac{\langle v_\beta \rangle^\beta - \langle v_\gamma \rangle^\gamma}{\langle v \rangle} \right)} \right\} \quad (3.10)$$

Así, bajo la suposición de equilibrio local mecánico, se puede descartar el término Φ en la

Ecuación (3.7), para obtener la siguiente expresión.

$$\mathbf{0} = -\nabla \langle p \rangle + \langle \rho \rangle \mathbf{g} + \langle \mu \rangle \nabla^2 \langle \mathbf{v} \rangle - \mu_\beta (\mathbf{K}^e)^{-1} \cdot \varepsilon \langle \mathbf{v} \rangle + \mathbf{h}^e \quad (3.11)$$

Esta última expresión es la ecuación de conservación de cantidad de movimiento de equilibrio y, junto con la Ecuación (3.4), conforman el modelo de Equilibrio Local Mecánico (ELM). Si la condición de equilibrio es válida, y ésta se aplica al problema de cerradura desarrollado en el Apéndice A, las soluciones formales para las variables de cerradura, Ecuación (2.30), se reducen a

$$\tilde{\mathbf{v}}_\beta = \mathbf{A}_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \mathbf{f}_\beta, \quad (3.12a)$$

$$\tilde{p}_\beta = \mu_\beta \left[\mathbf{a}_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \varphi_\beta \right], \quad (3.12b)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_\gamma = \mathbf{A}_\gamma \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\gamma + \mathbf{f}_\gamma, \quad (3.12c)$$

$$\tilde{p}_\gamma = \mu_\gamma \left[\mathbf{a}_\gamma \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \varphi_\gamma \right], \quad (3.12d)$$

y los problemas de cerradura asociados corresponden a los Problemas I y IV presentados en el Apéndice A, donde las fuentes en estos problemas son la velocidad promedio de equilibrio, $\langle \mathbf{v} \rangle$ y la curvatura media de la interfase $\beta - \gamma$, H (2.1e), respectivamente. Usando las Ecuaciones (3.8c) y (3.8d), los coeficientes involucrados en el modelo de ELM de la (3.11) se pueden expresar en términos de variables de cerradura de la forma siguiente

$$-\varepsilon \mu_\beta (\mathbf{K}^e)^{-1} = \mu_\beta \frac{1}{V_f} \int_{\mathcal{A}_\beta} \mathbf{n}_\beta \cdot [-\mathbf{a}_\beta \mathbf{l} + \nabla \mathbf{A}_\beta] dA + \mu_\gamma \frac{1}{V_f} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\gamma\beta} \cdot [-\mathbf{a}_\gamma \mathbf{l} + \nabla \mathbf{A}_\gamma] dA \quad (3.13a)$$

$$\mathbf{h}^e = \mu_\beta \frac{1}{V_f} \int_{\mathcal{A}_\beta} \mathbf{n}_\beta \cdot [-\varphi_\beta \mathbf{l} + \nabla \mathbf{f}_\beta] dA + \frac{1}{V_f} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\gamma\beta} \cdot [-\varphi_\gamma \mathbf{l} + \nabla \mathbf{f}_\gamma] dA \quad (3.13b)$$

Las predicciones de los coeficientes efectivos de equilibrio se obtienen de resolver los problemas de valores a la frontera de las variables de cerradura en dominios de solución periódicos (*celdas unitarias*), representativos del flujo disperso en medios porosos. Estos modelos de flujo pueden ser tan complejos y pueden capturar los detalles de la microestructura del medio poroso y las características esenciales de los mecanismos de flujo de las partículas dispersas (Soo y Radke, 1984). En la sección siguiente se presentan los resultados de las predicciones de

los coeficientes efectivos del modelo de equilibrio y la comparación con datos experimentales reportados en la literatura.

3.2. Observaciones del modelo de equilibrio local mecánico

El modelo final de Equilibrio Local Mecánico, para el flujo disperso de dos fases fluidas en un medio poroso homogéneo, se conforma por la ecuación de continuidad, Ecuación (3.4), y el balance de cantidad de movimiento, Ecuación (3.11). A este modelo de equilibrio se le pueden hacer las siguientes observaciones

- El tensor de permeabilidad de equilibrio \mathbf{K}^e , Ecuación (3.13a), de acuerdo a su definición y como se indicó previamente, está relacionado con el problema de cerradura cuya fuente está en la interfase de la fase del sólido con la continua (Condición de frontera $\kappa - \beta$ del Problema I del Sección A.1). Por consiguiente, las desviaciones de las predicciones de este coeficiente con respecto a la permeabilidad intrínseca del medio poroso se pueden asociar para identificar la influencia de la fase dispersa dentro de la fase continua en el flujo global a través del medio poroso.
- En el modelo escalado de equilibrio, Ecuación (3.11), el vector efectivo de curvatura de equilibrio \mathbf{h}^e , se denomina así por que se define en términos de las variables de cerradura asociadas al Problema IV de la Sección A.1. En este problema asociado el término no homogéneo corresponde al salto en los esfuerzos debido al término de la curvatura local y la tensión interfacial. Este coeficiente se puede decir que captura los efectos capilares entre las interfaces de los fluidos existentes a la microescala. Sin embargo, se debe mencionar que los efectos capilares se conservan aún en el coeficiente de permeabilidad de equilibrio \mathbf{K}^e , a medida que su predicción requiere de una celda periódica representativa para el flujo disperso, en la cual la localización y la forma de la fase dispersa en esta celda se relacionan directamente con los efectos de la tensión interfacial y su curvatura, respectivamente.
- Como ya se mencionó en párrafos anteriores, para considerar despreciables las variaciones de la curvatura interfacial, dentro del volumen de promediado, se necesitan imponer restricciones en el número capilar, $Ca \ll 1$, y número de Bond, $Bo \ll 1$, bajo estas

circunstancias se tiene que

$$\mathbf{h}^e \ll \mu_\beta (\mathbf{K}^e)^{-1} \cdot \varepsilon \langle \mathbf{v} \rangle \quad (3.14)$$

y de esta forma el término asociado a los efectos de curvatura en la Ecuación (3.11), se puede despreciar y obtener el balance de cantidad de movimiento del modelo de equilibrio en forma de una Ecuación tipo ley de *Darcy-Brinkman*

$$\varepsilon \langle \mathbf{v} \rangle = -\frac{\mathbf{K}^e}{\mu_\beta} \cdot (\nabla \langle p \rangle - \langle \rho \rangle \mathbf{g}) + \frac{\langle \mu \rangle}{\mu_\beta} \mathbf{K}^e \cdot \nabla^2 \langle \mathbf{v} \rangle \quad (3.15)$$

- Con el objetivo de clarificar el efecto de la fase dispersa en el proceso global del flujo de ambas fases en el medio poroso, mencionado en la primera observación, se puede proponer una relación del tensor efectivo de equilibrio con la permeabilidad intrínseca del medio poroso y un *factor de corrección* de la forma siguiente

$$\mathbf{K}^{e-1} = \mathbf{K}^{-1} \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{K}_m) \quad (3.16)$$

donde \mathbf{K} es el coeficiente de permeabilidad intrínseco del modelo escalado mediante el promedio volumétrico para el flujo de una sola fase en un medio poroso homogéneo (ver Ec. 4.2-32 Whitaker, 1999). El tensor \mathbf{K}_m , se define como un *factor de corrección* que toma en cuenta los efectos de la fase dispersa en el coeficiente de permeabilidad de equilibrio \mathbf{K}^e . Esta forma de la Ecuación permite relacionar la permeabilidad de equilibrio con la permeabilidad intrínseca de manera directa con un coeficiente adicional, y como se observará en párrafos posteriores, una ecuación de la forma tipo ley de Darcy que considera un término adicional para este factor de corrección. Al analizar la Ecuación (3.15), se nota que el cálculo de \mathbf{K}_m requiere de la obtención previa de \mathbf{K} y \mathbf{K}^e . Para calcular el tensor de permeabilidad \mathbf{K} , como se explica en Whitaker (1999), es necesario resolver un problema de valores a la frontera de cerradura tipo ecuaciones de Stokes (ver Ecuaciones 4.2-37, Whitaker, 1999). Es importante señalar que para el cálculo de \mathbf{K}_m requiere de la solución de los problemas de cerradura, involucrados en la predicción coeficientes efectivos \mathbf{K} y \mathbf{K}^e , se debe llevar a cabo en una celda unitaria cuya representación de la microestructura del sólido sea idéntica, tal que el efecto de la fase dispersa sea capturado por este coeficiente. De esta manera, el factor de corrección está influenciado por la fracción de volumen

ocupada por la fase dispersa y la relación de viscosidades, $\nu = \mu_\beta/\mu_\gamma$ (debido a la condición de frontera en los esfuerzos en la interfase $\beta - \gamma$ del Problema I). En la siguiente sección se presentan ejemplos de la solución del problema de cerradura, junto con un análisis paramétrico de la funcionalidad de estos coeficientes de medio efectivo.

- La relación dada en la Ecuación (3.16), al sustituirla en la Ecuación (3.15), permite obtener un modelo de equilibrio escalado semejante a una extensión del modelo ley de Darcy-Brinkman para un sola fase fluida (ver Ec. 4.2-34, Whitaker, 1999)

$$\varepsilon \langle \mathbf{v} \rangle = -\frac{\mathbf{K}}{\mu_\beta} \cdot (\nabla \langle p \rangle - \langle \rho \rangle \mathbf{g}) + \frac{\langle \mu \rangle}{\mu_\beta} \mathbf{K} \cdot \nabla^2 \langle \mathbf{v} \rangle - \mathbf{K}_m \cdot \varepsilon \langle \mathbf{v} \rangle \quad (3.17)$$

En esta expresión, el primer término del lado derecho representa el término de Darcy, el segundo representa el término de corrección de Brinkman y el efecto global de la fase dispersa se captura en el último término. El término de corrección de Brinkman es importante para regiones cercanas a la frontera del medio poroso; sin embargo, en el medio poroso homogéneo este término puede ser descartado (Ochoa-Tapia y Whitaker, 1995a; Whitaker, 1999). De esta forma, la Ecuación (3.17) se reduce a

$$\varepsilon \langle \mathbf{v} \rangle = -\frac{\mathbf{K}}{\mu_\beta} \cdot (\nabla \langle p \rangle - \langle \rho \rangle \mathbf{g}) - \mathbf{K}_m \cdot \varepsilon \langle \mathbf{v} \rangle \quad (3.18)$$

El modelo escalado en una forma de ley Darcy para el flujo disperso en medios porosos no es novedoso. Sin embargo, a diferencia de otras propuestas similares (McAuliffe, 1973; Alvarado y Marsden, 1979; Abou-Kassem y Farouq Ali, 1995), el efecto de la fase dispersa no se incluye en el coeficiente de permeabilidad, por el contrario, se incorpora en un término adicional que corrige la ley de Darcy asociada solo a la fase continua. En términos del coeficiente \mathbf{K}^e , la ecuación anterior se puede escribir como

$$\varepsilon \langle \mathbf{v} \rangle = -\frac{\mathbf{K}^e}{\mu_\beta} \cdot (\nabla \langle p \rangle - \langle \rho \rangle \mathbf{g}) \quad (3.19)$$

A pesar de que la estructura de la expresión anterior es semejante a la Ley de Darcy, el tensor efectivo \mathbf{K}^e no corresponde, en general, al coeficiente de permeabilidad intrínseco, \mathbf{K} , debido a que el primero incluye los efectos de la fase dispersa en el flujo global. Al

analizar la Ecuación (3.17) se puede deducir que, bajo la condición en la cual $\mathbf{K}_m \ll 1$, ambos coeficientes efectivos se pueden aproximar y $(\mathbf{K}^e)^{-1} \approx \mathbf{K}^{-1}$. Las predicciones de estos coeficientes señalarán bajo que parámetros esta condición logra cumplirse.

- El modelo escalado de equilibrio para el flujo disperso en medios porosos por medio de la ley de Darcy no es novedoso, si se comparan con los modelos señalados previamente en el revisión bibliográfica del Capítulo 1. En este trabajo, sin embargo, se debe recalcar que el modelo se desarrolló mediante una deducción sistemática vía el método del promedio volumétrico, el cual involucró establecer restricciones tanto en la deducción del modelo, como en las condiciones necesarias para satisfacer el principio de *equilibrio local mecánico*. Estas restricciones, como se notó en la deducción, están en términos escalas características las cuales permiten establecer cuándo se puede considerar que la aplicación del modelo es válida.
- Finalmente, como se menciona en la revisión bibliográfica en el Capítulo 1, los coeficientes efectivos involucrados en los modelos escalados presentados en la literatura, usualmente se predicen mediante ajustes de datos experimentales del flujo de emulsiones en medios porosos y, mas recientemente, mediante análisis experimental en microcanales. En este trabajo a diferencia de lo anterior, el mismo método de escalamiento señala la predicción del coeficiente \mathbf{K}^e que permite cerrar el modelo obtenido a través de la solución de los problemas de cerradura asociadas, mediante su solución en celdas unitarias representativas del flujo disperso. La predicción de los coeficientes efectivos y su funcionalidad con estos factores serán evaluados en la sección siguiente.

3.3. Predicción de coeficientes de medio efectivo

En esta sección, se presenta la funcionalidad de los coeficientes efectivos, involucrados en los modelos escalados, con las propiedades que caracterizan el sistema disperso de acuerdo al modelo escalado de equilibrio. Aquí se presenta un análisis paramétrico de los coeficientes efectivos definidos en la sección anterior y cuyo cálculo depende de la solución numérica de los problemas de cerradura. Además, se muestra la validez de los coeficientes efectivos del modelo de equilibrio al compararles con datos experimentales de la literatura que involucran el flujo de

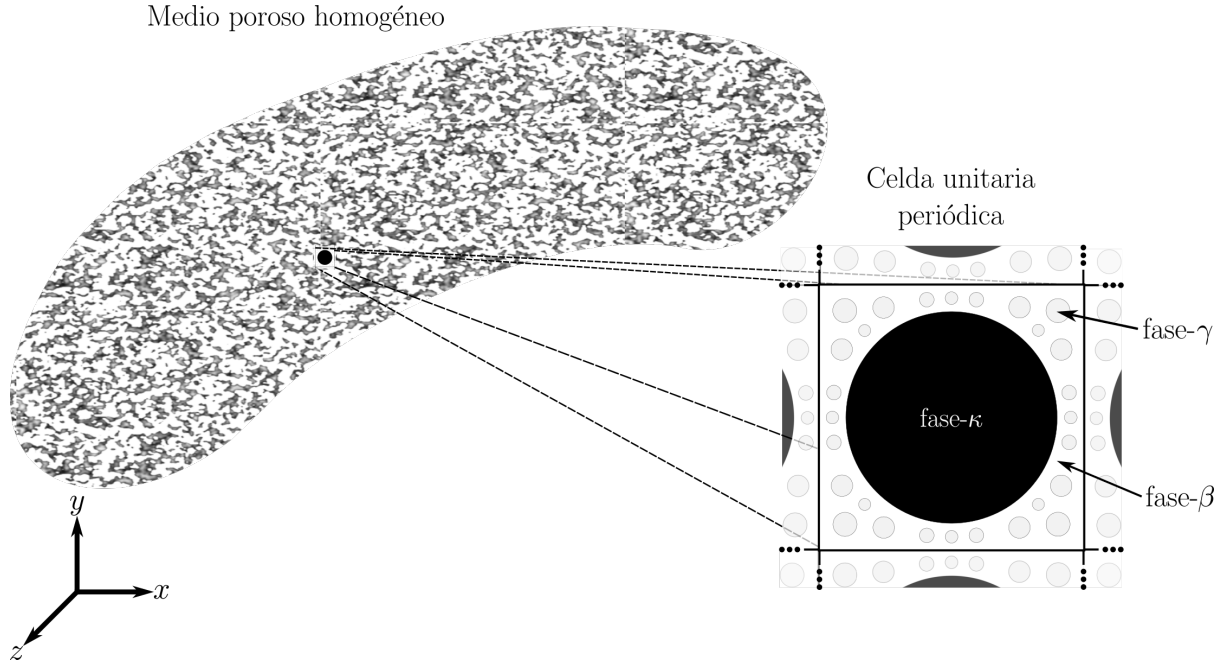


Figura 3.1. Esquema de celda unitaria periódica representativa del flujo disperso en un medio poroso homogéneo.

emulsiones estables en medios porosos.

3.3.1. Análisis paramétrico de los coeficientes efectivos

El análisis se centra en la dependencia del tensor de permeabilidad de equilibrio presente en el modelo de ELM con los principales grados de libertad. De acuerdo con el desarrollo del modelo de equilibrio, los coeficientes efectivos dependen de los siguientes parámetros

- Fracción vacía o porosidad del sistema, $\varepsilon = V_f/V$.
- Saturación de las fases en la fracción vacía, $S_\beta = \varepsilon_\beta/\varepsilon$, (*i.e.*, $S_\gamma = 1 - S_\beta$).
- Relación de viscosidades de las fases fluidas, $\nu = \mu_\beta/\mu_\gamma$. Este parámetro se identifica al analizar la condición de frontera de los esfuerzos en la interfase $\beta - \gamma$ en los problema de cerradura presentados en el Apéndice A.

En la predicción de los coeficientes efectivos se requiere un dominio de solución de los problemas de cerradura que capture, de forma razonable, la complicada microestructura del medio poroso y la distribución de la fase dispersa dentro de la fase continua tal que se representen los mecanismo de transporte esenciales en el flujo. Un ejemplo de dominio de solución consiste

en una celda unitaria 2D como la mostrada en la Figura 3.1. En esos modelos, la estructura del medio poroso (la fase sólida- κ) se representa por partículas circulares cuyo diámetro depende del valor de la fracción vacía, ε . Por otro lado, la fase dispersa se representa por una serie de partículas circulares de diferentes diámetros, relacionados entre ellos de tal forma que se satisfaga un valor de saturación dado, S_β . Los detalles geométricos de la celda unitaria periódica que se muestra Figura 3.1 se presentan en la Apéndice A. Este modelo del flujo disperso se usa en el análisis paramétrico de la predicción del coeficiente efectivo. Se debe recordar que en la deducción del modelo de equilibrio se han supuesto condiciones de flujo estacionario, en las cuales las gotas de la fase dispersa no modifican su forma y tamaño.

La solución del problema de cerradura y el cálculo de los coeficientes efectivos se lleva a cabo usando el software comercial basado en elemento finito COMSOL Multiphysics [®](Versión 4.3a). En todas las simulaciones numéricas se utilizó el tipo de elementos por defecto del software y además se aplicaron algoritmos de refinamiento de malla adaptativa con la finalidad de asegurar la independencia con el número de elementos computacionales. El procedimiento numérico consistió en resolver el Problema I del Apéndice A en diferentes celdas unitarias periódicas representativas del flujo disperso, como las que se muestran Figura 3.1, el cual se llevó cabo para obtener el componente longitudinal de los coeficientes efectivos de equilibrio (*i.e.* la dirección - x). Ejemplos del campo de la solución de las variables de cerradura para calcular este coeficiente, $(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{e}_x = A_\alpha, \quad \alpha = \beta, \gamma)$ se presentan en la Figura A.2. Una vez que se determinan que los campos de solución de las variables de cerradura, éstos se sustituyen en la Ecuación (3.13a), para predecir el coeficiente efectivo del modelo de equilibrio.

En la Figura 3.2 se presenta la dependencia del componente longitudinal del tensor de permeabilidad de equilibrio, $K^e = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{K}^e \cdot \mathbf{e}_x$ para los diferentes valores de los parámetros ε , ν y S_β . Analizando los resultados mostrados en esta figura se presentan los siguientes comentarios:

- En los cálculos realizados, el límite de la porosidad se fijó en $\varepsilon = 0.5$, de otra manera los diámetros de los círculos que representan la fase dispersa tenderían a tamaños similares a los diámetros de los poros. Como se espera de estudios previos para el flujo de un sola fase en medios porosos (Whitaker, 1999), el valor de K^e se incrementa con el aumento de la fracción vacía. De hecho para el caso de $\nu = 1$, los resultados reproducen valores iguales para aquellos predichos de la permeabilidad intrínseca de un flujo longitudinal,

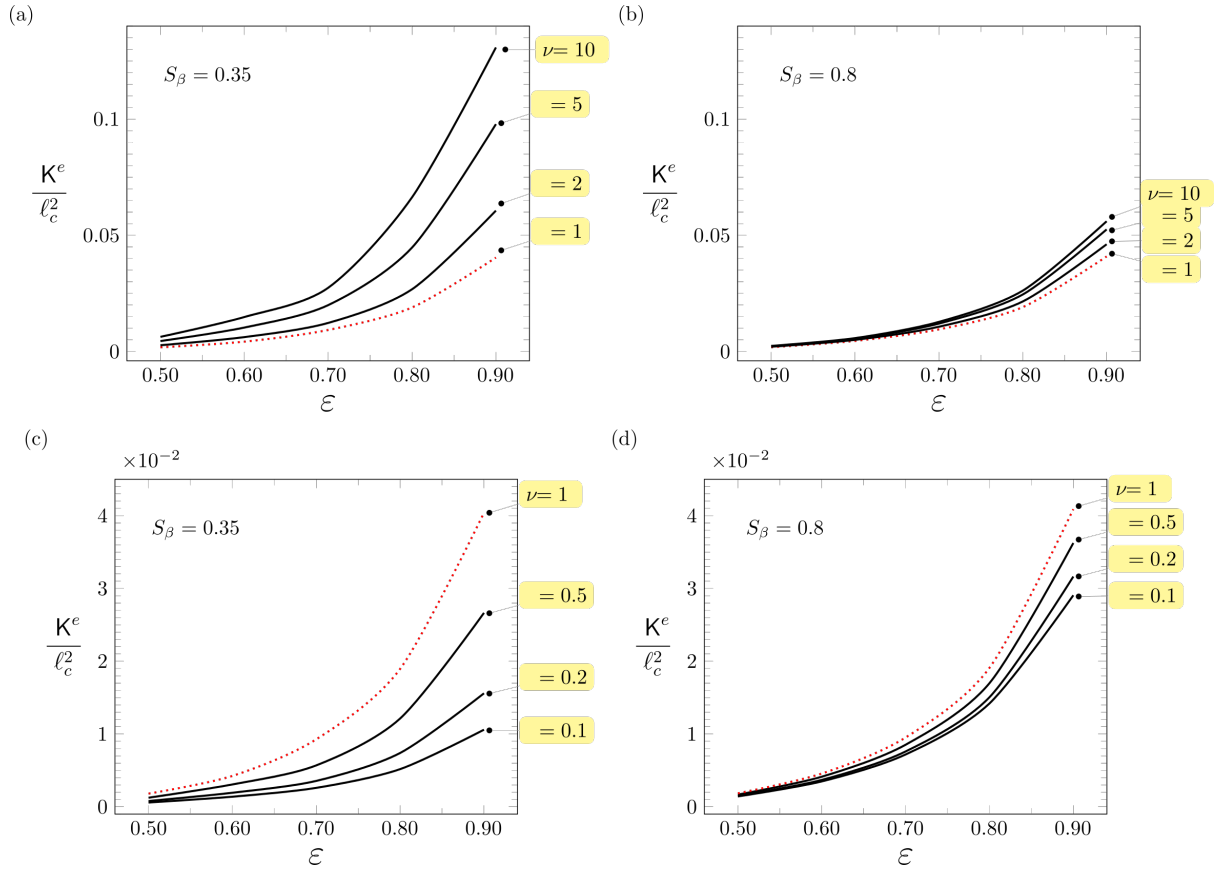


Figura 3.2. Predicciones del componente longitudinal del coeficiente efectivo, K^e , como función de ε . Bajo la condición de: $Ca \ll 1$ y $Bo \ll 1$.

$$K^e = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{K}^e \cdot \mathbf{e}_x, \text{ (i.e. } K^e \rightarrow K).$$

- Si el volumen en el poro es ocupado por la fase continua en una menor proporción con respecto a la fase dispersa- γ , ($S_\beta = 0.35$, Figuras 3.2 a y c), las predicciones son mas sensibles a cambios en ν , respecto al caso donde el volumen del poro está ocupado mayormente con la fase continua- β ($S_\beta = 0.8$, Figuras 3.2 b y d).
- Al comparar los resultados de la permeabilidad de equilibrio se observa que, para $\nu > 1$ (i.e. $\mu_\beta > \mu_\gamma$), los valores de K^e son mayores que aquellos correspondientes a la permeabilidad intrínseca, K , incrementando su valor al aumentar ν (Figuras 3.2 a y b). En el caso contrario, para $\nu < 1$ (i.e. $\mu_\beta < \mu_\gamma$), las predicciones de K^e son menores a K , donde el tensor de permeabilidad de equilibrio disminuye gradualmente a medida que ν decrece (Figuras 3.2 c y d).

Cabe resaltar, que el análisis de los resultados arriba mencionados no muestra claramente cuál es la influencia de cada una de las fases en la permeabilidad de equilibrio. Para obtener un

mejor entendimiento de la forma como influyen cada una de las fases dispersa y continua sobre este coeficiente, se puede usar la relación propuesta en la Ecuación (3.16), en la cual se puede expresar \mathbf{K}^e como una función de la permeabilidad intrínseca del medio poroso, \mathbf{K} , y un factor de corrección \mathbf{K}_m , que engloba los efectos del flujo disperso. De esta expresión se puede deducir que

- Si $\mathbf{K}_m > 0$, resulta en coeficientes de permeabilidad de equilibrio menores a la permeabilidad intrínseca, $\mathbf{K}^e < \mathbf{K}$, lo cual indica que la fase dispersa *obstaculiza* el transporte global de cantidad de movimiento.
- Para situaciones donde $\mathbf{K}_m < 0$, las predicciones del coeficiente de permeabilidad de equilibrio es mayor a la intrínseca, $\mathbf{K}^e > \mathbf{K}$, y como consecuencia se puede decir que resulta en un transporte de cantidad de movimiento *aumentado*.

Para confirmar lo anterior, es necesario realizar el cálculo del coeficiente de corrección \mathbf{K}_m , éste se realiza a partir de las predicciones de los coeficientes de permeabilidad de equilibrio, mostradas en la Figura 3.3, y el cálculo de los coeficientes de permeabilidad intrínseca, \mathbf{K} . Las predicciones de este último coeficiente se obtiene de la solución del problema de valores a la frontera, presentado por Whitaker (ver Ecs. 4.2-27, 1999) para su componente longitudinal y la definición de \mathbf{K} , dada en la Ecuación 4.2-32 del mismo trabajo. También, como se menciona, de manera aproximada se pueden usar los resultados de \mathbf{K}^e para $\nu = 1$. En el cálculo se usan celdas unitarias de iguales geometrías a las usadas para calcular el coeficiente de equilibrio, mostrada en la Figura 3.1, pero en éstas no se incluyen las partículas circulares correspondientes al dominio de la fase dispersa- γ . De esta forma, mediante la relación en la Ecuación (3.16), se calcula el componente longitudinal del coeficiente de corrección, \mathbf{K}_m . Los perfiles de las predicciones de \mathbf{K}_m se muestran en la Figura 3.3 como función de la porosidad, ε , y para diferentes valores de la relación de viscosidades, ν , manteniendo fijo el valor de saturación, $S_\beta = 0.8$. Al analizar la Figura 3.3, se pueden realizar los siguientes comentarios:

- Para valores de $\nu > 1$, los coeficientes negativos de \mathbf{K}_m son el resultado de que $\mathbf{K}^e > \mathbf{K}$. Por lo tanto, un aumento en ν significa un incremento en el valor de la permeabilidad de equilibrio \mathbf{K}^e , y como consecuencia el flujo disperso se mejora de manera global por la presencia de la fase dispersa- γ , cuya viscosidad es menor que la de la fase continua- β y

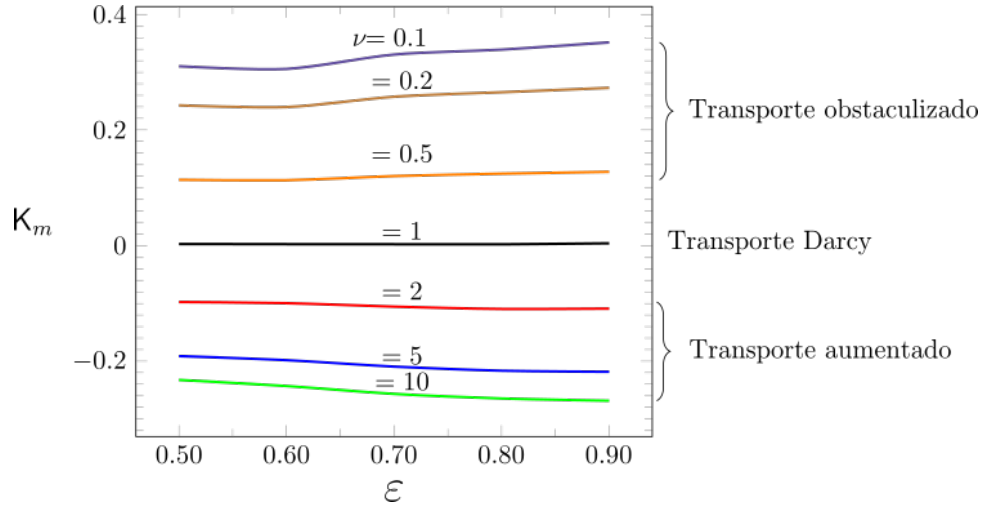


Figura 3.3. Predicciones del factor de corrección, \mathbf{K}_m como función de ε y de ν , tomando $S_\beta = 0.8$. Bajo la condición de: $Ca \ll 1$ y $Bo \ll 1$.

donde las gotas *aceleran* el flujo. A pesar de que sólo se presentan resultados para un valor de saturación, es atractivo suponer que si S_β ($S_\gamma = 1 - S_\beta$) se incrementa, la fracción de volumen ocupada en el espacio libre (volumen de los poros) por la fase- γ se reduce y como consecuencia, el efecto del *aumento* disminuye.

Es importante recordar en este punto las suposiciones adoptadas en la deducción del modelo escalado para el flujo disperso, las cuales permiten despreciar la influencia de los efectos capilares de la tensión interfacial y curvatura entre las fases continua y dispersa. Así, la relación de viscosidades y la fracción de volumen ocupada por las fases en los poros son los parámetros que determinan los valores calculados del factor de corrección \mathbf{K}_m , mostrados en la Figura 3.3.

- En el caso de valores $\nu = 1$, el efecto de la fase dispersa- γ sobre la permeabilidad de equilibrio puede tomarse como despreciable ya que $\mathbf{K}_m \ll 1$, el cual resulta en valores de $\mathbf{K}^e \approx \mathbf{K}$. Por lo tanto, el flujo de ambas fases inmiscibles en el medio poroso es similar al flujo de una sola fase fluida y considerarse un transporte tipo Darcy.
- En contraste con el primero punto, los valores de \mathbf{K}_m son positivos para $\nu < 1$, lo que indica que $\mathbf{K}^e < \mathbf{K}$. Estos resultados sugieren que el flujo global disminuye por la presencia de la fase dispersa- γ , que sugiere que las gotas, con una viscosidad mayor a la fase continua- β , actúan como *partículas de arrastre*. Por lo tanto, se puede argumentar que una reducción de S_β , incrementaría el volumen ocupado por estas partículas de arrastre dentro del

volumen vacío y como consecuencia el efecto de la disminución del flujo se incrementa.

Es importante enfatizar que las simulaciones realizadas para calcular el coeficiente de permeabilidad de equilibrio se realizan en geometrías bidimensionales. Se ha demostrado, que en el caso de la predicción del coeficiente de permeabilidad intrínseco, los resultados muestran el mismo perfil para la dependencia con la fracción vacía pero las predicciones en la celda bidimensional son mayores que las obtenidas con la celda tridimensional. Por consiguiente, el análisis dimensional requiere de expandir las predicciones a modelos de celdas unitarias 3D, y observar la diferencia en los valores predichos para el coeficiente de permeabilidad. Además, se ha limitado el caso de una geometría ordenada de acuerdo a ciertos criterios, el efecto de la localización de la fase dispersa- γ en una geometría más aleatoria y complicada, representa también un efecto adicional que debe ser atendido en el análisis de las predicciones. No obstante, los resultados presentados en esta sección, usando esta celda de geometría simple, muestran en una primera aproximación a la dependencia tanto de parámetros físicos y geométricos en el estudio del flujo disperso en un medio poroso homogéneo. A pesar de realizar un análisis paramétrico del coeficiente permeabilidad de equilibrio, incluido en el modelo escalado para el flujo disperso, resulta esencial validar las predicciones de los valores calculados, ya sea mediante comparación con las simulaciones numéricas directas (DNS) en un sistema representativo del flujo, o con datos experimentales reportados en la literatura. Este último análisis de validación se presenta en la sección siguiente.

3.3.2. Comparación con experimentos

En esta sección las predicciones del tensor de permeabilidad de equilibrio, \mathbf{K}^e , se comparan con los datos experimentales reportados en la literatura por Soo y Radke (1984) y Jain y Demond (2002a). Ambos procedimientos experimentales son similares; sin embargo, el análisis de Soo y Radke, se enfoca a la comprensión de los mecanismo de flujo de sistemas dispersos en medios porosos y los experimentos de Jain y Demond (2002a) son una aplicación experimental directa de este tipo de flujo en el desarrollo de mejoras para la remediación de acuíferos por surfactantes. Los datos obtenidos en estos trabajos experimentalmente se presentan principalmente en forma de la reducción del valor de la relación de la permeabilidad del flujo disperso con la permeabilidad intrínseca de un sistema poroso (en términos de este trabajo: K^e/K), contra los *volúmenes de*

poro de una fase emulsificada que fluyen a través del medio poroso. Este parámetro experimental se puede relacionar con un valor de saturación de la fase dispersa, S_γ , y de esta forma ser consistentes con los parámetros utilizados hasta este punto. La comparación con los datos experimentales del flujo de emulsiones con el modelo de equilibrio propuesto para el flujo disperso se enfoca, esencialmente, en la predicción de los coeficientes efectivos de equilibrio usando celdas unitarias periódicas que representen el flujo emulsificado experimental.

La determinación experimental de la reducción de permeabilidad, realizadas por Soo y Radke (1984) y Jain y Demond (2002a), se obtuvieron, mediante el análisis del flujo de una emulsión diluida y estable a través de columnas empacadas con un medio poroso caracterizado. En ambos procedimientos, las características de la emulsión como la distribución de tamaño y estabilidad cinética, se determinaron experimentalmente; los tamaños de gota se controlaron durante el proceso de preparación de la emulsión; la concentración diluida de partículas emulsificadas permitió un comportamiento de la emulsión tipo fluido Newtoniano; la estabilidad de las emulsiones se evaluaron a través de los cambios observables en la distribución de los tamaños de gotas, en un periodo de tiempo al menos con la duración suficiente para los experimentos de flujo. En ambos sistemas, de Soo y Radke (1984) y Jain y Demond (2002a), las columnas se empaquetaron con diferentes tipos de partículas de silicio, de distribución de diámetros conocido, de tal forma que se obtuviera un medio poroso homogéneo de porosidad constante (determinada por el peso de la columna); la distribución del tamaño de poro se determinó experimentalmente para cada columna; la permeabilidad del medio poroso, en las columnas experimentales, se obtuvo del flujo saturado de agua (Soo y Radke, 1984; Jain y Demond, 2002a) y nitrógeno (Soo y Radke, 1984).

En los experimentos de Soo y Radke (1984), la emulsión (estable, diluida, de concentración inicial, y distribución de tamaños de gotas conocidas), se hizo fluir lentamente, desde un depósito, a la columna empacada (de permeabilidad y distribución de diámetros de poros conocidos), manteniendo un flujo volumétrico constante y monitoreando continuamente la caída de presión global (el esquema del sistema experimental se muestra en la Figura 3.4). La reducción gradual de la permeabilidad, K^e/K , de las columnas experimental se determinó de la medición de las variaciones de presión global y de la concentración volumétrica residual de las gotas emulsificadas, analizada a la salida del medio poroso.

Los experimentos de Jain y Demond (2002a) consistieron en el flujo constante de la emulsión

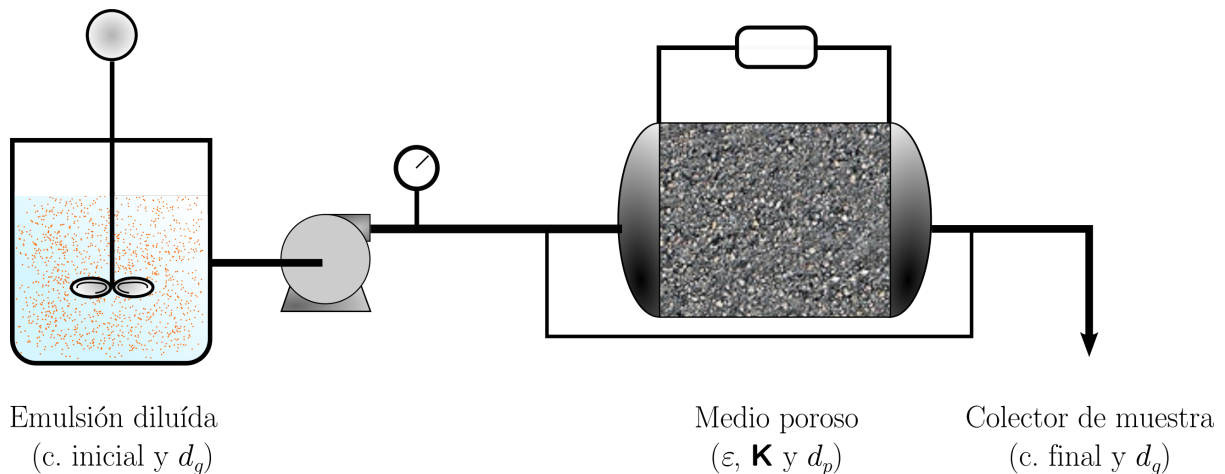


Figura 3.4. Sistema experimental usado por Soo y Radke (1984).

igual en la parte superior de la columna, en volúmenes equivalentes a la porosidad del lecho, que continuaba hasta que las lecturas de presión se estabilizaran. La inyección de la emulsión se hizo de manera continua en cantidades equivalentes al volumen ocupado por los poros. La reducción de la permeabilidad se determinó de las medidas de presión como función de la altura de la columna durante la inyección estable de la emulsión; de la cantidad total de gotas en el efluente, se calculó la concentración de la fase dispersa en la emulsión. En ambos sistemas, los cambios de la permeabilidad de las columnas se determinaron por medio de los resultados de los gradientes de presión experimentales y aplicando la ley de Darcy.

En la Tabla 3.1, se presenta un resumen de las condiciones de los sistemas experimentales de Soo y Radke (1984) y Jain y Demond (2002a). En éstos, se identifican variaciones de la relación de viscosidades de las fases fluidas, tamaño de gota y diámetro de poro. Algunos datos se calculan de la información dada en estos trabajos, como ν y la saturación S_γ , esta última se determina de la manipulación matemática para obtener una relación de los datos experimentales: *volúmenes de poro* de emulsión inyectados al medio poroso, concentración de la fase dispersa inicial y de efluente. Los diámetros de poro, d_p y gotas, d_g son los valores promedio de su respectiva distribución de tamaños, correspondientes a cada experimento.

Con base en estos datos experimentales, la predicción teórica de la reducción del coeficiente de permeabilidad de equilibrio se calcula usando, como dominio de solución para el problema de cerradura asociado al cálculo de \mathbf{K}^e (Problema I del Apéndice A), una representación microscópica del proceso del flujo disperso a través del medio poroso como la celda unitaria bidimensional mostrada en la Figura 3.5. En este modelo se intentan capturar las características

Tabla 3.1. Parámetros experimentales.

Experimento	ε	ν	S_γ	d_g [μm]	d_p [μm]
Soo y Radke (1984)					
1	0.34	0.660	0.016-0.10	3.1	29.5
2	0.34	0.660	0.055-0.091	6.1	29.5
3	0.34	0.044	0.013-0.051	3.4	29.5
Jain y Demond (2002a)					
1	0.336	1.05	0.02-0.34	1.1	47

estructurales esenciales y los mecanismos de flujo de las fase dispersa- γ de los experimentos. En la geometría de esta celda, el medio poroso se representa como partículas circulares en una arreglo triangular, ver Figura 3.5(a), cuyo diámetro se determina como función del valor de la porosidad, ε , de acuerdo a la siguiente expresión

$$\frac{d_\kappa}{\ell_c} = \sqrt{\frac{2(1-\varepsilon)}{\pi}} \quad (3.20)$$

Además, tomando como diámetro de poro la distancia más cercana entre las partículas circulares, ver en la Figura 3.5(b), el tamaño de poro se determina mediante

$$\frac{d_p}{\ell_c} = \left(1/\sqrt{2}\right) - \frac{d_\kappa}{\ell_c}, \quad (3.21)$$

Por otro lado, de la relación d_g/d_p , que se puede obtener de los datos experimentales de la Tabla 3.1, permite calcular el diámetro de la gota, d_g , usando la Ecuación (3.21) y así representar el diámetro de gota de la fase dispersa- γ , ver en la Figura 3.5(c). Con el valor de d_g , el dominio total ocupado por la fase dispersa, en la celda unitaria, se determina a partir del número de círculos que representan el total de gotas, N_g , lo anterior para un valor de saturación y porosidad, de acuerdo a

$$N_g = \frac{2(1-S_\beta)\varepsilon}{\pi d_g/\ell_c} \quad (3.22)$$

Se debe enfatizar que, en los experimentos reportados, las gotas de la emulsión no son monodispersas sino que presentan una distribución de tamaños que no muestra una gran desviación a un tamaño de gota promedio (Figura 3 y 4 y Figura 1, respectivamente, en Soo y Radke, 1984; Jain y Demond, 2002a). Para el diámetro de poros, también se presenta una distribución de tamaños que tiende a un valor promedio. Estas características físicas se pueden

tomar en cuenta en la construcción de la celda unitaria, ya que esta representación del proceso físico puede ser arbitrariamente compleja y contener este tipo de detalles. Sin embargo, en este estudio se propone el uso una geometría que se limita sólo a un tamaño de gota y poros de diámetro d_g y d_p , determinados con base en los experimentos de la literatura, como se muestra en la Figura 3.5. Evidentemente, en la celda unitaria se considera que las gotas de la fase dispersa no Resultados de búsqueda coalescen, ni modifica su tamaño (características de una emulsión estable) y está en contacto sólo con la fase continua.

De esta forma, los *principales* parámetros experimentales son usados en la construcción de la celda unitaria que captura, aproximadamente, las características físicas esenciales del proceso físico a la escala del poro. Ciertamente, la localización de los círculos, que representan las gotas emulsificadas, requiere de conocer cómo es su movimiento a través de los poros en un flujo estacionario, esto recuerda lo que se desoconoce del proceso del flujo disperso en medios porosos y de los efectos capilares asociados a su flujo dentro de los poros. Estudios en micromodelos del flujo de emulsiones resultan esenciales para caracterizar y observar de manera cualitativa los mecanismos del flujo local (Soo y Radke, 1984; Jain y Demond, 2002a; Guillen *y col.*, 2012a). En los estudios de Soo y Radke (1984), se concluye que la fase dispersa reduce el diámetro de los poros, modificando el patrón del flujo global dentro del medio poroso, por dos mecanismos: (1) la deposición de gotas de la emulsión en las gargantas de los poros (donde son retenidas en los espacios entre las partículas sólidas), o (2) por la intercepción de las gotas en la superficie de sólido, (donde se adhieren permanente formando una monocapa); para sistemas dispersos con $d_g/d_p \leq 0.2$ el proceso dominante en la reducción de la permeabilidad es la obstrucción por deposición. Por otro lado, Jain y Demond (2002a) sugieren que, para relaciones de radio $d_g/d_p < \mathbf{O}(10^{-2})$, puede existir una formación de multicapas de gotas emulsificadas sobre la superficie del medio poroso y dentro de los canales entre las partículas sólidas, y que una vez formada esta capa de gotas es difícil separarle de la superficie y si lo hace, las gotas se mueven como agregados que obstruyen otros poros. Así, la deposición por multicapas es el mecanismo principal de la reducción de la permeabilidad, donde la intercepción se vuelve importante con el incremento del tamaño de los agregados de gotas y de la reducción de la dimensión de las gargantas de los poros, debido a las capas de emulsión ya depositadas. En consecuencia, la posición de los círculos se escogen dentro de las gargantas de los poros, como se muestra en la Figura 3.5, con el objetivo de emular los mecanismos de transporte de las gotas a través de los

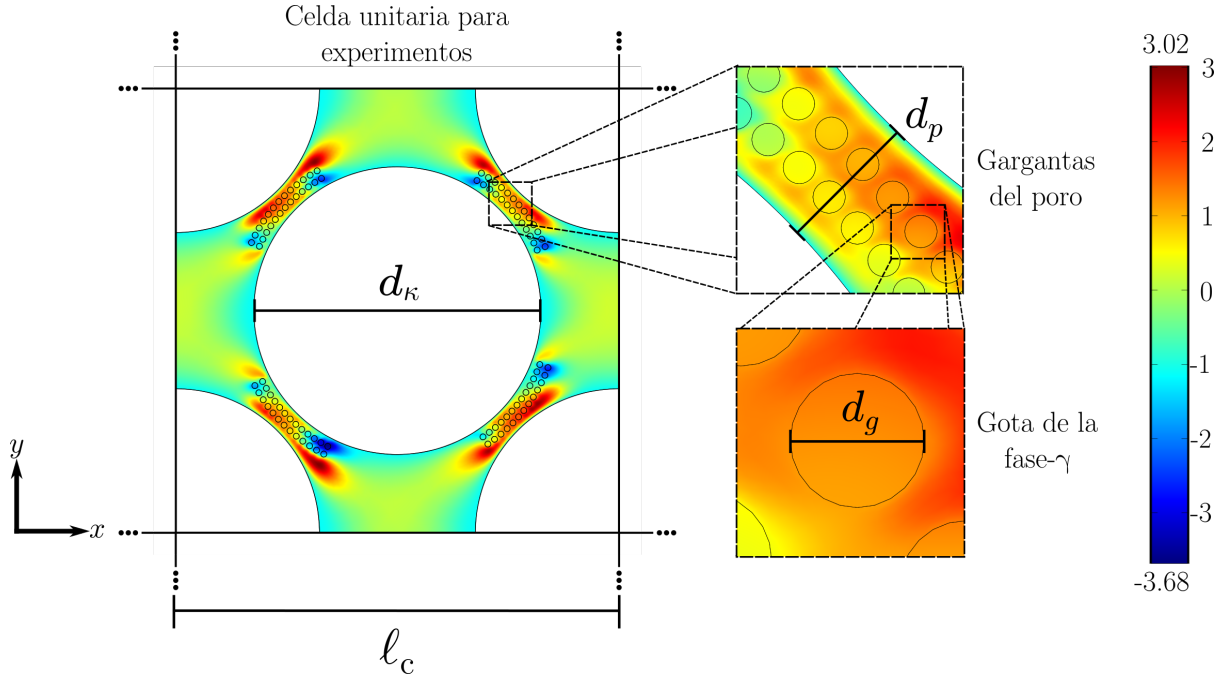


Figura 3.5. Celda unitaria y campo de las variables A_β y A_γ usadas para la predicción de K^e/K , correspondiente al Experimento 3 de Soo y Radke (1984). Bajo la condición de: $Ca \ll 1$ y $Bo \ll 1$.

poros descritos con anterioridad.

El problema de cerradura (Problema I, Apéndice A) se resolvió en celdas unitarias periódicas similares a la mostrada en la Figura 3.5, usando el software comercial de elemento finito COMSOL Multiphysics $\text{\textcircled{R}}$ (Versión 4.3a). Se aseguró la independencia numérica del esquema de discretización usando un algoritmo de refinamiento de malla al generar resultados consistentes. Ya obtenido el campo de solución de las variables de cerradura ($A_\alpha, \alpha = \beta, \gamma$), se calculó el coeficiente de permeabilidad de equilibrio usando la Ecuación (3.13a).

Se debe señalar que, para obtener las predicciones más convenientes del coeficiente de permeabilidad, a partir de los datos experimentales para un valor de saturación específico, dentro de los intervalos en la Tabla 3.1, se debió modificar de forma iterativa el modelo de celda unitaria hasta obtener un valor teórico con un menor porcentaje error posible al de su respectivo valor experimental. Lo anterior, debido a que se mostró una fuerte dependencia de los valores calculados del coeficiente de permeabilidad con los parámetros geométricos, y fundamentalmente a la localización de las gotas dispersas en las gargantas, ver Figura 3.5. Lo anterior se relaciona directamente con los efectos de la tensión interfacial y de curvatura aún contenidos en el coeficiente de permeabilidad de equilibrio, los cuales se asocian a la representación adecuada de la celda unitaria usada para la predicción de este coeficiente de

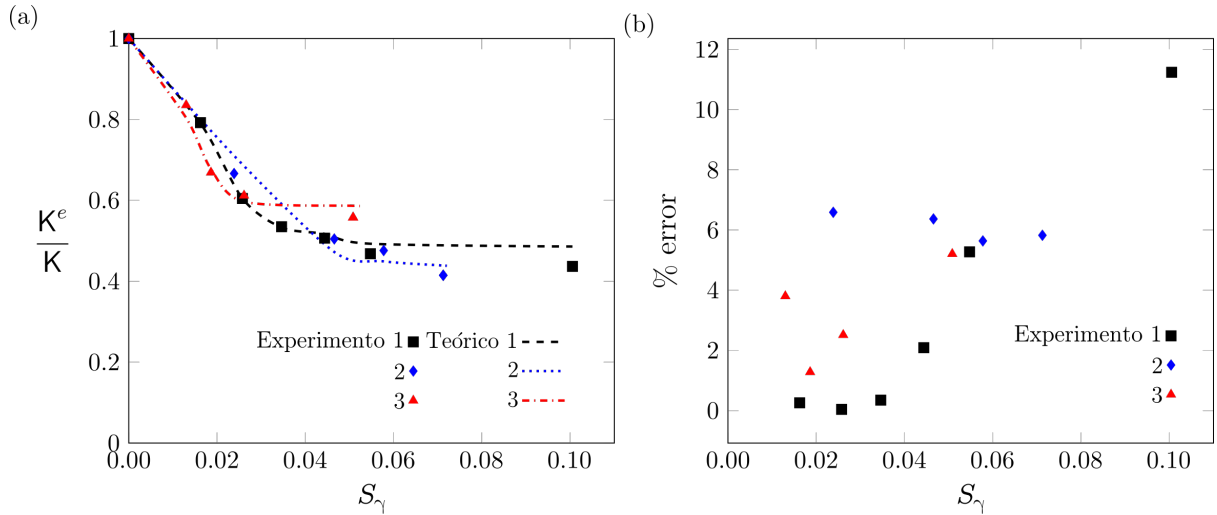


Figura 3.6. (a) Comparación de la reducción de la permeabilidad experimental reportados por Soo y Radke (1984) (Experimental) con las predicciones calculadas (Teórico) K^e/K . (b) Porcentaje de error relativo entre predicciones y experimentos.

los mecanismos de transporte de las gotas emulsificadas dentro de los poros.

En las Figuras 3.6 y 3.7 se presentan la comparación de la reducción de la permeabilidad entre las predicciones obtenidas para el modelo de ELM, y desarrollado en este trabajo (denominado como Teórico en leyenda), y los datos experimentales obtenidos en los trabajos de Soo y Radke (1984) y Jain y Demond (2002a), correspondientes al número de Experimento de la Tabla 3.1. En estas. Con el objetivo de tener una mejor perspectiva de las capacidades predictivas, en estas figuras además se incluyen los porcentajes de error relativo entre las predicciones teóricas y los valores experimentales. Analizando estas comparaciones se pueden hacer los siguientes comentarios

- En estas figuras se observa que, en general, todos los resultados exhiben un porcentaje de error relativo promedio por debajo del 10% , el cual puede considerarse aceptable para muchas situaciones. La variación en los porcentajes de error, se relaciona directamente con las dificultades presentadas en la construcción de la geometría adecuada de la celda unitaria para: (1) representar los mecanismos de flujo de deposición e intercepción en los canales de los poros (caso de Soo y Radke), y (2) capturar el efecto de las multicapas y los aglomerados de gotas que saturan los canales de poro (caso de Jain y Demond 2002a).
- Por otra parte, en el caso del único experimento de Jain y Demond ($S_\gamma < 0.3$), se puede observar que los errores tienden a un máximo de 15% y para los diferentes experimentos de

Soo y Radke ($S_\gamma < 0.1$), el error se incrementa hasta un 12 %; con error promedio de los tres experimentos menor al 7 %. Estos porcentajes de error exhiben una tendencia general de aumentar para los mayores valores de S_γ . Este comportamiento se debe, de acuerdo con la Ecuación (3.22), al incremento gradual en el número de círculos N_g (representativos de las gotas dispersas) que genera una mayor dependencia geométrica y provoca que aumenten las dificultades para encontrar la celda unitaria que permita una predicción teórica de la permeabilidad aceptable. Lo anterior, relacionado directamente con el incremento de la variedad de formas posibles para localizar los círculos y simular los mecanismos de flujo antes mencionados.

- Al analizar la Tabla 3.1, se observa que los porcentajes de error, a medida que aumenta S_γ , tienden a incrementarse mayormente cuando los valores de la relación d_g/d_p son más pequeños, ver los Experimentos 1 y 3 en la Figura 3.6 ($d_g/d_p \approx 0.1$) y la Figura 3.7 ($d_g/d_p \approx 0.02$). Por otro lado, en el Experimento 2 ($d_g/d_p \approx 0.2$), las predicciones tienden a un error que varía alrededor del 6 %, que inclusive disminuye ligeramente. La relación d_g/d_p , implica nuevamente que el número de N_g se incrementa y se dificulta localizar los círculos y calcular el coeficiente de permeabilidad correctamente. Este comportamiento se observa principalmente para los experimentos de Jain y Demond (2002a), donde el intervalo de saturación es mayor y la relación d_g/d_p es mucho menor comparado con los de Soo y Radke (1984), por consiguiente se espera el incremento en el porcentaje de error observado en la Figura 3.7.

Se debe considerar, en las diferencias entre la comparación entre las predicciones teóricas y los datos experimentales, el conjunto de restricciones y suposiciones involucradas en la derivación del modelo de ELM, entre las cuales se incluye la no interacción entre la fase dispersa- γ y la fase sólida- κ . Además, en la predicción del coeficiente de permeabilidad se presentan limitaciones para detallar las características microestructurales y fenomenológicas de un proceso experimental presentes del flujo disperso en un medio poroso, y capturarlas en un modelo bidimensional de geometrías simples (círculos para describir las fases sólida y dispersa). El uso de geometrías más elaboradas como modelos de celda unitaria para el flujo disperso podrían, en principio, proporcionar una mejor concordancia con los datos experimentales. Sin embargo, se debe resaltar que, como una primera aproximación, las geometrías simples propuestas en este

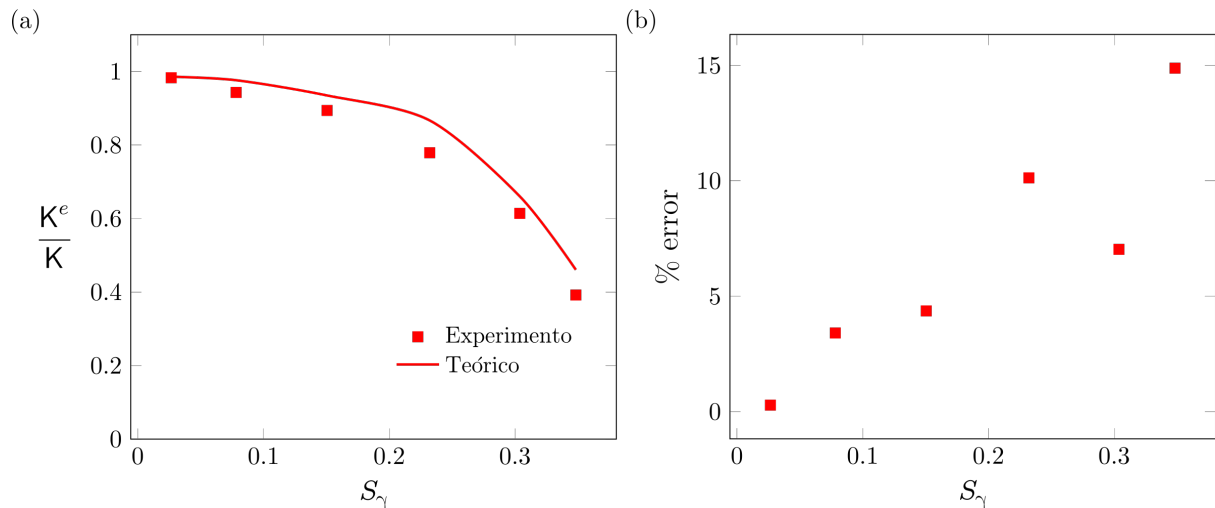


Figura 3.7. (a) Comparación de la reducción de la permeabilidad experimental reportados por Jain y Demond (2002a) con las predicciones calculadas K^e/K . (b) Porcentaje de error relativo entre predicciones y experimentos.

trabajo generan resultados razonables al compararlos con los datos experimentales disponibles en literatura.

