292

Demostración Constructiva del Teorema de Cartán-Dieudonné y sus Aplicaciones a la Cristalografía

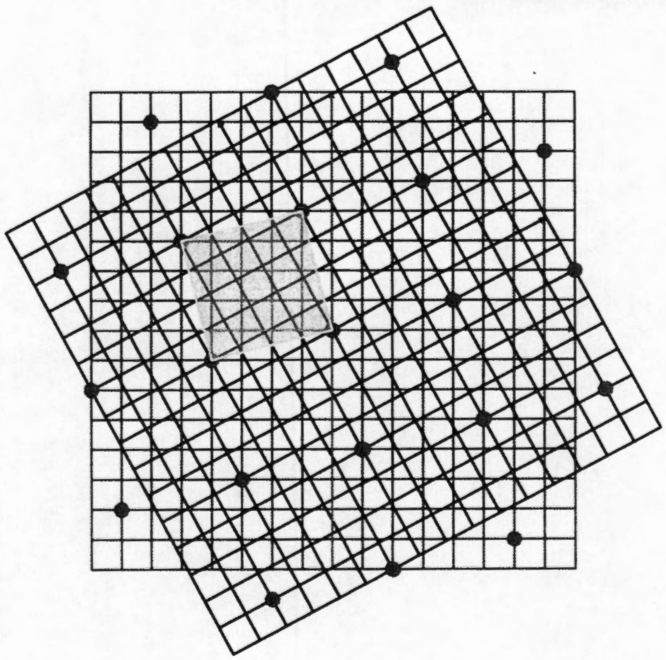
Tesis que para obtener el grado de Doctor en Ciencias

Presenta:

M. en C. Marco Antonio Rodríguez Andrade

Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Iztapalapa

Demostración Constructiva del Teorema de Cartan-Dieudonné y sus Aplicaciones a la Cristalografía



Tesis que para obtener el grado de Doctor en Ciencias

Presenta: M. en C. Marco Antonio Rodríguez Andrade

Asesores:
Dr. Luis Verde Star
Dr José Luis Aragón Vera

Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Iztapalapa

Demostración Constructiva del Teorema de Cartan-Dieudonné y sus Aplicaciones a la Cristalografía

Tesis que para obtener el grado de Doctor en Ciencias

Presenta: M. en C. Marco Antonio Rodríguez Andrade

Asesores:
Dr. Luis Verde Star
Dr. José Luis Aragón Vera

Índice general

INTRODUCCIÓN

El Teorema de Cartan-Dieudonné afirma que toda transformación ortogonal es la composición de reflexiones a través de hiperplanos y su importancia radica en que caracteriza al grupo de las transformaciones ortogonales. El Teorema de Cartán-Dieudonné fue demostrado alrededor de 1950; en la literatura existen demostraciones por inducción sobre la dimensión del espacio ortogonal, por ejemplo en [P1, DS]. Más recientemente en [U1] se presenta una demostración constructiva de dicho teorema para el caso en que se tiene definido un producto interno en el espacio vectorial, y para los espacios ortogonales no degenerados de signatura (n, n).

El objetivo principal de esta tesis es presentar una demostración constructiva del Teorema de Cartan-Dieudonné para el caso de que se tenga una forma bilineal no degenerada sobre el espacio vectorial de dimensión finita, y por ende se obtiene un algoritmo general para obtener las reflexiones a través de hiperplanos cuya composición nos dará una transformación ortogonal dada de antemano; este algoritmo es más general que el que se presenta en [U1]; en el sentido que es para transformaciones ortogonales sobre espacios ortogonales no degenerados de signatura (p, q).

La representación matricial de una reflexión a través de un hiperplano es una matriz llamada de Householder [U1]. En la teoría de las Álgebras de Clifford existe una forma alternativa para calcular la imagen de un vector bajo una reflexión a través de hiperplanos y es esta herramienta lo que se propone en este trabajo para la realización de los cálculos.

Otro objetivo central del presente trabajo es aplicar el Teorema de Cartan Dieudonné para la caracterización de las isometrías de coincidencia. La teoría de redes de sitios de coincidencia (CSL) ha provisto de respuestas parciales al complejo problema que surge en la descripción de las fronteras e interfaces de grano (ver, por ejemplo, Sutton & Baluffi, 1995). La mayoría de los modelos geométricos de fronteras de grano existentes idealizan dos cristales que se encuentran en la frontera como dos redes interpenetradas, y se asume que fronteras de grano con propiedades especiales aparecen cuando hay un alto grado de "ajuste" (o correspondencia) entre las redes.

Debido al advenimiento de los cuasicristales, ha sido deseable extender la teoría aparecen cuando hay un alto grado de "ajuste" (o correspondencia) entre las redes.

Debido al advenimiento de los cuasicristales, ha sido deseable extender la teoría matemática de CSL a más dimensiones. En general, el problema puede ser planteado como sigue: Sea Γ una red en $\mathbb{R}^n$ y sea T una transformación ortogonal; T es llamada una isometría de coincidencia si $T(\Gamma) \cap \Gamma$ es una subred de Γ. El problema es, por lo tanto, identificar y caracterizar las isometrías de coincidencia de una red Γ dada.

Para atacar este problema, Muchas aproximaciones han sido usadas . Fortes en [FO] desarrolló una teoría matricial de CSL para dimensiones arbitrarias; la misma aproximación por matrices fue implementada por Duneau et al. (1992), mientras tanto Baake (1997); [BA] usó números complejos y cuaterniones para resolver el problema para redes hasta dimensión 4. Otra propuesta se da en Aragón et al. (1997) donde se propuso un criterio débil de coincidencia y se usaron redes de 4 dimensiones para caracterizar redes de coincidencia en el plano.

En [AR1], iniciamos el estudio de problema de CSL usando álgebras de Clifford y en este trabajo se continúa con dicha propuesta con un doble propósito:

El primero es mostrar el potencial de las álgebras de Clifford para expresar ideas geométricas, que usamos para resolver el problema de coincidencia, el cual es simplemente geométrico.

Segundo, trataremos de mostrar que las álgebras de Clifford, ya usadas como un poderoso lenguaje en muchos campos, también pueden ser útiles en cristalografía geométrica. Aunque nada nuevo aparezca, los resultados proveen nuevas ideas en este y otros problemas en cristalografía geométrica y el acercamiento pudiera ser valioso para una extensión a dimensiones arbitrarias.

En este trabajo las reflexiones son consideradas como transformaciones primitivas y las álgebras de Clifford surgen como una herramienta natural para este problema, sin hacer uso de matrices y solamente con un mínimo de teoría de grupos.

A grandes rasgos se demuestra que una isometría arbitraria de coincidencia puede ser descompuesta como un producto de reflexiones de coincidencia por vectores de una red Γ, y el grupo de isometrías de coincidencia se caracteriza proporcionando una forma de generarlo a partir de los vectores de Γ.

Los objetivos del presente trabajo son:

1. Ofrecer una prueba constructiva del Teorema de Cartan Dieudonné.

2. Obtener una caracterización de las isometrías de coincidencias para redes arbitrarias.

3. Proponer a las Álgebras de Clifford como una herramienta para trabajar matemáticamente a las redes y las transformaciones ortogonales.

A continuación hacemos una breve descripción del contenido de la tesis.

El capítulo 1 inicia con el estudio de los espacios ortogonales no degenerados y los conceptos relacionados con los espacios ortgonales; hacemos énfasis en el comportamiento de las rotaciones en los espacios Artinianos que nos permitirá encontrar un algoritmo para el teorema de Cartan-Dieudonné.

En el capítulo 2 se estudian las reflexiones a través de hiperplanos desde la óptica de las Álgebras de Clifford y se realiza la demostración constructiva del Teorema de Cartan-Dieudonné para espacios ortogonales no degenerados de dimensión finita.

En el capítulo 3 se expone la teoría básica de redes, se plantea el problema de las redes de coincidencia y se caracterizan las isometrías de coincidencia para redes cuadradas n dimensionales.

En el capítulo 4 se caracterizan las isometrías de coincidencia para redes planas incluyendo las rectangulares y las rómbicas. Además se encuentra un algoritmo general para determinar el índice de coincidencia y una base de la red de coincidencias.

Capítulo 1
ESPACIOS ORTOGONALES Y ÁLGEBRAS DE CLIFFORD REALES

En este capítulo presentamos las propiedades básicas de las Álgebras de Clifford o también llamadas Álgebras Geométricas. Existen diferentes enfoques para la construcción de las Álgebras de Clifford. Uno de ellos utiliza formas bilineales no-degeneradas sobre un espacio vectorial real de dimensión finita que deben relacionarse con la multiplicación de una manera determinada axiomáticamente. Este enfoque se presenta en [DS]. Otro enfoque, esencialmente axiomático, que no usa formas bilineales se presenta en [H1].

Dos culturas antiguas: la griega y la árabe aportaron elementos constitutivos para la matemática. Ambas tenían enfoques distintos de la matemática, la primera cultura se centró fundamentalmente en la geometría, sin contar con una idea precisa de número (razón y proporción entre segmentos de línea) y en la segunda, era precisamente lo contrario, su interés estuvo en la idea de número, sin mucho énfasis en la geometría. Posteriormente algunos matemáticos como Vieta obtuvieron un concepto abstracto de número mediante la creación del Álgebra. Fue Descartes quien propuso unificar el álgebra y la geometría obteniendo como producto la Geometría Analítica. Sin embargo, Descartes no logra construir con ella lo que puede considerarse como una Álgebra Geométrica; es decir, realizar una articulación entre la geometría y álgebra, en donde el concepto de número y su correspondiente representación geométrica se fundieran; en donde las operaciones algebraicas, y sus propiedades, como son la suma y producto tuvieran un claro significado geométrico. Es importante señalar que Descartes propuso un producto geométrico pero con este provocó una desarticulación. Posteriormente hubo esfuerzos como la geometría algebraica y el análisis vectorial, donde la geometría y el álgebra interactúan pero no se funden.

A mediados del siglo pasado hubo varios intentos por establecer una Álgebra Geométrica, quienes lo intentaron fueron Hamilton (Cuaternios), Grasmann (Álgebras de Extensión) y Clifford (Álgebras de Clifford). Hamilton lo consigue pero no se percata de ello y Clifford lo realiza aunque no alcanza a desarrollarlo en plenitud debido a su muerte prematura; de hecho el nombre de Álgebra Geométrica lo propone Clifford aunque es más conocido el de Álgebra de Clifford.

Lo desarrollado por estos tres matemáticos importantes tuvo su mayor repercusión después de una fuerte disputa a finales del siglo pasado, en el concepto de vectores y de hecho es donde más se aplica.

Las Álgebras de Clifford tratan sobre espacios lineales n-dimensionales con suma y producto. Aquí es donde el Álgebra y la Geometría logran fundirse y esto lo ha estado afirmando D. Hestenes desde hace 40 años. Con base en el Álgebra Geométrica, Hestenes ha reescrito parte de la Física (ver [H1], [H2], [H3]), mientras que Delanghe, desde hace 20 años, ha desarrollado con base en Álgebras de Clifford, lo que actualmente se conoce como Análisis de Clifford, [DS]. En [AR] exploramos cierta equivalencia entre estos dos trabajos.

Lo desarrollado por Hamilton, Grasmann y Clifford dio como resultado el álgebra de vectores junto con la teoría de matrices. El desarrollo de la física y de la propia matemática hizo necesaria la extensión del álgebra vectorial dando lugar al concepto de tensores y después al de formas diferenciales; los cuales poseen un gran defecto, su operatividad no contiene una idea geométrica clara.

Para comprender esta fusión del Álgebra y la Geometría expondremos primero las propiedades de los escalares y de los vectores.

Los griegos entendían por número a un segmento de línea que tuviera esa magnitud; cabe resaltar que no importaba si el segmento de línea era rotado o trasladado, para ellos en esencia era lo mismo. Por otra parte, un vector, el cual introdujo Hamilton, se entiende como un segmento de línea dirigido, orientado y con magnitud; es decir, un vector puede ser trasladado y considerarse el mismo, pero al momento de ser rotado automáticamente es otro vector.

En el álgebra vectorial existe la multiplicación de un escalar con un vector y de aquí surge una "dualidad" (dos formas de concebir a un número) para el escalar λ, el cual también se puede pensar como un operador lineal tal que al vector a lo transforma en el vector λa. Esta dualidad también existe entre los vectores, es decir a cada vector b le asociamos el operador lineal que a cada vector a lo transforma en el vector $a \times b$.

También en el álgebra vectorial existe la suma de vectores, mas no la suma de escalares con vectores. En cambio en álgebra geométrica si existe una tal suma; esto puede parecer absurdo pero no lo es tanto si recordamos que podemos sumar $3 + x^3$ aún cuando 3 es un escalar y x^3 es un polinomio; esta suma se puede justificar y a través de una artimaña no muy sofisticada también se puede justificar la suma $\lambda + a$, con λ escalar y a vector. Para fines prácticos es necesario lograr la abstracción de este hecho "sumar peras con manzanas" -puede ser que este haya sido un motivo por el cual no se haya apreciado el valor del trabajo de Hamilton, Grasmann y Clifford. Este tipo de "sumas" también aparece en los números complejos.

Los números complejos surgen con el fin de poder resolver la ecuación $x^2+1=0$, denotando con i su solución, es decir, $i^2 = -1$, y todo número complejo es de la forma $a + bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$. De hecho, a través de los complejos se puede definir una multiplicación en el plano real, a través de la identificación

$$(a,b) \to a + bi,$$

y la multiplicación queda establecida por la siguiente regla:

$$(a,b)\,(c,d) = (ac - bd, bc + ad)$$

A cada complejo z se le puede asociar un operador lineal en el plano a saber: $T_z\,(w) = wz$; $w \in \mathbb{C}$, y las rotaciones quedan dadas por los complejos unitarios es decir con los complejos de la forma:

$$z = \cos\theta + i\mathrm{sen}\theta.$$

En este caso θ es el ángulo de rotación.

En su deseo de extender los complejos a $\mathbb{R}^3$, Hamilton, el 18 de Octubre de 1843, descubrió los cuaternios, que son de la forma:

$$a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k, \text{ con } a_i \in \mathbb{R}$$

A i, j, k se les llama unidades imaginarias pues Hamilton definió la multiplicación como:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1.$$

y también definió:

$$\begin{aligned} ij &= -ji = k, \\ jk &= -kj = i, \\ ki &= -ik = j. \end{aligned}$$

Estas últimas reglas son semejantes al producto vectorial del análisis vectorial. La multiplicación de dos cuaternios cualesquiera se obtiene por linealidad, usando las reglas de multiplicación de las unidades imaginarias. Siguiendo la idea de los complejos se define el conjugado de $a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$, como:

$$\overline{a} = a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k,$$

y se obtiene que

$$a\overline{a} = \sum_{l=0}^{3} a_l^2,$$

por lo que se deduce que todo cuaternio a distinto de cero tiene inverso, el cual está dado por:

$$a^{-1} = \frac{\overline{a}}{a\overline{a}}.$$

Hamilton concibió geométricamente a los vectores en $\mathbb{R}^3$ como segmentos de línea con dirección y magnitud, y algebraicamente como al cuaternio de la forma:

$$\overrightarrow{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k,$$

por lo tanto todo cuaternio se puede escribir de la siguiente manera:

$$a = a_0 + \overrightarrow{a},$$

donde a_0 se llama la parte escalar de a y $\overrightarrow{a}$ su parte vectorial. El espacio de los cuaternios es denotado por $\mathbb{H}$.

Con la identificación $(x_1, x_2, x_3) \to \overrightarrow{x} = x_1 i + x_2 j + x_3 k$, los cuaternios dan lugar a las rotaciones en $\mathbb{R}^3$, a través de

$$T_a(\overrightarrow{x}) = a\overrightarrow{x}\overline{a}, \text{ con } a \in \mathbb{H} \text{ unitario y } \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3.$$

También los cuaternios pueden ser usados para obtener las rotaciones en $\mathbb{R}^4$ a través de

$$T_{ar}(x) = ax\overline{r}, \text{ con } a, r \in \mathbb{H} \text{ unitarios, y } x \in \mathbb{R}^4.$$

con la identificación $(x_0, x_1, x_2, x_3) \to x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$. Los cuaternios y los complejos son ejemplos de álgebras de Clifford.

1.1. Espacios ortogonales

En esta sección exponemos el material necesario del álgebra lineal para establecer un lenguaje básico que se usa a lo largo del presente trabajo; para ello consideramos una forma bilineal sobre un espacio vectorial y estudiamos los conceptos relacionados con ella, como ortogonalidad, complemento ortogonal, etc. La mayoría de los resultados se presentan sin demostración; las demostraciones pueden ser consultadas en [DS], [P1],[ST].

Definición 1 *Sea $\mathcal{X}$ un espacio vectorial real. $\mathcal{B}$ es llamada una forma bilineal si $\mathcal{B}$:$\mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ cumple:*

(B1) Condición de bilinealidad.

Si $v, v', w, w' \in \mathcal{X}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\lambda v + v', w) &= \lambda \mathcal{B}(v, w) + \mathcal{B}(v', w) \ y \\ \mathcal{B}(v', \lambda w' + w) &= \lambda \mathcal{B}(v, w) + \mathcal{B}(v, w'). \end{aligned}$$

(B2) Condición de simetría.

Si $v, w \in \mathcal{X}$, entonces

$$\mathcal{B}(v, w) = \mathcal{B}(w, v).$$

En caso de que la forma bilineal $\mathcal{B}$ satisfaga la siguiente condición:

(B3) Condición de no degeneración.

Si para cada $v \in \mathcal{X}$, $v \neq 0$ existe $w \in \mathcal{X}$ tal que $\mathcal{B}(v, w) \neq 0$ o equivalentemente:

$$\mathcal{B}(v, w) = 0 \text{ para cada } w \in \mathcal{X} \Leftrightarrow v = 0,$$

se dice que la forma bilineal es no degenerada y el par $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ es llamado espacio real ortogonal no degenerado.

El concepto de forma bilineal es una generalización del concepto de producto interno, por ende, muchos conceptos de los espacios euclideanos se generalizan cuando se tiene un espacio vectorial real con una forma bilineal.

Definición 2 *Sea $\mathcal{X}$ un espacio vectorial real y $\mathcal{B}$ una forma bilineal $\mathcal{X}$. Se definen los siguientes conceptos:*

1. *Se dice que* $u, v \in \mathcal{X}$ *son ortogonales si* $\mathcal{B}(u,v) = 0$.

2. *Se dice que* $u \in \mathcal{X}$ *es isotrópico si* $\mathcal{B}(u,u) = 0$.

3. *Se dice que* u *es invertible si* u *es no isotrópico, es decir, si* $\mathcal{B}(u,u) \neq 0$. *El término invertible se justificará en la siguiente sección.*

4. *Sean* $\mathcal{W}, \mathcal{V} < \mathcal{X}$ *(subespacios vectoriales de* $\mathcal{X}$ *). Se dice que* $\mathcal{W}$ *y* $\mathcal{V}$ *son ortogonales, si* $\mathcal{B}(v,u) = 0$, *para cada* $u \in \mathcal{V}$ *y cada* $v \in \mathcal{W}$.

   Nota: *En esta tesis denotaremos con mathcalV* $< \mathcal{X}$ *a cualquier subespacio vectorial de* $\mathcal{X}$ *sea propio o no.*

5. *Un subespacio* $\mathcal{V} < \mathcal{X}$ *es llamado espacio nulo si* $\mathcal{B}(v,u) = 0$, *para cada* $u, v \in \mathcal{V}$.

6. *Sea* $\mathcal{W} < \mathcal{X}$ *(subespacio vectorial) se define el complemento ortogonal de* $\mathcal{W}$ *como el conjunto* $\mathcal{W}^{\perp} = \{u \in \mathcal{X} \mid \mathcal{B}(v,u) = 0, \text{ para cada } v \in \mathcal{W}\}$.

Observaciones:

1. Si u es isotrópico entonces el subespacio generado por u es un subespacio nulo de $\mathcal{X}$.

2. Claramente $\mathcal{W}^{\perp}$ es un subespacio de $\mathcal{X}$ $(\mathcal{W}^{\perp} < \mathcal{X})$. La siguiente proposición nos dice bajo que condiciones un subespacio y su correspondiente complemento ortogonal descomponen al espacio vectorial en dos subespacios, más específicamente, para $x \in \mathcal{X}$ existen únicos $v \in \mathcal{W}$ y $u \in \mathcal{W}^{\perp}$ tales que $x = u + v$.

Proposición 3 *Sea* $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ *un espacio real ortogonal no degenerado de dimensión* n *y sea* $\mathcal{W} < \mathcal{X}$ *entonces:* $\mathcal{X} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{W}^{\perp} \Leftrightarrow \mathcal{W}$ *es no degenerado. Es decir, el espacio* $(\mathcal{W}, \mathcal{B}|_{\mathcal{W}})$ *es no degenerado,* $\mathcal{B}|_{\mathcal{W}}$ *denota la restricción de* $\mathcal{B}$ *a* $\mathcal{W}$. *En particular para* $a \in \mathcal{X}$; $\mathcal{X} = \mathbb{R}a \oplus (\mathbb{R}a)^{\perp} \Leftrightarrow \mathcal{B}(a,a) \neq 0$.

A menos de que se diga lo contrario, de aquí en adelante $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ denota un espacio real ortogonal no degenerado de dimensión n.

Sea $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ cualquier base ordenada del espacio vectorial $\mathcal{X}$. Para cada $i, j = 1, \ldots, n$ definimos $a_{ij} := \mathcal{B}(e_i, e_j)$. La matriz $A = (a_{ij})$ es llamada la matriz de $\mathcal{B}$ relativa a la base e y describe la acción de $\mathcal{B}$ de la siguiente manera:

Sean $v, w \in \mathcal{X}$ y $x = [v]_e, y = [w]_e$ las coordenadas de v, w con respecto a la base e; entonces $\mathcal{B}(v,w) = x^t A y$.

Como $\mathcal{B}$ es no degenerada y simétrica, entonces A es simétrica y no-singular, y un resultado clásico de formas bilineales asegura la existencia de una base ordenada $e^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ de $\mathcal{X}$ y $p, q \in \mathbb{N}$, con $p + q = n$, tales que:

(1) $\mathcal{B}\left(e_j^*, e_j^*\right) = 1$ para $j = 1, 2, \ldots, p$.

(2) $\mathcal{B}\left(e_j^*, e_j^*\right) = -1$ para $j = p+1, p+2, \ldots, p+q$.

(3) $\mathcal{B}\left(e_i^*, e_j^*\right) = 0$ para $i, j = 1, 2, \ldots, n$, con $i \neq j$.

Es decir $e^* = \{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ diagonaliza a la matriz asociada a la forma bilineal $\mathcal{B}$.

(4) El número de elementos tales que $\mathcal{B}\left(e_j^*, e_j^*\right) = 1$ es independiente de la base que diagonaliza a la forma bilineal $\mathcal{B}$. A la base e^* se le llama base ortonormal con respecto a $\mathcal{B}$ para $\mathcal{X}$. En el caso de $q = 0$, a $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ se le llama positivo definido y en tal caso la forma bilineal es llamada producto interno. La función $\Phi_{e^*} : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ tal que $\Phi_{e^*}(v) = [v]_{e^*}$ es un isomorfismo entre el espacio ortogonal $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ y el espacio $\mathbb{R}^n$ y lo provee de una forma bilineal $\mathcal{B}^* : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, a saber:

$$\mathcal{B}^*(x, y) = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i - \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i y_i$$

la cual conserva las mismas propiedades de $\mathcal{B}$; donde: $x = (x_1, \ldots, x_{p+q})$ y $y = (y_1, \ldots, y_{p+q}) \in \mathbb{R}^n$.

A $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^*)$ lo denotaremos simplemente con $\mathbb{R}^{p,q}$, y al espacio ortogonal $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ se le llama de característica o signatura (p, q) y su base ortonormal se denotará con e. Por el anterior isomorfismo a $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ con signatura (p, q) se le puede denotar con $\mathbb{R}^{p,q}$.

1.1.1. Grupo ortogonal

Los operadores lineales sobre $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ de más interés son aquellos que preservan la forma bilineal, es decir, los ortogonales.

Definición 4 *Al conjuntò de los operadores lineales $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, tales que*

$$\mathcal{B}(Tv, Tw) = \mathcal{B}(v, w),$$

se le llama el grupo pseudo-ortogonal de $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ y es denotado por $\mathcal{O}(\mathcal{X})$. Sus elementos son llamados transformaciones ortogonales.

Denotamos $\mathcal{O}(p,q) := \mathcal{O}(\mathbb{R}^{p,q})$ y $\mathcal{O}(p) = \mathcal{O}(\mathbb{R}^{p})$.

El grupo $\mathcal{O}(p,q)$ puede ser considerado como el conjunto de las matrices invertibles Q, de tamaño $n \times n$ que satisfacen $Q^t A Q = A$, donde A es la matriz asociada a la forma bilineal $\mathcal{B}$ relativa a la base canónica de $\mathbb{R}^{p,q}$.

Definición 5 $\mathcal{SO}(p,q) := \{Q \in \mathcal{O}(p,q) \mid \det(Q) = 1\}$ *es el espacio de las transformaciones ortogonales especiales o rotaciones de* $\mathbb{R}^{p,q}$. *Los elementos de* $\mathcal{O}(p,q) \setminus \mathcal{SO}(p,q)$ *son llamadas antirotaciones.*

En caso de que $\mathcal{B}(a,a) \neq 0$, el subespacio $(\mathbb{R}a)^{\perp}$ es de dimensión $n-1$ y se llama el hiperplano asociado con $a \in \mathcal{X}$; aún más, para $v \in \mathcal{X}$, $v = \lambda a + b$, con $b \in (\mathbb{R}a)^{\perp} = Ha$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Como se demuestra en el siguiente resultado la transformación lineal $\varphi_a : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $\varphi_a(v) = -\lambda a + b$ es ortogonal y se llama la reflexión a través del hiperplano Ha.

Proposición 6 *Bajo las mismas condiciones de la proposición anterior, la transformación lineal* $T : \mathcal{X} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{W}^{\perp} \to \mathcal{X}$; *para* $v = x + y$, *con* $x \in \mathcal{W}$, $y \in \mathcal{W}^{\perp}$; *dada por* $T(v) = x - y$ *es una transformación ortogonal.*

Cualquier subespacio no-degenerado de $\mathcal{X}$, con base en su complemento ortogonal permite construir operadores ortogonales y precisamente el teorema de Cartan-Dieudonné nos describe a los operadores ortogonales con los elementos invertibles de $\mathcal{X}$. Los siguientes lemas juegan un papel importante en la demostración del teorema de Cartan-Dieudonné.

Lema 7 *Sean* a, b *elementos invertibles tales que* $\mathcal{B}(a,a) = \mathcal{B}(b,b)$. *Entonces existe un mapeo* φ *tal que* $\varphi(a) = b$, *que es la reflexión a través de un hiperplano o la composición de dos reflexiones a través de hiperplanos.*

Demostración Si $\mathcal{B}(a,a) = \mathcal{B}(b,b)$ y a, b son invertibles entonces $a+b$ y $a-b$ son ortogonales, esto se sigue de: $\mathcal{B}(a+b, a-b) = \mathcal{B}(a,a) - \mathcal{B}(b,b)$.

Se tiene la siguiente igualdad: $\mathcal{B}(a+b, a+b) + \mathcal{B}(a-b, a-b) = 4\mathcal{B}(a,a) \neq 0$. De aquí se deduce que $a+b$ o $a-b$ es invertible, pues ambos sumandos de la igualdad anterior no pueden ser cero.

Si $a-b$ es invertible, entonces $\varphi_{a-b} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ existe y
$\varphi_{a-b}(a) = \varphi_{a-b}\left(\frac{1}{2}(a-b) + \frac{1}{2}(a+b)\right) = -\frac{1}{2}(a-b) + \frac{1}{2}(a+b) = b$
Si $a+b$ es invertible, entonces $\varphi_{a+b} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ existe y

$$\varphi_b\varphi_{a+b}(a) = \varphi_b\varphi_{a+b}\left(\tfrac{1}{2}(a-b) + \tfrac{1}{2}(a+b)\right) =$$
$$\varphi_b\left(\tfrac{1}{2}(a-b) - \tfrac{1}{2}(a+b)\right) = \varphi_b(-b) = b.$$

■

Lema 8 *Cualquier operador ortogonal del espacio n dimensional real ortogonal $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ no degenerado es expresable como la composición de un número finito de reflexiones a través de hiperplanos de $\mathcal{X}$.*

Demostración

La demostración es por inducción.

Supongamos que el resultado es válido para espacios $n-$dimensionales y sea $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ un espacio ortogonal no degenerado de dimensión $n+1$ con base ortonormal $\{e_i \mid i = 1, \ldots, n+1\}$ y $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ un operador ortogonal. $T(e_n)$ y e_n cumplen las condiciones del lema anterior por lo cual existe φ que es la reflexión de un hiperplano o la composición de dos reflexiones de hiperplanos en $\mathcal{X}$ tal que $\varphi T(e_n) = e_n$. El mapeo φT induce una transformación ortogonal sobre el espacio generado por $\{e_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ y la hipótesis de inducción es aplicable.

