

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA- UNIDAD IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA**

**Abscisa de estabilidad,
generación de atractores caóticos y
algunas propiedades del conjunto de polinomios
Hurwitz Hadamardizados**

Tesis

Que para obtener el grado de
Doctor en Ciencias (Matemáticas)

Presenta:

Edgar Cristian Díaz González
Director: **Dr. Baltazar Aguirre Hernández**

Director de tesis: Dr. Baltazar Aguirre Hernández

Jurado Calificador:

Presidente: Dr. Alejandro Ricardo Femat Flores
Secretario: Dr. Julio Ernesto Solís Daun
Vocal: Dr. Joaquín Collado Moctezuma
Vocal: Dr. Carlos Ibarra Valdez
Vocal: Dr. Baltazar Aguirre Hernández

Ciudad de México, 30 de Noviembre de 2016

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Abscisa de estabilidad, generación de atractores caóticos y algunas propiedades del
conjunto de polinomios Hurwitz Hadamardizados

Tesis que para obtener el grado de Doctor en Ciencias presenta:

El M. en C. Edgar Cristian Díaz González

Asesor: Dr. Baltazar Aguirre Hernández

Posgrado: Doctorado en Ciencias (Matemáticas)

México, D. F. 28 de noviembre de 2016

Agradecimientos

Esta tesis esta dedicada a Dios por su infinita gracia y misericordia conmigo.

Agradezco a mi director de tesis el Dr. Baltazar Aguirre Hernández por toda la ayuda proporcionada a lo largo de mi formación académica, así como a mis sinodales, el Dr. Alejandro Ricardo Femat Flores, Dr. Julio Solís Daun, Dr. Joaquín Collado Moctezuma y el Dr. Carlos Ibarra Valdez, por su gran disposición en la revisión y discusión de esta tesis.

Agradezco al CONACYT por su apoyo económico por medio de su sistema de becas de posgrado, así como al departamento de Matemáticas de la UAM Iztapalapa por todas las facilidades proporcionadas.

Agradezco a mi familia por su apoyo y paciencia a lo largo de esta etapa de estudios.

Agradezco a todos mis maestros y compañeros de escuela que me han brindado su amistad y apoyo.

Índice general

Resumen	4
Introducción	5
1. Antecedentes sobre el estudio de la Abscisa de estabilidad	7
1.1. Antecedentes sobre el cálculo de Cotas Superiores para la abscisa de estabilidad de un polinomio estable	8
1.2. Antecedentes sobre el cálculo de Cotas Inferiores de la abscisa de estabilidad de un polinomio estable	10
1.2.1. Cotas inferiores a partir de funciones simétricas elementales	10
1.2.2. Cotas inferiores a partir de sumas de potencias	11
1.2.3. Cotas inferiores a partir de otras funciones simétricas	11
1.3. Antecedentes sobre el cálculo de Cotas superiores para la abscisa de estabilidad de un polinomio intervalo estable	12
1.3.1. Preliminares	12
1.3.2. Estimación de los determinantes de Hurwitz para un polinomio intervalo	13
1.3.3. Cotas superiores para la abscisa de estabilidad del conjunto $S[\alpha, \beta]$	15
2. Nuevos resultados sobre la abscisa	18
2.1. Construcción de una familia de polinomios	18
2.2. Primer Enfoque	19
2.2.1. El Teorema de Bialas Generalizado	19
2.2.2. La abscisa de estabilidad y el Teorema de Bialas Generalizado	19
2.3. Segundo enfoque	21
2.3.1. Abscisa de polinomios Hurwitz: Una desigualdad entre σ_p y $\sigma_{p'}$	21
2.3.2. Una cota inferior de la abscisa de estabilidad de un polinomio	22
2.3.3. Cotas inferiores para la abscisa de estabilidad de una familia Intervalo de polinomios	23
2.4. Polinomios Schur	24
2.4.1. Una desigualdad entre σ_p y $\sigma_{p'}$	25
2.4.2. Una cota inferior de la abscisa de estabilidad de un polinomio Schur	25
2.4.3. Cotas inferiores para la abscisa de estabilidad de una Familia Intervalo de polinomios tipo Schur	26
3. Aplicaciones de la Abscisa	27
3.1. Aplicaciones	27
3.2. Generación de atractores caóticos	28
3.2.1. Preliminares	29
3.2.2. La abscisa, generación de inestabilidad y multi enroscados	29
4. Máximo intervalo para la presencia de atractores extraños enroscados	33
4.1. Establecimiento del problema	34
4.2. El intervalo máximo UDS	35
4.3. Generación de una familia monoparametrica de atractores con multi-enroscado	38

5. Otros resultados sobre la presencia de atractores caóticos	41
5.1. Establecimiento del problema	41
5.2. Puntos de equilibrios hiperbólicos de tipo I y II	42
5.2.1. El máximo intervalo UDS con funciones de saturación	44
5.3. Una familia de atractores con multi-enroscado	46
6. Abscisa de estabilidad y el producto de Hadamard	52
6.1. Propiedades topológicas del conjunto $\mathcal{H}(Had)$	53
6.1.1. $\mathcal{H}(Had)$ es un conjunto abierto	53
6.1.2. Aplicación	55
6.1.3. $\mathcal{H}(Had)$ es un conjunto no-convexo	56
6.1.4. $\mathcal{H}(Had)$ es un conjunto no acotado	56
6.1.5. Aplicación	56
6.1.6. $\mathcal{H}(Had)$ con coeficientes positivos es arco-conexo	57
6.2. El Teorema de Kharitonov y el conjunto $\mathcal{H}(Had)$	58
6.3. El test de estabilidad, $\mathcal{H}(Had)$ y Topología diferencial	60
6.3.1. Un test para $\mathcal{H}(Had)_n^*$	60
6.3.2. Una aproximación mediante la Topología Diferencial del estudio de $\mathcal{H}(Had)$	61
7. Conclusiones y perspectivas	62
Bibliografía	64

Resumen

En el estudio de σ_p , la abscisa de estabilidad de un polinomio $p(t)$, se obtuvieron diversas desigualdades entre la abscisa de un polinomio y su derivada, tanto en el caso Hurwitz como en el caso Schur. Utilizando las desigualdades mencionadas se obtuvieron cotas inferiores de la abscisa de polinomios intervalo Hurwitz.

Además, también se desarrollo una aplicación de la abscisa de estabilidad de un polinomio $p(t)$ de grado tres, para el estudio de la dinámica de un sistema controlado el cual tiene a $p(t)$ como su polinomio característico asociado.

Mediante la construcción de un segmento de polinomios, el cual esta caracterizado mediante un parámetro localizado en un intervalo *Máximo de disipatividad e inestabilidad*, se pudo generar una familia de sistemas inestables disipativos que presentan atractores caóticos (con multi-enroscados) en sus soluciones. Por otra parte, a partir de una familia de sistemas lineales definida a trozos (por pedazos) controlada mediante una función de saturación continua definida por pedazos se pudo generar una familia monoparametrica de atractores que presentan multi-enroscados en la dinámica de sus solución, se obtuvieron condiciones necesarias y suficientes para preservan atractores con multi-enroscados en términos de un parámetro k .

También, a partir del estudio del conjunto de polinomios Hurwitz Hadamardizados se pudieron demostrar las siguientes propiedades topológicas.

El conjunto de polinomios Hurwitz Hadamardizado:

- es abierto.
- es no convexo.
- es no acotado.
- con coeficientes positivos es arco-conexo.

A partir del análisis de una familia de Polinomios Intervalo se pudo demostrar que si los polinomios de Kharitonov de una familia de grado cuatro son polinomios Hadamardizados entonces toda la familia esta compuesta de polinomios Hadamardizados.

Introducción

En esta tesis hemos trabajado tres temas interesantes sobre la estabilidad de sistemas lineales:

1. La abscisa de estabilidad de un polinomio y su relación con la aparición de bifurcaciones.
2. El máximo intervalo de estabilidad y su generalización a Máximo Intervalo para la presencia de enroscados.
3. La abscisa de estabilidad y el producto de Hadamard.

Comenzamos exponiendo algunas ideas sobre la abscisa de estabilidad. En el análisis de la estabilidad de un sistema de ecuaciones diferenciales podemos estudiar la parte lineal del sistema, en la tesis doctoral de 1892 *Problema general sobre la estabilidad de movimiento*, Liapunov definió rigurosamente los conceptos principales de la Teoría de la estabilidad y destacó los casos en que la linealización implica la estabilidad local del sistema. Para la estabilidad asintótica de un sistema continuo es necesario que todas las raíces de su polinomio característico asociado se encuentren en \mathbb{C}^- , donde \mathbb{C}^- es el conjunto de números complejos que tienen parte real negativa. En el caso en que un polinomio tenga todas sus raíces en \mathbb{C}^- se dice que es un polinomio Hurwitz.

Diversos matemáticos se han ocupado del estudio de la determinación del número de raíces de ecuaciones algebraicas en determinados lugares (dentro y fuera del eje real, en la mitad del plano, etc) desde las primeras décadas del siglo XIX, tales como, Cauchy, Sturm, Jacobi, Borchardt, Cayley, Sylvester y Hermite. Routh (1887) y Hurwitz (1895) demostraron que la estabilidad se puede determinar directamente de los coeficientes del polinomio característico asociado. Los trabajos de Routh y Hurwitz, dieron lugar al *Criterio de Routh-Hurwitz*, probablemente el criterio más popular para determinar si un polinomio es o no polinomio Hurwitz.

Diversos problemas de la mecánica, de la física y de la teoría del control se reducen al problema de las raíces de los polinomios, esto motivo numerosas investigaciones que tenían por objeto conocer la posición de las raíces en el plano complejo sin conocerlas. Para los polinomios de coeficientes reales se buscaban las cotas entre las que podían estar estas raíces, así se elaboraban métodos para la búsqueda de cotas entre las que están comprendidas las raíces reales de un polinomios de coeficientes reales, obteniéndose diversas cotas para las raíces reales. Una de las diversas aplicaciones del *Criterio de Routh-Hurwitz* es el estudio de cotas superiores de la *abscisa* de estabilidad de un polinomio [34], donde σ_p se define de la siguiente manera:

Definición 1. Si $p(t)$ es un polinomio estable de grado n con ceros w_1, \dots, w_n , el número negativo

$$\sigma_p := \max_{1 \leq m \leq n} \{ \operatorname{Re}(w_m) \}$$

es definido como la **abscisa de estabilidad** de $p(t)$.