3.3.3. Discusión de resultados

Con respecto a los resultados del análisis paramétrico de las predicciones del coeficiente de permeabilidad de equilibrio, presentados en la Sección 3.3.1, es de esperarse que la porosidad influya notablemente en los valores del coeficiente, con la misma naturaleza que el coeficiente intrínseco de permeabilidad; es decir, incrementando su valor al aumentar el volumen de fracción vacía disponible para el flujo de ambas fases. Por otro lado, los resultados muestran que, bajo la condición de la relación de las viscosidades de las fases: $\mu_\gamma < \mu_\beta$ (*i. e.*, $\nu > 1$), el valor de este coeficiente de permeabilidad es mayor al intrínseco para el mismo valor de porosidad, indicando con ello que el transporte de cantidad de movimiento del flujo disperso en el medio poroso se ve *aumentado*; en caso contrario, si las viscosidades son $\mu_\gamma > \mu_\beta$ (*i. e.*, $\nu < 1$), los coeficientes de permeabilidad de equilibrio resultan en valores menores al intrínseco, y en consecuencia en este caso, se puede decir que el transporte se ve *obstaculizado*. Lo anterior resulta de la influencia que tienen las gotas de la fase dispersa, las cuales pueden comportarse como partículas que *aceleran* o *retienen* el flujo global de ambas fases en el medio poroso homogéneo; la determinación del factor de corrección, K_m , permite caracterizar la magnitud que este efecto tiene y determinar el tipo de transporte basado en el cálculo del coeficiente de permeabilidad de equilibrio, K^e y de

permeabilidad intrínseca, K . De los resultados se observa además que el incremento del valor de la saturación de la fase dispersa influencia de manera proporcional ambos comportamientos, esto es, en relación directa del volumen que esta fase ocupa dentro espacio libre del medio poroso. Es importante mencionar que los valores de la relación de viscosidades seleccionadas para las predicciones del coeficiente de permeabilidad de equilibrio se presentan en diferentes sistemas físicos aplicados a la remediación de suelos y mantos acuíferos, para: $\nu > 1$ ($\nu = 2, 5$ y 10), corresponden a valores encontrados en sistemas de contaminantes líquidos no acuosos ligeros y para $\nu < 1$ ($\nu = 0.2, 0.5$ y 0.1), sistemas no acuosos pesados (Mayer y Hassanizadeh, 2013; Davis, 1997). Además, sistemas experimentales de remediación mejorada de suelos usando agentes emulsificantes, que involucran un flujo disperso en condiciones similares a las propuestas en el modelo desarrollado, manejan estos mismos valores en sus estudios (Jain y Demond, 2002a,b). En el caso de estudios en la recuperación mejorada de petróleo, la relación de viscosidades regularmente es $\nu < 1$. Específicamente, los valores usados para la predicción de los coeficientes efectivos son similares a los que se presentan en estudios para crudos ligeros (Al-Besharah *y col.*, 1987) y estas mismas relaciones se presentan en varios sistemas experimentales, que incluyen el flujo emulsificado como mejoramiento de esta técnica de extracción secundaria de petróleo (Soo y Radke, 1984; Romero *y col.*, 2011; Engelke *y col.*, 2013; Guillen *y col.*, 2012b; Demikhova *y col.*, 2016)

Las características del flujo disperso, observadas a través de la predicción del coeficiente de permeabilidad involucrado en el modelo de ELM, resultan relevantes en aplicaciones prácticas donde se emplea la formación de flujos dispersos como un método deseable para el mejoramiento global del flujo multifásico en medios porosos y de sistemas dispersos específicos, como el mejoramiento de extracción de petróleo o la aplicación en métodos de remediación de suelos (Ouyang *y col.*, 1995; Jain y Demond, 2002a; McAuliffe, 1973). De esta forma, para las condiciones bajo las cuales las suposiciones y restricciones el modelo de ELM son válidas, se podrían predecir, en una primera aproximación, bajo qué condiciones operacionales el transporte puede verse “mejorado” o “empeorado” de acuerdo con las características físicas de las fases fluidas y las propiedades estructurales del medio poroso; como lo demuestra el análisis paramétrico realizado en este trabajo. La determinación del tipo de flujo, a partir del cálculo del coeficiente de permeabilidad de equilibrio y del respectivo factor de corrección, son consecuentes de la deducción del modelo de equilibrio y proporcionan un mejor entendimiento

fundamental de este tipo de transporte, desde la escala de poro, en la construcción de celda, hasta la macroescala, con la predicción del coeficiente.

La comparación realizada en la Sección 3.3.2, entre las predicciones de la reducción del coeficiente de permeabilidad (derivado del modelo de ELM) con los datos experimentales reportados en la literatura, exhiben, en general, una aceptable concordancia; con porcentajes de error en promedio menores al 10%. Este buen ajuste se logra, sin embargo, a través de encontrar la geometría de la celda unitaria más adecuada para describir y capturar de la mejor forma posible los mecanismos de flujo del transporte de las gotas dispersas, señalados en los experimentos: deposición, intercepción y multicapas. Los resultados muestran que, en general, las capacidades para predecir el coeficiente se reduce al incrementar el valor de la saturación de la fase dispersa. Lo anterior conlleva al aumento exponencial del número de círculos necesarios para representar esta fase en las celdas unitarias, que da como resultado que se dificulte obtener una representación adecuada de los mecanismos de transporte mencionados. Cabe mencionar que la predicción del coeficiente, que muestra el menor porcentaje de error con los experimentos, involucra un proceso iterativo para construir la celda unitaria, en cierto modo de forma cualitativa, pero que es guiada por la evidencia experimental basada en los estudios de micromodelos realizados con el objetivo de capturar los factores que determinan la reducción de la permeabilidad. A pesar de que no resulte práctico esta forma recursiva de calcular el coeficiente, muestra aspectos importantes en el entendimiento de la física presentes en el flujo disperso en medios porosos homogéneos. Es decir, los mecanismos relacionados con el volumen de las gotas retenidas en los poros y la eficiencia con que estas gotas restringen los flujos, ya sea por medio de deposición, intercepción, multicapas o aglomerados de gotas (Soo y Radke, 1984; Jain y Demond, 2002a), pueden ser modelados de forma aproximada en estas representaciones periódicas. Así, estos efectos a la microescala en los que se incluyen efectos de la tensión superficial y de la curvatura englobados en la construcción de la celda se ven reflejados en el modelo a la macroescala vía el coeficiente efectivo.

Finalmente, los resultados muestran que el flujo de emulsiones estables en medios porosos resulta en un sistema que se aproxima al que puede ser descrito por el modelo de ELM, desarrollado en este trabajo a través del método del promedio volumétrico. Esta afirmación concuerda con el relativo buen ajuste observado entre las predicciones teóricas y los experimentos para la reducción de la permeabilidad. Lo anterior, alienta a proponer a la condición de *equilibrio*

local mecánico como un enfoque razonable en aplicaciones de flujo de emulsiones, en las cuales la saturación de las gotas dispersas es pequeña. Como ya se mencionó, las desviaciones entre las predicciones teóricas con los experimentos se atribuyen, en buena medida, a las limitaciones geométricas en las celdas unitarias usadas; sin embargo, también se deben de tener en cuenta las mismas suposiciones y restricciones de longitudes de escalas características con las cuales se formuló el modelo de ELM. Brevemente, se recuerda que se supuso que no existe un contacto entre las fases sólida y dispersa, que la influencia de los efectos capilares, curvatura y tensión interfacial son despreciables y la existencia de una longitud de escala características entre la escala del poro y la macroescala.

Se debe reconocer que, a pesar de la limitada geometría usada como modelo para representar el flujo disperso y las restricciones impuestas en la deducción del modelo del ELM, se puede concluir que, en general, los resultados son aceptables en sus capacidades predictivas de datos experimentales y mas importante en la comprensión de los mecanismos de transporte involucrados en este tipo de flujo multifásico. Los resultados de este trabajo sirven también como una motivación para posteriores estudios experimentales y teóricos del transporte del flujo inmiscible de dos fases fluidas en medios poroso homogéneos. En trabajos futuros se puede expandir la aplicabilidad del modelo de ELM deducido en este trabajo ya sea: mediante la relajación de algunas suposiciones realizadas o investigando celdas unitarias más complicadas importante en la predicción del coeficiente efectivo. Esto último, en el uso de dominios de soluciones tridimensionales, que señalen el efecto de la dimensión respecto a las predicciones bidimensionales, y que además representen de forma más realista la matriz del medio poroso con la distribución de diámetros de poro y la localización de las gotas dispersas y su distribución de tamaño. Además se requiere resolver el modelo de no-equilibrio desarrollado en el Capítulo 2 para observar las diferencias con modelo de equilibrio con el fin de caracterizar adecuadamente cuando es más viable utilizar ambos modelos.

3.4. Resumen

Para finalizar este capítulo, es pertinente hacer los siguientes comentarios de los resultados obtenidos

- A partir del modelo de no equilibrio obtenido para el flujo disperso de dos fases fluidas

inmiscibles en medios porosos homogéneos, presentado en el Capítulo 2, se propuso el principio del *equilibrio local mecánico* para describir el flujo multifásico por medio de una sola presión y velocidad de equilibrio. En la deducción del modelo se determinaron las restricciones, en términos de longitudes características, para las cuales la condición de equilibrio se considera válida. El modelo resultante se cierra a través de la solución de los problemas de valores a la frontera asociados, cuya soluciones permiten la predicción de los coeficientes efectivos involucrados

- La predicción del tensor de permeabilidad de equilibrio, \mathbf{K}^e y el factor de corrección \mathbf{K}_m , permitieron caracterizar el efecto de la fase dispersa - γ en el flujo multifásico global. Dicha influencia en el transporte de cantidad de movimiento puede ser: aumentado, obstaculizado o tipo Darcy, y depende de las propiedades físicas de las fases y el volumen que ocupan dentro de los poros.
- La validación del modelo de equilibrio se obtuvo a través de la comparación de las predicciones teóricas con los datos experimentales de la reducción de la permeabilidad debida al flujo de una emulsión estable en una columna empacada con un medio poroso homogéneo. Los resultados muestran que, a pesar de la geometría simple usada para representar el flujo disperso, a bajos valores de saturación de la fase dispersa ($S_\gamma < 0.1$) las predicciones resultan lo suficientemente adecuadas. Asimismo, la comparación proporcionó un mejor entendimiento de los mecanismos involucrados en flujo de las gotas dispersas dentro de los poros. Sin embargo, las desviaciones de las predicciones con los experimentos, mostraron también las limitaciones teóricas de este modelo y la necesidad de recurrir a representaciones que capturen más adecuadamente este tipo de flujo.

Es importante señalar que el modelo de ELM y las predicciones de los coeficientes efectivos en su cerradura, analizado en este capítulo se restringen a una región homogénea porosa, de acuerdo con las restricciones de longitudes características aplicadas en su deducción mediante el método del promedio volumétrico y las suposiciones adicionales impuestas para aceptar la condición de equilibrio local mecánico como válida. Como ya se mencionó, los medios porosos son más complejos, en sistemas principalmente heterogéneos, conformados por diferentes regiones homogéneas porosas o de fluido libre. Un primer estudio estaría dirigido a analizar la zona de transición entre regiones homogéneas. Con el objetivo de extender la aplicabilidad de

la condición de equilibrio local mecánico, propuesta en este capítulo, a la frontera cercana entre dos regiones homogéneas, conocida comúnmente la *inter-región*, el resto de la tesis se enfocará analizar el flujo disperso de dos fases fluidas inmiscibles en la frontera cercana entre dos regiones homogéneas desde el enfoque de un modelo ODA.

Parte II

Análisis en la frontera entre regiones homogéneas

CAPÍTULO 4

ECUACIONES DE TRANSPORTE PROMEDIO GENERALIZADAS

En este capítulo se deduce el modelo escalado para el flujo disperso de dos fases fluidas inmiscibles en la frontera cercana entre dos regiones homogéneas, denominada comúnmente como *inter-región*. El desarrollo del modelo se lleva a cabo bajo el enfoque de un *sólo dominio* (*One-Domain Approach*, ODA). Este modelo supone al sistema como un pseudo-continuo donde una ecuación generalizada, expresada en términos de coeficientes de medio efectivo dependientes de la posición, se usa para describir el transporte entre ambas regiones homogéneas. La deducción del modelo se basa en los desarrollos presentados en la Parte I de este trabajo, por consiguiente se retomarán varias de las ecuaciones obtenidas con anterioridad, extendiendo su aplicabilidad a esta región de acuerdo a restricciones de longitudes características adicionales.

4.1. Modelo de no-equilibrio local mecánico

A diferencia del caso en la Parte I, el análisis considera el flujo disperso de dos fases fluidas inmiscibles a través de un sistema como el que se muestra en la Figura 4.1. El flujo disperso de la fase fluida continua- β y la fase dispersa- γ en la inter-región está sujeto a las mismas suposiciones establecidas en la Parte I, recordando se listan a continuación

- Las fases fluidas se consideran incompresibles y Newtonianas.
- La matriz porosa se supone rígida, homogénea, inerte e impermeable.
- La fase- β está en contacto sólo con el sólido. La fase- γ , se considera una emulsión estable

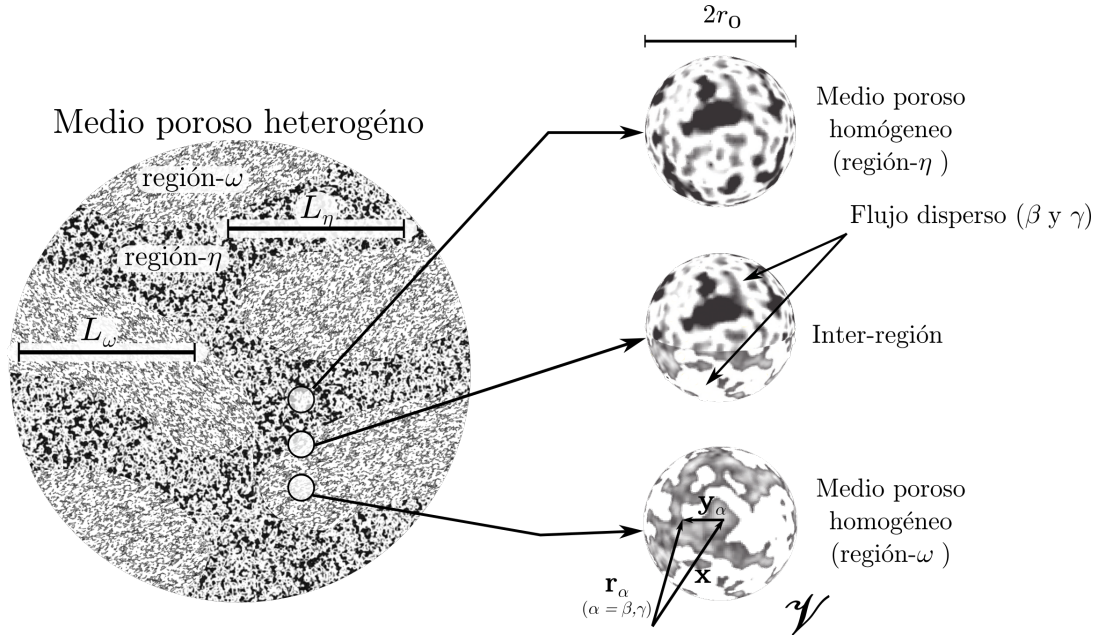


Figura 4.1. Sistema del flujo disperso que muestra el volumen promediado en las regiones homogéneas e inter-región.

en contacto sólo con la fase- β . Por consiguiente, no se considera la existencia de una línea de contacto entre las dos fases fluidas y la fase sólida.

- Los efectos inerciales se consideran despreciables y el flujo se considera estacionario.
- Las propiedades físicas, densidad y viscosidad, son constantes dentro del dominio de promediado.
- La dinámica del tamaño y la forma de la fase dispersa se consideran despreciables y no se considera coalescencia de las gotas que la conforman.
- El gradiente de la tensión superficial, $\nabla_s \sigma$ se considera despreciable, bajo la suposición que las gotas de la fase dispersa son esferas no deformables.

Siguiendo el desarrollo del Capítulo 2, mediante la aplicación sistemática del método del promedio volumétrico, se obtienen las ecuaciones gobernantes promedio para el flujo disperso, Ecuaciones (2.16) y (2.22). Así, retomando estas expresiones, se tienen las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento para las fases β y γ , respectivamente

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle = 0, \quad (4.1a)$$

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle = 0. \quad (4.1b)$$

$$\mathbf{0} = -\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} + \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \mu_\beta \nabla \cdot \left[\frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_\beta(\mathbf{x})} \mathbf{n}_\beta \left(\mathbf{v}_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} - \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \right) dA \right] \\ + \frac{1}{V_\beta(\mathbf{x})} \int_{\mathcal{A}_\beta(\mathbf{x})} \mathbf{n}_\beta \cdot \left[-\mathbf{l} \left(p_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} - \langle p_\beta \rangle^\beta \right) + \mu_\beta \nabla \left(\mathbf{v}_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} - \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \right) \right] dA \quad (4.2a)$$

$$\mathbf{0} = -\nabla \langle p_\gamma \rangle^\gamma + \rho_\gamma \mathbf{g} + \mu_\gamma \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma + \varepsilon_\gamma^{-1}(\mathbf{x}) \mu_\gamma \nabla \cdot \left[\frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\gamma\beta} \left(\mathbf{v}_\gamma|_{\mathbf{r}_\gamma} - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) dA \right] \\ + \frac{1}{V_\gamma(\mathbf{x})} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\gamma\beta} \cdot \left[-\mathbf{l} \left(p_\gamma|_{\mathbf{r}_\gamma} - \langle p_\gamma \rangle^\gamma \right) + \mu_\gamma \nabla \left(\mathbf{v}_\gamma|_{\mathbf{r}_\gamma} - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) \right] dA \quad (4.2b)$$

Las ecuaciones anteriores representan el modelo no cerrado para el flujo disperso en medios porosos, en el cual no se han impuesto ninguna restricción de longitudes características y está sujeto solo a las suposiciones establecidas inicialmente. Por lo tanto, aparte del seno de las regiones porosas, también son válidas en la zona delgada de transición denominada *inter-región*, es decir se puede aplicar para caracterizar el transporte disperso en todo el sistema similar al ilustrado en la Figura 4.1. Las ecuaciones gobernantes, Ecuaciones (4.1) y (4.2), se denominan como *Ecuaciones de Transporte Generalizadas* (GTE por sus siglas en inglés, Generalized Transport Equation). En estas ecuaciones, se debe tener en cuenta que las cantidades promedio, intrínsecas y superficiales de la velocidad y presión, están evaluadas en la posición del centroide, \mathbf{x} , mientras que las respectivas variables puntuales son localizadas por el vector de posición de la fase- α , \mathbf{r}_α ($\alpha = \beta, \gamma$). De esta forma, estas variables se definen dentro de un dominio de promediado que puede incluir la zona de cambios de la inter-región, como se representa en la Figura 4.1. De lo anterior, se tiene que la fracción volumétrica, $\varepsilon_\alpha(\mathbf{x}) = \frac{V_\alpha(\mathbf{x})}{V}$ $\alpha = \beta, \gamma$ (y la porosidad: $\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma$) depende de la localización de esta región de promediado, la cual en las regiones homogéneas se espera que se reduzca a

$$\varepsilon_\alpha(\mathbf{x}) = \begin{cases} \varepsilon_{\alpha\eta}, & \text{en la región homogénea } \eta \\ \varepsilon_{\alpha\omega}, & \text{en la región homogénea } \omega \end{cases} \quad \text{para la fase-}\alpha = \beta, \gamma \quad (4.3)$$

El modelo expresado por la Ecuación (4.2), es más complicado que las ecuaciones gobernantes puntuales de las que se derivan, debido a que, por un lado no conlleva ninguna simplificación y por otro, estas ecuaciones se expresan en ambas variables: cantidades promedio y puntuales de la velocidad y presión de ambas fases. Cabe mencionar que en estas expresiones, los primeros tres términos diferenciales representan formas promedio análogas a las ecuaciones de Stokes a la microescala de las que se derivan, es decir las contribuciones promedio superficiales, volumétricas y viscosas, respectivamente. El resto de los términos integrales son el resultado del proceso de promediado.

4.1.1. Observaciones del modelo

Respecto a las GTE, del modelo no cerrado para el análisis en la inter-región del proceso de flujo disperso se pueden hacer los siguientes comentarios:

- Las Ecuaciones (4.1) y (4.2), representan los balances de masa y cantidad de movimiento, respectivamente, para las fases continua- β y dispersa- γ . En el mismo sentido que el modelo escalado obtenido en el Capítulo 2, se puede referir a estas ecuaciones como el Modelo de *no-equilibrio local mecánico*, en vista de la deducción posterior de un modelo bajo esta suposición. Este modelo para el flujo disperso es válido para todo el sistema constituido por dos regiones homogéneas y la frontera que los separa, es *no-local* por que depende de las velocidades y presiones puntuales dentro de toda la región de promediado. Estas ecuaciones no están cerradas, ya que aún no se han introducido las definiciones pertinentes de los coeficientes efectivos en términos de variables de cerradura y los problemas de valores la frontera asociados, de acuerdo al proceso cerradura que plantea usualmente el método del promedio volumétrico.
- Respecto a cada término en las expresiones para el balance de cantidad de movimiento del modelo de no-equilibrio, dadas por la Ecuación (4.2), el primer término viscoso en ambas ecuaciones se ha referido usualmente como la *corrección de Brinkman*, el cual se incluye regularmente en los análisis de flujo en la frontera cercana entre regiones homogéneas. Por otro lado, el segundo término viscoso se puede descomponer para definir la denominada *segunda corrección de Brinkman* (propuesta para el análisis en la frontera medio poroso-fluido por Ochoa-Tapia y Whitaker 1995a, al ser del mismo orden de

magnitud que la corrección de Brinkman) y el gradiente de una integral superficial de las velocidades entre las interfaces. En el caso de un sola fase fluida, este gradiente se descarta al aplicar la condición de no deslizamiento en la interfase sólido-fluido. Sin embargo, en el caso que compete al flujo disperso, esta misma condición aplica sólo a la expresión para la fase continua en esta misma interfase, mientras entre los fluidos continuo-disperso, se aplica la condición de continuidad de la velocidad, que no permite descartar este gradiente de la integral de superficie en ambas expresiones. Se puede referir a este segundo término viscoso como una segunda corrección de Brinkman *modificada*, que incluye la influencia de la fase dispersa sobre la fase continua dentro la inter-región.

- Para los últimos términos integrales en las Ecuaciones (4.2), de acuerdo con el desarrollo presentado en el Capítulo 2, se procedería a continuación con la deducción del problema de cerradura asociado que permitan, primeramente, expresar estas integrales en términos de las desviaciones de la presión y velocidad usando la descomposición espacial (*i.e.*, $\psi_\alpha = \tilde{\psi}_\alpha + \langle \psi_\alpha \rangle^\alpha$, $\psi = p, \mathbf{v}$, $\alpha = \beta, \gamma$), determinando posteriormente la solución formal del problema de cerradura, y finalmente definir los coeficientes de medio efectivo en términos de integrales de variables de cerradura. Con base en análisis de transferencia de cantidad de movimiento entre un medio poroso y un fluido (Valdés-Parada *y col.*, 2007a, 2009b), se puede esperar que el proceso de cerradura involucraría la definición de una serie de coeficientes efectivos similares a los presentados en el modelo cerrado para el seno del medio poroso obtenido en el Capítulo 2, Ecuaciones (2.32) y (2.34). Estos coeficientes efectivos de transporte serían dependientes de la posición (característica de un modelo ODA) y se podrían calcular de la solución de sus respectivos problemas de cerradura en dominios periódicos representativos de la inter-región de un tamaño $2r_0$, que se localizarían en diferentes puntos a lo largo de la inter-región. No obstante, el método de cerradura para la inter-región involucraría imponer restricciones de longitudes características más severas a las establecidas para la región homogénea.

De forma análoga al análisis en el seno del medio poroso del Capítulo 2, es posible deducir a partir de estas ecuaciones el modelo para el flujo disperso bajo la suposición del *equilibrio local mecánico* que a su vez sea válido para describir este transporte en la zona de transición entre dos regiones homogéneas, como se muestra en la Fig. 4.1. La determinación de las restricciones

y las suposiciones de escala que involucran la viabilidad de aplicar esta hipótesis de equilibrio para este tipo de sistemas, se presenta a continuación.

4.2. Modelo de equilibrio local mecánico

El objetivo en esta sección es desarrollar el *modelo de equilibrio local mecánico* para el flujo disperso de fases fluidas inmiscibles que sea válido en *todos lados* del sistema mostrado en la Figura 4.1. Para ello, se extenderá el procedimiento presentado en el Capítulo 3, referente a la deducción del modelo de equilibrio en la región homogénea. De acuerdo con lo presentado en capítulos anteriores, de las Ecuaciones (4.1) y (4.2) para cada fase fluida, se puede obtener un modelo en términos de una sola velocidad y presión promedio de equilibrio, el cual es suficiente para describir este tipo de flujo multifásico en la zona de la inter-región. De esta forma, retomando las definiciones del cantidades promedio de equilibrio se tiene (Ecuación 3.3, Capítulo 3),

$$\varepsilon(\mathbf{x}) \langle p \rangle = \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \langle p_\beta \rangle^\beta + \varepsilon_\gamma(\mathbf{x}) \langle p_\gamma \rangle^\gamma = \langle p_\beta \rangle + \langle p_\gamma \rangle \quad (4.4a)$$

$$\varepsilon(\mathbf{x}) \langle \mathbf{v} \rangle = \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \varepsilon_\gamma(\mathbf{x}) \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma = \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle \quad (4.4b)$$

Por otro lado, y con el propósito de identificar las condiciones de equilibrio, las cantidades promedio intrínsecas de cada fase se definen en cantidades promedio de equilibrio y desviaciones espaciales macroscópicas, de la siguiente forma

$$\langle p_\alpha \rangle^\alpha = \langle p \rangle + \hat{p}_\alpha, \quad (4.5a)$$

$$\langle \mathbf{v}_\alpha \rangle^\alpha = \langle \mathbf{v} \rangle + \hat{\mathbf{v}}_\alpha, \quad \alpha = \beta, \gamma \quad (4.5b)$$

La manipulación de las Ecuaciones (4.4) y (4.5) permiten obtener las siguientes relaciones

$$\varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \hat{p}_\beta = -\varepsilon_\gamma(\mathbf{x}) \hat{p}_\gamma = \frac{\varepsilon_\beta(\mathbf{x})\varepsilon_\gamma(\mathbf{x})}{\varepsilon(\mathbf{x})} \left(\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma \right) \quad (4.6a)$$

$$\varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{v}}_\beta = -\varepsilon_\gamma(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{v}}_\gamma = \frac{\varepsilon_\beta(\mathbf{x})\varepsilon_\gamma(\mathbf{x})}{\varepsilon(\mathbf{x})} \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) \quad (4.6b)$$

En las expresiones anteriores se señala que las fracciones volumétricas de cada fase y la porosidad

dependen de la localización del centroide, \mathbf{x} , de la región de promediado dentro de la inter-región. Aplicando las Ecuaciones (4.4), (4.5) y (4.6) en las ecuaciones de continuidad y de cantidad de movimiento del modelo de no-equilibrio (Ecuaciones 4.1 y 4.2, respectivamente) éstas se expresan en términos sólo de cantidades promedio de equilibrio y desviaciones macroscópicas, obteniendo las ecuaciones de transferencia generalizada de equilibrio de continuidad y cantidad de movimiento para el flujo disperso, que son validas para todo el sistema que incluye la frontera entre los medios homogéneos.

4.2.1. Ecuación de continuidad

Sumando ambas ecuaciones de continuidad de cada fase, dadas en la Ecuación (4.1), como lo sugiere la Ecuación (4.4b), se obtiene la ecuación de continuidad en términos de la velocidad promedio de equilibrio,

$$\nabla \cdot (\varepsilon(\mathbf{x})\langle \mathbf{v} \rangle) = 0 \quad (4.7)$$

Este resultado ya se había presentado en la deducción del modelo de equilibrio para la región homogénea del medio poroso, Ecuación (3.4). Sin embargo, a diferencia del sistema homogéneo, en este caso se debe notar que el valor de la porosidad depende de la posición en la zona de la inter-región.

4.2.2. Ecuación de cantidad de movimiento

En el caso de la ecuación de cantidad de movimiento, ésta se obtiene de la sustitución de la descomposición macroscópica, dada en la Ecuación (4.5a), en las Ecuaciones $\varepsilon_\beta \times$ (4.2a) y $\varepsilon_\gamma \times$ (4.2b). Posteriormente, sumando ambos resultados y usando la relación de las desviaciones macroscópicas, Ecuación (4.6), se obtiene, después de un análisis algebraico, el siguiente resultado

$$\mathbf{0} = -\nabla \langle p \rangle + \langle \rho \rangle(\mathbf{x})\mathbf{g} + \langle \mu \rangle(\mathbf{x})\nabla^2 \langle \mathbf{v} \rangle + \mu_\beta [-\mathbf{K}^{e-1}(\mathbf{x})\varepsilon(\mathbf{x})] \cdot \langle \mathbf{v} \rangle + \mathbf{h}^e(\mathbf{x}) + \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) \quad (4.8)$$

donde se introdujeron las definiciones siguientes:

$$\langle \rho \rangle(\mathbf{x}) = S_\beta(\mathbf{x})\rho_\beta + S_\gamma(\mathbf{x})\rho_\gamma \quad (4.9a)$$

$$\langle \mu \rangle(\mathbf{x}) = S_\beta(\mathbf{x})\mu_\beta + S_\gamma(\mathbf{x})\mu_\gamma \quad (4.9b)$$

$$\mu_\beta [-\mathbf{K}^{e-1}(\mathbf{x})\varepsilon(\mathbf{x})] \cdot \langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{V_f(\mathbf{x})} \int_{\mathcal{A}_{\beta\kappa}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\beta\kappa} \cdot \left[-\mathbf{l} \left(p_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} - \langle p \rangle \right) + \mu_\beta \nabla \left(\mathbf{v}_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} - \langle \mathbf{v} \rangle \right) \right] dA \quad (4.9c)$$

$$\mathbf{h}^e(\mathbf{x}) = \frac{1}{V_f(\mathbf{x})} \int_{\mathcal{A}_{\gamma\beta}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\beta\gamma} 2\sigma H dA \quad (4.9d)$$

Además, en estas expresiones se definen el volumen vacío como $V_f(\mathbf{x}) = V_\beta(\mathbf{x}) + V_\gamma(\mathbf{x})$, la porosidad es, $\varepsilon(\mathbf{x}) = V_f(\mathbf{x})/V$ y las saturación de la fase- α como, $S_\alpha(\mathbf{x}) = V_\alpha(\mathbf{x})/V_f$, $\alpha = \beta, \gamma$. De acuerdo con su definición, la saturación depende de la posición y en ambas regiones homogéneas se reduce a

$$S_\alpha(\mathbf{x}) = \begin{cases} S_{\alpha\eta}, & \text{en la región homogénea } \eta \\ S_{\alpha\omega}, & \text{en la región homogénea } \omega \end{cases} \quad \alpha = \beta, \gamma \quad (4.10)$$

El tensor de permeabilidad de equilibrio, $\mathbf{K}^e(\mathbf{x})$, en las expresiones anteriores se define en términos de la diferencia de las variables puntuales, p_β y \mathbf{v}_β con las cantidades promedio de equilibrio, $\langle p \rangle$ y $\langle \mathbf{v} \rangle$. Esta definición del coeficiente efectivo de equilibrio difiere de la definición del tensor de permeabilidad obtenido para el modelo de equilibrio en la región homogénea, Ecuación (3.8c), que se define en términos de variables de cerradura, \tilde{p}_α y $\tilde{\mathbf{v}}_\alpha$, ($\alpha = \beta, \gamma$). Por otro lado, el coeficiente de curvatura de equilibrio, \mathbf{h}^e , se define explícitamente del promediado superficial de la curvatura en la interfase $\beta-\gamma$ y no en términos de variables de cerradura, como se presenta en la Ecuación (3.8d). El término $\Phi(\mathbf{x})$ en la Ecuación (4.8) agrupa los términos viscosos adicionales y todos aquellos que involucran las desviaciones macroscópicas \hat{p}_α y $\hat{\mathbf{v}}_\alpha$, los cuales se pueden expresar como diferencias de los promedios intrínsecos usando las relaciones dadas en la Ecuación (4.6),

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}) = & \varepsilon^{-1} \mu_\beta \nabla \cdot (\nabla \varepsilon \langle \mathbf{v} \rangle) - \varepsilon^{-1} (\mu_\beta - \mu_\gamma) \nabla \varepsilon_\gamma \cdot \nabla \langle \mathbf{v} \rangle + \varepsilon^{-1} (\mu_\beta - \mu_\gamma) \nabla \cdot (\mathbf{u}_{\beta\gamma} \varepsilon \langle \mathbf{v} \rangle) + \\ & S_\beta S_\gamma (\mu_\beta - \mu_\gamma) \nabla^2 \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) + (\mu_\beta - \mu_\gamma) \mathbf{\Gamma} \cdot \nabla \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) + \\ & (\mu_\beta - \mu_\gamma) \Sigma \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde $\mathbf{u}_{\beta\gamma}\langle\mathbf{v}\rangle$, se puede asociar a un término *inercial* resultado de la deducción de un modelo en término de variables de equilibrio, además se han agrupado en $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{x})$ y $\Sigma(\mathbf{x})$, los términos relacionados con los operadores gradiente y Laplacianos de la saturación y fracción volumétrica de cada una de las fases fluidas, de esta forma

$$\mathbf{u}_{\beta\gamma}\langle\mathbf{v}\rangle = \frac{1}{V_f(\mathbf{x})} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \left[\mathbf{v}_{\beta}|_{\mathbf{r}_{\beta}} - \langle\mathbf{v}\rangle \right] dA \quad (4.12a)$$

$$\mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}) = 2 \left\{ S_{\beta}\mu_{\beta}\nabla S_{\gamma} - S_{\gamma}\mu_{\gamma}\nabla S_{\beta} + \varepsilon^{-1} [(\mu_{\beta}S_{\gamma}\nabla\varepsilon_{\beta} - \mu_{\gamma}S_{\beta}\nabla\varepsilon_{\gamma})] \right\} \quad (4.12b)$$

$$\Sigma(\mathbf{x}) = \left\{ S_{\beta}\mu_{\beta}\nabla^2 S_{\gamma} - S_{\gamma}\mu_{\gamma}\nabla^2 S_{\beta} + \varepsilon^{-1} [2(\mu_{\beta}\nabla\varepsilon_{\beta} \cdot \nabla S_{\gamma} - \mu_{\gamma}\nabla\varepsilon_{\gamma} \cdot \nabla S_{\beta}) + (\mu_{\beta}S_{\gamma}\nabla^2\varepsilon_{\beta} - \mu_{\gamma}S_{\beta}\nabla^2\varepsilon_{\gamma})] \right\} \quad (4.12c)$$

En la ecuación de transporte de cantidad de movimiento, conformada por las Ecuaciones (4.8) y (4.11), se incorporaron ambas condiciones en las interfaces: de no deslizamiento en $\beta\text{-}\kappa$ y de continuidad de la velocidad en $\beta\text{-}\gamma$. Por otro lado, en esta ecuación el término viscoso en la Ecuación (4.8) es la *corrección de Brinkman* de la ecuación de equilibrio, término que se incluye usualmente en el análisis de transportes cercanos a la frontera entre regiones homogéneas, (Ochoa-Tapia y Whitaker, 1995b). Los primeros tres términos en $\mathbf{\Phi}$, que incluyen gradientes de $\langle\mathbf{v}\rangle$, son términos viscosos adicionales que tiene el mismo orden de magnitud que la corrección de Brinkman, por lo tanto se pueden denominar estos términos como *correcciones adicionales de Brinkman*. Un punto importante en estas ecuaciones es, que no se ha involucrado el uso de ninguna restricción de longitudes características y representa sólo otra manera de expresar la GTE deducida en la sección anterior (Ecuación 4.2), pero definida en términos de cantidades promedio de equilibrio, promedios intrínsecos y puntuales (de la fase $-\beta$ y $-\gamma$). Evidentemente este modelo promedio general de equilibrio resulta, inclusive más complicado que el modelo de no equilibrio deducido en la sección anterior, ya que se incluyen diferentes tipos de variables que operan a diferentes niveles de escala. Es importante señalar que en este punto aún no se han desarrollado simplificaciones significativas que se puedan deducir dentro de un proceso de cerradura, como sucede en el caso del modelo deducido para la región homogénea. Además, se desconocen las condiciones que permitan suponer como válida la condición del *equilibrio local*

mecánico, dentro la zona que conforma la inter-región. Como ya se mencionó, no se ha utilizado aún la suposición de equilibrio local mecánico, esto involucraría determinar bajo que condiciones los términos que incluyen la diferencia de velocidades promedio intrínseco en $\Phi \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right)$, se pueden considerar despreciable respecto a las correcciones adicionales de Brinkman y el resto de los términos de la Ecuación (4.8). Con base en la relación obtenida con anterioridad para considerar la validez de la condición de equilibrio local mecánico para el modelo de equilibrio en la región homogénea, dada por la Ecuación (3.10) y deducida en el Apéndice B, se puede esperar una restricción similar en términos de longitudes características para la condición de equilibrio para la inter-región. Como previamente se indica, la Ecuación (4.11) sugiere determinar un estimado de órdenes de magnitud de $\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma$ y compararlas con el término líder (en este caso el correspondiente al término Darcy), para determinar las condiciones requeridas, bajo las cuales la hipótesis del equilibrio local mecánico se pueda considerar válida para *inter-región*. Las deducciones de este estimado se presentan en el Apéndice C, y el análisis resultante determina, que la suposición del equilibrio local mecánico puede considerarse válida si se cumplan cualquiera de las siguientes tres condiciones.

1. La fase continua está en mayor proporción que la fase dispersa, $S_\beta \gg S_\gamma$; $S_\gamma \approx 0$.
2. Las viscosidades de ambas fases son similares, $\mu_\beta \approx \mu_\gamma$.
3. Existan ambas, una disparidad de escala de tal forma que $\left(\frac{\ell}{L}\right) \ll 1$ o $\left(\frac{\ell}{r_0}\right) \ll 1$, y los número capilar y Bond tomen los valores $Ca_{\beta\gamma} \ll 1$ y $Bo_{\beta\gamma} \ll 1$, respectivamente. De forma explícita, esta condición se obtiene del análisis del estimado de órdenes de magnitud de la relación

$$\frac{\langle v_\beta \rangle^\beta - \langle v_\gamma \rangle^\gamma}{\langle v \rangle} = \mathbf{O}(\Lambda) \quad (4.13)$$

cuyo orden de magnitud es

$$\Lambda = (\varepsilon_\gamma Ca_{\beta\gamma}) \left\{ \mathbf{O} \left[\frac{\mu_\beta - \mu_\gamma}{\mu_{\beta\gamma}} \right] \left(\frac{\ell}{L} \right)^2 + \mathbf{O} \left[\frac{S_\beta^{-1} \mu_\beta}{\mu_{\beta\gamma}} (-\mathbf{K}^{e-1} \varepsilon) \right] \ell^2 + \mathbf{O} \left[\frac{S_\gamma^{-1} \mu_\gamma}{\mu_{\beta\gamma}} (-\mathbf{D}_{\beta\gamma} \varepsilon) \right] \ell^2 + \mathbf{O} \left[\frac{\mu_\beta - \mu_\gamma + \varepsilon_\beta^{-1} \mu_\beta}{\mu_{\beta\gamma}} \right] \left(\frac{\ell^2}{r_0 L} \right) + \mathbf{O} \left[\frac{S_\beta^{-1} \mu_\beta}{\mu_{\beta\gamma}} \right] \left(\frac{\ell}{r_0} \right)^2 + \mathbf{O} \left[(S_\beta S_\gamma)^{-1} u_{\beta\gamma} \right] \left(\frac{\ell^2}{L} \right) \right\} \div$$

$$\left\{ 1 + \mathbf{O}(\varepsilon_\gamma B o_{\beta\gamma}) + \mathbf{O}\left[\varepsilon_\gamma C a_{\beta\gamma} \left(\frac{\ell}{r_0}\right)^2\right] + \mathbf{O}\left[\varepsilon_\gamma C a_{\beta\gamma} \left(\frac{\ell^2}{r_0 L}\right)\right] + \mathbf{O}\left[\varepsilon_\gamma C a_{\beta\gamma} \left(\frac{\ell}{L}\right)^2\right] \right\} \quad (4.14)$$

En esta expresión, ℓ representa todas las longitudes características a la microescala y L aquellas asociadas a la macroescala y el número Capilar y Bond multifásicos se definen como

$$C a_{\beta\gamma} = \frac{\mu_{\beta\gamma} \left(\langle v_\beta \rangle^\beta - \langle v_\gamma \rangle^\gamma \right)}{\sigma}, \quad B o_{\beta\gamma} = \frac{\ell^2 (\rho_\beta - \rho_\gamma) g}{\sigma} \quad (4.15)$$

Se deben tener en cuenta que algunas de las restricciones de escala no son tan fáciles satisfacer en la zona de rápidos cambios en las propiedades efectivas, que implica la frontera cercana entre dos regiones homogéneas. Por ejemplo, el valor de saturación de las fases y de las normas de los tensores y vectores efectivos depende de la posición de la región de promedio $2r_0$ y la relación que representa el estimado de órdenes de magnitud $(\mathbf{O})\Lambda$, podría no ser válida para cumplir las restricciones involucradas (ver en Apéndice C) en ciertas posiciones de la inter-región. Esto genera la necesidad de analizar cuando se puede considerar adecuado utilizar el modelo de equilibrio local mecánico en la inter-región. Esta situación se retomará en el Capítulo 5, cuando se comparen los perfiles de velocidad obtenidos con el modelo de ELM, en un símil a predicciones *teóricas*, con aquellos calculados vía *experimentos numéricos* (*i.e.* Simulaciones Numéricas Directas, DNS, *Direct Numerical Simulation*).

Tomando como válida la suposición del equilibrio local mecánico, respecto a la tercera condición listada con anterioridad, es posible descartar los términos asociados con la diferencia de las velocidades intrínsecas: $\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma$, como consecuencia el término Φ sólo incluiría las correcciones adicionales de Brinkman,

$$\Phi(\mathbf{x}) = -\varepsilon^{-1} \mu_\beta \nabla \cdot (\nabla \varepsilon \langle \mathbf{v} \rangle) + \varepsilon^{-1} (\mu_\beta - \mu_\gamma) \nabla \varepsilon_\gamma \cdot \nabla \langle \mathbf{v} \rangle + \varepsilon^{-1} (\mu_\beta - \mu_\gamma) \nabla \cdot (\mathbf{u}_{\beta\gamma} \varepsilon \langle \mathbf{v} \rangle) \quad (4.16)$$

De acuerdo con lo anterior, finalmente las Ecuaciones (4.8) y (4.16) conforman ambas, la Ecuación de transporte cantidad de movimiento, que junto con la Ecuación de continuidad dada por la Ecuación (4.7), representan el modelo (desde un enfoque un sólo dominio) de equilibrio local mecánico o modelo ODA de ELM. Estas ecuaciones son válidas en todo el sistema y sólo están sujetas las condiciones validan el equilibrio local mecánico. Así, el modelo ODA de

ELM, permite describir el proceso de flujo disperso de dos fases fluidas inmiscibles para la zona cercana a la frontera entre dos regiones homogéneas. Cabe señalar que el modelo deducido en esta capítulo, bajo el principio del equilibrio local mecánico, representan un modelo más general al obtenido en el Capítulo 3 para este tipo de flujo, deducido específicamente para la región porosa homogénea.

4.3. Observaciones

El modelo ODA de ELM obtenido hasta este punto, y expresado por la Ecuaciones (4.8) (Balance de cantidad de movimiento) y (4.7) (Balance de masa), se le pueden hacer los siguientes observaciones:

- El modelo de equilibrio para la región homogénea se puede obtener a partir del modelo de un sólo domino deducido en la Sección 4.2. Si se aplican la restricción de longitudes características (Whitaker, 1999): $\ell \ll r_0 \ll L$, que es válida para la región homogénea, los términos viscosos que involucran gradientes de las fracciones volumétricas (términos de las correcciones adicionales de Brinkman) son iguales a cero o son despreciables comparados con la primera corrección de Brinkman, es decir

$$-\varepsilon^{-1} \mu_\beta \nabla \cdot (\nabla \varepsilon \langle \mathbf{v} \rangle) = \mathbf{0}, \quad \varepsilon^{-1} (\mu_\beta - \mu_\gamma) \nabla \varepsilon_\gamma \cdot \nabla \langle \mathbf{v} \rangle = \mathbf{0}, \quad \text{en la región homogénea } -i$$

$$\varepsilon^{-1} (\mu_\beta - \mu_\gamma) \nabla \cdot (\mathbf{u}_{\beta\gamma} \varepsilon \langle \mathbf{v} \rangle) \ll \langle \mu \rangle \langle \mathbf{v} \rangle, \quad i = \eta, \omega \quad (4.17)$$

Bajo esta restricción los coeficientes efectivos \mathbf{K}^e y \mathbf{h}^e son independientes respecto a la posición de la región de promediado, obteniendo así el modelo de ELM deducido en Capítulo 3 (Ecuación 3.11). Lo anterior indica que el tensor y vector presentes en el modelo de ODA de ELM tomen las siguientes formas dentro de los límites de las regiones homogéneas (Ver Figura 4.1)

$$\mu_\beta [-\mathbf{K}^{e-1}(\mathbf{x}) \varepsilon(\mathbf{x})] \cdot \langle \mathbf{v} \rangle = \begin{cases} \mu_\beta (-\mathbf{K}_\eta^{e-1} \varepsilon_\eta) \cdot \langle \mathbf{v} \rangle_\eta, & \text{en la región homogénea } \eta \\ \mu_\beta (-\mathbf{K}_\omega^{e-1} \varepsilon_\omega) \cdot \langle \mathbf{v} \rangle_\omega, & \text{en la región homogénea } \omega \end{cases} \quad (4.18a)$$

$$\mathbf{h}^e = \begin{cases} \mathbf{h}_\eta^e, & \text{en la región homogénea } \eta \\ \mathbf{h}_\omega^e, & \text{en la región homogénea } \omega \end{cases} \quad (4.18b)$$

donde \mathbf{K}_i^e y \mathbf{h}_i^e $i = \eta, \omega$, representan el tensor de permeabilidad de equilibrio y de curvatura de equilibrio en la región homogénea- i , respectivamente. Se observa que las predicciones de este tensor se pueden obtener bajo el esquema de cerradura desarrollado en el Apéndice A, si se sustituyen las descomposiciones espacial: $p_\beta = \tilde{p}_\beta + \langle p \rangle$ y $\mathbf{v}_\beta = \tilde{\mathbf{v}}_\beta + \langle \mathbf{v} \rangle$, en la Ecuación (4.9c), se obtiene

$$\mu_\beta (-\mathbf{K}^{e-1} \varepsilon) \cdot \langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{V_f} \int_{\mathcal{A}_{\beta\kappa}} \mathbf{n}_{\beta\kappa} \cdot [-\mathbf{l}\tilde{p}_\beta + \mu_\beta \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta] dA \quad (4.19)$$

Finalmente, este modelo ODA de ELM, en el caso donde $Ca \ll 1$ y $Bo \ll 1$, se puede reducir a la ley de Darcy con la corrección de Brinkman para las regiones homogéneas dada por la Ecuación (3.15).

- El caso límite del modelo ODA de ELM corresponde cuando la fase- β está en mayor proporción respecto que la fase- γ , (*i.e.* $S_\beta \gg S_\gamma$). Como ya se mencionó, bajo esta condición el principio de equilibrio local mecánico es válido. En tal caso, se pueden aplicar las siguientes suposiciones:

1. La porosidad es cercana al valor de la fracción volumétrica de la fase- β , $\varepsilon \approx \varepsilon_\beta$ y $\varepsilon_\gamma \approx 0$. Esto permite, inicialmente, eliminar el término que incluye el gradiente de ε_γ en Φ .
2. Con base en el punto uno y analizando la definición de la velocidad y presión de equilibrio, Ecuación (4.4), este caso límite permite considerar que $\langle \mathbf{v} \rangle \approx \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta$ y $\langle p \rangle \approx \langle p_\beta \rangle^\beta$.
3. Así mismo, para la relación de densidades y viscosidades dadas en las Ecuaciones (4.9a) y (4.9b), estas relaciones se reducen a $\langle \rho \rangle \approx \rho_\beta$ y $\langle \mu \rangle \approx \mu_\beta$, respectivamente.
4. Por otro lado, usando las aproximaciones de los puntos anteriores, la Ecuación (4.9c) se puede reescribir de la siguiente forma,

$$\mu_\beta \left[-\mathbf{K}_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \right] \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta = \frac{1}{V_\beta(\mathbf{x})} \int_{\mathcal{A}_{\beta\kappa}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\beta\kappa} \cdot \left[-\mathbf{I} \left(p_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} - \langle p_\beta \rangle^\beta \right) + \mu_\beta \nabla \left(\mathbf{v}_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} - \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \right) \right] dA \quad (4.20)$$

donde \mathbf{K}_β para este caso, representa el tensor de permeabilidad de la fase continua y el volumen de los poros estaría ocupado por la fase continua- β , y por lo tanto $V_f \approx V_\beta$.

5. Al considerar el volumen ocupado por la fase dispersa- γ despreciable respecto al volumen de la fase- β , la superficie entre ambas fases será también pequeña comparada con la superficie entre la fase- β y el sólido- κ , por lo tanto $\mathcal{A}_{\beta\gamma} \ll \mathcal{A}_{\beta\kappa}$, esta afirmación permite examinar las Ecuaciones (4.9c) y (4.9d), que definen los coeficientes de permeabilidad de equilibrio y de curvatura de equilibrio respectivamente, y considerar como válida la siguiente desigualdad

$$\mathbf{h}^e(\mathbf{x}) \ll \mu_\beta \left[-\mathbf{K}_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \right] \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \quad (4.21)$$

6. Usando el mismo argumento para despreciar $\mathbf{h}^e(\mathbf{x})$, el último término en Φ que incluye el vector $\mathbf{u}_{\beta\gamma}$ también se puede descartar en la Ecuación (4.8) del transporte de cantidad de movimiento generalizada.

Con base en lo anterior, las Ecuaciones (4.7) y (4.8) del modelo ODA de equilibrio se pueden reinterpretar para el caso límite donde el flujo disperso tiende al flujo de una sola fase fluida, y escribirse como sigue

$$\nabla \cdot \left(\varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \right) = 0 \quad (4.22a)$$

$$\mathbf{0} = -\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} + \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \mu_\beta \left[-\mathbf{K}_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \right] \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \mu_\beta \nabla \cdot \left(\nabla \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \right) \quad (4.22b)$$

Este modelo de un sólo dominio concuerda con la deducción para el estudio del flujo entre

un medio poroso y fluido, propuesto inicialmente por Ochoa-Tapia y Whitaker (1995b) y desarrollado posteriormente en los trabajos de Goyeau *y col.* (2003); Valdés-Parada *y col.* (2007a, 2009b, 2013). El término $\mu_\beta [-\mathbf{K}_\beta^{-1}(\mathbf{x})\varepsilon_\beta(\mathbf{x})] \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta$, se le asoció originalmente a un vector de esfuerzos, $\mu_\beta \Phi_\beta$ (Ochoa-Tapia y Whitaker, 1995b). Como lo establece Valdés-Parada *y col.* (2007a, 2009b), para cerrar la GTE de la Ecuación (4.22), el tensor de permeabilidad $\mathbf{K}_\beta^{-1}(\mathbf{x})$ se puede calcular resolviendo problemas de cerradura asociados en celdas periódicas que capturen los cambios microestructurales presentes en la inter-región. El esquema de cerradura, sin embargo, involucra imponer restricciones del tipo: $\frac{r_0}{L_v} < 1; \frac{r_0}{L_{v1}}; \frac{\ell_\beta^2}{r_0 L} \ll 1$. Con el objetivo de mantener la generalidad del modelo obtenido, la cerradura del modelo ODA para el flujo de una sola fase, sin restricciones de longitudes características y por lo tanto válido para todo el sistema que representa la Ecuación (4.22) requiere de la predicción de $\mu_\beta [-\mathbf{K}_\beta^{-1}(\mathbf{x})\varepsilon_\beta(\mathbf{x})] \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta$, establecida por la Ecuación (4.20). Esta expresión, definida en términos de la diferencia de cantidades puntuales y promedio, sugiere que el cálculo del tensor de esfuerzos se puede obtener de la solución directa de la ecuaciones puntuales que describen el flujo de un sola fase fluida en un medio poroso (ver Ec. 4.1 Whitaker, 1999), y un dominio de solución lo suficientemente representativo de la inter-región.

- Desde el punto de vista fenomenológico, si se considera válida la restricción bajo la cual el número capilar, $Ca \ll 1$, para el modelo ODA de ELM, el coeficiente de curvatura es despreciable respecto al término Darcy dentro de la inter-región y de esa forma

$$\mathbf{h}^e(\mathbf{x}) \ll \mu_\beta [-\mathbf{K}^{e-1}(\mathbf{x})\varepsilon(\mathbf{x})] \cdot \langle \mathbf{v} \rangle \quad (4.23)$$

Como ya se mencionó en la Sección 2.4, este tipo restricción se ha discutido en los desarrollos del modelo escalado para el flujo inmiscible de dos fases fluidas en un medio poroso homogéneo (Whitaker, 1986b, 1994; Torres, 1987; Lasseux *y col.*, 1996, 2008); donde para la cerradura de este modelo se propusieron coeficientes efectivos relacionados con el salto capilar en los esfuerzos en la interfase β - γ , (Ecuación 2.1d). Bajo la restricción del número $Ca \ll 1$, a nivel de cerradura, los efectos capilares son despreciables. La situación de flujo disperso permite que, a diferencia de los trabajos mencionados arriba, el

coeficiente de curvatura de equilibrio \mathbf{h}^e se puede obtener directamente de la sustitución del salto capilar, ver la Ecuación (4.9d). Observando las definiciones de los coeficientes presentes en la desigualdad de la Ecuación (4.23), esta restricción significaría físicamente que, a la escala de poro, los efectos capilares asociados a la curvaturas de las gotas son despreciables respecto a los efectos viscosos y los de presión. Como ya se mencionó en las observaciones del modelo para la región homogénea, para sustentar esta hipótesis involucraría que los efectos gravitatorios dentro de la región de promediado deben ser despreciables en comparación con los efectos capilares, lo cual implica que el número de Bond: $Bo \ll 1$ a la escala microscópica. Es probable que para la zona de la inter-región (donde existen variaciones drásticas de la microestructura) la desigualdad de la Ecuación (4.23) no pueda satisfacerse debido a que los coeficientes dependen de la localización de la región de promediado. Otra manera de verificar con mayor rigurosidad si esta restricción se puede cumplir en toda la inter-región, es el predicción de funcionalidad espacial de tensor y vector presentes en la Ecuación (4.23) y el cálculo directo de esta desigualdad.