■

El lema anterior se puede considerar como una versión débil del teorema de Cartan-Dieudonné, el cual afirma que cualquier transformación ortogonal es la composición de a lo más n reflexiones a través de hiperplanos. En el siguiente capítulo se demostrará esta versión del Teorema de Cartan-Dieudonné de manera constructiva y para ello es necesario considerar a los espacios Artinianos.

1.1.2. Espacios Artinianos

El espacio Artiniano más simple, también llamado el plano de Lorentz o plano Artiniano, es $\mathbb{R}^{1,1}$. En el plano Artiniano se tiene que el generado por $u = (1,1)$ es un espacio nulo de dimensión 1.

Proposición 9 *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ un espacio ortogonal no degenerado de signatura $(1,1)$, si $u \in \mathcal{X}$ es un vector isotrópico distinto de cero, entonces existe un único vector isotrópico v distinto de cero tal que $\mathcal{B}(u,v) = 1$.*

Demostración

Sea u un vector isotrópico distinto de cero. Se tiene que:

$$\mathbb{R}u \subset (\mathbb{R}u)^{\perp}.$$

Por ser $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ no degenerado se tiene que $\dim\left((\mathbb{R}u)^{\perp}\right) = 1$, por lo cual

$$\mathbb{R}u = (\mathbb{R}u)^{\perp}.$$

Sea $w \in \mathcal{X}$, no isotrópico, tal que $w \notin \mathbb{R}u$, entonces para cada vector $a \in \mathcal{X}$ existen reales α, β, tales que

$$a = \alpha u + \beta w,$$

bajo estas condiciones se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(a,u) &= \beta\mathcal{B}(w,u), \\ \mathcal{B}(a,a) &= 2\alpha\beta\mathcal{B}(u,w) + \beta^2\mathcal{B}(w,w), \end{aligned}$$

así que el problema se reduce a resolver el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \beta\mathcal{B}(w,u) &= 1, \\ 2\alpha\beta\mathcal{B}(u,w) + \beta^2\mathcal{B}(w,w) &= 0; \end{aligned}$$

por lo cual:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{\mathcal{B}(w,u)}, \\ \alpha &= -\frac{\mathcal{B}(w,w)}{(\mathcal{B}(u,w))^2}. \end{aligned}$$

Con los valores anteriores se encuentra el vector $v = \alpha u + \beta w$ que satisface las condiciones del problema, la unicidad es consecuencia de que el sistema tiene solución única.

■

Proposición 10 *Sea* $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ *un espacio ortogonal no degenerado de signatura* $(1,1)$, *y* $u \in \mathcal{X}$ *un vector isotrópico distinto de cero. Si* $\mathcal{B}(v,u) \neq 0$ *entonces los vectores* u, v *son linealmente independientes.*

Demostración

Es consecuencia de $\mathbb{R}u = (\mathbb{R}u)^{\perp}$.

■

Proposición 11 *Si* $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ *es un espacio ortogonal no degenerado de signatura* $(1,1)$, *entonces dicho espacio sólo contiene dos líneas nulas.*

Demostración

Sea u un vector isotrópico distinto de cero. Existe un único vector isotrópico v distinto de cero tal que $\mathcal{B}(u,v)=1$. Se tiene que $\{u,v\}$ es una base de $\mathcal{X}$, así que para cualquier $w\in\mathcal{X}$, existen α,β reales tales que:

$$w=\alpha u+\beta v.$$

Sea w un vector isotrópico tal que $\mathbb{R}w\neq\mathbb{R}u$.

Por lo anterior, se tiene que $w=\alpha u+\beta v$ con $\beta\neq 0$:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(w,w) &= 0\\ \alpha\beta &= 0,\end{aligned}$$

por lo tanto $\alpha=0$. De lo anterior se tiene que $\mathbb{R}w=\mathbb{R}u$ ó $\mathbb{R}w=\mathbb{R}v$.

■

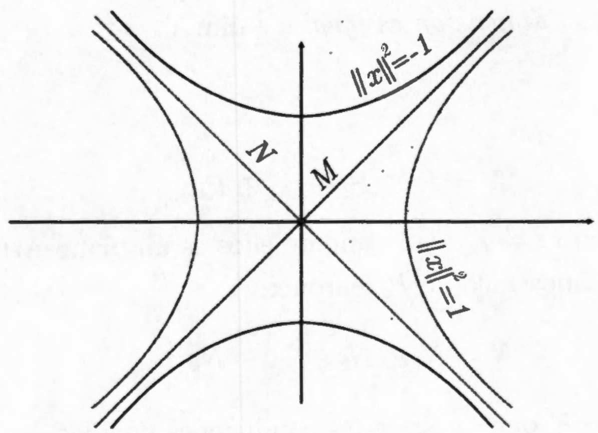


Figura 1 En la figura M y N son los espacios nulos del plano Artiniano y se presentan los vectores cuya norma al cuadrado es uno y también los vectores cuya norma al cuadrado es -1

Definición 12 *Un plano artiniano es un subespacio generado por dos vectores isotrópicos linealmente independientes.*

Proposición 13 *Sea $(\mathcal{X},\mathcal{B})$ un espacio ortogonal no degenerado de signatura (p,q) y $u\in\mathcal{X}$ un vector isotrópico distinto de cero. Entonces existe un plano artiniano $P<\mathcal{X}$, tal que $u\in P$.*

Demostración

Sea u un vector isotrópico. Existe un vector v tal que $\mathcal{B}(u,v) \neq 0$.

Consideremos al espacio $P = \langle u, v \rangle$, el cual es no degenerado, por lo cual la signatura de $(P, \mathcal{B}|_P)$ es $(1,1)$, $(1,-1)$ ó $(-1,-1)$ por tener un vector isotrópico sólo es posible la signatura $(1,-1)$.

■

Definición 14 *Un espacio ortogonal no degenerado $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ es llamado **Artiniano** si existen planos artinianos $P_1, P_2, \ldots, P_s$ tales que*

$$\mathcal{X} = P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_s$$

y P_i es ortogonal a P_j, para $i \neq j$.

Observación Un espacio Artiniano es de signatura (p,p) y es isomorfo a $\mathbb{R}^{p,p}$

Proposición 15 *Si $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ es un espacio Artiniano entonces existe un espacio nulo contenido en $\mathcal{X}$ tal que su dimensión es igual a $\frac{1}{2} \dim \mathcal{X}$.*

Demostración

Se tiene que:

$$\mathcal{X} = P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_s,$$

con P_i ortogonal a P_j para $i \neq j$ y cada uno de ellos es un plano Artiniano.

Sea $N_i < P_i$ una línea nula de P_i, entonces

$$N = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_s$$

es un subespacio nulo de $\mathcal{X}$ que satisface las condiciones pedidas.

■

1.1.3. Transformaciones ortogonales sobre espacios Artinianos

En esta parte de la tesis se estudiarán las transformaciones ortogonales sobre espacios Artinianos. Las demostraciones de las proposiciones que se dan sin demostración pueden ser consultadas en [ST].

Definición 16 *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ un espacio ortogonal no degenerado. Se dice que $N < \mathcal{X}$, es un espacio nulo maximal si N es nulo y si $N_1 < \mathcal{X}$ es nulo y $N \subset N_1$, entonces $N = N_1$.*

Proposición 17 *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ un espacio ortogonal no degenerado, si $N_1, N_2 < \mathcal{X}$ son subespacios nulos maximales. Entonces se tiene que $\dim N_1 = \dim N_2$.*

Proposición 18 *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ un espacio ortogonal no degenerado y $N < \mathcal{X}$ un subespacio nulo maximal. Se tiene que $\dim N \leq \frac{1}{2} \dim \mathcal{X}$. En caso de que $\mathcal{X}$ sea un espacio Artiniano, se tiene que $\dim N = \frac{1}{2} \dim \mathcal{X}$.*

Lema 19 *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ un espacio Artiniano y $N < \mathcal{X}$ un subespacio nulo maximal. Si $T \in \mathcal{O}(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, tal que $T(N) = N$, entonces T es una rotación.*

Proposición 20 *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ un espacio Artiniano y $N < \mathcal{X}$ un subespacio nulo maximal. Si $T \in \mathcal{O}(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, tal que $T(x) = x$ para cada $x \in N$, entonces $\dim \mathcal{X}$ es divisible entre cuatro.*

Proposición 21 *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ un espacio Artiniano y $N < \mathcal{X}$ subespacio nulo maximal. Si $T \in \mathcal{O}(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ tal que $T(x) = x$ para cada $x \in N$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$im(T - I) = N$.*
2. *$Ker(T - I) = N$.*
3. *Si $x \in \mathcal{X}$ y $\mathcal{B}(x, x) \neq 0$, entonces $(T - I)x$ es un vector isotrópico diferente de cero.*

Lema 22 *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ un espacio ortogonal no degenerado. Para que exista $T \in \mathcal{O}(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ tal que $(T - I)(x)$ es vector isotrópico distinto de cero para cada x vector no isotrópico distinto de cero, es necesario y suficiente que las siguientes condiciones se satisfagan:*

1. *$(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ es un espacio Artiniano de dimensión $4k$.*
2. *T es una rotación de $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, con un espacio nulo maximal como espacio fijo.*

Este último lema se usa para demostrar el teorema de Cartan-Dieudonné.

1.2. Álgebras de Clifford reales

1.2.1. Álgebra

En esta sección se revisa el concepto general de álgebra real.

Definición 23 *Un espacio vectorial real $\mathcal{A}$ es llamado **álgebra real** si existe un mapeo bilineal $* : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$. Este mapeo se denomina **multiplicación** del álgebra y usualmente se denota $a * b := ab$.*

$\mathcal{A}$ es llamada:

(i) **Asociativa**. Si para cualesquiera $a, b, c \in \mathcal{A}$ se tiene:

$$(ab)\, c = a\, (bc)\,.$$

(ii) **Conmutativa**. Si el producto es simétrico, es decir, para cualesquiera $a, b \in \mathcal{A}$ se tiene:

$$ab = ba.$$

(iii) Con **identidad**. Si existe un elemento $1_{\mathcal{A})}$ tal que, para cualquiera $a \in \mathcal{A}$ se tiene:

$$\begin{aligned} 1_{\mathcal{A}} a &= a, \\ a 1_{\mathcal{A}} &= a. \end{aligned}$$

Por definición un álgebra es **distributiva** sobre la adición, esto es, para cualesquiera $a, b, c \in \mathcal{A}$ se cumple:

$$a\, (b + c) = ab + ac.$$

En caso de ser $\mathcal{A}$ un álgebra asociativa con identidad $1_{\mathcal{A}}$, los reales pueden ser inyectados a $\mathcal{A}$ con la inyección $\lambda \longrightarrow \lambda 1_{(\mathcal{A})}$. El espacio $\mathbb{R}1_{\mathcal{A}}$ es un subespacio de $\mathcal{A}$, más aún, es una subálgebra de $\mathcal{A}$. Los reales como álgebra es isomorfa a $\mathbb{R}1_{\mathcal{A}}$, por eso es usual identificar $1_{\mathcal{A}}$ con $1 \in \mathbb{R}$ e inclusive no hacer ninguna distinción entre la multiplicación por escalar del espacio vectorial y la multiplicación del álgebra. Por lo dicho se suele asumir $\mathbb{R}1_{\mathcal{A}} = \mathbb{R}$.

Una álgebra, $\mathcal{A}$ se dice que es **generada** por $\{1\}$ y el espacio vectorial X, si los elementos de esta son sumas y productos de escalares y elementos de X.

Definición 24 *Sea $\mathcal{A}$ una álgebra asociativa con identidad. Si para el elemento a existe un elemento b tal que*

$$\begin{aligned} ab &= 1, \\ ba &= 1, \end{aligned}$$

entonces el elemento a es llamado ***invertible*** *y b su* ***inverso,*** *que suele denotarse con: $b := a^{-1}$.*

Una álgebra $\mathcal{A}$ es llamada **campo** si ésta es asociativa, conmutativa, con identidad y cada elemento $a \neq 0$ es invertible.

Ejemplos:

(1) Los reales y los complejos considerados como espacios lineales sobre los reales y con la multiplicación usual son álgebras reales y aún más, son campos.

(2) Consideremos el conjunto de las transformaciones lineales de un espacio vectorial X el cual denotamos con $End\,(X)$. Este espacio vectorial con la composición es una álgebra y es llamada el álgebra de los endomorfismos de X.

1.2.2. Álgebras de Clifford

En esta sección damos la definición de un álgebra de Clifford, sintetizada en [DS]. También se ve que algunas definiciones de la sección anterior pueden ser consideradas desde la óptica del algebraica, esto es debido a la relación de una forma bilineal y una álgebra de Clifford, de hecho, la forma bilineal determina el Álgebra de Clifford.

Definición 25 *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ un espacio real ortogonal no degenerado de dimensión n y $\mathcal{A}$ una álgebra asociativa real con identidad 1 tal que:*

(C1) $\mathcal{A}$ contiene copias de $\mathbb{R}$ y de $\mathcal{X}$ como subespacios lineales.

(C2) Para cada $v \in \mathcal{X}$ se cumple: $v^2 = \mathcal{B}\,(v, v)$.

(C3) $\mathcal{A}$ es generada como anillo por las copias de $\mathbb{R}$ y de $\mathcal{X}$ o equivalentemente como álgebra real asociativa generada por $\{1\}$ y $\mathcal{X}$.

*Entonces $\mathcal{A}$ es llamada una **Álgebra de Clifford** real para $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ y es denotada por $\mathcal{A} = \mathcal{C}\,(\mathcal{X})$.*

En el axioma (C2) descansa la relación existente entre las álgebras de Clifford con las formas bilineales y por ende la interpretación geométrica de dichas álgebras, pues la forma bilineal determina los vectores ortogonales y los operadores ortogonales.

Ejemplos.

1 El álgebra de los complejos es una álgebra de Clifford para $\mathbb{R}^{0,1}$.

2 El álgebra de los cuaternios es una álgebra de Clifford para $\mathbb{R}^{0,2}$.

1.2.3. Bases para álgebras de Clifford

En esta sección encontramos un base para $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ en términos de una base ortonormal de $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, y de aquí se deduce el carácter finito dimensional de $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ para $\mathcal{X}$ de dimensión finita.

Por definición $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ es generada por $\{1\}$ y $\mathcal{X}$, y al considerar una base ortonormal de $\mathcal{X}$, los elementos de $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ son de la forma:

$$\sum_A \lambda_A e_{\alpha_1}^{n_{\alpha_1}} e_{\alpha_2}^{n_{\alpha_2}} \cdots e_{\alpha_S}^{n_{\alpha_s}},$$

con $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\}$, $e_{\alpha_i} \in e$, $n_i \in \mathbb{N}$ para $\alpha_i \in A$, e $i = 1, 2, \ldots, n$.

Pero

$$e_{\alpha_1}^2 = \pm 1, \tag{1.1}$$

por lo cual esto se reduce a la forma:

$$\sum_A \lambda_A e_{\alpha_1} e_{\alpha_2} \cdots e_{\alpha_S},$$

además tenemos:

$$e_i e_j + e_j e_i = 0, \; i \neq j, \tag{1.2}$$

cuando $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ es de signatura (p, q). En general para cualesquiera $v, w \in \mathcal{X}$ se cumple:

$$\frac{1}{2}(vw + wv) = \mathcal{B}(v, w),$$

y se sigue del siguiente hecho: $\mathcal{B}(v + w, v + w) = (v + w)^2$.

Por (1.2) para $\beta_1, \ldots, \beta_s$, s distintos números con $1 \leq \beta_j \leq n$, $j = 1, \ldots, s$ se tiene

$$e_{\beta_1} \cdots e_{\beta_s} = (-1)^\sigma e_{\alpha_1} \cdots e_{\alpha_s},$$

donde:

$$1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_s,$$

y σ es el número de transposiciones de la permutación

$$\pi = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_s \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_s \end{pmatrix}.$$

Para los productos $e_{\gamma_1} \cdots e_{\gamma_r}$ supongamos que los vectores básicos se repiten en este producto, luego de ordenar los factores de acuerdo con índices crecientes, por la propiedad (1.1) cada vector aparece a lo más una vez, por lo cual $e_{\gamma_1}\cdots e_{\gamma_r}$ puede ser reducido a un producto que contenga a lo más n factores.

Para mayor comodidad de la notación para $A=\{\beta_1,\ldots,\beta_s\}\in\wp(N)_0$ denotamos:

$$\begin{aligned} e_A &= e_{\beta_1}\cdots e_{\beta_s}, \\ e_\emptyset &= 1. \end{aligned}$$

Donde $\wp(N)_0$ es la colección de subconjuntos ordenados del conjunto $N=\{1,2,\ldots,n\}$.

El conjunto $\{e_A\,|A\in\wp(N)_0\}$ genera a $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ y de aquí se deduce que $\dim\mathcal{C}(\mathcal{X})\leq 2^n$.

Hemos encontrado un conjunto que genera a $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ y a continuación probamos unos lemas para dar una base para $\mathcal{C}(\mathcal{X})$.

Definición 26 *El elemento $a\in\mathcal{C}(\mathcal{X})$ se denomina invertible si existe $a^{-1}\in\mathcal{C}(\mathcal{X})$ tal que*

$$aa^{-1}=a^{-1}a=1.$$

Recordando que un vector $s\in\mathcal{X}$ es llamado invertible (según la primera sección) si $\mathcal{B}(s,s)\neq 0$, esta condición es equivalente a lo condición de ser invertible con respecto al álgebra, esto es:

Teorema 27 *$s\in\mathcal{X}$ es invertible $\Leftrightarrow\mathcal{B}(s,s)\neq 0$, aún más,*

$$s^{-1}=\frac{s}{s^2}=\frac{s}{\mathcal{B}(s,s)}.$$

Demostración Se tiene el siguiente hecho: $s\neq 0\in\mathcal{X}$ es divisor de cero si y sólo si $\mathcal{B}(s,s)=0$.

En efecto:

Si $s\neq 0$ y $\mathcal{B}(s,s)=0$;

$$\begin{aligned} ss &= \mathcal{B}(s,s), \\ ss &= 0. \end{aligned}$$

Supongamos que $s\neq 0\in\mathcal{X}$ es divisor de cero entonces existe $y\neq 0\in\mathcal{X}$ tal que

$$ys=0$$

De lo anterior se continúa el siguiente proceso

$$\begin{aligned} yss &= 0s \\ y\mathcal{B}(s,s) &= 0 \end{aligned}$$

Como $y \neq 0 \in \mathcal{X}$ y $\mathcal{B}(s,s)$ es un escalar entonces $\mathcal{B}(s,s)$=0.

Supongamos que $s \neq 0 \in \mathcal{X}$ es invertible $y \neq 0 \in \mathcal{X}$ tal que

$$sy = 1$$

De lo anterior:

$$\begin{aligned} ssy &= s1 \\ \mathcal{B}(s,s)\,y &= s \\ y &= \frac{s}{\mathcal{B}(s,s)} \end{aligned}$$

■

Lema 28 *Si $A \in \wp(N)_0$, entonces:*

(i) e_A es invertible.

(ii) $e_je_A = \pm e_Ae_j$, con $j = 1,\ldots,n$.

Lema 29 *Sea $A \in \wp(N)_0$. Si n es par y $e_je_A = e_Ae_j$ para $j = 1,\ldots,n$, entonces $e_A = e_\emptyset = 1$.*

Si n es impar y $e_je_A = e_Ae_j$ para $j = 1,\ldots,n$, entonces $A \in \{1,N\}$.

Sea $n = p+q$ impar y $e_N \in \mathbb{R}$ entonces $e_N = \pm 1$ y $p-q \equiv 1 \bmod (4)$.

Demostración Por hipótesis la signatura de $(\mathcal{X},\mathcal{B})$ es (p,q) con $p+q = n = 2k+1$ y $k \in \mathbb{N}$.

Tenemos lo siguiente:

$$(e_N)^2 = (-1)^{k(2k+1)+q},$$

como $e_N \in \mathbb{R}$ entonces $(e_N)^2 = 1$ y esto implica que $k(2k+1)+q$ es par lo que equivale a decir que $k+q$ es par.

Entonces $2k+2q = p+3q-1$ es divisible entre cuatro, y de aquí:

$$p-q-1 \equiv 0 \mod 4.$$

■

Teorema 30 *Sea $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ una álgebra de Clifford para un espacio $(\mathcal{X},\mathcal{B})$ ortogonal, no degenerado n dimensional del tipo (p,q) y sea $e=\{e_1,\ldots,e_p,e_{p+1},\ldots,e_{p+q}\}$ una base ortogonal para $(\mathcal{X},\mathcal{B})$ entonces:*

(i) Si n es par, $\dim\mathcal{C}(\mathcal{X})=2^n$ y $\{e_A \mid A\in\wp(N)_0\}$ es una base para $\mathcal{C}(\mathcal{X})$.

(ii) Si n es impar y $e_N\notin\mathbb{R}$, entonces $\dim\mathcal{C}(\mathcal{X})=2^n$ y $\{e_A \mid A\in\wp(N)_0\}$ es una base para $\mathcal{C}(\mathcal{X})$.

(iii) Si n es impar y $e_N\in\mathbb{R}$, entonces $e_N=\pm 1$ y $p-q\equiv 1 \bmod (4)$. En este caso $\dim\mathcal{C}(\mathcal{X})=2^{n-1}$ y $\{e_A \mid A\in\wp(N)_0,\ \#A \text{ par}\}$ es base para $\mathcal{C}(\mathcal{X})$.

Demostración

Veamos bajo que condiciones el conjunto $\mathbf{A}=\{e_A \,|A\in\wp(N)_0\}$ es linealmente independiente. Para esto notemos que para cada $B\in\wp(N)_0$ se tiene:

$$\sum_{A\in\wp(N)_0}\lambda_A e_A=0 \iff \left(\sum_{A\in\wp(N)_0}\lambda_A e_A\right)e_B^{-1}=0,$$

con lo cual se logra que el coeficiente e_B sea el coeficiente de $e_\emptyset$, así que resulta suficiente probar que $\lambda_\emptyset=0$ para probar la independencia lineal de $\{e_A \mid A\in\wp(N)_0\}$.

$\sum_{A\in\wp(N)_0}\lambda_A e_A=0\Rightarrow \sum_{A\in\wp(N)_0}\lambda_A e_j e_A e_j^{-1}=\sum_{A\in\wp(N)_0}\varepsilon_{A,j}\lambda_A e_A=0$, donde

$$\varepsilon_{A,j}=\begin{cases} 1 \text{ si } e_je_A=e_Ae_j,\\ -1 \text{ si } e_je_A=-e_Ae_j,\end{cases}.$$

De aquí se deduce que: $\sum_{A\in\wp^*(N)_0}\lambda_A e_A=0$, donde:

$\wp^*(N)_0=\{e_A \mid A\in\wp(N)_0 \text{ y } e_je_A=e_Ae_j \text{ para cada } j\in N\}$.

Si n es par se tiene: $\wp^*(N)_0=\{\emptyset\}$ lo que implica que $\lambda_\emptyset=0$ y esto a su vez implica que $\mathbf{A}$ es una base. Si n es impar se tiene: $\wp^*(N)_0=\{\emptyset,N\}$ lo que implica que $\lambda_\emptyset+\lambda_N e_N=0$. Supongamos que $e_N\notin\mathbb{R}$ entonces se tiene que $\lambda_N=0$ (Al suponer $\lambda_N\neq 0$ se concluye que $e_N\in\mathbb{R}$) y de aquí $\lambda_\emptyset=0$. Por lo tanto el conjunto $\mathbf{A}$ es una base. Finalmente supongamos que $e_N\in\mathbb{R}$, en este caso también se tiene $e_N=\pm1$, y para cada $A\in\wp(N)_0$, con cardinalidad impar, se tiene:

$$e_A=\pm e_{N\setminus A}.$$

Por lo hecho en el caso impar se sigue que el conjunto $\{e_A \mid A\in\wp(N)_0,\ \#A \text{ par}\}$ es un conjunto maximal linealmente independiente de $\{e_A \mid A\in\wp(N)_0\}$. En este caso $\dim\mathcal{C}(\mathcal{X})=2^{n-1}$.

■

El teorema anterior nos dice que la $\dim \mathcal{C}(\mathcal{X}) = 2^{n-1}$ ó $\dim \mathcal{C}(\mathcal{X}) = 2^n$ esto permite la siguiente definición.

Definición 31 *Sea $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ una álgebra de Clifford para un espacio $(\mathcal{X},\mathcal{B})$ ortogonal, no degenerado n dimensional de signatura (p,q). Si $\dim \mathcal{C}(\mathcal{X}) = 2^n$ entonces $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ es llamada una* ***Álgebra de Clifford universal*** *para el espacio$(\mathcal{X},\mathcal{B})$. Si $\dim \mathcal{C}(\mathcal{X}) = 2^{n-1}$ entonces $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ es llamada una álgebra de Clifford no universal para el espacio $(\mathcal{X},\mathcal{B})$.*

Teorema 32 *Sea $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ una álgebra de Clifford para el espacio ortogonal real $(\mathcal{X},\mathcal{B})$ y sea W un subespacio no-degenerado de $\mathcal{X}$. Entonces la subálgebra de $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ generada por W es una álgebra de Clifford para W.*

En este trabajo no demostraremos la existencia de las Álgebras de Clifford para un espacio ortogonal real de dimensión finita. A continuación demostramos la unicidad de una Álgebra Universal de Clifford de un espacio ortogonal real de dimensión finita.

Teorema 33 *Sea $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ una Álgebra de Clifford para un espacio $(\mathcal{X},\mathcal{B})$ ortogonal, no degenerado n dimensional, y $\dim \mathcal{C}(\mathcal{X}) = 2^n$, y sea $\mathcal{C}(\mathcal{Y})$ una álgebra de Clifford para un espacio $(\mathcal{Y},\mathcal{B}')$ ortogonal. Suponga que $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ es un mapeo ortogonal; entonces existe un único morfismo de álgebras $\varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{X})} : \mathcal{C}(\mathcal{X}) \to \mathcal{C}(\mathcal{Y})$ tal que mapea $1_{\mathcal{C}(\mathcal{X})}$ a $1_{\mathcal{C}(\mathcal{Y})}$ y un único morfismo reverso de álgebras $\varphi^{\sim}_{\mathcal{C}(\mathcal{X})} : \mathcal{C}(\mathcal{X}) \to \mathcal{C}(\mathcal{Y})$ tal que mapea $1_{\mathcal{C}(\mathcal{X})}$ a $1_{\mathcal{C}(\mathcal{Y})}$ y que hacen que los siguientes diagramas sean conmutativos:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{Y} \\ \downarrow^{inc} & & \downarrow^{inc} \\ \mathcal{C}(\mathcal{X}) & \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{X})}} & \mathcal{C}(\mathcal{Y}) \end{array},$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{Y} \\ \downarrow^{inc} & & \downarrow^{inc} \\ \mathcal{C}(\mathcal{X}) & \xrightarrow{\varphi^{\sim}_{\mathcal{C}(\mathcal{X})}} & \mathcal{C}(\mathcal{Y}) \end{array}$$

Nota: *Un morfismo de álgebras $\varphi : A \to A'$ satisface la condición $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ y si es morfismo reverso de álgebras cumple $\varphi(ab) = \varphi(b)\varphi(a)$*

Demostración

Sea $e = \{e_i\}$ una base ortogonal de $(\mathcal{X},\mathcal{B})$. Por lo tanto el conjunto $\mathbf{A}=\{e_A \mid A \in \wp(N)_0\}$

es una base de $\mathcal{C}(\mathcal{X})$. Sea $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un mapeo lineal ortogonal. Primero construimos un morfismo de álgebras $\varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{X})}$ que cumpla las condiciones pedidas.

Sea $\varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{X})}(e_A) := \begin{cases} \prod\limits_{i\in A} \varphi'(e_i) \text{ si } A \neq \emptyset, \\ 1_{\mathcal{C}(\mathcal{Y})} \text{ si } A = \emptyset. \end{cases}$ esta función se extiende por linealidad a todo $\mathcal{C}(\mathcal{X})$. Observemos que: $\varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{X})}(e_i) = \varphi(e_i)$ para $i \in N$ y de este hecho se obtiene la conmutatividad del diagrama.

Antes de probar que $\varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{X})}$ es un mapeo de álgebras, supongamos que existe φ' un morfismo de álgebras que cumple las condiciones pedidas; entonces por hipótesis se tiene lo siguiente: $\varphi'(e_A) = \begin{cases} \prod\limits_{i\in A} \varphi'(e_i) \text{ si } A \neq \emptyset, \\ 1_{\mathcal{C}(\mathcal{Y})} \text{ si } A = \emptyset. \end{cases}$ y $\varphi'(e_i) = \varphi(e_i)$, por lo tanto se tiene la unicidad de $\varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{X})}$.

Ahora damos la prueba de que $\varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{X})}(e_i)$ es un morfismo lineal de álgebras y para esto basta demostrar la igualdad $\varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{X})}(e_A e_B) = \varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{X})}(e_A)\varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{X})}(e_B)$ para $A, B \in \wp(N)_0$.

Supongamos que $i \in N$ y $i \notin A$ para $A \in \wp(N)_0$.

$\varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{X})}(e_A e_i) = (-1)^{\sigma}\varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{X})}(e_{A'})$; donde A' es el conjunto ordenado igual a $A \cup \{i\}$ y σ es el número de transposiciones de la permutación:

$$\pi = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_s & i \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 & \dots & \alpha'_s & \alpha'_{s+1} \end{pmatrix},$$

y $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$, $A' = \{\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{s+1}\}$.