Si σ_p es la abscisa de estabilidad de un polinomio Hurwitz $p(t)$ entonces podemos predecir una cierta tasa mínima de decaimiento, por otra parte, el cálculo de la abscisa de estabilidad a sido requerido en el diseño de sistemas dinámicos y de control (ver [69], [70], [71]).

En este trabajo se estudia la abscisa de estabilidad de un polinomio y presentamos varias cotas inferiores de la abscisa de estabilidad a partir de una relación entre las abscisas de estabilidad de un polinomio Hurwitz $p(t)$ y su derivada $p'(t)$, esta desigualdad la usaremos para obtener cotas inferiores de la abscisa de estabilidad de un polinomio estable. Después utilizaremos la desigualdad obtenida para obtener cotas inferiores de Familias de Polinomios Intervalo estables. Extendemos el estudio de la abscisa de estabilidad a polinomios Schur estables (polinomios cuyas raíces se encuentran dentro del círculo unitario \mathbb{D}); presentamos una relación entre las abscisas de estabilidad de un polinomio Schur $p(t)$ y su derivada $p'(t)$, utilizando esta desigualdad para obtener cotas inferiores de la abscisa de estabilidad de

un polinomio Schur estable. Los polinomios Schur son importantes en el estudio de la estabilidad de sistemas discretos (ver [41]).

Después explicamos de que manera la abscisa de estabilidad puede ser útil en el estudio de bifurcaciones y en la generación de atractores extraños. Existen muchos estudios acerca de este tipo de atractores (ver [18, 53, 56]). Estos atractores han sido utilizados en aplicaciones en electrónica (ver [39, 45, 68]).

El segundo tema que trata esta tesis es el que tiene que ver con el Máximo Intervalo de Estabilidad: dado un polinomio Hurwitz $p(t)$ de grado n y un polinomio arbitrario $q(t)$ consideremos la familia $p(t) + kq(t)$ donde $k \in \mathbb{R}$. El Máximo Intervalo de Estabilidad es denotado por (k_{\min}, k_{\max}) de modo que $p(t) + kq(t)$ resulta ser Hurwitz para todo $k \in (k_{\min}, k_{\max})$, k_{\min} es conocido como el Mínimo Extremo Izquierdo y k_{\max} como el Máximo Extremo Derecho. En esta tesis hemos generalizado este concepto de la siguiente manera: dado un polinomio $p(t)$ con m raíces en \mathbb{C}^+ y $n - m$ raíces en \mathbb{C}^- y otro polinomio $q(t)$ con grado $\leq n$ queremos encontrar el máximo intervalo $(\lambda_{\min}, \lambda_{\max})$ de modo que $p(t) + \lambda q(t)$ tenga m raíces en \mathbb{C}^+ y $n - m$ raíces en \mathbb{C}^- para todo $\lambda \in (\lambda_{\min}, \lambda_{\max})$ y utilizaremos este resultado para investigar una familia de sistemas monoparamétricos en \mathbb{R}^3 que preservan la presencia de atractores caóticos cuando el parámetro k esta en el intervalo. El tercer tema de la tesis es relacionar la abscisa de estabilidad con el producto de Hadamard. Dados dos polinomios $f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$ y $g(t) = b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \dots + b_1 t + b_0$ el producto de Hadamard de f y g esta denotado como $f \star g$ y esta definido como $(f \star g)(t) = a_n b_n t^n + a_{n-1} b_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 b_1 t + a_0 b_0$. En este trabajo solo obtuvimos resultados para grados pequeños, pero el inicio de la investigación nos permitió obtener importantes propiedades del conjunto de polinomios Hurwitz Hadamardizados.

Este trabajo esta organizado de la siguiente manera: En el capítulo 1 mencionamos todos los trabajos sobre la abscisa que fueron desarrollados anteriormente a esta tesis. El capítulo 2 está dedicado a presentar nuestros resultados teóricos. A partir del Teorema de Gauss-Lucas se obtienen cotas inferiores de la abscisa de estabilidad de un polinomio Hurwitz, estos resultados se pueden extender al estudio de cotas inferiores de la Abscisa de estabilidad de Familias de polinomios Intervalo así como también se obtienen cotas inferiores para la abscisa de estabilidad para el caso discreto (polinomios Schur). En el capítulo 3, a partir de la definición de la abscisa de estabilidad como un parámetro de bifurcación se generan atractores que presentan multi-enroscados partir de sistemas controlados definidos por pedazos. Se da una aplicación de la abscisa de estabilidad mediante el *traslado* de las raíces de un polinomio Hurwitz de grado tres para tener un nuevo polinomio *inestable* con dos raíces en \mathbb{C}^+ y una raíz en \mathbb{C}^- , el cual forma parte de una familia de polinomios tipo *Segmento de polinomios*, la cual es caracterizada por un parámetro que varia en un intervalo que preserva la dinámica de un sistema asociado a la familia obtenida. Entonces aplicamos estos resultados para la generación de una familia de atractores basada en una clase de *sistemas inestables disipativos* de tipo afín a sistemas lineales.

En el capítulo 4 dado un polinomio $p(t)$ con m raíces en \mathbb{C}^+ y $n - m$ raíces en \mathbb{C}^- y otro polinomio $q(t)$ con grado menor que n encontramos un intervalo $(\lambda_{\min}, \lambda_{\max})$, tal que, $p(t) + kq(t)$ tiene m raíces en \mathbb{C}^+ y $n - m$ raíces en \mathbb{C}^- $\forall k \in (\lambda_{\min}, \lambda_{\max})$. Esto nos permite generar una familia monoparametrica de sistemas en \mathbb{R}^3 donde se preserva la presencia de atractores caóticos, en estos sistemas utilizamos sistemas lineales por pedazos para generar atractores con enroscados. En el capítulo 5 continuamos generando la presencia de atractores caóticos pero ahora utilizamos *funciones de saturación*. En el capítulo 6 se estudia la relación entre la abscisa de estabilidad y el *producto de Hadamard* de dos polinomios, también se dan algunas propiedades del conjunto de polinomios Hurwitz Hadamardizados ($\mathcal{H}(Had)$).

Capítulo 1

Antecedentes sobre el estudio de la Abscisa de estabilidad

Consideremos un polinomio $p(z)$ de grado n de la forma siguiente:

$$p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n \quad (1.1)$$

donde a_1, a_2, \dots, a_n son números reales, los ceros de $p(z)$ son denotados por ξ_1, \dots, ξ_n . Así definimos la abscisa de estabilidad de $p(z)$ de la forma siguiente

$$\sigma := \max_{1 \leq i \leq n} \operatorname{Re}(\xi_i)$$

Teorema 1 (Criterio de estabilidad espectral). *El polinomio $p(z)$ es asintóticamente estable, si y sólo si, $\sigma < 0$.*

Ver [38] para una demostración. Varias “cotas inferiores” para la abscisa de estabilidad han sido dadas por G. F. Schrack [61]. El propósito de esta sección es mostrar algunas *cotas superiores negativas* para la abscisa de estabilidad para un polinomio que se sabe que es estable. Tales cotas podrían ser obtenidas numéricamente como en el trabajo de V. Zakian [71].

Nuestro interés, sin embargo, se encuentra en las cotas que son expresadas explícitamente en términos de los coeficientes del polinomio. Un problema más sencillo surge en la determinación explícita de cotas inferiores y superiores para el módulo de los ceros, por ejemplo, consideremos el polinomio real (6.1) con $a_0 = 1$ y sea A el máximo de los módulos de los coeficientes a_1, a_2, \dots, a_n :

$$A = \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|).$$

Entonces el número $1 + \frac{A}{a_0}$ es una cota superior para los módulos de todas sus raíces reales o imaginarias ($|x| < 1 + \frac{A}{a_0}$), no obstante, esta cota suele ser muy grande si solo nos interesan las raíces reales. (Ver [46] y [55]).

El problema de encontrar cotas superiores para la abscisa de estabilidad fue propuesto por O. Taussky [64]. Dos de los resultados (Teorema 4 y 5) dependen en forma especial de un resultado de la teoría de control lineal debido a Bückner [16].

La solución del problema de estabilidad debida a Hurwitz [40] es de la forma siguiente: Sea $a_0 = 1$, $a_k = 0$ para $k < 0$ y para $k > n$ y consideramos los llamados *determinantes de Hurwitz* de orden $k = 1, 2, \dots, n$.

$$H_k = \det(h_{ij}), 1 \leq i, j \leq n,$$

donde $h_{ij} = a_{2i-j}$.

Teorema 2 (Criterio de Routh–Hurwitz, [40]). *El polinomio (6.1) es estable, si y sólo si, $H_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$.*

Este criterio de estabilidad y otros relacionados pueden consultarse en [11], [22], [30] y [47]. El problema de encontrar cotas superiores para la abscisa de estabilidad σ de un polinomio estable puede dar la siguiente interpretación

cuantitativa: ¿Conociendo no solo que los determinantes Hurwitz son positivos, sino también su valor numérico, podemos decir algo sobre el valor numérico de σ ?

A continuación se presentan tres desigualdades para σ que involucran determinantes Hurwitz. Las primeras dos requieren de un *radio de inclusión* para p , i.e., de un número $R > 0$, tal que, $|\xi_i| \leq R$, para todos los ceros ξ_i de p . Tal radio de inclusión puede ser construido a partir de los coeficientes del polinomio (Ver Marden [55]). Un radio de inclusión es dado por la fórmula

$$R = 2 \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|^{\frac{1}{k}}$$

1.1. Antecedentes sobre el cálculo de Cotas Superiores para la abscisa de estabilidad de un polinomio estable

A continuación presentamos un primer resultado.

Teorema 3. *Sea R un radio de inclusión para el polinomio estable p . Entonces su abscisa de estabilidad satisface*

$$\sigma \leq -2^{\frac{-n(n-1)}{2}} \cdot R^{\frac{-(n-1)(n+2)}{2}} \cdot H_n. \quad (1.2)$$

El Teorema 3 nos da una primera cota superior para la abscisa de estabilidad, su demostración esta basada en la Fórmula de Orlando (ver [30]), a continuación se presenta un ejemplo donde se aplica este Teorema.