- Por otro lado, se puede observar que, entre las correcciones adicionales de Brinkman, presentes en el término Φ de la Ecuación (4.15), si las viscosidades de los fluidos son similares, $\mu_\beta \approx \mu_\gamma$ (una de las condiciones para suponer válido el principio de equilibrio local mecánico) se pueden considerar despreciables los términos que involucran la relación $(\mu_\beta - \mu_\gamma)$. En el caso en que esta condición no se cumpla, aún el último término en Φ se puede despreciar al suponer que se cumple la siguiente desigualdad

$$\varepsilon^{-1}(\mathbf{x}) (\mu_\beta - \mu_\gamma) \nabla \cdot (\mathbf{u}_{\beta\gamma}(\mathbf{x}) \varepsilon(\mathbf{x}) \langle \mathbf{v} \rangle) \ll \mu_\beta [-\mathbf{K}^{e-1}(\mathbf{x}) \varepsilon(\mathbf{x})] \cdot \langle \mathbf{v} \rangle \quad (4.24)$$

Al analizar los estimados de órdenes de magnitud de la expresión anterior se puede determinar que el lado izquierdo es del orden: $\mathbf{O} \left[(\mu_\beta - \mu_\gamma) \frac{\langle v \rangle}{L\ell} \right]$ y el lado derecho de: $\mathbf{O} \left[\mu_\beta \varepsilon \frac{\langle v \rangle}{\ell^2} \right]$. Detalles de estos estimados se presentan en el Apéndice C. Al expresar la Ecuación (4.24) conforme a estos estimados se tiene la siguiente desigualdad

$$\mathbf{O} \left[\frac{\mu_\beta - \mu_\gamma}{\varepsilon \mu_\beta} \left(\frac{\ell}{L} \right) \right] \ll 1 \quad (4.25)$$

El estimado de la relación de viscosidades se puede tomar con el orden, $\mathbf{O}(1)$, así la relación de longitudes características es: $\frac{\ell}{L} \ll 1$. Esta restricción de longitudes características es congruente dentro de las condiciones necesarias para establecer el principio de equilibrio local mecánico. Bajo estas circunstancias, es justificable considerar este término despreciable, y la ecuación de cantidad de movimiento del modelo ODA bajo el ELM, (4.8), se simplifica a

$$\mathbf{0} = -\nabla \langle p \rangle + \langle \rho \rangle(\mathbf{x})\mathbf{g} + \langle \mu \rangle(\mathbf{x})\nabla^2 \langle \mathbf{v} \rangle + \mu_\beta [-\mathbf{K}^{e-1}(\mathbf{x})\varepsilon(\mathbf{x})] \cdot \langle \mathbf{v} \rangle - \varepsilon^{-1}(\mathbf{x})\mu_\beta \nabla \cdot (\nabla \varepsilon(\mathbf{x}) \langle \mathbf{v} \rangle) + \varepsilon^{-1}(\mathbf{x})(\mu_\beta - \mu_\gamma) \nabla \varepsilon_\gamma \cdot \nabla \langle \mathbf{v} \rangle, \quad (Ca \ll 1 \text{ y } Bo \ll 1) \quad (4.26)$$

Esta expresión tiene una forma similar al modelo desarrollado para el flujo de un sola fase (Ochoa-Tapia y Whitaker, 1995b; Goyeau *y col.*, 2003; Valdés-Parada *y col.*, 2007a, 2009b, 2013), donde el último término se puede asignar como una tercera corrección de Brinkamn relacionada con el carácter del flujo disperso. Esto debido a que involucra el gradiente de la fracción volumétrica correspondiente a la fase- γ . Sin embargo, se debe tener en cuenta que aún existe una dependencia espacial de los coeficientes efectivos en la desigualdad de la Ecuación (4.24), la cual advierte que estos estimados podrían no cumplirse en ciertas posiciones dentro de la inter-región y por lo tanto esta desigualdad podría no ser válida.

- Se mencionó que el tensor efectivo de permeabilidad de equilibrio, $\mathbf{K}^e(\mathbf{x})$, está asociado a la expresión dada por lo Ecuación (4.9c), la cual se define en términos de la diferencia de cantidades puntuales y promedios de equilibrio. A diferencia del modelo homogéneo, que involucra imponer restricciones de longitudes características durante el proceso de cerradura, como se detalla en el Apéndice A, el modelo obtenido en este capítulo no está sujeto a ninguna restricción de este tipo, y está limitado sólo por la forma de las ecuaciones puntuales originales y las condiciones de frontera que definen el modelo microscópico del flujo disperso. Por consiguiente, la cerradura del modelo de ODA de ELM radica en la determinación de la dependencia espacial del coeficiente efectivo $\mathbf{K}^e(\mathbf{x})$, que capture la transición de una región homogénea a otra. La Ecuación (4.9c), sugiere que el cálculo de estos coeficientes se puede llevar a cabo a partir de la solución directa del modelo microscópico que describe el flujo disperso en una zona representativa de la

inter-región. La propuesta para cerrar el modelo ODA de ELM puede involucrar, por lo tanto, la solución de directa de las ecuaciones puntuales, es decir la DNS.

Se debe recordar que el coeficiente $\mathbf{K}^e(\mathbf{x})$, además de capturar las variaciones de la microestructura del medio poroso, incluye también el efecto de la fase dispersa de este flujo multifásico dentro de la inter-región. Al igual que en el análisis realizado para la región homogénea, se puede proponer nuevamente la relación del tensor efectivo de equilibrio con la permeabilidad intrínseca del medio poroso y un *factor de corrección*, que dependan de su localización en la inter-región de la siguiente forma

$$\mathbf{K}^{e-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{K}_m(\mathbf{x})) \quad (4.27)$$

donde el tensor de permeabilidad intrínseco, $\mathbf{K}(\mathbf{x})$, es el coeficiente en el modelo para el flujo de una sola fase fluida en la inter-región dado por la Ecuación (4.22)¹. La predicción requerirá también de la solución directa de las ecuaciones puntuales de un flujo disperso, donde se debe considerar que la microestructura del sólido del medio poroso en la inter-región sea igual a la del usado para calcular \mathbf{K}^e del flujo disperso. La predicción de ambos coeficientes, $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ y $\mathbf{K}^e(\mathbf{x})$, permitirá calcular $\mathbf{K}_m(\mathbf{x})$, y determinar, de manera particular, los efectos de la fase dispersa en el flujo global de ambas fases fluidas dentro de la zona de transición. Al sustituir la relación de la Ecuación (4.27) en la Ecuación (4.26), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = & -\nabla \langle p \rangle + \langle \rho \rangle(\mathbf{x})\mathbf{g} + \langle \mu \rangle(\mathbf{x})\nabla^2 \langle \mathbf{v} \rangle + \mu_\beta [-\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{x})\varepsilon(\mathbf{x})] \cdot \langle \mathbf{v} \rangle - \varepsilon^{-1}(\mathbf{x})\mu_\beta \nabla \cdot (\nabla \varepsilon(\mathbf{x}) \langle \mathbf{v} \rangle) + \\ & \mu_\beta [-\mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{K}_m(\mathbf{x})\varepsilon(\mathbf{x})] \cdot \langle \mathbf{v} \rangle - \varepsilon^{-1}(\mathbf{x})(\mu_\beta - \mu_\gamma) \nabla \varepsilon_\gamma \cdot \nabla \langle \mathbf{v} \rangle, \quad (Ca \ll 1 \text{ y } Bo \ll 1) \end{aligned} \quad (4.28)$$

En esta ecuación los últimos dos términos capturarán el efecto de la fase dispersa sobre el flujo multifásico global, mientras que los primeros cuatro términos representan la ley de Darcy con correcciones de Brinkman, en una expresión similar a la Ecuación (4.22) para el flujo de una sola fase fluida.

- En los puntos anteriores, se mencionaron una serie de suposiciones y restricciones

¹ En esta ecuación $\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \mathbf{K}_\beta(\mathbf{x})$

adicionales que permiten descartar varios términos en la ecuación de cantidad de movimiento, pese a que varias de las restricciones podrían no ser validas en ciertas posiciones en la inter-región, debido a que existen cambios drásticos en la geometría del medio poroso (*i.e.* porosidad) y transporte del flujo multifásico (*i.e.* coeficiente de medio efectivo). Es necesario determinar la dependencia espacial de los coeficientes de medio efectivo que permita calcular numéricamente las restricciones que se plantean en los puntos anteriores. Una verificación rigurosa de la precisión del modelo ODA de ELM, desarrollado en este capítulo, se podría realizar a partir de la comparación de los perfiles de velocidad promedio de equilibrio obtenidos con la ecuación de transporte generalizada que involucra la Ecuación (4.26), con aquellos que resultan de la solución del modelo que describe el flujo disperso a la escala puntual, mencionada como DNS. La cual también se propone para el cálculo del tensor de esfuerzos. Este tipo de comparación no reemplazaría la necesidad de una comprobación con datos experimentales, similar a la realizada en el Capítulo 3, en particular con la predicción de funcionalidad espacial de los coeficientes de medio efectivos presentes en el modelo ODA de ELM con aquellos obtenidos en laboratorio. Sin embargo la determinación experimental de esta funcionalidad podría resultar extremadamente difícil. No obstante, la comparación con la DNS da un análisis inicial del alcance de las restricciones y suposiciones propuestas en el modelo de equilibrio y validar si se satisfacen en la inter-región.

- Finalmente, se debe señalar que en este capítulo, se desarrolló el modelo de un sólo dominio bajo la condición equilibrio local mecánico para el flujo disperso de dos fases fluidas inmiscibles entre dos regiones homogéneas. El modelo está dado por las Ecuaciones de continuidad (4.7) y cantidad de movimiento (4.8), donde el término Φ , en esta última ecuación sólo se incluyen los términos adicionales de Brinkman. Este modelo no incluye restricciones de longitudes características asociadas generalmente al desarrollo de una problema de cerradura sino sólo aquellas asociadas a las condiciones para validar el equilibrio, y por consiguiente puede aplicarse a diferentes sistemas cercanos a la frontera entre dos regiones homogéneas, de los cuales se pueden proponer los siguientes:
 - *Fluido - medio poroso* (Sistema de Beavers y Joseph 1967). Como ya se ha mencionado, el modelado para el flujo de una sola fase fluida por medio del promedio

volumétrico ha sido desarrollado en los trabajos de Ochoa-Tapia y Whitaker (1995a); Goyeau *y col.* (2003); Valdés-Parada *y col.* (2007a, 2009b, 2013). El modelo de un solo dominio deducido hasta este punto se puede aplicar a esta misma configuración del sistema. En este caso, la predicción de las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos de permeabilidad se determinarán para un flujo más complejo, el cual involucra una fase dispersa dentro de una fase continua.

- *Medio poroso - medio poroso* (Medio poroso heterogéneo). De manera análoga, se puede estudiar el transporte de un flujo disperso en la frontera cercana entre dos regiones porosas, donde existen cambios abruptos en la microestructura. El modelo de un sólo dominio, planteado en este capítulo, sirve como precedente en el análisis global del flujo de una fase dispersa inmisible en una fase continua, o en el flujo donde ambas fases fluidas están en contacto con el sólido. Lo anterior de manera similar al planteamiento de Quintard y Whitaker (1988) para el flujo de dos fases fluidas en sistemas heterogéneos.
- *Medio poroso - fractura - medio poroso* (Medio poroso fracturado, Sahimi 2011). Además, debido a que el modelo de equilibrio no presenta restricciones de longitudes de escala característica y la definición del coeficiente de permeabilidad, Ecuación (4.9c), permite extender su aplicación para analizar este tipo de sistemas complejos. La predicción de las variaciones espaciales del coeficiente de permeabilidad para este tipo de sistemas resulta novedoso, respecto a los modelos de predicciones propuestos tradicionalmente (Ma, 2015), y sirve para un análisis preliminar de la frontera que involucran un canal entre dos regiones homogéneas que se puede extender al estudio general de *medios porosos fracturados*. En la Figura 4.2 se muestra un esquema de las diferentes configuraciones de la inter-región, para la cual el modelo ODA de ELM para el flujo disperso se puede aplicar.

4.4. Resumen

Para finalizar este capítulo, se presentan algunos comentarios de los resultados obtenidos a continuación

- Las ecuaciones gobernantes promedio descriptivas del flujo disperso, Ecuaciones (4.1) y

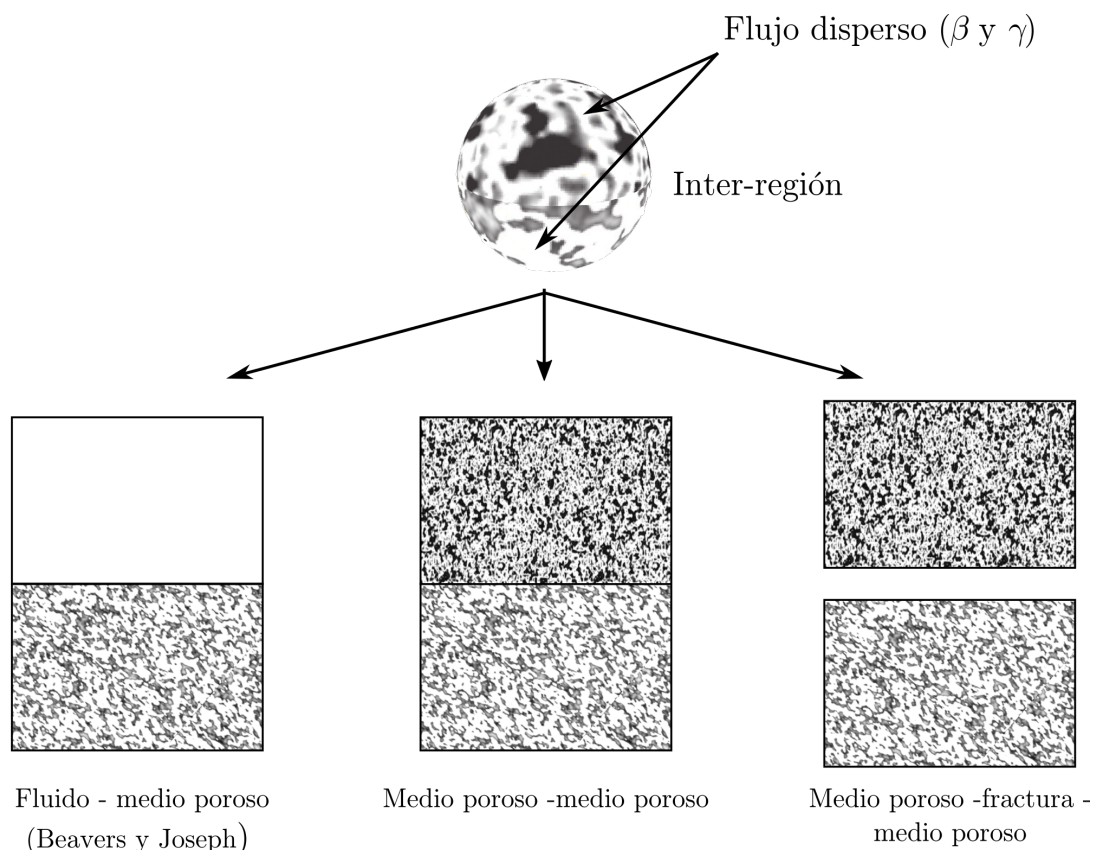


Figura 4.2. Análisis en la inter-región del modelo de equilibrio para el flujo disperso.

(4.2), son denominadas de transporte generalizado porque se pueden considerar como válidas tanto para las regiones homogéneas, como para la zona cercana a sus fronteras (inter-región), debido a que no están sujetas a ninguna restricciones de longitudes características que se asocien a un problema de cerradura. Sin embargo el modelo esta en términos de variables promedio y puntuales de cada fase fluida, el cual resulta más complicado que el modelo microscópico original. Este modelo se puede denominar de no equilibrio, por que hay una ecuación de transporte para ambas fases, continua y dispersa.

- Posteriormente, se obtuvieron las ecuaciones generalizadas de los balances de masa y de cantidad de movimiento para describir el flujo disperso en términos de variables promedio de equilibrio y coeficientes efectivos asociados la solución microscópica (denominado como modelo ODA de ELM). El modelo no involucra restricciones asociadas a un proceso de cerradura por lo que es válido para el análisis de la inter-región. Sin embargo, está sujeto a las condiciones bajo las cuales el principio de *equilibrio local mecánico* se puede considerar válido. Se determinó que, en general, esta suposición es válida si existe: (1) una similitud

de las viscosidades de las fases fluidas, (2) el volumen ocupado por la fase continua sea mayor a de la fase dispersa dentro de los poros, (3) o existen restricciones dadas por relaciones de longitudes de escalas características y de números $Ca_{\beta\gamma}$ y $Bo_{\gamma\beta}$. El proceso de cerradura requiere de la predicción de la dependencia espacial los tensores y vectores efectivos presentes en el modelo ODA de ELM.

- El modelo de equilibrio para el flujo disperso dentro de la región homogénea deducido en el Capítulo 2, se puede derivar del modelo de ODA de ELM obtenido en este capítulo bajo las restricciones de longitudes de escala características: $\ell \ll r_0 \ll L$, para la cual la condición de equilibrio local mecánico también se considera como válida. Asimismo, de este modelo, al tomar como despreciable la presencia de la fase dispersa, es posible deducir las ecuaciones que modelan el flujo de una sola fase fluida entre un medio poroso y un fluido (Ochoa-Tapia y Whitaker, 1995a; Goyeau *y col.*, 2003; Valdés-Parada *y col.*, 2007a, 2009b).
- La definición del tensor de permeabilidad de equilibrio, dependiente de la posición en la inter-región $\mathbf{K}^e(\mathbf{x})$, sugiere que la predicción requiere de la solución directa de las ecuaciones puntuales que describen el proceso del flujo disperso en un dominio representativo de los cambios de la microestructura que se presentan en la inter-región, y de esta forma cerrar el modelo.
- Para la validez del modelo ODA de ELM, se necesita de una comparación con experimentos. En este caso, la misma predicción de los coeficientes efectivos, sugerida en el punto anterior plantea la comparación de los perfiles de velocidad promedio obtenidos con el modelo deducido con aquellos que resultan de resolver directamente las ecuaciones gobernantes puntuales (experimentos teóricos), para corroborar la validez de la condición de equilibrio se satisface dentro de la inter-región.
- En el capítulo siguiente, se presentarán los detalles de la metodología propuesta para cerrar el modelo ODA de ELM, que permite predecir las variaciones espaciales del tensor de permeabilidad de equilibrio para cada tipo de inter-región, que se representan en la Figura 4.2. Además, se analizará la validez del modelo de equilibrio comparando los perfiles de velocidad de equilibrio obtenidos con este modelo con aquellos que resultan de resolver

directamente las ecuaciones del modelo microscópico.

CAPÍTULO 5

PREDICCIÓN DE COEFICIENTES EFECTIVOS Y COMPARACIÓN CON DNS

En esta capítulo se presentan las predicciones de los coeficientes efectivos involucrados en el modelo ODA de ELM para el flujo disperso que fue deducido en el capítulo anterior. La dependencia espacial de los coeficientes se determina mediante la solución del campo de solución directa de las variables puntuales (DNS), en dominios representativos de la región de transición. Una vez determinada la funcionalidad espacial de los coeficientes efectivos, se comparan los perfiles de velocidad predichos de la ecuación de transporte generalizada del modelo ODA de ELM con los determinados a través de la DNS, para los mismos casos de estudio. Esto con el objetivo de evaluar la precisión del modelo ODA de ELM deducido y establecer las condiciones que facilitan la validez de las suposiciones y restricciones que se impusieron en su deducción. Los casos de análisis de la inter-región incluyen *fluido-medio poroso*, *medio poroso - medio poroso* y *medio poroso - fractura - medio poroso*.

5.1. Predicción del tensor de permeabilidad

De acuerdo con el capítulo anterior, el tensor de permeabilidad de equilibrio, $\mathbf{K}^e(\mathbf{x})$, presente en el modelo ODA de ELM, se define implícitamente de la Ecuación (4.9c), de la siguiente forma

$$\mu_\beta [-\mathbf{K}^{e-1}(\mathbf{x})\varepsilon(\mathbf{x})] \cdot \langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{V_f(\mathbf{x})} \int_{\mathcal{A}_{\beta\kappa}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\beta\kappa} \cdot \left[-\mathbf{l} \left(p_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} - \langle p \rangle \right) + \mu_\beta \nabla \left(\mathbf{v}_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} - \langle \mathbf{v} \rangle \right) \right] dA \quad (5.1)$$

En esta expresión, las diferencias entre la velocidad y presión de equilibrio, con las velocidad y presión puntuales de la fase continua sugieren que la predicción de las variaciones espaciales de este coeficiente en la inter-región, se pueden obtener de solución del campo de las cantidades puntuales. Esto requiere, por lo tanto, de la simulación directa de las ecuaciones de transporte microscópicas que modelan el flujo disperso en un sistema representativo de la frontera cercana entre dos regiones homogéneas. Al analizar la Ecuación (5.1), se observa que se requiere además del cálculo de las cantidades promedio de equilibrio: $\langle \mathbf{v} \rangle$ y $\langle p \rangle$ y se necesita conocer el valor de la porosidad y la saturación, $\varepsilon(\mathbf{x})$ y $S_\beta(\mathbf{x})$ alrededor de la inter-región. Los valores de estas cantidades, como se mostrará mas adelante, se pueden obtener también de la solución de la DNS cuyo dominio que represente adecuadamente el sistema de estudio, que involucra a su vez la determinación de tamaño de la región de promediado de tamaño $2r_0$ que sea lo *suficientemente grande* para caracterizar adecuadamente la región de rápidos cambios estructurales que es la inter-región.

La DNS consiste en resolver el modelo a la escala microscópica para del flujo disperso de dos fases fluidas inmiscibles que se estableció en la Sección 2.1, y el cual consiste en las siguientes ecuaciones gobernantes

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_\beta = 0, \text{ en la fase-}\beta \quad (5.2a)$$

$$0 = -\nabla p_\beta + \rho_\beta \mathbf{g} + \mu_\beta \nabla^2 \mathbf{v}_\beta, \text{ en la fase-}\beta \quad (5.2b)$$

$$\mathbf{v}_\beta = \mathbf{v}_\gamma, \text{ en la interfase } \beta\text{-}\gamma \quad (5.2c)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot [-p_\beta \mathbf{l} + \mu_\beta (\nabla \mathbf{v}_\beta + \nabla \mathbf{v}_\beta^T)] = \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot [-p_\gamma \mathbf{l} + \mu_\gamma (\nabla \mathbf{v}_\gamma + \nabla \mathbf{v}_\gamma^T)] \\ + 2\sigma H \mathbf{n}_{\beta\gamma}, \text{ en la interfase } \beta\text{-}\gamma \end{aligned} \quad (5.2d)$$

$$\mathbf{v}_\beta = \mathbf{0}, \text{ en la interfase } \beta\text{-}\kappa \quad (5.2e)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_\gamma = 0, \text{ en la fase-}\gamma \quad (5.2f)$$

$$0 = -\nabla p_\gamma + \rho_\gamma \mathbf{g} + \mu_\gamma \nabla^2 \mathbf{v}_\gamma, \text{ en la fase-}\gamma \quad (5.2g)$$

en un dominio, de geometría simple y representativo de las dos regiones homogéneas donde

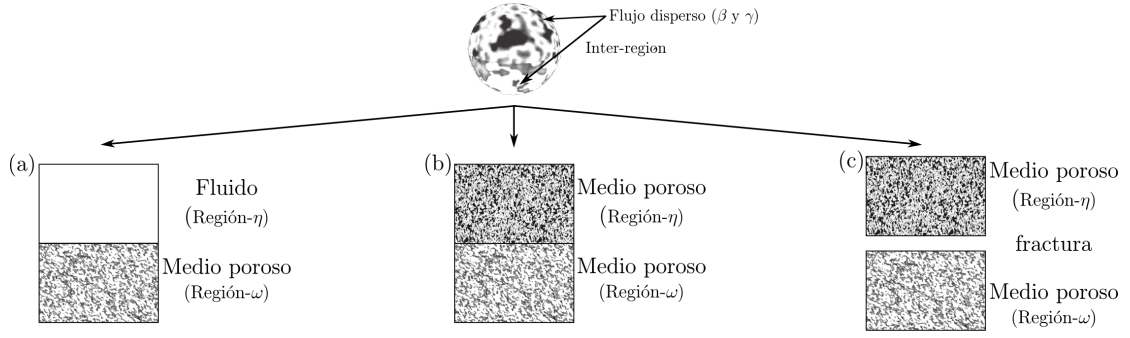
se desarrolla este flujo multifásico. El modelo representativo propuesto para resolver el sistema de ecuaciones anterior se muestra en la Figura 5.1, para tres diferentes tipos de inter-región: (a) *medio poroso-fluido*, (b) *medio poroso-medio poroso* y (c) *medio poroso -fractura- medio poroso*. En esta figura se plantea representar las regiones porosas y la fase dispersa como arreglos isotrópicos de partículas circulares de radios dependientes de la porosidad de la región, ε_i , y su saturación $S_{\gamma i}$ $i = \omega, \eta$. Estas celdas unitarias capturan los rápidos cambios geométricos que se presentan en la inter-región. Las expresiones que definen la geometría del dominio de solución para cada tipo de inter-región se presentan en el Apéndice C.

La altura del dominio para la DNS, se determina de las longitudes $L_\eta = L_\omega$, las cuales se definen de acuerdo a un número finito de celdas unitarias elementales, cuyo tamaño es ℓ_c y puede considerarse de un valor unitario. Por otro lado, el tamaño de la región de promediado (que se representa por las zonas sombreadas en la Figura 5.1) depende de un número determinado de celdas unitarias, N_c , y es igual a $2r_0 = N_c \ell_c$. El procedimiento para determinar el valor de N_c más conveniente para calcular el tensor de permeabilidad de equilibrio se describirá en las secciones siguientes. Cabe mencionar que el estudio se limita a un flujo bidimensional, de acuerdo con los dominios mostrados Figura 5.1. Por consiguiente, en el análisis de la inter-región se asume que las variaciones de la velocidad más importantes ocurren en la dirección y .

Para finalizar, en la solución del sistema de Ecuaciones (5.2) se necesita imponer condiciones en las fronteras superior e inferior del dominio de solución. Los tipos de condiciones en $y = -L_\omega$ y $y = L_\eta$, dependerán del caso particular de los sistemas de dos regiones homogéneas que se muestran en la Figura 5.1, los cuales se analizarán de forma particular a continuación.

5.1.1. Fluido - medio poroso

El dominio de solución para el sistema de dos regiones conformado por un sólo fluido y un medio poroso se representa en la Figura 5.1 (a). Este caso corresponde a una variante multifásica del análisis original realizado por Beavers y Joseph (1967). En este sistema se considera que solo se presenta el flujo disperso dentro de la región del medio poroso mientras que en la región del fluido homogéneo sólo está presente la fase- β . En este caso, el análisis se restringe desde el seno del medio poroso ω , ($y = -L_\omega$) a la pared superior ($y = L_\eta$), de tal forma que se imponen



Representaciones periódicas de la inter-region

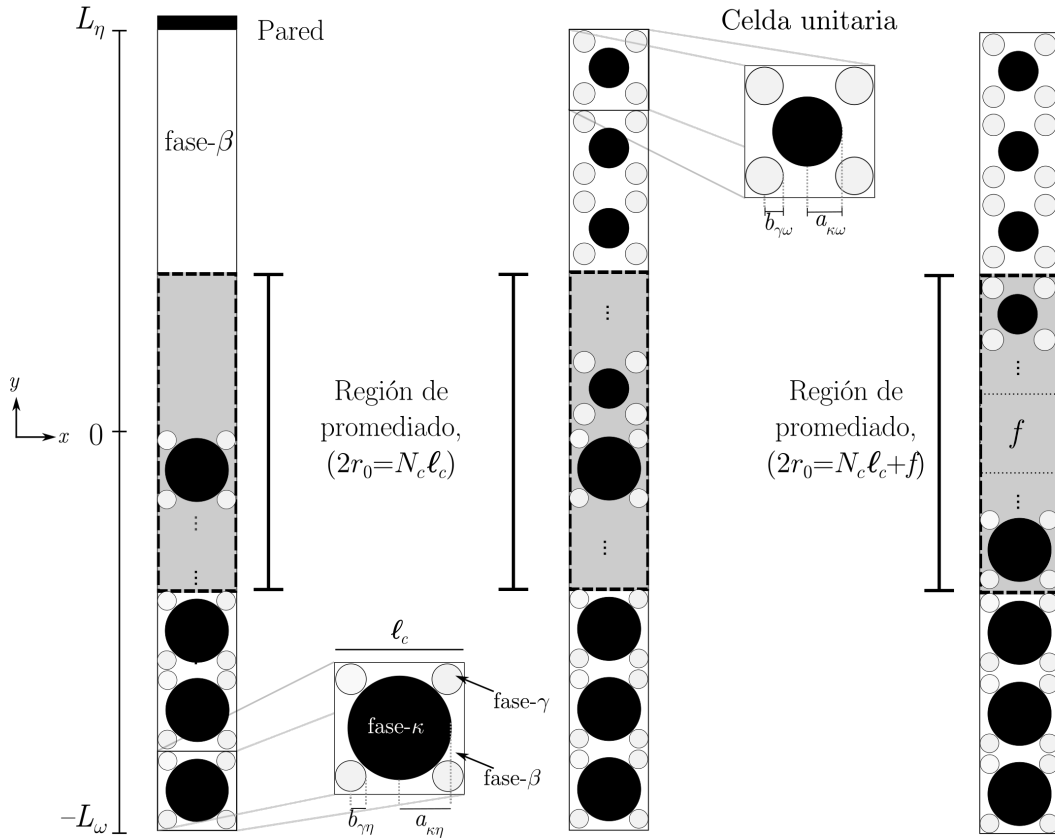


Figura 5.1. Dominio de solución de la DNS representativo de los sistemas: (a) Fluido medio-poroso, (b) Medio poroso - medio poroso y (c) Medio poroso - fractura - medio poroso.

las siguientes condiciones de frontera

$$\mathbf{v}_\beta = \mathbf{0}, \quad \text{en } y = L_\eta, \quad (5.3a)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\nabla \mathbf{v}_\beta) = \mathbf{0}, \quad \text{en } y = -L_\omega, \quad (5.3b)$$

donde \mathbf{n} representa el vector normal unitario dirigido hacia afuera del dominio de solución y se ha tomado como el origen en el eje y donde inicia el fluido y termina el medio poroso. Ver en

la Figura 5.1.

Para la DNS se utiliza un dominio de solución donde $L_\omega = L_\eta = 100\ell_c$, de esta forma se tiene una altura total de $200\ell_c$, con un anchura de ℓ_c . Los cálculos se llevan a cabo usando el software de elemento finito COMSOL Multiphysics [®] Ver. 4.3a, con un refinamiento de elementos de nodos computacionales para asegurar la independencia numérica. Así, el método de solución consiste en resolver numéricamente las Ecuaciones 5.2 para determinar el campo de velocidad en el sistema de la Figura 5.1 (a), en el cual se impone una caída de presión periódica en la dirección x , que es tangente a la superficie que divide ambas regiones porosas. Detalles adicionales del dominio que representa el sistema medio poroso-fluido y un ejemplo del campo de solución de la DNS se presenta en el Apéndice C. La región sombreada en la Figura 5.2 representa la región de promediado de tamaño $2r_0$ cuyo centroide (punto central) se localiza a lo largo de todo el sistema. Específicamente esta región se fija para $2r_0 = N_c\ell_c$ y de anchura ℓ_c (de acuerdo con el dominio de solución de la DNS señalado en el párrafo anterior). Donde N_c representa un número específico de celdas unitarias. De acuerdo a la definición de región de promediado, el dominio de solución para la DNS debería ser de anchura $2r_0$, sin embargo el carácter periódico permite suponer como suficiente la anchura de una celda unitaria, ℓ_c .

El valor de N_c se determina mediante un proceso recursivo, donde se propone un tamaño que debe garantizar un porcentaje de error promedio alrededor de la inter-región aceptable, entre las predicciones de la velocidad promedio obtenidas con el modelo de equilibrio y el valor promediado calculado con la DNS. Si no se cumple, se incrementa gradualmente su valor hasta que el error se reduzca. La expresión de este porcentaje promedio se presentará en los siguientes párrafos, sin embargo se puede adelantar que la comparación entre las velocidades promedio de la DNS y el modelo ODA de ELM muestran que un número de celdas unitarias para la región de promediado igual $N_c = 10$ (*i.e.* $2r_0 = 10\ell_c$) es adecuado para el cálculo del tensor de permeabilidad de equilibrio. Este tamaño de N_c , además garantiza un mínimo de orden de magnitud de separación entre las longitudes características del sistema, de tal manera que se satisfaga la restricción $r_0 \ll L_\eta$ y L_ω , la cual pertenece a una de las condiciones para considerar como válida la hipótesis del equilibrio local mecánico.

Con la solución de la DNS, y una vez determinado el tamaño de la región de promediado, se calculan numéricamente las variaciones espaciales de la porosidad y saturación, de acuerdo

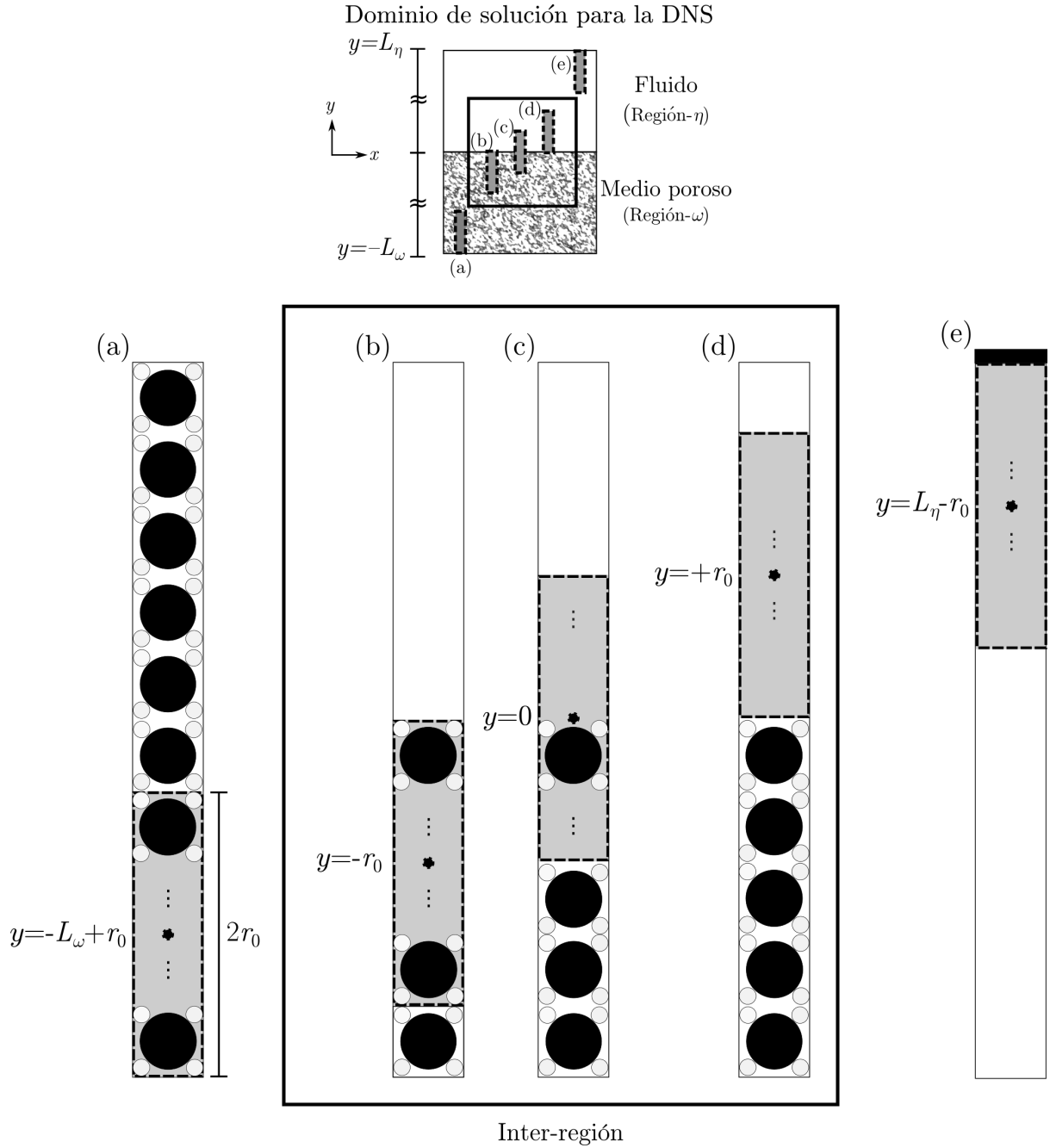


Figura 5.2. Región de promediado localizada en diferentes posiciones en la inter-región. (a) En el medio poroso; (b) - (d) Inter-región; (e) Fluido cercano a la pared.

a la definición del promedio intrínseco y superficial,

$$\varepsilon = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{V}_f} 1 dV \quad S_\beta = \frac{1}{\varepsilon V} \int_{\mathcal{V}_\beta} 1 dV \quad (5.4)$$

Estas expresiones se evalúan localizando la región de promediado en diferentes puntos alrededor de la frontera entre las regiones ω y η , como se representa en la Figura 5.2 (b)-

(d). Los resultados numéricos para ε presentan un perfil lineal que se ajusta a las siguientes expresiones ($R^2 \geq 0.999$),

$$\varepsilon\left(\frac{y}{2r_0}\right) = \begin{cases} 1, & \text{en la región homogénea } \eta \\ \varepsilon_\omega \left[a_0 + a_1 \left(\frac{y}{2r_0} \right) \right], & \text{en } y/2r_0 \in (-0.5, 0.5), \\ \varepsilon_\omega, & \text{en la región homogénea } \omega \end{cases} \quad (5.5)$$

En la Tabla 5.1, se presentan los valores para a_0 y a_1 , para una serie de valores de ε . En el caso de la saturación, la variación espacial se ajusta a la siguiente expresión polinomial en la inter-región ($R^2 \geq 0.999$),

$$S_\beta\left(\frac{y}{2r_0}\right) = \begin{cases} 1, & \text{en la región homogénea } \eta \text{ (fluido libre)} \\ S_{\beta\omega} \sum_{i=0}^3 a_i \left(\frac{y}{2r_0} \right)^i, & \text{en } y/2r_0 \in (-0.5, 0.5) \\ S_{\beta\omega}, & \text{en la región homogénea } \omega \text{ (medio poroso)} \end{cases} \quad (5.6)$$

donde los parámetros $a_i, i = 0, \dots, 3$ se muestran en la Tabla 5.2 para los valores de saturación usados en el cálculo de los perfiles del tensor de permeabilidad de la Figura 5.3. Los valores mínimos de S_β se ven limitados por el valor de ε_ω debido a la geometría de la celda unitaria seleccionada para representar el flujo disperso, ver detalles en el Apéndice C.

De forma similar, y una vez calculados los cambios espaciales de $\varepsilon(y)$ y $S_\beta(y)$, se usa el campo de velocidad puntual de la solución de la DNS para calcular la velocidad y presión

Tabla 5.1. Parámetros de a_0 y a_1 para el ajuste de ε en la inter-región del sistema: medio poroso - fluido, con $2r_0 = 10\ell_c$.

$\varepsilon_{\beta\omega}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
a_0	5.5	3.0	2.167	1.75	1.5	1.330	1.214	1.125	1.056
a_1	9.0	4.0	2.333	1.50	1.0	0.667	0.429	0.250	0.111

Tabla 5.2. Parámetros para la predicción de S_β en la inter-región del sistema: medio poroso - fluido, con $2r_0 = 10\ell_c$.

ε_ω	$S_{\beta\omega}$	a_0	a_1	a_2	a_3
0.4	0.7	1.304	0.3411	-0.3614	0.3258
	0.9	1.079	0.08825	-0.0936	0.08443
0.8	0.7	1.234	0.4157	-0.09299	0.02061
	0.9	1.061	0.1083	-0.02428	0.005395

de equilibrio, $\langle \mathbf{v} \rangle \cdot \mathbf{e}_x = \langle v \rangle$ y $\langle p \rangle$, evaluando numéricamente la Ecuación 4.4, dentro de la región de promediado y localizando su centroide dentro de la inter-región, como se representa en la Figura 5.2 (b)-(d). Los resultados se aplican posteriormente en la Ecuación (5.1), para calcular el tensor de permeabilidad de equilibrio en su componente $\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{K}^e(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_x = K^e(y)$, en diferentes posiciones dentro de la inter-región, *i.e.*, $y \in (-0.5, +0.5)$, como lo señala la Figura 5.2. Los perfiles de $K^e(y)$ se muestran en la Figura 5.3 para diferentes valores de porosidad, saturación y relación de viscosidades. En este perfil se observa que, al incrementarse la porosidad, el medio poroso ejerce una menor influencia sobre la permeabilidad de equilibrio, por consiguiente aumentan los valores de los perfiles, los cuales se incrementan rápidamente de un valor ligeramente menor a la permeabilidad del seno del medio poroso hasta un valor infinito en la región de un solo fluido. El efecto de la saturación se observa con una mayor proporción al incrementarse la porosidad y se relaciona directamente con el efecto global que tiene la relación de viscosidades sobre la permeabilidad, la cual se analizó en el Capítulo 3, donde se indica que de acuerdo al valor de ν , el flujo puede ser: Darcy ($\nu = 1$), obstaculizado ($\nu < 1$) o facilitado ($\nu > 1$). La Figura 5.3 muestra que la influencia de ν sobre la permeabilidad de equilibrio disminuye al incrementarse la saturación de la fase continua (*i.e.* disminución del volumen de la fase dispersa). Ejemplos de sistemas físicos donde se aplican estos valores de ν corresponden a contaminantes ligeros no acuosos ($\nu > 1$, en procesos remediación de suelos) y petróleos ligeros ($\nu < 0.1$, para extracción mejorada de petróleo) (Mayer y Hassanizadeh, 2013; Al-Besharah *y col.*, 1987). Estos resultados numéricos se ajustan a una ecuación del siguiente tipo ($R^2 \geq 0.999$)

$$\mathbf{K}^{e-1} \left(\frac{y}{2r_0} \right) = \begin{cases} 0, & \text{en la región homogénea } \eta \\ \mathbf{K}_\omega^{e-1} \left(c_0 + \sum_{i=1}^3 c_i \exp \left[- \left(\frac{y}{r_0} - t_0 \right) t_i^{-1} \right] \right), & \text{en } y/2r_0 \in (-0.5, 0.5) \\ \mathbf{K}_\omega^{e-1}, & \text{en la región homogénea } \omega \end{cases} \quad (5.7)$$

El valor de los parámetros de c_i y t_i ($i = 0, \dots, 3$) de la Ecuación (5.7) se presentan en la Tabla 5.3 para los diferentes valores de porosidad, saturación y relación de viscosidad.

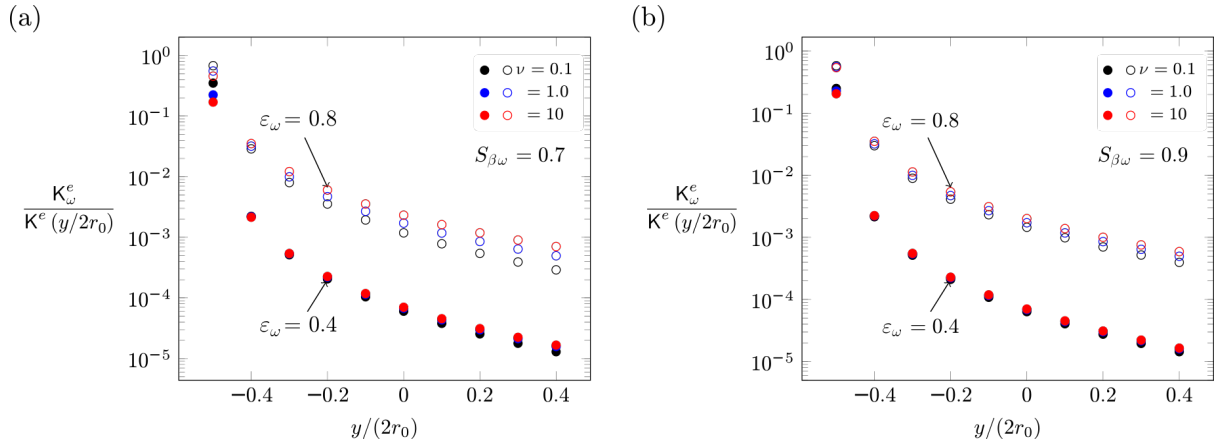


Figura 5.3. Predicción de la variación espacial en la inter-región medio poroso-fluido del tensor de permeabilidad de equilibrio.

Comparación con DNS

Como se mencionó con anterioridad, para validar los valores del coeficiente de permeabilidad de equilibrio calculados en la sección anterior se propone la comparación directa del perfil de velocidad obtenido con la DNS y el predicho mediante el modelo ODA de ELM (Ecuaciones 4.8 y 4.7). El perfil de velocidad promedio de la DNS se obtiene del cálculo numérico dentro de la región de promediado de $\langle v \rangle$, localizando el centroide en todo el sistema, Figura 5.2. En la Figura C.2 (b) se muestra un ejemplo del perfil de velocidad donde el centroide de la región de promediado se localiza en $y = 0$, correspondiente a la inter-región. La comparación sirve además

Tabla 5.3. Parámetros de la Ec. (5.7) para la predicción del coeficiente de permeabilidad de equilibrio del sistema: medio poroso - fluido, con $2r_0 = 10\ell_c$.

ε_{ω}	$S_{\beta\omega}$	ν	c_0	t_0	c_1	t_1	c_2	t_2	c_3	t_3
0.4	0.7	0.1	1.063×10^{-4}	-0.5846	4.601	0.0204	16.53	0.01968	3.251	0.02045
		1	7.761×10^{-5}	-0.5906	3.395	0.0214	10.28	0.02128	1.914	0.02202
		10	1.754×10^{-3}	-0.5154	0.1018	0.9196	0.4152	0.0179	-0.1025	0.9566
	0.9	0.1	9.189×10^{-4}	-0.5327	0.7953	0.7156	-0.795	0.7181	1.313	0.0197
		1	6.86×10^{-5}	-0.6355	5.113	0.0296	-2.189	0.0415	29.25	0.02865
		10	7.911×10^{-5}	-0.5888	8.807	0.02156	1.916	0.02303	1.129	0.02247
0.8	0.7	0.1	2.481×10^{-4}	-0.5283	-0.03509	0.8436	1.717	0.03859	0.04517	0.6573
		1	1.785×10^{-2}	-0.4563	-0.1404	0.9569	0.1265	0.03024	0.1376	0.691
		10	1.017×10^{-2}	-0.4714	-0.1343	0.9201	0.1952	0.0337	0.1408	0.7211
	0.9	0.1	1.643×10^{-3}	-0.5717	2.833	0.03687	4.526	0.02202	6.148	0.001647
		1	1.83×10^{-3}	-0.5683	2.2	0.02285	-0.2337	0.02001	2.936	0.03654
		10	2.921×10^{-2}	-0.5272	-0.2997	0.8561	1.275	0.03003	0.2984	0.6591

para evaluar la precisión del modelo promedio de equilibrio en general, y validar si satisfacen las restricciones y suposiciones impuestas durante la deducción del modelo. El análisis se limita a un flujo completamente desarrollado, estacionario y unidimensional, de esta manera la única componente de la velocidad promedio de equilibrio es la paralela a la horizontal a las condiciones de frontera (*i.e.* en la dirección- x). De acuerdo a esto, el modelo ODA de ELM involucra a la Ecuación (4.26)· \mathbf{e}_x , la cual se expresa como

$$0 = -\frac{d\langle p \rangle}{dx} + \langle \mu \rangle \frac{d^2 \langle v \rangle}{dy^2} - \mu_\beta \mathbf{K}^{e-1}(y) \varepsilon(y) \langle v \rangle + \mu_\beta \varepsilon^{-1}(y) \frac{d^2 \varepsilon(y)}{dy^2} \langle v \rangle + \varepsilon^{-1}(y) \mu_\beta \frac{d\varepsilon(y)}{dy} \frac{d\langle v \rangle}{dy} + \varepsilon^{-1}(y) (\mu_\beta - \mu_\gamma) \frac{d\varepsilon_\gamma(y)}{dy} \frac{d\langle v \rangle}{dy} \quad (Ca \ll 1 \text{ y } Bo \ll 1) \quad (5.8)$$

Aquí se ha supuesto que el componente $\mathbf{K}_{xy}^{e-1} \langle \mathbf{v} \rangle \cdot \mathbf{e}_y \ll \mathbf{K}^{e-1} \langle v \rangle$, el cual es válido bajo la condición de flujo unidireccional propuesto en la solución de la DNS. De igual forma que para la solución de la DNS, por simplicidad el análisis del dominio de solución de la ecuación diferencial se limita desde el seno del medio poroso- ω a la pared superior. Por lo tanto, imponiendo la ley de Darcy y condiciones de no deslizamiento en estas fronteras se tienen

$$\langle v \rangle_\eta = 0, \quad y = L_\eta \quad (5.9a)$$

$$\langle v \rangle_{\omega, \infty} = -\frac{\mathbf{K}_\omega^e}{\varepsilon_\omega \mu_\beta} \frac{d\langle p \rangle_\omega}{dx}, \quad y = -L_\omega \quad (5.9b)$$

Estas son las únicas condiciones de frontera necesarias para resolver el modelo ODA de ELM para el flujo disperso. Sin embargo, es necesario puntualizar que en el enfoque denominado de dos dominios (TDA), que es otra alternativa metodológica al ODA que se menciona en el Capítulo 1, requiere condiciones de frontera adicionales llamadas condiciones de salto. Las cuales son consecuencia de sustituir la inter-región por una superficie divisoria, y que además están en términos de coeficientes efectivos denominados *coeficientes de salto*, los cuales capturan la información esencial contenida en la inter-región. Tanto los coeficientes, como la posición de la superficie divisoria deben determinarse. En los trabajos de Aguilar-Madera *y col.* (2011a); Valdés-Parada *y col.* (2013), se presentó un método sistemático para deducir las condiciones de salto, predecir los coeficientes y localizar la superficie divisoria, específicamente para el caso sistema Beavers y Joseph (1967). El desarrollo del modelo vía la TDA para el flujo disperso

de dos fases fluidas bajo la condición de ELM, está fuera de los objetivos planteados en este trabajo, sin embargo cabe señalar que análisis completo del flujo disperso en la frontera entre dos regiones homogéneas involucrará el desarrollo posterior del modelo del TDA.

Para este tipo de flujo y sistema, es razonable suponer un gradiente de presión constante en todo el dominio que representa el sistema, de tal forma que

$$\frac{d\langle p \rangle}{dx} = \frac{d\langle p \rangle_\eta}{dx} = \frac{d\langle p \rangle_\omega}{dx} = -\frac{\mu_\beta \varepsilon_\omega}{\mathbf{K}_\omega^e} \langle v \rangle_{\omega, \infty} \quad (5.10)$$

De esta forma, Ecuación (5.9), se reescribe como

$$0 = \frac{d^2 \langle v \rangle}{dy^2} + \frac{\varepsilon^{-1}}{\langle \mu \rangle} \left(\mu_\beta \frac{d\varepsilon}{dy} + (\mu_\beta - \mu_\gamma) \frac{d\varepsilon_\gamma}{dy} \right) \langle v \rangle + \frac{\mu_\beta}{\langle \mu \rangle} \left(\varepsilon^{-1} \frac{d^2 \varepsilon}{dy^2} - \varepsilon \mathbf{K}^{e-1} \right) \langle v \rangle + \frac{\mu_\beta \varepsilon_\omega \mathbf{K}_\omega^{e-1}}{\langle \mu \rangle} \langle v \rangle_{\omega, \infty}, \quad \forall y \in (-L_\omega, L_\eta) \quad (5.11)$$

Finalmente, el modelo ODA de ELM consiste en las Ecuaciones (5.11) y (5.9). Debido a la dependencia no trivial de los coeficientes efectivos involucrados en la expresión anterior, (Ecuaciones 5.5 y 5.7, porosidad y permeabilidad efectiva respectivamente), no es posible obtener una solución analítica. Por esta razón, el problema de valores a la frontera se resuelve numéricamente usando el software de elemento finito COMSOL Multiphysics [®](Ver. 4.3a), con un refinamiento de elementos de nodos computacionales para asegurar la independencia numérica. El dominio de solución tiene el mismo tamaño que el propuesto para la DNS ($L_\omega = L_\eta = 100\ell_c$) y se usó la funcionalidad espacial del tensor de permeabilidad que se obtuvo del ajuste de los resultados mostrados en la Figura 5.3. Ejemplos de los perfiles de velocidad del modelo ODA de ELM y la DNS (con $2r_0 = 10\ell_c$) se muestran en la Figura 5.4, donde la velocidad promedio de equilibrio predicha se presentan en la siguiente forma adimensional

$$U_i = \frac{\langle v \rangle_i}{\max(\langle v \rangle_{DNS})}, i = \text{ODA, DNS} \quad (5.12)$$

En las Figuras 5.4 (a) y (d) no se observan diferencias apreciables entre los perfiles de velocidad predichos con la ODA y la DNS. Con la finalidad de obtener una mejor apreciación de los resultados, las Figuras 5.4 (b) y (e) muestran un acercamiento a la zona de los perfiles de velocidad donde se observa la máxima velocidad dentro de la región del fluido libre ($4 \lesssim y/2r_0 \lesssim$

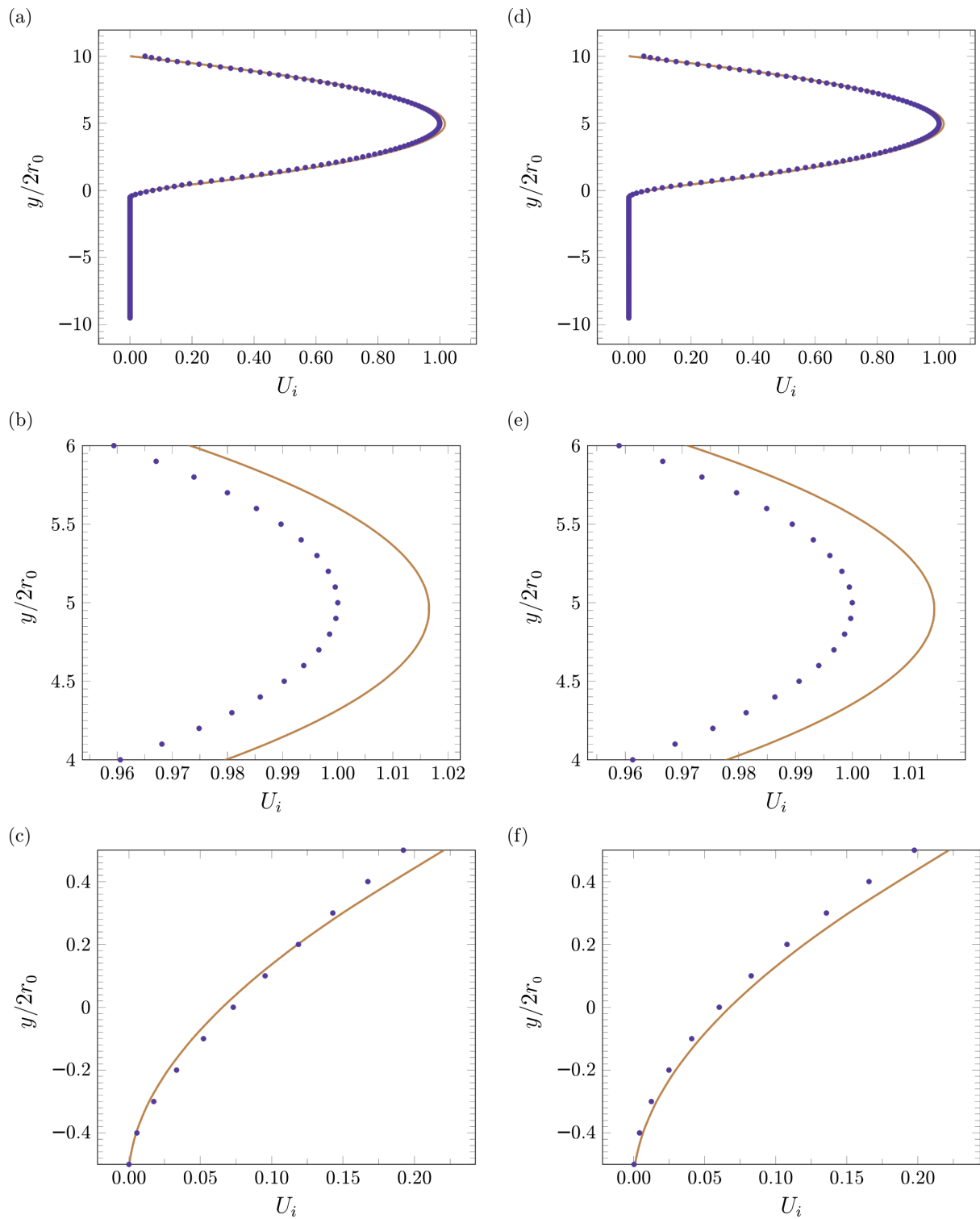


Figura 5.4. Predicción de los perfiles de velocidad obtenidos con la DNS (\dots) y el ODA de ELM ($—$) para $S_\beta = 0.7$: $\varepsilon_\omega = 0.4$ (a) - (c) y $\varepsilon_\omega = 0.8$ (d) - (f) y $\nu = 1$. Bajo la condición de: $Ca \ll 1$ y $Bo \ll 1$.