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{X})}(e_A e_i) &= (-1)^{\sigma}\varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{X})}(e_{A'}) = (-1)^{\sigma}\prod_{j\in A'}\varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{X})}(e_j) = \\ & (-1)^{\sigma}\prod_{j\in A}\varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{X})}(e_j)(-1)^{\sigma'}\varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{X})}(e_i), \end{aligned}$$

donde σ' es el número de transposiciones de la permutación:

$$\pi' = \begin{pmatrix} \alpha'_1 & \alpha'_2 & \dots & \alpha'_s & \alpha'_{s+1} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_s & i \end{pmatrix},$$

por lo cual se obtiene $\varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{X})}(e_A e_i) = (-1)^{\sigma+\sigma'} \prod\limits_{j\in A} \varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{X})}(e_j)\varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{X})}$, pero $\sigma = \sigma'$, luego entonces: $\varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{X})}(e_A e_i) = \prod\limits_{j\in A} \varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{X})}(e_j)\varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{X})}(e_i)$.

De forma análoga se prueba: $\varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{X})}(e_A e_i) = \prod\limits_{j\in A} \varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{X})}(e_j)\varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{X})}(e_i)$ cuando $i \in A$.

Usando lo anterior se logra demostrar lo deseado, es decir, $\varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{X})}(e_A e_B) = \varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{X})}(e_A)\,\varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{X})}(e_B)$ para $A, B \in \wp(N)_0$.

Para el morfismo reverso $\varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{X})}^{\sim}$ la construcción es similar.

■

Corolario 34 *Bajo las mismas hipótesis del teorema anterior con la condición adicional de que φ es un isomorfismo, es decir, los espacios ortogonales $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ y $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}^*)$ son isomorfos y $\dim \mathcal{C}(\mathcal{Y}) = 2^n$, se tiene que $\mathcal{C}(\mathcal{X}) \cong \mathcal{C}(\mathcal{Y})$ como álgebras.*

Demostración

Siguiendo la notación de la demostración del teorema anterior se obtiene que $\{\varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{X})}(e_i)\}$ es una base ortonormal de $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}^*)$ y por lo tanto $\varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{X})}(e_A)$ es una base de $\mathcal{C}(\mathcal{Y})$ por lo cual $\mathcal{C}(\mathcal{X}) \cong \mathcal{C}(\mathcal{Y})$.

■

El corolario anterior contiene la unicidad del álgebra universal de Clifford para el espacio ortogonal $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ al tomar $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ y $\mathcal{B} = \mathcal{B}^*$.

El espacio vectorial $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ con signatura (p, q) es isomorfo a $\mathbb{R}^{p,q}$, y su álgebra de Clifford universal es isomorfa al álgebra de Clifford Universal de $\mathbb{R}^{p,q}$, que denotamos con $\mathbb{R}_{p,q}$. Por esta razón nosotros denotamos a la única álgebra universal de $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ como $\mathbb{R}_{p,q}$ y le llamamos de signatura (p, q).

1.2.4. s-Vectores e involuciones en $\mathbb{R}_{p,q}$.

En esta parte expresamos a una álgebra de Clifford como un espacio vectorial graduado, lo cual permite definir operaciones relacionadas con dicha graduación.

A los elementos del espacio vectorial generado por $\{e_A \mid A \in \wp(N)_0, \#A = s\}$ se le llama $s-$**vectores** y es denotado por $\mathbb{R}^s_{p,q}$, es claro que $\dim\left(\mathbb{R}^s_{p,q}\right) = \binom{n}{s}$.

(1) $\mathbb{R}^0_{p,q}$ es un espacio 1-dimensional de 0-vectores . Una base para $\mathbb{R}^0_{p,q}$ está dada por $\{1\}$, y sus elementos son llamados escalares.

(2) $\mathbb{R}^1_{p,q}$ es un espacio n-dimensional de 1-vectores. Puede ser identificado con $\mathbb{R}^{p,q}$ y sus elementos son llamados vectores.

(3) $\mathbb{R}^n_{p,q}$ es un espacio 1-dimensional de n-vectores. Una base para $\mathbb{R}^n_{p,q}$ está dada por $\{e_N\}$ el elemento básico e_N es llamado pseudoescalar.

Por lo ya dicho, $a \in \mathbb{R}_{p,q}$ suele ser llamado **multivector** y puede ser escrito:

$$\begin{aligned} a &= \sum_{r=1}^{n} a_r, \quad a_r \in \mathbb{R}^r_{p,q} \\ a &= \sum_{A \in \wp(N)_0} \lambda_A e_A \quad \lambda_A \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathbb{R}_{p,q} = \bigoplus_{s=1}^{n} \mathbb{R}_{p,q}^{s}.$$

De lo anterior se observa fácilmente que la siguiente función, de $\mathbb{R}_{p,q}$ sobre $\mathbb{R}_{p,q}^{r}$. es una proyección:

$$\langle a \rangle_r = a_r,$$

de $\mathbb{R}_{p,q}$ sobre $\mathbb{R}_{p,q}^{r}$.

Para simplificar la notación los vectores, es decir, los elementos de $\mathbb{R}^{p,q}$, los denotaremos con letras latinas minúsculas y a los multivectores con letras latinas mayúsculas. En caso de que el multivector A sea un *r-vector* lo denotaremos con $A = A_r$.

1.2.5. Productos interno y externo

Para $v, w \in \mathbb{R}^{p,q}$, su producto vw puede ser visto de la forma:

$$vw = \frac{1}{2}(vw + wv) + \frac{1}{2}(vw - wv),$$

si definimos

$$\begin{aligned} v \cdot w &= \frac{1}{2}(vw + wv), \\ v \wedge w &= \frac{1}{2}(vw - wv), \end{aligned}$$

observamos que $v \cdot w$ es un escalar y, aún más, $v \cdot w = \mathcal{B}(v, w)$. Los vectores v, w son ortogonales si sólo si $vw = -wv$, lo cual sugiere la equivalencia entre ortogonalidad y anticonmutatividad entre vectores. El producto $\wedge$ es antisimétrico y es un bivector. Los vectores v, w son colineales si y sólo si $vw = wv$, lo cual sugiere la equivalencia entre dependencia lineal y conmutatividad entre vectores.

También se tiene la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} vw &= v \cdot w + v \wedge w \\ &= \langle vw \rangle_0 + \langle vw \rangle_2 \end{aligned}$$

con esto podemos extender los productos interno y externo para $r-$ y $s-$vectores arbitrarios.

Definición 35 *Sea $A_r \in \mathbb{R}_{p,q}^{r}$ y $B_s \in \mathbb{R}_{p,q}^{s}$; los* ***productos interno y exterior*** *están dados por:*

$$\begin{aligned} A_r \cdot B_s &= \begin{cases} \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|}, & si\ r, s > 0, \\ 0, & si\ r = 0\ o\ s = 0. \end{cases} \\ A_r \wedge B_s &= \langle A_r B_s \rangle_{r+s} \end{aligned}$$

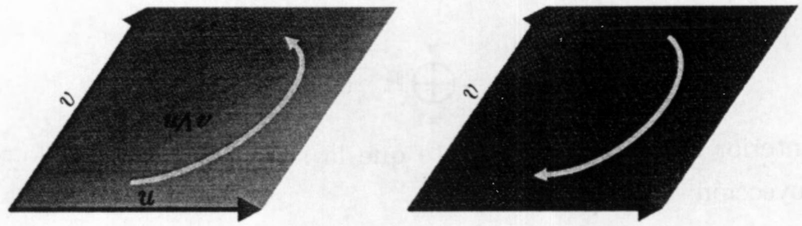


Figura 2 La interpretación geométrica del producto externo de dos vectores es el paralelogramo orientado generado por dos vectores. Geométricamente $u \wedge v$ y $v \wedge u$. son dos paralelogramos congruentes pero con diferente orientación

para multivectores A, B se tiene:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \sum_{k,l=1}^{n} \langle A \rangle_k \cdot \langle B \rangle_l , \\ a \wedge b &= \sum_{k,l=1}^{n} \langle A \rangle_k \wedge \langle B \rangle_l . \end{aligned}$$

Definición 36 *Un multivector A_r es llamado **r-vector simple** si éste puede ser factorizado como producto de vectores anticonmutativos, es decir, existen vectores a_1, $a_2, \ldots, a_r$ tales que:*

$$A_r = a_1 a_2 \cdots a_r,$$

donde: $a_j a_k = -a_k a_j$, para $j, k = 1, 2, \ldots, r$ y $j \neq k$.

Lema 37 *Sea a un vector y $A_r = a_1 a_2 \cdots a_r$ un r-vector simple. Entonces se tiene:*

$$a \cdot A_r = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k+1} a \cdot a_k \left(a_1 a_2 \cdots \breve{a}_k \cdots a_r \right), \tag{1.3}$$

donde $\breve{a}_k$ significa que el factor es omitido.

Teorema 38 *Sea a un vector y A_r un r-vector. Entonces, se tiene:*

$$a \cdot A_r = \langle a A_r \rangle_{r-1} = \frac{1}{2} \left(a A_r - (-1)^r A_r a \right), \tag{1.4}$$

$$a \wedge A_r = \langle a A_r \rangle_{r+1} = \frac{1}{2} \left(a A_r + (-1)^r A_r a \right), \tag{1.5}$$

$$a A_r = a \cdot A_r + a \wedge A_r = \langle a A_r \rangle_{r-1} + \langle a A_r \rangle_{r+1} . \tag{1.6}$$

Las demostraciones del lema y el teorema anteriores pueden ser encontrados en [H2].

Definición 39 *Un multivector A_+ (A_-) es llamado par (impar) si cada una de sus partes r vectoriales son pares (impares). Lo que es equivalente a:*

$$\langle A_+\rangle_r = 0, \text{ para cada } r \text{ impar,}$$
$$\langle A_-\rangle_r = 0, \text{ para cada } r \text{ par.}$$

Por la anterior definición cualquier multivector se puede escribir en la forma:

$$A = A_+ + A_-. \tag{1.7}$$

donde A_+ es un multivector par y es llamado la parte par de A. Análogamente con A_-.

De la distributividad se tiene:

$$a \cdot A_+ = \frac{1}{2}(aA_+ - A_+a), \tag{1.8}$$
$$a \wedge A_+ = \frac{1}{2}(aA_+ + A_+a), \tag{1.9}$$
$$a \cdot A_- = \frac{1}{2}(aA_- + A_-a) \tag{1.10}$$
$$a \wedge A_- = \frac{1}{2}(aA_- - A_-a) \tag{1.11}$$

La suma de estas expresiones da lugar a la siguiente fórmula para cualquier vector a y para cualquier multivector A.

$$aA = a \cdot A + a \wedge A \tag{1.12}$$

Teorema 40 *Sea $A_r = a_1a_2\cdots a_r$ uo r-vector simple y sea a un vector, entonces, a es una combinación lineal del conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ si y sólo si $a \wedge A_r = 0$.*

Demostración

El multivector A facilita la descomposición del vector b en sus componentes ortogonales al subespacio $\mathcal{G}^1(A_n)$; esto es:

$b = bAA^{-1} = (b \cdot A)A^{-1} + (b \wedge A)A^{-1}$, entonces:

$b = b_\parallel + b_\perp$, donde:

$$b_\parallel = P_A(b) = (b \cdot A)A^{-1} \tag{1.13}$$

$$b_\perp = P_A^\perp(b) = (b \wedge A)A^{-1}, \tag{1.14}$$

es fácil verificar que $b_\parallel A = b \cdot A$ y $b_\parallel \wedge A = 0$ y que $b_\perp A = b \wedge A$ y $b_\perp \cdot A = 0$, es decir $b_\perp$ es ortogonal a cada vector en $\mathcal{G}^1(A_n)$.

Definición 41 *Un conjunto de vectores* $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *es llamado un* ***marco de referencia*** *si* $A = a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n \neq 0$.

La condición anterior es equivalente a pedir que los vectores sean linealmente independientes.

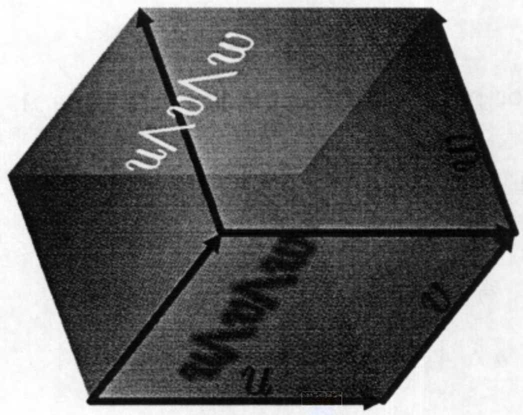


Figura 3 La interpretación geométrica del producto externo de tres vectores, es el paralelepípedo orientado, generado por los tres vectores.

Un concepto importante en cristalografía es el de marco de referencia recíproco y este queda definido de la siguiente manera.

Definición 42 *Sea* $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *un marco de referencia. El marco de referencia* $\{a^1, a^2, \ldots, a^n\}$ *es llamado su* ***marco de referencia recíproco*** *si se cumple:*

$$a_i a^k = \delta_{ik}.$$

El marco de referencia recíproco está dado por:

$$a^k = (-1)^{k-1} a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge \check{a}_k \wedge \cdots \wedge a_n A_n^{-1}.$$

La notación $\check{a}_k$ indica que el factor a_k se omite.

El marco de referencia recíproco nos ayuda, como veremos más adelante, para encontrar la matriz asociada a una transformación lineal y para encontrar el determinante; mientras tanto damos otros resultados.

Supongamos que $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ es un marco de referencia y sea a un vector en el espacio generado por este marco de referencia. Un problema básico es encontrar los escalares β_k tales que:

$$a = \sum_{k=1}^{n} \beta_k a_k. \tag{1.15}$$

La solución está dada por:

$$\beta_k = \frac{a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_{k-1} \wedge a \wedge a_{k+1} \wedge \cdots \wedge a_n}{a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n},$$

La anterior relación también resuelve el siguiente sistema de n ecuaciones

$$\alpha^j = \sum_{k=1}^{n} b_k^j \beta^k,$$

pues el sistema se puede plantear como la ecuación vectorial dada en (1.15).

Una matriz $n \times n$ con entradas β_k^j determina un operador lineal T de $\mathcal{G}^1(A_n)$ dada por

$$T(a_k) = \sum_{j=1}^{n} \beta_k^j a_j,$$

de manera recíproca, un operador ortogonal determina una matriz dada por

$$\beta_k^j = a^j \cdot T(a_k),$$

donde $\{a^j\}$es el marco de referencia recíproco de $\{a_k\}$.

El determinantede la transformación es por definición el determinante de su matriz asociada con respecto a un marco de referencia, y su fórmula es:

$$\det T = \det \beta_k^j = \left(a^1 \wedge a^2 \wedge \cdots \wedge a^n\right) \cdot (a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n).$$

Capítulo 2
ALGORITMO DEL TEOREMA DE CARTAN-DIEUDONNÉ

En este capítulo trabajaremos las transformaciones ortogonales desde la óptica de las álgebras de Clifford. Algunas proposiciones ya han sido demostradas anteriormente en el capítulo 1, pero en este capítulo las enunciaremos nuevamente y daremos pruebas usando este lenguaje matemático.

2.1. Reflexiones a través de hiperplanos

Uno de los principales objetivos de construir las Álgebras de Clifford es tener una multiplicación de vectores y tratar de generalizar los resultados obtenidos en los complejos y en los cuaternios en lo concerniente a las rotaciones.

Definición 43 *Una transformación ortogonal es una transformación lineal* $T : \mathbb{R}^{p,q} \longrightarrow \mathbb{R}^{p,q}$ *tal que* $\mathcal{B}(T(x), T(y)) = \mathcal{B}(x, y)$.

Definición 44 *Sea* $s \in \mathbb{R}^{p,q}$ *un vector invertible. Definimos* $\varphi_s : \mathbb{R}^{p,q} \longrightarrow \mathbb{R}^{p,q}$ *como:*

$$\varphi_s(x) = -sxs^{-1}.$$

La definición asume que $\varphi_s(x) \in \mathbb{R}^{p,q}$, para cada $x \in \mathbb{R}^{p,q}$. En efecto:

$$\begin{aligned} sxs &= \frac{1}{2}(sx + xs + (sx - xs))s \\ &= \frac{1}{2}(2\mathcal{B}(x,s) + sx - xs)s \\ &= \mathcal{B}(x,s)s + \frac{1}{2}sxs - \frac{1}{2}xs^2. \end{aligned}$$

De la última igualdad se tiene que:

$$\begin{aligned} sxs &= 2\mathcal{B}(x,y)s - xs^2, \\ -sxs^{-1} &= -\frac{2\mathcal{B}(x,y)}{s^2}s + x \in \mathbb{R}^{p,q}. \end{aligned}$$

Lema 45 *Sea s un vector invertible en $\mathbb{R}^{p,q}$. La función $\varphi_s : \mathbb{R}^{p,q} \to \mathbb{R}^{p,q}$, definida como $\varphi_s(x) = -sxs^{-1}$ es una transformación ortogonal. Aún más, es una reflexión respecto al hiperplano $H_s = \{x \in \mathbb{R}^{p,q} \mid \mathcal{B}(x,s) = 0\}$.*

Demostración

La linealidad de la función $\varphi_s(x) = -sxs^{-1}$ se sigue de las propiedades del producto. Sean $x, y \in \mathbb{R}^{p,q}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(\varphi_s(x), \varphi_s(y)) &= \mathcal{B}\left(-sxs^{-1}, -sys^{-1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(-sxs^{-1}\right)\left(-sys^{-1}\right) + \left(-sys^{-1}\right)\left(-sxs^{-1}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}s(xy + yx)s^{-1} = s\mathcal{B}(x,y)s^{-1} \\
&= \mathcal{B}(x,y).
\end{aligned}$$

Sea ahora $x \in H_s$. Entonces

$$\varphi_s(x) = -sxs^{-1} = -\frac{2\mathcal{B}(x,s)}{s^2}s + x = x.$$

Sea $x \in \operatorname{gen}\{s\}$, donde $\operatorname{gen}\{s\}$ es el conjunto generado por el vector s. Entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $x = \lambda s$ y

$$\varphi_s(x) = -s(\lambda s)s^{-1} = -\lambda s = -x.$$

Por lo anterior se deduce que φ_s es una reflexión respecto al hiperplano H_s.

∎

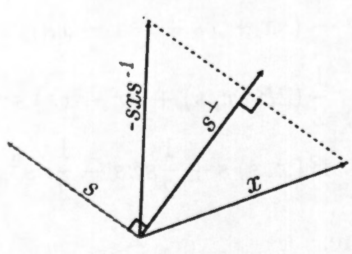


Figura 1 Procedimiento, en el plano, para calcular $-sxs^{-1}$

Observaciones:

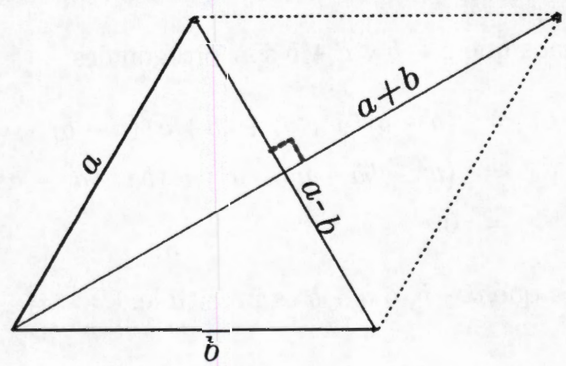
La función $\varphi_s(x) = -sxs^{-1}$ satisface lo siguiente:

1. $\varphi_s = \varphi_{\lambda s}$ para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $\lambda \neq 0$.

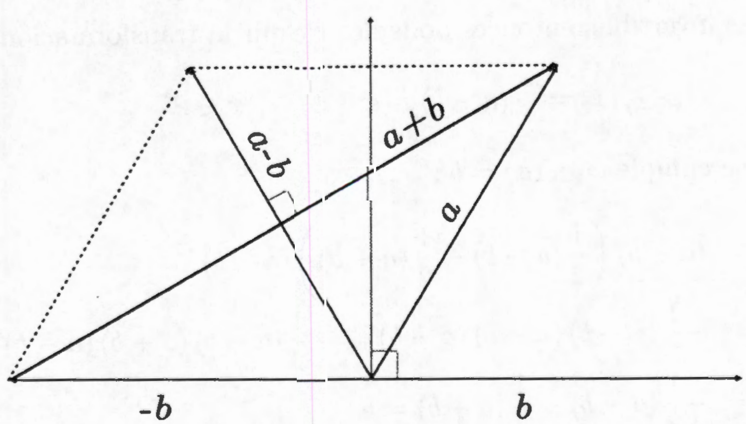
2. La función inversa de φ_s es φ_s, esto es,
$$\varphi_s^{-1} = \varphi_s.$$

3. Debido a que las transformaciones ortogonales forman un grupo, entonces:
$$\varphi_{s_1}\varphi_{s_2}\cdots\varphi_{s_k}(x) = (-1)^k s_1 s_2 \cdots s_{k-1} s_k x s_k^{-1} s_{k-1}^{-1} \cdots s_2^{-1} s_1^{-1}$$
es una transformación ortogonal para $s_i \in \mathbb{R}^{p,q}$, $s_i^2 \neq 0$.

El siguiente lema se puede visualizar con un hecho meramente geométrico: "Las diagonales de un rombo son perpendiculares y se cortan en su punto medio". Consideremos dos vectores a, b con la misma norma, y analizemos la siguiente figura:



Como las diagonales de un rombo son perpendiculares, y se cortan en su punto medio, entonces al reflejar el vector a respecto a la diagonal $a+b$ obtenemos el vector b. Al analizar la siguiente figura:



Nos percatamos que al reflejar al vector a a través de la diagonal $a-b$, se obtiene $-b$ y al reflejar $-b$ a través del vector c (perpendicular al vector b), se obtiene b.

En resumen el vector b se puede obtener reflejando al vector a una o dos veces.

Lema 46 *Sea $C(\mathcal{X})$ una álgebra de Clifford Universal para un espacio ortogonal, no degenrado $(\mathcal{X},\mathcal{B})$, n dimensional de signatura (p,q). Si $a,b\in\mathcal{X}$ son invertibles y además $a^2=b^2\neq 0$, entonces existe una transformación ortogonal $\varphi:\mathcal{X}\to\mathcal{X}$, tal que $\varphi(a)=b$.*

Demostración

Para el caso en que $a=b$ basta tomar $\varphi=I$, donde I es la función identidad de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{X}$.

El caso de que $a\neq b$ haremos una generalización de las observaciones hechas anteriormente.

Primero probaremos que $a-b$ y $a+b$ son ortogonales:

$$\begin{aligned}2\mathcal{B}(a-b,a+b) &= (a-b)(a+b)+(b+a)(a-b)\\ &= \left(a^2-ba+ab-b^2\right)+\left(ba+a^2-ab-b^2\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Ahora probaremos que $a-b$, o $a+b$ es invertible:

$$\begin{aligned}(a+b)^2+(a-b)^2 &= \left(a^2+ab+ba+b^2\right)+\left(a^2-ab-ba+b^2\right)\\ &= 4a^2\neq 0.\end{aligned}$$

La igualdad anterior garantiza que $a-b$ o $a+b$ es invertible.

Si $(a-b)$ es invertible, entonces podemos definir la transformación ortogonal

$$\varphi_{a-b}(x)=-(a-b)\,x\,(a-b)^{-1},\ x\in\mathcal{X}$$

Verifiquemos que se cumple $\varphi_{a-b}(a)=b$:

$$\begin{aligned}\varphi_{a-b}(a) &= (a-b)\left(\frac{1}{2}(a-b)+\frac{1}{2}(a+b)\right)(a-b)^{-1}\\ &= -\frac{1}{2}(a-b)(a-b)(a-b)^{-1}-\frac{1}{2}(a-b)(a+b)(a-b)^{-1}\\ &= -\frac{1}{2}(a-b)+\frac{1}{2}(a+b)=b.\end{aligned}$$

En caso de que $(a-b)^2 = 0$, entonces $(a+b)$ es invertible y podemos definir la siguiente transformación ortogonal:

$$\varphi_b\varphi_{a+b}(x) = b(a+b)\,x\,(a+b)^{-1}\,b^{-1}.$$

Verifiquemos que se cumple $\varphi_b\varphi_{a+b}(a) = b$:

$$\begin{aligned}
\varphi_b\varphi_{a+b}(a) &= b(a+b)\left(\frac{1}{2}(a-b)+\frac{1}{2}(a+b)\right)(a+b)^{-1}b^{-1} \\
&= b\left(\frac{1}{2}(a+b)((a-b))(a+b)^{-1}+\frac{1}{2}(a+b)(a+b)(a+b)^{-1}\right)b^{-1} \\
&= b\left(-\frac{1}{2}(a-b)+\frac{1}{2}(a+b)\right)b^{-1} \\
&= bbb^{-1} = b.
\end{aligned}$$

En resumen, podemos expresar a φ como sigue:

$$\varphi = \begin{cases} I, & \text{si } a = b, \\ \varphi_{a-b}, & \text{si } a \neq b \text{ y } (a-b)^2 \neq 0, \\ \varphi_b\varphi_{a+b}, & \text{si } a \neq b \text{ y } (a-b)^2 = 0. \end{cases}$$

■

A continuación se presenta una demostración constructiva del teorema de Cartan-Dieudonné. Se obtendrán esencialmente dos algoritmos.

Lema 47 *Cualquier transformación ortogonal sobre el espacio ortogonal $(\mathcal{X},\mathcal{B})$, no degenerado n dimensional de signatura (p,q), se puede expresar como la composición de a lo más $2n$ reflexiones a través de hiperplanos.*

Demostración

Sea una transformación ortogonal $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, sobre el espacio $(\mathcal{X},\mathcal{B})$ ortogonal no degenerado n dimensional de signatura (p,q).

Sea $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ una base ortogonal de $(\mathcal{X},\mathcal{B})$ tal que $w_i^2 \neq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Se definen los siguientes subespacios:

$$V_j = \text{gen}\{w_j, w_{j+1}, \ldots, w_n\}, \text{ para } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Consideremos a $T(w_1)$ y w_1, y definamos la función $\varphi_1 : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, como:

$$\varphi_1 = \begin{cases} I, & \text{si } T(w_1) = w_1, \\ \varphi_{c_1} & \text{si } T(w_1) \neq w_1 \text{ y } (T(w_1) - w_1)^2 \neq 0, \\ \varphi_{w_1}\varphi_{d_1}, & \text{si } T(w_1) \neq w_1 \text{ y } (T(w_1) - w_1)^2 = 0, \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} c_1 &= T(w_1) - w_1, \\ d_1 &= T(w_1) + w_1. \end{aligned}$$

φ_1 satisface:

$$\begin{aligned} \varphi_1 T(w_1) &= w_1, \\ \varphi_1 T(V_2) &\subset V_2. \end{aligned}$$

Consideremos ahora a $\varphi_1 T(w_2)$ y w_2, y definamos la función $\varphi_2 : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ como:

$$\varphi_2 = \begin{cases} I, & \text{si } \varphi_1(T(w_2)) = w_2, \\ \varphi_{c_2}, & \text{si } \varphi_1 T(w_2) \neq w_2 \text{ y } (\varphi_1 T(w_2) - w_2)^2 \neq 0, \\ \varphi_{w_2}\varphi_{d_2}, & \text{si } \varphi_1(T(w_1)) \neq w_1 \text{ y } (\varphi_1 T(w_2) - w_2)^2 = 0, \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} c_2 &= \varphi_1 T(w_2) - w_2, \\ d_2 &= \varphi_1 T(w_2) + w_2. \end{aligned}$$

De antemano sabemos que $\varphi_2\varphi_1 T(w_2) = w_2$, y como $c_2, d_2 \in V_2$ entonces es fácil probar que $\varphi_2\varphi_1 T(w_1) = w_1$. En resumen tenemos que:

$$\begin{aligned} \varphi_2\varphi_1 T(w_i) &= w_i \text{ para } i = 1, 2, \\ \varphi_2\varphi_1 T(V_3) &\subset V_3. \end{aligned}$$

Consideremos a $\varphi_2\varphi_1 T(w_3)$ y w_3 y definamos la función $\varphi_3 : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ como:

$$\varphi_3 = \begin{cases} I, & \text{si } \varphi_2\varphi_1(T(w_3)) = w_3, \\ \varphi_{c_3}, & \text{si } \varphi_2\varphi_1 T(w_3) \neq w_3 \text{ y } (\varphi_2\varphi_1 T(w_3) - w_3)^2 \neq 0, \\ \varphi_{w_3}\varphi_{d_3}, & \text{si } \varphi_1(T(w_3)) \neq w_3 \text{ y } (\varphi_2\varphi_1 T(w_3) - w_3)^2 = 0, \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} c_3 &= \varphi_2\varphi_1 T(w_3) - w_3, \\ d_3 &= \varphi_2\varphi_1 T(w_3) + w_3. \end{aligned}$$

De antemano sabemos que $\varphi_3\varphi_2\varphi_1 T(w_2) = w_2$, y como $c_3, d_3 \in V_3$ entonces es fácil probar que $\varphi_2\varphi_1 T(w_i) = w_i$ para $i = 1, 2, 3$. En resumen tenemos que:

$$\begin{aligned} \varphi_3\varphi_2\varphi_1 T(w_i) &= w_i \text{ para } i = 1, 2, 3, \\ \varphi_3\varphi_2\varphi_1 T(V_4) &\subset V_4. \end{aligned}$$

Para simplificar la escritura se introduce ahora la siguiente notación:

$$\Phi_k = \varphi_k\varphi_{k-1}\cdots\varphi_1, \text{ para } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Siguiendo el mismo procedimiento podemos obtener $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ transformaciones ortogonales tales que:

$$\begin{aligned} \Phi_k T(w_i) &= w_i \text{ para } i = 1, 2, \ldots, k, \\ \Phi_k T(V_{k+1}) &\subset V_{k+1}, \end{aligned}$$

es decir:

$$\Phi_n T(w_i) = w_i \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.1}$$

Donde:

$$\varphi_{k+1} = \begin{cases} I, & \text{si } \Phi_k T(w_{k+1}) = w_{k+1}, \\ \varphi_{c_{k+1}}, & \text{si } \Phi_k T(w_{k+1}) \neq w_{k+1} \text{ y } (\Phi_k T(w_{k+1}) - w_{k+1})^2 \neq 0, \\ \varphi_{w_{k+1}}\varphi_{d_{k+1}}, & \text{si } \Phi_k (T(w_{k+1})) \neq w_{k+1} \text{ y } (\Phi_k T(w_{k+i}) - w_{k+1})^2 = 0, \end{cases}$$

y además:

$$\begin{aligned} c_{k+1} &= \Phi_k T(w_{k+1}) - w_{k+1}, \\ d_{k+1} &= \Phi_k T(w_{k+1}) + w_{k+1}. \end{aligned}$$

De (2.1) obtenemos lo siguiente:

$$T = \varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1}\cdots\varphi_n^{-1}$$

y cada φ_k^{-1} es una reflexión a través de un hiperplano o la composición de dos de éstas, por lo cual T es la composición de a lo más $2n$ reflexiones a través de hiperplanos.