Ejemplo 1. *Sea $p(z) = (z+1)^7 = z^7 + 7z^6 + 21z^5 + 35z^3 + 21z^2 + 7z + 1$, donde $a_0 = 1$, $a_1 = 7$, $a_2 = 21$, $a_3 = 35$, $a_4 = 35$, $a_5 = 21$, $a_6 = 7$, $a_7 = 1$, entonces, $R = 7(2) = 14$, $H_7 = 2097152$, $n = 7$, $\frac{-n(n-1)}{2} = \frac{-7(6)}{2} = -21$, $\frac{-(n-1)(n+2)}{2} = \frac{-(6)(9)}{2} = -27$, por lo tanto,*

$$\begin{aligned} -1 = \sigma &\leq -2^{-21} \cdot 14^{-27} \cdot 2097152 \\ &\leq \frac{-2097152}{2^{21} \cdot 14^{27}} = -113.38 \times 10^{-33}. \end{aligned}$$

Teorema 4. *Bajo las hipótesis del Teorema 3 tenemos que:*

$$\sigma \leq -2^n \cdot R^{-2n+2} \frac{H_n}{H_{n-2}} \quad (1.3)$$

Ver [34] para una demostración.

Del ejemplo anterior, $R = 14$, $H_7 = 2097152 > 0$, $H_5 = 473088 > 0$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} -1 = \sigma &< -2^{-7} \cdot 14^{-14+2} \cdot \frac{2097152}{473088} \\ &= -\frac{2097152}{473088} \times \frac{1}{2^7 \cdot 14^{12}} = -6.1 \times 10^{-16}. \end{aligned}$$

Para formular el siguiente resultado utilizaremos una notación adicional. Sea

$$s_k = \sum_{i=1}^n \xi_i^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

(llamada “suma de Newton”). Siendo polinomios simétricos en los ceros estos números deben ser expresables como polinomios en los coeficientes de p .

Denotamos por D_k el determinante de orden $k+1$,

$$D_k = \det(d_{ij}), \quad 0 \leq i, j, \leq k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.5)$$

donde

$$\begin{aligned} d_{0j} &= (-1)^j s_{k-j}, \quad j = 0, 1, \dots, k, \\ d_{ij} &= a_{2i-1-j}, \quad i = 1, \dots, k, \quad j = 0, \dots, k. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Así tenemos el siguiente teorema.

Teorema 5. Sea el polinomio $p(z) = z^n + a_1z^n + \dots + a_n$ estable y además

$$A = \frac{n^2}{a_1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{H_{k+1} \cdot H_{k-1}} \cdot [D_k]^2.$$

Entonces σ , la abscisa de estabilidad de p satisface la siguiente desigualdad

$$\sigma < -\frac{1}{A} \quad (1.7)$$

Ver [34] para una demostración.

Notación. Del Criterio de Routh-Hurwitz tenemos que $H_k = \det(h_{ij})$, donde si $k = 3$.

$$H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix}$$

Ya que $\det A = \det A^t$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$$

Ejemplo 2. Sea $p(z) = (z + 1)^7 = z^7 + 7z^6 + 21z^5 + 35z^4 + 35z^3 + 21z^2 + 7z + 1$. Aquí $\sigma = \max\{\zeta\} = -1$ con $\zeta_i = \zeta = -1 \forall i; i = 1, 2, \dots, 7$, construimos la matriz de Hurwitz $H(f)$.

$$H(f) = \begin{pmatrix} 7 & 35 & 21 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 21 & 35 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 35 & 21 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 21 & 35 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 35 & 21 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 21 & 35 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 35 & 21 & 1 \end{pmatrix}$$

Los menores principales son: $H_1 = 7$, $H_2 = 112$, $H_3 = 2352$, $H_4 = 43008$, $H_5 = 473088$, $H_6 = 2097152$ y $H_7 = 2097152$, todos positivos. Además, $R = 2 \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|^{\frac{1}{k}}$, entonces $R = 2 \cdot |a_1|^{\frac{1}{1}} = 2(7) = 14$.

Realizando la suma de Newton para este polinomio tenemos que $s_k = \sum_{i=1}^n \zeta_i^k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, 7$), así $s_0 = 7$, $s_1 = -7$, $s_2 = 7$, $s_3 = -7$, $s_4 = 7$, $s_5 = -7$, $s_6 = 7$ y $s_7 = -7$. La expresión $s_7 + a_1s_6 + a_2s_5 + a_3s_4 + a_4s_3 + a_5s_2 + a_6s_1 + a_7s_0$ es igual a

$$-7 + (7)(7) + (21)(-7) + (35)(7) + (35)(-7) + (21)(7) + (7)(-7) + (1)(7) = (7 - 7)a_7 = 0$$

Ahora calculamos D_k , utilizando las expresiones correspondientes; $D_1 = 42 > 0$, $D_2 = 490 > 0$, $D_3 = 6272 > 0$, \dots , $D_6 = 229376 > 0$. Calculamos el valor A ;

$$\begin{aligned} A &= \frac{7^2}{7} + \frac{[D_1]^2}{H_2 \cdot H_0} + \frac{[D_2]^2}{H_3 \cdot H_1} + \frac{[D_3]^2}{H_4 \cdot H_2} + \frac{[D_4]^2}{H_5 \cdot H_3} + \frac{[D_5]^2}{H_6 \cdot H_4} + \frac{[D_6]^2}{H_7 \cdot H_5} \\ &= 7 + \frac{[42]^2}{112 \cdot 1} + \frac{[490]^2}{2352 \cdot 7} + \frac{[6272]^2}{43008 \cdot 112} + \frac{[56448]^2}{473088 \cdot 2352} + \frac{[229376]^2}{2097152 \cdot 43008} + \frac{[229376]^2}{2097152 \cdot 473088} \\ &= 49 \end{aligned}$$

Así, $-1 = \sigma < -\frac{1}{A} = -\frac{1}{49} = -0.204$ (Cota mejorada).

En las tres estimaciones (1.2), (1.3) y (1.7) las expresiones de la derecha dependen de todos los coeficientes (a_1, a_2, \dots, a_n) del polinomio.

En la demostración de los Teoremas 4-5 se utiliza una fórmula debida Bückner [16] y desarrollada después por Effertz [26], además de técnicas de transformadas de Fourier y Laplace.

1.2. Antecedentes sobre el cálculo de Cotas Inferiores de la abscisa de estabilidad de un polinomio estable

En esta sección presentamos cotas inferiores para la abscisa de estabilidad de un polinomio utilizando funciones simétricas de los ceros.

Sin pérdida de generalidad vamos a considerar un polinomio estable de la forma siguiente.

$$p(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j, \quad a_n > 0, n > 1, \quad (1.8)$$

cuyos ceros son $z_i, i = 1, 2, \dots, n$. Entonces, la *abscisa de estabilidad* σ es definida como

$$\sigma := \max_{1 \leq i \leq n} \operatorname{Re}(z_i) \quad (1.9)$$

Este parámetro se denomina en ocasiones como el *grado de estabilidad*. Aunque el término *abscisa de estabilidad* tiene preferencia ya que *grado* implica una cierta cantidad entera.

Los índices n, i y j se usaran de manera habitual para los siguientes rangos: $n = 2, 3, \dots; i = 1, 2, \dots, n; j = 0, 1, \dots, n$.

1.2.1. Cotas inferiores a partir de funciones simétricas elementales

Las cotas inferiores del Teorema 6 son estructuralmente más simples que las de los siguientes teoremas, estas cotas son funciones de las funciones simétricas elementales de los ceros de $p(z)$.

Teorema 6. *Sea $p(z)$ un polinomio real estable y sea σ su abscisa de estabilidad como fue definida en (1.8) y (1.9). Entonces las constantes*

$$S_{mi} = - \left(\binom{n}{m}^{-1} \binom{n}{i} \left(\frac{a_m}{a_i} \right) \right)^{1/(i-m)} \quad (1.10)$$

son cotas inferiores de la abscisa de estabilidad de $p(z)$, es decir,

$$S_{mi} \leq \sigma, \quad m = 0, 1, \dots, i - 1.$$

La igualdad se tiene si todos los ceros de $p(z)$ son reales e iguales, excepto para $S_{n-1,n}$ para la cual la igualdad se tiene si todos los ceros tiene igual parte real.

Ver [62] para una demostración. El teorema 6 define $\binom{n+1}{2}$ cotas inferiores. El siguiente teorema muestra la mejor cota inferior de este conjunto.

Teorema 7. *Sea $p(z)$ un polinomio estable real y sean S_{mn} cotas inferiores de la abscisa de estabilidad como fueron definidos en 1.8 y 1.10. Entonces la mejor cota inferior estará entre las cotas siguientes*

$$S_{k,k+1} = - \left(\frac{n-k}{k+1} \right) \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Ver [62] para una demostración. A partir de este teorema se desprende el siguiente corolario.

Corolario 1. *Sea $p(z)$ un polinomio real estable y sea σ su abscisa de estabilidad definidos como en 1.8 y 1.9. Además, sea $\mu \leq 0$ un número dado y sea $q(z)$ un polinomio con abscisa de estabilidad μ . Una condición necesaria para que $p(z)$ sea al menos estable como $q(z)$ es que las siguientes desigualdades*

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} \geq \frac{k+1}{n-k} \cdot |\mu|, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (1.11)$$

se satisfagan.

Este corolario es una generalización de la siguiente condición necesaria: *Un polinomio estable tiene coeficientes positivos* y de hecho se reduce a esta condición para $\mu = 0$.

1.2.2. Cotas inferiores a partir de sumas de potencias

Cotas inferiores de la abscisa de estabilidad de un polinomio $p(z)$ pueden obtenerse a partir de funciones simétricas de los recíprocos de los ceros de $p(z)$.

Consideremos el polinomio siguiente

$$q(z) = p\left(\frac{1}{z}\right) \cdot z^n = \sum_j a_{n-j} z^j,$$

cuyos ceros son z_i^{-1} .

Consideremos ahora las sumas de potencias de los recíprocos de los ceros de un polinomio $p(z)$. Denotemos la k -ésima suma de potencias por s_k , es decir,

$$s_k = \sum_i z_i^{-k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.12)$$

Específicamente, las primeras cuatro sumas de potencias como funciones de los coeficientes de $p(z)$ son

$$\begin{aligned} s_1 &= -a_1/a_0, \\ s_2 &= (a_1^2 - 2a_0a_2)/a_0^2, \\ s_3 &= (-a_1^3 + 3a_0a_1a_2 - 3a_0^2a_3)/a_0^3, \\ s_4 &= (a_1^4 - 4a_0a_1^2a_2 + 2a_0^2a_2^2 + 4a_0^2a_1a_3 - 4a_0^3a_4)/a_0^4. \end{aligned}$$

Tales sumas de potencias aparecerán en el siguiente teorema.