6). Los resultados de las velocidades promedio de la ODA exhiben las mayores desviaciones con aquellas obtenidas con la DNS en una proporción similar para ambas porosidades. En el acercamiento para la inter-región, mostrado en las Figuras 5.4 (c) y (f), se puede notar una menor desviación entre ambos perfiles de velocidad, siendo estas diferencias cualitativamente similares para ambas porosidades. Se observa además, que el caso de porosidad $\varepsilon = 0.4$, las velocidades de la ODA son mayores a las de la DNS en la mayor parte de la inter-región, mientras que para $\varepsilon = 0.8$, son menores. Para cuantificar las capacidades predictivas de los perfiles de velocidad promedio predichos con el modelo ODA de ELM, en comparación con el calculado de la DNS (en la inter-región), la Tabla 5.4 muestra un porcentaje de error relativo que se define como

$$\% \text{ Error} = 100 \times \int_{-y/2r_0}^{y/2r_0} \frac{|U_{ODA} - U_{DNS}|}{U_{DNS}} d(y/2r_0) \quad (5.13)$$

donde los porcentajes de errores son, en general, menores al 10 % de error para los perfiles correspondientes a $\nu \leq 1$ siendo para $\nu = 10$ donde se presentan errores relativos cercanos al 15 %. Los perfiles de velocidad en la inter-región para estos valores de ν se muestran en la Figura 5.5. La comparación de los perfiles de velocidad en la región porosa se omitieron debido a que los valores de la ODA y la DNS son prácticamente iguales, con un errores $\leq 1\%$. Estos porcentajes de error demuestran, en una primera instancia, que la región de promediado de tamaño $2r_0 = 10\ell_c$, que se propuso para el cálculo del tensor de permeabilidad usando la metodología descrita en párrafos anteriores, resulta adecuada también para obtener predicciones razonables de los perfiles de velocidad promedio del modelo ODA de ELM. Además, bajo estos resultados, se puede afirmar que la metodología propuesta para el cálculo de K^e resulta apropiada.

Analizando el efecto de la fase dispersa en la región del medio poroso sobre los perfiles de velocidad en la zona de la inter-región se pueden hacer las siguientes observaciones

- Para los casos donde $\nu = 1$ y $\nu > 1$, el flujo multifásico en el medio poroso corresponde a un transporte tipo *Darcy* y *augmentado* respectivamente, debido a la presencia de la fase dispersa (de acuerdo con el análisis que se realizó en el Capítulo 3) en la región del medio poroso. Como en estos casos la viscosidad de la fase continua es igual o mayor a

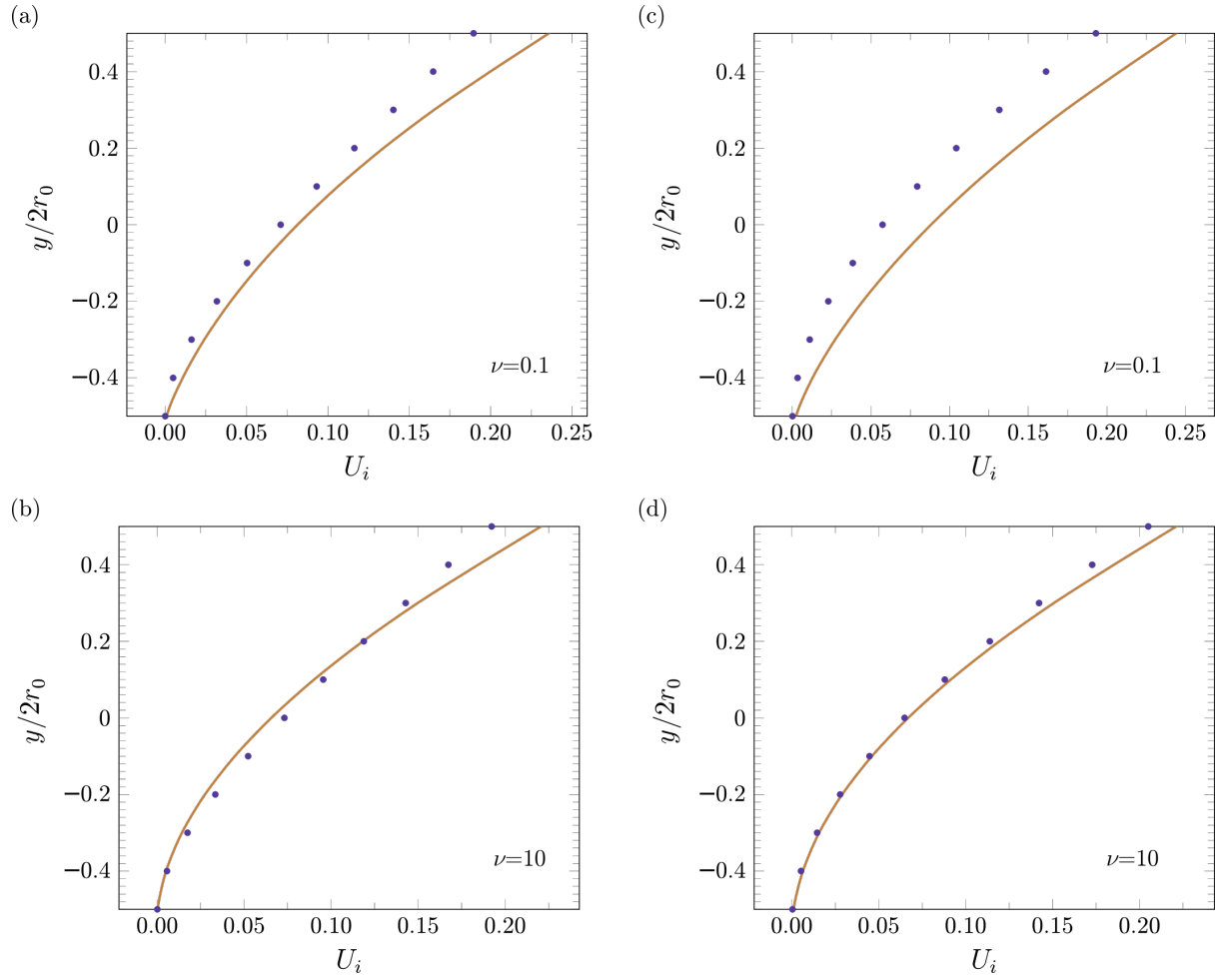


Figura 5.5. Predicción de los perfiles de velocidad obtenidos con la DNS(\dots) y el ODA de ELM ($—$) en la inter-región para $S_\beta = 0.7$: $\varepsilon_\omega = 0.4$ (a) y (b) $\varepsilon_\omega = 0.8$ (c) y (d). Bajo la condición de: $Ca \ll 1$ y $Bo \ll 1$.

la de la fase dispersa, el flujo global se efectúa esencialmente debido a la fase continua, así y debido a que el fluido continuo se presenta también en el canal libre, resulta en una mejor correspondencia de los perfiles entre el modelo de equilibrio y la DNS en la zona de frontera. Esto se observa en las Figuras 5.4 (c) y (f) y 5.5 (b) y (d). La coincidencia entre los perfiles de velocidades se verá mejorada al incrementarse la porosidad, ya que una mayor fase dispersa está presente dentro de la región porosa, mejorando en general el flujo global, que coincide con la reducción de al menos 1% de error. Lo anterior además señala que el principio de equilibrio local mecánico, y las suposiciones y restricciones involucradas, son más fáciles de satisfacer bajo estas condiciones.

- Por otro lado, cuando $\nu < 1$, el flujo multifásico en la región porosa corresponde a un transporte *obstaculizado*, debido a la presencia de la fase dispersa. En este caso, las

partículas dispersas actúan como partículas de arrastre y tienen una mayor influencia el flujo global en la región del medio poroso, reduciéndolo en la zona cercana a la inter-región, $y/2r_0 = 0$, donde la región de promediado incluye una mayor cantidad de fase continua (ver en la Figura 5.2), y por lo tanto es más difícil de satisfacer el principio de equilibrio local mecánico. Tal como se advierte en la Figura 5.5 (a) y (c), donde las mayores diferencias entre los perfiles de velocidad promedio ocurren para esta relación de viscosidades. Al incrementarse la porosidad, manteniendo la saturación constante, el volumen de la fase dispersa se incrementa, y el efecto que ejerce esta fase aumenta provocando una mayor diferencia entre la DNS y el modelo de equilibrio. Esto último se nota con el aumento de los valores del porcentaje de error presentados en la Tabla 5.4. A pesar de que no se muestran la figura de los perfiles completos de la velocidad, es de esperar que estos errores se propaguen hacia al resto del dominio de solución ocupado por el fluido homogéneo.

Finalmente, de las observaciones anteriores, se puede resumir que las capacidades predictivas del perfil de velocidad del modelo ODA de ELM para el sistema medio poroso-fluido son, en general, aceptables bajo varias situaciones de modelado que incluyen variaciones de la porosidad, saturación y relación de viscosidades. Aún para los casos donde la viscosidad de la fase dispersa es mayor que la fase continua, el porcentaje de error puede considerarse *tolerable* bajo ciertas circunstancias. Esto sugiere que las restricciones y suposiciones, que implican la deducción del

Tabla 5.4. Porcentaje de error relativo de la ODA de ELM respecto a la DNS para predecir la velocidad en la inter-región del sistema: medio poroso - fluido, con $2r_0 = 10\ell_c$.

ε_ω	$S_{\beta\omega}$	% Error		
		$\nu = 0.1$	$= 1$	$= 10$
0.4	0.7	15.7962	6.24328	6.46357
	0.8	13.8716	6.7824	8.3800
	0.9	8.30457	6.13651	7.3489
0.6	0.6	20.0671	4.5928	7.7914
	0.7	16.0557	5.1824	4.1065
	0.8	12.0315	5.8146	3.6501
	0.9	8.4098	5.2443	3.9837
0.8	0.5	22.5800	12.0235	2.0091
	0.6	18.6262	10.1303	3.4432
	0.7	15.94057	6.03083	5.26015
	0.8	12.4133	5.6021	5.1098
	0.9	9.02447	5.48648	5.19681

modelo ODA de ELM, se satisfacen para de los casos planteados aquí, en el análisis de la inter-región medio poroso-fluido.

5.1.2. Medio poroso - medio poroso

La predicción de la permeabilidad que corresponde a la cerradura del modelo ODA de ELM y sus capacidades predictivas se extiende al sistema conformado por dos regiones homogéneas porosas con distintas propiedades estructurales, en una forma análoga a un caso simple de un medio poroso *heterogéneo*. En este sistema se considera que el flujo disperso se presenta en ambas regiones, donde los valores de saturación de la fase continua no necesariamente son los iguales. El dominio de solución para llevar a cabo la DNS se presenta en Figura 5.1 (b), donde se restringe el análisis desde el seno del medio poroso- ω ($y = L_\omega$) al seno del medio poroso- η ($y = L_\eta$), y donde se imponen las siguientes condiciones de frontera

$$\mathbf{n} \cdot (\nabla \mathbf{v}_\beta) = \mathbf{0}, \quad \text{en } y = L_\eta, \quad (5.14a)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\nabla \mathbf{v}_\beta) = \mathbf{0}, \quad \text{en } y = -L_\omega, \quad (5.14b)$$

Nuevamente, para la DNS se utiliza como tamaño de las regiones, $L_\omega = L_\eta = 100\ell_c$, con un dominio de solución de altura total de $200\ell_c$ y anchura ℓ_c . Aplicando los mismos procedimientos y la herramientas computacionales para la solución numérica de la sección anterior, se resuelven las Ecuaciones (5.2) bajo las condiciones de frontera de la Ecuación (5.14). Detalles adicionales del dominio que representa el sistema medio poroso-medio poroso y un ejemplo del campo de solución de la DNS se presenta en el Apéndice C.

De igual manera, el tamaño de la región de promediado $2r_0 = N_c\ell_c$ debe garantizar un valor de porcentaje de error promedio en la inter-región razonable para considerar adecuadas las predicciones de los coeficientes efectivos, que permiten cerrar así el modelo ODA de ELM para este sistema. Los resultados de la comparación de los perfiles de velocidad promedio, que se mostraran posteriormente, indican que un valor $N_c = 10$ (*i.e.* $2r_0 = 10\ell_c$) es suficiente para obtener una buena predicción del perfil de velocidad con base en el cálculo apropiado de la permeabilidad de equilibrio.

El análisis se limita a algunos valores de porosidad manteniendo la saturación de la fase

fluida constante, los cuales se presentan en la Tabla 5.5. Los casos de estudio plantean aquellos donde existe desde una diferencia estructural apreciable ($\varepsilon_\eta = 0.9; \varepsilon_\omega = 0.4$) a una ligeramente similar ($\varepsilon_\eta = 0.6; \varepsilon_\omega = 0.5$), en una representación simplificada de un sistema poroso heterogéneo. El valor de saturación se selecciona por razones de limitaciones geométricas, debido a la construcción de celda unitaria representativa del medio poroso (detalles adicionales se presentan en el Apéndice C). Dada la solución de la DNS, para calcular las variaciones espaciales de la porosidad se evalúa la expresión de la Ecuación (5.4) mediante integración numérica en el dominio de la región de promediado, cuyo centroide se localiza en diferentes posiciones dentro de la inter-región, como se muestra en la Figura 5.2 (Ejemplos del campo de velocidad en varias posiciones se muestran en el Figura C.4), pero en una forma análoga para el sistema medio poroso - medio poroso de la Figura 5.1 (b). Los resultados de los cálculos se ajustan a las siguientes relaciones, ($R^2 = 0.999$),

$$\varepsilon\left(\frac{y}{2r_0}\right) = \begin{cases} \varepsilon_\eta, & \text{en la región homogénea-}\eta \\ \varepsilon_\omega \left[a_0 + a_1 \left(\frac{y}{2r_0} \right) \right], & \text{en } y/2r_0 \in (-0.5, 0.5) \\ \varepsilon_\omega, & \text{en la región homogénea-}\omega \end{cases} \quad (5.15)$$

donde los coeficientes de ajuste a_0 y a_1 se presentan en la Tabla 5.5.

Una vez determinada la porosidad como función de la posición, $\varepsilon(y)$ se usa el campo de solución de la velocidad puntual para determinar las variaciones espaciales de las cantidades promedio de equilibrio, de la misma forma que la sección anterior. Posteriormente, usando esta información, se obtiene la funcionalidad espacial en la inter-región del componente longitudinal del tensor de permeabilidad de equilibrio, $K^e(y)$. Las predicciones de la permeabilidad de equilibrio a largo de la frontera en la inter-región se muestran en la Figura 5.6, para diferencias en las porosidades de cada región porosa e incrementos de relación de viscosidades. La diferencia entre los valores porosidad, se señala por el parámetro $\varepsilon_{\eta\omega} = \varepsilon_\eta - \varepsilon_\omega$. En esta figura, se observa

Tabla 5.5. de $a_i, i = 0, 1$ para el ajuste de ε en la inter-región del sistema: medio poroso - fluido, con $2r_0 = 10\ell_c$ y $S_{\beta,i} = 0.7$.

ε_ω	ε_η	$\varepsilon_{\eta\omega}$	a_0	a_1	Diferencia estructural
0.4	0.9	0.5	1.624	1.248	Alta
0.5	0.8	0.3	1.300	0.5991	Media
0.6	0.7	0.1	1.083	0.1664	Baja

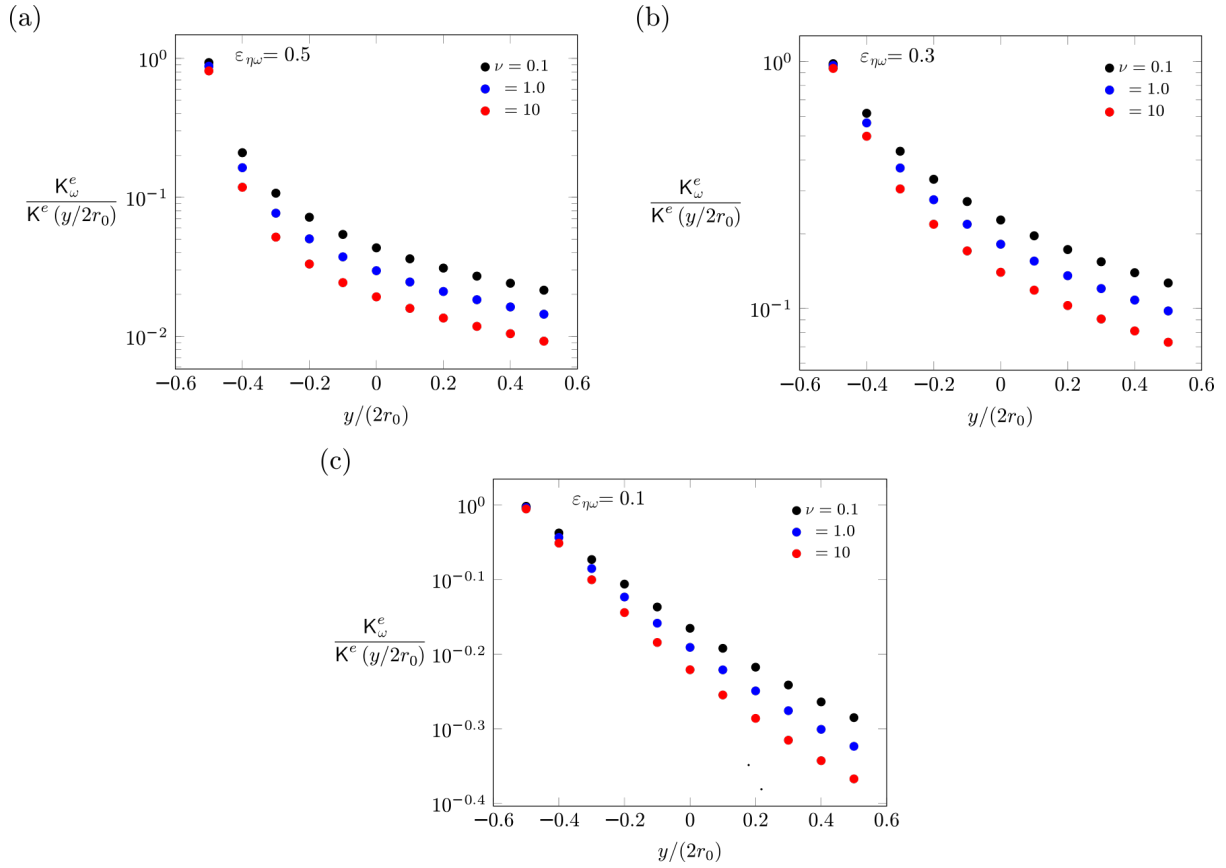


Figura 5.6. Predicción de la variación espacial en la inter-región medio poroso - medio poroso del tensor de permeabilidad de equilibrio: (a) $\varepsilon_{\eta\omega} = 0.4$, (b) $= 0.5$ (c) $= 0.6$. Donde: $S_{\beta\omega} = S_{\beta\eta} = 0.7$.

que la permeabilidad de equilibrio se incrementa de un valor menor a la permeabilidad de equilibrio del seno de la región- ω (de menor porosidad) a un valor menor de la permeabilidad de equilibrio que se observa en el seno de la región- η porosidad (de mayor porosidad). Se nota que al disminuir las diferencias de ambas porosidad, $\varepsilon_{\eta\omega} \rightarrow 0$, los perfiles cambian de una forma exponencial a una prácticamente lineal. Esto se asocia a la disminución de la resistencia al flujo disperso que se genera cuando las regiones porosas son más similares entre sí.

Por otro lado, la influencia de ν , que se asocia al tipo de flujo global (*i.e.* obstaculizado, Darcy y aumentado), que tiene sobre la permeabilidad de equilibrio se incrementa al transitar de la región menos porosa a la más porosa; para una saturación constante, el incremento de la porosidad aumenta el volumen asociado a la fase dispersa. Esto se puede observar al analizar los perfiles de velocidad puntual mostrados en la Figura C.4. La dependencia espacial del coeficiente de equilibrio se muestran en la Figura 5.6. Las predicciones numéricas se ajustan a ecuaciones

del siguiente tipo ($R^2 = 0.999$)

$$K^{e-1} \left(\frac{y}{2r_0} \right) = \begin{cases} K_{\eta}^{e-1}, & \text{en la región homogénea-}\eta \\ K_{\omega}^{e-1} \left(c_0 + \sum_{i=1}^3 c_i \exp \left[- \left(\frac{y}{2r_0} - t_0 \right) t_i^{-1} \right] \right), & \text{en } y/2r_0 \in (-0.5, 0.5) \\ K_{\omega}^{e-1}, & \text{en la región homogénea-}\omega \end{cases} \quad (5.16)$$

donde los valores de los parámetros c_i y t_i , ($i = 0, \dots, 3$) se presentan en la Tabla 5.6.

Comparación con DNS

En este caso la comparación de los perfiles de la velocidad promedio de la DNS con los predichos por el modelo ODA de ELM, permiten validar la precisión del modelo para un sistema que incluye un tipo de inter-región más compleja. La generalidad que implica el modelo ODA de ELM permite extender su aplicabilidad para analizar este tipo de inter-región, una vez determinada la funcionalidad espacial del coeficiente de equilibrio $K(y)$. De esta manera, suponiendo flujo desarrollado, estacionario y unidimensional del análisis para la inter-región de la sección anterior, se usa la ecuación de transporte generalizada (5.8) (*i.e.* flujo en la dirección x) y las ecuaciones de ajuste de funcionalidad espacial de la permeabilidad de equilibrio de la Ecuación (5.16). La solución de esta ecuación se realiza desde el seno del medio poroso- ω al

Tabla 5.6. Parámetros de la Ecuación (5.7) para la predicción del coeficiente de permeabilidad de equilibrio del sistema: medio poroso - medio poroso, $S_{\beta i} = 0.7$, $i = \eta, \omega$ y $2r_0 = 10\ell_c$.

ε_{ω}	ε_{η}	$\varepsilon_{\eta\omega}$	ν	c_0	t_0	c_1	t_1	c_2	t_2	c_3	t_3
0.4	0.9	0.4	0.1	0.0188	-0.5515	-25.430	0.0015	0.2107	0.2568	2.4190	0.0435
			1	0.0126	-0.5878	6.3000	0.0414	0.1757	0.2625	3.8470	0.0132
			10	0.0090	-0.5556	0.8002	0.2070	-0.6770	0.2044	3.1600	0.0372
0.5	0.8	0.3	0.1	0.1338	-0.7204	0.8531	0.1725	0.9808	0.2626	0.9666	0.1287
			1	0.0186	-0.3548	0.2319	0.7347	0.1930	0.1211	0.0171	0.6760
			10	-1.2760	-0.6368	-0.0020	0.7323	2.3650	0.1159	1.5050	9.8130
0.6	0.7	0.1	0.1	0.2907	-2.8570	9.9400	0.8445	-9.6630	0.2194	0.5814	1.2400
			1	0.3188	-3.689	69.82	0.687	1.1120	0.4618	0.9428	0.4501
			10	0.2903	0.0783	-0.0128	0.3594	0.2398	0.6657	0.0475	0.4125

seno del medio poroso- η , imponiendo las siguientes condiciones las fronteras superior e inferior

$$\langle v \rangle_{\omega, \infty} = -\frac{K_{\omega}^e}{\varepsilon_{\omega} \mu_{\beta}} \frac{d \langle p \rangle}{dx}, \quad y = -L_{\omega} \quad (5.17a)$$

$$\langle v \rangle_{\eta, \infty} = -\frac{K_{\eta}^e}{\varepsilon_{\eta} \mu_{\beta}} \frac{d \langle p \rangle}{dx}, \quad y = L_{\eta} \quad (5.17b)$$

Además si se supone como válido establecer un gradiente de presión constante para todo el sistema, esto es

$$\frac{d \langle p \rangle}{dx} = \frac{d \langle p \rangle_{\eta}}{dx} = \frac{d \langle p \rangle_{\omega}}{dx} = -\frac{\mu_{\beta} \varepsilon_{\omega}}{K_{\omega}^e} \langle v \rangle_{\omega, \infty} = -\frac{\mu_{\beta} \varepsilon_{\eta}}{K_{\eta}^e} \langle v \rangle_{\eta, \infty} \quad (5.18)$$

De esta forma la ecuación diferencial está dada por la misma Ecuación (5.11), donde las variaciones espaciales de $K^e(y)$ en la inter-región se obtienen de la Ecuación (5.16) y junto las condiciones de frontera de la Ecuación (5.17), forman el sistema de ecuaciones que define el modelo ODA de ELM, y permiten el cálculo del perfil de velocidad promedio de equilibrio para el sistema medio poroso-medio poroso. Este problema de valores a la frontera se resuelve numéricamente mediante el software COMSOL Multiphysics $\text{\textcircled{R}}$ (Ver. 4.3a), en un dominio del mismo tamaño que se usó en la DNS para el cálculo de la permeabilidad de equilibrio (*i.e.* $200\ell_c$).

Los resultados de las predicciones de velocidad promedio, en comparación con los de la DNS, se muestran en la velocidad adimensional, $U_i, i = ODA, DNS$, en la Figura 5.7 para la misma variación de parámetros usados en la predicción del tensor de permeabilidad. En esta figura se muestra un acercamiento a la vecindad de la frontera entre las regiones porosas para obtener una mejor percepción de las capacidades predictivas del modelo ODA de ELM. Para el seno de la región con la mayor porosidad, los resultados muestran diferencias apreciables entre los perfiles de velocidad predichos con el modelo y la DNS. Por el contrario, en el seno de la región con la menor porosidad, los perfiles de ambas velocidades son bastante similares entre sí. Además, se nota que el caso donde ambas regiones presentan porosidades similares, Figura 5.7 (c), aun en el seno de las regiones porosas los perfiles presentan diferencias apreciables. Los cálculos adicionales con esta misma característica (*p.ej.* $\varepsilon_{\omega} = 0.4 - \varepsilon_{\eta} = 0.5$ y $\varepsilon_{\omega} = 0.8 - \varepsilon_{\eta} = 0.9$) presentan un comportamiento similar. Cabe señalar, que las predicciones de la velocidad en el seno del medio poroso se pueden analizar desde un enfoque particular a través del modelo desarrollado en el

Capítulo 3, lo cual involucra la predicción de los coeficientes efectivos mediante la solución de problemas de cerradura asociados. En la Figura 5.7 (a)-(c), para la inter-región, *i.e.*, $y \in (-0.5, 0.5)$, se advierten apenas diferencias entre los perfiles de velocidad predichos y la DNS. El acercamiento en la inter-región, dado por las Figuras 5.7 (d)-(f), muestran que la velocidad determinada con el modelo de equilibrio sobrestima ligeramente el valor de la velocidad de la DNS, en una misma proporción para las distintas variaciones de porosidad usadas.

Para cuantificar la capacidad del modelo ODA de ELM para reproducir el perfil de la velocidad promedio de la DNS para el sistema medio poroso - medio poroso, en la Tabla 5.7 se presentan el porcentaje de error relativo que se calculan mediante la Ecuación (5.13). En esta tabla se observa que los porcentajes calculados son, en su mayoría, menores al 10% para las diferentes variaciones de porosidad y relación de viscosidades. Esos porcentajes resultan ser tolerables en muchos casos prácticos de modelado y los cuales sugieren además que el tamaño de región seleccionada igual a $2r_0 = 10\ell_c$ resulta adecuada para el cálculo de la permeabilidad de equilibrio a lo largo de la frontera, permitiendo cerrar así el modelo ODA de ELM. Además de lo anterior, los porcentajes de error promedio calculados implican que la condición de equilibrio local mecánico (y el marco teórico de restricciones que involucra) resulta aún válida para modelar el flujo disperso en este tipo de inter-región, bajo las variaciones de las propiedades geométricas y físicas analizadas.

Respecto a los porcentajes de error promedio que se presentan en la Tabla 5.7, se pueden hacer las siguientes observaciones:

- Contrario a lo mostrado en el sistema medio poroso-fluido, el porcentaje de error se incrementa al adoptar valores mayores de ν . Relacionando esto con los tipos de flujo dispersos a los cuales se asocia el valor de ν se puede afirmar que, para $\nu = 0.1$, la fase dispersa actúa obstaculizando el flujo y las predicciones resultan ser mejores en

Tabla 5.7. Porcentaje de error relativo de la ODA de ELM respecto a la DNS para predecir la velocidad en la inter-región del sistema: medio poroso - medio poroso, con $2r_0 = 10\ell_c$.

ε_ω	ε_η	$\varepsilon_{\eta\omega}$	%Error		
			$\nu = 0.1$	$= 1$	$= 10$
0.4	0.9	0.5	7.7467	10.4715	12.4182
0.5	0.8	0.3	5.7703	8.6219	10.1955
0.6	0.7	0.1	2.3511	4.9830	6.7373

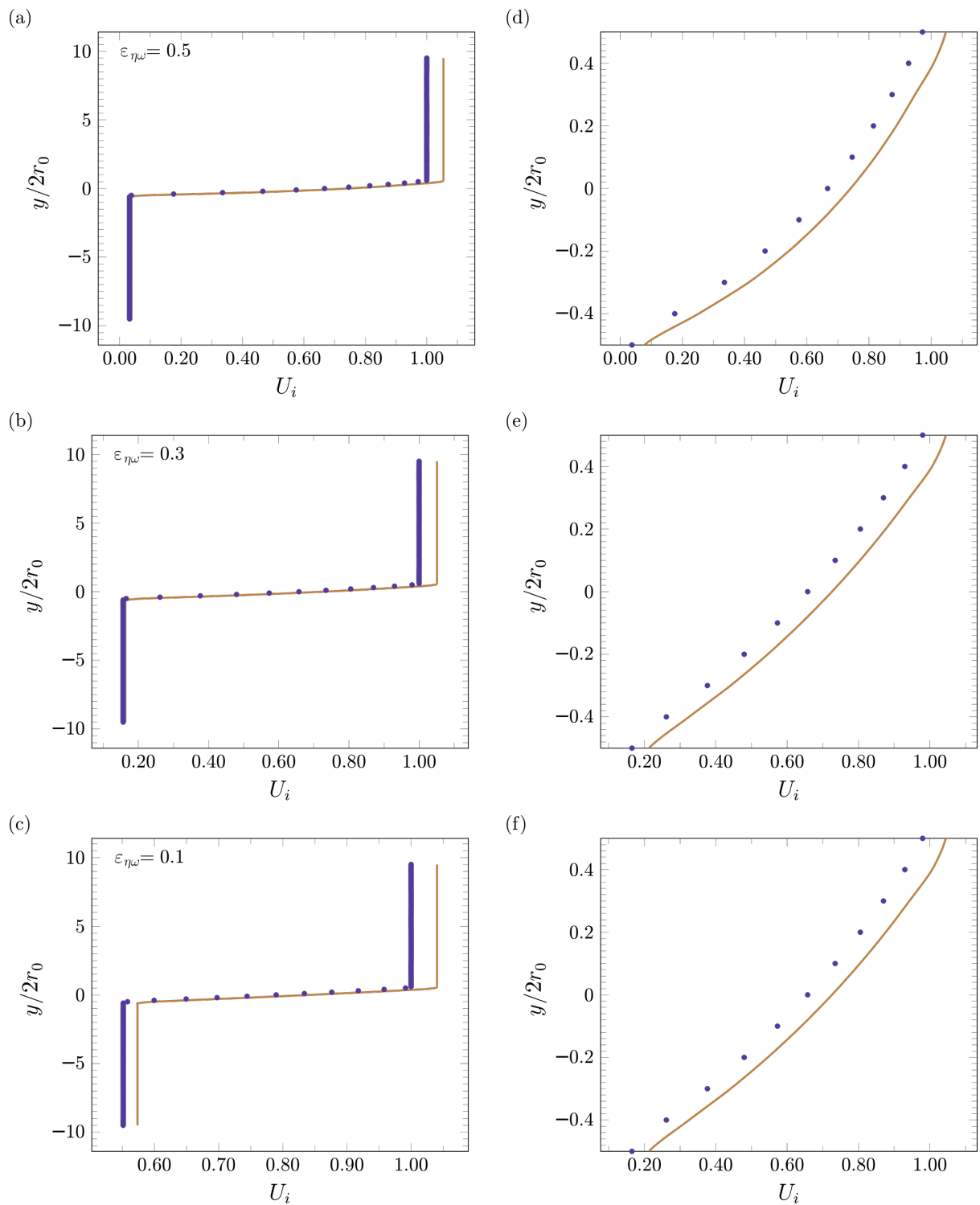


Figura 5.7. Predicción de los perfiles de velocidad obtenidos con la DNS(\dots) y el ODA de ELM ($—$) en la inter-región medio poroso-medio poroso para $\nu = 1$. Bajo la condición de: $Ca \ll 1$ y $Bo \ll 1$.

comparación con los casos donde el flujo es tipo “Darcy” o “mejorado” (*i.e.* $\nu = 1$ y $\nu = 10$, respectivamente). Esto involucra entonces que la fase dispersa, al actuar como partículas de arrastre, ejerce una resistencia adicional del mismo medio poroso en ambas regiones. Así, para la inter-región medio poroso - medio poroso, propicia mejores predicciones para los valores de $\nu < 1$, favoreciendo la aplicación de la condición del ELM y las predicciones de los perfiles de velocidad involucradas.

- Como se espera, al ser las regiones porosas más similares entre ellas cuando $\varepsilon_\omega \rightarrow \varepsilon_\eta$, las diferencias entre los perfiles de velocidad resultan ser menores, y los porcentajes de error en la inter-región tienden a disminuir. Esto se debe a que, para una misma saturación, una diferencia apreciable en las porosidades implica que una región el volumen vacío es ocupado por la fase dispersa en una mayor proporción respecto a la fase continua. Como consecuencia, el flujo global en una parte de la inter-región se debe en una mayor intensidad al flujo de la fase- β mientras que en la otra parte el efecto de la fase- γ es más dominante. Lo descrito se puede analizar al observar el ejemplo del perfil de velocidad puntual mostrado en la Figura C.4(b), que corresponde cuando el centroide de la región de promediado se localiza en $y = 0$. Por otro lado si las regiones porosas son similares, para un mismo valor de saturación, el volumen ocupado por la fase dispersa resulta similar y el efecto global resulta ser casi equivalente de una región a la otra. Los efectos anteriores entonces muestran que las predicciones de la velocidad son influenciadas por la intensidad de los cambios estructurales en esta zona de transición, indicada por el aumento de la diferencia entre las porosidades, y del efecto del volumen ocupado por la fase dispersa, el cual se asocia a una disminución de la porosidad manteniendo la saturación constante..

Las observaciones anteriores sugieren que la condición de equilibrio local mecánico es más difícil de satisfacer si existe una mayor diferencia entre las características del medio poroso, el volumen ocupado por la fase dispersa y las propiedades físicas de las fases fluidas. La zona de transición planteada en esta sección se refiere cuando dos medios porosos presentan cambios abruptos en su microestructura. Sin embargo, pueden existir casos donde esta transición sea más suave, es decir, que a diferencia de un cambio rápido de la geometría como la que se muestra en la Figura 5.1, la porosidad cambie gradualmente de un valor a otro, de esta forma, las predicción para la permeabilidad efectiva y la validación del modelo ODA de ELM con la DNS resulten

en errores menores, aún para los casos donde existen valores diferentes de la porosidad. Por lo contrario, una zona de transición más abrupta podría incluir el caso donde se combinen en un sólo sistema ambos tipos inter-regiones anteriores, es decir de esta forma el sistema incluiría dos regiones porosas separadas por un canal de fluido libre, similar a los sistemas fracturados analizados recurrentemente en la literatura (Sahimi, 2011). El cálculo del coeficiente efectivo del modelo ODA de ELM y la comparación de la velocidad promedio predicha con la DNS para este sistema se analizará a continuación.

5.1.3. Medio poroso - fractura - medio poroso

El último caso de análisis corresponde a la frontera cercana entre dos medios porosos homogéneos separados por un canal de fluido libre, denominado aquí como fractura. El cual se plantea con el objetivo de cerrar el modelo ODA de ELM a un sistema físicamente más complejo y evaluar la viabilidad de las predicciones del perfil de velocidad al compararlo con la DNS. El sistema se representa por la Figura 5.1 (c), donde se presenta el flujo disperso sólo dentro de las regiones porosas y en el canal libre sólo se presenta el flujo de la fase continua. Los valores de porosidad y la saturación de la fase continua no necesariamente son iguales en los medios porosos.

La solución de la DNS se realiza en el dominio representado por esta figura, el cual se asigna desde $y = -L_\omega - f/2$ hasta $y = L_\eta + f/2$, que corresponden al seno de las respectivas regiones porosas. En estas frontera se imponen las condiciones dadas en la Ecuación (5.14). El tamaño del dominio de solución de la DNS, que se utiliza corresponde a $L_\omega = L_\eta = 100\ell_c$ más el tamaño de la fractura, $f = N_f\ell_c$, por lo tanto, el dominio de solución tiene una altura total de $(200 + N_f)\ell_c$. En la Figura C.5 se muestran detalles adicionales el dominio de solución planteado. La DNS se obtiene de la solución numérica de las ecuaciones puntuales e imponiendo las mismas condiciones de frontera usadas en el sistema *medio poroso - medio poroso*. El cálculo se realizó aplicando las herramientas computacionales de elemento finito disponibles, ya mencionadas. Ejemplos de la solución campo de velocidad puntual para diferentes condiciones de propiedades físicas y estructurales, que serán analizadas posteriormente, se presentan en el Apéndice C. El tamaño de la región de promediado que se selecciona es nuevamente de $2r_0 = 10\ell_c$, y se determina en razón al análisis del porcentaje de error promedio en la inter-región dado por la Ecuación (5.13). El valor de $N = 10$, aún para este caso donde la frontera entre los medios porosos homogéneos es

físicamente mas compleja, permite cálculos adecuados del tensor de permeabilidad que cierran el modelo ODA de ELM y su validez se verificará posteriormente.

La serie de valores de porosidad de los medios porosos homogéneos (con saturación de la fase dispersa constante) y el tamaño fractura que se analizan para este tipo de inter-región se presentan en la Tabla 5.8. Estos toman en cuenta dos medios porosos con porosidades iguales y diferencias graduales de las porosidades de un medio a otro (similar a un medio poroso *heterogéneo* del sistema anterior), separadas por una fractura. De manera similar a lo realizado con anterioridad, obtenida la solución de la DNS, los cambios espaciales de la porosidad se obtiene numéricamente del cálculo de las integrales de la Ecuación (5.4), localizando el centroide de la región de promediado $2r_0 = 10\ell_c$, en diferentes posiciones en la inter-región (Figuras 5.2). Ejemplos del perfil de velocidad puntual, del tamaño de la región de promediado seleccionada, en diferentes posiciones del centroide en el sistema se presentan en las Figuras C.6-C.10. Los perfiles de la porosidad calculada numéricamente en la inter-región, para las diferentes tamaños de fractura, se ajustan de acuerdo las siguientes expresiones polinomiales ($R^2 = 0.999$)

$$\varepsilon\left(\frac{y}{2r_0}\right) = \begin{cases} \varepsilon_\eta, & \text{en la región homogénea-}\eta \\ \varepsilon_\omega \sum_{i=0}^4 a_i \left(\frac{y}{2r_0}\right)^i, & \text{en } \frac{y}{2r_0} \in \left[-\left(0.5 + \frac{1}{2} \frac{f}{2r_0}\right), +\left(0.5 + \frac{1}{2} \frac{f}{2r_0}\right)\right] \\ \varepsilon_\omega, & \text{en la región homogénea-}\omega \end{cases} \quad (5.19)$$

Los valores de los parámetros $a_i, i = 0, \dots, 4$, resultantes del ajuste se presentan en la Tabla 5.8. La Ecuación (5.19) se usa para obtener las predicciones de la permeabilidad de equilibrio, de acuerdo con la Ecuación (5.2). Los valores calculados en diferentes posiciones, dentro de la inter-región que toman en cuenta la fractura, *i.e.* $y/2r_0 \in [-(0.5 + 0.5f/2r_0), +(0.5 + 0.5f/2r_0)]$, se presentan en la Figura 5.8. Para los medios porosos con la misma porosidad, los perfiles de $K^e(y)$ en las Figuras 5.8 (a), (b) y (c), muestran un comportamiento simétrico en toda la inter-región, cuyo eje de simetría se localiza en $y/2r_0 = 0$, que corresponde a la mitad geométrica de la fractura. Al examinar el campo de solución para velocidad puntual, que se muestra en las Figuras C.6 ($f = 1\ell_c$), C.7 ($f = 6\ell_c$) y C.8 ($f = 10\ell_c$), se clarifica el carácter simétrico de la DNS y por lo tanto la forma de los perfiles de permeabilidad obtenidos resultan evidentes. La dependencia de $K^e(y)$ con la relación de viscosidades, es el resultado típico ya analizado de manera recurrente (flujo obstaculizado, Darcy y aumentado). Por otra lado, el incremento

del tamaño de la fractura, genera un aumento considerable en el valor de $K^e(y)$, (reducción de $K_w^e/K^e(y)$, en la Figura 5.8), el cual se observa a través de la tendencia hacia un valor mínimo en $y/(2r_0) = 0$ y donde los valores son ligeramente mayores a sus correspondientes del seno de la región porosa. Se puede observar, específicamente en los casos de $f = 1\ell_c$ y $f = 6\ell_c$, que existe una leve reducción del valor de $K^e(y)$ (leve aumento de $K_w^e/K^e(y)$, en la Figura 5.8), para mantener a continuación un valor constante en la parte de la inter-región que corresponde a la fractura, finalmente se vuelve incrementar levemente para posteriormente disminuir a su valor de la región porosa. Estos perfiles muestran la influencia de la resistencia del medio poroso sobre las predicciones de la permeabilidad en la zona inmediata en la fractura. Por otro parte, para $f = 10$, se observa que la permeabilidad se incrementa gradualmente y tiende a un valor infinito en $y/2r_0 = 0$ donde $K_w^e/K^e(y) \approx 0$. Estos perfiles se explican en razón de que la amplitud del canal coincide con el tamaño de la región de promediado (*i.e.* $2r_0 = f = 10\ell_c$) que significa una mayor porción del volumen ocupado por la fase continua en canal libre. En el Apéndice C se presentan una análisis de los resultados numéricos, que explican la razón de la obtención de estos perfiles. Las predicciones del coeficiente de equilibrio cuando se presenta una disparidad en el valor de la porosidad en los medios porosos, se muestran en las Figuras 5.8 (d), (e) y (d), en estas se observan perfiles asimétricos, siendo evidente las diferencias de los valores constante de la permeabilidad de equilibrio dentro de cada medio poroso, mientras que a lo largo de la inter-región se observa con una menor intensidad el mismo aumento del valor de $K_w^e/K^e(y)$ al inicio y final de la fractura. Ejemplos del campo de solución de la DNS, que se asocian al cálculo de la permeabilidad de equilibrio, de estos sistemas fracturados se presentan en las Figuras C.9 ($f = 1\ell_c$), C.10 ($f = 6\ell_c$) y C.11 ($f = 10\ell_c$) y reflejan las predicciones obtenidas. Al comparar estos resultados con aquellos de igual porosidad, se nota que el incremento de la amplitud de la fractura reduce el efecto de regiones porosas sobre la permeabilidad de equilibrio y los perfiles para ambos casos se vuelven más similares, siendo evidente para el tamaño de fractura $f = 10\ell_c$. Los comportamientos de las predicciones del coeficiente de permeabilidad de equilibrio descritos con anterioridad se ajustan a la siguiente función dependiente de la posición definida por partes,

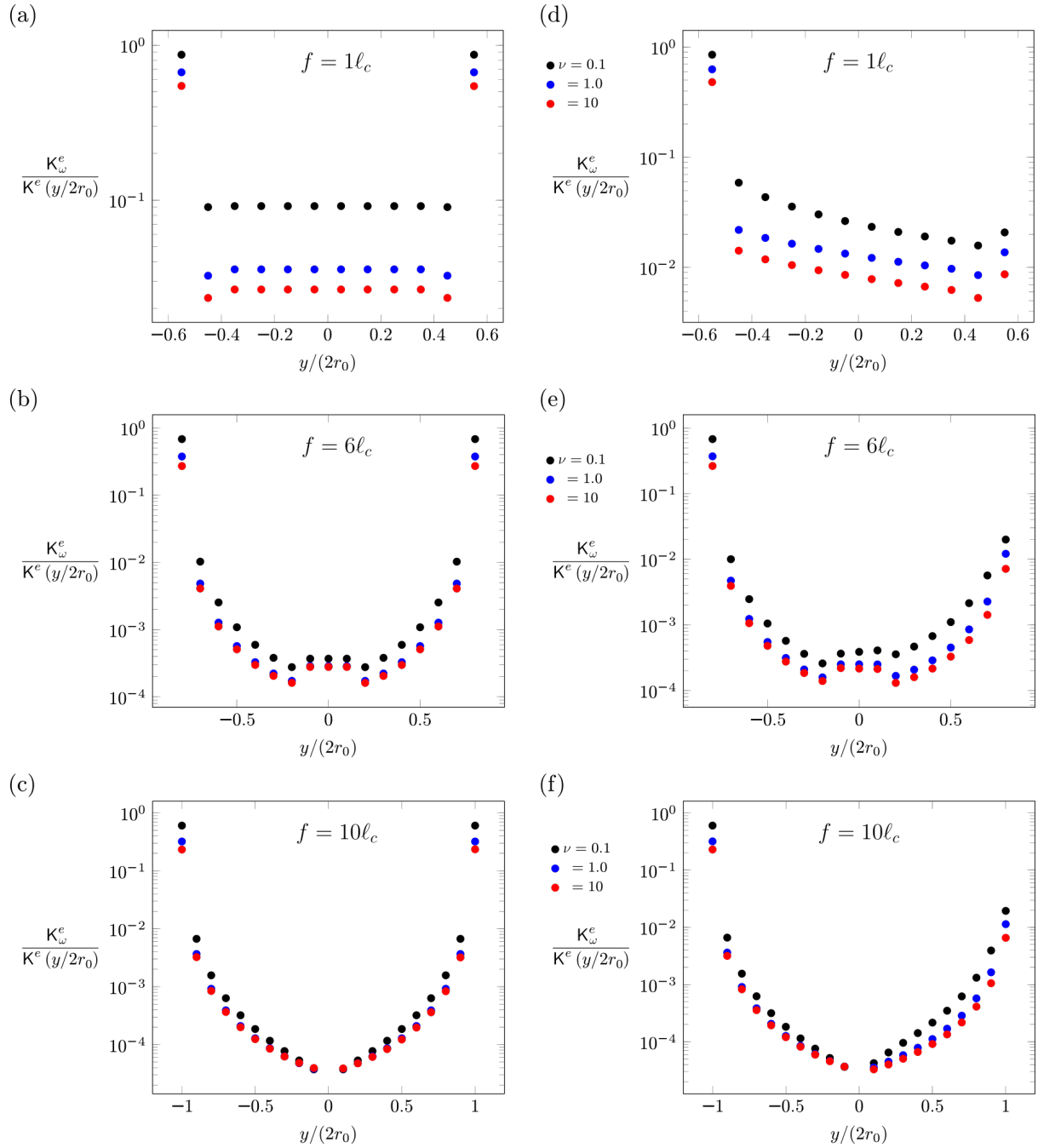


Figura 5.8. Predicción de la variación espacial en la inter-región: medio poroso - fractura - medio poroso del tensor de permeabilidad de equilibrio con relación de porosidad: (a),(d) y (c) $\varepsilon_{\eta\omega} = 0$ y (d), (e) y (f) $\varepsilon_{\eta\omega} = 5$.

$$R^2 \in (0.999, 0.997),$$

$$\mathbf{K}^{e-1} \left(\frac{y}{r_0} \right) = \begin{cases} \mathbf{K}_\eta^{e-1}, & \text{en la región homogénea } \eta \\ \mathbf{K}_\omega^{e-1} \left(c_0 + \sum_{i=1}^2 c_i \exp \left[- \left(\frac{y}{r_0} - t_0 \right) t_i^{-1} \right] \right), & \text{en } \frac{y}{2r_0} \in \left[- \left(0.5 + \frac{1}{2} \frac{f}{2r_0} \right), + \left(0.5 + \frac{1}{2} \frac{f}{2r_0} \right) \right] \\ \mathbf{K}_\omega^{e-1}, & \text{en la región homogénea } \omega \end{cases} \quad (5.20)$$

donde los parámetros $c_i, i = 0, 1, 2$ se presentan en la Tabla 5.8 para las secciones de la función que se definen en: $-(0.5 + 0.5f/2r_0) \leq y/2r_0 < 0$ y $0 < y/2r_0 \leq +(0.5 + 0.5f/2r_0)$, a lo largo la inter-región que incluye la fractura.

Tabla 5.8. Parámetros de $a_i, i = 0, \dots, 4$ para el ajuste de ε en la inter-región del sistema: medio poroso - fluido, con $2r_0 = 10\ell_c$ y $S_{\beta,i} = 0.7$.

ε_ω	ε_η	$\varepsilon_{\eta\omega}$	$f\ell_c^{-1}$	$y/2r_0 \in$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
0.4	0.4	0	1	-0.55, -0.45	1.8246	1.5	0	0	0
				-0.45, 0.45	1.5	0	0	0	0
				0.45, 0.55	1.8246	-1.5	0	0	0
			6	-0.8, 0.8	0.7746	0	-0.8755	0	0.4584
10	-1, 1	0.9287	0	-0.9549	0	0.4441			
0.4	0.9	0.5	1	-0.55, 0.55	0.6820	0.5262	0.1556	-0.2137	-0.8411
			6	-0.8, 0.8	0.8686	0.4082	-0.5106	-0.1655	0.2673
			10	-1, 1	0.9584	0.2500	-0.5569	0	0.2500
0.5	0.8	0.3	1	-0.55, 0.55	0.6820	0.3157	0.1556	-0.1282	-0.8411
			6	-0.8, 0.8	0.8686	0.2449	-0.5106	-0.0993	0.2673
			10	-1, 1	0.9584	0.1500	-0.5569	0	0.259
0.6	0.7	0.1	1	-0.55, 0.55	0.6820	0.1052	0.1556	-0.0427	-0.8411
			6	-0.8, 0.8	0.8686	0.0816	-0.5106	-0.0331	0.2673
			10	-1, 1	0.9584	0.0500	-0.5569	0	0.2590
0.9	0.9	0	1	-0.55, -0.45	1.061	0.111	0	0	0
				-0.45, 0.45	1.0111	0	0	0	0
				0.45, 0.55	1.061	-0.111	0	0	0
			6	-0.8, 0.8	0.9625	0	-0.1458	0	0.07633
10	-1, 1	0.9881	0	-0.159	0	0.07395			

Comparación con DNS

Con el objetivo de evaluar nuevamente generalidad del modelo ODA de ELM, donde su aplicación se extiende al tipo de inter-región del sistema que incluye un medio poroso-fractura-medio

Tabla 5.9. Coeficientes de la Ec. (5.7) para la predicción del coeficiente de permeabilidad de equilibrio del sistema: medio poroso - medio poroso, $S_{\beta i} = 0.7, i = \eta, \omega$ con $2r_0 = 10\ell_c$.

ε_ω	$\varepsilon_{\eta\omega}$	$f\ell_c^{-1}$	ν	$y_{\text{máx}}/2r_0 \in$	c_0	t_0	c_1	t_1	c_2	t_2	
0.4	0	0.1	-0.55, 0	0.09411	-0.5347	-0.003796	0.9693	0.193	0.01094		
			0, 0.55	0.09151	-0.5803	7.607	0.0119	2.006	0.01253		
		1	1	-0.55, 0	0.03303	-0.5414	-0.009293	1.078	0.2034	0.009096	
				0, 0.55	0.02645	-0.5959	9.316	0.0139	4.704	0.014	
		10		-0.55, 0	0.03484	-0.6098	7.841	0.01957	4.988	0.0204	
				0, 55	0.03509	-0.5921	38.33	0.009913	4.304	0.0108	
	6	0.1		-0.8, 0	0.0008225	-0.8838	0.3854	0.03708	29.15	0.02195	
				0, 0.8	0.0007762	-0.8872	29.18	0.02334	-1.731	0.01817	
		1		-0.8, 0	-0.001916	-0.8117	0.003501	1.251	0.6423	0.02169	
				0, 0.8	0.0004377	-0.9018	29.77	0.02236	4.855	0.02331	
		10		-0.8, 0	0.0003964	-0.8598	0.7966	0.02457	2.743	0.02286	
				0, 0.8	0.0003911	-0.9154	4.487	0.02434	30.41	0.02366	
		10	0.1		-1, 0	0.000316	-1.063	5.263	0.02208	5.272	0.02194
					0, 1	0.0003227	-1.086	2.24	0.02336	27.61	0.02184
			1		-1, 0	-0.0002036	-1.103	30.17	0.022	2.978	0.02302
					0, 1	0.0002034	-1.077	7.394	0.02207	2.793	0.02222
			10		-1, 0	0.0001903	-1.098	1.952	0.0231	14.28	0.02309
					0, 1	-0.000292	-1.056	2.908	0.0224	0.001456	0.5816
	0.4	0.5	0.1	-0.55, 0	0.03366	-0.6317	7.271	0.02952	6.607	0.02814	
				0, 0.55	0	0	1.403×10^{-12}	0.0247	0.02445	-1.0188	
1			1	-0.55, 0	0.0335	-0.6260	3.3740	0.0294	7.8800	0.0288	
				0, 0.55	0	0	3.36×10^{-11}	0.02903	0.01277	-1.1813	
10				-0.55, 0	0.0101	-0.6214	9.1270	0.0209	4.6620	0.0216	
				0, 0.55	0	0	2.67×10^{-18}	0.0158	0.0083	-1.1058	
6		0.1		-0.8, 0	-5.141×10^{-4}	-0.8354	3.3280	0.0222	0.0043	0.4024	
				0, 0.8	4.843×10^{-4}	-1.0280	-9.5050	3.124×10^{-3}	0.3712	0.0772	
		1		-0.8, 0	4.12×10^{-4}	-0.8790	4.8870	0.0223	7.35	0.0228	
				0, 0.8	0	0	1.46×10^{-7}	0.0708	1.112×10^{-4}	2.6709	
		10		-0.8, 0	3.571×10^{-4}	-0.8852	2.7210	0.0237	7.5690	0.0231	
				0, 0.8	0	0	3.8890×10^{-6}	0.1962	2.575×10^{-4}	2.4131	
10		0.1		-1, 0	3.178×10^{-4}	-1.0560	7.6630	0.0219	-1.0950	0.0109	
				0, 1	0	0	8.6840×10^{-7}	0.1528	2.171×10^{-4}	0.6020	
		1		-1, 0	2.002×10^{-4}	-1.0830	8.9090	0.0221	4.8370	0.0221	
				0, 1	0	0	4.4010×10^{-8}	0.1221	1.1320×10^{-4}	0.6236	
		10		-1, 0	2.002×10^{-4}	-1.098	27.13	0.0221	-11.230	0.01189	
				0, 1	0	0	3.331×10^{-8}	0.1251	9.465×10^{-5}	0.69013	

poroso. Usando las expresiones de la funcionalidad de la porosidad y permeabilidad de equilibrio, Ecuaciones (5.19) y (5.20) respectivamente, en el modelo de equilibrio para el caso del flujo unidimensional en la dirección longitudinal dada por la Ecuación de transporte generalizada (5.8), completando el sistema de ecuaciones con las condiciones de frontera dadas por las Ecuación (5.17). Se aplican las mismas condiciones de flujo, que suponen un gradiente de presión constante en todo el sistema, establecido en la Ecuación (5.18). De manera análoga a las secciones anteriores, este sistema de ecuaciones se resuelve de manera numérica por elemento finito usando el software COMSOL Multiphysics [®](Ver. 4.3a), validando la independencia numérica de los perfiles de velocidad obtenidos. El dominio de solución corresponde al mismo que la DNS, es decir $(200 + N_f)\ell_c$ para $N_f = 1, = 6$ y $= 10$. La velocidad promedio de equilibrio de la DNS se obtiene usando una región de promediado igual $2r_0 = 10\ell_c$ en todo el sistema de estudio.