■

Corolario 48 *Sea T una transformación ortogonal sobre el espacio $(\mathcal{X},\mathcal{B})$, ortogonal no degenerado n dimensional y de signatura (p,q). Entonces existen $a_1, a_2, \ldots, a_s \in \mathcal{X}$ invertibles, con $s \leq 2n$ tales que:*

$$T(x) = (-1)^s a_1 a_2 \cdots a_s x a_s^{-1} \cdots a_2^{-1} a_1^{-1}, \ x \in \mathcal{X}$$

Dado que un caso especial de las formas bilineales es el producto interno, que es una forma bilineal no degenerada de signatura $(n, 0)$, tenemos lo siguiente.

Corolario 49 *Cualquier transformación ortogonal sobre el espacio* $(\mathcal{X},\mathcal{B})$, *ortogonal no degenerado* n *dimensional y de signatura* $(n,0)$ *o* $(0,n)$, *se puede expresar como la composición de a lo más* n *reflexiones a través de hiperplanos.*

Demostración.

Sólo probaremos el caso en que la forma bilineal es de signatura $(n,0)$. Para el caso de la signatura $(0,n)$ la demostración es análoga.

Sea una transformación ortogonal $T:\mathcal{X}\to\mathcal{X}$, sobre el espacio $(\mathcal{X},\mathcal{B})$, ortogonal no degenerado n dimensional de signatura (p,q). Consideremos una base ortogonal $\{w_1,w_2,\ldots,w_n\}$ de $(\mathcal{X},\mathcal{B})$, tal que $w_i^2\neq 0$ para $i=1,2,\ldots,n$.

Consideremos a $T(w_1)$ y w_1. La función $\varphi_1:\mathcal{X}\to\mathcal{X}$, se define como:

$$\varphi_1=\begin{cases} I, & \text{si } T(w_1)=w_1,\\ \varphi_{c_1}, & \text{si } T(w_1)\neq w_1 \text{ y } (T(w_1)-w_1)^2\neq 0,\\ \varphi_{w_1}\varphi_{d_1}, & \text{si } T(w_1)\neq w_1 \text{ y } (T(w_1)-w_1)^2=0.\end{cases}$$

Por ser $\mathcal{B}$ un producto interno, si $T(w_1)\neq w_1$ entonces $(T(w_1)-w_1)^2>0$, por lo cual φ_1 es de la forma

$$\varphi_1=\begin{cases} I, & \text{si } T(w_1)=w_1,\\ \varphi_{c_1}, & \text{si } T(w_1)\neq w_1 \text{ y } (T(w_1)-w_1)^2\neq 0,\end{cases}$$

En general las funciones φ_k del teorema anterior se pueden reducir a la forma:

$$\varphi_{k+1}=\begin{cases} I, & \text{si } \Phi_k(T(w_{k+1}))=w_{k+1}.\\ -c_{k+1}xc_{k+1}^{-1}, & \text{si } \Phi_kT(w_{k+1})\neq w_{k+1}^2\end{cases}$$

y

$$\varphi_{k+1}^{-1}(x)=\begin{cases} I. & \text{si } \Phi_kT(w_{k+1})=w_{k+1}^2\\ -c_{k+1}xc_{k+1}^{-1}. & \text{si } \Phi_kT(w_{k+1})\neq w_{k+1}^2\end{cases}$$

Por lo cual:

$$T=\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1}\cdots\varphi_n^{-1}=\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_n,$$

y cada φ_k^{-1} es la identidad o una reflexión a través de hiperplanos.

■

Corolario 50 *Sea* T *una transformación ortogonal sobre el espacio* $(\mathcal{X},\mathcal{B})$ *ortogonal, no degenerado* n *dimensional de signatura* $(n,0)$ *o* $(0,n)$. *Entonces existen* $a_1,a_2,\ldots,a_s\in\mathcal{X}$ *invertibles, con* $s\leq n$, *tales que:*

$$T(x)=(-1)^s a_1a_2\cdots a_sxa_s^{-1}\cdots a_2^{-1}a_1^{-1},\ x\in\mathcal{X}.$$

Retomando la idea de la demostración del lema anterior, una inspección a simple vista nos dice que una manera de reducir la cantidad de reflexiones a través de hiperplanos sería la siguiente. Supongamos que se han encontrado $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$, reflexiones a través de hiperplanos, tales que:

$$\begin{aligned} \varphi_k\varphi_{k-1}\cdots\varphi_1 T(w_i) &= w_i \text{ para } i = 1, 2, \ldots, l, \\ \varphi_k\varphi_{k-1}\cdots\varphi_1 T(w_i) &\in \text{gen}\{w_{l+1}, w_{l+2}, \ldots, w_n\} \text{ para } i = l+1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Si existe $w_j \in w_{l+1}, w_{l+2}, \ldots, w_n$ tal que:

$$\begin{aligned} \varphi_k\varphi_{k-1}\cdots\varphi_1 (T(w_l)) &= w_l, \text{ o} \\ \varphi_k\varphi_{k-1}\cdots\varphi_1 T(w_l) &\neq w_{k+1} \text{ y } (\varphi_k\cdots\varphi_1 T(w_l) - w_l)^2 \neq 0, \end{aligned}$$

entonces podemos reordenar los elementos de tal manera que w_{l+1} satisfaga una de las dos condiciones anteriores, por lo cual se tendría que φ_{k+1} es la identidad o una reflexión a través de un hiperplano. Sin embargo el lema 21 del capítulo anterior, nos indica bajo que condiciones puede suceder que ningún elemento de $\{w_{l+1}, w_{l+2}, \ldots, w_n\}$ cumpla con las condiciones antes pedidas y, bajo estas circunstancias, no se puede garantizar que φ_{k+1} sea la identidad o una reflexión a través de un hiperplano. La solución del problema entonces radica en evitar que se cumplan las condiciones del lema 21.

Ahora consideremos una transformación ortogonal $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, con $\mathcal{X}$ de signatura (p, q), tal que $T(x) - x$ es un vector no cero isotrópico para cualquier vector x no isotrópico. Consideremos a la transformación $\varphi_{v_0}(x) = -v_0 x v_0^{-1}$ con $v_0 \in \mathcal{X}$ y la transformación $S = \varphi_{v_0} T \neq I$. Notemos que S no satisface las condiciones del lema 21. Al considerar una base $\{w_1, w_2, \ldots, w_{p+q}\}$ ortogonal de $\mathcal{X}$, la podemos reordenar de tal manera que $S(w_1) - w_1$ no isotrópico. Así que podemos encontrar φ_1 (reflexión a través de hiperplanos o la identidad) tal que:

$$\begin{aligned} \varphi_1 S(w_1) &= w_1, \\ \varphi_1 S(w_i) &\in \text{gen}\{w_2, \ldots, w_{p+q}\}, \end{aligned}$$

La dimensión de $V_2 = \text{gen}\{w_2, \ldots, w_{p+q}\}$ no es múltiplo de 4 y la transformación ortogonal $\varphi_1 S$ restringida a V_1 no satisface las condiciones del lema 21.

Nota: Para ahorrar trabajo de cómputo podemos considerar a

$$\begin{aligned} \varphi_{v_0} &= \varphi_{d_1}, \quad d_1 = T(w_1) + w_1, \\ \varphi_1 &= \varphi_{w_1}, \end{aligned}$$

Como la dimensión de V_2 no es múltiplo de cuatro, entonces podemos encontrar $w_j \in V_2$ tal que

$$\begin{aligned} \varphi_1 S(w_j) - w_j &\neq 0, \text{ no isotrópico o} \\ \varphi_1 S(w_j) - w_j &= 0. \end{aligned}$$

Podemos reordenar la base de V_2 de tal manera que w_2 cumpla con algunas de las condiciones anteriores. Podemos entonces encontrar φ_2, reflexión a través de hiperplanos o la identidad, tal que:

$$\begin{aligned} \varphi_2\varphi_1 S(w_i) &= w_i \text{ para } i = 1, 2, \\ \varphi_2\varphi_1 S(V_3) &\subset V_3. \end{aligned}$$

Este procedimiento se continúa de tal manera que ahora podemos encontrar $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ y φ_4, con φ_i una reflexión a través de hiperplanos o la identidad para $i = 1, 2, 3, 4$, tales que:

$$\begin{aligned} \varphi_4\varphi_3\varphi_2\varphi_1 S(w_i) &= w_i \text{ para } i = 1, 2, 3, 4, \\ \varphi_4\varphi_3\varphi_2\varphi_1 S(V_4) &\subset V_4. \end{aligned}$$

Si ahora consideramos a $\varphi = \varphi_4\varphi_3\varphi_2\varphi_1$, hay dos casos posibles:

1. $\varphi_i \neq I$ para $i = 1, 2, 3, 4$.

   Se tiene que $\det(\varphi S) = -1$, así que φS restringida a V_5 no cumple las condiciones del lema 21 anterior por lo cual podemos encontrar $\varphi_8, \varphi_7, \varphi_6, \varphi_5$ tales que:

   $$\begin{aligned} \varphi_8\varphi_7\varphi_6\varphi_5\, \varphi S(w_i) &= w_i \text{ para } i = 1, 2, \ldots, 8, \\ \varphi_8\varphi_7\varphi_6\varphi_5\, \varphi S(V_8) &\subset V_8. \end{aligned}$$

   Si cada $\varphi_i \neq I$ para $i = 5, 6, 7, 8$, entonces volvemos a tener un caso análogo a uno ya considerado.

2. Si $\varphi_i = I$, para alguna $i = 1, 2, 3, 4$.

   Bajo estas condiciones puede suceder que $\det(\varphi S) = 1$ y $\dim V_5 = 4(k-1)$.

   En el caso de que φS restringida al espacio V_5 no cumpla las condiciones del lema 21, podemos aplicar el proceso descrito en lema anterior, es decir, se puede encontrar φ_5, que es la identidad o una reflexión a través de un hiperplano, tal que:

$$\begin{aligned} \varphi_5\, \varphi S\,(w_i) &= w_i \text{ para } i = 1, 2, \ldots, 5, \\ \varphi_5\, \varphi S\,(w_i) &\in \text{gen}\,\{w_6, w_7, \ldots, w_n\} \text{ para } i > 5. \end{aligned}$$

En el caso de que φS restringida al espacio gen$\{w_5, w_6, \ldots, w_n\}$ cumpla con las condiciones del lema 21, al considerar a $\tau_1 = \varphi_{v_1}$ con $v_1 \in V_5$ se tiene que la transformación $\tau_1 \varphi S$, restringida al espacio V_5, no satisface las condiciones del lema 21, por lo cual se puede encontrar φ_5, qu es la identidad o una reflexión a través de un hiperplano, tal que:

$$\begin{aligned} \varphi_5 \tau_1 \varphi S\,(w_i) &= w_i \text{ para } i = 1, 2, \ldots, 5, \\ \varphi_5\, \tau_1 \varphi S\,(V_6) &\in V_6 \text{ para } i > 5. \end{aligned}$$

Al continuar con el procedimiento anterior, siempre tendremos los casos ya descritos. En resumen para cada $l = 1, 2, 3, \ldots, n$, podemos encontrar $\varphi_s, \varphi_{s-1}, \ldots, \varphi_3, \varphi_2, \varphi_1$ tales que:

$$\varphi_s \varphi_{s-1} \cdots \varphi_3 \varphi_2 \varphi_1 S\,(v_i) = v_i, \text{ para } i = 1, 2, \ldots, l,$$

donde φ_i es una reflexión a través de un hiperplano para $i = 1, 2, \ldots, s$, $s \leq l$ y $\{v_1, \ldots, v_{p+q}\}$ es un reordenamiento de $\{w_1, \ldots, w_n\}$.

En conclusión podemos encontrar $\varphi_s, \varphi_{s-1}, \ldots, \varphi_3, \varphi_2, \varphi_1$ tales que:

$$\varphi_s \varphi_{s-1} \cdots \varphi_3 \varphi_2 \varphi_1 S\,(v_i) = v_i \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n,$$

donde φ_i es una reflexión a través de un hiperplano para $i = 1, 2, \ldots, s$, $s \leq n$ y $\{v_1, \ldots, v_{p+q}\}$ es un reordenamiento de $\{w_1, \ldots, w_{p+q}\}$, es decir:

$$\varphi_s \varphi_{s-1} \cdots \varphi_3 \varphi_2 \varphi_1 S = I.$$

Como $p + q = 4k$ entonces es imposible que $s = p + q$; en efecto:

$$\begin{aligned} \det\left(\varphi_s \varphi_{s-1} \cdots \varphi_3 \varphi_2 \varphi_1 S\right) &= \det(I) \\ \det\left(\varphi_s \varphi_{s-1} \cdots \varphi_3 \varphi_2 \varphi_1\right) \det(S) &= 1, \\ (1)\,(-1) &= 1, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción.

Así que

$$\begin{aligned} \varphi_s\varphi_{s-1}\cdots\varphi_3\varphi_2\varphi_1\tau_0 T &= I, \text{ con } s < n, \\ T &= \tau_0\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_{s-1}\varphi_s. \end{aligned}$$

En conclusión, se ha demostrado el siguiente lema:

Lema 51 *Sea $T : \mathbb{R}^{p,q} \longrightarrow \mathbb{R}^{p,q}$ una transformación ortogonal. Si $T(x)-x$ es un vector no cero isotrópico para cada vector x no isotrópico, entonces T es la composición de a lo más $p+q$ reflexiones a través de hiperplanos.*

El siguiente teorema es conocido como el teorema de Cartan-Diuedonné

Teorema 52 *Sea $T : \mathbb{R}^{p,q} \longrightarrow \mathbb{R}^{p,q}$ una transformación ortogonal. Entonces T es la composición de a lo más $p+q$ reflexiones a través de hiperplanos.*

Demostración Sea $n = p+q$ Consideremos una base ortogonal $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ de $\mathbb{R}^{p,q}$, con $w_i^2 \neq 0$ para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Si existe $w_j \in \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ tal que

$$\begin{aligned} T(w_j) - w_j &= 0 \text{ ó} \\ T(w_j) &\neq w_j \text{ y } (T(w_j) - w_j)^2 \neq 0, \end{aligned}$$

podemos reordenar la base $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ de tal manera que w_1 satisfaga algunas de las condiciones anteriores y podemos encontrar φ_1, que es la identidad o una reflexión a través de un hiperplano, tal que:

$$\begin{aligned} \varphi_1 T(w_1) &= w_1, \\ \varphi_1 T(w_l) &\in \text{gen}\{w_2, w_3, \ldots, w_n\} \text{ para } l = 2, 3, \ldots, n. \end{aligned}$$

Si existe $w_j \in \{w_2, w_3, \ldots, w_n\}$ tal que

$$\begin{aligned} T(w_j) - w_j &= 0 \text{ ó} \\ T(w_j) &\neq w_j \text{ y } (T(w_j) - w_j)^2 \neq 0, \end{aligned}$$

podemos reordenar la base $\{w_2, w_3, \ldots, w_n\}$ de tal manera que w_2 satisfaga algunas de las condiciones anteriores y podemos encontrar φ_2, la identidad o una reflexión a través de un hiperplano tal que:

$$\begin{aligned}\varphi_2\varphi_1 T(w_i) &= w_i \text{ para } i=1,2.\\ \varphi_2\varphi_1 T(V_3) &\subset V_3 \text{ para } l=3,4,\ldots,n.\end{aligned}$$

Supongamos que se han encontrado $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ reflexiones a través de hiperplanos tales que:

$$\begin{aligned}\varphi_k\varphi_{k-1}\cdots\varphi_1 T(w_i) &= v_i \text{ para } i=1,2,\ldots,l; \text{ con } k\leq l\\ \varphi_k\varphi_{k-1}\cdots\varphi_1 T(w_i) &\in \text{gen}\{v_{l+1}, v_{k+2},\ldots,v_n\} \text{ para } i=l+1,\ldots,n,\end{aligned}$$

con $\{v_1, v_{k+2}, \ldots, v_n\}$ un reordenamiento de $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$. Si $\varphi_k\varphi_{k-1}\cdots\varphi_1 T$ sobre gen$\{v_{l+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n\}$ cumple que $T(x)-x$ es un vector no cero isotrópico, para cada $x\in\mathbb{R}^{p,q}$ no isotrópico entonces podemos encontrar $\tau_1,\ldots,\tau_s$, reflexiones a través de hiperplanos con $s\leq n-l$, tales que:

$$\tau_s\cdots\tau_1\left(\varphi_k\varphi_{k-1}\cdots\varphi_1 T\right)(u_i) = u_i \text{ para } i=l+1,\ldots,n,$$

y $\{u_{l+1}, u_{k+2}, \ldots, u_n\}$ un reordenamiento de $\{v_{l+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n\}$. En conclusión:

$$\tau_s\cdots\tau_1\varphi_k\varphi_{k-1}\cdots\varphi_1 T = I$$

y $k+s\leq n$.

■

2.2. Ejemplos

En esta sección ilustraremos cómo descomponer una transformación ortogonal en reflexiones a través de hiperplanos. Los cálculos se hicieron con el paquete para realizar cálculos en Algebras de Clifford basada en el programa [A].

Sea T la transformación ortogonal sobre el espacio $\mathbb{R}^{2,3}$, cuya representación matricial, con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^{2,3}$, es

$$T_c = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 0\\ -5 & 1 & 3 & -4 & 0\\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0\\ 3 & -4 & -5 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}.$$

En este caso se cumple:

$$\begin{aligned}T(e_i)-e_i &\neq 0,\\ (T(e_i)-e_i)^2 &= 0,\end{aligned}$$

Para $i = 1, 2, 3, 4$, y

$$T(e_5) - e_5 = -2e_5.$$

Podemos considerar a $c_1 = e_5$. Es fácil verificar que $\varphi_{c_1} T$ restringida a gen$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ satisface las condiciones del Lema 2.2. Del lema 2,8 y de la demostración del teorema 3.1 podemos considerar

$$\begin{aligned} c_2 &= \varphi_{c_1}(T(e_1)) + e_1 = 2e_1 - 5e_2 + 4e_3, \\ c_3 &= e_1. \end{aligned}$$

Ahora se tiene:

$$\varphi_{c_3}\varphi_{c_2}\varphi_{c_1} T(e_i) = e_i, \text{ para } i = 1, 5.$$

Cabe destacar que $\varphi_{c_2}\varphi_{c_1} T$ ya no satisface las condiciones del lema 2.2 en gen$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. En este momento se cumplen las siguientes condiciones

$$(\varphi_{c_3}\varphi_{c_2}\varphi_{c_1} T(e_i) - e_i)^2 \neq 0 \text{ para } i = 2, 3, 4,$$

y podemos tomar

$$c_4 = \varphi_{c3}\varphi_{c_2}\varphi_{c_1} T(e_2) - e_2 = \frac{25}{2} e_2 - 7e_3 - \frac{23}{2} e_4.$$

Con lo anterior se garantiza:

$$\begin{aligned} \varphi_{c_4}\varphi_{c_3}\varphi_{c_2}\varphi_{c_1} T(e_i) &= e_i, \text{ para } i = 1, 2, 5, \text{ y} \\ (\varphi_{c_4}\varphi_{c_3}\varphi_{c_2}\varphi_{c_1} T(e_i) - e_i)^2 &\neq 0 \text{ para } i = 3, 4. \end{aligned}$$

Finalmente, consideramos

$$c_5 = \varphi_{c_4}\varphi_{c3}\varphi_{c_2}\varphi_{c_1} T(e_3) - e_3 = \frac{-18}{25} e_3 + \frac{24}{25} e_4.$$

Podemos verificar que:

$$\varphi_{c_5}\varphi_{c_4}\varphi_{c_3}\varphi_{c_2}\varphi_{c_1} T(e_i) = e_i \text{ para } i = 1, 2, 3, 4, 5,$$

esto es,

$$T = \varphi_{c_1}\varphi_{c_2}\varphi_{c_3}\varphi_{c_4}\varphi_{c_5}.$$

Denotamos con A_j la representación matricial, con respecto a la base canónica, de la reflexión φ_{c_j}, para $1 \leq j \leq 5$. Tenemos entonces lo siguiente:

$$A_5=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&\frac{7}{25}&\frac{24}{25}&0\\0&0&\frac{24}{25}&-\frac{7}{25}&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix},\quad A_4=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&\frac{27}{2}&7&\frac{23}{2}&0\\0&-7&-\frac{73}{25}&-\frac{161}{25}&0\\0&-\frac{23}{2}&-\frac{161}{25}&-\frac{479}{50}&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix},\quad A_3=\begin{bmatrix}-1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix},$$

$$A_2=\begin{bmatrix}-1&5&4&3&0\\5&-\frac{23}{2}&-10&-\frac{15}{2}&0\\-4&10&9&6&0\\-3&\frac{15}{2}&6&\frac{11}{2}&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix},\quad A_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&-1\end{bmatrix}.$$

Es fácil verificar que $T_c = A_1A_2A_3A_4A_5$.

Al desarrollar $c_1c_2c_3c_4c_5$, el máximo grado de k vectores, que aparecen en dicha expansión es 3; lo anterior da pie a la sospecha de que la factorización de la transformación ortogonal puede realizarse con tres reflexiones. A continuación mostramos otra factorización de la transformación ortogonal.

Aplicando el algoritmo a T, pero usando la base ortogonal $\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$, donde:

$$\begin{aligned}
w_1 &= e_3+e_4-e_5,\\
w_2 &= e_1+e_2,\\
w_3 &= e_3+e_4+2e_5,\\
w_4 &= e_3-e_4 \quad \text{y}\\
w_5 &= e_1-e_2,
\end{aligned}$$

se tiene que :$(T(w_i)-w_i)^2 \neq 0$, para $1 \leq i \leq 5$. Podemos entonces considerar:

$$\begin{aligned}
d_1 &= T(w_1)-w_1,\\
\varphi_{d_1}T(w_i)-w_i &\neq 0 \text{ y } \left(\varphi_{d_1}T(w_i)-w_i\right)^2 \neq 0, \text{ para } i=2,3,4,5\\
d_2 &= \varphi_{d_1}T(w_2)-w_2,\\
\varphi_{d_2}\varphi_{d_1}T(w_i)-w_i &\neq 0 \text{ y } \left(\varphi_{d_2}\varphi_{d_1}T(w_i)-w_i\right)^2 \neq 0, \text{ para } i=3,4,5\\
d_3 &= \varphi_{d_2}\varphi_{d_1}T(w_i)-w_3,\\
0 &= \varphi_{d_3}\varphi_{d_2}\varphi_{d_1}T(w_i)-w_i, \text{ para } i=4,5,
\end{aligned}$$

con lo que se obtiene la factorización $T=\varphi_{d_1}\varphi_{d_2}\varphi_{d_3}$.

Si B_1, B_2, B_3 son las representaciones matriciales con respecto a la base canónica de $\varphi_{d_1}, \varphi_{d_2}, \varphi_{d_3}$, respectivamente, tendremos lo siguiente:

$$B_1 = \begin{bmatrix} \frac{51}{2} & -\frac{7}{2} & -\frac{35}{2} & \frac{35}{2} & -7 \\ -\frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \\ \frac{35}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{23}{2} & \frac{25}{2} & -5 \\ -\frac{35}{2} & \frac{5}{2} & \frac{25}{2} & -\frac{23}{2} & 5 \\ 7 & -1 & -5 & 5 & -1 \end{bmatrix}, \qquad d_1 = 7e_1 - e_2 + 5e_3 - 5e_4 + 2e_5,$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} \frac{347}{9} & -\frac{104}{9} & -\frac{286}{9} & \frac{208}{9} & -\frac{26}{3} \\ -\frac{104}{9} & \frac{41}{9} & \frac{88}{9} & -\frac{64}{9} & \frac{8}{3} \\ \frac{286}{9} & -\frac{88}{9} & -\frac{233}{9} & \frac{176}{9} & -\frac{22}{3} \\ -\frac{208}{9} & \frac{64}{9} & \frac{176}{9} & -\frac{119}{9} & \frac{16}{3} \\ \frac{26}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{22}{3} & \frac{16}{3} & -1 \end{bmatrix}, \qquad d_2 = 26e_1 - 8e_2 + 22e_3 - 16e_4 + 6e_5,$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} \frac{43}{18} & -\frac{25}{18} & -\frac{35}{18} & \frac{5}{18} & -\frac{5}{3} \\ -\frac{25}{18} & \frac{43}{18} & \frac{35}{18} & -\frac{5}{18} & \frac{5}{3} \\ \frac{35}{18} & -\frac{35}{18} & -\frac{31}{18} & \frac{7}{18} & -\frac{7}{3} \\ -\frac{5}{18} & \frac{5}{18} & \frac{7}{18} & \frac{17}{18} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} & -1 \end{bmatrix}, \qquad d_3 = \frac{-5}{3}e_1 + \frac{5}{3}e_2 - \frac{7}{3}e_3 + \frac{1}{4}e_4 - 2e_5.$$

Puede verificarse que $T_c = B_1B_2B_3$ y observese que $c_1c_2c_3c_4c_5 = \frac{1}{2}d_1d_2d_3$. Obsérvese también que en esta segunda factorización, al aplicar el algoritmo, en ningún momento llegamos a las condiciones del lema 21.

2.3. Resultados importantes

El resultado más importante, hasta el momento, de esta tesis es haber encontrado un algoritmo que permite descomponer una transformación ortogonal en el espacio vectorial ortogonal no degenerado $\mathbb{R}^{p,q}$, como la composición de a lo más $p+q$ reflexiones respecto a hiperplanos.

Algo que se debe de destacar del algoritmo es lo siguiente:

1. Se requieren a lo más $p+q$ pasos para encontrar la descomposición en reflexiones a través de hiperplanos.

2. En el k-ésimo paso sólo se utiliza saber la imagen de la transformación ortogonal en k-vectores de una base ortogonal.

3. El algoritmo se puede implementar en un programa donde ya estén implementados los algoritmos para realizar las operaciones con Álgebras de Clifford.

Capítulo 3
REDES DE COINCIDENCIA

El modelo CSL, propuesto por Ranganathan, (1966) para el estudio de redes de coincidencia, se basa en considerar solamente los puntos comunes a dos redes (la red de intersección) estos puntos comunes se interpretan como puntos de buen .ªjustez asume que aparecen fronteras especiales, entre dos cristales creciendo con orientaciones distintas, cuando la densidad de lugares de coincidencia es alta, por que muchos átomos ocuparían lugares comunes a ambas redes. El soporte experimental para el modelo CSL está basado en las propiedades especiales de la redes, como la periocidad del acomodamiento de sus átomos. Trabajando con este modelo, tenemos que considerar dos copias idénticas de una misma red Γ (una de las 14 redes de Bravais) llevadas a un punto en común. Después, una red es rotada, por un ángulo θ con respecto a un eje que pase a través de este punto en común. Entonces, para diferentes valores del ángulo θ pueden aparecer dos posibilidades: ningún sitio de la red coincidirá (excepto el lugar donde pasa el eje de rotación) o, debido a la periodicidad de Γ, una infinidad de lugares coincidirán formando una red. Tal red es una CSL y la razón de los volúmenes de las celdas primitivas para la CSL y para la red Γ se llama índice de coincidencia. Un valor alto en la densidad de lugares de coincidencia corresponde a un valor bajo del índice de coincidencia.