Teorema 8. Sean $p(z)$ un polinomio real estable, σ su abscisa de estabilidad y s_k , ($k = 1, 2, \dots$) las sumas de potencias de los recíprocos de los ceros de $p(z)$ definidos como en 1.8, 1.9 y 1.12 respectivamente. Entonces, para $s_k \neq 0$, las constantes

$$T_k = \begin{cases} -((-1)^{k+1} n c_k s_k^{-1})^{1/k} & \begin{cases} s_k > 0, & k \text{ impar,} \\ s_k < 0, & k \text{ par,} \end{cases} \\ -((-1)^k n s_k^{-1})^{1/k} & \begin{cases} s_k > 0, & k \text{ par,} \\ s_k < 0, & k \text{ impar,} \end{cases} \end{cases}$$

donde $c_k = \cos^{k+1}\left(\frac{\pi}{k+1}\right)$, son cotas inferiores de la abscisa de estabilidad de $p(z)$, es decir,

$$T_k \leq \sigma, \quad k = 1, 2, \dots$$

La igualdad se tiene si todos los ceros de $p(z)$ son reales e iguales.

Ver [62] para una demostración.

1.2.3. Cotas inferiores a partir de otras funciones simétricas

Adicionalmente diversas cotas inferiores de la abscisa de estabilidad pueden ser obtenidas a partir de otras funciones simétricas elementales.

Consideremos la siguiente función simétrica de los recíprocos de los ceros de un polinomio $p(z)$ definida por

$$h(z) = \sum_{i,k=1, i \neq k} (z_i^2 z_k)^{-1}.$$

En términos de los coeficientes de $p(z)$,

$$h(z) = (3a_3a_0 - a_2a_1)a_0^{-2}.$$

Obtenemos la siguiente cota inferior de la abscisa de estabilidad de un polinomio real estable $p(z)$ para $h(z) \neq 0$:

$$S_h = -\sqrt[3]{\frac{n(n-1)c}{h(z)}} \leq \sigma_p,$$

con

$$c = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{para } h(z) > 0. \\ -1 & \text{para } h(z) < 0 \end{cases}$$

La igualdad se obtiene si todos los ceros de $p(z)$ son reales e iguales.

1.3. Antecedentes sobre el cálculo de Cotas superiores para la abscisa de estabilidad de un polinomio intervalo estable

El problema de la estabilidad en Familias Intervalo de Polinomios fue planteado originalmente por Faedo [28], quien trató de resolverlo utilizando las condiciones de Routh-Hurwitz, hasta que Vladimir L. Kharitonov dio una solución completa al problema. Kharitonov mostró que se puede concluir que una familia intervalo de polinomios es estable si únicamente cuatro elementos de esta familia, llamados polinomios de Kharitonov son estables, publicó por primera vez su Teorema para polinomios reales en 1978 [43]. El trabajo de Barmish [9] introdujo este resultado en la literatura occidental.

Consideremos el conjunto de polinomios estables

$$f_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^2 + \cdots + a_{n-1} z + a_n,$$

donde cada a_i es un número real que satisface las desigualdades

$$\alpha_i \leq a_i \leq \beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

En esta sección se obtienen algunas cotas superiores para la abscisa de estabilidad del conjunto de polinomios.

1.3.1. Preliminares

Consideremos el polinomio

$$f_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n, \quad (1.13)$$

donde los a_i son números reales que satisfacen las desigualdades

$$\alpha_i \leq a_i \leq \beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.14)$$

donde α_i, β_i son números reales. Denotamos

$$\begin{aligned} \alpha &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \\ \beta &= (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n), \\ a &= (a_1, a_2, \dots, a_n), \end{aligned}$$

donde α_i, β_i, a_i son números reales.

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ las raíces del polinomio $f_n(z)$. El polinomio $f_n(z)$ es llamado estable si $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Sea G^n el conjunto de todos los polinomios estables de la forma (1.13) donde los coeficientes son reales.

Por $S[\alpha, \beta]$ denotamos el conjunto de todos los polinomios de la forma (1.13) donde los coeficientes satisfacen las desigualdades

$$\alpha_i \leq a_i \leq \beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.15)$$

además, sea $T[\alpha, \beta]$ el conjunto de todos los polinomios de la forma (1.13) donde los coeficientes satisfacen las relaciones

$$a_i = \alpha_i \text{ ó } a_i = \beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.16)$$

El conjunto $T[\alpha, \beta]$ contiene 2^n polinomios. Es conocido de [10], [11], [22] y [43], que $S[\alpha, \beta] \subset G^n$, si y sólo si, $T[\alpha, \beta] \subset G^n$. El conjunto $S[\alpha, \beta]$ es llamado estable si cada polinomio $f_n(z) \in S[\alpha, \beta]$ es estable. Análogamente, el conjunto $T[\alpha, \beta]$ es llamado estable si cada polinomio $f_n(z) \in T[\alpha, \beta]$ es estable. El número $\underline{\omega} = \max_{1 \leq i \leq n} \text{Re}(\lambda_i)$ es llamado la abscisa de estabilidad del polinomio $f_n(z) \in G^n$.

El número ω , tal que, $\omega = \max_{f_n(z) \in S[\alpha, \beta]} [\max_{1 \leq i \leq n} \text{Re}(\lambda_i)]$ es llamado la abscisa de estabilidad del conjunto $S[\alpha, \beta] \subset G^n$. En esta sección se obtienen algunas cotas superiores para la abscisa de estabilidad del conjunto $S[\alpha, \beta] \subset G^n$.

1.3.2. Estimación de los determinantes de Hurwitz para un polinomio intervalo

Sean

$$\begin{aligned} D &= [\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2] \times \cdots \times [\alpha_n, \beta_n], \\ D_1 &= \{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \in D : \gamma_1 = \alpha_1 \vee \gamma_1 = \beta_1, \\ &\quad \gamma_2 = \alpha_2 \vee \gamma_2 = \beta_2, \dots, \gamma_n = \alpha_n \vee \gamma_n = \beta_n\}. \end{aligned}$$

Para el polinomio $f_n(z)$ consideremos (ver[30], [47]) la matriz Hurwitz $H = \{b_{ij}\}$ ($i, j = 0, 1, 2, \dots, n-1$) donde

$$\begin{aligned} b_{ij} &= a_{2i+1-j} \quad (i, j = 0, 1, \dots, n-1) \\ a_k &= 0 \quad \text{para } k < 0 \text{ y } k > n, \\ a_0 &= 1. \end{aligned}$$

Por d_k ($k = 1, 2, \dots, n$) denotamos el menor principal de orden k de la matriz H . Por lo tanto,

$$d_1 = a_1, d_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \text{ etc.}$$

Así que d_n es una función (un polinomio) de los coeficientes a_1, a_2, \dots, a_n .

Sea

$$d_n = d_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = d_n(a) = \det(H),$$

donde $a \in R^n$,

$$h_i(z) = d_n(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, z, a_{i+1}, \dots, a_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.17)$$

Por lo tanto, $h_i(z)$ es un polinomio en la variable z con coeficientes reales.

Supongamos que

$$f_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = u(z) + w(z)$$

es un polinomio estable, donde

$$\begin{aligned} u(z) &= a_n + a_{n-2} z^2 + a_{n-4} z^4 + \cdots \\ w(z) &= a_{n-1} z + a_{n-3} z^3 + a_{n-5} z^5 + \cdots \end{aligned}$$

Sean

$$z_1, z_2, z_3, \dots \quad \text{las raíces del polinomio } u(z),$$

y

$$\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \dots \quad \text{las raíces del polinomio } w(z),$$

donde

$$\text{Im}(z_1) \leq \text{Im}(z_2) \leq \text{Im}(z_3) \leq \cdots$$

y

$$\text{Im}(\bar{z}_1) \leq \text{Im}(\bar{z}_2) \leq \text{Im}(\bar{z}_3) \leq \cdots$$

Con estas notaciones y suposiciones tenemos (ver[11], [22], [30]) el siguiente lema.

Lema 1. *El polinomio $f_n(z) = u(z) + w(z)$ es estable, si y sólo si,*

$$\begin{aligned} \text{Re}(z_i) &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots) \\ \text{Re}(\bar{z}_i) &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

$$\text{Im}(\bar{z}_1) < \text{Im}(z_1) < \text{Im}(\bar{z}_2) < \text{Im}(z_2) < \cdots$$

o

$$\text{Im}(z_1) < \text{Im}(\bar{z}_1) < \text{Im}(z_2) < \text{Im}(\bar{z}_2) < \cdots$$

Sea b_j un número complejo, tal que, $\text{Im}(b_j) \neq 0$. Consideremos el polinomio

$$g_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{j-1} z^{n-j+1} + b_j z^{n-j} + a_{j+1} z^{n-j-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n. \quad (1.18)$$

Además, sean $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ las raíces del polinomio $g_n(z)$. Así tenemos el siguiente resultado.

Lema 2. [13]. Si $f_n(z)$ es un polinomio estable con coeficientes reales, con $\text{Im}(b_j) \neq 0$, entonces las raíces del polinomio $g_n(z)$ satisfacen que

$$\rho_k + \rho_l \neq 0 \quad (k, l = 1, 2, \dots, n).$$

Demostración. De la hipótesis de que $\text{Im}(b_j) \neq 0$ y ya que cada a_i es real tenemos que $\text{Im}(\rho_i) \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). La prueba del Lema 2 se hará por *reducción al absurdo*. Supongamos que existen ρ_k y ρ_l , tales que

$$\begin{aligned} \rho_k &= \alpha + i\beta \\ \rho_l &= -\rho_k = -\alpha - i\beta, \end{aligned}$$

donde $\beta \neq 0$.

En primer lugar, vamos a demostrar que $\alpha \neq 0$. Supongamos lo contrario, que $\alpha = 0$.

Entonces

$$\rho_k = i\beta, \quad \rho_l = -i\beta \quad (\beta \neq 0), \quad g_n(i\beta) = g_n(-i\beta) = 0.$$

Para $n - j$ par, tenemos que

$$g_n(i\beta) + g_n(-i\beta) = 2[a_n - a_{n-2}\beta^2 + a_{n-4}\beta^4 - \dots + b_j(i\beta)^{n-j} \dots] = 0.$$

Por lo tanto, $\text{Im}(b_j) = 0$, contradiciendo la suposición de que $\text{Im}(b_j) \neq 0$. Para $n - j$ impar, tenemos que

$$g_n(i\beta) - g_n(-i\beta) = 2i[a_{n-1}\beta - a_{n-3}\beta^3 + \dots + b_j(i)^{n-j-1}(\beta)^{n-j} \dots] = 0.$$

Por lo tanto, $\text{Im}(b_j) = 0$, otra vez contradiciendo la suposición de que $\text{Im}(b_j) \neq 0$. Esto completa la prueba de que $\alpha \neq 0$.