La comparación de los perfiles de la velocidad promedio adimensional entre del modelo ODA de ELM y la DNS, se muestran en las Figuras 5.9 y 5.10, para porosidades iguales y diferencia de porosidades de las regiones homogéneas, respectivamente, usadas para las predicciones de la permeabilidad de equilibrio. En estas figuras se muestra que, dentro de las regiones porosas, los perfiles son constantes y no exhiben diferencias apreciables de la velocidad, mientras que en la zona de la inter-región se nota un rápido incremento del perfil que inicia a los extremos del canal que posteriormente muestra diferencias más evidentes entre los perfiles predichos y la DNS. Respecto a los resultados de la Figura 5.9, correspondiente al caso cuando las regiones porosas tienen la misma porosidad, el acercamiento en la zona de la inter-región, Figuras 5.9(d)-(f) y 5.10(d)-(f), muestra diferencias apreciables entre ambos perfiles que aumentan al incrementarse el tamaño del canal, siendo más notorio al acercarse al centro del canal de fluido libre. Además para las fracturas de tamaño $f = 1\ell_c$ y $f = 6\ell_c$, se resalta que ambos perfiles muestran un incremento de la velocidad a los extremos de la fractura que se reduce posteriormente a un valor prácticamente constante para la DNS y que tienden a un valor mínimo para la velocidad predicha. Estos perfiles reflejan la resistencia al flujo ejercida por las regiones porosa en las cercanías al canal a través de su influencia vía la variación espacial de la permeabilidad de equilibrio sobre la velocidad predicha. En el caso de $f = 10\ell_c$, el perfil predicho exhibe las mayores desviaciones con la DNS, precisamente en la vecindad cercanas $y/2r_0 = 0$ se observan las máximas desviaciones. Se debe recordar que en este caso $2r_0 = f = 10\ell_c$ y estos resultados

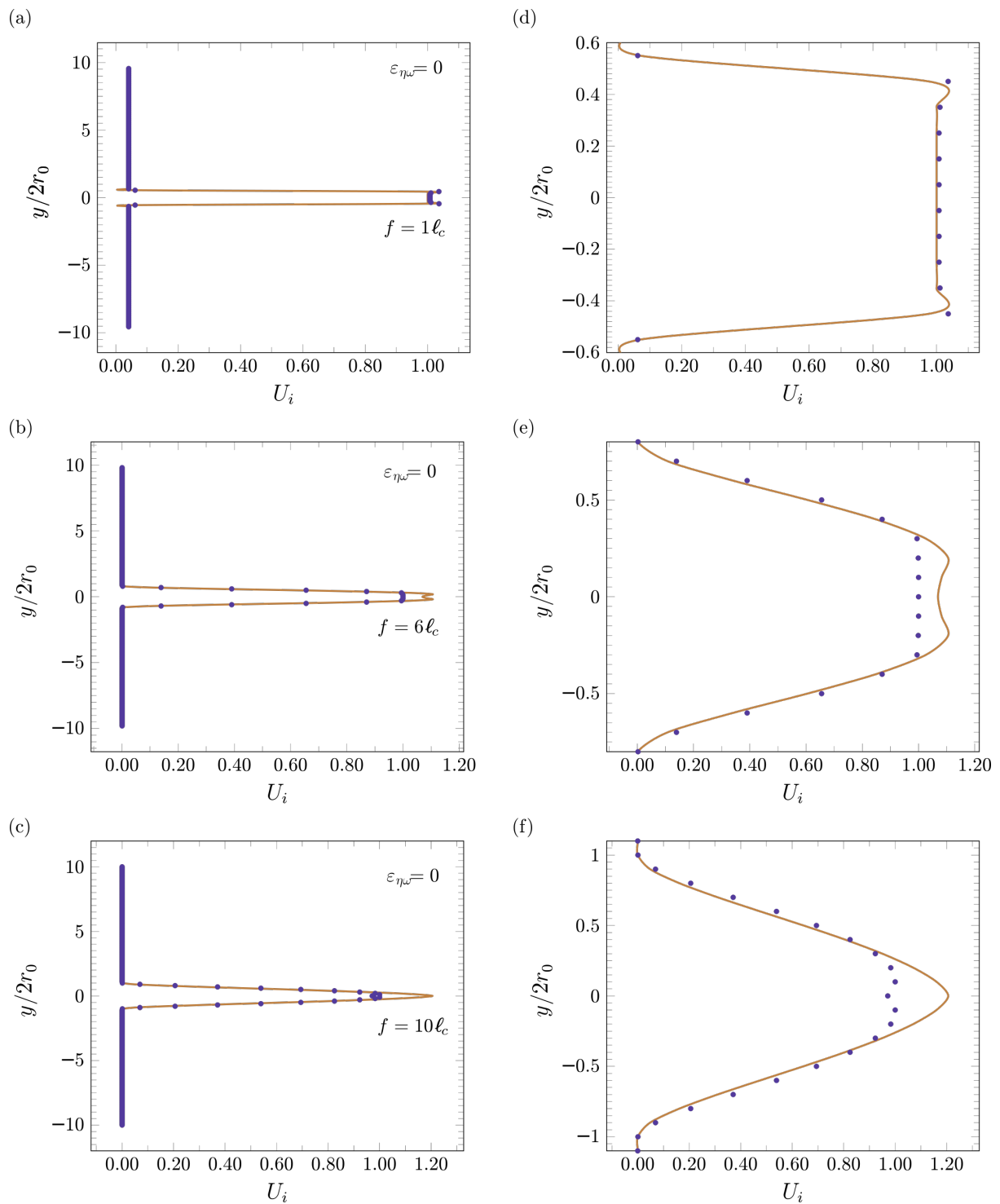


Figura 5.9. Predicción de los perfiles de velocidad obtenidos con la DNS(\dots) y el ODA de ELM ($—$) en la inter-región medio poros-fractura-medio poroso para $\nu = 1$ con $\varepsilon_\eta = \varepsilon_\omega = 0.4$. Bajo la condición: $Ca \ll 1$ y $Bo \ll 1$.

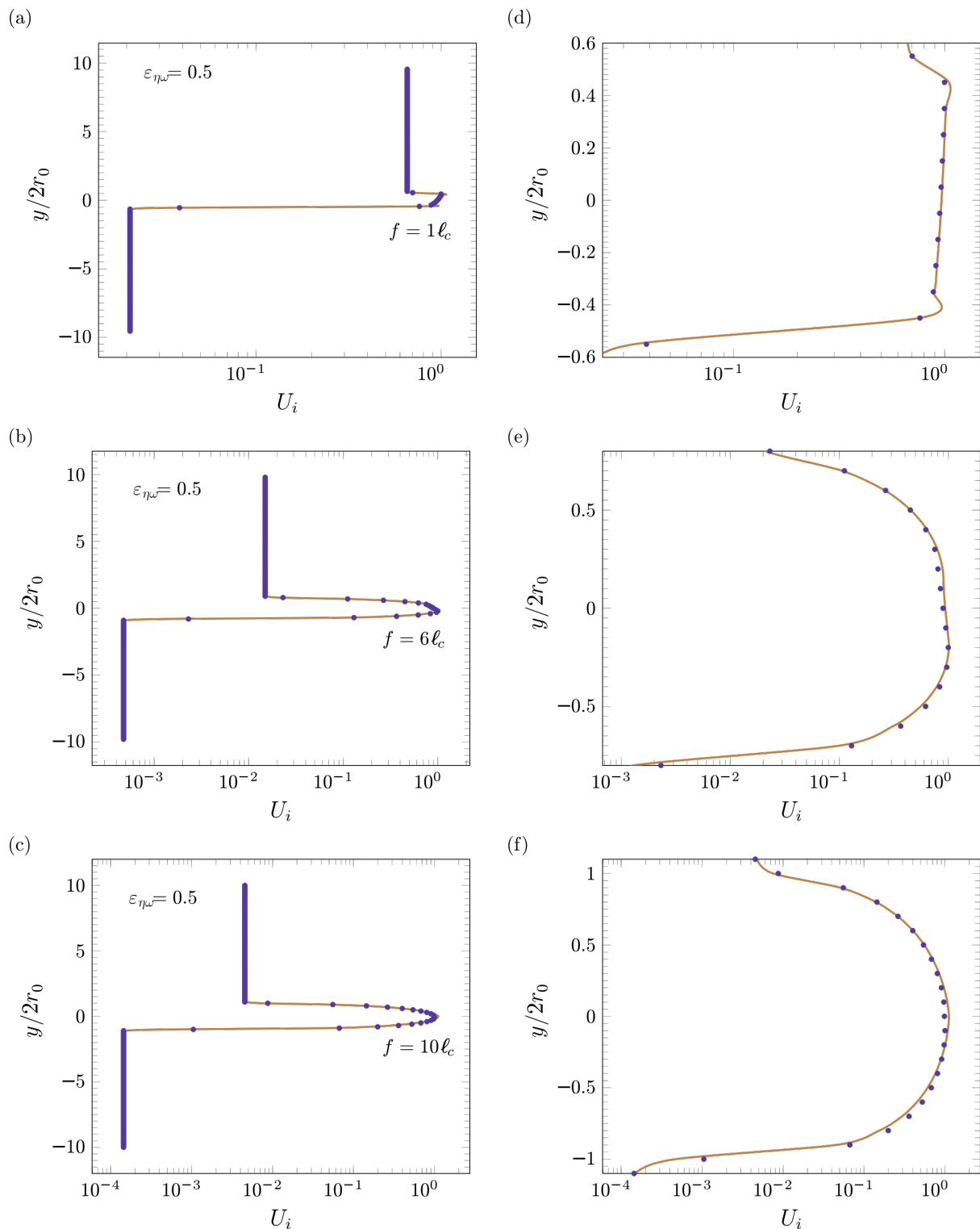


Figura 5.10. Predicción de los perfiles de velocidad obtenidos con la DNS(\dots) y el ODA de ELM ($—$) en la inter-región medio poros-fractura-medio poroso para $\nu = 1$ con $\varepsilon_\eta = 9$ $\varepsilon_\omega = 0.4$. Bajo la condición: $Ca \ll 1$ y $Bo \ll 1$.

mantienen el carácter del cálculo numérico de la velocidad promedio que se describe en el Apéndice C.

Por otro lado, en la Figura 5.10 se muestran los resultados para el caso donde existen diferencias en las porosidades de las regiones homogéneas separados por el canal en una representación simple de un sistema heterogéneo fracturado. En este caso, el acercamiento en las Figuras 5.10 (d)-(f), muestra perfiles asimétricos que no exhiben diferencias apreciables debido a la escala numérica logarítmica empleada, sin embargo como se presentará posteriormente, los errores promedio son similares a los obtenidos para porosidades iguales. Para $f = 1\ell_c$, los resultados obtenidos muestran el efecto de las regiones porosas sobre la velocidad predichas y la DNS; donde la velocidad en el seno de la región con mayor porosidad se propaga dentro del canal, reduciendo su velocidad hasta la vecindad de la región con menor porosidad. Este tipo de flujo es similar al esperado para un canal donde la pared superior tiene un valor de velocidad y en la pared inferior es de no deslizamiento. Por otro lado, para $f = 6$ y $f = 10$, el comportamiento de los perfiles se invierte, y la velocidad cercana a la región con la menor porosidad es mayor a su contraparte cercana a la porosidad con mayor porosidad, y por consiguiente se observa que su valor es cercano a la región menos porosa. Esto se asocia al efecto de la región porosa sobre la dependencia espacial del coeficiente de permeabilidad de equilibrio y que posteriormente se refleja en el perfil de la velocidad. Cabe señalar que el cálculo numérico de la velocidad promedio se lleva a cabo a través un promediado en una región cuyo centroide se localiza en esta inter-región que incluyen la fractura, que genera que la velocidad disminuya de la región menos porosa a la más porosa.

Basado en un análisis del error promedio, se puede determinar cuantitativamente la efectividad de las predicciones del modelo de equilibrio para este tipo inter-región al analizar su precisión. Usando la Ecuación (5.13), los porcentajes de error se presentan en la Tabla 5.8. Estos resultados muestran que las predicciones de la velocidad con el modelo de equilibrio son aceptables comparadas con la DNS, teniendo un error menor a un 15 % para las distintas anchuras del canal de fluido libre. Los porcentajes de error indican que la selección de una región de promediado de tamaño: $2r_0 = 10\ell_c$ es suficiente para llevar a cabo el cálculo de la permeabilidad de equilibrio y cerrar el modelo ODA de ELM. Estos porcentajes de error también indican que el tamaño de la región de promediado debe ser menor que el máximo valor de fractura analizada (*i.e.* $f < 10\ell_c$), para evitar errores mayores al 10 %. A pesar de lo anterior, en general, estos porcentajes de error

resultan ser tolerables en muchos casos de modelado. Respecto a estos resultados, se pueden hacer los siguientes comentarios adicionales:

- El porcentaje de error se incrementa al aumentar ν . Del mismo modo que para el sistema medio poroso - medio poroso, el flujo obstaculizado que representa $\nu < 1$ y la presencia de fase dispersa sólo en las regiones porosas resulta en mejores predicciones de la velocidad promedio, respecto a $\nu \geq 1$.
- El incremento de las diferencias de porosidad en las regiones porosas resulta en un aumento el porcentaje de error. Como ya se mencionó, esto se debe a que para celdas con distintas porosidades (con una misma saturación), la influencia de la fase dispersa en una región es más intensa que en la otra y su efecto en el flujo global a través de la inter- región es mayor, observando así, las diferencias en los perfiles predichos con la DNS en las Figuras 5.9 y 5.10. Este efecto que se reduce cuando los porosidades tienen valores más próximos y por lo tanto resulta en la disminución del porcentaje de error. Cuando las porosidades son iguales el único efecto restante sobre los perfiles de velocidad es el tamaño de fractura.
- El aumento del tamaño de la fractura, f , incrementa de manera proporcional el porcentaje

Tabla 5.10. Porcentaje de error relativo de la ODA de ELM respecto a la DNS para predecir la velocidad en la inter-región del sistema: medio poroso - fractura - medio poroso, con $2r_0 = 10\ell_c$, $S_\beta = 0.7$ y $\nu = 1$

ε_ω	ε_η	$\varepsilon_{\eta\omega}$	f	%Error		
				$\nu = 0.1$	$= 1$	$= 10$
0.4	0.4	0	1	0.8789	1.9248	3.2085
			6	6.2112	9.5310	10.626
			10	7.8669	13.5611	14.6207
0.4	0.9	0.5	1	0.5963	2.3314	3.1541
			6	4.9273	5.7183	6.8783
			10	6.4428	7.9858	8.7674
0.5	0.8	0.3	1	0.4909	1.6503	1.8347
			6	3.9517	5.2238	6.1597
			10	4.6507	7.4273	8.7787
0.6	0.7	0.1	1	0.3021	1.7026	1.9571
			6	3.4132	5.1717	6.6058
			10	3.7850	7.4237	8.7590
0.9	0.9	0	1	0.6670	1.4009	1.8149
			6	3.8380	1.9962	2.2679
			10	4.2042	2.5828	3.8915

de error promedio. Esto se debe a que la fase continua está presente tanto en las regiones porosas como en el canal libre y, bajo una saturación constante, en una mayor proporción respecto que la fase dispersa dentro de la región de promediado. Lo anterior implica que el flujo global a través de la inter-región se debe principalmente a la fase continua y como consecuencia, es de esperar que los valores predichos de la velocidad se desvíen de la DNS. Siendo más evidentes estas diferencias cuando el tamaño de la fractura se incrementa y el centroide de la región de promediado se localiza en la vecindad de $y/2r_0 = 0$ donde su volumen es ocupado mayoritariamente por la fase continua. Esto es más evidente cuando el tamaño que la región de promediado es del mismo tamaño de la fractura; donde el flujo global se debe completamente al flujo de la fase continua, y es en el cual se presentan los mayores errores ($f = 10$).

Estas observaciones se sustentan además al analizar y comparar los dominios de velocidad de la solución mostrados en las Figuras C.6-C.8 (de misma porosidad) con las Figuras C.9-C.11 (de diferente porosidad). Las observaciones anteriores además muestran que bajo una relación de viscosidades $\nu > 1$, mayor diferencia de las porosidades (a saturación constante) y un tamaño de fractura mayor a la región de promediado, resultan en condiciones donde el principio de ELM es más difícil de satisfacer para este tipo de sistemas medio poros - fractura- medio poroso. El modelo se puede aplicar a una serie de sistemas similares para este tipo de frontera, que impliquen variaciones en el tamaño y la forma del canal libre así como transiciones más suaves entre las regiones porosas. Para finalizar, es importante señalar que la validez del modelo ODA de ELM requiere ser analizada para los casos donde la fase dispersa también fluya a través del canal, extendiendo la aplicación del modelo ODA de ELM para describir completamente el flujo disperso de dos fases fluidas inmiscibles en un medio poroso.

5.2. Observaciones

Respecto a los resultados de las predicciones de los coeficientes efectivos que permiten cerrar el modelo ODA de ELM, deducido en el capítulo anterior, y la verificación de su precisión para los sistemas analizados mediante la comparación de los perfiles de velocidad promedio obtenidos con el modelo con aquellos de la DNS, se pueden hacer las siguientes observaciones :

- La cerradura del modelo de equilibrio se efectúa usando la solución numérica de las

ecuaciones puntuales que describen el flujo disperso para predecir los coeficientes efectivos involucrados, dadas sus definiciones en términos de cantidades puntuales y promedio de equilibrio (Ecuación 5.1). El método usado para cerrar el modelo se puede resumir de la forma siguiente

1. Se selecciona un dominio de solución de tal manera que se satisfaga la disparidad de longitudes de escala $r_0 \ll L_\omega, L_\eta$. Esto además concuerda con las condiciones para suponer como válida la hipótesis del equilibrio local mecánico.
 2. Una vez obtenida la solución de la DNS en este dominio propuesto, se selecciona un tamaño de región de promediado, donde se garantice al menos un orden de magnitud de separación con el dominio total. Esta región se usa para calcular las variaciones espaciales de la porosidad, la saturación (si se requiere) y las cantidades promedio a lo largo de la inter-región.
 3. Usando la misma región de promediado, se obtiene la dependencia continua con la posición de la permeabilidad de equilibrio en la zona transición, que captura los cambios abruptos de la microestructura en la inter-región.
 4. La validez de las predicciones se verifica al usar esta funcionalidad en el modelo promedio y comparar el perfil de velocidad predicho con el calculado de la DNS. Si el porcentaje error promedio en la inter-región es suficientemente grande, se modifica el tamaño de la región de promediado y se vuelve a calcular la permeabilidad de equilibrio en procedimiento recursivo. Se realiza nuevamente esta comparación, hasta obtener un porcentaje de error aceptable. Si así se requiriere se modifica también el dominio de solución de la DNS.
- Los resultados de los porcentajes del error promedio indican, de manera general, que la precisión del modelo deducido y la facilidad de satisfacer las condiciones del equilibrio local mecánico dependen en cierta medida de las propiedades físicas de las fases, (*i.e.* ν), de las diferencias en las propiedades estructurales de los medios porosos, (*i.e.* ε), el volumen ocupado por las fase dispersa (*i.e.* $S_{\gamma i}$, $i = \eta, \gamma$) y el tamaño de la fractura en relación con la región de promediado (*i.e.* f), de esta forma se pueden observar los siguientes efectos de los parámetros en los resultados

1. Para un incremento de ν , se reducen el porcentaje de error promedio en la inter-región para el sistema *medio poroso- fluido*. Por el contrario, el error aumenta para los sistemas: *medio poroso-medio poroso* y *medio poroso - fractura - medio poroso*. Esto se asocia al tipo de flujo que se ve favorecido en cada sistema, siendo el flujo tipo Darcy y aumentado ($\nu \geq 1$), para el primer caso, y el obstaculizado, ($\nu < 1$), para los dos casos restantes. Esta influencia se ve beneficiada cuando se incrementa la saturación de la fase dispersa en cada región.
 2. En general, si las características microscópicas de las regiones homogéneas son más similares entre sí, el porcentaje de error tiende a disminuir. Para el sistema *medio poroso-fluido*, el incremento de la porosidad y su respectiva reducción de la fase sólida y la dispersa, resulta en una mayor proporción de la fase continua, disminuyendo la influencia de la región porosa que resulta favoreciendo las predicciones de la velocidad. En los sistemas *medio poroso-medio poroso* y *medio poroso- fractura - medio poroso*, una mayor diferencia en la porosidad implica que los perfiles de velocidad presentan discrepancia de una región a otra, esto además se ve afectada por la presencia de la fase dispersa, la cual en una de las regiones ocupará un mayor volumen, generando por lo tanto que se presenten mayores discrepancias entre los perfiles de velocidad predichos y los de la DNS.
 3. De manera particular, para el sistema *medio poroso- fractura - medio poroso*, es evidente que la presencia de la fractura altera el flujo de manera drástica, al incrementarse la velocidad de manera súbita entre las regiones porosas. Esto genera condiciones de flujo que resultan más difíciles de predecir por el modelo de equilibrio, haciendo que aumente el error, los cuales se incrementan cuando aumenta el tamaño del canal de fluido libre.
- En las predicciones de la permeabilidad efectiva, y la respectiva validación del modelo de equilibrio, se advierte la limitación dimensional que presenta la solución de la DNS al ser obtenida usando un dominio bidimensional de geometría simple a través del método propuesto. Estudios previos para la predicción de la permeabilidad en un sistema tipo Beavers-Joseph, han señalado la existencia de diferencias si el dominio usado 2D o 3D (Valdés-Parada *y col.*, 2009b; Aguilar-Madera *y col.*, 2011b). Se reconoce entonces que para

obtener un análisis más exhaustivo requiere de obtener los valores de la permeabilidad de equilibrio en sistemas 3D para los mismos casos de estudio, para observar el efecto de la dimensión y cerrar así el modelo de ODA de ELM y verificar su precisión con la DNS en sistemas 3D.

- Por otro lado, la microestructura y la dirección del flujo neto influyen de manera significativa en las predicciones de la permeabilidad involucradas en los modelos efectivos descriptivos de la inter-región (Valdés-Parada *y col.*, 2009a). Se debe recalcar que las celdas unitarias que representan el flujo disperso entre las regiones porosas y usadas en este trabajo se limitaron probablemente a las geometrías más simples. Sin embargo, se debe recordar que el concepto de celda unitaria permite considerar modelos más complicados que permitan representar el flujo disperso y la geometría de la microestructura en la inter-región. Por lo tanto, dado que los coeficiente efectivos, en un modelo promedio, capturan las características esenciales del flujo y de acuerdo con la definición del coeficiente de permeabilidad de equilibrio el dominio de la DNS puede ser arbitrariamente compleja y contener las características geométricas que representan tanto las regiones porosas como el flujo disperso dentro de ellas. Además en muchas situaciones prácticas, las fronteras entre las regiones homogéneas no resultan ser suaves, sino que presentan ciertas rugosidades microscópicas, y en el caso del sistema fracturado, el canal libre incluye protuberancias haciendo esta inter-región más compleja. De hecho se ha señalado el efecto de la rugosidad microscópica en la inter-región es importante en la predicción de los coeficientes efectivos de transporte (Valdés-Parada *y col.*, 2009b). Es evidente que se requiere analizar, de manera particular, el efecto de estas distintas condiciones de la inter-región sobre la determinación de la variación espacial de la permeabilidad de equilibrio y la sucesiva predicciones del campo de velocidad. Se requiere entonces determinar también como estos factores influyen favoreciendo o dificultando la condición de equilibrio local mecánico. Para finalmente evaluar la precisión del modelo ODA de ELM desarrollado en este trabajo.
- La comparación de las predicciones de la velocidad con la DNS no reemplaza en ningún sentido la verificación con datos experimentales, pero proporciona una idea del alcance de las restricciones y suposiciones (*i.e.* Postulados de escalamiento Wood (2009); Wood y Valdés-Parada (2013)) involucradas en la deducción del modelo así como la validez de

la hipótesis del equilibrio local mecánico, particularmente en la zona de transición que representa la inter-región. Así mismo, y como se presentó en el análisis dentro del seno del medio poroso, la comparación que da la validez a las predicciones del coeficiente de permeabilidad también se pueden hacer sobre este parámetro mediante datos de laboratorio, donde se identifican las características del flujo disperso y las propiedades físicas de los fluidos en un sistema experimental similar a los propuestos en este trabajo. En la literatura se presentan estudios que analizan el flujo inmiscible y de transporte multifásico en medios porosos heterogéneos y fracturados mediante representaciones en dispositivos denominados micromodelos (Haghighi *y col.*, 1994; Wan *y col.*, 1996; Rangel-German y Kovscek, 2006; Dawe *y col.*, 2011; Fouladi *y col.*, 2015; Shi *y col.*, 2016), cuyas configuración geométricas son similares a las celdas unitarias planteadas en este trabajo para las predicciones del coeficiente y perfil de velocidad del modelo ODA de ELM. Los resultados, por lo tanto, motivan posteriores estudios teóricos y experimentales de cantidad de movimiento de un flujo disperso en las diferentes tipos de inter-regiones analizadas (*medio poroso-fluido, medio poroso-medio poroso y medio poroso-fractura-medio poroso*).

- Finalmente, es importante mencionar que a pesar de que se fue capaz de predecir los coeficiente de permeabilidad y resolver el modelo ODA de ELM, no significa que ésta deba de ser la alternativa más viable en el modelado para situaciones prácticas o experimentales. La demanda computacional que involucra la predicción del coeficiente efectivo a través de la DNS, puede resultar impráctico en algunas aplicaciones reales. Si el cálculo de los coeficientes y la solución del modelo de equilibrio implican el uso de dominios para la DNS de sistemas más realistas, como se mencionó, la demanda de cómputo resulta en algunos casos prohibitiva. Es de interés por lo tanto considerar alternativas de modelado con las que se puedan comparar los resultados de este trabajo, como se sugiere dentro del marco teórico del método del promedio volumétrico y como se plantea en la revisión de literatura al inicio del trabajo, se podría realizar con los correspondientes al modelo desde un enfoque de *dos dominios* (TDA) que incluya el principio de equilibrio local mecánico. A diferencia del modelo de un solo dominio de equilibrio estudiado en esta parte del trabajo, se encontraría expresado en términos de coeficientes constantes. Bajo este enfoque las

predicciones de la velocidad dependen de la deducción de las condiciones de salto asociadas a una *superficie divisoria* que sustituye la inter-región entre ambas regiones homogéneas. El modelo TDA involucra entonces resolver dos ecuaciones diferenciales, una para cada región homogénea, unidas por condiciones de salto en términos de coeficientes efectivos constantes. El desarrollo de este modelo está fuera de los objetivos de este trabajo, sin embargo de acuerdo con el trabajo reciente de Valdés-Parada *y col.* (2013), la predicción de los coeficientes de salto requieren de tomar en cuenta las variaciones espaciales de la porosidad y de los parámetros efectivos del modelo ODA. Por lo tanto los resultados del modelo de equilibrio bajo el enfoque de un solo dominio obtenidos en este trabajo sirven como precedente para plantear la deducción del modelo cerrado TDA de equilibrio local mecánico, para describir el flujo disperso de dos fases fluidas inmiscibles, que aporte un estudio más completo de este tipo de flujo en la frontera cercana entre dos regiones homogéneas.

5.3. Resumen

Se finaliza este capítulo con un resumen acerca de los resultados obtenidos de las predicciones de la permeabilidad de equilibrio y la respectiva cerradura del modelo ODA de ELM.

- En este capítulo se plantea una metodología para determinar la funcionalidad espacial de la permeabilidad de equilibrio dentro de la inter-región, que permite cerrar el modelo promedio de equilibrio deducido en el capítulo anterior. Los sistemas de estudio se centraron en la frontera cercana de dos regiones homogéneas del tipo: *medio poroso-fluido* (Beavers y Joseph), *medio poroso - medio poroso* (medios heterogéneos) y *medio poroso - fractura - medio poroso* (medio fracturado).
- Los resultados muestran que el coeficiente de permeabilidad se ve influenciado por diferencias en la microestructura de la inter-región, la relación de viscosidades de las fases fluidas y el tamaño de fractura. Estas condiciones se ven afectadas a su vez por el volumen ocupado por la fase dispersa dada una saturación.
- La validez del modelo promedio de equilibrio se determinó mediante la comparación del perfil de velocidad predicho por este modelo con el obtenido de la DNS. Los resultados

muestran, en un sentido amplio, que la condición de equilibrio local mecánico se favorece cuando las regiones homogéneas son más similares entre ellas, es decir, ambas porosidades tienen al mismo valor ($\varepsilon_\eta \rightarrow \varepsilon_\omega$). Lo anterior además se favorece por la menor presencia de la fase dispersa (S_γ disminuye). Esto último además implica como la relación de viscosidades actúa beneficiando la condición de equilibrio para cada uno de los sistemas analizados (para $\nu > 1$ el flujo se ve beneficiado por la presencia de la fase dispersa)

- La comparación cuantitativa, mediante el porcentaje del error promedio en la inter-región se calcula a valores menores al 15 %. Esto indica que la metodología para la determinación de los coeficientes efectivos y las capacidades predictivas del modelo de equilibrio resultan ser adecuados en muchos casos de aplicación de modelado y que a su vez se podría extender a sistemas experimentales. En la literatura se emplean micromodelos cuya configuración geométrica coincide con los modelos usados en este trabajo para representar el flujo multifásico en sistemas fracturados, heterogéneos y de canales parcialmente ocupados por medios porosos para experimentos de laboratorio.
- Se reconocen las limitaciones geométricas y dimensionales del dominio de solución de la DNS utilizado para el cálculo de la permeabilidad de equilibrio. Un análisis más profundo requiere de abordar sistemas tridimensionales y representaciones de la microestructura del medio poroso y del flujo disperso que permitan evaluar, con una mayor precisión, la variación espacial de la permeabilidad de equilibrio en la inter-región y las capacidades predictivas de la velocidad del modelo de equilibrio.
- Finalmente, el cálculo de la permeabilidad de equilibrio requiere de la DNS para determinar la funcionalidad de la posición, lo que involucra una demanda computacional que en algunos casos podría resultar impráctico si la representación del flujo disperso en la zona cercana de dos regiones homogéneas es más complicada a las aquí presentadas. Por otra parte, la determinación del perfil de velocidad implica la solución de ecuaciones diferenciales en términos de coeficientes variables que requieren también el uso de métodos numéricos en la solución. Esto sugiere alternativas al modelo ODA, como el enfoque de *dos dominios* (TDA), para describir el flujo disperso bajo el principio del equilibrio local mecánico, con el cual pueda ser comparado y así tener alternativas para describir el flujo disperso de dos fases fluidas inmiscibles para la inter-región. La cerradura del modelo

TDA, sin embargo requiere de la variación espacial del coeficiente efectivo que cierra la ODA. De esta forma los resultados obtenidos representan el inicio de una serie de trabajos enfocados a la descripción del flujo disperso entre regiones homogéneas.

En este trabajo se usó el marco teórico del método del promedio volumétrico para la deducción de las ecuaciones efectivas para el transporte disperso de dos fases fluidas inmiscibles en medios porosos. El principio de equilibrio local mecánico se aplicó en el desarrollo de modelos escalados para obtener una sola ecuación de transporte descriptiva de flujo multifásico. Se estudiaron los casos del flujo disperso inmiscibles en el seno de un medio poroso y la zona cercana a dos regiones homogéneas (inter-región). Los objetivos generales plantean el desarrollo de los modelos efectivos cerrados y su validez, los cuales se cumplieron en este trabajo de la forma siguiente.

- En la Parte I, se enfocó el análisis al transporte en el medio poroso homogéneo. En el Capítulo 2, se aplicó sistemáticamente el método del promedio volumétrico para escalar las ecuaciones descriptivas del flujo inmiscibles a la microescala obteniendo ecuaciones promedio de cantidad de movimiento y masa. Este modelo se refiere como *modelo de no equilibrio* debido a que se define un ecuación de transporte para cada fase (continua y dispersa). La cerradura del modelo se obtuvo al definir una serie de problemas de valores a la frontera en términos de las variables de cerradura que definen los coeficientes efectivos presentes en las ecuaciones promedio. Los problemas de cerradura se presentan en el Apéndice A.
- Para el Capítulo 3, se propuso la hipótesis del *equilibrio local mecánico*, que permitió la deducción de un modelo de una sola ecuación en términos de una sola velocidad y presión intrínseca para describir el flujo multifásico en un medio poroso homogéneo, que

se denominó como *modelo de equilibrio*. Se determinaron las condiciones generales para las cuales esta suposición es válida (deducidas en el Apéndice B). Estas sugieren que este modelo es válido si existe una disparidad entre longitudes características entre la escala microscópica y macroscópica. El modelo se cerró aplicando este principio de equilibrio al esquema de cerradura que se obtuvo para el modelo de no-equilibrio.

- En el Capítulo 3, además se llevó a cabo la predicción de los coeficientes efectivos del modelo de equilibrio como función de la porosidad, de la saturación de la fase continua, y la relación de viscosidades (con valores relacionados con procesos aplicados a la extracción mejorada de petróleo y remediación de mantos acuíferos). El flujo disperso en medios porosos se modeló mediante una celda unitaria periódica bidimensional de geometría simple donde la fase sólida y dispersa se representaron por arreglos periódicos de cilindros. Se encontró que el componente longitudinal del tensor de equilibrio depende de la relación de viscosidades y es sensible a la saturación de la fase dispersa. La definición de un factor de corrección permitió aislar el efecto de la fase dispersa sobre el coeficiente efectivo del modelo de equilibrio y por lo tanto identificar su influencia en el transporte de cantidad de movimiento multifásico. Además, se determinó que el flujo disperso se puede categorizar como: *aumentado*, *obstaculizado* o *Darcy*, en función de la relación de viscosidades de las fases fluidas y depende de la saturación de la fase dispersa.
- También en el Capítulo 3, se presentó la validación del modelo de equilibrio local mecánico mediante la comparación de la predicción teórica de la reducción de la permeabilidad con datos experimentales reportados en la literatura. Para ello, se construyó una celda unitaria representativa del sistema experimental; donde los mecanismos de flujo de las emulsiones en medios porosos se modelaron mediante de la localización, en diferentes configuraciones, de los círculos representativos de la fase dispersa dentro de los poros. De manera concluyente, se obtuvo que, a pesar de la geometría simple de la celda unitaria, la diferencia entre los coeficientes de permeabilidad predichos y los experimentales resultan en errores aceptables a valores bajos de saturación de la fase dispersa. Por lo tanto, la aplicación del modelo desarrollado, sujeto a la hipótesis del equilibrio local mecánico, resulta una opción razonable en el análisis del flujo disperso de dos fases fluidas inmiscibles en medios porosos homogéneos.

- Habiendo desarrollado el modelo de equilibrio local mecánico y mostrado que es una opción válida para modelar el flujo disperso de dos fases fluidas inmiscibles para el seno de la región porosa, el estudio para la zona de transición entre dos regiones homogéneas se presentó en la Parte II de este documento. En la cual inicialmente se dedujeron las ecuaciones de transporte generalizadas de no equilibrio y sin restricciones de longitudes características, bajo el enfoque de un sólo dominio, para analizar todo el sistema que incluye la inter-región. En el Capítulo 4 se dedujo el modelo de equilibrio local mecánico bajo el enfoque de un sólo dominio, obteniendo una sola ecuación de transporte generalizada de cantidad de movimiento y balance de masa. Este modelo está sujeto sólo a las condiciones que permiten suponer como válido el equilibrio local mecánico (desarrolladas en el Apéndice C). Estas condiciones resultan mas difíciles de satisfacer que sus análogas para la región homogénea debido a restricciones asociadas al tamaño de la región de promediado. La forma final del modelo de equilibrio se puede representar por una ecuación tipo *ley de Darcy-Brinkman* multifásica, con términos adicionales asociados al efecto que tiene la fase dispersa sobre el flujo global. Los coeficientes efectivos que se incluyen en este modelo se definieron en términos integrales de variables puntuales y promedios intrínsecos de equilibrio, omitiendo un esquema de cerradura similar al desarrollado en el Apéndice A para el caso de la región homogénea.

- En el Capítulo 5, se llevó a cabo la determinación de la funcionalidad espacial de la permeabilidad equilibrio para las distintas inter-regiones analizadas. El método que se propuso para el cálculo de los coeficientes efectivos implicó resolver las ecuaciones microscópicas en dominios simplificado del medio poroso (DNS), de tamaño suficientemente grande para caracterizar el sistema completo que incluye los cambios estructurales. La funcionalidad de los coeficiente de permeabilidad de equilibrio, a lo largo de la inter-región, mostró la misma dependencia con la relación de viscosidades y la saturación de la fase dispersa observada en el análisis del seno del medio poroso, por lo tanto, el flujo de ambas fases en esta zona también se puede denominar aumentado u obstaculizado en función del efecto de la fase dispersa. Por otro lado, se encontró que el coeficiente de permeabilidad de equilibrio se incrementa de manera directa con los cambios significativos que presenta la microestructura de la inter-región. Para el medio poroso - fluido su valor aumenta desde

un valor ligeramente menor a la permeabilidad en la región porosa a un valor infinito en el fluido libre. En el caso del medio poroso - medio poroso, el valor se incrementa de la región de la mayor porosidad a la de la menor porosidad de un perfil exponencial a uno lineal, a medida que la diferencia de las porosidades decrece. En el sistema medio poroso - fractura - medio poroso, el coeficiente de permeabilidad se incrementa en la zona inmediata a la fractura de manera proporcional a su tamaño, el perfil es simétrico si las regiones tienen la misma porosidad y asimétrico en caso contrario. Se encontró que la permeabilidad en un sistema fracturado se vuelve infinito cuando la región de promediado es igual al tamaño de fractura.

- Finalmente, en el Capítulo 5, se resolvió el modelo de equilibrio y sus perfiles de velocidad predichos se compararon con los obtenidos a través de la DNS. A pesar de las suposiciones y restricciones que involucra el principio de equilibrio local mecánico en el modelo, este predice, dentro de un margen de error aceptable, los resultados de la DNS para las diferentes condiciones en las que se efectuaron las simulaciones. Por lo tanto, el modelo de un solo dominio de equilibrio local mecánico representa una opción válida para modelar el transporte de cantidad de movimiento de flujo disperso en la inter-región entre un medio poroso - fluido, medio poroso-medio poroso y un medio poroso - fractura - medio poroso.

Con los resultados presentados, se debe agregar que el modelo de equilibrio local mecánico deducido para el medio poroso homogéneo incorpora una serie de restricciones y suposiciones que indican bajo qué condiciones el modelo puede considerarse válido y por lo tanto, establecer con anterioridad qué tipo de sistemas pueden ser analizados. El desarrollo del modelo proporciona además de un mejor entendimiento del proceso fenomenológico del transporte disperso, el cual se incluye en los coeficientes efectivos de transporte. Es importante señalar que se requiere la comparación de este modelo de equilibrio con el de no-equilibrio a fin de identificar, con una mayor precisión cuantitativa, las condiciones que validan la hipótesis de equilibrio, en ambos: el seno de la región porosa y la inter-región. Por otro lado, los resultados también muestran la utilidad de un modelo bajo el enfoque de un solo dominio respecto a la caracterización del fenómeno del transporte disperso en la zona de transición entre diferentes tipos de regiones homogéneas. Los resultados obtenidos que involucran la cerradura de este modelo se pueden extender al desarrollo de un modelo cerrado bajo el enfoque de dos dominios,

el cual es más comúnmente usado en el modelado de sistemas entre regiones homogéneas. Esto debido a que se requiere conocer previamente la variación espacial de los coeficientes asociados al modelo de un sólo dominio para la predicción de los coeficientes efectivos presentes en las condiciones de salto, dentro del esquema de cerradura del modelo de dos dominios. En otras palabras, los resultados obtenidos en este trabajo sirven como precedente a un análisis más amplio dedicados a describir el transporte disperso de dos fases fluidas inmiscibles entre regiones homogéneas a través del desarrollo de modelos de equilibrio y no-equilibrio local mecánico. Esto se llevará a cabo en trabajos posteriores.

- Abou-Kassem, J., Farouq Ali, S. (1995). Modeling of emulsion flow in porous media. *Journal of Canadian Petroleum Technology* **34**, 30–38.
- Aguilar-Madera, C., Valdés-Parada, F., Goyeau, B., Ochoa-Tapia, J. (2011a). One-domain approach for heat transfer between a porous medium and a fluid. *International Journal of Heat and Mass Transfer* **54**, 2089 – 2099.
- Aguilar-Madera, C.G., Valdés-Parada, F.J., Goyeau, B., Ochoa-Tapia, J.A. (2011b). Convective heat transfer in a channel partially filled with a porous medium. *International Journal of Thermal Sciences* **50**, 1355 – 1368.
- Al-Besharah, J.M., Salman, O.A., Akashah, S.A. (1987). Viscosity of crude oil blends. *Industrial & Engineering Chemistry Research* **26**, 2445–2449. <http://dx.doi.org/10.1021/ie00072a010>.
- Alvarado, D., Marsden, S. (1979). Flow of oil-in-water emulsions through tubes and porous media. *Society of Petroleum Engineers Journal* **19**, 369–377.
- Auriault, J., Lebaigue, D., Bonnet, G. (1989). Dynamics of two immiscible fluids flowing through deformable porous media. *Transport in Porous Media* **4**, 105 – 128.
- Auriault, J.L. (1987). Nonsaturated deformable porous media: Quasistatics. *Transport in Porous Media* **2**, 45–64.

- Bear, J., Cheng, A.D. (2010). *Modeling Groundwater Flow and Contaminant Transport*. Springer Netherlands.
- Beavers, G.S., Joseph, D.D. (1967). Boundary conditions at a naturally permeable wall. *Journal of Fluid Mechanics* **30**, 197–207.
- Bitten, J.F. (1970). Coalescence of water droplets on single fibers. *Journal of Colloid and Interface Science* **33**, 265 – 271.
- Buckley, S., Leverett, M. (1942). Mechanism of fluid displacements in sands. *Transactions of the AIME* **146**, 107–116.
- Carbonell, R., Whitaker, S. (1984). Heat and mass transfer in porous media, en: Bear, J., Corapcioglu, M. (Eds.), *Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media*. Springer Netherlands. volumen 82 de *NATO ASI Series*, pp. 121–198.
- Chung, C., Yang, C., Chen, C. (2006). Analysis of cell growth and diffusion in a scaffold for cartilage tissue engineering. *Biotechnology and Bioengineering* **94**, 1138–1146.
- Cobos, S., Carvalho, M., Alvarado, V. (2009). Flow of oil-water emulsions through a constricted capillary. *International Journal of Multiphase Flow* **35**, 507–515.
- Darby, J.L., Lawler, D.F. (1990). Ripening in depth filtration: effect of particle size on removal and head loss. *Environmental Science & Technology* **24**, 1069–1079. <http://dx.doi.org/10.1021/es00077a018>.
- Davis, E.L. (1997). How Heat Can Enhance In-situ Soil and Aquifer Remediation: Important Chemical Properties and Guidance on Choosing the Appropriate Technique.
- Davit, Y., Bell, C.G., Byrne, H.M., Chapman, L.A., Kimpton, L.S., Lang, G.E., Leonard, K.H., Oliver, J.M., Pearson, N.C., Shipley, R.J., Waters, S.L., Whiteley, J.P., Wood, B.D., Quintard, M. (2013). Homogenization via formal multiscale asymptotics and volume averaging: How do the two techniques compare? *Advances in Water Resources* **62, Part B**, 178 – 206. A tribute to Stephen Whitaker.
- Dawe, R.A., Caruana, A., Grattoni, C.A. (2011). Microscale visual study of end effects at permeability discontinuities. *Transport in Porous Media* **86**, 601–616.

- Demikhova, I.I., Likhanova, N.V., Perez, J.R.H., Falcon, D.A.L., Olivares-Xometl, O., Berthier, A.E.M., Lijanova, I.V. (2016). Emulsion flooding for enhanced oil recovery: Filtration model and numerical simulation. *Journal of Petroleum Science and Engineering* **143**, 235 – 244.
- Devereux, O.F. (1974a). Emulsion flow in porous solids: I. a flow model. *The Chemical Engineering Journal* **7**, 121 – 128.
- Devereux, O.F. (1974b). Emulsion flow in porous solids: II. experiments with a crude oil-in-water emulsion in porous sandstone. *The Chemical Engineering Journal* **7**, 129 – 136.
- Duduković, M.P., Larachi, F., Mills, P.L. (2002). Multiphase catalytic reactors: a perspective on current knowledge and future trends. *Catalysis Reviews* **44**, 123–246. <http://dx.doi.org/10.1081/CR-120001460>.
- Dullien, F. (1992). *Porous media: fluid transport and pore structure*. Academic Press Inc.
- Durucana, S., Ahsan, M., Syed, A., Shi, J.Q., Korre, A. (2013). Two phase relative permeability of gas and water in coal for enhanced coalbed methane recovery and CO₂ storage. *Energy Procedia* **37**, 6730 – 6737.
- Engelke, B., Carvalho, M.S., Alvarado, V. (2013). Conceptual darcy-scale model of oil displacement with macroemulsion. *Energy & Fuels* **27**, 1967–1973. <http://dx.doi.org/10.1021/ef301429v>.
- Fouladi, K., Haghshenas, A., Rasaei, M.R. (2015). Pore scale experiments of steam and non-condensable gaseous additives injection in a fractured micro model system. *Energy Sources, Part A: Recovery, Utilization, and Environmental Effects* **37**, 273–282. <http://dx.doi.org/10.1080/15567036.2011.585378>.
- Golfier, F., Wood, B.D., Orgogozo, L., Quintard, M., Buès, M. (2009). Biofilms in porous media: Development of macroscopic transport equations via volume averaging with closure for local mass equilibrium conditions. *Advances in Water Resources* **32**, 463 – 485.
- Goyeau, B., Lhuillier, D., Gobin, D., Velarde, M. (2003). Momentum transport at a fluid–porous interface. *International Journal of Heat and Mass Transfer* **46**, 4071 – 4081.

- Gray, W. (1975). A derivation of the equations for multiphase transport. *Chem. Engng. Sci.* **30**, 229–231.
- Gray, W., Miller, C. (2014). *Introduction to the Thermodynamically Constrained Averaging Theory*. Springer.
- Gray, W.G., Miller, C.T. (2005). Thermodynamically constrained averaging theory approach for modeling flow and transport phenomena in porous medium systems: 1. motivation and overview. *Advances in Water Resources* **28**, 161 – 180.
- Guillen, V., Romero, M., da Silveira Carvalho, M., Alvarado, V. (2012a). Capillary-driven mobility control in macro emulsion flow in porous media. *International Journal of Multiphase Flow* **43**, 62–65.
- Guillen, V.R., Carvalho, M.S., Alvarado, V. (2012b). Pore scale and macroscopic displacement mechanisms in emulsion flooding. *Transport in Porous Media* **94**, 197–206.
- Hadjiev, D., Kuychoukov, G. (1989). A separator for liquid-liquid dispersions. *The Chemical Engineering Journal* **41**, 113 – 116.
- Haghighi, M., Xu, B., Yortsos, Y. (1994). Visualization and simulation of immiscible displacement in fractured systems using micromodels: I. drainage. *Journal of Colloid and Interface Science* **166**, 168 – 179.
- Herzig, J.P., Leclerc, D.M., Goff, P.L. (1970). Flow of suspensions through porous media—application to deep filtration. *Industrial & Engineering Chemistry* **62**, 8–35. <http://dx.doi.org/10.1021/ie50725a003>.
- Howes, F., Whitaker, S. (1985). The spatial averaging theorem revisited. *Chem. Eng. Sci.* **40**, 1387–1392.
- Islam, M.R., Ali, S.M.F. (1994). Numerical simulation of emulsion flow through porous media. *Journal of Canadian Petroleum Technology* **33**, 59–63.
- Jackson, A.S., Miller, C.T., Gray, W.G. (2009). Thermodynamically constrained averaging theory approach for modeling flow and transport phenomena in porous medium systems: 6. two-fluid-phase flow. *Advances in Water Resources* **32**, 779 – 795.

- Jain, V., Demond, A. (2002a). Conductivity reduction due to emulsification during surfactant enhanced-aquifer remediation. 1. Emulsion transport. *Environ. Sci. Technol.* **36**, 5426–5433.
- Jain, V., Demond, A.H. (2002b). Conductivity reduction due to emulsification during surfactant enhanced-aquifer remediation. 2. formation of emulsion in situ. *Environmental Science & Technology* **36**, 5434–5440. PMID: 12521172. <http://dx.doi.org/10.1021/es011396x>.
- Jennings, H., Johnson, F., McAuliffe (1974). A cuastic waterflooding process for heavy oils. *Journal of petroleum technology* **26**, 1344 – 1352.
- Lasseux, D., Ahmadi, A., Akbar, A., Arani, A. (2008). Two-phase inertial flow in homogeneous porous media: A theoretical derivation of a macroscopic model. *Transport in Porous Media* **75**, 370–400.
- Lasseux, D., Quintard, M., Whitaker, S. (1996). Determination of permeability tensors for two-phase flow in homogeneous porous media: Theory. *Transport in Porous Media* **24**, 107–137.
- Liu, D., Johnson, P.R., Elimelech, M. (1995). Colloid deposition dynamics in flow-through porous media: Role of electrolyte concentration. *Environmental Science & Technology* **29**, 2963–2973. PMID: 22148203. <http://dx.doi.org/10.1021/es00012a012>.
- Luévano-Rivas, O., Valdés-Parada, F. (2015). Upscaling immiscible two-phase dispersed flow in homogeneous porous media: A mechanical equilibrium approach. *Chemical Engineering Science* **126**, 116 – 131.
- Ma, J. (2015). Review of permeability evolution model for fractured porous media. *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering* **7**, 351 – 357.
- Mayer, A.S., Hassanizadeh, S.M. (2009). *Soil and groundwater contamination: Nonaqueous phase liquids*. Water Resources Monograph.
- Mayer, A.S., Hassanizadeh, S.M. (2013). *Soil and Groundwater Contamination: Nonaqueous Phase Liquids—Principles and Observations*. American Geophysical Union.
- McAuliffe, C. (1973). Oil-in-water emulsions and their flow properties in porous media. *Journal of Petroleum Technology* **25**, 727–733.

- McKinley, R.M., Jahns, H.O., Harris, W.W., Greenkorn, R.A. (1966). Non-newtonian flow in porous media. *AIChE Journal* **12**, 17–20.
- Miller, C.T., Gray, W.G. (2005). Thermodynamically constrained averaging theory approach for modeling flow and transport phenomena in porous medium systems: 2. foundation. *Advances in Water Resources* **28**, 181 – 202.
- Mulligan, C., Yong, R., Gibbs, B. (2001). Surfactant-enhanced remediation of contaminated soil: a review. *Engineering geology* **60**, 371 – 380.
- Nogueira, G., Carvalho, M., Alvarado, V. (2013). Dynamic network model of mobility control in emulsion flow through porous media. *Transport in Porous Media* **98**, 427–441.
- Nozad, I., Carbonell, R., Whitaker, S. (1985). Heat conduction in multiphase systems—i. *Chemical Engineering Science* **40**, 843 – 855.
- Ochoa, J., Stroeve, P., Whitaker, S. (1986). Diffusion and reaction in cellular media. *Chemical Engineering Science* **41**, 2999 – 3013.
- Ochoa-Tapia, J., Whitaker, S. (1995a). Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid- II. Comparison with experiment. *International Journal Heat Mass Transfer* **38**, 2647–2655.
- Ochoa-Tapia, J., Whitaker, S. (1995b). Momentum transfer at the boundary between a porous medium and homogeneous fluid - I. Theoretical development. *International Journal Heat Mass Transfer* **38**, 2635 – 2646.
- Ochoa-Tapia, J., Whitaker, S. (1997a). Heat transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid. *International Journal of Heat and Mass Transfer* **40**, 2691 – 2707.
- Ochoa-Tapia, J., Whitaker, S. (1997b). Momentum jump condition at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid: Inertial effects. *Journal of Porous Media* **1**, 201–217.
- Ochoa-Tapia, J.A., Whitaker, S. (1998). Heat transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid: The one-equation model. *Journal of Porous Media* **1**, 31–46.

- Oren, P.E., Bakke, S. (2002). Process based reconstruction of sandstones and prediction of transport properties. *Transport in Porous Media* **46**, 311–343.
- Oren, P.E., Bakke, S., Arntzen, O. (1998). Extending predictive capabilities to network models. *Journal of Canadian Petroleum Technology* **3**, 324 – 336.
- Orgogozo, L., Golfier, F., Buès, M., Quintard, M. (2010). Upscaling of transport processes in porous media with biofilms in non-equilibrium conditions. *Advances in Water Resources* **33**, 585 – 600.
- Ouyang, Y., Mansell, R.S., Rhue, R. (1995). Emulsion - mediated transport of nonaqueous-phase liquid in porous media: A review. *Critical Reviews in Environmental Science and Technology* **25**, 269–290.
- Prat, M. (1989). On the boundary conditions at the macroscopic level. *Transport in Porous Media* **4**, 259–280.
- Prat, M. (1990). Modelling of heat transfer by conduction in a transition region between a porous medium and an external fluid. *Transport in Porous Media* **5**, 71–95.
- Prat, M. (1992). Some refinements concerning the boundary conditions at the macroscopic level. *Transport in Porous Media* **7**, 147–161.
- Quintard, M., Kaviany, M., Whitaker, S. (1997). Advances in heat transfer in porous media two-medium treatment of heat transfer in porous media: numerical results for effective properties. *Advances in Water Resources* **20**, 77 – 94.
- Quintard, M., Whitaker, S. (1987). Écoulement monophasique en milieu poreux: effet des hétérogénéités locales. *Journal de mécanique théorique et appliquée* **6**, 691–726.
- Quintard, M., Whitaker, S. (1988). Two-phase flow in heterogeneous porous media: The method of large-scale averaging. *Transport in Porous Media* **3**, 357–413.
- Quintard, M., Whitaker, S. (1993). One- and two-equations models for transient diffusion process in two-phase system. *Adv. Heat Transfer* **23**.
- Quintard, M., Whitaker, S. (1994). Transport in ordered and disordered porous media v: Geometrical results for two-dimensional systems. *Transport in Porous Media* **15**, 183–196.

- Quintard, M., Whitaker, S. (1995). Local thermal equilibrium for transient heat conduction: theory and comparison with numerical experiments. *International Journal of Heat and Mass Transfer* **38**, 2779 – 2796.
- Rangel-German, E.R., Kavscek, A.R. (2006). A micromodel investigation of two-phase matrix-fracture transfer mechanisms. *Water Resources Research* **42**, n/a–n/a. W03401.
- Romero, M., Carvalho, M., Alvarado, V. (2011). Experiments and network model of flow of oil-water emulsion in porous media. *Physical Review E*. **84**, 046305.
- Sahimi, M. (2011). *Flow and Transport in Porous Media and Fractured Rock*. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA.
- Sanchez-Palencia, E. (1980). *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*. Springer-Verlag.
- Savins, J.G. (1969). Non-newtonian flow through porous media. *Industrial & Engineering Chemistry* **61**, 18–47. <http://dx.doi.org/10.1021/ie50718a005>.
- Scheidegger, A. (1974). *The Physics of Flow Through Porous Media*. University of Toronto Press. 3ra edición.
- Schmidt, D., Soo, H., Radke, C. (1984). Linear oil displacement by emulsion entrapment process. *Society of petroleum engineers journal* **24**, 351 – 360.
- Schramm, L. (1992). *Emulsions - fundamentals and applications in petroleum industry*. American Chemistry Society. in edición.
- Sherman, J. (1983). *In Encyclopedia of Emulsion Technology*. Deker. 1ra edición.
- Shi, S., Wang, Y., Li, Z., Ding, M., Chen, W. (2016). Experimental study on stability and improving sweep efficiency with microfoam in heterogeneous porous media. *Journal of Dispersion Science and Technology* **37**, 1152–1159. <http://dx.doi.org/10.1080/01932691.2015.1083869>.
- Slattery, J.C., Sagis, L., Oh, E.S. (2007). *Interfacial Transport Phenomena*. Springer US. second edición.
- Soo, H., Radke, C. (1984). The flow mechanism of dilute, stable emulsions in porous media. *Ind. Eng. Chem. Fundam.* **342 - 347**, 342–347.