Como ya hemos mencionado, el problema de las redes de coincidencia ha sido tratado con diferentes herramientas matemáticas y la más usual es la de matrices, sin embargo, en este trabajo usaremos los vectores de la red y desarrollaremos una teoría bajo este enfoque.

Las razones de nuestro desarrollo se encuentran en los capítulos anteriores donde hemos estudiado las transformaciones ortogonales mediante el producto de vectores

Usualmente, en la cristalografía matemática sólo se han considerado las rotaciones, sin embargo, nosotros basamos el estudio en las reflexiones a través de hiperplanos para caracterizar las isometrías de coincidencia.

En el tratamiento geométrico de las redes usaremos el producto interno canónico en $\mathbb{R}^n$ y, por ende, su Álgebra de Clifford asociada.

3.1. Teoría básica de redes y subredes

Definición 53 *Un subconjunto* $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ *se llama* ***red****, si es de la forma* $\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\mathbf{a}_i$, *con* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ *vectores linealmente independientes. Se dice que estos vectores son una base para* Γ *y que dicha red está generada por los vectores* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$*; el conjunto* $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ *se llama marco de referencia para la red* Γ*, y* n *se llama el rango de la red.*

Definición 54 *Sea* $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ *un marco de referencia para la red* Γ*. El conjunto* $\{\mathbf{a}_1^*, \mathbf{a}_2^*, \ldots, \mathbf{a}_n^*\}$ *se llama marco de referencia recíproco de* $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ *si se satisface* $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j^* = \delta_{ij}$ *para* $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Proposición 55 *Sea* $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ *un conjunto de vectores linealmente independientes de* $\mathbb{R}^n$*. Entonces las coordenadas del vector* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *con respecto a dicha base están dadas por* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_i^*$*, es decir,* $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_i^*) \mathbf{a}_i$.

Demostración

Existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{a}_i$, ahora $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_j^* = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{a}_i \right) \cdot \mathbf{a}_j^* = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j^* \right)$ como $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j^* = \delta_{ij}$ entonces $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_j^* = \alpha_i$. Como se quería probar.

■

Nota: Si $\{\mathbf{a}_1^*, \mathbf{a}_2^*, \ldots, \mathbf{a}_n^*\}$ es el marco de referencia recíproco de $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$, entonces $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ es marco de referencia recíproco de $\{\mathbf{a}_1^*, \mathbf{a}_2^*, \ldots, \mathbf{a}_n^*\}$, en otras palabras, $(\mathbf{a}_i^*)^* = \mathbf{a}_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. En caso de que $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ sea ortonormal entonces él es su propio marco de referencia recíproco.

Proposición 56 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *pertenece a la red* $\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\mathbf{a}_i$ *si y sólo si* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \in \mathbb{Z}$ *para cada* $\mathbf{y} \in \Gamma^*$*, donde* Γ^* *es la red generada por* $\{\mathbf{a}_1^*, \mathbf{a}_2^*, \ldots, \mathbf{a}_n^*\}$.

Las siguientes condiciones son equivakentes:

1. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *pertenece a la red* $\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\mathbf{a}_i$.

2. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \in \mathbb{Z}$ *para cada* $\mathbf{y} \in \Gamma^*$.

3. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_j^* \in \mathbb{Z}$ *para cada* $j = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Demostración

De la proposición anterior se tiene que $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_i^*) \mathbf{a}_i$.

$\Rightarrow$) Si $\mathbf{x} \in \Gamma$ entonces $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_j^*) \in \mathbb{Z}$ para $j = 1, 2, \ldots, n$. Sea $\mathbf{y} \in \Gamma^*$ entonces $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{a}_i^*$ con $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{Z}$, ahora $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{a}_i^* \right) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_i^*) \in \mathbb{Z}$.

$\Leftarrow$) En particular se tiene que $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_j^*) \in \mathbb{Z}$, así pues, $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_i^*) \mathbf{a}_i \in \Gamma$.

■

Teorema 57 *Sea* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *una transformación lineal. La matriz asociada al marco de referencia* $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ *está dada por* $\alpha_{ij} = \mathbf{a}_i^* \cdot T(\mathbf{a}_j)$ *para* $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Demostración

Se tiene que $\mathbf{T}(\mathbf{a}_k) = \sum_{k=1}^{n} (T(\mathbf{a}_k) \cdot \mathbf{a}_i^*) \mathbf{a}_i$, así pues las entradas de la matriz con respecto al marco de referencia $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ es $\alpha_{ij} = \mathbf{a}_i^* \cdot T(\mathbf{a}_j)$.

■

Una red Γ tiene diferentes bases, por eso es importante determinar lo siguiente:

1. Cuándo dos conjuntos linealmente independientes generan a la misma red.
2. Cuándo un conjunto linealmente independiente contenido en la red Γ es una base de la red.

Dada una base $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ de Γ, el politopo generado por dichos vectores es llamado celda unitaria de la red Γ, y es el $n-$vector $A_n = \lambda I$, donde $I = e_{123\cdots n}$, el valor absoluto de λ es el volumen de la celda unitaria. A continuación veremos que para bases distintas de una red, sus respectivos politopos tienen el mismo volumen.

Lema 58 *Sean* $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$, $\{\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \ldots, \mathbf{a}'_n\}$ *dos bases de una red* Γ. *Entonces la matriz de cambio de base entre ellas, satisface que el valor absoluto de su determinante es igual a 1.*

Demostración

Como $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $\{a'_1, a'_2, \ldots, a'_n\}$ son bases de Γ, entonces:

$$\begin{aligned} a_k &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} a'_i, \text{ con } \alpha_{ki} \in \mathbb{Z}, \text{ y} \\ a'_k &= \sum_{i=1}^{n} \beta_{ki} a_i, \text{ con } \beta_{ki} \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

consideremos las matrices $A = [\alpha_{ki}]$ y $B = [\beta_{ki}]$, ahora como cada entrada de las matrices es un entero, entonces $\det A$ y $\det B$ son enteros, pero $B = A^{-1}$, entonces $\det B = \frac{1}{\det A}$, así pues se concluye que $\det A$ y $\frac{1}{\det A}$ son enteros. Esto sólo es posible si $|\det A| = 1$.

■

Lema 59 *Sea* $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *una base de la red* Γ *y sea* $\{a'_1, a'_2, \ldots, a'_n\} \subset \Gamma$ *si*

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n = \pm a'_1 \wedge a'_2 \wedge \cdots \wedge a'_n$$

entonces $\{a'_1, a'_2, \ldots, a'_n\}$ *es una base de* Γ.

Demostración

Basta probar que:

$$\alpha_{kj} = \frac{a'_1 \wedge a'_2 \wedge \cdots \wedge a'_{j-1} \wedge a_k \wedge a'_{j+1} \wedge \cdots \wedge a'_n}{a'_1 \wedge a'_2 \wedge \cdots \wedge a'_n} \in \mathbb{Z}$$

pues:

$$a_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} a'_j.$$

Tenemos que:

$$a'_k = \sum_{j=1}^{n} \beta_{kj} a_j \text{ con } \beta_{ki} \in \mathbb{Z},$$

ahora:

$$a'_1 \wedge a'_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_{1j} a_j\right) \wedge \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_{2j} a_j\right) = \sum_{\substack{k,j=1 \\ k \neq j}}^{n} \beta_{1k}\beta_{2j} a_k \wedge a_j \text{ con } \gamma_{kj} \in \mathbb{Z}.$$ En general se tiene que:

$$a'_1 \wedge a'_2 \wedge \cdots \wedge a'_{j-1} = \sum_{\sigma} \gamma_\sigma a_{\sigma(1)} \wedge a_{\sigma(2)} \wedge \cdots \wedge a_{\sigma(j-1)}$$

donde σ es una permutación de $\{1, 2, \ldots, n\}$ y $\gamma_\sigma \in \mathbb{Z}$. Desarrollando lo anterior, llegamos a:

$$\mathbf{a}'_1 \wedge \mathbf{a}'_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}'_{j-1} \wedge \mathbf{a}_k \wedge \mathbf{a}'_{j+1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}'_n =$$

$$\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(j)=k}} \beta_\sigma \mathbf{a}_{\sigma(1)} \wedge \mathbf{a}_{\sigma(2)} \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_{\sigma(j-1)} \wedge \mathbf{a}_k \wedge \mathbf{a}_{\sigma(j+1)} \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_{\sigma(n)} \text{ con } \beta_\sigma \in \mathbb{Z}$$

ahora: $\mathbf{a}_{\sigma(1)} \wedge \mathbf{a}_{\sigma(2)} \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_{\sigma(j-1)} \wedge \mathbf{a}_k \wedge \mathbf{a}_{\sigma(j+1)} \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_{\sigma(n)} = \pm \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_n$, así pues:

$$\mathbf{a}'_1 \wedge \mathbf{a}'_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}'_{j-1} \wedge \mathbf{a}_k \wedge \mathbf{a}'_{j+1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}'_n = \gamma \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_n$$

donde $\gamma \in \mathbb{Z}$

Así que:

$$\alpha_{kj} = \frac{\mathbf{a}'_1 \wedge \mathbf{a}'_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}'_{j-1} \wedge \mathbf{a}_k \wedge \mathbf{a}'_{j+1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}'_n}{\mathbf{a}'_1 \wedge \mathbf{a}'_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}'_n} = \gamma \frac{\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_n}{\pm \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_n} = \pm \gamma.$$

Como se quería probar.

■

Corolario 60 *Sea* $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ *una base de la red* Γ *y sea* $\{\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \ldots, \mathbf{a}'_n\} \subset \Gamma$ *un conjunto de vectores linealmente independientes. Si* $|\det A| = 1$ *donde* A *es la matriz cambio de base entre ellas entonces* $\{\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \ldots, \mathbf{a}'_n\}$ *es una base de* Γ.

Demostración

Tenemos que:

$$\mathbf{a}'_k = \sum_{j=1}^{n} \beta_{kj} \mathbf{a}_j, \text{ con } \beta_{ki} \in \mathbb{Z},$$

la matriz $B = [\beta_{kj}]$ define una transformación lineal, tal que $T(\mathbf{a}_k) = \mathbf{a}'_k$ y se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'_1 \wedge \mathbf{a}'_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}'_n &= \det(A)\, \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_n \\ &= \pm \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_n \end{aligned}$$

por el lema anterior se deduce que: $\{\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \ldots, \mathbf{a}'_n\}$ es una base de Γ.

■

3.2. Redes de coincidencia

Una red $\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\mathbf{a}_i \subset \mathbb{R}^n$ es un grupo abeliano finitamente generado y como grupo es isomorfo a un grupo de rango n. Esta percepción nos ayuda a definir el concepto de subred.

Definición 61 *Sea* $\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\mathbf{a}_i \subset \mathbb{R}^n$*, se dice que la red* $\Gamma' \subset \Gamma$ *es* ***subred*** *de* Γ*, si* Γ' *es un subgrupo de índice finito, es decir, si* $[\Gamma : \Gamma'] < \infty$ *(el número de clases derechas es finito) y a su vez se dice que* Γ *es una* ***super red*** *de* Γ'.

La notación $\Gamma' < \Gamma$ *indica que* Γ' *es subgrupo de* Γ.

Definición 62 *Dos redes* $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathbb{R}^n$ *se dicen* ***conmensurables*** *si* $\Gamma_1 \bigcap \Gamma_2$ *es subred de* Γ_1 *y de* Γ_2*, lo anterior se denota con* $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$.

Como $\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\mathbf{a}_i$ es un subgrupo abeliano al considerar $\Gamma' = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\mathbf{a}_i'$ un subgrupo de Γ se tiene que Γ' es subgrupo normal de Γ ($\Gamma' \lhd \Gamma$), por lo que podemos construir el grupo cociente $\Gamma/\Gamma' = \{\Gamma' + \mathbf{a} \,|\mathbf{a} \in \Gamma\}$ donde:

$$\Gamma' + \mathbf{a} = \{\mathbf{b} + \mathbf{a} \,|\mathbf{b} \in \Gamma'\}$$

el cual es denotado por $\Gamma' + \mathbf{a} = [\mathbf{a}]$. La operación en el grupo cociente se define como $[\mathbf{a}] + [\mathbf{b}] = [\mathbf{a} + \mathbf{b}]$; además se tiene que $[\mathbf{a}] = [\mathbf{b}]$ si y sólo si $\mathbf{a} - \mathbf{b} \in \Gamma'$. Al ser $[\Gamma : \Gamma'] < \infty$ entonces el grupo Γ/Γ' es de orden finito.

Proposición 63 *Sea* $\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\mathbf{a}_i \subset \mathbb{R}^n$*, y* Γ' *una subred de* Γ *entonces para cada* $\mathbf{a} \in \Gamma$ *existe* $m \in \mathbb{N}$ *tal que* $m\mathbf{a} \in \Gamma'$.

Demostración

Por ser Γ/Γ' un grupo finito, para $[\mathbf{a}]$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m[\mathbf{a}] = [m\mathbf{a}] = [0] = \Gamma'$, así pues $m\mathbf{a} \in \Gamma'$.

∎

La proposición anterior es válida si la condición se reduce sólo a los elementos $\mathbf{a}_i$.

Proposición 64 *Sean* $\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\mathbf{a}_i$ *y* $\Gamma' = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\mathbf{b}_i$ *redes en* $\mathbb{R}^n$ *tales que* $\Gamma' < \Gamma$*. Si para cada* $\mathbf{a}_i$ *existe* $m_i \in \mathbb{N}$ *tal que* $m_i\mathbf{a}_i \in \Gamma'$ *entonces* Γ' *es subred de* Γ.

Demostración

Debemos de probar que Γ/Γ' es de índice finito, es decir que Γ/Γ' tiene un número finito de elementos.

Sea $k_i = \text{mín}\{m \in \mathbb{N} \,| m\mathbf{a}_i \in \Gamma'\}$. Se tiene que $k_i\mathbf{a}_i \in \Gamma'$, es decir $[k_i\mathbf{a}_i] = [0]$; para $0 < r < k_i$ se tiene que $[r\mathbf{a}_i] \neq [0]$.

Sea $\mathbf{a} = z_1\mathbf{a}_1 + \cdots + z_n\mathbf{a}_n \in \Gamma$. Para cada z_i existen enteros q_i, r_i tales que $z_i = q_ik_i + r_i$ con $0 \leq r_i < k_i$, con lo anterior se tiene que:

$$[z_i\mathbf{a}_i] = [r_i\mathbf{a}_i],$$

por lo cual $[\mathbf{a}] = [z_1\mathbf{a}_1 + \cdots + z_n\mathbf{a}_n] = \sum_{i=1}^{n} [z_i\mathbf{a}_i] = \sum_{i=1}^{n} [r_i\mathbf{a}_i]$. De donde se deduce que el grupo Γ/Γ' a lo más tiene $\prod_{i=1}^{n} k_i$ elementos.

■

Proposición 65 *Sean* $\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\mathbf{a}_i$ *y* Γ' *redes en* $\mathbb{R}^n$ *tales que* $\Gamma' < \Gamma$. *La red* Γ' *es subred de* Γ *si y sólo si para cada* $\mathbf{a}_i$ *existe* $m_i \in \mathbb{N}$ *tales que* $m_i\mathbf{a}_i \in \Gamma'$.

Demostración
Es consecuencia de las dos proposiciones anteriores.

■

Proposición 66 *Sean* $\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\mathbf{a}_i$ *y* Γ' *redes en* $\mathbb{R}^n$ *tales que* $\Gamma' < \Gamma$. *Si* Γ' *es subred de* Γ *entonces el rango de* Γ' *es igual a* n.

Demostración
Como Γ' está contenido en $\mathbb{R}^n$, entonces, al considerar una base A de la red Γ', y como todos los elementos de A son linealmente independientes (l.i.) se deduce que la base A tiene a lo más n elementos, así pues una base de Γ' a lo más tiene n elementos, así pues, el rango de Γ' es menor o igual que n.

Ahora existen $m_i \in \mathbb{N}$ $m_i\mathbf{a}_i \in \Gamma'$. El conjunto $\{m_i\mathbf{a}_i \,|i = 1, 2, \ldots, n\} \subset \Gamma'$ es un conjunto de vectores l.i. con n elementos, por lo cual, si $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k\}$ es base de Γ' entonces $k \geq n$, por lo que se deduce que el rango de Γ' es igual a n.

■

Supongamos que $\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\mathbf{a}_i$ y $\Gamma' = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\mathbf{b}_i$ son redes en $\mathbb{R}^n$. Entonces se tiene que los conjuntos $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ y $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ son bases de $\mathbb{R}^n$, así que podemos considerar la matriz de cambio de base entre ellas, cuyas entradas de dicha matriz son los números reales α_{ij} tales que

$$\mathbf{a}_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\mathbf{b}_j,$$

pero, por la proposición anterior existen $m_j \in \mathbb{N}, z_{i1}, z_{i2}, \ldots, z_{in} \in \mathbb{Z}$ tales que:

$$m_i \mathbf{a}_i = \sum_{j=1}^{n} z_{ij} \mathbf{b}_j,$$

$$\mathbf{a}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{z_{ij}}{m_i} \mathbf{b}_j$$

de donde se deduce que $\alpha_{ij} = \dfrac{z_{ij}}{m_j} \in \mathbb{Q}$, es decir, la matriz cambio de base tiene entradas racionales, aún más,

$$\alpha_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j^*.$$

En resumen se tienen las siguientes proposiciones.

Proposición 67 *Sean* $\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\mathbf{a}_i$ *y* $\Gamma' = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\mathbf{b}_i$ *redes en* $\mathbb{R}^n$ *tales que* $\Gamma' < \Gamma$. *La red* Γ' *es subred de* Γ *si y sólo si la matriz de cambio de bases entre sus marcos de referencia tiene entradas racionales.*

Proposición 68 *Sean* $\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\mathbf{a}_i$ *y* $\Gamma' = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\mathbf{b}_i$ *redes en* $\mathbb{R}^n$ *tales que* $\Gamma' < \Gamma$. *La red* Γ' *es subred de* Γ *si y sólo si*

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j^* \in \mathbb{Q}.$$

Con estas proposiciones establecemos una relación entre las redes y sus duales.

Proposición 69 *Sea* $\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\mathbf{a}_i$ *y* $\Gamma' = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\mathbf{b}_i$ *redes en* $\mathbb{R}^n$ *tales que* $\Gamma' < \Gamma$. *La red* Γ' *es subred de* Γ' *si y sólo si* Γ^* *es subred de* $(\Gamma')^*$.

Demostración

Consideremos las redes $\Gamma^* = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\mathbf{a}_i^*$ y $(\Gamma')^* = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\mathbf{b}_i^*$ duales de Γ y Γ' respectivamente. Primero probaremos que $\Gamma^* \subset (\Gamma')^*$.

Tenemos que $\Gamma' < \Gamma$, esto es, $\mathbf{b}_i \in \Gamma$ para cada $\iota = 1, 2, \ldots, n$ por lo tanto

$$\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{a}_i^* \in \mathbb{Z}.$$

Ahora $\{\mathbf{a}_1^*, \mathbf{a}_2^*, \ldots, \mathbf{a}_n^*\}$ es el marco de referencia de Γ^* y $\{\mathbf{b}_1^*, \mathbf{b}_2^*, \ldots, \mathbf{b}_n^*\}$ es el marco de referencia de $(\Gamma')^*$. Debemos de comprobar que $(\mathbf{b}_i^*)^* \cdot \mathbf{a}_i^* \in \mathbb{Z}$, en efecto:

Como $(\mathbf{b}_i^*)^* = \mathbf{b}_i$ por la última relación se tiene que:

$$(\mathbf{b}_i^*)^* \cdot \mathbf{a}_i^* \in \mathbb{Z},$$

de lo cual se concluye que $\Gamma^* \subset (\Gamma')^*$.

La demostración de la suficiencia sigue un razonamiento análogo al anterior.

Ahora sabemos que $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j^* \in \mathbb{Q}$ $i, j = 1, 2, \ldots, n$, por ser Γ' subred de Γ, para demostrar que Γ^* es subred de $(\Gamma')^*$ basta comprobar que

$$\mathbf{b}_i^* \cdot (\mathbf{a}_i^*)^* \in \mathbb{Q} \text{ para } i, j = 1, 2, \ldots, n;$$

y esta obviamente se cumple.

■

La demostración del siguiente teorema puede ser encontrado en [RO, Pag 258].

Teorema 70 *(De las bases simultáneas) Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$, una red y Γ' una subred de Γ. Entonces existen bases $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ y $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ de Γ y Γ', respectivamente, tales que:*

$$\mathbf{b}_i = k_i \mathbf{a}_i \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n \text{ con } k_i \in \mathbb{N}.$$

Teorema 71 *Sean $\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\mathbf{a}_i$ y $\Gamma' = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\mathbf{b}_i$ dos redes en $\mathbb{R}^n$, con Γ' una subred de Γ. Entonces se tiene que:*

$$[\Gamma : \Gamma'] = \left| \frac{\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{b}_n}{\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_n} \right|.$$

Al definir la conmensurabilidad entre las redes Γ_1 y Γ_2 se exigió que $\Gamma_1 \bigcap \Gamma_2$ sea subred de Γ_1 y de Γ_2, pero esta condición es redundante, en el sentido que si $\Gamma_1 \bigcap \Gamma_2$ es subred de Γ_1, entonces automáticamente $\Gamma_1 \bigcap \Gamma_2$ es subred de Γ_2; en efecto:

Supongamos que $\Gamma_1 = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\mathbf{a}_i$ y $\Gamma_2 = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\mathbf{b}_i$, como $\Gamma_1 \bigcap \Gamma_2$ es subred de Γ_1, entonces existen $m_i \in \mathbb{N}$, tales que $m_i \mathbf{a}_i \in \Gamma_1 \bigcap \Gamma_2$, esto es, $m_i \mathbf{a}_i \in \Gamma_2$, de donde se deduce que la matriz cambio de base entre ellas tiene entradas racionales, esto es:

$$\mathbf{b}_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \mathbf{a}_j, \text{ con } \alpha_{ij} \in \mathbb{Q},$$

de donde se infiere que existen $n_i \in \mathbb{N}$, tales que $n_i \mathbf{b}_i \in \Gamma_1 \bigcap \Gamma_2$. En conclusión: $\Gamma_1 \bigcap \Gamma_2$ es subred de Γ_2. Además si $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$, automáticamente se tiene: $\Gamma_2 \sim \Gamma_1$.

Proposición 72 *Dos redes $\Gamma_1 = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\mathbf{a}_i$ y $\Gamma_2 = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\mathbf{b}_i$ son conmensurables si y sólo si existen $m_i \in \mathbb{N}$, tales que $m_i \mathbf{a}_i \in \Gamma_2$.*

Proposición 73 *Dos redes* $\Gamma_1 = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\mathbf{a}_i$ *y* $\Gamma_2 = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\mathbf{b}_i$ *son commensurables si y sólo si*

$$\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{a}_j^* \in \mathbb{Q}.$$

Proposición 74 *Sean* $\Gamma_1 = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\mathbf{a}_i$, $\Gamma_2 = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\mathbf{b}_i$ *y* $\Gamma_3 = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\mathbf{c}_i$ *tres redes en* $\mathbb{R}^n$, *tales que* $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$ *y* $\Gamma_2 \sim \Gamma_3$ *entonces* $\Gamma_1 \sim \Gamma_3$.

Demostración

Como $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$ existen $m_i \in \mathbb{N}$, tales que $m_i\mathbf{a}_i \in \Gamma_2$, esto es:

$$m_i\mathbf{a}_i = z_{11}\mathbf{b}_1 + z_{12}\mathbf{b}_2 + \cdots + z_{1n}\mathbf{b}_n.$$

Como $\Gamma_2 \sim \Gamma_3$ existen $k_i \in \mathbb{N}$, tales que $k_i\mathbf{b}_i \in \Gamma_3$, así obtenemos que

$$z_{1i}k_i\mathbf{b}_i \in \Gamma_3 \text{ para cada } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Consideremos a $k = mcm\,[k_1, k_2, \ldots, k_n]$. También se satisface:

$$z_{1i}k\mathbf{b}_i \in \Gamma_3 \text{ para cada } i = 1, 2, \ldots, n,$$

por lo tanto

$$m_ik\mathbf{a}_i = z_{11}k\mathbf{b}_1 + z_{12}k\mathbf{b}_2 + \cdots + z_{1n}k\mathbf{b}_n \in \Gamma_3,$$

así pues $\Gamma_1 \sim \Gamma_3$.

■

Definición 75 *Sea* Γ *una red en* $\mathbb{R}^n$. *Una transformación ortogonal se dice que es una* ***isometría de coincidencia*** *si* $T\Gamma \sim \Gamma$. *El entero:*

$$\Sigma(T) := [\Gamma : T\Gamma \cap \Gamma]$$

es llamado índice de coincidencia de T *con respecto a* Γ.

Se denota $OC(\Gamma) = \{T \in (O, n) \,|\, \Sigma(T) < \infty\}$.

Definición 76 *Para* Γ *una red en* $\mathbb{R}^n$ *el conjunto* $OC(\Gamma)$ *es un grupo bajo la composición y dicho grupo es llamado* $OC-$*grupo de* Γ.

En la definición anterior se afirma que el conjunto $\mathrm{OC}(\Gamma)$ es un grupo, lo cual se probará en la siguiente proposición.

Proposición 77 *Sea Γ una red en $\mathbb{R}^n$, se tiene que el conjunto*

$$OC(\Gamma) = \{T \in (O,n) \,|\Sigma T < \infty\}$$

es un grupo bajo la composición.

Demostración

Sean $\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\mathbf{a}_i$ una red en $\mathbb{R}^n$ y $T_1, T_2 \in \mathrm{OC}(\Gamma)$. Tenemos que $T_1(\Gamma) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}T_1(\mathbf{a}_i)$ y $T_2(\Gamma) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}T_2(\mathbf{a}_i)$. Como $T_1(\Gamma) \sim \Gamma$ y $T_2(\Gamma) \sim \Gamma$ entonces $T_1(\Gamma) \sim T_2(\Gamma)$, así que existen $m_i, n_i \in \mathbb{N}$ tales que

$$\begin{aligned} m_i(T_1(\mathbf{a}_i)) &\in \Gamma \\ n_i T_2(\mathbf{a}_i) &\in (\Gamma), \end{aligned}$$

entonces

$$m_i n_i T_2(T_1(\mathbf{a}_i)) \in \Gamma$$

de donde se deduce que $T_2 T_1(\Gamma) \sim \Gamma$.

Falta probar que si $T_1(\Gamma) \sim \Gamma$ entonces $T_1^{-1}(\Gamma) \sim \Gamma$.

Como $T_1(\Gamma) \sim \Gamma$ entonces existen $m_i \in \mathbb{N}$ y $z_{i1}, z_{i2}, \ldots, z_{in} \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\begin{aligned} m_i T_1(\mathbf{a}_i) &= z_{i1}\mathbf{a}_1 + z_{i2}\mathbf{a}_2 + \cdots + z_{in}\mathbf{a}_n, \\ m_i \mathbf{a}_i &= z_{i1}T_1^{-1}(\mathbf{a}_1) + z_{i2}T_1^{-1}(\mathbf{a}_2) + \cdots + z_{in}T_1^{-1}(\mathbf{a}_n) \end{aligned}$$

de donde se deduce que $T_1^{-1}(\Gamma) \sim \Gamma$.

■

Teorema 78 *Sea $\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\mathbf{a}_i$ una red y $\Gamma^* = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\mathbf{a}_i^*$ su red dual, entonces*

$$OC(\Gamma) = OC(\Gamma^*).$$

Demostración

Sea $T \in \mathrm{OC}(\Gamma)$. Se tiene que:

$$T(\mathbf{a}_i) \cdot \mathbf{a}_j^* \in \mathbb{Q}.$$

Ahora

$$\begin{aligned} T(\mathbf{a}_i) \cdot \mathbf{a}_j^* &= T^{-1}(T(\mathbf{a}_i)) \cdot T^{-1}(\mathbf{a}_j^*) \\ &= \mathbf{a}_i \cdot T^{-1}(\mathbf{a}_j^*), \end{aligned}$$

como $(\mathbf{a}_i^*)^* = \mathbf{a}_i$, entonces

$$(\mathbf{a}_i^*)^* \cdot T^{-1}(\mathbf{a}_j^*) \in \mathbb{Q},$$

de donde se deduce que $T^{-1} \in \mathrm{OC}(\Gamma^*)$, por lo tanto $T \in \mathrm{OC}(\Gamma^*)$. Así puesi

$\mathrm{OC}(\Gamma) \subset \mathrm{OC}(\Gamma^*)$,

y de manera análoga se demuestra que $\mathrm{OC}(\Gamma^*) \subset \mathrm{OC}(\Gamma)$.