Sea $\rho_k = \alpha + i\beta$, por hipótesis

$$\rho_k = -\rho_l, \quad g_n(\rho_k) = g_n(\rho_l) = 0.$$

Por lo tanto, para $n - j$ impar, tenemos que

$$g_n(\rho_k) + g_n(-\rho_k) = 2u(\rho_k) = 0$$

y para $n - j$ par, tenemos que

$$g_n(\rho_k) - g_n(-\rho_k) = 2w(\rho_k) = 0.$$

Por lo tanto, $\rho_k = \alpha + i\beta$ ($\alpha \neq 0$) es una raíz del polinomio $u(z)$ o de $w(z)$. Esto contradice el Lema 1, porque el polinomio es estable. Esto completa la demostración del Lema. \square

Ver [13] para una demostración.

Sean $\mu_1^{(i)}, \mu_2^{(i)}, \dots, \mu_{r_i}^{(i)}$ ($r_i \leq n$) las raíces del polinomio $h_i(z)$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Establecemos un lema que será útil más adelante.

Lema 3. [13]. Si el polinomio $f_n(z)$ es estable entonces todas las raíces del polinomio $h_i(z)$ son reales, i.e., $\text{Im}(\mu_j^{(i)}) = 0$ ($j = 1, 2, \dots, r_i; i = 1, 2, \dots, n$).

Demostración. Supongamos lo contrario, digamos que existe $\bar{\beta}$, tal que, $h_i(\bar{\beta}) = 0$ con $\text{Im}(\bar{\beta}) \neq 0$. Entonces, para el polinomio

$$p_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{i-1} z^{n-i+1} + \bar{\beta} z^{n-i} + a_{i+1} z^{n-i-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

tenemos que

$$h_i(\bar{\beta}) = d_n(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, \bar{\beta}, a_{i+1}, \dots, a_n) = 0.$$

De la fórmula de Orlando [30], para el polinomio $p_n(z)$, tenemos que

$$d_n(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, \bar{\beta}, a_{i+1}, \dots, a_n) = (-1)^{n(n-1)/2} a_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\gamma_i + \gamma_j) = 0. \quad (1.19)$$

donde $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ son las raíces del polinomio $p_n(z)$. La hipótesis de que el polinomio $f_n(z)$ es estable implica que $a_n \neq 0$. De esto y de la ecuación (1.19), se tiene que existen γ_k y γ_l , tales que, $\gamma_k + \gamma_l = 0$. Esto contradice el Lema 2, por lo tanto, el Lema 3 es verdadero. \square

Ahora probaremos el siguiente Teorema.

Teorema 9. [13]. Si

$$f_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n, \quad f_n(z) \in S[\alpha, \beta] \subset G^n,$$

entonces

$$\min_{a \in D} d_n(a) = \min_{a \in D_1} d_n(a)$$

Demostración. Sea

$$\begin{aligned} s &= (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_{i-1}, x, \bar{a}_{i+1}, \dots, \bar{a}_n) \in D \subset R^n, \\ \underline{s} &= (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_{i-1}, \alpha_i, \bar{a}_{i+1}, \dots, \bar{a}_n), \\ \bar{s} &= (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_{i-1}, \beta_i, \bar{a}_{i+1}, \dots, \bar{a}_n), \\ h_i(x) &= d_n(s), \end{aligned}$$

donde los \bar{a}_j son constantes para $j \neq i$.

Vamos a demostrar que

$$\min_{x \in [\alpha_i, \beta_i]} h_i(x) = \min(d_n(\underline{s}), d_n(\bar{s})). \quad (1.20)$$

Sean x_1, x_2, \dots, x_r las raíces del polinomio $h_i(x)$ y y_1, y_2, \dots, y_{r-1} las raíces de $\frac{dh_i(x)}{dx}$. De la hipótesis $f_n \in S[\alpha, \beta] \subset G^n$ y del Lema 3 se tiene que todas las raíces del polinomio $h_i(x)$ son reales. Por lo tanto, las siguientes desigualdades son verdaderas

$$x_1 \leq y_1 \leq x_2 \leq y_2 \leq \dots \leq y_{r-1} \leq x_r.$$

Por lo tanto, si $x_r < \alpha_i$ (o $\beta_i < x_1$) y $x \in [\alpha_i, \beta_i]$, se sigue que $\frac{dh_i(x)}{dx} \neq 0$, y (1.20) es cierta. De la hipótesis $f_n(z) \in G^n$, tenemos que, $x_j \notin [\alpha_i, \beta_i]$ ($j = 1, 2, \dots, n$).

Por lo tanto, para $[\alpha_i, \beta_i] \subset [x_k, x_{k+1}]$ existe al menos un punto $y_k \in [\alpha_i, \beta_i]$, tal que

$$\frac{dh_i(y_k)}{dx} = 0 \text{ y } \frac{d^2 h_i(y_k)}{dx^2} < 0,$$

$$(h_i(x_k) = h_i(x_{k+1}) = 0, h_i(x) > 0 \text{ para } x \in [\alpha_i, \beta_i] \subset [x_k, x_{k+1}]).$$

Por lo tanto, (1.20) se satisface para ($i=1, 2, \dots, n$), lo cual completa la prueba del Teorema 9. \square

E Teorema 9 puede ser usado para encontrar $\min_{a \in D} d_n(a)$.

1.3.3. Cotas superiores para la abscisa de estabilidad del conjunto $S[\alpha, \beta]$

Sea $f_n(z)$ un polinomio, tal que, $f_n(z) \in S[\alpha, \beta] \subset G^n$ y supongamos que

$$f_n(z) = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \cdots (z - \lambda_n) \quad (1.21)$$

Definimos

$$\omega = \max_{f_n(z) \in S[\alpha, \beta]} \left[\max_{1 \leq i \leq n} \operatorname{Re}(\lambda_i) \right].$$

Ya que $f_n(z) \in S[\alpha, \beta] \subset G^n$, se tiene que, $a_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

De esto se sigue que (ver [55], pag. 106)

$$|\lambda_i| \leq \max \left(a_1, \frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \dots, \frac{a_n}{a_{n-1}} \right), \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

y de las desigualdades (1.15) tenemos que

$$|\lambda_i| \leq \max \left(\beta_1, \frac{\beta_2}{\beta_1}, \frac{\beta_3}{\beta_2}, \dots, \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}} \right) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.22)$$

Sea $R > 0$ un número real, tal que, para todo $f_n(z) \in S[\alpha, \beta]$

$$|\lambda_i| \leq R \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.23)$$

Por lo tanto, un número R que satisface las desigualdades (1.23) puede ser obtenido, por ejemplo, de las desigualdades (1.22).

Vamos a probar el siguiente resultado.

Teorema 10. [13]. Si

$$f_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \dots (z - \lambda_n)$$

y $f_n(z) \in S[\alpha, \beta] \subset G^n$, entonces

$$\omega = \max_{f_n(z) \in S[\alpha, \beta]} \left[\max_{1 \leq i \leq n} \operatorname{Re}(\lambda_i) \right] \leq -2^{-n(n-1)/2} R^{-(n-1)(n+2)/2} \min_{a \in D_1} d_n(a)$$

Demostración. De la fórmula de Orlando aplicada al polinomio $f_n(z)$, tenemos que

$$d_n(a) = (-1)^{n(n-1)/2} a_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i + \lambda_j) = (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{l=1}^{n-1} (-\lambda_l) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i + \lambda_j).$$

En el caso donde $\underline{\omega} = \max_{1 \leq i \leq n} \operatorname{Re}(\lambda_i) = \lambda_k$, obtenemos que

$$d_n(a) = (-1)^{n(n-1)/2} (-\underline{\omega}) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n-1} (-\lambda_l) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i + \lambda_j),$$

$$d_n(a) \leq (-\underline{\omega}) R^{n-1} (2R)^{n(n-1)/2} = (-\underline{\omega}) 2^{n(n-1)/2} R^{(n-1)(n+2)/2}.$$

Por lo tanto

$$\underline{\omega} \leq -2^{-n(n-1)/2} R^{-(n-1)(n+2)/2} d_n(a). \quad (1.24)$$

En el caso donde $\underline{\omega} = \max_{1 \leq i \leq n} \operatorname{Re}(\lambda_i) = \operatorname{Re}(\lambda_k)$, $\bar{\lambda}_k = \lambda_l$ y $k < l$, obtenemos que

$$d_n(a) = (-1)^{n(n-1)/2} a_n (2\omega) \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ i \neq k, j \neq l}} (\lambda_i + \lambda_j)$$

$$d_n(a) \leq (-\omega) 2R^n (2R)^{n(n-1)/2-1} = (-\omega) 2^{n(n-1)/2} R^{(n-1)(n+2)/2}. \quad (1.25)$$

Las desigualdades (1.24) y (1.25) dan

$$\underline{\omega} \leq -2^{-n(n-1)/2} R^{-(n-1)(n+2)/2} d_n(a).$$

De esto y del Teorema 9, tenemos que

$$\omega = \max_{f_n(z) \in S[\alpha, \beta]} \left[\max_{1 \leq i \leq n} \operatorname{Re}(\lambda_i) \right] \leq -2^{-n(n-1)/2} R^{-(n-1)(n+2)/2} \min_{a \in D_1} d_n(a)$$

Esto completa la prueba del Teorema 10. □

Ejemplo 3. Consideremos el siguiente polinomio

$$f_3(z) = z^3 + a_1z^2 + a_2z + a_3, \quad (1.26)$$

donde

$$\begin{aligned} 1.5 &\leq a_1 \leq 1.6 \\ 2 &\leq a_2 \leq 2.25 \\ 1 &\leq a_3 \leq 2. \end{aligned} \quad (1.27)$$

En este caso tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha &= (1.5, 2, 1) \\ \beta &= (1.6, 2.25, 2) \\ D &= [1.5, 1.6] \times [2, 2.25] \times [1, 2] \end{aligned}$$

$$D_1 = \{(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in D : \gamma_1 = 1.5 \vee \gamma_1 = 1.6, \gamma_2 = 2 \vee \gamma_2 = 2.25, \gamma_3 = 1 \vee \gamma_3 = 2\}$$

$$d_3(a) = \det H = a_1a_2a_3 - a_3^2.$$

El conjunto $T[\alpha, \beta]$ contiene los siguientes polinomios

$$\begin{aligned} \bar{f}_1(z) &= z^3 + 1.5z^2 + 2z + 1 \\ \bar{f}_2(z) &= z^3 + 1.5z^2 + 2z + 2 \\ \bar{f}_3(z) &= z^3 + 1.5z^2 + 2.25z + 1 \\ \bar{f}_4(z) &= z^3 + 1.5z^2 + 2.25z + 2 \\ \bar{f}_5(z) &= z^3 + 1.6z^2 + 2z + 1 \\ \bar{f}_6(z) &= z^3 + 1.6z^2 + 2z + 2 \\ \bar{f}_7(z) &= z^3 + 1.6z^2 + 2.25z + 1 \\ \bar{f}_8(z) &= z^3 + 1.6z^2 + 2.25z + 2 \end{aligned}$$

Es fácil verificar que los polinomios $\bar{f}_1(z), \bar{f}_2(z), \dots, \bar{f}_n(z)$ son estables. Por lo tanto, todos los polinomios (1.26) satisfaciendo las condiciones (1.27) son estables.