- Soo, H., Radke, C. (1986). A filtration model for flow of dilute, stable emulsion in porous media - I. Theory. *Chemical Engineering Science* **41**, 263–272.
- Soo, H., Williams, M., Radke, C. (1986). A filtration model for the flow of dilute, stable emulsions in porous media - II. Parameter evaluation and estimation. *Chemical Engineering Science* **41**, 273–281.
- Torres, F. (1987). Closure of the governing equations for immiscible two-phase flow: A research comment. *Transp. Porous Media* **2**, 383–393.
- Trambouze, P. (1990). Countercurrent two-phase flow fixed bed catalytic reactors. *Chemical engineering science* **45**, 2269–2275.
- Truesdell, C., Toupin, R. (1960). *The classical field theories*. Handbuch der Physik, Springer-Verlag, New York.
- Valdés-Parada, F., Aguilar-Madera, C., Ochoa-Tapia, J., Goyeau, B. (2013). Velocity and stress jump conditions between a porous medium and a fluid. *Advances in Water Resources* **62**, 327–339.
- Valdés-Parada, F., Goyeau, B., Ochoa-Tapia, J. (2007a). Jump momentum boundary condition at a fluid-porous dividing surface: Derivation of the closure problem. *Chemical Engineering Science* **62**, 4025–4039.
- Valdés-Parada, F., Ochoa-Tapia, J., Alvarez-Ramírez, J. (2007b). Diffusive mass transport in the fluid-porous medium inter-region: Closure problem solution for the one-domain approach. *Chemical Engineering Science* **62**, 6054–6068.
- Valdés-Parada, F., Álvarez Ramirez, J., Ochoa-Tapia, J. (2009a). Validity of the permeability Carman-Kozeny equation: A volume averaging approach. *Physica A* **388**, 789–798.
- Valdés-Parada, F.J., Alvarez-Ramírez, J., Goyeau, B., Ochoa-Tapia, J.A. (2009b). Computation of jump coefficients for momentum transfer between a porous medium and a fluid using a closed generalized transfer equation. *Transport in Porous Media* **78**, 439–457.
- Valdés-Parada, F.J., Alvarez-Ramirez, J., Goyeau, B., Ochoa-Tapia, J.A. (2009c). Jump

- condition for diffusive and convective mass transfer between a porous medium and a fluid involving adsorption and chemical reaction. *Transport in Porous Media* **78**, 459–476.
- Valdés-Parada, F.J., Goyeau, B., Ochoa-Tapia, J.A. (2006). Diffusive mass transfer between a microporous medium and an homogeneous fluid: Jump boundary conditions. *Chemical Engineering Science* **61**, 1692 – 1704.
- Valencia-López, J., Ochoa-Tapia, J. (2001). A study of buoyancy-driven flow in a confined fluid overlying a porous layer. *International Journal of Heat and Mass Transfer* **44**, 4725 – 4736.
- Wan, J., Tokunaga, T.K., Tsang, C.F., Bodvarsson, G.S. (1996). Improved glass micromodel methods for studies of flow and transport in fractured porous media. *Water Resources Research* **32**, 1955–1964.
- Whitaker, S. (1983). Difusion con reaccion en un medio poroso con un modelo de micro-macroporos. *Rev. Lat. Ing. Quim.* **13**, 143–183.
- Whitaker, S. (1986a). Flow in porous media I: A theoretical derivation of Darcy’s law. *Transport in Porous Media* **1**, 3–25.
- Whitaker, S. (1986b). Flow in porous media II: The governing equations for immiscible, two-phase flow. *Transport in Porous Media* **1**, 105–125.
- Whitaker, S. (1986c). Local thermal equilibrium: An application to packed bed catalytic reactor design. *Chemical Engineering Science* **41**, 2029 – 2039.
- Whitaker, S. (1991). Improved constraints for the principle of local thermal equilibrium. *Industrial & Engineering Chemistry Research* **30**, 983–997. <http://dx.doi.org/10.1021/ie00053a022>.
- Whitaker, S. (1994). The closure problem for two-phase flow in homogeneous porous media. *Chemical Engineering Science* **49**, 5.
- Whitaker, S. (1999). *Theory and Applications of Transport in Porous Media: The Method of Volume Averaging*. Kluwer Academic Publishers.
- Wood, B. (2009). The role of scaling laws in upscaling. *Advance in Water Resources* **32**, 723 – 736.

- Wood, B., Valdés-Parada, F. (2013). Volume averaging: Local and nonlocal closure using a Green's function approach. *Advances in Water Resources* **51**, 139–167.
- Wood, B.D., Quintard, M., Whitaker, S. (2002). Calculation of effective diffusivities for biofilms and tissues. *Biotechnology and Bioengineering* **77**, 495–516.
- Wood, B.D., Whitaker, S. (1998). Diffusion and reaction in biofilms. *Chemical Engineering Science* **53**, 397 – 425.
- Wood, B.D., Whitaker, S. (1999). Cellular growth in biofilms. *Biotechnology and Bioengineering* **64**, 656–670.
- Wood, B.D., Whitaker, S. (2000). Multi-species diffusion and reaction in biofilms and cellular media. *Chemical Engineering Science* **55**, 3397 – 3418.
- Yang, D., Currier, R.P., Zhang, D.Z. (2009). Ensemble phase averaged equations for multiphase flows in porous media. part 1: The bundle-of-tubes model. *International Journal of Multiphase Flow* **35**, 628 – 639.
- Zhang, D., Prosperetti, A. (1997). Momentum and energy equations for disperse two-phase flows and their closure for dilute suspensions. *International Journal of Multiphase Flow* **23**, 425 – 453.
- Zhang, D.Z. (2009). Ensemble phase averaged equations for multiphase flows in porous media. part 2: A general theory. *International Journal of Multiphase Flow* **35**, 640 – 649.
- Zhang, D.Z., Prosperetti, A. (1994). Averaged equations for inviscid disperse two-phase flow. *Journal of Fluid Mechanics* **267**, 185–219.
- Zhang, D.Z., VanderHeyden, W.B., Zou, Q., Padiál-Collins, N.T. (2007). Pressure calculations in disperse and continuous multiphase flows. *International Journal of Multiphase Flow* **33**, 86 – 100.

A.1. Cerradura para el modelo de no equilibrio local mecánico

En esta sección se presentan los detalles relacionados con la deducción relacionados con la determinación de la funcionalidad de las desviaciones espaciales y las cantidades promedio que permitan cerrar el modelo macroscópico. De la Ecuación (2.21) y considerando la simplificación establecida en la Ecuación (2.25), se deduce que las desviaciones espaciales para cualquier cantidad

$$\tilde{\psi}_\alpha \Big|_{\mathbf{r}_\alpha} = \psi_\alpha \Big|_{\mathbf{r}_\alpha} - \langle \psi_\alpha \rangle^\alpha \Big|_{\mathbf{x}}, \quad \alpha = \beta, \gamma, \quad \psi_\beta = p, \mathbf{v} \quad (\text{A.1})$$

A.1.1. Ecuación de continuidad

El desarrollo del problema de cerradura inicia con la ecuación de continuidad de las desviaciones para la fase- β ; como lo sugiere la expresión anterior, a la ecuación puntual, Ecuación (2.1a)

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_\beta = 0, \quad (\text{A.2})$$

se le resta la ecuación promedio para la fase- β , Ecuación (2.16a), en términos de la velocidad promedio intrínseca

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta = -\varepsilon_\beta^{-1} \nabla \varepsilon_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta, \quad (\text{A.3})$$

El resultado de esta resta es la ecuación de continuidad para $\tilde{\mathbf{v}}_\beta$

$$\underbrace{\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}_\beta}_{\mathcal{O}\left(\frac{\langle v_\beta \rangle^\beta}{\ell_\beta}\right)} = \underbrace{\varepsilon_\beta^{-1} \nabla \varepsilon_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta}_{\mathcal{O}\left(\frac{\langle v_\beta \rangle^\beta}{r_0}\right)}, \quad (\text{A.4})$$

Intuitivamente en el lado derecho de esta ecuación, al considerar el medio poroso homogéneo, (de acuerdo a la definición de Quintard y Whitaker, 1987), las fracciones volumétricas son independientes de la posición del centroide, \mathbf{x} y como consecuencia puede considerarse $\nabla \varepsilon_\beta = 0$. Sin embargo, un análisis con base en estimados de órdenes de magnitud puede proporcionar restricciones adicionales. Los estimados de órdenes de magnitud se indican en la Ecuación (A.4), aquí los gradientes de las desviaciones son del orden de ℓ_β y los gradientes de la fracción volumétrica son del orden de la región de promediado r_0 . También se ha usado que $\tilde{\mathbf{v}}_\beta$ es del orden de $\langle v_\beta \rangle^\beta$ que se puede deducir de la condición de no deslizamiento de la velocidad, dada en la Ecuación (2.1e), como se mostrará posteriormente. De esta forma, se pueden considerar las siguientes desigualdad válida

$$\varepsilon_\beta^{-1} \nabla \varepsilon_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \ll \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}_\beta \quad (\text{A.5})$$

cuando se satisface la restricción de escalas características dada en la Ecuación (2.9). Así, la ecuación de continuidad para las desviaciones espaciales de la fase- β se expresa como

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}_\beta = 0 \quad (\text{A.6})$$

Usando el mismo procedimiento para la deducción de la ecuación de continuidad de las desviaciones de la fase- γ , se tiene

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}_\gamma = 0 \quad (\text{A.7})$$

A.1.2. Ecuación de cantidad de movimiento

La ecuación de cantidad de movimiento para las desviaciones espaciales para la fase- β se obtiene de restarle a la ecuación puntual, Ecuación (2.1b),

$$0 = -\nabla p_\beta + \rho_\beta \mathbf{g} + \mu_\beta \nabla^2 \mathbf{v}_\beta, \quad (\text{A.8})$$

la ecuación promedio dada en la Ecuación (2.29a)

$$\mathbf{0} = -\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} + \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_\beta} \mathbf{n}_\beta \cdot [-\mathbf{l}\tilde{p}_\beta + \mu_\beta \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta] dA \quad (\text{A.9})$$

para obtener

$$\mathbf{0} = -\nabla \tilde{p}_\beta + \mu_\beta \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}}_\beta - \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_\beta} \mathbf{n}_\beta \cdot [-\mathbf{l}\tilde{p}_\beta + \mu_\beta \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta] dA \quad (\text{A.10})$$

La ecuación de cantidad de movimiento de las desviaciones para la fase- γ se escribe de forma análoga a la expresión anterior

$$\mathbf{0} = -\nabla \tilde{p}_\gamma + \mu_\gamma \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}}_\gamma - \frac{1}{V_\gamma} \int_{\mathcal{A}_{\gamma\beta}} \mathbf{n}_{\gamma\beta} \cdot [-\mathbf{l}\tilde{p}_\gamma + \mu_\gamma \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\gamma] dA \quad (\text{A.11})$$

A.1.3. Condiciones de frontera

El problema de cerradura se completa con el desarrollo de las condiciones de frontera interfaciales para las desviaciones espaciales. Estas se obtienen de sustituir la descomposición espacial dada en la Ecuación A.1, en las ecuaciones (2.1c)-(2.1e) y expresarlas como

$$\tilde{\mathbf{v}}_\beta = \tilde{\mathbf{v}}_\gamma - \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right), \text{ en la interfase } \beta\text{-}\gamma \quad (\text{A.12a})$$

$$\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left[\begin{array}{c} -\tilde{p}_\beta \mathbf{l} + \underbrace{\mu_\beta (\nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta + \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta^T)}_{\mathbf{0} \left(\frac{\mu_\beta \langle v_\beta \rangle^\beta}{\ell_\beta} \right)} + \underbrace{\mu_\beta (\nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^{\beta T})}_{\mathbf{0} \left(\frac{\mu_\beta \langle v_\beta \rangle^\beta}{L} \right)} \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left[\begin{array}{c} -\tilde{p}_\gamma \mathbf{I} + \underbrace{\mu_\gamma (\nabla \tilde{\mathbf{v}}_\gamma + \nabla \mathbf{v}_\gamma^T)}_{\mathbf{O}\left(\frac{\mu_\gamma \langle v_\gamma \rangle^\gamma}{\ell_\gamma}\right)} + \underbrace{\mu_\gamma (\nabla \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma + \nabla \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^{\gamma T})}_{\mathbf{O}\left(\frac{\mu_\gamma \langle v_\gamma \rangle^\gamma}{L}\right)} \\ \hline + \mathbf{n}_{\beta\gamma} \left(\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma \right) + 2\sigma H \mathbf{n}_{\beta\gamma}, \text{ en la interfase } \beta\text{-}\gamma \end{array} \right] \quad (\text{A.12b})
\end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_\beta = - \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta, \text{ en la interfase } \beta\text{-}\kappa \quad (\text{A.12c})$$

En este caso el orden de magnitud de las cantidades promedio ($\langle \mathbf{v} \rangle^\alpha$, $\alpha = \beta, \gamma$) son L . La condición de no deslizamiento de la Ecuación (A.12c), permite deducir que $\tilde{\mathbf{v}}_\beta = \mathbf{O}\left(\|\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta\|\right)$ y la continuidad de la velocidad en la interfase $\beta - \gamma$, Ecuación (A.12a), que $\tilde{\mathbf{v}}_\gamma \approx \mathbf{O}\left(\|\langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma\|\right)$. Con base en el análisis de órdenes de magnitud de la Ecuación (A.12b) y la restricción de longitudes características de la Ecuación (2.9), se pueden considerar válidas las siguientes desigualdades

$$\mu_\beta \left(\nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^{\beta T} \right) \ll \mu_\beta \left(\nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta + \nabla \mathbf{v}_\beta^T \right) \quad (\text{A.13a})$$

$$\mu_\gamma \left(\nabla \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma + \nabla \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^{\gamma T} \right) \ll \mu_\gamma \left(\nabla \tilde{\mathbf{v}}_\gamma + \nabla \mathbf{v}_\gamma^T \right) \quad (\text{A.13b})$$

y de esa manera despreciar la parte viscosa macroscópica de la condición a la interfase $\beta - \gamma$, dada en la Ecuación (A.12c) para obtener.

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left[-\tilde{p}_\beta \mathbf{I} + \mu_\beta (\nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta + \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta^T) \right] &= \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left[-\tilde{p}_\gamma \mathbf{I} + \mu_\gamma (\nabla \tilde{\mathbf{v}}_\gamma + \nabla \mathbf{v}_\gamma^T) \right] \\
&+ \mathbf{n}_{\beta\gamma} \left(\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma \right) + 2\sigma H \mathbf{n}_{\beta\gamma}, \text{ en la interfase } \beta\text{-}\gamma \quad (\text{A.14})
\end{aligned}$$

A.1.4. Periodicidad

Se debe tener en cuenta que el problema de cerradura no se resolverá en toda la región macroscópica, en lugar de ello se plantea la solución en un dominio periódico representativo de la microescala, denominada *celda unitaria*, que captura las características esenciales de la microestructura del medio poroso. La geometría de la celda unitaria no requiere el conocimiento

completo de la microestructura, sin embargo supone que un modelo espacialmente periódico es una representación razonable del medio poroso. Esta suposición constituye uno de postulados de escalamiento establecidos por Wood (2009); Wood y Valdés-Parada (2013). Esto da lugar las siguientes condiciones de frontera periódicas a las entradas y salidas de la celda unitaria, para las desviaciones espaciales de la presión y velocidad

$$\tilde{\psi}_\alpha(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \tilde{\psi}_\alpha(\mathbf{r}), \quad \psi = p, \mathbf{v}; \quad \alpha = \beta, \gamma; \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.15})$$

A.1.5. Problemas de cerradura

Finalmente, el problema de cerradura se resume en el siguiente problema de valores a la frontera

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}_\beta = 0, \quad \text{en la fase-}\beta \quad (\text{A.16a})$$

$$0 = -\nabla \tilde{p}_\beta + \mu_\beta \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}}_\beta - \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_\beta} \mathbf{n}_\beta \cdot [-\mathbf{l} \tilde{p}_\beta + \mu_\beta \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta] dA, \quad \text{en la fase-}\beta \quad (\text{A.16b})$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_\beta = \tilde{\mathbf{v}}_\gamma - \underbrace{(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma)}_{\text{Fuente I}}, \quad \text{en la interfase } \beta\text{-}\gamma \quad (\text{A.16c})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot [-\tilde{p}_\beta \mathbf{l} + \mu_\beta (\nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta + \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta^T)] &= \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot [-\tilde{p}_\gamma \mathbf{l} + \mu_\gamma (\nabla \tilde{\mathbf{v}}_\gamma + \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\gamma^T)] \\ &\quad + \underbrace{\mathbf{n}_{\beta\gamma} (\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma)}_{\text{Fuente II}} + \underbrace{2\sigma H \mathbf{n}_{\beta\gamma}}_{\text{Fuente III}}, \quad \text{en la interfase } \beta\text{-}\gamma \end{aligned} \quad (\text{A.16d})$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_\beta = \underbrace{-\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta}_{\text{Fuente IV}}, \quad \text{en la interfase } \beta\text{-}\kappa \quad (\text{A.16e})$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}_\gamma = 0, \quad \text{en la fase-}\gamma \quad (\text{A.16f})$$

$$0 = -\nabla \tilde{p}_\gamma + \mu_\gamma \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}}_\gamma - \frac{1}{V_\gamma} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\gamma\beta} \cdot [-\mathbf{l} \tilde{p}_\gamma + \mu_\beta \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\gamma] dA, \quad \text{en la fase-}\gamma \quad (\text{A.16g})$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_\beta(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \tilde{\mathbf{v}}_\beta(\mathbf{r}), \quad \tilde{\mathbf{v}}_\gamma(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \tilde{\mathbf{v}}_\gamma(\mathbf{r}), \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.16h})$$

$$\tilde{p}_\beta(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \tilde{p}_\beta(\mathbf{r}), \quad \tilde{p}_\gamma(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \tilde{p}_\gamma(\mathbf{r}) \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.16i})$$

$$\langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle^\beta = \mathbf{0}, \quad \langle \tilde{\mathbf{v}}_\gamma \rangle^\gamma = \mathbf{0} \quad (\text{A.16j})$$

La última condición, se expresó en la Ecuación (2.25) del documento principal, y forma parte del problema cerradura al establecer una restricción adicional del campo de las variables de cerradura. En el sistema de ecuaciones (A.16a) - (A.16j) se identifican cuatro términos no homogéneos: $(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma)$, $(\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma)$, $2\sigma H$ y $\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta$, que actúan como términos *fuentes* para el campo de las desviaciones espaciales de la velocidad y presión. Dada la naturaleza linear del problema de valores a la frontera anterior para $\tilde{\mathbf{v}}_\alpha$ y \tilde{p}_α , es válido proponer una solución formal en términos de las fuentes de la manera siguiente,

$$\tilde{\mathbf{v}}_\beta = \mathbf{A}_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \mathbf{A}_{\beta\gamma} \cdot (\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma) + \mathbf{d}_\beta (\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma) + \mathbf{f}_\beta, \quad (\text{A.17a})$$

$$\tilde{p}_\beta = \mu_\beta \left[\mathbf{a}_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \mathbf{a}_{\beta\gamma} \cdot (\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma) + s_\beta (\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma) + \varphi_\beta \right], \quad (\text{A.17b})$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_\gamma = \mathbf{A}_\gamma \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \mathbf{A}_{\gamma\beta} \cdot (\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma) + \mathbf{d}_\gamma (\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma) + \mathbf{f}_\gamma, \quad (\text{A.17c})$$

$$\tilde{p}_\gamma = \mu_\gamma \left[\mathbf{a}_\gamma \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \mathbf{a}_{\gamma\beta} \cdot (\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma) + s_\gamma (\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma) + \varphi_\gamma \right], \quad (\text{A.17d})$$

Esta solución formal puede obtenerse usando formulaciones integrales vía funciones de Green (Wood y Valdés-Parada, 2013). En las ecuaciones (A.18a) y (2.30b), los tensores, vectores y escalares: \mathbf{A}_β , \mathbf{A}_γ , $\mathbf{A}_{\beta\gamma}$, $\mathbf{A}_{\gamma\beta}$, \mathbf{a}_β , \mathbf{a}_γ , $\mathbf{a}_{\beta\gamma}$, $\mathbf{a}_{\gamma\beta}$, \mathbf{d}_β , \mathbf{d}_γ , \mathbf{f}_β , \mathbf{f}_γ , s_β , s_γ , φ_β y φ_γ son denominadas *variables de cerradura*. En efecto, los primeros términos del lado derecho de las expresiones anteriores, se pueden escribir para ser sólo proporcionales a las velocidades intrínsecas de cada fase. Sin embargo, esta forma resulta conveniente en el caso de expresar la solución del problema de cerradura para el modelo de equilibrio local mecánico, como se detalla en el Sec. A.2. La sustitución de la solución formal, ecuaciones (2.30a) y (2.30b), en el problema de cerradura, ecuaciones (A.16a) y (A.16j), resulta en cuatro problemas de cerradura, cada uno asociado a un término no homogéneo. Para la fuente asociada a $\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta$,

Problema I

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_\beta = \mathbf{0} \text{ en la fase-}\beta \quad (\text{A.18a})$$

$$-\nabla \mathbf{a}_\beta + \nabla^2 \mathbf{A}_\beta = -\varepsilon_\beta \mathbf{K}_{\beta\beta}^{ne-1} \text{ en la fase-}\beta \quad (\text{A.18b})$$

$$\mathbf{A}_\beta = \mathbf{A}_\gamma, \text{ en la interfase } \beta\text{-}\gamma \quad (\text{A.18c})$$

$$\nu \left[-\mathbf{a}_\beta \mathbf{I} + \left(\nabla \mathbf{A}_\beta + \nabla \mathbf{A}_\beta^\top \right) \right] \cdot \mathbf{n}_{\beta\gamma} = \left[-\mathbf{a}_\gamma \mathbf{I} + \left(\nabla \mathbf{A}_\gamma + \nabla \mathbf{A}_\gamma^\top \right) \right] \cdot \mathbf{n}_{\beta\gamma}, \text{ en la interfase } \beta\text{-}\gamma \quad (\text{A.18d})$$

$$\mathbf{A}_\beta = -\mathbf{I}, \text{ en la interfase } \beta\text{-}\kappa \quad (\text{A.18e})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_\gamma = \mathbf{0} \text{ en la fase } \gamma \quad (\text{A.18f})$$

$$-\nabla \mathbf{a}_\gamma + \nabla^2 \mathbf{A}_\gamma = -\varepsilon_\gamma \mathbf{K}_{\gamma\gamma}^{ne-1} \text{ en la fase-}\gamma \quad (\text{A.18g})$$

$$\mathbf{A}_\beta(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \mathbf{A}_\beta(\mathbf{r}), \quad \mathbf{A}_\gamma(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \mathbf{A}_\gamma(\mathbf{r}), \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.18h})$$

$$\mathbf{a}_\beta(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \mathbf{a}_\beta(\mathbf{r}), \quad \mathbf{a}_\gamma(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \mathbf{a}_\gamma(\mathbf{r}), \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.18i})$$

$$\langle \mathbf{A}_\beta \rangle^\beta = \mathbf{0}, \quad \langle \mathbf{A}_\gamma \rangle^\gamma = \mathbf{0} \quad (\text{A.18j})$$

Para la fuente asociada a $\left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right)$, se tiene

Problema II

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_{\beta\gamma} = \mathbf{0} \text{ en la fase-}\beta \quad (\text{A.19a})$$

$$-\nabla \mathbf{a}_{\beta\gamma} + \nabla^2 \mathbf{A}_{\beta\gamma} = \mathbf{K}_{\beta\gamma}^{ne} \text{ en la fase-}\beta \quad (\text{A.19b})$$

$$\mathbf{A}_{\beta\gamma} = \mathbf{A}_{\gamma\beta} + \mathbf{I}, \text{ en la interfase } \beta\text{-}\gamma \quad (\text{A.19c})$$

$$\nu \left[-\mathbf{a}_{\beta\gamma} \mathbf{I} + \left(\nabla \mathbf{A}_{\beta\gamma} + \nabla \mathbf{A}_{\beta\gamma}^\top \right) \right] \cdot \mathbf{n}_{\beta\gamma} = \left[-\mathbf{a}_{\gamma\beta} \mathbf{I} + \left(\nabla \mathbf{A}_{\gamma\beta} + \nabla \mathbf{A}_{\gamma\beta}^\top \right) \right] \cdot \mathbf{n}_{\beta\gamma}, \text{ en la interfase } \beta\text{-}\gamma \quad (\text{A.19d})$$

$$\mathbf{A}_{\beta\gamma} = \mathbf{0}, \text{ en la interfase } \beta\text{-}\kappa \quad (\text{A.19e})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_{\gamma\beta} = \mathbf{0} \text{ en la fase } \gamma \quad (\text{A.19f})$$

$$-\nabla \mathbf{a}_{\gamma\beta} + \nabla^2 \mathbf{A}_{\gamma\beta} = \mathbf{K}_{\gamma\beta}^{ne} \quad (\text{A.19g})$$

$$\mathbf{A}_{\beta\gamma}(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \mathbf{A}_{\beta\gamma}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{A}_{\gamma\beta}(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \mathbf{A}_{\gamma\beta}(\mathbf{r}), \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.19h})$$

$$\mathbf{a}_{\beta\gamma}(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \mathbf{a}_{\beta\gamma}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{a}_{\gamma\beta}(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \mathbf{a}_{\gamma\beta}(\mathbf{r}), \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.19i})$$

$$\langle \mathbf{A}_{\beta\gamma} \rangle^\beta = \mathbf{0}, \quad \langle \mathbf{A}_{\gamma\beta} \rangle^\gamma = \mathbf{0} \quad (\text{A.19j})$$

En el caso de la fuente asociada a $\left(\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma \right)$, se tiene

Problema III

$$\nabla \cdot \mathbf{d}_\beta = \mathbf{0} \text{ en la fase-}\beta \quad (\text{A.20a})$$

$$-\nabla s_\beta + \nabla^2 \mathbf{d}_\beta = \mathbf{u}_\beta \text{ en la fase-}\beta \quad (\text{A.20b})$$

$$\mathbf{d}_\beta = \mathbf{d}_\gamma, \text{ en la interfase } \beta\text{-}\gamma \quad (\text{A.20c})$$

$$\nu \left[-s_\beta \mathbf{I} + \left(\nabla \mathbf{d}_\beta + \nabla \mathbf{d}_\beta^\top \right) \right] \cdot \mathbf{n}_{\beta\gamma} = \left[-s_\gamma \mathbf{I} + \left(\nabla \mathbf{d}_\gamma + \nabla \mathbf{d}_\gamma^\top \right) \right] \cdot \mathbf{n}_{\beta\gamma} + \mu_\gamma^{-1} \mathbf{n}_{\beta\gamma}, \text{ en la interfase } \beta\text{-}\gamma \quad (\text{A.20d})$$

$$\mathbf{d}_\beta = \mathbf{0}, \text{ en la interfase } \beta\text{-}\kappa \quad (\text{A.20e})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{d}_\gamma = \mathbf{0} \text{ en la fase } \gamma \quad (\text{A.20f})$$

$$-\nabla s_\gamma + \nabla^2 \mathbf{d}_\gamma = \mathbf{u}_\gamma \text{ en la fase-}\gamma \quad (\text{A.20g})$$

$$\mathbf{d}_\beta(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \mathbf{d}_\beta(\mathbf{r}), \quad \mathbf{d}_\gamma(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \mathbf{d}_\gamma(\mathbf{r}), \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.20h})$$

$$s_\beta(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = s_\beta(\mathbf{r}), \quad s_\gamma(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = s_\gamma(\mathbf{r}), \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.20i})$$

$$\langle \mathbf{d}_\beta \rangle^\beta = \mathbf{0}, \quad \langle \mathbf{d}_\gamma \rangle^\gamma = \mathbf{0} \quad (\text{A.20j})$$

Finalmente, para la fuente asociada a $2\sigma H$, se tiene

Problema IV

$$\nabla \cdot \mathbf{f}_\beta = \mathbf{0} \text{ en la fase-}\beta \quad (\text{A.21a})$$

$$-\nabla \varphi_\beta + \nabla^2 \mathbf{f}_\beta = \mathbf{h}_\beta \text{ en la fase-}\beta \quad (\text{A.21b})$$

$$\mathbf{f}_\beta = \mathbf{f}_\gamma, \text{ en la interfase } \beta\text{-}\gamma \quad (\text{A.21c})$$

$$\nu \left[-\varphi_\beta \mathbf{I} + \left(\nabla \mathbf{f}_\beta + \nabla \mathbf{f}_\beta^\top \right) \right] \cdot \mathbf{n}_{\beta\gamma} = \left[-\varphi_\gamma \mathbf{I} + \left(\nabla \mathbf{f}_\gamma + \nabla \mathbf{f}_\gamma^\top \right) \right] \cdot \mathbf{n}_{\beta\gamma} + 2\mu_\gamma^{-1} \sigma H \mathbf{n}_{\beta\gamma}, \text{ en la interfase } \beta\text{-}\gamma \quad (\text{A.21d})$$

$$\mathbf{f}_\beta = \mathbf{0}, \text{ en la interfase } \beta\text{-}\kappa \quad (\text{A.21e})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{f}_\gamma = \mathbf{0} \text{ en la fase } \gamma \quad (\text{A.21f})$$

$$-\nabla \varphi_\gamma + \nabla^2 \mathbf{f}_\gamma = \mathbf{h}_\gamma \text{ en la fase-}\gamma \quad (\text{A.21g})$$

$$\mathbf{f}_\beta(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \mathbf{f}_\beta(\mathbf{r}), \quad \mathbf{f}_\gamma(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \mathbf{f}_\gamma(\mathbf{r}), \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.21h})$$

$$\varphi_\beta(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \varphi_\beta(\mathbf{r}), \quad \varphi_\gamma(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \varphi_\gamma(\mathbf{r}), \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.21i})$$

$$\langle \mathbf{f}_\beta \rangle^\beta = \mathbf{0}, \quad \langle \mathbf{f}_\gamma \rangle^\gamma = \mathbf{0} \quad (\text{A.21j})$$

En los Problemas I - IV, en la condición de frontera en la interfase $\beta\text{-}\gamma$, ν relaciona las viscosidades de la fase- continua y dispersa como $\nu = \mu_\beta/\mu_\gamma$. Los de los tensores y vectores

efectivos presentes en estos problemas de cerradura se definen de forma explicita como

$$-\varepsilon_\beta \mathbf{K}_{\beta\beta}^{ne-1} = \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_\beta} \mathbf{n}_\beta \cdot [-\mathbf{a}_{\beta\gamma} \mathbf{I} + \nabla \mathbf{A}_{\beta\gamma}] dA \quad (\text{A.22a})$$

$$-\varepsilon_\gamma \mathbf{K}_{\gamma\gamma}^{ne-1} = \frac{1}{V_\gamma} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\gamma\beta} \cdot [-\mathbf{a}_\gamma \mathbf{I} + \nabla \mathbf{A}_\gamma] dA \quad (\text{A.22b})$$

$$\mathbf{K}_{\beta\gamma}^{ne} = \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_\beta} \mathbf{n}_\beta \cdot [-\mathbf{a}_{\beta\gamma} \mathbf{I} + \nabla \mathbf{A}_{\beta\gamma}] dA \quad (\text{A.22c})$$

$$\mathbf{K}_{\gamma\beta}^{ne} = \frac{1}{V_\gamma} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\gamma\beta} \cdot [-\mathbf{a}_{\gamma\beta} \mathbf{I} + \nabla \mathbf{A}_{\gamma\beta}] dA \quad (\text{A.22d})$$

$$\mathbf{u}_\beta = \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_\beta} \mathbf{n}_\beta \cdot [-s_\beta \mathbf{I} + \nabla \mathbf{d}_\beta] dA \quad (\text{A.22e})$$

$$\mathbf{u}_\gamma = \frac{1}{V_\gamma} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\gamma\beta} \cdot [-s_\gamma \mathbf{I} + \nabla \mathbf{d}_\gamma] dA \quad (\text{A.22f})$$

$$\mathbf{h}_\beta = \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_\beta} \mathbf{n}_\beta \cdot [-\varphi_\beta \mathbf{I} + \nabla \mathbf{f}_\beta] dA \quad (\text{A.22g})$$

$$\mathbf{h}_\gamma = \frac{1}{V_\gamma} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\gamma\beta} \cdot [-\varphi_\gamma \mathbf{I} + \nabla \mathbf{f}_\gamma] dA \quad (\text{A.22h})$$

Al suponer que la fase- γ como una emulsión estable no coalescente y el flujo cuasi-estacionario, las fracciones volumétricas de ambas fases fluidas, ε_β y ε_γ (y como consecuencia la porosidad, ε) se consideran parámetros definidos del sistema de estudio. De esta forma, junto con la relación de viscosidades, ν , la solución de los problemas de cerradura y la respectivas predicciones de los valores de los tensores y vectores de medio efectivo, definidos arriba, se determinan variando estos tres parámetros: ε_β , ε_γ ($\varepsilon = \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma$) y $\nu = \mu_\beta / \mu_\gamma$.

A.1.6. Solución numérica de los problemas de cerradura

El dominio de solución de estos problemas de cerradura son celdas unitarias periódicas que representan la complicada estructura de los poros y la distribución de la fase dispersa. La Figura A.1 muestra un ejemplo de la celda unitaria usada en este trabajo como dominio de solución para los problemas de cerradura escritos arriba; aquí se ha representado la fase sólida- κ

Tabla A.1. Valores del parámetro λ_i

	$\varepsilon = 0.5$	$= 0.6$	$= 0.7$	$= 0.8$	$= 0.9$
λ_2	0.55	0.55	0.55	0.75	1
λ_3	0.9	0.9	0.8	0.75	1
λ_4	0.62	0.62	0.65	0.5	0.95
λ_5	0.51	0.6	0.77	0.65	0.7

como una partícula circular de diámetro

$$d_\kappa = \ell_c \sqrt{\frac{4(1-\varepsilon)}{\pi}} \quad (\text{A.23})$$

El diámetro de las partículas circulares que representan la fase- γ , $d_{\gamma 1}$, ... $d_{\gamma 5}$, están relacionados entre ellos como: $d_{\gamma i} = \lambda_i d_{\gamma 1}$, ($i = 2, \dots, 5$), y se determina por la siguiente relación

$$\varepsilon S_\gamma = \left(\frac{d_{\gamma 1}}{\ell_c} \right)^2 [1 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + 2(\lambda_4^2 + \lambda_5^2)] \quad (\text{A.24})$$

De esta forma, el diámetro depende de los valores de saturación, S_γ y la fracción vacía, ε , que se establezcan. Una serie de valores para el parámetro λ_i usados en este trabajo se proporcionan en la Tabla A.1 para diferentes valores de porosidad. La selección del valor de este parámetro depende de la posición de las partículas circulares de tal forma que la suposición de no coalescencia y contacto con la fase sólida se satisfaga, además estos valores proporcionados en la Tabla A.1 se pueden asociar a una distribución de tamaño que se puede obtener de datos experimentales. Se debe resaltar que la posición y la forma de los cilindros representativos de la fase dispersa están relacionados directamente con los efectos capilares asociados a la tensión superficial y la curvatura, por lo tanto la aproximación geométrica que se establece aquí representa de manera simple un proceso complejo de los mecanismos de transporte de la fase dispersa dentro de los poros. La solución del Problema I se puede obtener mediante el resolutor de elemento finito COMSOL Multiphysics [®](Versión 4.3a), como se menciona en el texto. Ejemplos de los campos de solución del Problema I para las variables de cerradura \mathbf{A}_β y \mathbf{A}_γ en su componente longitudinal se presentan en la Figura A.2, bajo diferentes condiciones de porosidad, ε , saturación, S_β , y relación de viscosidades, ν .

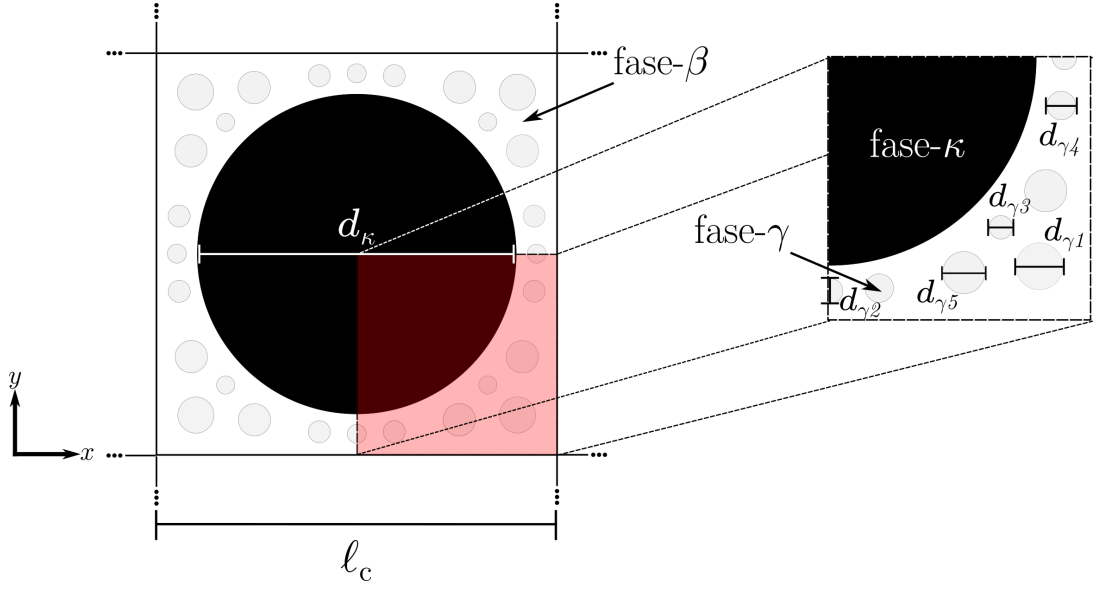


Figura A.1. Celda unitaria periódica representativa del flujo disperso.

A.1.7. Determinación de los tensores y vectores efectivos

En este punto es importante señalar que, a pesar de contar con las herramientas computacionales que permiten resolver numéricamente el problema integro-diferencial que involucra los Problemas I- IV, se pueden proponer nuevas definiciones de los variables de cerradura. Esto con el fin de que, eventualmente, permitan expresar de forma relativamente más simple los problemas de cerradura y como consecuencia los coeficientes efectivos asociados a éstos.

Para el Problema I se definen dos nuevos tensores, \mathbf{A}_α^0 ($\alpha = \beta, \gamma$),

$$\mathbf{A}_\beta^0 = \mathbf{A}_\beta + \mathbf{I}, \quad \mathbf{A}_\gamma^0 = \mathbf{A}_\gamma + \mathbf{I} \quad (\text{A.25})$$

que permite expresar el problema de cerradura como

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_\beta^0 = \mathbf{0} \text{ en la fase-}\beta \quad (\text{A.26a})$$

$$-\nabla \mathbf{a}_\beta + \nabla^2 \mathbf{A}_\beta^0 = -\varepsilon_\beta \mathbf{K}_{\beta\beta}^{ne-1} \text{ en la fase-}\beta \quad (\text{A.26b})$$

$$\mathbf{A}_\beta^0 = \mathbf{A}_\gamma^0, \text{ en la interfase } \beta\text{-}\gamma \quad (\text{A.26c})$$

$$\nu \left[-\mathbf{a}_\beta \mathbf{I} + \left(\nabla \mathbf{A}_\beta^0 + \nabla \mathbf{A}_\beta^{0T} \right) \right] \cdot \mathbf{n}_{\beta\gamma} = \left[-\mathbf{a}_\gamma \mathbf{I} + \left(\nabla \mathbf{A}_\gamma^0 + \nabla \mathbf{A}_\gamma^{0T} \right) \right] \cdot \mathbf{n}_{\beta\gamma}, \text{ en la interfase } \beta\text{-}\gamma \quad (\text{A.26d})$$

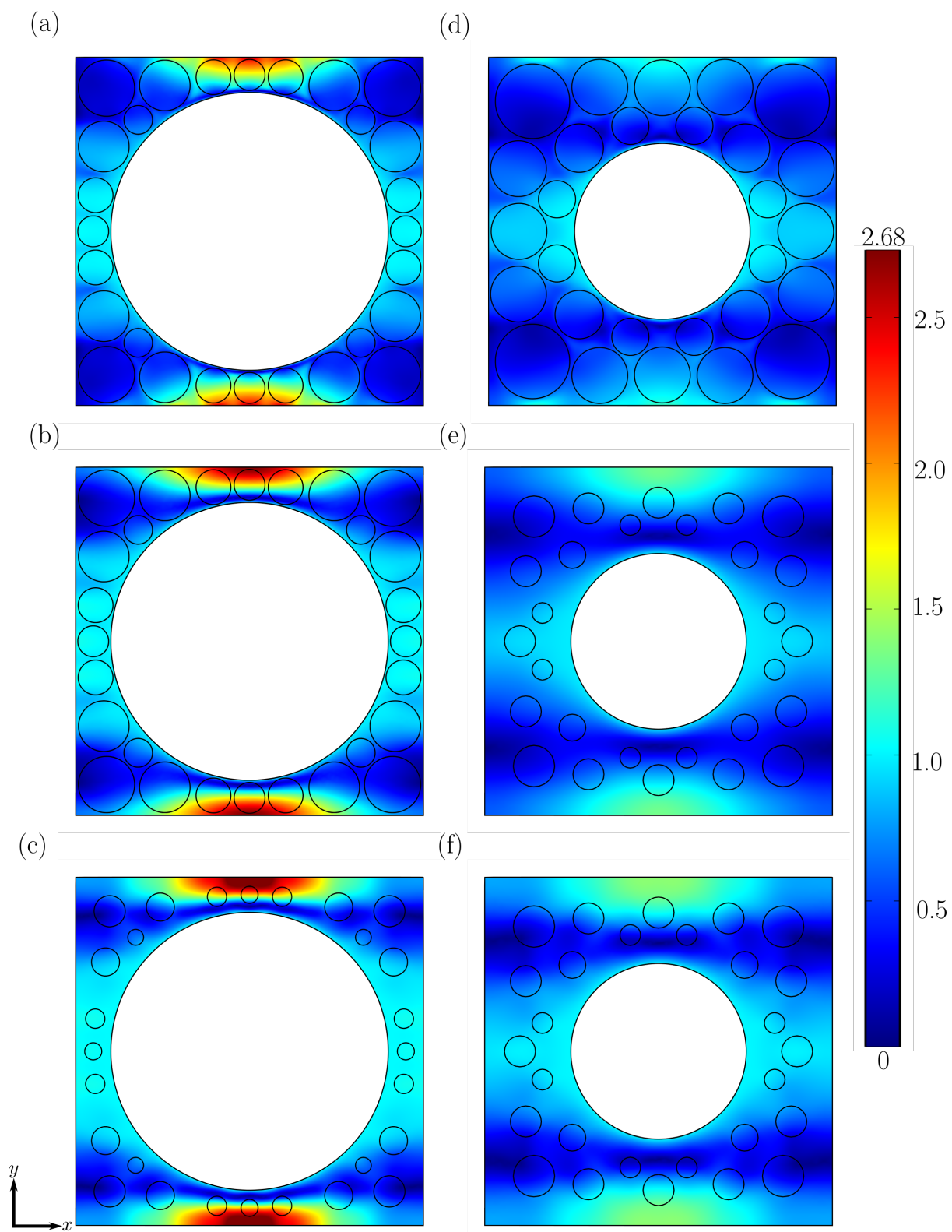


Figura A.2. Ejemplos de las variables de cerradura $A_{xx,\beta}$ y $A_{xx,\gamma}$. Para $\varepsilon = 0.5$: (a) $S_\beta = 0.35$ $\nu = 0.1$, (b) $S_\beta = 0.35$ $\nu = 1$ y (c) $S_\beta = 0.8$ $\nu = 10$. Para $\varepsilon = 0.8$: (d) $S_\beta = 0.35$ $\nu = 0.1$, (e) $S_\beta = 0.8$ $\nu = 1$ y (f) $S_\beta = 0.8$ $\nu = 10$. Bajo la condición: $Ca \ll 1$ y $Bo \ll 1$.

$$\mathbf{A}_\beta^0 = \mathbf{0}, \text{ en la interfase } \beta\text{-}\kappa \quad (\text{A.26e})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_\gamma^0 = \mathbf{0} \text{ en la fase } \gamma \quad (\text{A.26f})$$

$$-\nabla \mathbf{a}_\gamma + \nabla^2 \mathbf{A}_\gamma^0 = -\varepsilon_\gamma \mathbf{K}_{\gamma\gamma}^{ne-1} \text{ en la fase-}\gamma \quad (\text{A.26g})$$

$$\mathbf{A}_\beta^0(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \mathbf{A}_\beta^0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{A}_\gamma^0(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \mathbf{A}_\gamma^0(\mathbf{r}), \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.26h})$$

$$\mathbf{a}_\beta(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \mathbf{a}_\beta(\mathbf{r}), \quad \mathbf{a}_\gamma(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \mathbf{a}_\gamma(\mathbf{r}), \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.26i})$$

$$\langle \mathbf{A}_\beta^0 \rangle^\beta = \mathbf{I}, \quad \langle \mathbf{A}_\gamma^0 \rangle^\gamma = \mathbf{I} \quad (\text{A.26j})$$

Enseguida, se descompone el campo de tensores y vectores como sigue

$$\mathbf{A}_\beta^0 = \mathbf{B}_\beta^0 + \mathbf{B}_\beta^1, \quad \mathbf{A}_\gamma^0 = \mathbf{B}_\gamma^0 + \mathbf{B}_\gamma^1 \quad (\text{A.27a})$$

$$\mathbf{a}_\beta^0 = \mathbf{b}_\beta^0 + \mathbf{b}_\beta^1, \quad \mathbf{a}_\gamma^0 = \mathbf{b}_\gamma^0 + \mathbf{b}_\gamma^1 \quad (\text{A.27b})$$

y se sustituyen en las ecuaciones (A.26a) - (A.26i), para obtener los siguientes problemas de valores a la frontera

Problema I(a)

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_\beta^0 = \mathbf{0} \text{ en la fase-}\beta \quad (\text{A.28a})$$

$$-\nabla \mathbf{b}_\beta^0 + \nabla^2 \mathbf{B}_\beta^0 = -\varepsilon_\beta \mathbf{K}_{\beta\beta}^{ne-1} \text{ en la fase-}\beta \quad (\text{A.28b})$$

$$\mathbf{B}_\beta^0 = \mathbf{B}_\gamma^0, \text{ en la interfase } \beta\text{-}\gamma \quad (\text{A.28c})$$

$$\nu \left[-\mathbf{b}_\beta^0 \mathbf{I} + \left(\nabla \mathbf{B}_\beta^0 + \nabla \mathbf{B}_\beta^{0T} \right) \right] \cdot \mathbf{n}_{\beta\gamma} = \left[-\mathbf{b}_\gamma^0 \mathbf{I} + \left(\nabla \mathbf{B}_\gamma^0 + \nabla \mathbf{B}_\gamma^{0T} \right) \right] \cdot \mathbf{n}_{\beta\gamma}, \text{ en la interfase } \beta\text{-}\gamma \quad (\text{A.28d})$$

$$\mathbf{B}_\beta^0 = \mathbf{0}, \text{ en la interfase } \beta\text{-}\kappa \quad (\text{A.28e})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_\gamma^0 = \mathbf{0} \text{ en la fase } \gamma \quad (\text{A.28f})$$

$$-\nabla \mathbf{b}_\gamma^0 + \nabla^2 \mathbf{B}_\gamma^0 = \mathbf{0} \text{ en la fase-}\gamma \quad (\text{A.28g})$$

$$\mathbf{B}_\beta^0(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \mathbf{B}_\beta^0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{B}_\gamma^0(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \mathbf{B}_\gamma^0(\mathbf{r}), \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.28h})$$

$$\mathbf{b}_\beta^0(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \mathbf{b}_\beta^0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{b}_\gamma^0(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \mathbf{b}_\gamma^0(\mathbf{r}), \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.28i})$$

Problema I(b)

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_\beta^1 = \mathbf{0} \text{ en la fase-}\beta \quad (\text{A.29a})$$

$$-\nabla \mathbf{b}_\beta^1 + \nabla^2 \mathbf{B}_\beta^1 = \mathbf{0} \text{ en la fase-}\beta \quad (\text{A.29b})$$

$$\mathbf{B}_\beta^1 = \mathbf{B}_\gamma^1, \text{ en la interfase } \beta\text{-}\gamma \quad (\text{A.29c})$$

$$\nu \left[-\mathbf{b}_\beta^1 \mathbf{I} + \left(\nabla \mathbf{B}_\beta^1 + \nabla \mathbf{B}_\beta^{1T} \right) \right] \cdot \mathbf{n}_{\beta\gamma} = \left[-\mathbf{b}_\gamma^1 \mathbf{I} + \left(\nabla \mathbf{B}_\gamma^1 + \nabla \mathbf{B}_\gamma^{1T} \right) \right] \cdot \mathbf{n}_{\beta\gamma}, \text{ en la interfase } \beta\text{-}\gamma \quad (\text{A.29d})$$

$$\mathbf{B}_\beta^1 = \mathbf{0}, \text{ en la interfase } \beta\text{-}\kappa \quad (\text{A.29e})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_\gamma^1 = \mathbf{0} \text{ en la fase } \gamma \quad (\text{A.29f})$$

$$-\nabla \mathbf{b}_\gamma^1 + \nabla^2 \mathbf{B}_\gamma^1 = -\varepsilon_\gamma \mathbf{K}_{\gamma\gamma}^{ne-1} \text{ en la fase-}\gamma \quad (\text{A.29g})$$

$$\mathbf{B}_\beta^1(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \mathbf{B}_\beta^1(\mathbf{r}), \quad \mathbf{B}_\gamma^1(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \mathbf{B}_\gamma^1(\mathbf{r}), \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.29h})$$

$$\mathbf{b}_\beta^1(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \mathbf{b}_\beta^1(\mathbf{r}), \quad \mathbf{b}_\gamma^1(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \mathbf{b}_\gamma^1(\mathbf{r}), \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.29i})$$

De la restricción de los campos para las variables de cerradura de \mathbf{A}_β^0 y \mathbf{A}_γ^0 , (A.26j), se obtienen las siguientes expresiones

$$\langle \mathbf{B}_\beta^0 \rangle^\beta + \langle \mathbf{B}_\beta^1 \rangle^\beta = \mathbf{I}, \quad \langle \mathbf{B}_\gamma^0 \rangle^\gamma + \langle \mathbf{B}_\gamma^1 \rangle^\gamma = \mathbf{I} \quad (\text{A.30})$$

Definiendo nuevos campos de vectores y tensores para el Problema I (a) de acuerdo a

$$\mathbf{D}_\beta^0 = \mathbf{B}_\beta^0 \cdot \mathbf{K}_{\beta\beta}^{ne} \varepsilon_\beta^{-1}, \quad \mathbf{D}_\gamma^0 = \mathbf{B}_\gamma^0 \cdot \mathbf{K}_{\beta\beta}^{ne} \varepsilon_\beta^{-1}, \quad (\text{A.31a})$$

$$\mathbf{d}_\beta^0 = \mathbf{b}_\beta^0 \cdot \mathbf{K}_{\beta\beta}^{ne} \varepsilon_\beta^{-1}, \quad \mathbf{d}_\gamma^0 = \mathbf{b}_\gamma^0 \cdot \mathbf{K}_{\beta\beta}^{ne} \varepsilon_\beta^{-1}, \quad (\text{A.31b})$$

En términos de los vectores, \mathbf{d}_β^0 y \mathbf{d}_γ^0 , y los tensores, \mathbf{D}_β^0 y \mathbf{D}_γ^0 , se observa que las ecuaciones (A.28a)-(A.28i) toman la siguiente forma Problema I(a')

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_\beta^0 = \mathbf{0} \text{ en la fase-}\beta \quad (\text{A.32a})$$

$$-\nabla \mathbf{d}_\beta^0 + \nabla^2 \mathbf{D}_\beta^0 = -\mathbf{I} \text{ en la fase-}\beta \quad (\text{A.32b})$$

$$\mathbf{D}_\beta^0 = \mathbf{D}_\gamma^0, \text{ en la interfase } \beta\text{-}\gamma \quad (\text{A.32c})$$

$$\nu \left[-\mathbf{d}_\beta^0 \mathbf{I} + \left(\nabla \mathbf{D}_\beta^0 + \nabla \mathbf{D}_\beta^{0\top} \right) \right] \cdot \mathbf{n}_{\beta\gamma} = \left[-\mathbf{d}_\gamma^0 \mathbf{I} + \left(\nabla \mathbf{D}_\gamma^0 + \nabla \mathbf{D}_\gamma^{0\top} \right) \right] \cdot \mathbf{n}_{\beta\gamma}, \text{ en la interfase } \beta\text{-}\gamma \quad (\text{A.32d})$$

$$\mathbf{D}_\beta^0 = \mathbf{0}, \text{ en la interfase } \beta\text{-}\kappa \quad (\text{A.32e})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_\gamma^0 = \mathbf{0} \text{ en la fase } \gamma \quad (\text{A.32f})$$

$$-\nabla \mathbf{d}_\gamma^0 + \nabla^2 \mathbf{D}_\gamma^0 = \mathbf{0} \text{ en la fase-}\gamma \quad (\text{A.32g})$$

$$\mathbf{D}_\beta^0(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \mathbf{D}_\beta^0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{D}_\gamma^0(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \mathbf{D}_\gamma^0(\mathbf{r}), \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.32h})$$

$$\mathbf{d}_\beta^0(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \mathbf{d}_\beta^0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{d}_\gamma^0(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \mathbf{d}_\gamma^0(\mathbf{r}), \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.32i})$$

A su vez, definiendo también campos de vectores y tensores para el Problema I (b) de la siguiente forma

$$\mathbf{D}_\beta^1 = \mathbf{B}_\beta^1 \cdot \mathbf{K}_{\gamma\gamma}^{ne} \varepsilon_\gamma^{-1}, \quad \mathbf{D}_\gamma^1 = \mathbf{B}_\gamma^1 \cdot \mathbf{K}_{\gamma\gamma}^{ne} \varepsilon_\gamma^{-1}, \quad (\text{A.33a})$$

$$\mathbf{d}_\beta^1 = \mathbf{b}_\beta^1 \cdot \mathbf{K}_{\gamma\gamma}^{ne} \varepsilon_\gamma^{-1}, \quad \mathbf{d}_\gamma^1 = \mathbf{b}_\gamma^1 \cdot \mathbf{K}_{\gamma\gamma}^{ne} \varepsilon_\gamma^{-1}, \quad (\text{A.33b})$$

De esta forma y en términos de \mathbf{d}_β^1 y \mathbf{d}_γ^1 , \mathbf{D}_β^1 y \mathbf{D}_γ^1 , las ecuaciones (A.29a)-(A.29i) se escriben como Problema I(b')

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_\beta^1 = \mathbf{0} \text{ en la fase-}\beta \quad (\text{A.34a})$$

$$-\nabla \mathbf{d}_\beta^1 + \nabla^2 \mathbf{D}_\beta^1 = \mathbf{0} \text{ en la fase-}\beta \quad (\text{A.34b})$$

$$\mathbf{D}_\beta^1 = \mathbf{D}_\gamma^1, \text{ en la interfase } \beta\text{-}\gamma \quad (\text{A.34c})$$

$$\nu \left[-\mathbf{d}_\beta^1 \mathbf{I} + \left(\nabla \mathbf{D}_\beta^1 + \nabla \mathbf{D}_\beta^{1\top} \right) \right] \cdot \mathbf{n}_{\beta\gamma} = \left[-\mathbf{d}_\gamma^1 \mathbf{I} + \left(\nabla \mathbf{D}_\gamma^1 + \nabla \mathbf{D}_\gamma^{1\top} \right) \right] \cdot \mathbf{n}_{\beta\gamma}, \text{ en la interfase } \beta\text{-}\gamma \quad (\text{A.34d})$$

$$\mathbf{D}_\beta^1 = \mathbf{0}, \text{ en la interfase } \beta\text{-}\kappa \quad (\text{A.34e})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_\gamma^1 = \mathbf{0} \text{ en la fase } \gamma \quad (\text{A.34f})$$

$$-\nabla \mathbf{d}_\gamma^1 + \nabla^2 \mathbf{D}_\gamma^1 = -\mathbf{I} \text{ en la fase-}\gamma \quad (\text{A.34g})$$

$$\mathbf{D}_\beta^1(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \mathbf{D}_\beta^1(\mathbf{r}), \quad \mathbf{D}_\gamma^1(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \mathbf{D}_\gamma^1(\mathbf{r}), \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.34h})$$

$$\mathbf{d}_\beta^1(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \mathbf{d}_\beta^1(\mathbf{r}), \quad \mathbf{d}_\gamma^1(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \mathbf{d}_\gamma^1(\mathbf{r}), \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.34i})$$

Usando las definiciones de los nuevos campos de vectores y tensores dadas en las ecuaciones

(A.31) y (A.33) en las expresiones de la Ecuación (A.30), se obtiene lo siguiente

$$\langle \mathbf{D}_\beta^0 \rangle^\beta \cdot \mathbf{K}_{\beta\beta}^{ne-1} \varepsilon_\beta + \langle \mathbf{D}_\beta^1 \rangle^\beta \cdot \mathbf{K}_{\gamma\gamma}^{ne-1} \varepsilon_\gamma = \mathbf{I}, \quad \langle \mathbf{D}_\gamma^0 \rangle^\gamma \cdot \mathbf{K}_{\beta\beta}^{ne-1} \varepsilon_\beta + \langle \mathbf{D}_\gamma^1 \rangle^\gamma \cdot \mathbf{K}_{\gamma\gamma}^{ne-1} \varepsilon_\gamma = \mathbf{I} \quad (\text{A.35})$$

Estas expresiones permiten determinar los dos tensores $\mathbf{K}_{\beta\beta}^{ne}$ y $\mathbf{K}_{\gamma\gamma}^{ne}$ a partir de la solución del Problema I (a') y Problema II (b'), los cuales sólo difieren en la localización del término no homogéneo \mathbf{I} , en las ecuaciones. (A.32b) y (A.34g). La solución numérica de estos dos problemas de valores a la frontera resulta más sencilla que resolver el problema integro-diferencial escrito en las ecuaciones (A.18a) y (A.18j), y además con una menor capacidad de cómputo. De esta manera explícita los tensores efectivos se pueden escribir como

$$\varepsilon_\beta \mathbf{K}_{\beta\beta}^{ne-1} = \left(\langle \mathbf{D}_\gamma^1 \rangle^\gamma - \langle \mathbf{D}_\beta^1 \rangle^\beta \right) \cdot \left(\langle \mathbf{D}_\beta^0 \rangle^\beta - \langle \mathbf{D}_\gamma^0 \rangle^\gamma \right)^{-1} \cdot \mathbf{K}_{\gamma\gamma}^{ne-1} \varepsilon_\gamma \quad (\text{A.36a})$$

$$\varepsilon_\gamma \mathbf{K}_{\gamma\gamma}^{ne-1} = \left(\langle \mathbf{D}_\beta^0 \rangle^\beta - \langle \mathbf{D}_\gamma^0 \rangle^\gamma \right) \cdot \left[\langle \mathbf{D}_\beta^0 \rangle^\beta \cdot \left(\langle \mathbf{D}_\gamma^1 \rangle^\gamma - \langle \mathbf{D}_\beta^1 \rangle^\beta \right) + \langle \mathbf{D}_\beta^1 \rangle^\beta \cdot \left(\langle \mathbf{D}_\beta^0 \rangle^\beta - \langle \mathbf{D}_\gamma^0 \rangle^\gamma \right) \right]^{-1} \quad (\text{A.36b})$$

A.2. Cerradura para el modelo de equilibrio local mecánico

A.2.1. Problemas de cerradura

Si la suposición del equilibrio local mecánico se satisface, lo cual se deduce en el Apéndice B, se puede considerar como válida

$$\langle p_\beta \rangle^\beta \approx \langle p \rangle \approx \langle p_\gamma \rangle^\gamma, \quad \text{En el equilibrio local mecánico} \quad (\text{A.37a})$$

$$\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \approx \langle \mathbf{v} \rangle \approx \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma, \quad (\text{A.37b})$$

de esta forma en el problema de cerradura expresado en las ecuaciones (A.16), las Fuentes I y II, son cercanas a cero y pueden considerarse despreciables. Además, en la Fuente IV, $\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \approx \langle \mathbf{v} \rangle$, de esta forma el problema de cerradura para el modelo de equilibrio local mecánico (ELM), se puede escribir como

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}_\beta = 0, \quad \text{en la fase-}\beta \quad (\text{A.38a})$$

$$0 = -\nabla \tilde{p}_\beta + \mu_\beta \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}}_\beta - \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_\beta} \mathbf{n}_\beta \cdot [-\mathbf{l} \tilde{p}_\beta + \mu_\beta \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta] dA, \text{ en la fase-}\beta \quad (\text{A.38b})$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_\beta = \tilde{\mathbf{v}}_\gamma, \text{ en la interfase } \beta\text{-}\gamma \quad (\text{A.38c})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot [-\tilde{p}_\beta \mathbf{l} + \mu_\beta (\nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta + \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta^T)] = & \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot [-\tilde{p}_\gamma \mathbf{l} + \mu_\gamma (\nabla \tilde{\mathbf{v}}_\gamma + \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\gamma^T)] \\ & + \underbrace{2\sigma H \mathbf{n}_{\beta\gamma}}_{\text{Fuente I}}, \text{ en la interfase } \beta\text{-}\gamma \end{aligned} \quad (\text{A.38d})$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_\beta = \underbrace{-\langle \mathbf{v} \rangle}_{\text{Fuente II}}, \text{ en la interfase } \beta\text{-}\kappa \quad (\text{A.38e})$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}_\gamma = 0, \text{ en la fase-}\gamma \quad (\text{A.38f})$$

$$0 = -\nabla \tilde{p}_\gamma + \mu_\gamma \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}}_\gamma - \frac{1}{V_\gamma} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\gamma\beta} \cdot [-\mathbf{l} \tilde{p}_\gamma + \mu_\beta \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\gamma] dA, \text{ en la fase-}\gamma \quad (\text{A.38g})$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_\beta(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \tilde{\mathbf{v}}_\beta(\mathbf{r}), \quad \tilde{\mathbf{v}}_\gamma(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \tilde{\mathbf{v}}_\gamma(\mathbf{r}), \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.38h})$$

$$\tilde{p}_\beta(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \tilde{p}_\beta(\mathbf{r}), \quad \tilde{p}_\gamma(\mathbf{r} + \mathbf{l}_i) = \tilde{p}_\gamma(\mathbf{r}) \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.38i})$$

$$\langle \tilde{\mathbf{v}}_\beta \rangle^\beta = \mathbf{0}, \quad \langle \tilde{\mathbf{v}}_\gamma \rangle^\gamma = \mathbf{0} \quad (\text{A.38j})$$

En este sistema de ecuaciones, los cuatro términos no homogéneos, presentes en el problema de cerradura para el modelo de NELM, se han reducido a sólo dos términos para el caso del modelo ELM: $2\sigma H$ y $\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta$. Los cuales actúan como las *fuentes* del campo de las desviaciones espaciales de la velocidad y presión. Similar al caso de no equilibrio, el carácter lineal del problema de valores a la frontera anterior permite proponer una solución formal como la siguiente:

$$\tilde{\mathbf{v}}_\beta = \mathbf{A}_\beta \cdot \langle \mathbf{v} \rangle + \mathbf{f}_\beta, \quad (\text{A.39a})$$

$$\tilde{p}_\beta = \mu_\beta [\mathbf{a}_\beta \cdot \langle \mathbf{v} \rangle + \varphi_\beta], \quad (\text{A.39b})$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_\gamma = \mathbf{A}_\gamma \cdot \langle \mathbf{v} \rangle + \mathbf{f}_\gamma, \quad (\text{A.39c})$$

$$\tilde{p}_\gamma = \mu_\gamma [\mathbf{a}_\gamma \cdot \langle \mathbf{v} \rangle + \varphi_\gamma], \quad (\text{A.39d})$$

la sustitución de estas expresiones en las ecuaciones (A.38a)-(A.38j) resulta en dos problemas de valores a la frontera asociados a cada uno de los términos fuentes señalados. Así, se puede obtener, para la fuente asociados a $\langle \mathbf{v} \rangle$, un sistema de ecuaciones igual al escrito en el Problema

I, ecuaciones (A.18a) - (A.18j), y , en el caso de la fuente $2\sigma H\mathbf{n}_{\beta\gamma}$, el escrito para el Problema IV, ecuaciones (A.21a) - (A.21j).