■

Lema 79 *Sea Γ una red de $\mathbb{R}^n$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$. Se cumple:*

$$OC(\Gamma) = OC(\lambda\Gamma).$$

Demostración

Consideremos $\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\mathbf{a}$. Entonces $\lambda\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}(\lambda\mathbf{a}_i)$. Además si $\{\mathbf{a}_1^*, \mathbf{a}_2^*, \ldots, \mathbf{a}_n^*\}$ es el marco recíproco de $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ entonces $\left\{\frac{\mathbf{a}_1^*}{\lambda}, \frac{\mathbf{a}_2^*}{\lambda}, \ldots, \frac{\mathbf{a}_n^*}{\lambda}\right\}$ es el marco recíproco de , $\{\lambda\mathbf{a}_1, \lambda\mathbf{a}_2, \ldots, \lambda\mathbf{a}_n\}$ esto es $(\lambda\mathbf{a}_i)^* = \frac{\mathbf{a}_i^*}{\lambda}$. Sea $T \in \mathrm{OC}(\Gamma)$, se tiene que

$$T(\mathbf{a}_i) \cdot \mathbf{a}_j^* \in \mathbb{Q},$$

de donde se obtiene

$$T(\lambda\mathbf{a}_i) \cdot (\lambda\mathbf{a}_j)^* \in \mathbb{Q}.$$

■

Lema 80 *Sea Γ una red de $\mathbb{R}^n$, y sea $T \in (O,n)$. Entonces se cumple:*

$$OC(T\Gamma) \simeq OC(\Gamma).$$

Demostración

Sean $\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\mathbf{a}_i$ y $T \in (O,n)$. Tenemos que $T(\Gamma) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}T(\mathbf{a}_i)$. Consideremos la función

$$\varphi(S) = TST^{-1}.$$

Afirmamos que $\varphi : \mathrm{OC}(\Gamma) \to \mathrm{OC}(T\Gamma)$, en efecto:

Si $S \in \mathrm{OC}(\Gamma)$, existen $m_i \in \mathbb{N}$, tales que:

$$m_i S(\mathbf{a}_i) = \mathbf{b} \text{ con } \mathbf{b} \in \Gamma.$$

Ahora

$$m_i(TS)(\mathbf{a}_i) = T(m_i S(\mathbf{a}_i)) = T(\mathbf{b}) \in T\Gamma,$$

por lo cual

$$m_i\left(TST^{-1}\right)\left(T\left(\mathbf{a}_i\right)\right) = T\left(m_i S\left(\mathbf{a}_i\right)\right) = T\left(\mathbf{b}\right) \in T\Gamma.$$

Así que se concluye que $TST^{-1} \in \mathrm{OC}(T\Gamma)$.

También afirmamos que $\varphi : \mathrm{OC}(\Gamma) \to \mathrm{OC}(T\Gamma)$ es un isomorfismo de grupos, lo cual probaremos enseguida.

1. $\varphi\left(S_1 S_2\right) = \varphi\left(S_1\right)\varphi\left(S_2\right)$:

   $\varphi\left(S_1 S_2\right) = TS_1 S_2 T^{-1} = \left(TS_1 T^{-1}\right)\left(TS_2 T^{-1}\right) = \varphi\left(S_1\right)\varphi\left(S_2\right)$

2. φ es inyectiva:

   Supongamos que $\varphi\left(S_1\right) = \varphi\left(S_2\right)$, esto es, $TS_1T^{-1} = TS_2T^{-1}$, de donde fácilmente se tiene que $S_1 = S_2$.

3. φ es suprayectiva:

   Dado $R \in \mathrm{OC}(T\Gamma)$, se puede demostrar fácilmente que $S = T^{-1}RT \in \mathrm{OC}(\Gamma)$. La prueba es análoga a lo hecho anteriormente en esta demostración.

■

Lema 81 *Si Γ_2 es una subred de Γ_1 de índice $m = [\Gamma_1 : \Gamma_2]$, entonces $OC(\Gamma_1) = OC(\Gamma_2)$ y para $T \in OC(\Gamma_1)$ se tiene:*

$$\Sigma_1\left(T\right) | m\Sigma_2\left(T\right)$$

Demostración

Sea $T \in OC\left(\Gamma_1\right)$, para cada $\mathbf{a} \in \Gamma_1$ existe $m_{\mathbf{a}} \in \mathbb{N}$ tal que:

$$m_{\mathbf{a}} T\left(\mathbf{a}\right) \in \Gamma_1,$$

y a su vez existe $n_{\mathbf{a}} \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n_{\mathbf{a}} m_{\mathbf{a}} T\left(\mathbf{a}\right) \in \Gamma_2.$$

Por lo tanto para cada $\mathbf{b} \in T\left(\Gamma_1\right)$ existe $k_{\mathbf{b}} \in \mathbb{N}$ tal que:

$$k_{\mathbf{b}} T\left(\mathbf{b}\right) \in \Gamma_2,$$

de donde se concluye que $\mathrm{OC}(\Gamma_1) \subset \mathrm{OC}(\Gamma_2)$.

Sea $T \in \mathrm{OC}(\Gamma_2)$. Para cada $\mathbf{a} \in \Gamma_2$ existe $m_{\mathbf{a}} \in \mathbb{N}$ tal que:

$$m_{\mathbf{a}} T\left(\mathbf{a}\right) \in \Gamma_2 < \Gamma_1.$$

Por lo tanto, para cada $\mathbf{b} \in T(\Gamma_2)$ existe $k_{\mathbf{b}} \in \mathbb{N}$ tal que:

$$k_{\mathbf{b}} T(\mathbf{b}) \in \Gamma_2$$

de donde se concluye que $\mathrm{OC}(\Gamma_2) \subset \mathrm{OC}(\Gamma_1)$.

■

Teorema 82 *Las redes conmensurables tienen el mismo OC−grupo.*

Demostración

Al considerar las redes comensurables Γ_1 y Γ_2 la igualdad entre $\mathrm{OC}(\Gamma_1)$ y $\mathrm{OC}(\Gamma_2)$ es cierta pues ambas son iguales a $OC(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)$.

■

3.3. Caracterización del grupo OC(Γ)

El teorema de Cartán-Dieudonné afirma que toda transformación ortogonal se puede ver como composición de reflexiones de hiperplanos y en álgebras de Clifford una reflexión de hiperplanos $T(\mathbf{x})$ se puede expresar como $T(\mathbf{x}) = -\mathbf{b}\mathbf{x}\mathbf{b}^{-1}$, con $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$; esto nos ayudará a caracterizar cuando una transformación ortogonal pertence a $OC(\Gamma)$.

3.3.1. Caracterización del grupo OC (Γ) para redes cuadradas

Proposición 83 *Sea Γ una red generada por los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. Supongamos que $T \in OC(\Gamma)$ es una reflexión de la forma $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}\mathbf{x}\mathbf{b}^{-1}$, con $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Entonces podemos encontrar $\mathbf{c} \in \Gamma$ tal que $T(\mathbf{x}) = -\mathbf{b}\mathbf{x}\mathbf{b}^{-1} = -\mathbf{c}\mathbf{x}\mathbf{c}^{-1}$.*

Demostración

Como la reflexión de hiperplanos $T \in OC(\Gamma)$, para $\mathbf{a} \in \Gamma$ podemos encontrar $m \in \mathbb{N}$, tal que $mT(\mathbf{a}) = T(m\mathbf{a}) \in \Gamma$. Así que podemos afirmar lo siguiente: existe $\mathbf{x} \in \Gamma$ tal que $\mathbf{y} = T(\mathbf{x}) \in \Gamma$, esto es:

$$\mathbf{y} = -\mathbf{b}\mathbf{x}\mathbf{b}^{-1} \in \Gamma.$$

Ahora se tiene que:

$$\mathbf{y}\mathbf{b} = -\mathbf{b}\mathbf{x},$$

de donde se obtiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} \cdot \mathbf{b} &= -\mathbf{b} \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \wedge \mathbf{b} &= -\mathbf{b} \wedge \mathbf{x} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{b}, \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} \wedge \mathbf{b} - \mathbf{x} \wedge \mathbf{b} &= 0, \\ (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \wedge \mathbf{b} &= 0, \end{aligned}$$

así que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que: $\mathbf{y} - \mathbf{x} = \lambda \mathbf{b} \in \Gamma$, pues $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Gamma$. Tomando $\mathbf{c} = \lambda \mathbf{b} \in \Gamma$, tenemos que: $T(\mathbf{x}) = -\mathbf{b}\mathbf{x}\mathbf{b}^{-1} = -\mathbf{c}\mathbf{x}\mathbf{c}^{-1}$.

■

El resultado anterior nos dice que siempre que tengamos una reflexión que pertenezca a $OC(\Gamma)$ la podemos representar usando elementos de la propia red. Ahora la pregunta es si la reflexión $R(\mathbf{x}) = -\mathbf{a}\mathbf{x}\mathbf{a}^{-1}$ con $\mathbf{a} \in \Gamma$ siempre pertenece a $OC(\Gamma)$.

Denotaremos con $\mathbb{Z}^n$ a la red generada por los vectores canónicos básicos de $\mathbb{R}^n$, esto es, $\mathbb{Z}^n = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\mathbf{e}_i$, donde $\mathbf{e}_i$ son los vectores básicos de $\mathbb{R}^n$.

Proposición 84 *Si* $\mathbf{c} \in \mathbb{Z}^n$ *y* $\mathbf{c} \neq 0$ *entonces la reflexión* $R(\mathbf{x}) = -\mathbf{c}\mathbf{x}\mathbf{c}^{-1} \in OC(\mathbb{Z}^n)$.

Demostración

Tenemos que:

$$-\mathbf{c}\mathbf{x}\mathbf{c}^{-1} = -2\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{c}}{\mathbf{c}^2}\mathbf{c} + \mathbf{x}$$

al tomar $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ entonces $\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{c}}{\mathbf{c}^2} \in \mathbb{Q}$, pues ambos $\mathbf{x}$ y $\mathbf{c}$ se expresan en coordenadas enteras de la base canónica de $\mathbb{Z}^n$, al considerar $m = \mathbf{c}^2 \in \mathbb{N}$, obtenemos:

$$mR(\mathbf{x}) = -2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{c})\mathbf{c} + \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$$

lo anterior es válido para cualquier $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$,por lo cual $R(\mathbf{x}) \in OC(\mathbb{Z}^n)$.

■

Con este resultado ya podemos afirmar el siguiente teorema:

Teorema 85 *Una reflexión* $R(\mathbf{x})$ *de hiperplanos en* $\mathbb{R}^n$ *pertenece al grupo* $OC(\mathbb{Z}^n)$ *si y sólo si* $R(\mathbf{x})$ *se puede expresar como:*

$$R(\mathbf{x}) = -\mathbf{c}\mathbf{x}\mathbf{c}^{-1}$$

con $\mathbf{c} \in \mathbb{Z}^n$.

Este teorema se demuestra directamente de último lema y de la primera proposición mencionada en esta sección.

Lema 86 *Sea* $T \in (O,n)$ *y la red* $T(\mathbb{Z}^n)$ *si* $\mathbf{b} \in T(\mathbb{Z}^n)$ *y* $\mathbf{b} \neq 0$ *entonces la reflexión* $R(\mathbf{x}) = -\mathbf{bxb}^{-1} \in OC(T(\mathbb{Z}^n))$.

Demostración

Lo que debemos de probar es que para $\mathbf{x} \in T(\mathbb{Z}^n)$ existe un entero $m_{\mathbf{x}} \in \mathbb{N}$ tal que $m_{\mathbf{x}}R(\mathbf{x}) \in T(\mathbb{Z}^n)$; en efecto:

Como $\mathbf{b}, \mathbf{x} \in T(\mathbb{Z}^n)$ entonces $\mathbf{b} = T(\mathbf{a})$ y $\mathbf{x} = T(\mathbf{x}')$ con $\mathbf{a}, \mathbf{x}' \in \mathbb{Z}^n$, así que: $R(\mathbf{x}) = -\mathbf{bxb}^{-1} = -T(\mathbf{a})T(\mathbf{x}')T(\mathbf{a}^{-1}) = T(-\mathbf{axa}^{-1})$ por el teorema anterior podemos encontrar $m_{\mathbf{x}} \in \mathbb{N}$ tal que:

$$m_{\mathbf{x}}\left(-\mathbf{axa}^{-1}\right) \in \mathbb{Z}^n;$$

por lo tanto:

$$m_{\mathbf{x}}R(\mathbf{x}) = T\left(-m_{\mathbf{x}}\mathbf{axa}^{-1}\right) \in T(\mathbb{Z}^n).$$

■

Corolario 87 *Sea* $T \in OC(\mathbb{Z}^n)$ *si* $\mathbf{b} \in T(\mathbb{Z}^n)$ *y* $\mathbf{b} \neq 0$ *entonces la reflexión* $R(\mathbf{x}) = -\mathbf{bxb}^{-1} \in OC(\mathbb{Z}^n)$.

Demostración

Se demuestra pues $R(\mathbf{x}) = -\mathbf{bxb}^{-1} \in OC(T(\mathbb{Z}^n)) = OC(\mathbb{Z}^n)$ ya que $T(\mathbb{Z}^n)$ y $\mathbb{Z}^n$ son conmensurables.

■

Lema 88 *Sea* $T \in OC(\mathbb{Z}^n)$ *y* $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$ *y* $\mathbf{b} \in T(\mathbb{Z}^n)$ *tales que* $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2$. *Entonces existe un mapeo* $S \in OC(\mathbb{Z}^n)$ *tal que* $S(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$.

Demostración:

Sea $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n = \bigoplus_{i=}^{n} \mathbb{Z}\mathbf{e}_i$ y $T(\mathbb{Z}^n) \in OC(\mathbb{Z}^n)$ si $\mathbf{b} \in T(\mathbb{Z}^n)$ entonces existe un entero m tal que $m(\mathbf{a}-\mathbf{b}) \in \mathbb{Z}^n$, por lo cual la reflexión definida como

$$S(\mathbf{x}) = -(m\mathbf{a}-m\mathbf{b})\,\mathbf{x}\,(m\mathbf{a}-m\mathbf{b})^{-1} = -(\mathbf{a}-\mathbf{b})\,\mathbf{x}\,(\mathbf{a}-\mathbf{b})^{-1} \in OC(\mathbb{Z}^n),$$

ya se probó que la condición $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2$ implica que $(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ y $(\mathbf{a}-\mathbf{b})$ son ortogonales, ahora consideremos $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$ y $\mathbf{b} \in T(\mathbb{Z}^n)$ tales que $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2$:

$$\begin{aligned}
S(\mathbf{a}) &= -(\mathbf{a}-\mathbf{b})\,\mathbf{a}\,(\mathbf{a}-\mathbf{b})^{-1} \\
&= -(\mathbf{a}-\mathbf{b})\left(\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2} + \frac{\mathbf{a}-\mathbf{b}}{2}\right)(\mathbf{a}-\mathbf{b})^{-1} \\
&= -(\mathbf{a}-\mathbf{b})\left(\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}\right)(\mathbf{a}-\mathbf{b})^{-1} - (\mathbf{a}-\mathbf{b})\left(\frac{\mathbf{a}-\mathbf{b}}{2}\right)(\mathbf{a}-\mathbf{b})^{-1} \\
&= \left(\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}\right) - \left(\frac{\mathbf{a}-\mathbf{b}}{2}\right) = \mathbf{b}.
\end{aligned}$$

Como se quería probar.

■

Corolario 89 *Sea* $\mathbb{Z}^n$ *una red y* $T \in OC(\mathbb{Z}^n)$ *y* $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$ *y* $\mathbf{b} \in T(\mathbb{Z}^n)$ *tales que* $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2$. *Entonces existe* $\mathbf{c} \in \mathbb{Z}^n$ *tal que* $S(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$ *donde* $S(\mathbf{x}) = -\mathbf{c}\mathbf{x}\mathbf{c}^{-1}$.

Teorema 90 *Sea* $\mathbb{Z}^n$ *una red y* $T \in OC(\mathbb{Z}^n)$. *Existen reflexiones* $R_1, R_2, \ldots, R_l \in OC(\mathbb{Z}^n)$ *tales que* $T = R_1 R_2 \cdots R_l$.

Demostración

Es por inducción sobre la dimensión del espacio.

Para $n = 1$, las únicas transformaciones ortogonales en $\mathbb{Z}$ son $I(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ y $S(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$ y son precisamente de coincidencia para $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}$ y $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ tenemos que $S(\mathbf{x}) = -\mathbf{b}\mathbf{x}\mathbf{b}^{-1}$ y $I(\mathbf{x}) = S^2(\mathbf{x})$ por lo cual es válido para $n = 1$.

Supongamos que el teorema es cierto para $n = k$.

Consideremos $\mathbb{Z}^k$ una red y $T \in OC(\mathbb{Z}^{k+1})$, ahora para $T(\mathbf{e}_{k+1})$ y $\mathbf{e}_{k+1}$ existe $S \in OC(\mathbb{Z}^{k+1})$, que es una reflexión, tal que $S(T(\mathbf{e}_{k+1})) = \mathbf{e}_{k+1}$, ahora $ST \in OC(\mathbb{Z}^{k+1})$ pero $\varphi T\,|_{\mathbb{Z}^k} \in OC(\mathbb{Z}^n)$ así que: $ST = R_1, R_2, \ldots, R_l$ donde las reflexiones $R_1, R_2, \ldots, R_l \in OC(\mathbb{Z}^k)$, así que:

$$S = \varphi^{-1} R_1, R_2, \ldots, R_k.$$

Nota: $R_1, R_2, \ldots, R_k \in OC(\mathbb{Z}^n)$ se pueden considerar en $OC(\mathbb{Z}^{n+1})$ al extenderlas de la siguiente manera $R_i(\mathbf{e}_{k+1}) = \mathbf{e}_{k+1}$.

De esta manera queda demostrado el teorema.

■

Corolario 91 *Sea* $\mathbb{Z}^n$ *una red y* $T \in OC(\mathbb{Z}^n)$. *Existen* $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_k \in \mathbb{Z}^n$ *tales que* $T(\mathbf{x}) = (-1)^k (\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2\cdots\mathbf{c}_k)(\mathbf{x})(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2\cdots\mathbf{c}_k)^{-1}$.

Teorema 92 *Una transformación ortogonal T pertenece al grupo* $OC(\mathbb{Z}^n)$ *si y sólo si existen* $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_k \in \mathbb{Z}^n$ *tales que:*

$$T(\mathbf{x}) = (-1)^k (\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2\cdots\mathbf{c}_k)(\mathbf{x})(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2\cdots\mathbf{c}_k)^{-1}$$

Al considerar una red cuadrada $\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\mathbf{a}_i$, esto es: $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \lambda\delta_{ij}$ para $i, j = 1, 2, \ldots, n$ y en donde λ es volumen de la celda unitaria, tenemos que el teorema anterior también es cierto y la demostración es análoga.

Teorema 93 *Dada una red cuadrada* $\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\mathbf{a}_i$ *una transformación ortogonal T pertenece al grupo* $OC(\mathbb{Z}^n)$ *si y sólo si existen* $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_k \in \Gamma$ *tales que:*

$$T(\mathbf{x}) = (-1)^k (\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2\cdots\mathbf{c}_k)(\mathbf{x})(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2\cdots\mathbf{c}_k)^{-1}$$

3.4. Resultados importantes

1. En este capítulo se ha reconstruido parte de la teoría de de las redes de coincidencia, sin usar criterios de matrices, que es la forma usual, las demostraciones que hemos usado se basan en la proposición 63.

2. También usando la proposición 63; se ha ha caracterizado las las reflexiones a través de hiperplanos que son de coincidencia; proposición 82. Este resultado fue lo que motivó el encontrar el algoritmo del capítulo anterior.

3. En este capítulo se llegó a la conclusión de que que cualquier isometría de coincidencia de una red cuadrada es la composición de reflexiones de hiperplanos ortogonales a los vectores de la red; es decir, los vectores de la red cuadrada caracterizan a las isometrías de coincidencia.

Capítulo 4

BASES E ÍNDICE DE COINCIDENCIA PARA REDES PLANAS

En esta sección usaremos el algoritmo de Cartan-Dieudonné expuesto en el capítulo anterior para caracterizar el grupo $OC(\Gamma)$ para redes en el plano. En resumen se tienen los siguientes resultados:

1. Si $T(\mathbf{x}) = -\mathbf{bxb}^{-1} \in OC(\Gamma)$, existe un vector $\mathbf{c} \in \Gamma$, tal que
$$T(\mathbf{x}) = -\mathbf{bxb}^{-1} = -\mathbf{cxc}^{-1}$$

2. si $a \in \mathbb{Z}^n$, entonces la reflexión φ_a través de hiperplanos definida como:
$$\varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{axa}^{-1}$$
pertenece a $OC(\mathbb{Z}^n)$

3. Si $\varphi \in OC(\mathbb{Z}^n)$ y es una reflexión a través de un hiperplano entonces existe $a \in \mathbb{Z}^n$, tal que:
$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{axa}^{-1}$$

4. Toda $T \in OC(\mathbb{Z}^n)$ es la composición de reflexiones a través de hiperplanos y cada una de ellas perteneciente a $OC((\mathbb{Z}^n))$.

5. Una consecuencia inmediata del algoritmo de Cartan-Dieudonné es que dada una transformación ortogonal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, distinta de la identidad, entonces:
$$\begin{aligned} T(x) &= -\mathbf{axa}^{-1}, \text{ si } \det(T) = -1, \\ T(x) &= \mathbf{aw_2xw_2}^{-1}\mathbf{a}^{-1} = \varphi_{\mathbf{a}}\varphi_{\mathbf{w_2}}(x) \text{ si } \det(T) = 1, \end{aligned}$$
con $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ y $\{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}\}$ es una base ortogonal.

En efecto:
Supongamos que $\det T = -1$.

Si $T(\mathbf{w}_1) = \mathbf{w}_1$ entonces con $\mathbf{a} = T(\mathbf{w}_2) - \mathbf{w}_2$, se obtiene que: $T(\mathbf{x}) = -\mathbf{axa}^{-1}$.
Si $T(\mathbf{w}_1) \neq \mathbf{w}_1$ entonces con $\mathbf{a} = T(\mathbf{w}_1) - \mathbf{w}_1$, se obtiene que: $T(\mathbf{x}) = -\mathbf{axa}^{-1}$.
En el caso de que $\det T = 1$.

Como T es distinta de la identidad y es una rotación entonces $T(\mathbf{w}_1) \neq \mathbf{w}_1$, al considerar $\mathbf{a} = \mathbf{T}(\mathbf{w}_1) - \mathbf{w}_1$, se tiene que la transformación $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi_{\mathbf{a}} T$ es una transformación ortgonal con

$$\begin{aligned} \det(\varphi_{\mathbf{a}} T) &= -1, \\ \varphi_{\mathbf{a}} T(\mathbf{w}_1) &= \mathbf{w}_1, \end{aligned}$$

de lo anterior se deduce que $\varphi_a T(\mathbf{w}_2) = -\mathbf{w}_2$, por lo cual:

$$\varphi_{\mathbf{w}_2} \varphi_{\mathbf{a}} T(\mathbf{w}_i) = \mathbf{w}_i \text{ para } i = 1, 2.$$

Así que

$$T(x) = \mathbf{aw}_2 \mathbf{xw}_2^{-1} \mathbf{a}^{-1}.$$

Proposición 94 *Si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, es una transformación ortogonal,distinta de la identidad, y $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ es una base ortogonal entonces existe $a \in \mathbb{R}^2$, tal que:*

$$\begin{aligned} T(x) &= -\mathbf{axa}^{-1}, \textit{ si } \det(T) = -1, \\ T(x) &= \mathbf{aw}_2 \mathbf{xw}_2^{-1} \mathbf{a}^{-1} = T_{\mathbf{a}} T_{\mathbf{w}_2}(x) \textit{ si } \det(T) = 1. \end{aligned}$$

Demostración
Ya se hizo.

■

4.1. Bases e índice de coincidencia para reflexiones sobre redes planas arbitrarias

En esta sección describiremos las isometrías de coincidencia para redes planas y en el caso de una reflexión de coincidencia daremos un algoritmo general para encontrar una base de la red de coincidencia.

En seguida encontraremos condiciones suficientes para que la transformación ortogonal $\varphi_{\mathbf{c}}(x) = -\mathbf{cxc}^{-1} \in OC(\Gamma)$ con $c \in \Gamma = \mathbb{Z}\mathbf{a}_1 + \mathbb{Z}\mathbf{a}_2$ una red; para que $\varphi_{\mathbf{c}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{cxc}^{-1} \in OC(\Gamma)$ para cada $i = 1, 2$ es suficiente que existan $m_i \in \mathbb{Z}$ tal que $m_i \varphi_{\mathbf{c}}(a_i) = m_i(-\mathbf{ca}_i\mathbf{c}^{-1}) \in \Gamma$, esto es:

$$m_i(-\mathbf{ca}_i\mathbf{c}^{-1}) = -m_i \frac{2(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}_i)}{\mathbf{c}^2} \mathbf{c} + m_i \mathbf{a}_i \in \Gamma,$$

de donde se concluye que $-m_i\frac{2(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}_i)}{\mathbf{c}^2}\mathbf{c} \in \Gamma$, por lo cual es suficiente que:

$$\frac{(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}_i)}{\mathbf{c}^2} \in \mathbb{Q}.$$

Al usar lo anterior, la siguiente proposición.

Proposición 95 *Sea* $\Gamma = \mathbb{Z}\mathbf{a}_1 + \mathbb{Z}\mathbf{a}_2 \subset \mathbb{R}^2$, *una red plana, si* $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j \in \mathbb{Q}$, *para* $i, j = 1, 2$. *Entonces para* $\mathbf{c} \in \Gamma$, *se cumple:*

$$\varphi_{\mathbf{c}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{c}\mathbf{x}\mathbf{c}^{-1} \in OC(\Gamma).$$

Proposición 96 *Sea* $\Gamma = \mathbb{Z}\mathbf{a}_1 + \mathbb{Z}\mathbf{a}_2 \subset \mathbb{R}^2$, *una red plana, si* $T \in OC(\Gamma)$, *entonces existen* $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \in \Gamma$, *tales que:*

$$\begin{aligned} T &= \varphi_{\mathbf{c}_1} \ o \\ T &= \varphi_{\mathbf{c}_1}(\mathbf{x})\,\varphi_{\mathbf{c}_2}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Demostración

Sea $\mathbf{a}_i$, tal que $T(\mathbf{a}_i) \neq \mathbf{a}_i$, existe $m_i \in \mathbb{N}$, tal que, $m_i(T(\mathbf{a}_i) - \mathbf{a}_i) \in \Gamma$; definamos a $c_1 = m_i(T(\mathbf{a}_i) - \mathbf{a}_i)$; se cumple lo siguiente:

$$\varphi_{\mathbf{c}_1} T(\mathbf{a}_i) = \mathbf{a}_i.$$

Si $\det T = -1$, entonces $T = \varphi_{\mathbf{c}_1}$.

Si $\det T = 1$, entonces $\varphi_{\mathbf{c}_1} T \in OC(\Gamma)$ y es una reflexión por lo cual existe un vector $\mathbf{c}_2 \in \Gamma$, tal que:

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{c}_1} T &= \varphi_{\mathbf{c}_2}, \\ T &= \varphi_{\mathbf{c}_1}\varphi_{\mathbf{c}_2}. \end{aligned}$$

∎

Proposición 97 *Sea* $\Gamma = \mathbb{Z}\mathbf{a}_1 + \mathbb{Z}\mathbf{a}_2 \subset \mathbb{R}^2$, *una red plana, si* $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j \in \mathbb{Q}$, *para* $i, j = 1, 2$. *Entonces para* $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \in \Gamma$, *se cumple:*

$$\varphi_{\mathbf{c}_1}\varphi_{\mathbf{c}_2}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_1\mathbf{c}_2\mathbf{x}\mathbf{c}_2^{-1}\mathbf{c}_1 \in OC(\Gamma).$$

En el siguiente asumiremos que se cumplen las condiciones de la proposición anterior.

Dado un vector $\mathbf{u} \in \Gamma$, existe $\lambda \in \mathbb{N}$, tal que $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) \in \Gamma$, y aún más, el vector $\mathbf{v}$ es ortogonal al vector $\mathbf{u}$.

En efecto:

$$\mathbf{u}(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}_1)\,\mathbf{a}_2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}_2)\,\mathbf{a}_1,$$

como $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}_i) \in \mathbb{Q}$, podemos encontrar un entero para que $\lambda(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}_i) \in \mathbb{Z}$ para $i = 1, 2$.

Consideremos a la reflexión $\varphi_{\mathbf{u}}$, con $\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 \in \Gamma$, se cumple:

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}) &= -\mathbf{u}, \\ \varphi_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) &= \mathbf{v}, \end{aligned}$$

Por lo cual la red $\Lambda = \mathbb{Z}\mathbf{u} + \mathbb{Z}\mathbf{v}$ satisface:

$$\begin{aligned} \Lambda &< \Gamma \cap \varphi_{\mathbf{u}}(\Gamma) < \Gamma, \\ [\Gamma : \Lambda] &= [\Gamma \cap \varphi_{\mathbf{u}}(\Gamma) : \Lambda]\,[\Gamma : \Gamma \cap \varphi_{\mathbf{u}}(\Gamma)] \\ [\Gamma : \Lambda] &= [\Gamma \cap \varphi_{\mathbf{u}}(\Gamma) : \Lambda]\,\Sigma(\varphi_{\mathbf{u}}) \end{aligned}$$

Un resultado ya conocido establece si $\Gamma' = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\mathbf{a}_i$ es subred de $\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\mathbf{b}_i$ entonces $[\Gamma : \Gamma']$ es igual al volumen de la celda primitiva de los vectores $\mathbf{a}_i$ entre el volumen de la celda primitiva por los vectores $\mathbf{b}_i$.