Denotemos por H_i la matriz Hurwitz para el polinomio $\bar{f}_i(z)$ ($i = 1, 2, \dots, 8$).

Sean

$$\bar{d}_i = \det(H_i) \quad (i = 1, 2, \dots, 8).$$

En este caso tenemos que $\bar{d}_1 = 2, \bar{d}_2 = 2, \bar{d}_3 = 2.375, \bar{d}_4 = 2.75, \bar{d}_5 = 2.2, \bar{d}_6 = 2.4, \bar{d}_7 = 2.6, \bar{d}_8 = 3.2$. Del Teorema 9 obtenemos que

$$\min_{a \in D} d_3(a) = \min_{a \in D} d_3(a) = \min(\bar{d}_1, \bar{d}_2, \dots, \bar{d}_n) = 2.$$

De las desigualdades (1.22) tenemos que

$$R = \max\left(\beta_1, \frac{\beta_2}{\beta_1}, \frac{\beta_3}{\beta_2}\right) = \max\left(1.6, \frac{2.25}{1.6}, \frac{2}{2.25}\right) = 1.6$$

y del Teorema 10, para $R = 1.6$, tenemos que

$$\omega \leq -2^{-3}(1.6)^{-5}2 < -0.023.$$

Capítulo 2

Nuevos resultados sobre la abscisa

Los resultados de este capítulo están contenidos en el trabajo [23].

2.1. Construcción de una familia de polinomios

Consideremos el polinomio estable $p(z)$ con raíces ξ_1, ξ_2 ;

$$p(z) = z^2 + a_1z + a_2, p'(z) = 2z + a_1, p''(z) = 2,$$

definimos la abscisa de estabilidad como $\sigma := \max_{1 \leq i \leq n} \operatorname{Re}(\xi_i)$. Ahora consideremos la Familia $f_r(z) = p(z - r)$ con ($r \geq 0$) cuyas raíces serán $\xi_1 + r, \xi_2 + r$. Podemos reescribir la Familia $f_r(z)$ como

$$f_r(z) = z^2 + \frac{p'(-r)}{1!}z + p(-r) = z^2 + \frac{(a_1 - 2r)}{1!}z + (r^2 - a_1r + a_2).$$

Si $r = 0$, tenemos que $f_0(z) = z^2 + a_1z + a_2 = p(z)$ el cual es estable, por lo tanto, la familia tiene un elemento estable.

Ya que la familia de polinomios $f_r(z)$ es de grado dos, para tener estabilidad robusta es necesario y suficiente que $a_1 - 2r > 0$ y $r^2 - a_1r + a_2 > 0$. La primera desigualdad implica que $r < a_1/2$, analizando el discriminante $a_1^2 - 4a_2$ tenemos que:

1. $a_1^2 - 4a_2 < 0 \Rightarrow \sigma = -\frac{a_1}{2}$
2. $a_1^2 - 4a_2 \geq 0 \Rightarrow \sigma = -\frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$

Ahora para $n = 3$ tenemos que:

$$\begin{aligned} p(z) &= z^3 + a_1z^2 + a_2z + a_3, \\ f_r(z) &= p(z - r) = z^3 + (a_1 - 3r)z^2 + (a_2 - 2a_1r + 3r^2)z + (a_3 - a_2r + a_1r^2 - r^3), \\ f_r(z) &= z^3 + \frac{p''(-r)}{2!}z^2 + \frac{p'(-r)}{1!}z + p(-r). \end{aligned}$$

Nuevamente, para que cada elemento de la familia sea un polinomio Hurwitz es necesario y suficiente que:

1. $a_1 - 3r > 0, a_2 - 2a_1r + 3r^2 > 0, a_3 - a_2r + a_1r^2 - r^3 > 0$ y
2. $(a_1 - 3r)(a_2 - 2a_1r + 3r^2) - (a_3 - a_2r + a_1r^2 - r^3) > 0$.

De $a_1 - 3r > 0$ se tiene $r < a_1/3$, de $a_2 - 2a_1r + 3r^2$ tenemos que $r < \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 3a_2}}{3}$, esto implica que

$$r < \min \left\{ \frac{a_1}{3}, \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 3a_2}}{3} \right\},$$

también obtenemos un polinomio de grado tres entre las condiciones, lo cual dificulta el mejoramiento de cotas para el parámetro r por este camino.

2.2. Primer Enfoque

Para $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-2} z^2 + a_{n-1} z + a_n$ estable podemos escribir la familia $f_r(z)$ de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} f_r(z) &= z^n + \frac{p^{(n-1)}(-r)}{(n-1)!} z^{n-1} + \dots + \frac{p'(-r)}{1!} z + p(-r), \\ f_r(z) &= z^n + g_1(r) z^{n-1} + g_2(r) z^{n-2} + \dots + g_{n-1}(r) z + g_n(r). \end{aligned}$$

donde $f_0(z) = p(z)$, el cual es estable. Entonces tenemos que $f_r(z)$ es una familia de polinomios cuyos coeficientes son polinomios en la variable r . Con este planteamiento podemos relacionar el estudio de la abscisa de estabilidad de un polinomio con el estudio de la estabilidad de familias de polinomios. Existe una gran cantidad de literatura acerca de la Teoría de la Estabilidad de Familias de Polinomios ver, por ejemplo, [1], [2], [3], [10], [11], [25], [48].

2.2.1. El Teorema de Bialas Generalizado

El Teorema de Bialas fue publicado en 1985 [12], ahora vamos a utilizar una generalización de este teorema para calcular la abscisa de estabilidad de un polinomio.

Consideremos el polinomio de la forma

$$P(z, r) = P_0(z) + rP_1(z) + \dots + r^m P_m(z)$$

donde (1) $P_0(z)$ es un polinomio estable con coeficientes positivos, (2) $\text{gr}[P_i(z)] < \text{gr}[P_0(z)]$, $i = 1, \dots, m$. Además, sea H_i la matriz Hurwitz de $P_i(z) \forall i, i = 1, \dots, m$.

El mayor intervalo de estabilidad (r_{\min}, r_{\max}) , tal que, $P(z, r)$ es Hurwitz $\forall r \in (r_{\min}, r_{\max})$ esta dado por

$$r_{\max} = 1/\lambda_{\max}^+(M)$$

$$r_{\min} = 1/\lambda_{\min}^-(M)$$

donde $\lambda_{\max}^+(M)$ es el máximo valor propio positivo de M , $\lambda_{\min}^-(M)$ es el mínimo valor propio negativo de M y M esta dada por

$$M = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I \\ -H_0^{-1}H_m & -H_0^{-1}H_{m-1} & -H_0^{-1}H_{m-2} & \dots & -H_0^{-1}H_2 & -H_0^{-1}H_1 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

La prueba de este teorema es similar a la del Teorema 17.8.1 [10] (ver también [29] y [60]). Ideas relacionadas fueron expuestas en el trabajo de J. Chen [19]. Esta generalización ha sido ampliamente divulgada por D. Henrion (ver [36]).

2.2.2. La abscisa de estabilidad y el Teorema de Bialas Generalizado

Podemos escribir la familia de polinomios $f_r(z)$ de la forma siguiente

$$f_r(z) = p(z) + r p_1(z) + r^2 p_2(z) + \dots$$

Mediante el resultado dado en 2.2.1 podemos calcular el Mínimo Extremo Izquierdo (r_{\min}) y el Máximo Extremo Derecho (r_{\max}). En este caso, la abscisa de estabilidad coincide con el Máximo Extremo Derecho, ya que

$$\sigma = -\max_r \{r > 0 \mid f_{\bar{r}}(z) \text{ es Hurwitz } \forall \bar{r}, \bar{r} < r\}$$

Teorema 11. Sea $p(z)$ un polinomio Hurwitz y sea la familia de polinomios $f_r(z) = p_0(z) + rp_1(z) + r^2p_2(z) + \dots + r^n p_n(z)$ con $p_0(z) = p(z)$,

$$\begin{aligned} p_1(z) &= \frac{n(n-1)\cdots(2)(1)}{(n-1)!}(-1)z^{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)}{(n-2)!}(-1)a_1z^{n-2} + \dots \\ &\quad + \frac{(3)(2)(1)}{2!}(-1)a_{n-3}z^2 + \frac{(2)(1)}{1!}(-1)a_{n-2}z + (-1)a_{n-1}, \\ p_2(z) &= \frac{(n)(n-1)(n-2)\cdots(4)(3)}{(n-2)!}(-1)^2z^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)\cdots(4)(3)}{(n-3)!}a_1(-1)^2z^{n-3} + \dots \\ &\quad + \frac{(4)(3)}{2!}a_{n-4}(-1)^2z^2 + \frac{3}{1!}a_{n-3}(-1)^2z + a_{n-2}(-1)^2, \dots, \\ p_n(z) &= (-1)^n. \end{aligned}$$

y sean H_0, H_1, \dots, H_n las matrices Hurwitz de $p_i(z)$ para $i = 0, 1, \dots, n$. Definamos M como 2.1, entonces la abscisa de estabilidad esta dada por $\sigma = -r_{\max}$.