Analizando la definición para el tensor de permeabilidad de equilibrio, \mathbf{K}^e , en términos de las correspondientes variables de cerradura, ecuaciones (3.13a) y (3.13b). Con el objetivo de obtener una forma equivalente de la definición para este coeficiente expresada en la permeabilidad intrínseca y el efecto relativo de la contribución del flujo disperso, se tiene

$$-\varepsilon\mu_\beta(\mathbf{K}^e)^{-1} = \mu_\beta \frac{1}{\mathcal{V}_f} \int_{\mathcal{A}_{\beta\kappa}} \mathbf{n}_{\beta\kappa} \cdot [-\mathbf{a}_\beta \mathbf{l} + \nabla \mathbf{A}_\beta] dA + \mu_\beta \frac{1}{\mathcal{V}_f} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot [-\mathbf{a}_\beta \mathbf{l} + \nabla \mathbf{A}_\beta] dA + \mu_\gamma \frac{1}{\mathcal{V}_f} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\gamma\beta} \cdot [-\mathbf{a}_\gamma \mathbf{l} + \nabla \mathbf{A}_\gamma] dA \quad (\text{A.40a})$$

$$\mu_\gamma \mathbf{h}^e = \mu_\beta \frac{1}{\mathcal{V}_f} \int_{\mathcal{A}_{\beta\kappa}} \mathbf{n}_{\beta\kappa} \cdot [-\varphi_\beta \mathbf{l} + \nabla \mathbf{f}_\beta] dA + \mu_\beta \frac{1}{\mathcal{V}_f} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot [-\varphi_\beta \mathbf{l} + \nabla \mathbf{f}_\beta] dA + \mu_\gamma \frac{1}{\mathcal{V}_f} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\gamma\beta} \cdot [-\varphi_\gamma \mathbf{l} + \nabla \mathbf{f}_\gamma] dA \quad (\text{A.40b})$$

En estas expresiones las integrales de superficie se escriben explícitamente, recordando que $\mathcal{A}_\beta = \mathcal{A}_{\beta\kappa} + \mathcal{A}_{\beta\gamma}$. Usando las condiciones de frontera en la interfase $\beta - \gamma$, dadas por la Ecuación (A.18d)

$$\mu_\beta \left[-\mathbf{a}_\beta \mathbf{l} + \left(\nabla \mathbf{A}_\beta + \nabla \mathbf{A}_\beta^\top \right) \right] \cdot \mathbf{n}_{\beta\gamma} = \mu_\gamma \left[-\mathbf{a}_\gamma \mathbf{l} + \left(\nabla \mathbf{A}_\gamma + \nabla \mathbf{A}_\gamma^\top \right) \right] \cdot \mathbf{n}_{\beta\gamma}$$

y la Ecuación (A.21d)

$$\mu_\beta \left[-\varphi_\beta \mathbf{l} + \left(\nabla \mathbf{f}_\beta + \nabla \mathbf{f}_\beta^\top \right) \right] \cdot \mathbf{n}_{\beta\gamma} = \mu_\gamma \left[-\varphi_\gamma \mathbf{l} + \left(\nabla \mathbf{f}_\gamma + \nabla \mathbf{f}_\gamma^\top \right) \right] \cdot \mathbf{n}_{\beta\gamma} + 2H\sigma \mathbf{n}_{\beta\gamma}$$

Integrando estas condiciones de frontera sobre la interfase fluido - fluido y considerando la naturaleza solenoide de los campos de las variables de cerradura \mathbf{A}_β , \mathbf{A}_γ (expresado por las ecuaciones (A.18a) y (A.18f)) y \mathbf{f}_β , \mathbf{f}_γ (expresado por las ecuaciones (A.21a) y (A.21f)) se

pueden obtener las identidades siguientes

$$\mu_\beta \frac{1}{\mathcal{V}_f} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot [-\mathbf{a}_\beta \mathbf{l} + \nabla \mathbf{A}_\beta] dA = -\mu_\gamma \frac{1}{\mathcal{V}_f} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\gamma\beta} \cdot [-\mathbf{a}_\gamma \mathbf{l} + \nabla \mathbf{A}_\gamma] dA \quad (\text{A.41a})$$

$$\mu_\beta \frac{1}{\mathcal{V}_f} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot [-\varphi_\beta \mathbf{l} + \nabla \mathbf{f}_\beta] dA = -\mu_\gamma \frac{1}{\mathcal{V}_f} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\gamma\beta} \cdot [-\varphi_\gamma \mathbf{l} + \nabla \mathbf{f}_\gamma] dA + \frac{1}{\mathcal{V}_f} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} 2H\sigma \mathbf{n}_{\beta\gamma} dV \quad (\text{A.41b})$$

Usando estas ecuaciones en las definiciones de los coeficientes efectivos de equilibrio, ecuaciones (A.40a) y (A.40b), respectivamente, se pueden simplificar como

$$-\mathbf{K}^{e-1} \varepsilon = \frac{1}{\mathcal{V}_f} \int_{\mathcal{A}_{\beta\kappa}} \mathbf{n}_{\beta\kappa} \cdot [-\mathbf{a}_\beta \mathbf{l} + \nabla \mathbf{A}_\beta] dA \quad (\text{A.42a})$$

$$\mathbf{h}^e = \frac{\nu}{\mathcal{V}_f} \int_{\mathcal{A}_{\beta\kappa}} \mathbf{n}_{\beta\kappa} \cdot [-\varphi_\beta \mathbf{l} + \nabla \mathbf{f}_\beta] dA + \frac{1}{\mathcal{V}_f} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \frac{2H\sigma \mathbf{n}_{\beta\gamma}}{\mu_\gamma} dA \quad (\text{A.42b})$$

B.1. Restricciones para el equilibrio local mecánico

Este apéndice se dedica a deducir las restricciones de escalas características que permiten la suposición del equilibrio local mecánico. Para lograr este objetivo, recordamos la Ecuación (3.6), determinada de las descomposiciones macroscópicas, Ecuación (3.5), y las definiciones de los promedios intrínsecos de equilibrio, Ecuación (3.3),

$$\varepsilon_\beta \hat{p}_\beta = (\varepsilon_\beta - \varepsilon) \hat{p}_\gamma = \frac{\varepsilon_\beta(\varepsilon - \varepsilon_\beta)}{\varepsilon} \left(\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma \right) \quad (\text{B.1a})$$

$$\varepsilon_\beta \hat{\mathbf{v}}_\beta = (\varepsilon_\beta - \varepsilon) \hat{\mathbf{v}}_\gamma = \frac{\varepsilon_\beta(\varepsilon - \varepsilon_\beta)}{\varepsilon} \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) \quad (\text{B.1b})$$

En estas ecuaciones se usó la relación entre las fracciones volumétricas y la porosidad, $\varepsilon = \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma$. Ciertamente, para la condición en la cual $\left(\langle \psi_\beta \rangle^\beta - \langle \psi_\gamma \rangle^\gamma \right) = 0$, $\psi = p, \mathbf{v}$, y siguiendo el resultado anterior, se determinaría que las desviaciones macroscópicas serían cero, $\hat{p}_\alpha = 0$ y $\hat{\mathbf{v}}_\alpha = 0$, $\alpha = \beta, \gamma$, bajo la condición de equilibrio local mecánico. En la práctica, la determinación de una suposición principal para que el equilibrio local se satisfaga sería la siguiente,

$$\langle p_\beta \rangle^\beta \approx \langle p \rangle \approx \langle p_\gamma \rangle^\gamma, \text{ En el equilibrio local mecánico es válido} \quad (\text{B.2a})$$

$$\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \approx \langle \mathbf{v} \rangle \approx \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma, \quad (\text{B.2b})$$

En la Ecuación (3.7) del texto principal se puede notar que al considerar como razonables las siguientes suposiciones

$$S_\beta S_\gamma (\mu_\beta - \mu_\gamma) \nabla^2 \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) \ll \mu_\beta (\mathbf{K}^e)^{-1} \cdot \varepsilon \langle \mathbf{v} \rangle \quad (\text{B.3a})$$

$$S_\gamma \left[S_\beta \mu_\beta (-\varepsilon_\beta \mathbf{K}_{\beta\beta}^{ne-1}) + S_\gamma \mu_\gamma (-\varepsilon_\gamma \mathbf{K}_{\gamma\gamma}^{ne-1}) \right] \cdot \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) \ll \mu_\beta (\mathbf{K}^e)^{-1} \cdot \varepsilon \langle \mathbf{v} \rangle \quad (\text{B.3b})$$

$$(S_\beta \mu_\beta \mathbf{K}_{\beta\gamma}^{ne} + S_\gamma \mu_\gamma \mathbf{K}_{\gamma\beta}^{ne}) \cdot \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) \ll \mu_\beta (\mathbf{K}^e)^{-1} \cdot \varepsilon \langle \mathbf{v} \rangle \quad (\text{B.3c})$$

$$(S_\beta \mu_\beta \mathbf{u}_\beta + S_\gamma \mu_\gamma \mathbf{u}_\gamma) \left(\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma \right) \ll \mu_\beta (\mathbf{K}^e)^{-1} \cdot \varepsilon \langle \mathbf{v} \rangle \quad (\text{B.3d})$$

el término Φ puede ser descartado y de esta forma, obtener respectivamente el modelo de equilibrio. Para obtener formas útiles de las ecuaciones (B.3a)-(B.3d), es necesario realizar estimado de los órdenes de magnitud de las expresiones involucrados en estas suposiciones, de esta forma es posible obtener las siguientes desigualdades

$$\frac{S_\beta S_\gamma (\mu_\beta - \mu_\gamma)}{\varepsilon \mu_\beta (\mathbf{K}^e)^{-1} L_{v1} L_v} \left(\frac{\langle v_\beta \rangle^\beta - \langle v_\gamma \rangle^\gamma}{\langle v \rangle} \right) \ll 1 \quad (\text{B.4a})$$

$$\frac{S_\gamma \left[S_\beta \mu_\beta (-\varepsilon_\beta \mathbf{K}_{\beta\beta}^{ne-1}) + S_\gamma \mu_\gamma (-\varepsilon_\gamma \mathbf{K}_{\gamma\gamma}^{ne-1}) \right]}{\varepsilon \mu_\beta (\mathbf{K}^e)^{-1}} \left(\frac{\langle v_\beta \rangle^\beta - \langle v_\gamma \rangle^\gamma}{\langle v \rangle} \right) \ll 1 \quad (\text{B.4b})$$

$$\frac{(S_\beta \mu_\beta \mathbf{K}_{\beta\gamma}^{ne} + S_\gamma \mu_\gamma \mathbf{K}_{\gamma\beta}^{ne})}{\varepsilon \mu_\beta (\mathbf{K}^e)^{-1}} \left(\frac{\langle v_\beta \rangle^\beta - \langle v_\gamma \rangle^\gamma}{\langle v \rangle} \right) \ll 1 \quad (\text{B.4c})$$

$$\frac{(S_\beta \mu_\beta \mathbf{u}_\beta + S_\gamma \mu_\gamma \mathbf{u}_\gamma)}{\varepsilon \mu_\beta (\mathbf{K}^e)^{-1}} \left(\frac{\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma}{\langle v \rangle} \right) \ll 1 \quad (\text{B.4d})$$

En las expresiones anteriores $\mathbf{K}_{\beta\beta}^{ne}$, $\mathbf{K}_{\gamma\gamma}^{ne}$, $\mathbf{K}_{\beta\gamma}^{ne}$ y $\mathbf{K}_{\gamma\beta}^{ne}$ y u_β y u_γ , son las normas de los tensores y vectores efectivos, respectivamente. En la Ecuación (B.4a), el estimado de orden de magnitud del Laplaciano de la diferencia de velocidades está dado por

$$\nabla^2 \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) = \mathbf{O} \left(\frac{\langle v_\beta \rangle^\beta - \langle v_\gamma \rangle^\gamma}{L_{v1} L_v} \right) \quad (\text{B.5})$$

en la cual, L_v es la longitud característica asociada con los cambios de $\left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right)$, y L_{v1} es la longitud característica asociada los cambios en $\nabla \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right)$. En las desigualdades presentes en las ecuaciones (B.4a) - (B.4d) y las relaciones en las ecuaciones (B.1a) - (B.1b), es claro que se debe estimar el orden de magnitud de las diferencias de $\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma$ y $\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma$

$\langle p_\gamma \rangle^\gamma$, con el objetivo de deducir las restricciones de longitudes características que satisfacen la suposición del equilibrio local mecánico. Este estimado se puede obtener al restar la ecuación de cantidad de movimiento de la fase- γ , Ecuación (2.31), a la ecuación de la fase- β , Ecuación (2.33), de esa forma

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = & -\nabla \left(\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma \right) + (\rho_\beta - \rho_\gamma) \mathbf{g} + \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \mu_\gamma \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \\ & + [\mu_\beta (-\varepsilon_\beta \mathbf{K}_{\beta\beta}^{ne-1}) - \mu_\gamma (-\varepsilon_\gamma \mathbf{K}_{\gamma\gamma}^{ne-1})] \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + (\mu_\beta \mathbf{K}_{\beta\gamma}^{ne} - \mu_\gamma \mathbf{K}_{\gamma\beta}^{ne}) \cdot \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) + \\ & (\mu_\beta \mathbf{u}_\beta - \mu_\gamma \mathbf{u}_\gamma) \left(\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma \right) + (\mu_\beta \mathbf{h}_\beta - \mu_\gamma \mathbf{h}_\gamma) \quad (\text{B.6}) \end{aligned}$$

La combinación adecuada de las ecuaciones en (3.5) y (3.6), conducen a las siguientes relaciones

$$\langle p_\beta \rangle^\beta = \langle p \rangle + \frac{\varepsilon_\gamma}{\varepsilon} \left(\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma \right), \quad \langle p_\gamma \rangle^\gamma = \langle p \rangle - \frac{\varepsilon_\beta}{\varepsilon} \left(\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma \right) \quad (\text{B.7a})$$

$$\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta = \langle \mathbf{v} \rangle + \frac{\varepsilon_\gamma}{\varepsilon} \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right), \quad \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma = \langle \mathbf{v} \rangle - \frac{\varepsilon_\beta}{\varepsilon} \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right), \quad (\text{B.7b})$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en la Ecuación (B.6) y después de algunas manipulaciones algebraicas, eventualmente se llega a

$$\begin{aligned} & -\nabla \left(\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma \right) - \mathbf{e}_{\beta\gamma} \left(\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma \right) - \mu_{\beta\gamma} \nabla^2 \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) - \\ & (S_\gamma \mathbf{C}_{\beta\gamma} + \mathbf{D}_{\beta\gamma}) \cdot \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) - (\rho_\beta - \rho_\gamma) \mathbf{g} - \mathbf{h}_{\beta\gamma} = (\mu_\beta - \mu_\gamma) \nabla^2 \langle \mathbf{v} \rangle + \mathbf{C}_{\beta\gamma} \cdot \langle \mathbf{v} \rangle \quad (\text{B.8}) \end{aligned}$$

donde se han introducido los siguientes definiciones de los tensores y vectores de la ecuación anterior

$$\mu_{\beta\gamma} = S_\gamma \mu_\beta + S_\beta \mu_\gamma \quad (\text{B.9a})$$

$$\mathbf{C}_{\beta\gamma} = \mu_\beta (-\varepsilon_\beta \mathbf{K}_{\beta\beta}^{ne-1}) - \mu_\gamma (-\varepsilon_\gamma \mathbf{K}_{\gamma\gamma}^{ne-1}) \quad (\text{B.9b})$$

$$\mathbf{D}_{\beta\gamma} = \mu_\beta \mathbf{K}_{\beta\gamma}^{ne} - \mu_\gamma \mathbf{K}_{\gamma\beta}^{ne} \quad (\text{B.9c})$$

$$\mathbf{e}_{\beta\gamma} = \mu_\beta \mathbf{u}_\beta - \mu_\gamma \mathbf{u}_\gamma \quad (\text{B.9d})$$

$$\mathbf{h}_{\beta\gamma} = \mu_\beta \mathbf{h}_\beta - \mu_\gamma \mathbf{h}_\gamma \quad (\text{B.9e})$$

De la Ecuación (B.6), se puede demostrar que, para los casos donde la fracción volumétrica de la fase continua es mayor que la fracción de la fase dispersa (*i.e.*, $\varepsilon_\beta \gg \varepsilon_\gamma$) o si las propiedades de ambas fases fluidas son iguales (*i.e.* $\rho_\beta = \rho_\gamma$, $\mu_\beta = \mu_\gamma$), la suposición del equilibrio local mecánico se satisface automáticamente. Sin embargo, el análisis de órdenes de magnitud permite la estimación de la relación $(\langle v_\beta \rangle^\beta - \langle v_\gamma \rangle^\gamma) / \langle v \rangle$. Este desarrollo inicia con el estimado de los órdenes de magnitud de cada término en el lado izquierdo de la Ecuación (B.6)

$$\nabla (\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma) = \mathbf{O} \left(\frac{\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma}{L} \right) \quad (\text{B.10a})$$

$$\mathbf{e}_{\beta\gamma} (\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma) = \mathbf{O} \left(\frac{\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma}{\ell} \right) \quad (\text{B.10b})$$

$$\mu_{\beta\gamma} \nabla^2 (\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma) = \mathbf{O} \left(\frac{\mu_{\beta\gamma} \langle v_\beta \rangle^\beta - \langle v_\gamma \rangle^\gamma}{L^2} \right) \quad (\text{B.10c})$$

$$\begin{aligned} & (S_\gamma \mathbf{C}_{\beta\gamma} + \mathbf{D}_{\beta\gamma}) \cdot (\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma) = \\ & \left\{ \mathbf{O} \left[\frac{S_\gamma (\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma)}{L} \right] + \mathbf{O} \left(\frac{1}{\ell^2} \right) \right\} (\langle v_\beta \rangle^\beta - \langle v_\gamma \rangle^\gamma) \end{aligned} \quad (\text{B.10d})$$

$$-(\rho_\beta - \rho_\gamma) \mathbf{g} - \mathbf{h}_{\beta\gamma} = \mathbf{O} \left(\frac{\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma}{L} \right) \quad (\text{B.10e})$$

Por simplicidad se toma L , para englobar todas las longitudes características asociadas a variaciones las derivadas de las diferencias de las cantidades promedio de la velocidad, L_v y L_{v1} , en la Ecuación (B.10c), y de la presión L_p , en la Ecuación (B.10a). La longitud característica ℓ , representa todas las longitudes características relacionadas con los cambios de las propiedades definidas en la microescala (*i.e.* ℓ_β y ℓ_γ). Además, el orden de magnitud de $\mathbf{C}_{\beta\gamma}$ se puede obtener de la definición dada en la Ecuación (B.9b) y del modelo de NELM, ecuaciones. (2.31) y (2.33), al suponer que en ambas ecuaciones el gradiente de presión es del mismo orden que el término de Darcy (que incluyen los tensores efectivos $-\varepsilon_\beta \mathbf{K}_{\beta\beta}^{ne-1}$ y $-\varepsilon_\gamma \mathbf{K}_{\gamma\gamma}^{ne-1}$), así

$$\mu_\beta (-\varepsilon_\beta \mathbf{K}_{\beta\beta}^{ne-1}) = \mathbf{O} \left(\frac{\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta}{\langle v_\beta \rangle^\beta} \right), \quad (\text{B.11a})$$

$$\mu_\gamma (-\varepsilon_\gamma \mathbf{K}_{\gamma\gamma}^{ne-1}) = \mathbf{O} \left(\frac{\nabla \langle p_\gamma \rangle^\gamma}{\langle v_\beta \rangle^\beta} \right) \quad (\text{B.11b})$$

Igualmente, para la condición en la cual el estimado $\mathbf{O}(\langle v_\beta \rangle^\beta) = \mathbf{O}(\langle v \rangle)$, por consiguiente es razonable estimar el orden de magnitud de $\mathbf{C}_{\beta\gamma}$, Ecuación (B.9e), como

$$\mathbf{C}_{\beta\gamma} = \mathbf{O}\left(\frac{\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma}{L \langle v \rangle}\right) \quad (\text{B.12})$$

Para avanzar en la deducción, es conveniente escribir las expresiones completas para $\mathbf{D}_{\beta\gamma}$, $\mathbf{e}_{\beta\gamma}$ y $\mathbf{h}_{\beta\gamma}$, en términos de las correspondientes integrales de las variables de cerradura, presentadas en la Apéndice A,

$$\mathbf{D}_{\beta\gamma} = \mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \left(\frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_\beta} \mathbf{n}_{\beta\kappa} \cdot [-\mathbf{a}_{\beta\gamma} \mathbf{l} + \nabla \mathbf{A}_{\beta\gamma}] dA \right) - \mu_\gamma \varepsilon_\gamma^{-1} \left(\frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\gamma\beta} \cdot [-\mathbf{a}_{\gamma\beta} \mathbf{l} + \nabla \mathbf{A}_{\gamma\beta}] dA \right) \quad (\text{B.13a})$$

$$\mathbf{e}_{\beta\gamma} = \mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \left(\frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_\beta} \mathbf{n}_\beta \cdot [-s_\beta \mathbf{l} + \nabla \mathbf{d}_\beta] dA \right) - \mu_\gamma \varepsilon_\gamma^{-1} \left(\frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\gamma\beta} \cdot [-s_\gamma \mathbf{l} + \nabla \mathbf{d}_\gamma] dA \right) \quad (\text{B.13b})$$

$$\mathbf{h}_{\beta\gamma} = \mu_\beta \varepsilon_\beta^{-1} \left(\frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_\beta} \mathbf{n}_\beta \cdot [-\varphi_\beta \mathbf{l} + \nabla \mathbf{f}_\beta] dA \right) - \mu_\gamma \varepsilon_\gamma^{-1} \left(\frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\gamma\beta} \cdot [-\varphi_\gamma \mathbf{l} + \nabla \mathbf{f}_\gamma] dA \right) \quad (\text{B.13c})$$

Por lo tanto, las estimaciones del orden de magnitud de estos tensores y vectores se determinan como

$$\mathbf{D}_{\beta\gamma} = \mathbf{O}\left(\varepsilon_\beta^{-1} \frac{\mu_\beta}{\ell^2}, \varepsilon_\gamma^{-1} \frac{\mu_\gamma}{\ell^2}\right) \quad (\text{B.14a})$$

$$\mathbf{e}_{\beta\gamma} = \mathbf{O}\left(\varepsilon_\beta^{-1} \frac{1}{\ell}, \varepsilon_\gamma^{-1} \frac{1}{\ell}\right) \quad (\text{B.14b})$$

$$\mathbf{h}_{\beta\gamma} = \mathbf{O}\left(\varepsilon_\beta^{-1} \frac{\sigma}{\ell^2}, \varepsilon_\gamma^{-1} \frac{\sigma}{\ell^2}\right) \quad (\text{B.14c})$$

aquí, se han tomado en cuenta los resultados de los problemas de cerradura, Problemas II - IV, presentados en la Apéndice A, considerando que $H = \mathbf{O}(\ell^{-1})$, con el objetivo de escribir los siguientes estimados de órdenes de magnitud de las variables de cerradura

$$\mathbf{A}_{\beta\gamma} = \mathbf{O}(1), \quad \mathbf{A}_{\gamma\beta} = \mathbf{O}(1), \quad \mathbf{a}_{\beta\gamma} = \mathbf{O}\left(\frac{1}{\ell_\beta}\right), \quad \mathbf{a}_{\gamma\beta} = \mathbf{O}\left(\frac{1}{\ell_\gamma}\right) \quad (\text{B.15a})$$

$$\mathbf{d}_\beta = \mathbf{O}\left(\frac{\ell_\beta}{\mu_\beta}\right), \quad \mathbf{d}_\gamma = \mathbf{O}\left(\frac{\ell_\gamma}{\mu_\gamma}\right), \quad s_\beta = \mathbf{O}\left(\frac{1}{\mu_\beta}\right), \quad s_\gamma = \mathbf{O}\left(\frac{1}{\mu_\gamma}\right) \quad (\text{B.15b})$$

$$\mathbf{f}_\beta = \mathbf{O}\left(\frac{\sigma}{\mu_\beta}\right), \quad \mathbf{f}_\gamma = \mathbf{O}\left(\frac{\sigma}{\mu_\gamma}\right), \quad \varphi_\beta = \mathbf{O}\left(\frac{\sigma}{\mu_\beta \ell}\right), \quad \varphi_\gamma = \mathbf{O}\left(\frac{\sigma}{\mu_\gamma \ell}\right) \quad (\text{B.15c})$$

La deducción continúa con el análisis del lado derecho de la Ecuación (B.8) donde se obtienen, los estimados siguientes

$$(\mu_\beta - \mu_\gamma) \nabla^2 \langle \mathbf{v} \rangle = \mathbf{O}(\mu_\beta - \mu_\gamma) \left(\frac{\langle v \rangle}{L^2} \right) \quad (\text{B.16})$$

$$\mathbf{C}_{\beta\gamma} \cdot \langle \mathbf{v} \rangle = \mathbf{O}\left(\frac{\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma}{L} \right) \quad (\text{B.17})$$

En esta última expresión se usó la estimación la Ecuación (B.11). Por otro lado, usando nuevamente las ecuaciones (2.31) y (2.33), se puede suponer que los términos que incluyen la diferencia de velocidades y la diferencia de presiones son del mismo orden,

$$\mu_\beta \mathbf{u}_\beta \left(\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma \right) = \mathbf{O} \left[\mu_\beta \mathbf{K}_{\beta\gamma}^{ne} \cdot \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) \right] \quad (\text{B.18a})$$

$$\mu_\gamma \mathbf{u}_\gamma \left(\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma \right) = \mathbf{O} \left[\mu_\gamma \mathbf{K}_{\gamma\beta}^{ne} \cdot \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) \right] \quad (\text{B.18b})$$

Del análisis anterior, junto con los estimados de los órdenes de magnitud de las variables de cerradura de la ecuaciones (B.15a) y (B.15b), se puede determinar que el orden de magnitud para las diferencias de presiones es

$$\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma = \mathbf{O} \left(\frac{\langle v_\beta \rangle^\beta - \langle v_\gamma \rangle^\gamma}{\ell} \right) \quad (\text{B.19})$$

Sustituyendo todos los estimados de órdenes de magnitud para el lado izquierdo y el derecho de la Ecuación (B.8), da lugar, después de una serie de manipulaciones, la siguiente expresión

global, la cual es aplicable para el primer orden de $(\langle v_\beta \rangle^\beta - \langle v_\gamma \rangle^\gamma) / \langle v \rangle$, así

$$\frac{\langle v_\beta \rangle^\beta - \langle v_\gamma \rangle^\gamma}{\langle v \rangle} = \mathbf{O} \left(\frac{\ell}{L} \right)^2 \left\{ \frac{1}{1 + \mathbf{O} \left(\frac{\ell}{L} \right) + \mathbf{O} \left(\frac{\ell}{L} \right)^2 + \mathbf{O} \left(\frac{\ell}{L} \right) \left(\frac{\langle v_\beta \rangle^\beta - \langle v_\gamma \rangle^\gamma}{\langle v \rangle} \right)} \right\} \quad (\text{B.20})$$

donde los términos con el mismo orden de magnitud se colapsan en un solo término (*i.e* ecuaciones B.10a, B.10e y B.17). Además, bajo la suposición

$$\frac{\langle v_\beta \rangle^\beta - \langle v_\gamma \rangle^\gamma}{\langle v \rangle} \ll \frac{L}{\ell} \quad (\text{B.21})$$

y usando la restricción de escala características $\ell \ll L$, se tiene

$$\left(\frac{\langle v_\beta \rangle^\beta - \langle v_\gamma \rangle^\gamma}{\langle v \rangle} \right) = \mathbf{O} \left(\frac{\ell}{L} \right)^2 \ll 1 \quad (\text{B.22})$$

la cual es la restricción deseada para considerar que la suposición de equilibrio local mecánico es válida. Esta restricción resulta estar satisfecha bajo la restricción de longitudes impuesta en el desarrollo de los modelos escalados donde se requiere que el tamaño del volumen promediante, r_0 , satisfaga la restricción de escalas características siguiente (Whitaker, 1999),

$$\ell_\alpha \ll r_0 \ll L, \quad \alpha = \beta, \gamma \quad (\text{B.23})$$

C.1. Restricciones para el equilibrio local mecánico en la inter-región

En este apéndice se deducen las suposiciones y restricciones involucradas para considerar la validez de la condición de equilibrio local mecánico en la inter-región. En el Apéndice B, se presentó que la determinación de una suposición para que el equilibrio local mecánico se satisfaga sería la siguiente,

$$\langle p_\beta \rangle^\beta \approx \langle p \rangle \approx \langle p_\gamma \rangle^\gamma, \quad (\text{C.1a})$$

$$\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \approx \langle \mathbf{v} \rangle \approx \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma, \quad (\text{C.1b})$$

Además en la Ecuación (4.8), del texto principal los términos que involucran la diferencia de velocidades $\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma$ en el término Φ , se puede descartar si se consideran razonables las siguientes suposiciones

$$S_\beta(\mathbf{x})S_\gamma(\mathbf{x})(\mu_\beta - \mu_\gamma)\nabla^2 \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) \ll \mu_\beta [-\mathbf{K}^{e-1}(\mathbf{x})\varepsilon(\mathbf{x})] \cdot \langle \mathbf{v} \rangle \quad (\text{C.2a})$$

$$(\mu_\beta - \mu_\gamma)\mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) \ll \mu_\beta [-\mathbf{K}^{e-1}(\mathbf{x})\varepsilon(\mathbf{x})] \cdot \langle \mathbf{v} \rangle \quad (\text{C.2b})$$

$$(\mu_\beta - \mu_\gamma)\Sigma(\mathbf{x}) \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) \ll \mu_\beta [-\mathbf{K}^{e-1}(\mathbf{x})\varepsilon(\mathbf{x})] \cdot \langle \mathbf{v} \rangle \quad (\text{C.2c})$$

Realizando estimados de órdenes de magnitud de las expresiones anteriores, se obtienen las siguientes desigualdades

$$\frac{(\mu_\beta - \mu_\gamma) S_\beta S_\gamma K^e}{\mu_\beta \varepsilon L^2} \left(\frac{\langle v_\beta \rangle^\beta - \langle v_\gamma \rangle^\gamma}{\langle v \rangle} \right) \ll 1 \quad (\text{C.3a})$$

$$\frac{(\mu_\beta - \mu_\gamma) S_\beta S_\gamma K^e}{\mu_\beta \varepsilon L r_0} \left(\frac{\langle v_\beta \rangle^\beta - \langle v_\gamma \rangle^\gamma}{\langle v \rangle} \right) \ll 1 \quad (\text{C.3b})$$

$$\frac{(\mu_\beta - \mu_\gamma) S_\beta S_\gamma K^e}{\mu_\beta \varepsilon r_0^2} \left(\frac{\langle v_\beta \rangle^\beta - \langle v_\gamma \rangle^\gamma}{\langle v \rangle} \right) \ll 1 \quad (\text{C.3c})$$

En las expresiones anteriores K^e es la norma del tensor de permeabilidad. En estas relaciones, además se han considerado los siguientes estimados de órdenes de magnitud

$$\nabla^2 \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) = \mathbf{O} \left(\frac{\langle v_\beta \rangle^\beta - \langle v_\gamma \rangle^\gamma}{L^2} \right) \quad (\text{C.4a})$$

$$\nabla \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) = \mathbf{O} \left(\frac{\langle v_\beta \rangle^\beta - \langle v_\gamma \rangle^\gamma}{L} \right) \quad (\text{C.4b})$$

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{O} \left[\frac{(\mu_\beta - \mu_\gamma) S_\beta S_\gamma}{r_0} \right] \quad (\text{C.4c})$$

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{O} \left[\frac{(\mu_\beta - \mu_\gamma) S_\beta S_\gamma}{r_0^2} \right] \quad (\text{C.4d})$$

Los estimados de órdenes de magnitud de la Ecuación (C.4a) y Ecuación (C.4b) se habían presentado con anterioridad en el Apéndice B; la Ecuación (C.4c) y la Ecuación (C.4d) se obtienen de las expresiones determinadas en el texto principal, Ecuación (4.12b) y Ecuación (4.12c), respectivamente. Es evidente que las expresiones en la Ecuación (C.4), se satisfacen *automáticamente* cuando se imponen las siguientes condiciones

$$\mu_\beta \approx \mu_\gamma \quad S_\beta \gg S_\gamma \quad (\text{C.5})$$

Bajo las circunstancias donde los parámetros físicos, el coeficiente efectivo y las longitudes

de escala pueden ser tales que

$$\frac{(\mu_\beta - \mu_\gamma) S_\beta S_\gamma K^e}{\mu_\beta \varepsilon L^2} \leq \mathbf{O}(1), \quad \frac{(\mu_\beta - \mu_\gamma) S_\beta S_\gamma K^e}{\mu_\beta \varepsilon r_0 L} \leq \mathbf{O}(1), \quad \frac{(\mu_\beta - \mu_\gamma) S_\beta S_\gamma K^e}{\mu_\beta \varepsilon r_0^2} \leq \mathbf{O}(1), \quad (\text{C.6})$$

las desigualdades en la Ecuación (C.3) indican que la condición de equilibrio local mecánico será dominada por la cantidad dada por $(\langle v_\beta \rangle^\beta - \langle v_\gamma \rangle^\gamma) / \langle v \rangle$, las estimaciones de relación permitirá para deducir las restricciones de escala características o números adimensionales necesarias para satisfacer esta suposición. El estimado más adecuado se deba basar en las ecuaciones diferenciales gobernantes de $(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma)$. Esta ecuación gobernante se pueden obtener, en un sentido aproximado, a partir de resta de las ecuaciones: Ecuación (4.2a) - Ecuación (4.2b), correspondientes a la GTE. Realizando esta operación se obtiene la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = & -\nabla \left(\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma \right) + (\rho_\beta - \rho_\gamma) \mathbf{g} + \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \mu_\gamma \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \\ & + \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_\beta(\mathbf{x})} \mathbf{n}_\beta \cdot \left[-\mathbf{l} p_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} + \mu_\beta \nabla \mathbf{v}_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} \right] dA + \varepsilon_\beta^{-1} \mu_\beta \nabla \cdot \left(\frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_\beta(\mathbf{x})} \mathbf{n}_\beta \mathbf{v}_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} dA \right) \\ & - \frac{1}{V_\gamma} \int_{\mathcal{A}_\gamma(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\gamma\beta} \cdot \left[-\mathbf{l} p_\gamma|_{\mathbf{r}_\gamma} + \mu_\gamma \nabla \mathbf{v}_\gamma|_{\mathbf{r}_\gamma} \right] dA - \varepsilon_\gamma^{-1} \mu_\gamma \nabla \cdot \left(\frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_\gamma(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\gamma\beta} \mathbf{v}_\gamma|_{\mathbf{r}_\gamma} dA \right) \\ & - \varepsilon_\beta^{-1} \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_\beta(\mathbf{x})} \mathbf{n}_\beta \cdot \left[-\mathbf{l} \langle p_\beta \rangle^\beta + \mu_\beta \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \right] dA - \varepsilon_\beta^{-1} \mu_\beta \nabla \cdot \left(\frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_\beta(\mathbf{x})} \mathbf{n}_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta dA \right) + \\ & \varepsilon_\gamma^{-1} \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_\beta\gamma(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\gamma\beta} \cdot \left[-\mathbf{l} \langle p_\gamma \rangle^\gamma|_{\mathbf{r}_\gamma} + \mu_\gamma \nabla \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma|_{\mathbf{r}_\gamma} \right] dA + \varepsilon_\gamma^{-1} \mu_\gamma \nabla \cdot \left(\frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_\beta\gamma(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\gamma\beta} \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma|_{\mathbf{r}_\gamma} dA \right) \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Al aplicar las relaciones dadas en la Ecuación (B.7) a la Ecuación (C.7), la expresión anterior después de procedimientos algebraicos, es posible representarla en términos de cantidades promedio de equilibrio y vectores y tensores efectivos

$$\begin{aligned} \nabla \left(\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma \right) + \left(\varepsilon_\beta^{-1} S_\gamma \nabla \varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma^{-1} S_\beta \nabla \varepsilon_\gamma \right) \left(\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma \right) - (\rho_\beta - \rho_\gamma) \mathbf{g} + S_\gamma^{-1} \mathbf{h}^e - \\ \mu_{\beta\gamma} \nabla^2 \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) - \mathbf{\Upsilon} \cdot \nabla \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) - \Pi \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\mu_\beta - \mu_\gamma) \nabla^2 \langle \mathbf{v} \rangle + S_\beta^{-1} [\mu_\beta (-\mathbf{K}^{e-1} \varepsilon) \cdot \langle \mathbf{v} \rangle] + S_\gamma^{-1} [\mu_\gamma (-\mathbf{D}_{\beta\gamma} \varepsilon) \cdot \langle \mathbf{v} \rangle] + \\
& + [(\mu_\beta - \mu_\gamma) \varepsilon_\gamma^{-1} \nabla \varepsilon_\gamma + \mu_\beta S_\beta^{-1} \varepsilon^{-1} \nabla \varepsilon] \cdot \nabla \langle \mathbf{v} \rangle + \mu_\beta S_\beta^{-1} \varepsilon^{-1} \nabla^2 \varepsilon \langle \mathbf{v} \rangle + \\
& (S_\beta S_\gamma)^{-1} \mu_{\beta\gamma} \varepsilon^{-1} \nabla \cdot [\mathbf{u}_{\beta\gamma} \varepsilon \langle \mathbf{v} \rangle] \quad (\text{C.8})
\end{aligned}$$

donde se han introducido los siguientes parámetros y coeficientes

$$\mu_{\beta\gamma} = \mu_\beta S_\gamma + \mu_\gamma S_\beta \quad (\text{C.9a})$$

$$\mathbf{\Upsilon} = 2 \left[\mu_\gamma \nabla S_\beta + \mu_\beta \nabla S_\gamma + \varepsilon_\beta^{-1} \mu_\beta S_\gamma \nabla \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma^{-1} \mu_\gamma S_\beta \nabla \varepsilon_\gamma \right] \quad (\text{C.9b})$$

$$\Pi = \left[\mu_\gamma \nabla^2 S_\beta + \mu_\beta \nabla^2 S_\gamma + 2 \left(\varepsilon_\beta^{-1} \mu_\beta \nabla \varepsilon_\beta \cdot \nabla S_\gamma + \varepsilon_\gamma^{-1} \mu_\gamma \nabla \varepsilon_\gamma \cdot \nabla S_\beta \right) + \varepsilon_\beta^{-1} \mu_\beta S_\gamma \nabla^2 \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma^{-1} \mu_\gamma S_\beta \nabla^2 \varepsilon_\gamma \right] \quad (\text{C.9c})$$

$$\mu_\beta (-\mathbf{K}^{e-1} \varepsilon) \cdot \langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{V_f} \int_{\mathcal{A}_{\beta\kappa}} \mathbf{n}_{\beta\kappa} \cdot \left[-\mathbf{l} \left(p_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} - \langle p \rangle \right) + \mu_\beta \nabla \left(\mathbf{v}_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} - \langle \mathbf{v} \rangle \right) \right] dA \quad (\text{C.9d})$$

$$S_\beta \mu_\gamma (-\mathbf{D}_{\beta\gamma} \varepsilon) \cdot \langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{V_f} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot \left[-\mathbf{l} \left[p_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} - \langle p \rangle \right] + \mu_\beta \nabla \left(\mathbf{v}_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} - \langle \mathbf{v} \rangle \right) \right] dA \quad (\text{C.9e})$$

$$\mathbf{h}^e = \frac{1}{V_f} \int_{\mathcal{A}_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} 2\sigma H dA \quad (\text{C.9f})$$

$$\mathbf{u}_{\beta\gamma} \langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{V_f} \int_{A_{\beta\gamma}} \mathbf{n}_{\beta\gamma} (\mathbf{v}_\beta - \langle \mathbf{v} \rangle) dA \quad (\text{C.9g})$$

El estimado de los órdenes de magnitud de cada término del lado izquierdo de la Ecuación (C.8) resulta en

$$\begin{aligned}
& \nabla \left(\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma \right) + \left(\varepsilon_\beta^{-1} S_\gamma \nabla \varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma^{-1} S_\beta \nabla \varepsilon_\gamma \right) \left(\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma \right) - \mu_{\beta\gamma} \nabla^2 \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) - \\
& \mathbf{\Upsilon} \cdot \nabla \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) - \Pi \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) - (\rho_\beta - \rho_\gamma) \mathbf{g} + S_\gamma^{-1} \mathbf{h}^e = \\
& \left\{ \mathbf{O} \left[\frac{1}{L^2} \right] + \mathbf{O} \left[\frac{1}{Lr_0} \right] + \mathbf{O} \left[\frac{1}{r_0^2} \right] + \mathbf{O} \left[\frac{Bo_{\beta\gamma}}{Ca_{\beta\gamma} \ell^2} \right] + \mathbf{O} \left[\frac{\varepsilon_\gamma^{-1}}{Ca_{\beta\gamma} \ell^2} \right] \right\} \mu_{\beta\gamma} \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) \quad (\text{C.10})
\end{aligned}$$

Para obtener esta igualdad, se ha supuesto que son del mismo orden de magnitud los

términos: $\nabla \left(\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma \right) = \mathbf{O} \left\{ \mu_{\beta\gamma} \nabla^2 \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) \right\}$, así

$$\left(\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma \right) = \mathbf{O} \left[\frac{\mu_{\beta\gamma}}{L} \right] \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right) \quad (\text{C.11})$$

En la Ecuación (C.10), se definen los números capilar, $Ca_{\beta\gamma}$ y de Bond $Bo_{\beta\gamma}$, los cuales se definieron de la siguiente forma

$$Ca_{\beta\gamma} = \frac{\mu_{\beta\gamma} \left(\langle v_\beta \rangle^\beta - \langle v_\gamma \rangle^\gamma \right)}{\sigma}, \quad Bo_{\beta\gamma} = \frac{\ell^2 (\rho_\beta - \rho_\gamma) g}{\sigma} \quad (\text{C.12})$$

que involucra suponer que el término orden de magnitud de $S_\gamma^{-1} \mathbf{h}^e$, es

$$S_\gamma^{-1} \mathbf{h}^e = \mathbf{O} \left[\frac{\sigma}{\varepsilon_\gamma \ell^2} \right] \quad (\text{C.13})$$

donde además se supone que la curvatura: $H = \mathbf{O}(\ell^{-1})$. Aquí ℓ es la longitud característica microscópica que puede representar el diámetro promedio del poro d_p .

Por otro lado, aplicando un análisis de órdenes de magnitud similar al lado derecho de la Ecuación (C.8), se obtiene el estimado de la forma

$$\begin{aligned} & (\mu_\beta - \mu_\gamma) \nabla^2 \langle \mathbf{v} \rangle + S_\beta^{-1} [\mu_\beta (-\mathbf{K}^{e-1} \varepsilon) \cdot \langle \mathbf{v} \rangle] + S_\gamma^{-1} [\mu_\gamma (-\mathbf{D}_{\beta\gamma} \varepsilon) \cdot \langle \mathbf{v} \rangle] + \\ & \left[(\mu_\beta - \mu_\gamma) \varepsilon_\gamma^{-1} \nabla \varepsilon_\gamma + \mu_\beta S_\beta^{-1} \varepsilon^{-1} \nabla \varepsilon \right] \cdot \nabla \langle \mathbf{v} \rangle + \mu_\beta S_\beta^{-1} \varepsilon^{-1} \nabla^2 \varepsilon \langle \mathbf{v} \rangle + (S_\beta S_\gamma)^{-1} \mu_{\beta\gamma} \nabla \cdot (\mathbf{u}_{\beta\gamma} \langle \mathbf{v} \rangle) = \\ & \left\{ \mathbf{O} \left[\frac{\mu_\beta - \mu_\gamma}{L^2} \right] + \mathbf{O} \left[S_\beta^{-1} \mu_\beta (-\mathbf{K}^{e-1} \varepsilon) \right] + \mathbf{O} \left[S_\gamma^{-1} \mu_\gamma (-\mathbf{D}_{\beta\gamma} \varepsilon) \right] + \mathbf{O} \left[\frac{\mu_\beta - \mu_\gamma + S_\beta^{-1} \mu_\beta}{r_0 L} \right] \right. \\ & \left. + \mathbf{O} \left[\frac{S_\beta^{-1} \mu_\beta}{r_0^2} \right] + \mathbf{O} \left[\mu_{\beta\gamma} (S_\beta S_\gamma)^{-1} \left(\frac{u_{\beta\gamma}}{L} \right) \right] \right\} \langle v \rangle \quad (\text{C.14}) \end{aligned}$$

En el resultado anterior, $D_{\beta\gamma}$ y $u_{\beta\gamma}$, representan las normas del tensor y vector efectivos, respectivamente.

Sustituyendo los resultados de las Ecuaciones (C.10) y (C.14) de los estimados de órdenes de magnitud en la Ecuación (C.8), se obtiene el siguiente estimado general

$$\frac{\langle v_\beta \rangle^\beta - \langle v_\gamma \rangle^\gamma}{\langle v \rangle} = \mathbf{O}(\Lambda) \quad (\text{C.15})$$

donde

$$\begin{aligned}
\Lambda = & (\varepsilon_\gamma C a_{\beta\gamma}) \left\{ \mathbf{O} \left[\frac{\mu_\beta - \mu_\gamma}{\mu_{\beta\gamma}} \right] \left(\frac{\ell}{L} \right)^2 + \mathbf{O} \left[\frac{S_\beta^{-1} \mu_\beta}{\mu_{\beta\gamma}} (-\mathbf{K}^{e-1} \varepsilon) \right] \ell^2 + \mathbf{O} \left[\frac{S_\gamma^{-1} \mu_\gamma}{\mu_{\beta\gamma}} (-D_{\beta\gamma} \varepsilon) \right] \ell^2 + \right. \\
& \mathbf{O} \left[\frac{\mu_\beta - \mu_\gamma + \varepsilon_\beta^{-1} \mu_\beta}{\mu_{\beta\gamma}} \right] \left(\frac{\ell^2}{r_0 L} \right) + \mathbf{O} \left[\frac{S_\beta^{-1} \mu_\beta}{\mu_{\beta\gamma}} \right] \left(\frac{\ell}{r_0} \right)^2 + \mathbf{O} \left[(S_\beta S_\gamma)^{-1} u_{\beta\gamma} \right] \left(\frac{\ell^2}{L} \right) \left. \right\} \div \\
& \left\{ 1 + \mathbf{O} (\varepsilon_\gamma B o_{\beta\gamma}) + \mathbf{O} \left[\varepsilon_\gamma C a_{\beta\gamma} \left(\frac{\ell}{r_0} \right)^2 \right] + \mathbf{O} \left[\varepsilon_\gamma C a_{\beta\gamma} \left(\frac{\ell^2}{r_0 L} \right) \right] + \mathbf{O} \left[\varepsilon_\gamma C a_{\beta\gamma} \left(\frac{\ell}{L} \right)^2 \right] \right\}
\end{aligned} \tag{C.16}$$

En todos estos análisis de órdenes de magnitud, L , representa las longitudes características asociadas a cambios macroscópicos, es decir representa: (1) $L_{\Delta v}$, asociada con los cambios de $\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma$, (2) $L_{\Delta v_1}$ con los cambios de $\nabla \left(\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma \right)$, (3) $L_{\Delta p}$ con los cambios de $\left(\langle p_\beta \rangle^\beta - \langle p_\gamma \rangle^\gamma \right)$, (4) L_v asociada con los cambios de $\langle \mathbf{v} \rangle$ y (5) L_{v_1} asociada con los cambios de $\nabla \langle \mathbf{v} \rangle$. Para la mayoría de los sistemas con cambios de cantidades promedios son generalmente del mismo orden de magnitud y sus longitudes características de $\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \langle \mathbf{v}_\gamma \rangle^\gamma$ pueden suponerse como similares a $\langle \mathbf{v} \rangle$, de este modo: $L_{\Delta v} L_{\Delta v_1} \approx L_v L_{v_1}$ y $L_{\Delta p} \approx L_{\Delta v}$. Por otro lado, ℓ representa las longitudes características asociadas a cantidades microscópicas: (1) ℓ_α , $\alpha = \beta, \gamma$, longitudes características de las fases y (2) d_p , diámetro promedio del medio poroso. Se puede suponer que ambas longitudes características son similares, así: $d_p \sim \ell_\alpha$. En este resultado, para muchos sistemas, se puede anticipar que se pueden satisfacer los estimados de las siguientes relaciones

$$\left[\frac{\mu_\beta - \mu_\gamma}{\mu_{\beta\gamma}} \right] = \mathbf{O}(1), \quad \left[\frac{\mu_\beta - \mu_\gamma + \varepsilon_\beta^{-1} \mu_\beta}{\mu_{\beta\gamma}} \right] = \mathbf{O}(1) \quad \left[\frac{S_\beta^{-1} \mu_\beta}{\mu_{\beta\gamma}} \right] = \mathbf{O}(1) \tag{C.17a}$$

$$\left[\frac{S_\beta^{-1} \mu_\beta}{\mu_{\beta\gamma}} (-\mathbf{K}^{e-1} \varepsilon) \right] \leq \mathbf{O}(1), \quad \left[\frac{S_\gamma^{-1} \mu_\gamma}{\mu_{\beta\gamma}} (-D_{\beta\gamma} \varepsilon) \right] \leq \mathbf{O}(1), \tag{C.17b}$$

Bajo estas circunstancias, se puede observar que la relación de longitudes características, $\left(\frac{\ell}{L} \right)$ o $\left(\frac{\ell}{r_0} \right)$, y el valor del número capilar $C a_{\beta\gamma}$ y Bond $B o_{\beta\gamma}$, dominarán principalmente el estimado de Λ , y de esa forma determinarán cuándo la condición de equilibrio local mecánico será válida. Así, de la Ecuación (C.15), junto con el estimado de Λ y las tres restricciones dadas en la Ecuación (C.4), la condición de equilibrio local mecánico puede considerarse válida cuando se cumplan cualquiera de las siguientes tres condiciones.