De lo anterior se deduce que $\Sigma(\varphi_{\mathbf{u}})$ divide a $[\Gamma : \Lambda] = \left|\frac{\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}}{\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2}\right|$.

A continuación calculamos $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} &= (\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2) \wedge (\lambda(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}_1)\,\mathbf{a}_2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}_2)\,\mathbf{a}_1), \\ \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} &= \lambda(\alpha_1(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}_1)\,\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 - \alpha_2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}_2))\,\mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_1, \\ \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} &= \lambda(\alpha_1(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}_1) + \alpha_2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}_2))\,\mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_1, \\ \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} &= \lambda\left(\mathbf{u}^2\right)\mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_1, \end{aligned}$$

En resumen se ha demostrado la siguiente proposición.

Proposición 98 *Sea $\Gamma = \mathbb{Z}\mathbf{a}_1 + \mathbb{Z}\mathbf{a}_2 \subset \mathbb{R}^2$, una red plana, si $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j \in \mathbb{Q}$, para $i, j = 1, 2$. Entonces para $\mathbf{u} \in \Gamma$, se cumple:*

1. *Existe $\lambda \in \mathbb{N}$, tal que $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) \in \Gamma$, con $\mathbf{v}$ un vector ortogonal a $\mathbf{u}$.*
2. *$\Sigma(\varphi_{\mathbf{u}})$ divide a $\lambda(\mathbf{u}^2)$.*

A continuación describimos un método para encontrar una base para $\varphi_{\mathbf{u}}(\Gamma)\cap\Gamma$. Debido a que $\varphi_{\mathbf{u}} = \varphi_{\alpha\mathbf{u}}$, para cualquier $\alpha \neq 0 \in \mathbb{R}$, para analizar la reflexión con respecto al vector $\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\gcd(\alpha_1, \alpha_2) = 1$; por lo cual podemos encontrar $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Z}$, enteros tales que:

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = 1,$$

lo anterior garantiza que existe un vector $\mathbf{w} \in \Gamma$ tal que:

$$\Gamma = \mathbb{Z}\mathbf{u} + \mathbb{Z}\mathbf{w},$$

en efecto, considere $\mathbf{w} = \beta_2\mathbf{a}_1 - \beta_1\mathbf{a}_2$, se tiene:

$$\mathbf{u}\wedge\mathbf{w} = (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)\,\mathbf{a}_1\wedge\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1\wedge\mathbf{a}_2,$$

se tiene que:

$$\varphi_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}) = -\mathbf{u} \in \Gamma\cap T(\Gamma),$$

y consideremos a la más pequeño natural m, tal que:

$$m\varphi(\mathbf{w}) \in \Gamma\cap\varphi_{\mathbf{u}}(\Gamma),$$

afirmamos que $\{\mathbf{u}, m\varphi_{\mathbf{c}}(\mathbf{w})\}$ es una base para la red de coincidencia $\Gamma\cap\varphi_{\mathbf{c}}(\Gamma)$, en efecto:

Sea $\mathbf{y} \in \Gamma\cap\varphi_{\mathbf{c}}(\Gamma)$, entonces existe $\mathbf{x} \in \Gamma$ tal que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y} &= \varphi_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}),\\
\mathbf{y} &= \varphi_{\mathbf{u}}(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{w}),\\
\mathbf{y} &= \alpha\varphi_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}) + \beta\varphi_{\mathbf{u}}(\mathbf{w}),\\
\mathbf{y} &= -\alpha\mathbf{u} + \beta\varphi_{\mathbf{u}}(\mathbf{w}),\\
\mathbf{y} + \alpha\mathbf{u} &= \beta T(\mathbf{w}),
\end{aligned}$$

como m es el natural más pequeño que satisface $m\varphi_{\mathbf{c}}(\mathbf{w}) \in \varphi_{\mathbf{u}}\Gamma\cap T(\Gamma)$, entonces:

$$\beta = km,$$

con k un entero. Con esto tenemos la conclusión de nuestro resultado y la siguiente proposición es válida

Nota: El índice de coincidecia es m pues el índice de coincidencia es igual :

$$\left|\frac{\varphi_{\mathbf{u}}(\mathbf{u})\wedge(m\varphi_{\mathbf{u}}(\mathbf{w}))}{\mathbf{a}_1\wedge\mathbf{a}_2}\right| = m.$$

Proposición 99 *Sea* $\Gamma = \mathbb{Z}\mathbf{a}_1 + \mathbb{Z}\mathbf{a}_2 \subset \mathbb{R}^2$*, una red plana, si* $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j \in \mathbb{Q}$*, para* $i, j = 1, 2$*. Entonces para* $\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 \in \Gamma$*, con* $\gcd(\alpha_1, \alpha_2) = 1$*,*

1. *Existe un vector* $\mathbf{w} \in \Gamma$*, tal que* $\{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}$ *es una base de* Γ*.*

2. *Si* m *es el mínimo natural, tal que* $m\varphi_{\mathbf{u}}(\mathbf{w}) \in \Gamma \cap T(\Gamma)$*, entonces* $\Sigma(\varphi_{\mathbf{u}}) = m$*.*

Proposición 100 *Si* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T \in OC(\mathbb{Z}^2)$*, distinta de la identidad, entonces existe* $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^2$*, tal que:*

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) &= -\mathbf{axa}^{-1} \ o \\ T(\mathbf{x}) &= -\mathbf{ae_2xe_2}^{-1}\mathbf{a}^{-1} \end{aligned}$$

Demostración

En el caso de que $T \in OC(\mathbb{Z}^2)$ y $\det(T) = -1$, entonces T es una reflexión a través de un hiperplano, como es distinta de la identidad, entonces $T(\mathbf{e}_i) \neq \mathbf{e}_i$ para alguna $i = 1, 2$; consideremos al vector

$$\mathbf{b} = T(\mathbf{e}_i) - \mathbf{e}_i, \text{ con } T(\mathbf{e}_i) \neq \mathbf{e}_i,$$

como $T(\mathbf{e}_i)$ tiene entradas racionales entonces $T(\mathbf{e}_i) - \mathbf{e}_i$ tiene entrada racionales por lo cual podemos encontrar $\lambda \in \mathbb{Z}$ tal que $\lambda\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^2$, al definir $a = \lambda\mathbf{b}$, se obtiene que:

$$T(\mathbf{x}) = -\mathbf{axa}^{-1}.$$

En caso de que $T \in \mathrm{OC}(\mathbb{Z}^2)$ y $\det(T) = 1$ y sea distinta de la identidad, entonces tenemos que T es una rotación con un ángulo θ, por la proposición anterior entonces:

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{be_2xe_2b}^{-1} = \varphi_{\mathbf{b}}\varphi_{\mathbf{e}_2},$$

con $\mathbf{b} = \mathbf{T}(\mathbf{e}_1) - \mathbf{e}_1$, y existe $\lambda \in \mathbb{Z}$ tal que $\lambda\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^2$, al definir $a = \lambda\mathbf{b}$, se obtiene la igualdad:

$$\begin{aligned} \varphi_b\varphi_{e_2} &= \varphi_a\varphi_{e_2}, \\ T(\mathbf{x}) &= \mathbf{ae_2xe_2a}^{-1}. \end{aligned}$$

∎

4.2. Bases e índice de coincidencia para redes cuadradas

En esta sección se aprovecharán las propiedades las particularidades de las redes cuadradas para encontrar el índice y una base de de la red de coincidencia para una isometría de coincidencia; para resolver dichos problemas, basta con analizar el caso de la red cuadrada $\Gamma = \mathbb{Z}^2$.

Aplicando las proposiciones 94 y 98 se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 101 *Para la red* $\Gamma \in OC(\mathbb{Z}^2)$ *se cumple lo siguiente.*

1. *Si* $T \in OC(\Gamma)$ *entonces existe* $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^2$, *tal que:*

   a) $T = \varphi_{\mathbf{u}}$, *si* $\det(T) = -1$,

   b) $T = \varphi_{\mathbf{u}}\varphi_{\mathbf{e}_i}$ *para* $i = 1{,}2$; *con* $\{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2\}$ *la base canónica de* $\mathbb{R}^2$; *en caso de que* $\det(T) = 1$.

2. $\Sigma(\varphi_{\mathbf{u}})$ *divide a* $\mathbf{u}^2$.

Con lo anterior se caracteriza al grupo $OC(\mathbb{Z}^2)$ y se ha obtenido un procedimiento para obtener a cualquier elemento de $OC(\mathbb{Z}^2)$.

Debido a que $\varphi_{\mathbf{e}_i}(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$, se observa que:

$$\left(\varphi_{\mathbf{u}}\varphi_{\mathbf{e}_i}\right)(\mathbb{Z}^2) \cap \mathbb{Z}^2 = \varphi_{\mathbf{u}}(\mathbb{Z}^2) \cap \mathbb{Z}^2, \text{ con } \mathbf{u} \in \mathbb{Z}^2$$

y una consecuencia inmediata de la observación anterior es que cada vector $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^2$, define al menos tres transformaciones ortogonales que pertenecen a $OC(\mathbb{Z}^2)$, a saber:

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) &= -\mathbf{uxu}^{-1}, \\ R_{\mathbf{u}i}(\mathbf{x}) &= \mathbf{ae}_i\mathbf{xe}_i\mathbf{a}^{-1}, \text{ con } i = 1, 2. \end{aligned}$$

y además:

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{u}}(\mathbb{Z}^2) \cap \mathbb{Z}^2 &= R_{\mathbf{u}i}(\mathbb{Z}^2) \cap \mathbb{Z}^2, \\ \Sigma(\varphi_{\mathbf{u}}) &= \Sigma(R_{\mathbf{u}i}), \end{aligned}$$

por lo cual es suficiente con calcular una base de $\varphi_{\mathbf{u}}(\mathbb{Z}^2) \cap \mathbb{Z}^2$ para obtener una base de $R_{\mathbf{u}i}(\mathbb{Z}^2) \cap \mathbb{Z}^2$.

Consideremos a $\varphi_{\mathbf{u}} \in OC(\mathbb{Z}^2)$ con $\mathbf{u} = \alpha_1\mathrm{e}_1 + \alpha_2\mathrm{e}_2 \in \mathbb{Z}^2$ y $\gcd(\alpha_1, \alpha_2) = 1$,

$$\varphi_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{uxu}^{-1} = -\frac{\mathbf{uxu}}{\mathbf{u}^2}.$$

Notemos que para cualquier $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2$, se tiene que $\mathbf{u}^2 T(x) \in \mathbb{Z}^2$. Además se tiene los siguiente

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathbf{u}}(\mathbf{e}_1) &= \frac{(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)\,\mathbf{e}_1 - 2\alpha_1\alpha_2\mathbf{e}_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \\
\varphi_{\mathbf{u}}(\mathbf{e}_2) &= \frac{-2\alpha_1\alpha_2\mathbf{e}_1 - (\alpha_2^2 - \alpha_1^2)\,\alpha_2\mathbf{e}_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}
\end{aligned}$$

En caso de que α_1, α_2 sean impares entonces $(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)$ y $\alpha_1^2 + \alpha_2^2$ son pares por lo cual

$$\frac{\mathbf{u}^2}{2}\varphi_{\mathbf{u}}(e_i) \in \mathbb{Z}^2$$

no es difícil probar que $\frac{\mathbf{u}^2}{2}$ es el menor entero positivo tal que $\frac{\mathbf{u}^2}{2}\varphi_{\mathbf{u}}(\mathbf{e}_1) \in \mathbb{Z}^2$, por lo cual $\frac{\mathbf{u}^2}{2}$ divide a $\Sigma(\varphi_{\mathbf{u}})$.

Considerando a $\mathbf{c}' = \frac{\mathbf{u}^2}{2}T_{\mathbf{u}}(\mathbf{e}_1)$ y a $\mathbf{d}' = \frac{\mathbf{u}^2}{2}T_{\mathbf{u}}(\mathbf{e}_1)$ y la red generada por dichos vectores obtenemos una subred de $\varphi_{\mathbf{u}}(\mathbb{Z}^2) \cap \mathbb{Z}^2$, y por un razonamiento similar a uno ya utilizado se obtiene que $\Sigma(\varphi_{\mathbf{u}})$ divide a $\left(\frac{\mathbf{u}^2}{2}\right)^2$, en resumen obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{u}^2}{2} &\mid \Sigma(\varphi_{\mathbf{u}}), \\
\Sigma(\varphi_{\mathbf{u}}) &\mid \mathbf{u}^2, \\
\Sigma(\varphi_{\mathbf{u}}) &\mid \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2}\right)^2,
\end{aligned}$$

de las dos primeras obtenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^2 &= \Sigma(\varphi_{\mathbf{u}})\,q = \frac{\mathbf{u}^2}{2}pq, \\
2 &= pq
\end{aligned}$$

como p, q son enteros entonces, existen dos posibilidades:

1. $p = 2$ y $q = 1$, bajo estas condiciones se concluye que $\mathbf{a}^2 = \Sigma(\varphi_{\mathbf{u}})$, pero por la tercera condición se tiene que:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\mathbf{u}^2}{2}\right)^2 &= \mathbf{u}^2 k \\
\mathbf{u}^2 &= 4k,
\end{aligned}$$

la condición $\mathbf{a}^2 = 4k$ es imposible pues $\mathbf{a}^2$ al dividirse entre 4 queda como residuo 2.

2. La otra posibilidad es $p = 1$ y $q = 2$, por lo cual

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^2 &= \Sigma(\varphi_{\mathbf{u}})\,2, \\ \frac{\mathbf{u}^2}{2} &= \Sigma(\varphi_{\mathbf{u}}),\end{aligned}$$

y la anterior condición no entra en ninguna contradicción.

Ahora analizemos el caso en que α_1, α_2 sean primos relativos y uno de ellos par, no es difícil probar que $\mathbf{u}^2$ es el menor entero positivo tal que $\mathbf{u}^2 T(\mathbf{e}_i) \in \mathbb{Z}^2$, para $i = 1, 2$por lo cual $\mathbf{u}^2 \mid \Sigma(\varphi_{\mathbf{u}})$, por lo ya probado se deduce que $\mathbf{u}^2 = \Sigma(\varphi_{\mathbf{u}})$.

Proposición 102 *Si* $\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 \in \mathbb{Z}^2$ *y* $\gcd(\alpha_1, \alpha_2) = 1$, *se cumple lo siguiente:*

1. *Si α_1 y α_2 son impares entonces:*

$$\Sigma(\varphi_{\mathbf{u}}) = \Sigma(R_{\mathbf{a}i}) = \frac{\mathbf{u}^2}{2}.$$

2. *Si α_1 o α_2 es par, entonces:*

$$\Sigma(\varphi_{\mathbf{a}}) = \Sigma(R_{\mathbf{a}i}) = \mathbf{u}^2.$$

Demostración
Ya se hizo.

Teorema 103 *Sea* $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 \in \mathbb{Z}^2$ *con* $\gcd(\alpha_1, \alpha_2) = 1$ *entonces las redes* $\mathbb{Z}^2 \cap \varphi_{\mathbf{a}}(\mathbb{Z}^2)$ *y* $\mathbb{Z}^2 \cap R_{\mathbf{a}}(\mathbb{Z}^2)$ *tienen una base cuadrada.*

Si α_1 o α_2 es par, entonces $\mathbf{a}^2$ es impar y además

$$[\mathbb{Z}^2 : \mathbb{Z}^2 \cap \varphi_{\mathbf{a}}(\mathbb{Z}^2)] = \mathbf{a}^2,\ \mathbf{a}^2 \text{ es impar},$$

en caso de que α_1 y α_2 son impares entonces $\mathbf{a}^2$ es par y además:

$$[\mathbb{Z}^2 : \mathbb{Z}^2 \cap R_{\mathbf{a}}(\mathbb{Z}^2)] = \frac{\mathbf{a}^2}{2},\ \mathbf{a} \text{ es par}.$$

Caso I $\mathbf{a}^2$ es impar
Consideremos al vector $\mathbf{b} = -\alpha_2\mathbf{e}_1 + \alpha_1\mathbf{e}_2$, se sabe que:

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}) &= -\mathbf{a}, \\ \varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) &= \mathbf{b}\end{aligned}$$

y la red generada por $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ es subred de $\mathbb{Z}^2 \cap \varphi(\mathbb{Z}^2)$ como $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a}^2$ entonces :

$$\mathbb{Z}\mathbf{a} + \mathbb{Z}\mathbf{b} = \mathbb{Z}^2 \cap R_{\mathbf{a}}(\mathbb{Z}^2)$$

Caso II a^2 es par entonces existen $\mathbf{c}, \mathbf{d} \in$: $\mathbb{Z}^2 \cap R_a(\mathbb{Z}^2)$ tales que

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^2 &= \mathbf{c}^2 \\ \mathbf{dc} &= -\mathbf{cd} \end{aligned}$$

y además $\{\mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ es base cuadrada de $\mathbb{Z}^2 \cap R_a(\mathbb{Z}^2)$.

En efecto:

Consideremos $\mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{Z}^2$, tales que

$$\begin{aligned} \mathbf{c} + \mathbf{d} &= \mathbf{a}, \\ \mathbf{c}^2 &= \mathbf{d}^2 = \frac{\mathbf{a}^2}{2}, \\ \mathbf{c} \wedge \mathbf{d} &= \frac{\mathbf{a}^2}{2} = [\mathbb{Z}^2 : \mathbb{Z}^2 \cap \varphi_a(\mathbb{Z}^2)] \end{aligned}$$

se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{c}'), \\ \mathbf{d} &= \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \varphi_a(\mathbf{d}') \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= -\alpha_2 \mathbf{e}_1 + \alpha_1 \mathbf{e}_2, \ \mathbf{b} \text{ es ortogonal a } a. \\ \mathbf{c}' &= -\frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b}), \\ \mathbf{d}' &= \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \end{aligned}$$

satisface lo pedido, es decir, $\{\mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ es base cuadrada de $\mathbb{Z}^2 \cap T(\mathbb{Z}^2)$.

■

Corolario 104 *Sea una $T \in OC(\mathbb{Z}^2)$, con $\mathbb{Z}^2$, entonces $\mathbb{Z}^2 \cap T(\mathbb{Z}^2)$ es una red cuadrada.*

Demostración

La transformación ortogonal T es de la forma $T(\mathbf{x}) = -\mathbf{axa}^{-1}$ o de la forma $T(\mathbf{x}) = \mathbf{ae}_2\mathbf{xe}_2\mathbf{a}^{-1}$ con $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 \in \mathbb{Z}^2$ con $\gcd(a_1, a_2) = 1$.

■

A continuación se muestra una tabla que resume los resultados obtenidos en esta parte del trabajo.

Bases e índice de Coincidencia para una rotación $R \in OC(\mathbb{Z}^2)$

	Base de $\mathbb{Z}^2 \cap R(\mathbb{Z}^2)$	Índice de Coincidencia
$\mathbf{a}^2$ impar	$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$	$\mathbf{a}^2$
$\mathbf{a}^2$ par	$\left\{\frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{b}), \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})\right\}$	$\dfrac{\mathbf{a}^2}{2}$

Donde $\mathbf{a} = \lambda(R(e_1) - e_1)$ es un vector de $\mathbb{Z}^2$ con entradas primas relativas y $\mathbf{b} = \mathbf{a}e_{12}$.

En la sección de ejemplos daremos la representación matricial para $T \in OC(\mathbb{Z}^2)$.

4.3. Bases e índice de coincidencia para redes rómbicas

Al considerar una red rómbica $\Gamma = \mathbb{Z}\mathbf{a}_1 + \mathbb{Z}\mathbf{a}_2$, es decir, con la condición $\|\mathbf{a}_1\| = \|\mathbf{a}_2\|$ entonces $\{\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^2$, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 = 1$. Al aplicar las proposiciones 94 y 98 se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 105 *Sea* $\Gamma = \mathbb{Z}\mathbf{a}_1 + \mathbb{Z}\mathbf{a}_2$ *una red tal que* $\mathbf{a}_1^2 = \mathbf{b}_1^2 = 1$, $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \in \mathbb{Q}$, *las siguientes proposiciones son válidas*

1. *si* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T \in OC(\Gamma)$, *distinta de la identidad, entonces existe* $\mathbf{c} \in \Gamma$, *tal que:*

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) &= -\mathbf{c}\mathbf{x}\mathbf{c}^{-1}, \text{ si } \det(T) = -1, \\ T(x) &= \varphi_{\mathbf{c}}\varphi_{\mathbf{d}_2}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\mathbf{d}_2\mathbf{x}\mathbf{d}_2^{-1}\mathbf{c}^{-1} \text{ si } \det(T) = 1, \end{aligned}$$

   donde $\mathbf{d}_2 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$.

2. *Existe* $\lambda \in \mathbb{N}$, *tal que* $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{c}(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) \in \Gamma$, *con* $\mathbf{v}$ *un vector ortogonal a* $\mathbf{c}$.

3. $\Sigma(\varphi_{\mathbf{a}})$ *divide a* $\lambda(\mathbf{c}^2)$.

Observaciones:

1. Notemos que del teorema anterior se puede concluir que T es la composición de dos reflexiones de hiperplanos que pertencen a $OC(\Gamma)$.

2. Si $\mathbf{c} \in \Gamma$, no necesariamente, $\varphi_{\mathbf{c}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{c}\mathbf{x}\mathbf{c}^{-1}$, está en $OC(\Gamma)$.

Cabe destacar lo siguiente; debido a que $\varphi_{\mathbf{a}} = \varphi_{\lambda\mathbf{a}}$ para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces podemos considerar a las coordenadas del vector **c**, con respecto a la base $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ del corolario anterior son enteros y primos relativos,.

Debido a que $\varphi_{\mathbf{d}_2}(\Gamma) = \Gamma$, se observa que:

$$\left(\varphi_{\mathbf{c}}\varphi_{\mathbf{d}_2}\right)(\Gamma) \cap \Gamma = \varphi_{\mathbf{c}}(\Gamma) \cap \Gamma, \text{ con } \mathbf{a} \in \Gamma$$

y una consecuencia inmediata de la observación anterior es que cada vector $\mathbf{a} \in \Gamma$, define dos transformaciones ortogonales a saber:

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{c}}(x) &= -\mathbf{cxc}^{-1}, \\ R_{\mathbf{c}}(\mathbf{x}) &= \mathbf{cd}_2\mathbf{xd}_2\mathbf{c}^{-1}, \end{aligned}$$

y además, en caso de que $\varphi_{\mathbf{c}}(x) \in OC(\Gamma)$ entonces:

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{c}}\left(\mathbb{Z}^2\right) \cap \mathbb{Z}^2 &= R_{\mathbf{c}}\left(\mathbb{Z}^2\right) \cap \mathbb{Z}^2, \\ \Sigma(\varphi_{\mathbf{c}}) &= \Sigma(R_{\mathbf{c}}), \end{aligned}$$

por lo cual es suficiente con calcular una base de $\varphi_{\mathbf{a}}\left(\mathbb{Z}^2\right) \cap \mathbb{Z}^2$ para obtener una base de $R_{\mathbf{a}}\left(\mathbb{Z}^2\right) \cap \mathbb{Z}^2$.

Para encontrar la base y el índice de coincidencia para redes rómbicas, se procede como se indica en la demostración de la proposición 99.

A continuación analizaremos el caso en el que la red rómbica una red rómbica $\Gamma = \mathbb{Z}\mathbf{a} + \mathbb{Z}\mathbf{b}$, tal que $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 = 1$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \notin \mathbb{Q}$,

Para cualesquiera **x** y **v** distinta de cero se tiene que:

$$-\mathbf{vxv}^{-1} = -2\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v}^2}\mathbf{v} + \mathbf{x} \tag{4.1}$$

A continuaciEn seguida encontraremos condiciones suficientes para que la transformación ortogonal $\varphi_{\mathbf{c}}(x) = -\mathbf{cxc}^{-1} \in OC(\Gamma)$ con $c \in \Gamma = \mathbb{Z}\mathbf{a}_1 + \mathbb{Z}\mathbf{a}_2$ una red; para que $\varphi_{\mathbf{c}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{cxc}^{-1} \in OC(\Gamma)$ para cada $i = 1, 2$ es suficiente que existan $m_i \in \mathbb{Z}$ tal que $m_i\varphi_{\mathbf{c}}(a_i) = m_i\left(-\mathbf{ca}_i\mathbf{c}^{-1}\right) \in \Gamma$, esto es:

$$m_i\left(-\mathbf{ca}_i\mathbf{v}^{-1}\right) = -m_i\frac{2\left(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}_i\right)}{\mathbf{c}^2}\mathbf{v} + m_i\mathbf{a}_i \in \Gamma,$$

de donde se concluye que $-m_i\frac{2(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}_i)}{\mathbf{c}^2}\mathbf{c} \in \Gamma$, por lo cual es suficiente que:

$$\frac{\left(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}_i\right)}{\mathbf{c}^2} \in \mathbb{Q}$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer $\mathbf{c} = \alpha_1\mathbf{a}+\alpha_2\mathbf{b} \in \Gamma$, con $\gcd(\alpha_1, \alpha_2) = 1$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}_2, \\
\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}_2 &= \alpha_2 + \alpha_1 \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2, \\
\mathbf{c}^2 &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2 \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2,
\end{aligned}$$

En caso de que $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \notin \mathbb{Q}$.

Se debe de cumplir que:

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2 \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2} &= \frac{p}{q}, \\
\frac{\alpha_2 + \alpha_1 \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2 \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2} &= \frac{r}{s},
\end{aligned}$$

con $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$ y además $\gcd(p, q) = \gcd(r, s) = 1$; de las expresiones anteriores obtenemos:

$$\begin{aligned}
\alpha_2 (q - 2\alpha_1 p) \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 &= p\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right) - q\alpha_1, \\
\alpha_1 (s - 2\alpha_2 r) \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 &= r\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right) - s\alpha_2,
\end{aligned}$$

si algunos de los factores de $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2$ fueran distinto de cero, entoces se llegaría a la conclusión de que $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2$, tiene que ser racional por lo cual, los factores de $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2$ tienen que ser igual a cero, es decir, se deben de satisfacer:

$$\begin{aligned}
\alpha_2 (q - 2\alpha_1 p) &= 0, \\
\alpha_1 (s - 2\alpha_2 r) &= 0, \\
p\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right) - q\alpha_1 &= 0, \\
r\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right) - s\alpha_2 &= 0,
\end{aligned}$$

algún $\alpha_i \neq 0$ para $i = 1, 2$.

Caso I $\alpha_1 \neq 0$;

Se debe de cumplir:

$$\frac{r}{s} = \frac{1}{2\alpha_2},$$

así que $r = 1$, $s = 2\alpha_2$; por lo tanto:

$$\begin{aligned}
r\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right) - s\alpha_2 &= 0, \\
\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right) - 2\alpha_2^2 &= 0; \\
\alpha_1^2 - \alpha_2^2 &= 0; \\
(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_2) &= 0;
\end{aligned}$$

en conclusión $\mathbf{c} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$, o $\mathbf{c} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$.

En el caso de que $\alpha_2 \neq 0$; llegamos a la misma conclusión;

En resumen si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \notin \mathbb{Q}$, entonces: $OC(\Gamma) = \{I, \varphi_{\mathbf{d}_1}, \varphi_{\mathbf{d}_2}, \varphi_{\mathbf{d}_1}\varphi_{\mathbf{d}_2}\}$, con $\Gamma = \mathbb{Z}\mathbf{a}_1 + \mathbb{Z}\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_1^2 = \mathbf{a}_2^2 = 1$, $\mathbf{d}_1 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ y $\mathbf{d}_2 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$.

4.4. Bases e índice de coincidencia para redes rectangulares

También aprovecharemos las propiedades especiales de una red rectangular plana generada por los vectores $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$; sin perdida de generalidad podemos asumir $\mathbf{a}^2 = 1$; al usar las proposiciones 94 y 98, se obtienen el siguiente corolario.

Proposición 106 *Sea* $\Gamma = \mathbb{Z}\mathbf{a} + \mathbb{Z}\mathbf{b}$ *una red tales que* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *son ortogonales,* $\mathbf{a}^2 = 1$, $\mathbf{b}^2 \in \mathbb{Q}$.

1. *si* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T \in OC(\Gamma)$, *distinta de la identidad, entonces existe* $\mathbf{c} \in \Gamma$, *tal que:*

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) &= -\mathbf{cxc}^{-1}, \text{ si } \det(T) = -1, \\ T(\mathbf{x}) &= \varphi_{\mathbf{c}}\varphi_{\mathbf{a}}(x) = \mathbf{caxa}^{-1}\mathbf{c}^{-1} \text{ si } \det(T) = 1. \end{aligned}$$

2. *Existe* $\lambda \in \mathbb{N}$, *tal que* $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{c}(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) \in \Gamma$, *con* $\mathbf{v}$ *ortogonal al vector* $\mathbf{c}$.

Observaciones:

1. Notemos que del teorema anterior se puede concluir que T es la composición de dos reflexiones de hiperplanos que pertencen a $OC(\Gamma)$.

2. Si $c \in \Gamma$, no necesariamente, $\varphi_{\mathbf{c}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{cxc}^{-1}$, está en $OC(\Gamma)$.más adelante daremos criterios para saber cuando $\varphi_{\mathbf{c}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{cxc}^{-1} \in OC(\Gamma)$.