Demostración. Sea $p(z)$ un polinomio Hurwitz de grado n , obtenemos la familia de polinomios $f_r(z) = p(z-r)$ la cual podemos escribir como

$$f_r(z) = p_0(z) + rp_1(z) + r^2p_2(z) + \dots + r^n p_n(z).$$

A partir del Teorema de Bialas Generalizado, tomando $P(z, r) = f_r(z)$, el Teorema se tiene ya que $\sigma = -r_{\max}$. \square

El Teorema de Bialas generalizado se obtiene directamente de las ideas de Saydy, Tits, Abed y Barmish (ver [10, 60]). A continuación presentamos un ejemplo el cual ilustra el teorema dado.

Ejemplo 1. Consideremos el polinomio Hurwitz $p(z) = z^3 + 6z^2 + 11z + 6$, entonces $f_r(z)$ es una familia de polinomios, tal que,

$$\begin{aligned} f_r(z) &= P_0(z) + rP_1(z) + r^2P_2(z) + r^3P_3(z), \\ &= [z^3 + 6z^2 + 11z + 6] + r[-3z^2 - 12z - 11] + \\ &\quad + r^2[2z + 6] + r^3[-1]. \end{aligned}$$

con H_0, \dots, H_3 las matrices Hurwitz de los polinomios P_0, \dots, P_3 respectivamente.

$$H_0 = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ 1 & 11 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}, H_1 = \begin{pmatrix} -3 & -11 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & -3 & -11 \end{pmatrix}, H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

y

$$H_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

construyendo la matriz M y calculando sus valores propios λ tenemos que

$$\lambda = \{0, 0, 0, 1/3, 2/5, 1/2, 1/2, 2/3, 1\}$$

Así $\lambda_{\max}^+(M) = 1$, entonces por el Teorema 11 tenemos que

$$\sigma = -\frac{1}{\lambda_{\max}^+(M)} = -1.$$

Es fácil verificar que $p(z)$ puede ser factorizado como $p(z) = (z+1)(z+2)(z+3)$.

2.3. Segundo enfoque

En esta sección presentamos algunas cotas inferiores de la abscisa de estabilidad como una consecuencia del Teorema de Gauss-Lucas. A partir de un polinomio Hurwitz de orden n mediante un sucesivo descenso del orden del polinomio obtenemos una sucesión de cotas inferiores que dependen de los coeficientes del polinomio de grado n . Estos resultados son extendidos para obtener cotas inferiores de familias de polinomios de tipo *intervalo*.

Primero presentamos una desigualdad entre las abscisas de estabilidad de un polinomio Hurwitz $p(z)$ y su derivada $p'(z)$. Sin pérdida de generalidad, vamos a considerar $p(z)$ de la forma siguiente

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

A partir de esta desigualdad podemos obtener una cota inferior para la abscisa de estabilidad de $p(z)$ y una familia Hurwitz de polinomios intervalo. Cotas inferiores de la abscisa de estabilidad de un polinomio fueron obtenidas en [61] y [62]. Usando la notación dada anteriormente vamos a denotar la abscisa de estabilidad de un polinomio Hurwitz $p(z)$ por σ_p y la abscisa de estabilidad de $p'(z)$ por $\sigma_{p'}$. Esta relación es la desigualdad $\sigma_{p'} \leq \sigma_p$. Después utilizaremos esta desigualdad para obtener una cota inferior para la abscisa de estabilidad de un polinomio y encontrar cotas inferiores para la abscisa de estabilidad de una familia Hurwitz de polinomios intervalo.

2.3.1. Abscisa de polinomios Hurwitz: Una desigualdad entre σ_p y $\sigma_{p'}$

La prueba del Teorema 13 está basada en el siguiente resultado de Gauss-Lucas.

Teorema 12 (Gauss-Lucas). *Cualquier semiplano cerrado que contiene todos los ceros de un polinomio $p(z)$ también contiene todos los ceros de su derivada, $p'(z)$.*

Ver [33, pág. 463], [50, pág. 11 y 12] y [67, pág. 84] para una demostración. Consideremos un polinomio Hurwitz $p(z)$ de la forma indicada entonces tenemos que

$$p'(z) = n a_n z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} + (n-2) a_{n-2} z^{n-3} + \cdots + 2 a_2 z + a_1.$$

Así tenemos el siguiente resultado.

Teorema 13. *Si $p(z)$ es un polinomio Hurwitz y $\sigma_p, \sigma_{p'}$ son las abscisas de estabilidad de p y p' respectivamente, entonces tenemos que $\sigma_{p'} \leq \sigma_p$.*

Demostración. Sea $p(z)$ un polinomio Hurwitz. Si $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ son las raíces de $p(z)$ entonces su abscisa de estabilidad σ_p esta dada por $\sigma_p = -R$ donde $R = \max\{\bar{r} > 0 : \xi_1 + r, \xi_2 + r, \dots, \xi_n + r \in \mathcal{C}^-, \forall r < \bar{r}\}$. Entonces $\sigma_p = -R$ donde $R = \max\{\bar{r} > 0 : p(z - r)$ es un polinomio Hurwitz, $\forall r < \bar{r}\}$. Por el teorema de Gauss-Lucas (ver [33, pag. 463]) si $p(z)$ es Hurwitz entonces $p'(z)$ es Hurwitz. Así tenemos que si $p(z - r)$ es un polinomio Hurwitz entonces $p'(z - r)$ es un polinomio Hurwitz. Esto implica que $\sigma_{p'} \leq \sigma_p$. \square

Ahora vamos a considerar dos ejemplos.

Ejemplo 2. *Sea $p(z) = z^3 + \frac{19}{6}z^2 + \frac{8}{3}z + \frac{2}{3}$. La abscisa de estabilidad de $p(z)$ es $\sigma_p = -0.5$ y la abscisa de estabilidad de $p'(z) = 3z^2 + \frac{19}{3}z + \frac{8}{3}$ es $\sigma_{p'} \approx -0.58$. Así tenemos que $\sigma_{p'} < \sigma_p$.*

Ejemplo 3. *Sea $p(z) = z^3 + 4z^2 + 5z + 2$. La abscisa de estabilidad de $p(z)$ es $\sigma_p = -1$ y la abscisa de estabilidad de $p'(z) = 3z^2 + 8z + 5$ es $\sigma_{p'} = -1$. En este caso tenemos que $\sigma_{p'} = \sigma_p$.*

El Teorema 13 nos plantea el siguiente problema abierto: Si $p(z)$ es un polinomio Hurwitz encontrar condiciones necesarias y suficientes para tener la igualdad entre $\sigma_{p'}$ y σ_p . Relacionado con este problema, de manera inmediata se pueden dar los siguientes resultados.

Teorema 14. *Si $p(z) = a_n(z - \alpha)^n$ es un polinomio Hurwitz entonces se tiene que $\sigma_{p'} = \sigma_p$.*

Demostración. Sea $p(z) = a_n(z - \alpha)^n$ un polinomio Hurwitz, Por lo tanto, $p'(z) = n a_n(z - \alpha)^{n-1}$. Esto implica que $\sigma_{p'} = \sigma_p$. \square

Teorema 15. *Si $p(z) = a_n(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n)$ es un polinomio Hurwitz donde sus raíces son reales y distintas entonces $\sigma_{p'} < \sigma_p$.*

Demostración. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ las raíces reales y distintas de $p(z)$ entonces por el teorema de Rolle [63], existe un número β entre cada α_i y α_{i+1} , tal que, $p'(\beta) = 0$, además, p' tiene $n - 1$ raíces distintas. Así se tiene que, $\sigma_{p'} < \sigma_p$. \square

2.3.2. Una cota inferior de la abscisa de estabilidad de un polinomio

A partir de esta desigualdad podemos obtener el siguiente resultado que nos da una cota inferior para la abscisa de estabilidad de un polinomio estable.

Teorema 16. *Sea $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ un polinomio Hurwitz con coeficientes positivos, entonces tenemos que*

(a) *Si $[2(n-1)a_{n-1}]^2 - 8n(n-1)a_n a_{n-2} \geq 0$, entonces*

$$\frac{-2(n-1)a_{n-1} + \sqrt{[2(n-1)a_{n-1}]^2 - 8n(n-1)a_n a_{n-2}}}{2n(n-1)a_n} \leq \sigma_p$$

(b) *Si $[2(n-1)a_{n-1}]^2 - 8n(n-1)a_n a_{n-2} < 0$, entonces*

$$-\frac{a_{n-1}}{na_n} \leq \sigma_p$$

Demostración. [a] Sea $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_1 z + a_0$ un polinomio Hurwitz. Entonces tenemos que

$$p^{(n-2)}(z) = n(n-1) \dots 3a_n z^2 + (n-1)(n-2) \dots 2a_{n-1} z + (n-2) \dots 2a_{n-2}$$

es un polinomio Hurwitz. Por el teorema 13 tenemos que $\sigma_{p^{(n-2)}} \leq \sigma_{p^{(n-3)}} \leq \dots \leq \sigma_{p'} \leq \sigma_p$. Pero

$$p^{(n-2)}(z) = 0, \text{ si y sólo si } , n(n-1)a_n z^2 + 2(n-1)a_{n-1} z + 2a_{n-2} = 0.$$

Si $[2(n-1)a_{n-1}]^2 - 8n(n-1)a_n a_{n-2} \geq 0$ entonces tenemos que

$$\frac{-2(n-1)a_{n-1} + \sqrt{[2(n-1)a_{n-1}]^2 - 8n(n-1)a_n a_{n-2}}}{2n(n-1)a_n} = \sigma_{p^{(n-2)}} \leq \sigma_p.$$

La prueba de [b] se sigue de la misma manera. □

A continuación presentamos algunos ejemplos los cuales ilustran el teorema dado.

Ejemplo 4. *Consideremos el polinomio $p(z) = 6z^5 + 43z^4 + 110z^3 + 125z^2 + 64z + 12$ para este polinomio tenemos que $[2(n-1)a_{n-1}]^2 - 8n(n-1)a_n a_{n-2} = 12736 \geq 0$. De la parte (a) del teorema 16 tenemos que*

$$\frac{-2(n-1)a_{n-1} + \sqrt{[2(n-1)a_{n-1}]^2 - 8n(n-1)a_n a_{n-2}}}{2n(n-1)a_n} = -0.96$$

es una cota inferior de σ_p , esto es, $-0.96 \leq -1/2 = \sigma_p$.

Ejemplo 5. *Sea el polinomio $p(z) = z^4 + 3z^3 + 5z^2 + 4z + 2$. Entonces tenemos que $[2(n-1)a_{n-1}]^2 - 8n(n-1)a_n a_{n-2} = -156 \leq 0$. Por la parte (b) del teorema 16 tenemos que*

$$-\frac{a_{n-1}}{na_n} = -3/4$$

es una cota inferior de σ_p , esto es, $-3/4 \leq -1/2 = \sigma_p$.