1. Si la saturación de la fase continua tiende a uno, $S_\beta \approx 1$; (*i.e.* $S_\gamma \approx 0$)
2. Las viscosidades de ambas fases son similares , $\mu_\beta \approx \mu_\gamma$ ($\mu_\beta - \mu_\gamma \approx 0$) .
3. Existan ambas, una disparidad de escala de tal forma que $\left(\frac{\ell}{L}\right) \ll 1$ o $\left(\frac{\ell}{r_0}\right) \ll 1$, y los número capilar y Bond tomen los valores $Ca_{\beta\gamma} \ll 1$ y $Bo_{\beta\gamma} \ll 1$, respectivamente.

Se pueden extraer condiciones particulares que sustenten estas condiciones de acuerdo con cada una de las restricciones dadas en la Ecuación (C.3). Así, de acuerdo con el estimado de Λ , Ecuación (C.16), y la expresión de la Ecuación (C.15), se pueden extraer las siguientes formas de las restricciones dadas en la Ecuación (C.3),

$$\begin{aligned}
& \left\{ \mathbf{O} \left\{ \frac{(\mu_\beta - \mu_\gamma) S_\beta S_\gamma K^e}{\mu_\beta \varepsilon L^2} \right\} \left[\frac{\mu_\beta - \mu_\gamma}{\mu_{\beta\gamma}} \right] \left(\frac{\ell}{L} \right)^2 + \mathbf{O} \left[\frac{(\mu_\beta - \mu_\gamma) S_\gamma}{\mu_{\beta\gamma}} \right] \left(\frac{\ell}{L} \right)^2 + \right. \\
& \mathbf{O} \left[\frac{(\mu_\beta - \mu_\gamma) S_\beta \mu_\gamma K^e D_{\beta\gamma}}{\mu_\beta \mu_{\beta\gamma}} \right] \left(\frac{\ell}{L} \right)^2 + \mathbf{O} \left\{ \frac{(\mu_\beta - \mu_\gamma) S_\beta S_\gamma K^e}{\mu_\beta \varepsilon L^2} \right\} \left[\frac{\mu_\beta - \mu_\gamma + \varepsilon_\beta^{-1} \mu_\beta}{\mu_{\beta\gamma}} \right] \left(\frac{\ell^2}{r_0 L} \right) + \\
& \mathbf{O} \left\{ \frac{(\mu_\beta - \mu_\gamma) S_\beta S_\gamma K^e}{\mu_\beta \varepsilon L^2} \right\} \left[\frac{S_\beta^{-1} \mu_\beta}{\mu_{\beta\gamma}} \right] \left(\frac{\ell}{r_0} \right)^2 + \mathbf{O} \left[\frac{(\mu_\beta - \mu_\gamma) K^e u_{\beta\gamma}}{\mu_\beta \varepsilon L} \right] \left(\frac{\ell}{L} \right)^2 \left(\varepsilon_\gamma Ca_{\beta\gamma} \right) / \{1 + \mathbf{O} [\varepsilon_\gamma Bo_{\beta\gamma}] + \\
& \left. \mathbf{O} \left[\varepsilon_\gamma Ca_{\beta\gamma} \left(\frac{\ell}{r_0} \right)^2 \right] + \mathbf{O} \left[\varepsilon_\gamma Ca_{\beta\gamma} \left(\frac{\ell^2}{L r_0} \right) \right] + \mathbf{O} \left[\varepsilon_\gamma Ca_{\beta\gamma} \left(\frac{\ell}{L} \right)^2 \right] \right\} \ll 1 \quad (C.18a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \mathbf{O} \left\{ \frac{(\mu_\beta - \mu_\gamma) S_\beta S_\gamma K^e}{\mu_\beta \varepsilon L r_0} \right\} \left[\frac{\mu_\beta - \mu_\gamma}{\mu_{\beta\gamma}} \right] \left(\frac{\ell}{L} \right)^2 + \mathbf{O} \left[\frac{(\mu_\beta - \mu_\gamma) S_\gamma}{\mu_{\beta\gamma}} \right] \left(\frac{\ell^2}{r_0 L} \right) + \right. \\
& \mathbf{O} \left[\frac{(\mu_\beta - \mu_\gamma) S_\beta \mu_\gamma K^e D_{\beta\gamma}}{\mu_\beta \mu_{\beta\gamma}} \right] \left(\frac{\ell^2}{r_0 L} \right) + \mathbf{O} \left\{ \frac{(\mu_\beta - \mu_\gamma) S_\beta S_\gamma K^e}{\mu_\beta \varepsilon r_0 L} \right\} \left[\frac{\mu_\beta - \mu_\gamma + \varepsilon_\beta^{-1} \mu_\beta}{\mu_{\beta\gamma}} \right] \left(\frac{\ell^2}{r_0 L} \right) + \\
& \mathbf{O} \left\{ \frac{(\mu_\beta - \mu_\gamma) S_\beta S_\gamma K^e}{\mu_\beta \varepsilon r_0 L} \right\} \left[\frac{S_\beta^{-1} \mu_\beta}{\mu_{\beta\gamma}} \right] \left(\frac{\ell}{r_0} \right)^2 + \mathbf{O} \left[\frac{(\mu_\beta - \mu_\gamma) K^e u_{\beta\gamma}}{\mu_\beta \varepsilon L} \right] \left(\frac{\ell}{r_0 L} \right) \left(\varepsilon_\gamma Ca_{\beta\gamma} \right) \left. \right\} / \{1 + \mathbf{O} (\varepsilon_\gamma Bo_{\beta\gamma}) + \\
& \left. \mathbf{O} \left[\varepsilon_\gamma Ca_{\beta\gamma} \left(\frac{\ell}{r_0} \right)^2 \right] + \mathbf{O} \left[\varepsilon_\gamma Ca_{\beta\gamma} \left(\frac{\ell^2}{L r_0} \right) \right] + \mathbf{O} \left[\varepsilon_\gamma Ca_{\beta\gamma} \left(\frac{\ell}{L} \right)^2 \right] \right\} \ll 1 \quad (C.18b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \mathbf{O} \left\{ \frac{(\mu_\beta - \mu_\gamma) S_\beta S_\gamma K^e}{\mu_\beta \varepsilon r_0^2} \right\} \left[\frac{\mu_\beta - \mu_\gamma}{\mu_{\beta\gamma}} \right] \left(\frac{\ell}{L} \right)^2 + \mathbf{O} \left[\frac{(\mu_\beta - \mu_\gamma) S_\gamma}{\mu_{\beta\gamma}} \right] \left(\frac{\ell}{r_0} \right)^2 + \right. \\
& \mathbf{O} \left[\frac{(\mu_\beta - \mu_\gamma) S_\beta \mu_\gamma K^e D_{\beta\gamma}}{\mu_\beta \mu_{\beta\gamma}} \right] \left(\frac{\ell}{r_0} \right)^2 + \mathbf{O} \left\{ \frac{(\mu_\beta - \mu_\gamma) S_\beta S_\gamma K^e}{\mu_\beta \varepsilon r_0^2} \right\} \left[\frac{\mu_\beta - \mu_\gamma + \varepsilon_\beta^{-1} \mu_\beta}{\mu_{\beta\gamma}} \right] \left(\frac{\ell^2}{r_0 L} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{O} \left\{ \frac{(\mu_\beta - \mu_\gamma) S_\beta S_\gamma \mathbf{K}^e}{\mu_\beta \varepsilon r_0^2} \right\} \left[\frac{S_\beta^{-1} \mu_\beta}{\mu_\beta \gamma} \right] \left(\frac{\ell}{r_0} \right)^2 + \mathbf{O} \left[\frac{(\mu_\beta - \mu_\gamma) \mathbf{K}^e u_{\beta\gamma}}{\mu_\beta \varepsilon L} \right] \left(\frac{\ell}{r_0} \right)^2 \Big\} (\varepsilon_\gamma C a_{\beta\gamma}) / \{1 + \mathbf{O}(\varepsilon_\gamma B o_{\beta\gamma}) + \\ \mathbf{O} \left[\varepsilon_\gamma C a_{\beta\gamma} \left(\frac{\ell}{r_0} \right)^2 \right] + \mathbf{O} \left[\varepsilon_\gamma C a_{\beta\gamma} \left(\frac{\ell^2}{L r_0} \right) \right] + \mathbf{O} \left[\varepsilon_\gamma C a_{\beta\gamma} \left(\frac{\ell}{L} \right)^2 \right] \Big\} \ll 1 \quad (\text{C.18c}) \end{aligned}$$

En estos resultados, para muchos sistemas, se puede adelantar que las relaciones de viscosidades presentes en cada término son de los siguientes órdenes

$$\frac{\mu_\beta - \mu_\gamma}{\mu_\beta \gamma} = \mathbf{O}(1), \quad \frac{(\mu_\beta - \mu_\gamma) S_\gamma}{\mu_\beta \gamma} = \mathbf{O}(1), \quad \frac{\mu_\beta - \mu_\gamma + \varepsilon_\beta^{-1} \mu_\beta}{\mu_\beta \gamma} \leq \mathbf{O}(1), \quad \frac{S_\beta^{-1} \mu_\beta}{\mu_\beta \gamma} = \mathbf{O}(1) \quad (\text{C.19})$$

Además, se pueden esperar que los siguientes estimados que involucran los coeficientes de medio efectivo del modelo de equilibrio se satisfagan

$$\left\{ \frac{(\mu_\beta - \mu_\gamma) S_\beta S_\gamma \mathbf{K}^e}{\mu_\beta} \right\} \leq \mathbf{O}(1), \quad \left[\frac{(\mu_\beta - \mu_\gamma) S_\beta \mu_\gamma \mathbf{K}^e \mathbf{D}_{\beta\gamma}}{\mu_\beta \mu_\beta \gamma} \right] \leq \mathbf{O}(1) \quad \left\{ \frac{(\mu_\beta - \mu_\gamma) \mathbf{K}^e u_{\beta\gamma}}{\mu_\beta \varepsilon} \right\} \leq \mathbf{O}(1) \quad (\text{C.20})$$

Las expresiones anteriores muestran que las relaciones de longitudes características, $\left(\frac{\ell}{L}\right)$ y $\left(\frac{\ell}{r_0}\right)$, controlarán cuándo estas restricciones se pueden satisfacer. Así, bajo las circunstancias donde $\left(\frac{\ell}{L}\right) \ll 1$ y $\left(\frac{\ell}{r_0}\right) \ll 1$, aún en el caso donde los números capilar y Bond sean del orden $C a_{\beta\gamma} = \mathbf{O}(1)$ y $B o_{\beta\gamma} = \mathbf{O}(1)$, se puede considerar como válida la condición de equilibrio local mecánico. Esta condición resulta ser extensiva hacia el caso del flujo disperso para un medio poroso homogéneo, donde esta condición se satisface bajo la restricción: $\ell \ll r_0 \ll L$, la cual se impone de forma inherente en el desarrollo del modelo para el caso homogéneo presentado en la Parte I.

C.2. Predicción de coeficientes efectivos y comparación con la DNS

En esta sección se presentan detalles adicionales relacionados con la predicción de la variación espacial de los coeficiente efectivos que permiten cerrar el modelo ODA de ELM y la validez de las restricciones y suposiciones involucradas en su desarrollo (ver en Capítulo 4).

De acuerdo con la Ecuación (4.9c), el tensor de permeabilidad de equilibrio se define

implícitamente de la siguiente forma

$$\mu_\beta [-\mathbf{K}^{e-1}(\mathbf{x})\varepsilon(\mathbf{x})] \cdot \langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{V_f(\mathbf{x})} \int_{\mathcal{A}_{\beta\kappa}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\beta\kappa} \cdot \left[-\mathbf{I} \left(p_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} - \langle p \rangle \right) + \mu_\beta \nabla \left(\mathbf{v}_\beta|_{\mathbf{r}_\beta} - \langle \mathbf{v} \rangle \right) \right] dA \quad (\text{C.21})$$

Esta expresión se encuentra en términos de cantidades promedio de equilibrio, definidas inicialmente en la Ecuación (3.2)

$$\langle p \rangle = \frac{1}{V_f} \int_{\mathcal{V}_f} p dV = \frac{1}{V_f} \int_{\mathcal{V}_\beta} p_\beta dV + \frac{1}{V_f} \int_{\mathcal{V}_\gamma} p_\gamma dV, \quad (\text{C.22a})$$

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{V_f} \int_{\mathcal{V}_f} \mathbf{v} dV = \frac{1}{V_f} \int_{\mathcal{V}_\beta} \mathbf{v}_\beta dV + \frac{1}{V_f} \int_{\mathcal{V}_\gamma} \mathbf{v}_\gamma dV, \quad (\text{C.22b})$$

y de las cantidades puntuales \mathbf{v}_α y p_α , $\alpha = \beta, \gamma$. De acuerdo con lo anterior, el cálculo de la permeabilidad en diferentes puntos de la inter-región requiere de la simulación numérica directa (DNS) del modelo a la escala del poro del flujo disperso dado por

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_\alpha = 0, \text{ en la fase-}\alpha \quad (\text{C.23a})$$

$$0 = -\nabla p_\alpha + \rho_\alpha \mathbf{g} + \mu_\alpha \nabla^2 \mathbf{v}_\alpha, \text{ en la fase-}\alpha, \quad \alpha = \beta, \gamma \quad (\text{C.23b})$$

$$\mathbf{v}_\beta = \mathbf{v}_\gamma, \text{ en la interfase } \beta\text{-}\gamma \quad (\text{C.23c})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot [-p_\beta \mathbf{I} + \mu_\beta (\nabla \mathbf{v}_\beta + \nabla \mathbf{v}_\beta^T)] &= \mathbf{n}_{\beta\gamma} \cdot [-p_\gamma \mathbf{I} + \mu_\gamma (\nabla \mathbf{v}_\gamma + \nabla \mathbf{v}_\gamma^T)] \\ &+ 2\sigma H \mathbf{n}_{\beta\gamma}, \text{ en la interfase } \beta\text{-}\gamma \end{aligned} \quad (\text{C.23d})$$

$$\mathbf{v}_\beta = \mathbf{0}, \text{ en la interfase } \beta\text{-}\kappa \quad (\text{C.23e})$$

El dominio de solución de este sistema de ecuaciones es un modelo representativo del flujo multifásico en las dos regiones homogéneas, lo suficientemente grande para obtener resultados aceptables. En la Fig. 5.1 se presentan los dominios de los sistemas: (a) *fluido-medio poroso*, (b) *medio poroso - medio poroso* y (c) *medio poroso- fractura - medio poroso*. Para la DNS se utilizó un dominio donde $L_\omega = L_\eta = 100\ell_c$, es decir de tamaño igual a $200\ell_c$, donde ℓ_c es el tamaño de la celda unitaria elemental. Los cálculos se realizan usando el software de elemento

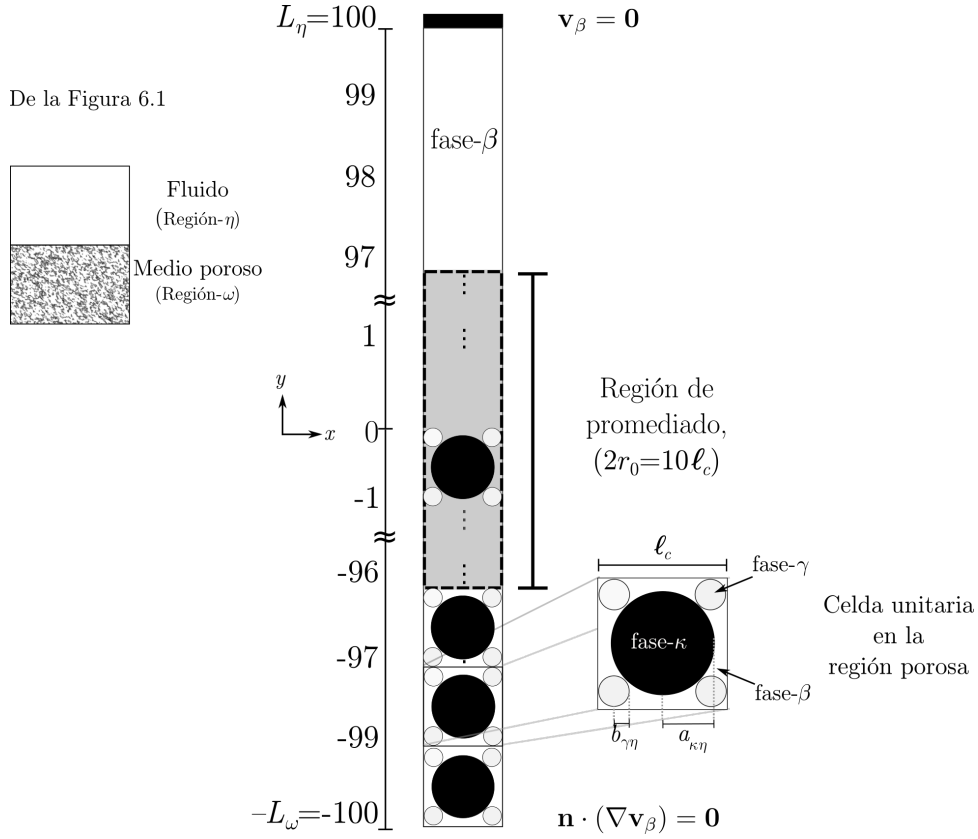


Figura C.1. Dominio de solución para la DNS representativo de la inter-región fluido-medio poroso.

finito COMSOL Multiphysics $\text{\textcircled{R}}$ (Ver. 4.3a) usando un refinamiento de malla para asegurar la independencia numérica de los nodos computacionales. En la determinación del campo de velocidad se impone una caída de presión periódica en la dirección $-x$. Las soluciones se limitaron a dos dimensiones.

C.2.1. Fluido - medio poroso

El dominio para el flujo entre una región fluida y una región porosa, donde solo hay flujo disperso en el medio poroso se muestra en la Figura C.1, donde indica que se impusieron la condición tipo Dirichlet en $y = L_\eta$ (no deslizamiento) y tipo Neumann $y = -L_\omega$. La región porosa se representa por arreglos simétricos de partículas cilíndricas dependientes de la porosidad de la región y saturación de la fase - γ , ε_i y $S_{\gamma i}$, $i = \eta, \omega$, donde

$$a_{\kappa i} = \frac{\sqrt{(1 - \varepsilon_i)}}{\pi}, \quad i = \omega, \eta \quad (\text{C.24a})$$

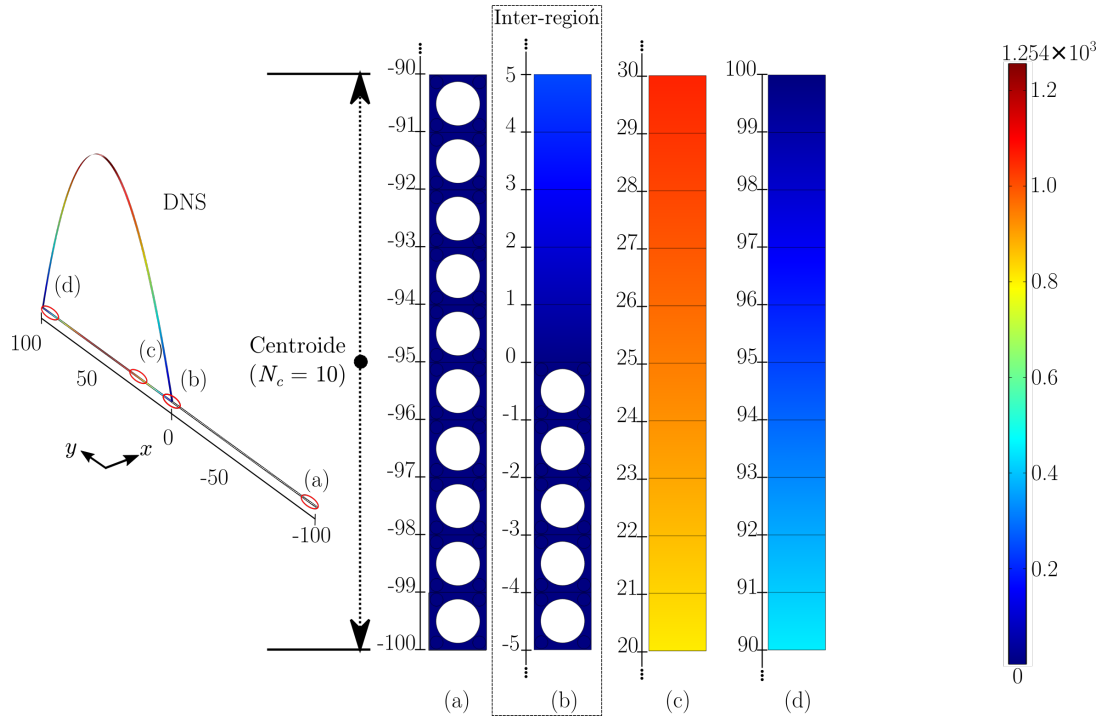


Figura C.2. Campo de solución de la DNS para el sistema fluido-medio poroso en diferentes posiciones: (a) Región del medio poroso (b) Inter-región (c) Región fluida (d) Pared superior. $\varepsilon_\omega = 0.5$ y $S_{\gamma\omega} = 0.6$. Bajo la condición: $Ca \ll 1$ y $Bo \ll 1$.

$$b_{\gamma i} = \frac{S_{\gamma i} \varepsilon_i}{4\pi}, \quad (\text{C.24b})$$

El resultado de los perfiles de velocidad puntual de la DNS para este sistema se muestra en la Figura C.2, para diferentes posiciones. Se puede notar la gran diferencia de la velocidad entre la zona del medio poroso (Figura C.2 a) y la del fluido (Figura C.2 c y d), donde se presenta la velocidad máxima de la fase continua. Para la inter-región, donde se presentan la transición de los cambios microestructurales, existe un rápido incremento de la velocidad del orden de $\mathbf{O}(10^{-2})$ a $\mathbf{O}(10^1)$.

C.2.2. Medio poroso - medio poroso

El dominio para el flujo disperso entre dos regiones porosas, con diferencias de la microestructura, se muestra en la Figura C.3. Donde se indica que se usaron condiciones tipo Neumann en ambas fronteras $y = L_\eta$ y $y = -L_\omega$. La regiones porosas se representan por arreglos simétricos de partículas cilíndricas dependientes de la porosidad de la región y saturación de la

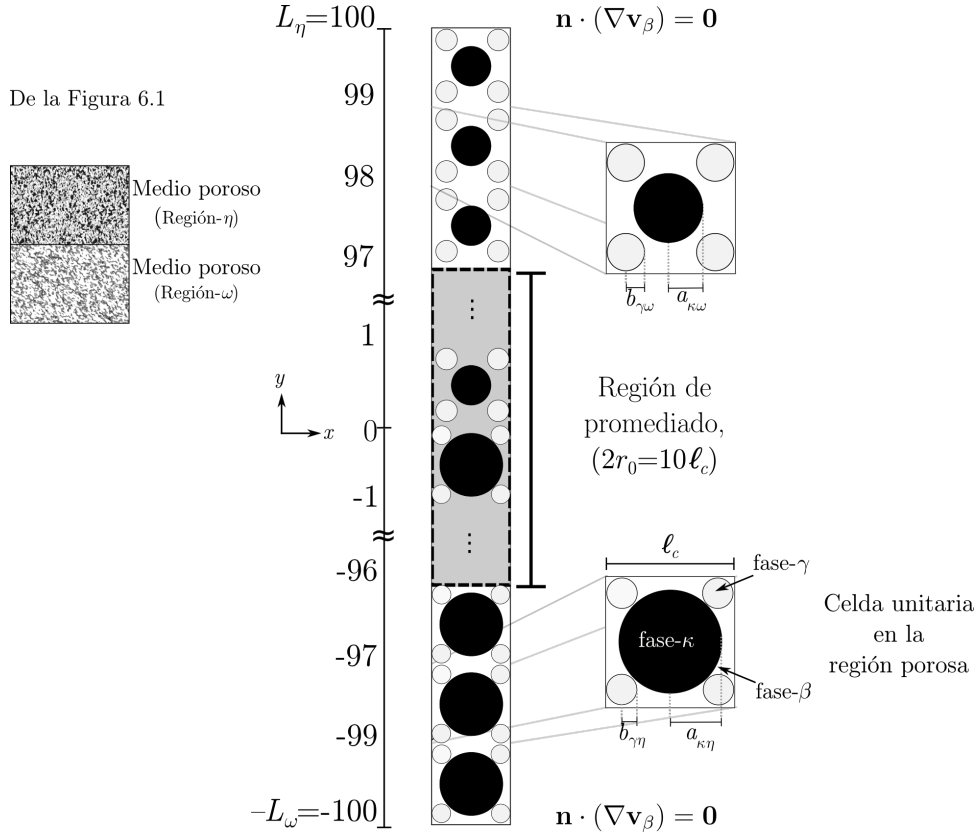


Figura C.3. Dominio de solución para la DNS representativo de la inter-región fluido-medio poroso.

fase - γ , ε_i y $S_{\gamma i}$, $i = \eta, \omega$, de acuerdo con la Ecuación (C.24).

El resultado del perfil de velocidad puntual de la DNS para este sistema se muestra en la Figura C.4 para diferentes posiciones. Se puede observar la diferencia de la magnitud de la velocidad entre la zona homogénea del medio poroso de mayor porosidad (Figura C.4 a) y la de menor porosidad (Figura C.4 c). Para la inter-región ($y = 0$), donde se presentan la transición de los cambios microestructurales, existe un incremento de la velocidad del orden de $\mathbf{O}(10^{-2})$ a $\mathbf{O}(10^{-1})$. En esta frontera que separa ambas regiones homogéneas se observan ambos efectos, del valor porosidad del medio y la saturación de la fase- γ .

C.2.3. Medio poroso - fractura - medio poroso

El dominio para el flujo disperso entre dos regiones porosas con diferencias de la microestructura y separadas por un canal de fluido libre, denominado como fractura, se muestra en la Figura C.3. Donde se indica que se impuso la condición tipo Neumann en ambas fronteras $y = +(L_\eta + f/2)$ y $y = -(L_\omega + f/2)$. La regiones porosas se representan por arreglos simétricos de partículas cilíndricas dependientes de la porosidad de la región y saturación de la fase - γ ,

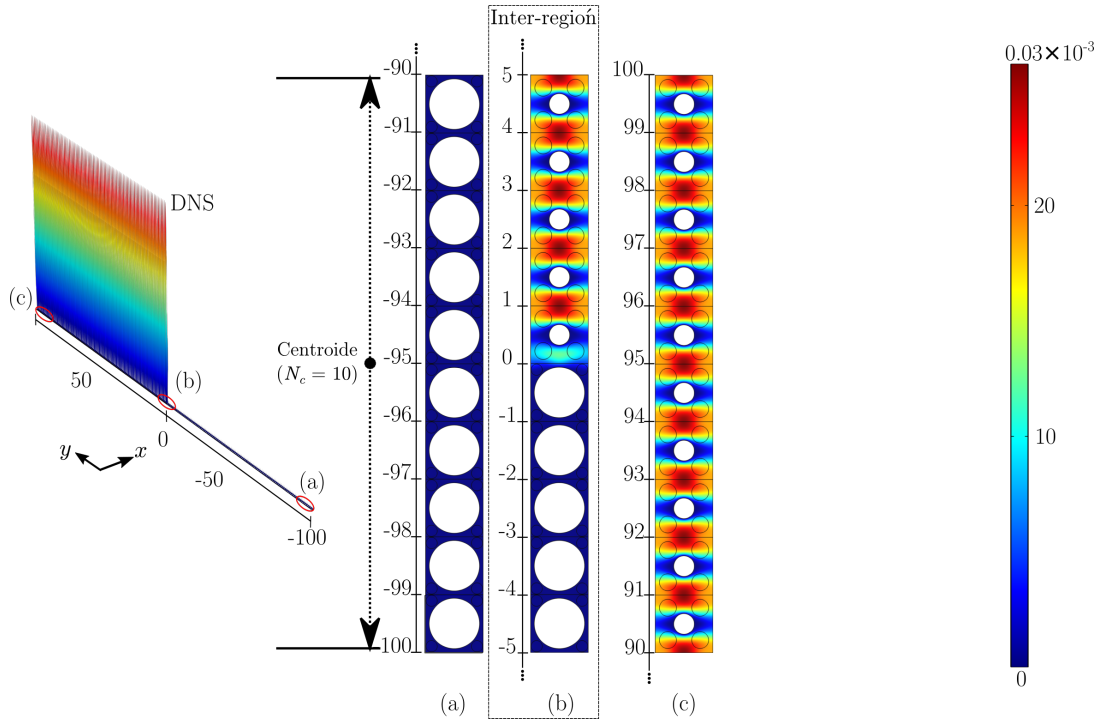


Figura C.4. Campo de solución de la DNS para el sistema fluido-medio poroso en diferentes posiciones: (a) región- ω con $\varepsilon_\omega = 0.4$, (b) inter-región y (c) región- η con $\varepsilon_\eta = 0.9$. $S_{\gamma_i} = 0.7, i = \eta, \omega$. Bajo la condición: $Ca \ll 1$ y $Bo \ll 1$.

ε_i y S_{γ_i} , $i = \eta, \omega$, de acuerdo con la Ecuación (C.24).

La separación de las regiones porosas homogéneas se da de acuerdo a un tamaño de fractura $f = N_f \ell_c$ para $N_f = 1, = 6$ y $= 10$. Ejemplos del dominio de velocidad puntual de la solución de la DNS se muestra en las Figuras C.6 y Figura C.7, para los casos donde se calcularon los valores K^e , y mostrados en la Figura 5.8 de el texto principal.

El perfil de K^e observado en la Figura 5.8 se debe al cálculo numérico de la integración sobre la región de promediado que implica localizar el centroide de la región de promediado en diferentes posiciones de la inter-región. Para la primera posición dentro de la inter-región, el centroide se localiza donde toda la región de promediado se sitúa en el medio poroso. Para la posición siguiente el centroide se localiza tal que una porción de la región está dentro del medio poroso- ω y el canal libre por lo tanto se incrementa rápidamente el valor de K^e debido, a como lo muestra Figura C.4 (b), se incrementa rápidamente el perfil de velocidad puntual. A medida que el centroide se mueve, este se localiza donde la región ocupa una porción de ambas regiones porosas y la fractura, de manera que el valor de K^e disminuye ligeramente y se mantiene constante el resto de la inter-región, como se observa Figura C.4 (c). Posteriormente

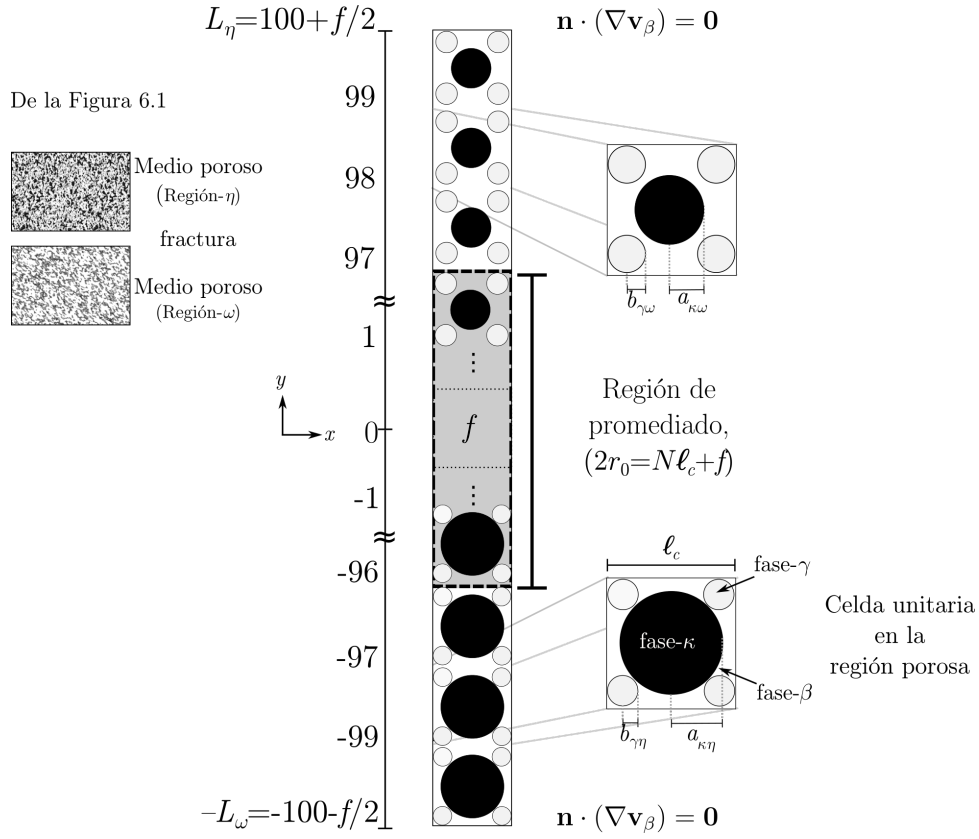


Figura C.5. Dominio de solución para la DNS representativo de la inter-región fluido-medio poroso.

el centroide nuevamente se localiza en un posición donde la región de promediado es ocupada por la fractura y el medio poroso- η , aumentado levemente el valor de K^e , como se muestra en la Figura C.4 (d). Finalmente, disminuye rápidamente su valor cuando el centroide se localiza completamente la región de promediado en el medio poroso- η .

En el caso de que el tamaño de la fractura coincide con el tamaño de la región de promediado ($N_f = N = 10\ell_c$) cuando su centroide se localiza en $y/2r_0 = 0$. En esta posición, el volumen de la región de promediado es completamente la fase continua por lo tanto el valor de la permeabilidad de equilibrio será infinito y por lo tanto el perfil de K^e observado en la Figura 5.8 tiende a cero. Esto se puede observar al analizar la Figura C.8(b)-(c), donde para $y/2r_0 = 0$, la región de promediado es un canal libre del flujo de la fase continua.

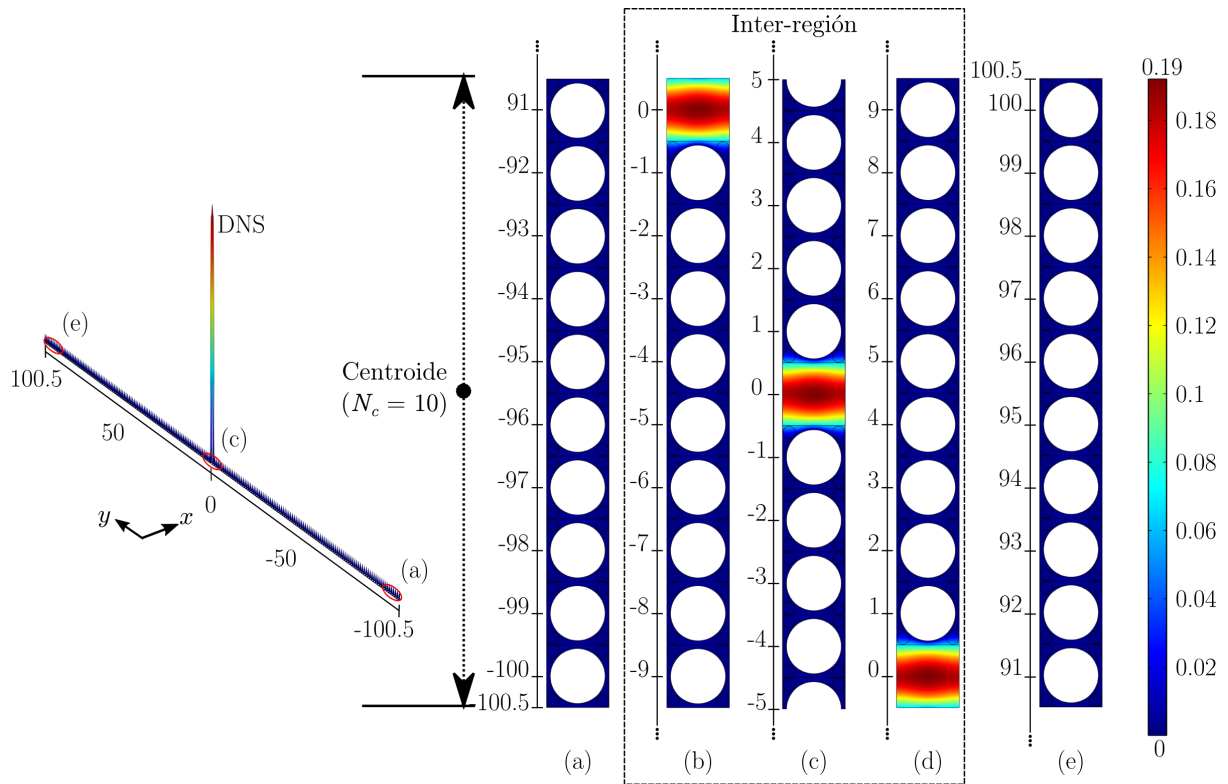


Figura C.6. Campo de solución de la DNS para el sistema fluido-medio poroso en diferentes posiciones: (a) Región ω con $\varepsilon_\omega = 0.4$ (b) medio poroso- ω -fractura (c) Inter-región (d) fractura - medio poroso- η (e) Región- η , con porosidad igual a $\varepsilon_\eta = 0.4$. Tamaño de fractura $f = 1\ell_c$ y saturación $S_{\gamma i} = 0.7, i = \eta, \omega$. Bajo la condición: $Ca \ll 1$ y $Bo \ll 1$.

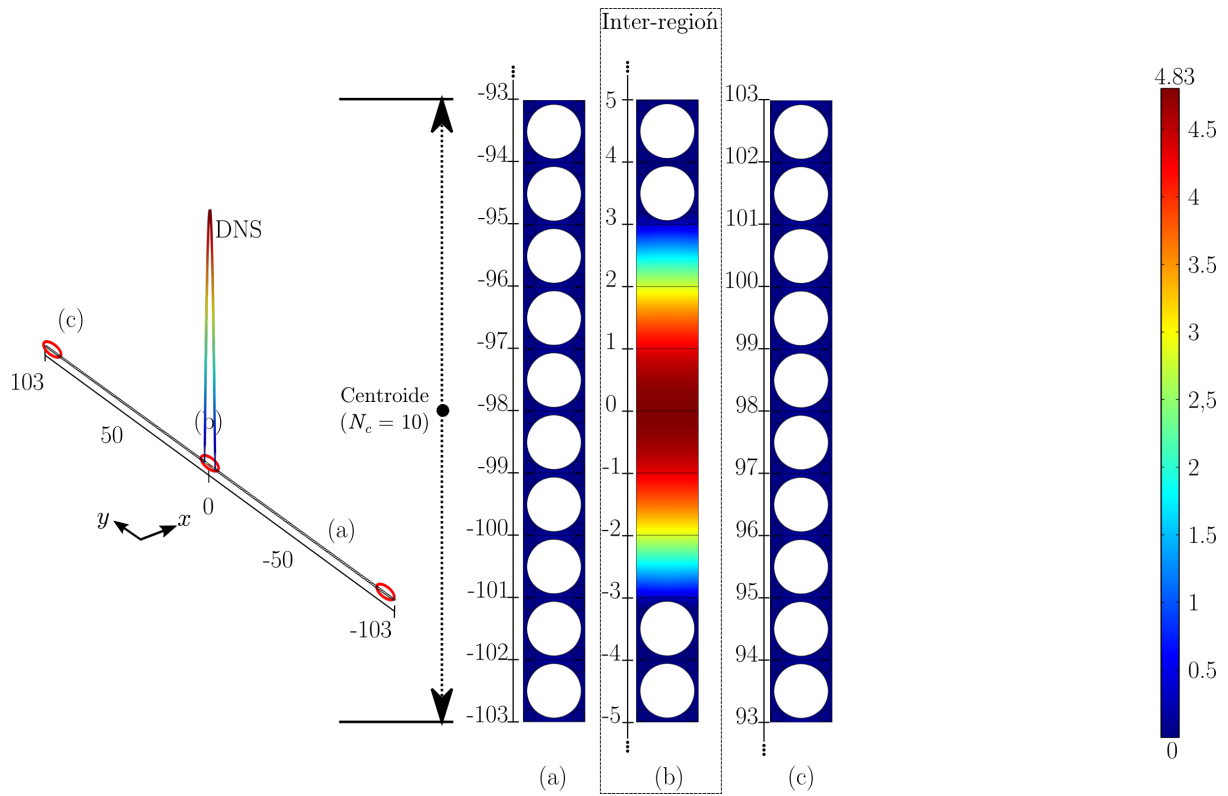


Figura C.7. Campo de solución de la DNS para el sistema fluido-medio poros en diferentes posiciones: (a) Región - ω con $\varepsilon_\omega = 0.4$ (b) Inter-región (c) Región- η con porosidad igual a $\varepsilon_\eta = 0.4$. Tamaño de fractura $f = 6\ell_c$ y saturación $S_{\gamma_i} = 0.7, i = \eta, \omega$. Bajo la condición: $Ca \ll 1$ y $Bo \ll 1$.

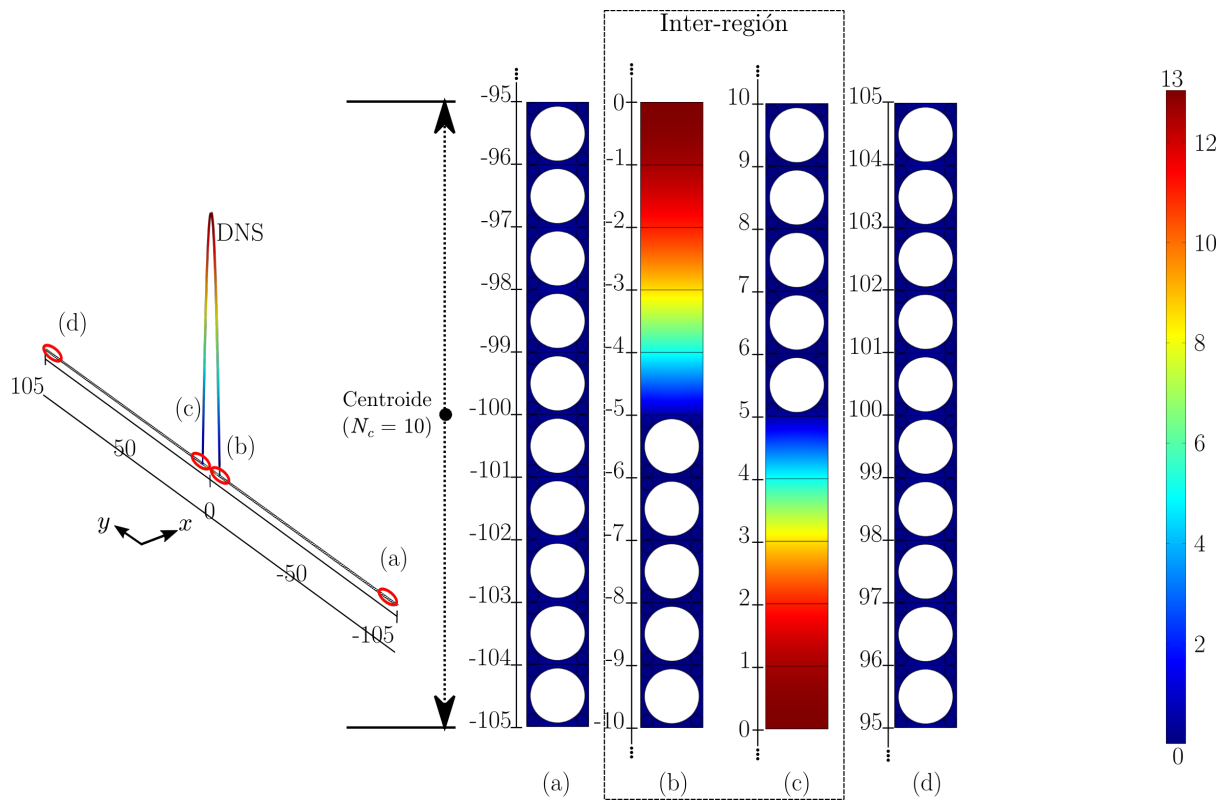


Figura C.8. Campo de solución de la DNS para el sistema fluido-medio poroso en diferentes posiciones: (a) Región - ω con $\varepsilon_\omega = 0.4$ (b) medio poroso- ω -fractura (c) fractura - medio poroso- η (d) Región- η con porosidad igual a $\varepsilon_\eta = 0.4$. Tamaño de fractura $f = 10\ell_c$ y saturación $S_{\gamma i} = 0.7, i = \eta, \omega$. Bajo la condición: $Ca \ll 1$ y $Bo \ll 1$.

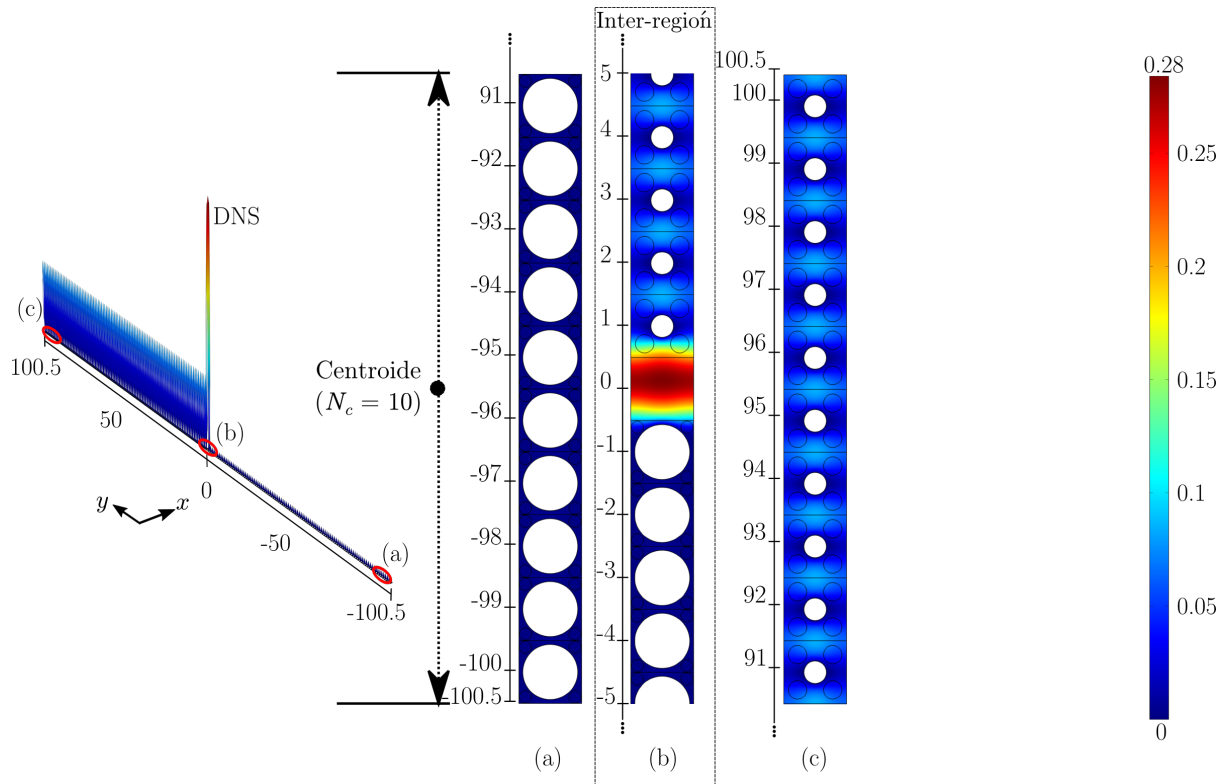


Figura C.9. Campo de solución de la DNS para el sistema fluido-medio poroso en diferentes posiciones: (a) Región - ω con $\varepsilon_\omega = 0.4$ (b) Inter-región (c) Región- η con porosidad igual a $\varepsilon_\eta = 0.9$. Tamaño de fractura $f = 1\ell_c$, porosidades igual a $\varepsilon_\eta = 0.4$ y saturación $S_{\gamma i} = 0.7, i = \eta, \omega$. Bajo la condición: $Ca \ll 1$ y $Bo \ll 1$.

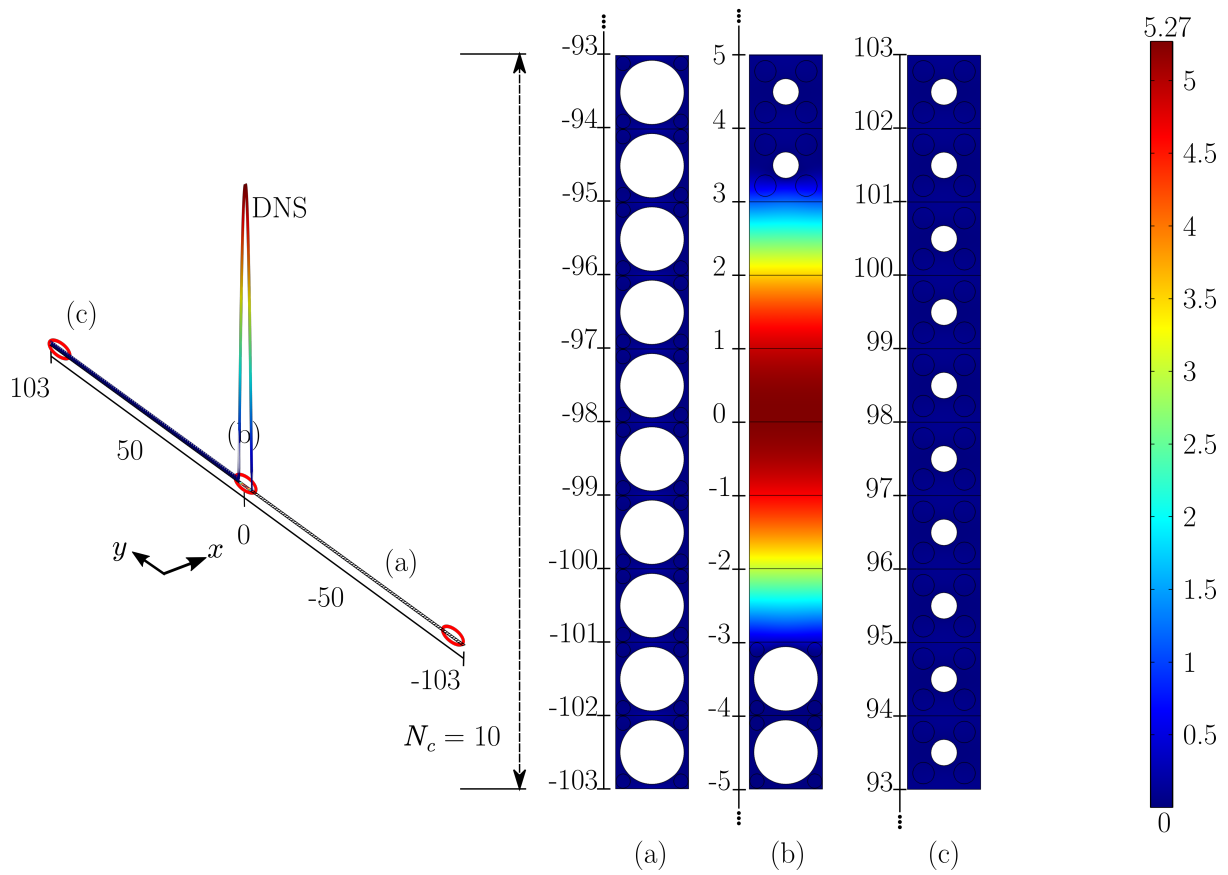


Figura C.10. Campo de solución de la DNS para el sistema fluido-medio poroso en diferentes posiciones: (a) Región - ω con $\varepsilon_\omega = 0.4$ (b) Inter-región (c) Región- η con porosidad igual a $\varepsilon_\eta = 0.4$. Tamaño de fractura $f = 6\ell_c$ y saturación $S_{\gamma_i} = 0.7, i = \eta, \omega$. Bajo la condición: $Ca \ll 1$ y $Bo \ll 1$.

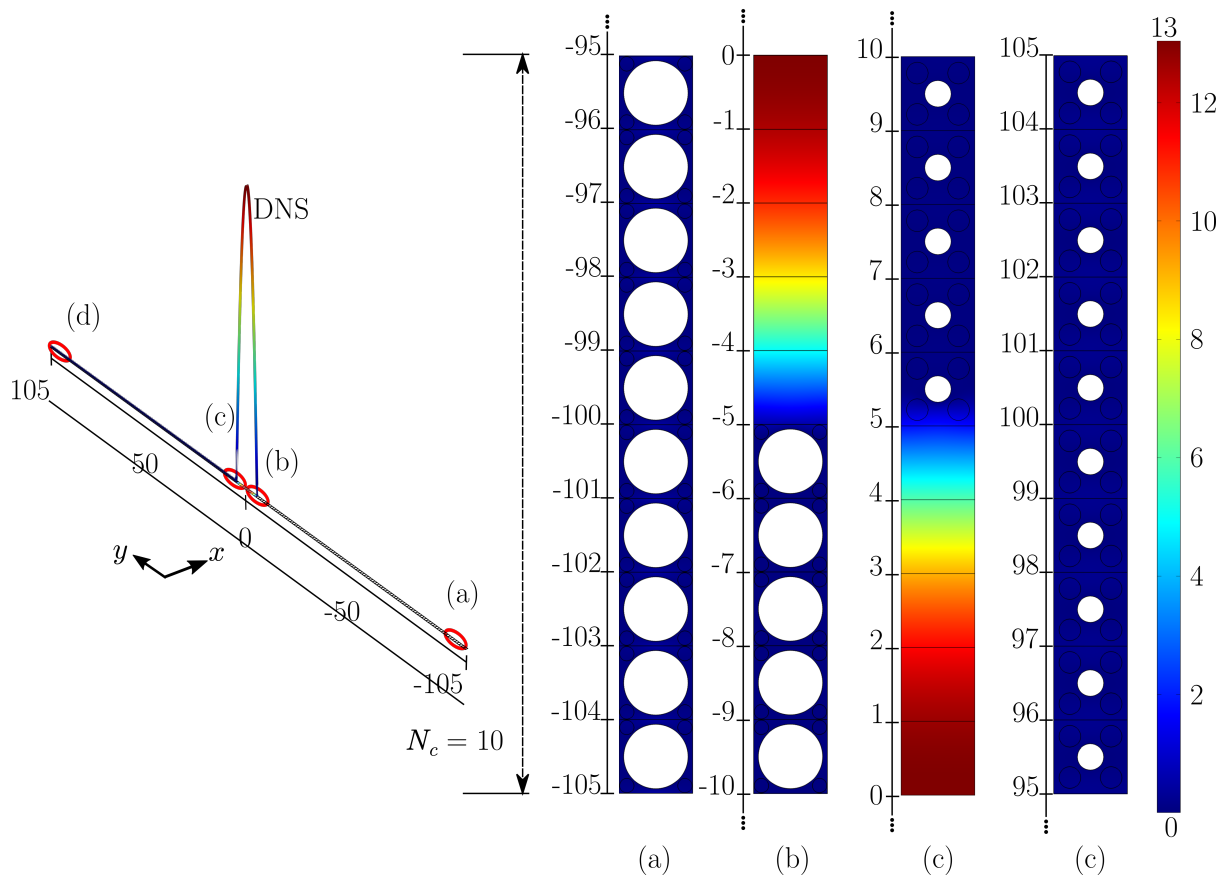


Figura C.11. Campo de solución de la DNS para el sistema fluido-medio poros en diferentes posiciones: (a) Región - ω con $\varepsilon_\omega = 0.4$ (b) medio poroso- ω -fractura (c) fractura - medio poroso- η (d) Región- η con porosidad igual a $\varepsilon_\eta = 0.9$. Tamaño de fractura $f = 10\ell_c$ y saturación $S_{\gamma_i} = 0.7, i = \eta, \omega$. Bajo la condición: $Ca \ll 1$ y $Bo \ll 1$.