Debido a que $\varphi_{\mathbf{a}}(\Gamma) = \Gamma$, se observa que:

$$(\varphi_{\mathbf{c}}\varphi_{\mathbf{a}})(\Gamma) \cap \Gamma = \varphi_{\mathbf{c}}(\Gamma) \cap \Gamma, \text{ con } \mathbf{c} \in \Gamma$$

y una consecuencia inmediata de la observación anterior es que cada vector $\mathbf{c} \in \mathbb{Z}^2$, define dos transformaciones ortogonales a saber:

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{c}}(\mathbf{x}) &= -\mathbf{cxc}^{-1}, \\ R_{\mathbf{c}}(x) &= \mathbf{caxa}^{-1}\mathbf{c}^{-1}, \end{aligned}$$

y además, en caso de que $\varphi_{\mathbf{c}}(x) \in OC(\Gamma)$ entonces:

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{c}}(\mathbb{Z}^2) \cap \mathbb{Z}^2 &= R_{\mathbf{c}}(\mathbb{Z}^2) \cap \mathbb{Z}^2, \\ \Sigma(T_{\mathbf{c}}) &= \Sigma(R_{\mathbf{c}}), \end{aligned}$$

por lo cual es suficiente con calcular una base de $\varphi_{\mathbf{c}}(\mathbb{Z}^2) \cap \mathbb{Z}^2$ para obtener una base de $R_{\mathbf{c}}(\mathbb{Z}^2) \cap \mathbb{Z}^2$ y para ello se puede usar la demostración de la proposición 99.

A continuación analizamos el que $\mathbf{a}^2 = 1$ y $\mathbf{b}^2 = \lambda \notin \mathbb{Q}$, sea $\mathbf{c} = \alpha_1\mathbf{a}+\alpha_2\mathbf{b} \in \Gamma$, con $\gcd(\alpha_1, \alpha_2) = 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{c}\cdot\mathbf{a} &= \alpha_1 \\ \mathbf{c}\cdot\mathbf{b} &= \lambda\alpha_2, \\ \mathbf{c}^2 &= \alpha_1^2 + \lambda\alpha_2^2, \end{aligned}$$

Se debe de cumplir que:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \lambda\alpha_2^2} &= \frac{p}{q}, \\ \frac{\lambda\alpha_2}{\alpha_1^2 + \lambda\alpha_2^2} &= \frac{r}{s}, \end{aligned}$$

con $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$ y además $\gcd(p, q) = \gcd(r, s) = 1$; de las expresiones anteriores obtenemos:

$$\begin{aligned} p\alpha_2^2\lambda &= \alpha_1(q - \alpha_2 p) \\ \alpha_2\lambda(\alpha_2 r - s) &= r\alpha_1^2 \end{aligned}$$

si algunos de los factores de λ fueran distinto de cero, entoces se llagaría a la conclusión de que λ, tiene que ser racional por lo cual, los factores de λ tienen que ser igual a cero, es decir, se deben de satisfacer $\alpha_1 = 0$ o $\alpha_2 = 0$; en conclusión $c = \mathbf{a}$ o $c = \mathbf{b}$.

En el caso de que $\alpha_2 \neq 0$; llegarnos a la misma conclusión;

En resumen si $\mathbf{b}^2 \notin \mathbb{Q}$, entonces: $OC(\Gamma) = \{I, \varphi_{\mathbf{a}}, \varphi_{\mathbf{b}}, \varphi_{\mathbf{b}}\varphi_{\mathbf{a}}\}$, con $\Gamma = \mathbb{Z}\mathbf{a} + \mathbb{Z}\mathbf{b}$, y $\mathbf{a}^2 = 1$, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ortogonales.

4.5. Ejemplos

1. Consideremos el problema de determinar la base de una CSL, para una red cuadrada, correspondiente a $\Sigma = 17 = 1^2+4^2$. Se sabe que (ver R) que $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1}{4}$ para un ángulo de rotación $\theta = 28{,}0724^o$. Con respecto a la base cánonica, la matriz de la rotación con un ángulo θ es:

$$\begin{pmatrix} \frac{15}{17} & -\frac{8}{17} \\ \frac{8}{17} & \frac{5}{17} \end{pmatrix}.$$

Al considerar $\mathbf{a} = T(\mathbf{e}_1) - \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{17} \\ \frac{8}{17} \end{pmatrix}$; así que podemos considerar al vector $\mathbf{a} = (-1, 4) \in \mathbb{Z}^2$ que se obtiene de la siguiente manera: $\frac{17}{2}\begin{pmatrix} -\frac{2}{17} \\ \frac{8}{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Así que la expresión en álgebras de Clifford de T es:

$$T(\mathbf{x}) = (-\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2)\,\mathbf{e}_2\mathbf{x}\mathbf{e}_2\,(-\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2)^{-1},$$

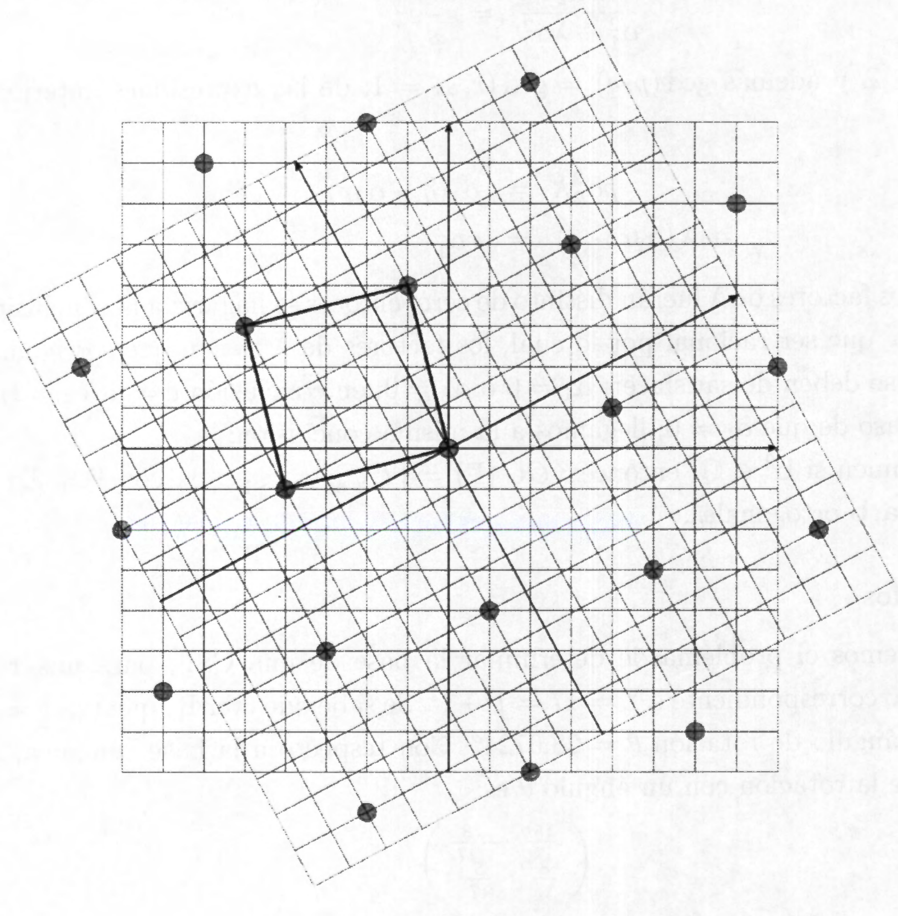
Por lo ya analizado el índice de coincidencia es:

$$[\mathbb{Z}^2 : \mathbb{Z}^2 \cap T(\mathbb{Z}^2)] = \mathbf{a}^2 = 17$$

y la base de la red $\mathbb{Z}^2 \cap T(\mathbb{Z}^2)$ es:

$$\{-\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2, -4\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1\}.$$

La siguiente gráfica ilustra lo que hemos concluido:



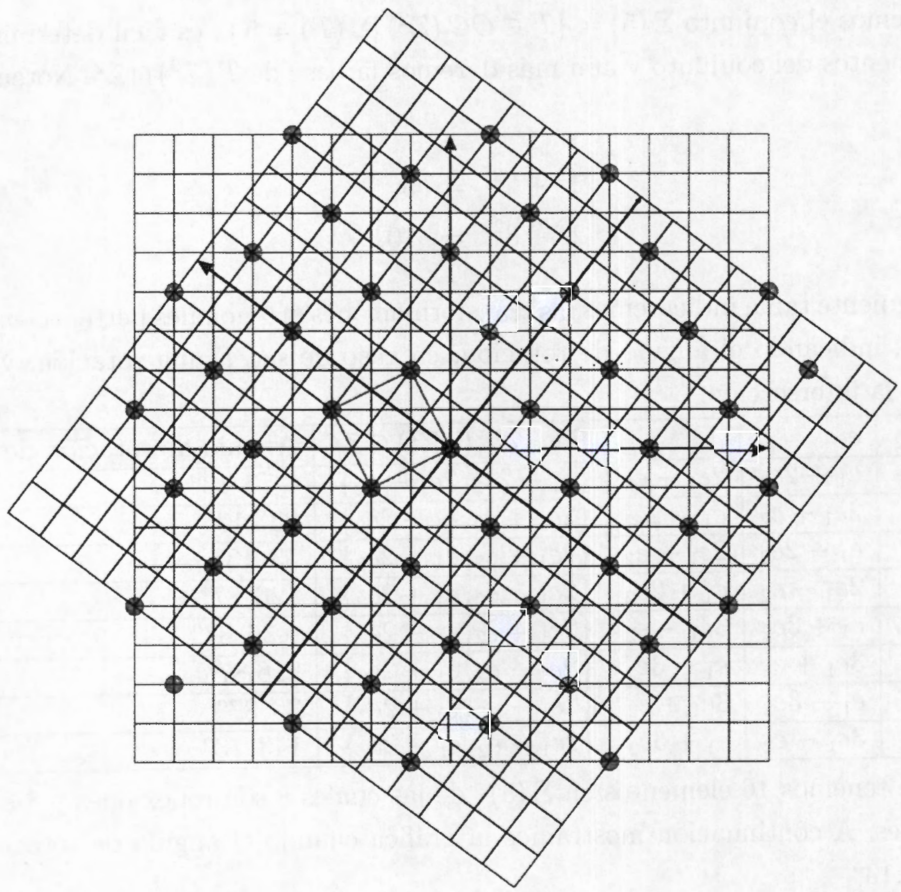
2. Definiremos el conjunto $\Sigma(5) = \{T \in OC(\mathbb{Z}^2) \,|\Sigma(T) = 5\}$, es fácil determinar los elementos del conjunto y aún más daremos la base de $T(\mathbb{Z}^2) \cap \mathbb{Z}^2$. Notemos que:

$$
\begin{aligned}
1^2 + 2^2 &= 5, \\
1^2 + 3^2 &= 10,
\end{aligned}
$$

en la siguiente tabla indicaremos las transformaciones ortogonales pertenecientes a $\Sigma(5)$, indicando el ángulo de rotación, en caso de ser T una rotación, y la base de la intersección.

α_1	α_2	c	d	Base de $T(\mathbb{Z}^2) \cap \mathbb{Z}^2$	Ángulo de rotación de R_c
1	2	$e_1 + 2e_2$	$2e_1 - e_2$	$\{e_1 + 2e_2, 2e_1 - e_2\}$	-53.13^o
2	1	$2e_1 + e_2$	$e_1 - 2e_2$	$\{2e_1 + e_2, e_1 - 2e_2\}$	$233{,}13^o$
1	-2	$e_1 - 2e_2$	$2e_1 + e_2$	$\{2e_1 + e_2, e_1 - 2e_2\}$	53.13^o
2	-1	$2e_1 - e_2$	$e_1 + 2e_2$	$\{2e_1 - e_2, e_1 + 2e_2\}$	126.87^o
1	3	$e_1 + 3e_2$	$3e_1 - e_2$	$\{2e_1 + e_2, e_1 - 2e_2\}$	-36.87^o
3	1	$3e_1 + e_2$	$e_1 - 3e_2$	$\{2e_1 - e_2, e_1 + 2e_2\}$	$216{,}87^o$
1	-3	$e_1 - 3e_2$	$3e_1 + e_2$	$\{2e_1 - e_2, e_1 + 2e_2\}$	36.87^o
3	-1	$3e_1 - e_2$	$e_1 + 3e_2$	$\{2e_1 + e_2, e_1 - 2e_2\}$	143.13^o

En total tenemos 16 elementos en $\Sigma(5)$, de las cuales 8 son reflexiones y 8 son rotaciones. A continuación mostramos la gráfica cuando el ángulo de rotación es de 53.13^o.



Representación matricial de $OC(\mathbb{Z}^2)$

Sabemos que $T \in OC(\mathbb{Z}^2)$ es de la forma:

$$T(\mathbf{x}) = \begin{cases} \varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{axa}^{-1}, \text{ si } \det(T) = -1, \\ \varphi_{\mathbf{a}}\varphi_{\mathbf{e}_2}(\mathbf{x}) = \mathbf{ae}_2\mathbf{xe}_2^{-1}\mathbf{a}^{-1}, \text{ si } \det(T) = 1, \end{cases}$$

donde $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ y $\gcd(\alpha, \beta) = 1$. Por lo anterior la representación matricial de T, con respecto a la base canónica, es de la forma:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{-\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2+\beta^2} & -\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2} \\ -\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2} & \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2} \end{pmatrix} \text{ si } \det T &= -1 \\ \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2} & -\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2} \\ \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2} & \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2} \end{pmatrix}, \text{ si } \det T &= 1 \end{aligned}$$

3. Consideremos a la red Γ generada $\mathbf{a}_1 = (1,0)$, $\mathbf{a}_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, las diagonales son $\mathbf{d}_1 = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\mathbf{d}_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Consideremos a la $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación ortogonal, cuya representación matricial, con respecto a la base canónica es: $\begin{pmatrix} -\frac{13}{14} & -\frac{3\sqrt{3}}{14} \\ \frac{3\sqrt{3}}{14} & -\frac{13}{14} \end{pmatrix}$ y la representación matricial con respeto a la base $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ es:

$$\begin{pmatrix} -\frac{8}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{5}{7} \end{pmatrix}$$

El ángulo de rotación es 158.21^o. Se tiene que $T(\mathbf{d}_1) - \mathbf{d}_1 = -\frac{45}{14}\mathbf{e}_1 - \frac{9\sqrt{3}}{14}\mathbf{e}_2 = -\frac{18}{7}\mathbf{a}_1 - \frac{9}{7}\mathbf{a}_2$, así que podemos considerar al vector:

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2,$$

como T es una rotación, entonces

$$T(\mathbf{x}) = T_{\mathbf{a}} T_{\mathbf{d}_2}(\mathbf{x})$$

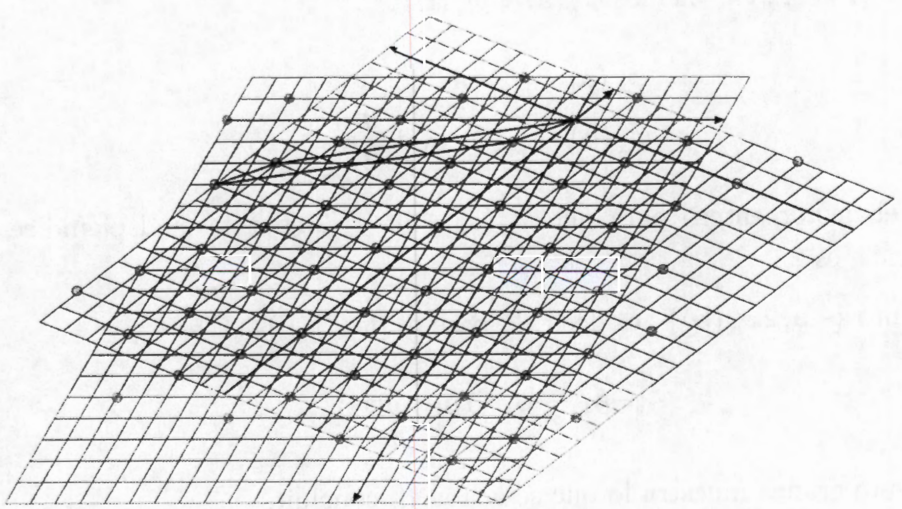
el vector $\mathbf{b} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$, satisface que $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ genera a la red Γ, para encontrar la base de $\varphi_{\mathbf{a}}(\Gamma) \cap \Gamma$, calculemos $\varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{a})$ y $\varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})$:

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}) &= -\mathbf{a}, \\ \varphi_{\mathbf{a}}(b) &= -\frac{9}{7}\mathbf{a} + \mathbf{b}, \end{aligned}$$

así que el menor entero para que $\varphi_{\mathbf{a}}(b) \in \Gamma$ es 7, por lo cual el índice de coincidencia es 7.

El conjunto $\{-\mathbf{a}, 7\varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})\}$, es decir, la base es de $T(\Gamma) \cap \Gamma$ es

$$\{-2a_1 - a_2, -11a_1 - 2a_2\}$$



4. Consideremos a la red rectangular Γ generada por los vectores $\mathbf{a}_1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\mathbf{a}_2 = \left(1, \sqrt{2}\right)$.

Consideremos a la $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación ortogonal, cuya representación matricial, con respecto a la base canónica es:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

y la representación matricial con respeto a la base $\{a_1, a_2\}$ es:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

El ángulo de rotación es 120^o. Se tiene que $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ $T(\mathbf{a}_2) - \mathbf{a}_2 = -\frac{3}{2}\mathbf{a}_1 - \frac{3}{2}\mathbf{a}_2$, así que podemos considerar al vector:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2,$$

como T es una rotación, entonces

$$T(x) = T_{\mathbf{a}} T_{\mathbf{a}_1}(x)$$

el vector $\mathbf{b} = 5\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_2$, satisface que $\{a, b\}$ genera a la red Γ, para encontrar la base de $T(\Gamma) \cap \Gamma$, calculemos $\varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{a})$ y $\varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})$:

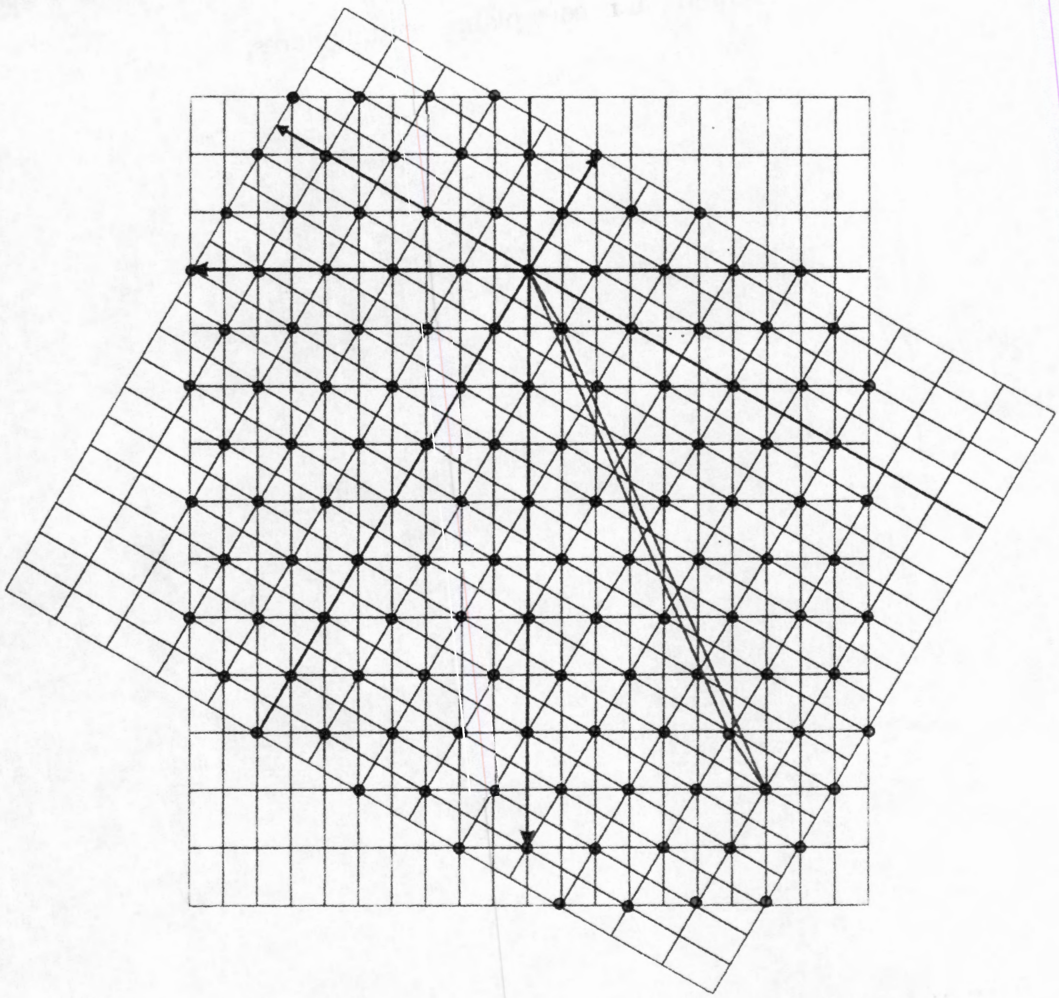
$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}) &= -\mathbf{a}, \\ \varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) &= -\frac{7}{2}\mathbf{a}_1 - \frac{9}{2}\mathbf{a}_2, \end{aligned}$$

así que el menor entero para que $\varphi_{\mathbf{a}}(b) \in \Gamma$ es 2, por lo cual el índice de coincidencia es 2.

El conjunto $\{-\mathbf{a}, 2\varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})\}$, es decir, la base es de $T_a(\Gamma) \cap \Gamma$ es

$$\{-\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2, -7\mathbf{a}_1 - 9\mathbf{a}_2\}$$

La siguiente gráfica muestra lo que se acaba de concluir.



4.6. Resultados importantes

1. En el capítulo anterior se caracterizaron las isometrías de coincidencia para redes cuadradas n- dimensionales y en este capítulo se utilizó dicha caracterización para encontrar una base y el índice de coincidencia para redes de coincidencia planas, en el caso de que la red sea cuadrada.

2. En el caso de las redes cuadradas planas; se demostró que la red de coincidencias también es cuadrada.

3. Con pequeñas adaptaciones se han caracterizado las isometrías de coincidencia redes planas en caso de que sean rómbicas; estableciendo un algoritmo para calcular su índice de coincidencia y una base.

4. Lo mismo se ha logrado para redes planas rectangulares.

Capítulo 5
CONCLUSIONES

Esta tesis en su planteamiento original se propusieron varios objetivos entre ellos obtener una demostración constructiva del Teorema de Cartan-Dieudonné, el haber logrado este objetivo nos permitió obtener un algoritmo que permite descomponer una transfromación ortogonal como producto de reflexiones a través de un hiperplano y nos abrió la posbilidad de aplicar este algoritmo para estudiar la estructura de las isometrías de coincidencia de redes.

Cabe aclarar que el problema de las isometrías de coincidencia para redes, casi no se había abordado el caso de las redes no cuadradas y en esta tesis, debido al desarrollo de la misma, nos fue posible caracterizar las isometrías de coincidencia para redes no cuadradas en el plano. Además no se había determinado, antes de esta tesis, un mecanismo general para encontrar la base de una red de coincidencias.

En el caso de las redes cuadradas n-dimensionales hemos demostrado una especie de Teorema de Cartan-Dieudonné, más especícamente, una isometría es de coincidencia si y sólo si es la descomposición de reflexiones a través de hiperplanos ortogonales a los vectores de la red. Este resultado en [Z1, Z2] ha sido generalizado para otro tipo de redes n-dimensionales.

Debido a la generelazación de los resultados obtenidos en esta tesis, se pueden abordar problemas futuros como:

1. Comparación numérica entre usar matrices y álgebras de Clifford para descomponer una transformación ortogonal en reflexiones a través de hiperplanos.

2. Utilizar el algoritmo encontrado en la tesis para la descomposición QR.

3. Caracterización de las isometrías de coincidencia en el plano hiperbólico.

4. Dada la descomposición de una isometría de coincidencia en reflexiones a través de hiperplanos; encontrar un mecanismo que nos permita determinar el índice de coincidencia y una base para redes n- dimensionales en espacios euclídeos e hiperbólicos.

Capítulo 5

CONCLUSIONES

Esta tesis tuvo su planteamiento original en [illegible] obtener una demostración constructiva del Teorema de Cartan-Dieudonné. Habiendo logrado este objetivo nos permitió obtener un algoritmo eficiente [illegible] descomponer una transformación ortogonal como producto de reflexiones [illegible] en un hiperplano y más aún, la posibilidad de utilizar este algoritmo para [illegible] existencia de las isometrías de coincidencia de redes.

Cabe aclarar que el problema de las isometrías de coincidencia [illegible] había abordado el caso de las redes no [illegible]. Y con esta tesis, habiendo el desarrollo de la misma, nos fue posible caracterizar las [illegible] para redes [illegible], así en el plano. Además, no se había desarrollado [illegible] hasta un mecanismo general para [illegible] de las isometrías de coincidencia.

En el caso de las redes [illegible] la descomposición del Teorema de Cartan-Dieudonné [illegible] si y sólo si es la de composición de reflexiones a través de hiperplanos ortogonales a los vectores de la red. Este resultado es válido [illegible] para cualquier tipo de redes n-dimensionales.

Debido a la generalización de los resultados obtenidos en esta tesis, se puede abordar problemas futuros como:

1. Comparación numérica entre usar matrices y álgebra de Clifford para descomponer una transformación ortogonal en reflexiones a través de hiperplanos.

2. Utilizar el algoritmo encontrado en la tesis para la descomposición QR.

3. Caracterización de los [illegible] de coincidencia en el plano hiperbólico.

4. Dada la descomposición de una isometría de coincidencia en reflexiones a través de hiperplanos, encontrar [illegible] que permita determinar el índice de coincidencia y una base para redes n-dimensionales en espacios euclidianos e hiperbólicos.

Bibliografía

[A] G. Aragón-Camarasa, J.L. Aragón G. Aragón-González and M.A. Rodríguez-Andrade, *Clifford Algebra with Mathematica* Enviado para publicación a Transactions on Mathematical Software.

[AR] G. Aragón, J.L. Aragón and M.A. Rodríguez, *Clifford Algebras and Geometric Algebra*. Advances in Applied Clifford Algebras, Vol. 7 No. 2, (1997) 91-102.

[AR1] G. Aragón, J.L. Aragón, F Dávila, A Gómez and M.A. Rodríguez *Modern Geometric Calculations in Cristallography.* **Geometric Algebra with Applications in Science and Engineering.** Editors: Eduardo Corrochano y Garret Sobczyk. Birkhauser 2001.

[AR2] G. Aragón, J.L. Aragón and M.A. Rodríguez, *The decomposition of an orthogonal transformation as a product of reflections.* J. Math. Phys. 47, 013509 (2006) (10 pages)

[BA] Michael Baake. *Solution of the Coincidence Problem in dimensions* $d \leq 4$.

[DS] R. Delanghe, F. Sommen y V. Souček. *Clifford Algebra and Spinor Valued Functions.* Kluwer Academics Publishers, 1992.

[FO] M.A. Fortes. *N-Dimensional Coincidence-Site-Lattice Theory.* Acta Cryst. (1983). A39, 351-357.

[H1] David Hestenes, *New Foundations for Classical Mechanics.* Kluwer Academics Publishers, 1993.

[H2] David Hestenes y G. Sobczyk, *Clifford Algebra to Geometric Calculus* . Kluwer Academics Publishers, 1984.

[H3] David Hestenes. *Space-Time Algebra.* Gordon and Breach, N.Y., 1966.

[PO] L. S. Pontriagin, *Grupos Continuos.* Editorial Mir Moscú; URSS, 1978.

[P1] I. Porteous, *Topological Geometry*. Cambridge University Press, 1969.

[P2] I. Porteous, *Clifford Algebras and the Classical Gropus*. Cambridge University Press, 1969.

[RO1] M.A. Rodríguez, G. Aragón, J.L. Aragón and Luis Verde-Star *Clifford algebra approach to the coincidence problem for planar lattices*. Acta Cryst. (2005). A61, 173-184.

[RO1] M.A. Rodríguez, Luis Verde-Star and G. Aragón, J.L. Aragón *A cosntructive proof of the Cartan-Dieudonné theorem on generalized scalar products spaces*. Enviado a Linear Algebra and its applications.

[RO] Joseph Rotman, *An Introduction to the Theory of Groups;* Third Edition; Allyn and Bacon Inc., 1984.

[ST] E. Snapper, R.J. Troyer, *Metric Affine Geometry. Dover Publications, Inc.* 1971.

[U1] F. Uhlig. *Constructive ways for generating (generalized) real orthogonal matrices as products of (generalized) symmetries*. Linear Algebra Appl. 332/334 (2001), 459–467.

[Z1] Y. M. Zou.*Indices of coincidence isometries of the hypercubic lattice $\mathbb{Z}^n$*. Acta Cryst. (2006). A62, 454-458.

[Z2] Y. M. Zou. *Structures of coincidence symmetry groups*. Acta Cryst. (2006) A62, 109-114

Índice alfabético