Realizando las siguientes sustituciones $m = n - 1$, $i = n$ en las cotas inferiores dadas en [61] y [62].

$$S_{mi} = - \left[\binom{n}{m}^{-1} \binom{n}{i} \left(\frac{a_m}{a_i} \right) \right]^{1/(i-m)}, \quad m = 0, 1, \dots, i-1. \quad (2.2)$$

obtenemos que

$$S_{(n-1)n} = -\frac{a_{n-1}}{na_n}$$

el cual es el mismo resultado obtenido en la parte (b) del teorema 16. Del teorema 16 (a) tenemos una cota para la abscisa de estabilidad de $p(z)$ la cual depende de tres coeficientes mientras que las cotas inferiores de 2.2 sólo dependen de dos coeficientes de $p(z)$ así en algunos casos esta cota es mejor que las dadas en 2.2 como se ilustra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 6. Sea $p(z) = 6z^5 + 43z^4 + 110z^3 + 125z^2 + 64z + 12$. Por la parte (a) del teorema 16 tenemos que

$$\frac{-2(n-1)a_{n-1} + \sqrt{[2(n-1)a_{n-1}]^2 - 8n(n-1)a_n a_{n-2}}}{2n(n-1)a_n} \approx -0.96$$

es una cota inferior de $\sigma_p = -1/2$ y $-\frac{a_{n-1}}{na_n} = -1.43 < -0.96 < -\frac{1}{2} = \sigma_p$.

Ejemplo 7. Sea $p(z) = 6z^3 + 19z^2 + 16z + 4$. Por la parte (a) del teorema 16 tenemos que

$$\frac{-2(n-1)a_{n-1} + \sqrt{[2(n-1)a_{n-1}]^2 - 8n(n-1)a_n a_{n-2}}}{2n(n-1)a_n} \approx -0.58$$

es una cota inferior de $\sigma_p = -1/2$ y $S_{mi} = -\left[\binom{n}{m}^{-1} \binom{n}{i} \left(\frac{a_m}{a_i}\right)\right]^{1/(i-m)} < -0.58 < \sigma_p, \forall m = 0, 1, \dots, i-1$.

2.3.3. Cotas inferiores para la abscisa de estabilidad de una familia Intervalo de polinomios

A partir de los resultados dados podemos estudiar cotas inferiores para la abscisa de estabilidad de una familia Hurwitz de polinomios intervalo. Consideremos nuevamente una familia de grado n con la siguiente notación:

$$\mathfrak{F} = \{p(z) : p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, \text{ donde } a_i \in [\alpha_i, \beta_i], i = 0, 1, 2, \dots, n\}$$

La abscisa de la estabilidad de la familia de polinomios intervalo es definida como $\max_{p \in \mathfrak{F}} \sigma_p$. Así tenemos el siguiente resultado.

Teorema 17. Consideremos el polinomio intervalo Hurwitz $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ con $0 < \alpha_0 \leq a_0 \leq \beta_0, 0 < \alpha_1 \leq a_1 \leq \beta_1, \dots, 0 < \alpha_n \leq a_n \leq \beta_n$. Tenemos que

(a) $-\frac{\beta_{n-1}}{n\alpha_n}$ es una cota inferior para la abscisa de estabilidad de la familia de polinomios y

(b) si $[2(n-1)\alpha_{n-1}]^2 - 8n(n-1)\beta_n\beta_{n-2} \geq 0$ entonces $\frac{-2(n-1)\beta_{n-1} + \sqrt{[2(n-1)\alpha_{n-1}]^2 - 8n(n-1)\beta_n\beta_{n-2}}}{2n(n-1)\beta_n}$ es cota inferior de la abscisa de estabilidad de la familia de polinomios.

Demostración. (a) Del teorema 16 tenemos que en ambos casos ($[2(n-1)a_{n-1}]^2 - 8n(n-1)a_n a_{n-2} \geq 0 (< 0)$), $-\frac{a_{n-1}}{na_n}$ es una cota inferior para la abscisa de estabilidad para un polinomio $p(z)$ dado. Por otro lado, tenemos que $-\beta_{n-1} \leq -a_{n-1} \leq -\alpha_{n-1}$ además $\frac{1}{\beta_n} \leq \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{\alpha_n}$ así tenemos que $-\frac{\beta_{n-1}}{n\alpha_n} \leq -\frac{a_{n-1}}{na_n}$, así tenemos la parte (a) del teorema.

(b) Supongamos que $[2(n-1)\alpha_{n-1}]^2 - 8n(n-1)\beta_n\beta_{n-2} \geq 0$. Además, de las siguientes desigualdades

1. $\alpha_{n-2} \leq a_{n-2} \leq \beta_{n-2}$
2. $\alpha_{n-1} \leq a_{n-1} \leq \beta_{n-1}$
3. $\alpha_n \leq a_n \leq \beta_n$

tenemos que

1. $2(n-1)\alpha_{n-1} \leq 2(n-1)a_{n-1} \leq 2(n-1)\beta_{n-1}$

$$2. \quad 8n(n-1)\alpha_n\alpha_{n-2} \leq 8n(n-1)a_n a_{n-2} \leq 8n(n-1)\beta_n\beta_{n-2}$$

$$3. \quad \frac{1}{\beta_n} \leq \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{\alpha_n},$$

entonces

$$1. \quad -2(n-1)\beta_{n-1} \leq -2(n-1)a_{n-1}$$

$$2. \quad [2(n-1)\alpha_{n-1}]^2 - 8n(n-1)\beta_n\beta_{n-2} \leq [2(n-1)a_{n-1}]^2 - 8n(n-1)a_n a_{n-2}$$

$$3. \quad \frac{1}{2n(n-1)\beta_n} \leq \frac{1}{2n(n-1)a_n}.$$

Por lo tanto

$$\frac{-2(n-1)\beta_{n-1} + \sqrt{[2(n-1)\alpha_{n-1}]^2 - 8n(n-1)\beta_n\beta_{n-2}}}{2n(n-1)\beta_n} \leq \frac{-2(n-1)a_{n-1} + \sqrt{[2(n-1)a_{n-1}]^2 - 8n(n-1)a_n a_{n-2}}}{2n(n-1)\beta_n}$$

Esto prueba el teorema 17. □

Ahora presentamos un ejemplo el cual ilustra el teorema dado.

Ejemplo 8. Consideremos la familia de polinomios Hurwitz

$$p(z) = a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

donde $0.25 \leq a_0 \leq 1.25$, $0.75 \leq a_1 \leq 1.25$, $2.75 \leq a_2 \leq 3.25$ y $0.25 \leq a_3 \leq 1.75$. En este caso $\alpha_0 = 0.25$, $\beta_0 = 1.25$, \dots , $\alpha_3 = 0.25$, $\beta_3 = 1.75$. Además $[2(n-1)\alpha_{n-1}]^2 - 8n(n-1)\beta_n\beta_{n-2} = 46 > 0$, por la parte b) del teorema tenemos que

$$\frac{-2(n-1)\beta_{n-1} + \sqrt{[2(n-1)\alpha_{n-1}]^2 - 8n(n-1)\beta_n\beta_{n-2}}}{2n(n-1)\beta_n} \approx -0.41$$

es una cota inferior de la abscisa de estabilidad de la familia de polinomios Hurwitz.

2.4. Polinomios Schur

Ahora extenderemos el estudio de la abscisa de estabilidad de un polinomio a polinomios Schur. Se dice que un polinomio es Schur si tiene todas sus raíces dentro del círculo unitario, \mathbb{D} . Consideremos el sistema

$$x_{n+1} = Ax_n. \tag{2.3}$$

Si el polinomio característico asociado al sistema es Schur entonces el sistema (2.3) es estable. A continuación definimos la abscisa de estabilidad de un polinomio Schur. Para más información sobre polinomios Schur ver [11] y [41].

Definición 2. Si $p(z)$ es un polinomio Schur y $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ son las raíces de $p(z)$ entonces la abscisa de $p(z)$, σ_p es definida como

$$\sigma_p = \max_{1 \leq i \leq n} \{|\xi_i|\}.$$

El planteamiento utilizado en esta sección está basado en la siguiente idea: si $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ es un polinomio Schur y σ_p es la abscisa de estabilidad de $p(z)$ consideremos $p(rz)$ con $r > 0$. Entonces $\sigma_p = 1/R$ donde

$$R = \max \{ \bar{r} > 0 : p(rz) \text{ es un polinomio Schur } \forall r < \bar{r} \}.$$

A continuación presentamos una desigualdad entre las abscisas de estabilidad de un polinomio Schur $p(z)$ y su derivada $p'(z)$. Esta desigualdad será utilizada para obtener cotas inferiores para la abscisa de estabilidad de un polinomio Schur y posteriormente cotas inferiores para la abscisa de estabilidad de una Familia Intervalo de polinomios Schur.

2.4.1. Una desigualdad entre σ_p y $\sigma_{p'}$

En la demostración de la desigualdad utilizaremos el siguiente resultado.

Teorema 18. *Cualquier círculo C que encierra todos los ceros de un polinomio $p(z)$ también encierra todos los ceros de su derivada $p'(z)$.*

Ver [55] para una demostración.

Teorema 19. *Si $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ es un polinomio Schur y $\sigma_p, \sigma_{p'}$ son las abscisas de estabilidad de $p(z)$ y $p'(z)$ respectivamente. Entonces $\sigma_{p'} \leq \sigma_p$.*

Demostración. Sea $p(z)$ un polinomio Schur. Si $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ son las raíces de $p(z)$ entonces su abscisa de estabilidad σ_p esta dada por $\sigma_p = 1/R$ donde $R = \max\{\bar{r} > 0 : |r\xi_1|, |r\xi_2|, \dots, |r\xi_n| < 1, \forall r < \bar{r}\}$. Entonces $\sigma_p = 1/R$, donde $R = \max\{\bar{r} > 0 : p(rz)$ es un polinomio Schur, $\forall r < \bar{r}\}$.

Por el teorema 18, si $p(z)$ es Schur entonces $p'(z)$ es Schur. Por lo tanto, si $p(rz)$ es un polinomio Schur entonces $p'(rz)$ es un polinomio Schur. Así, $\sigma_{p'} \leq \sigma_p$. \square

Ejemplo 9. *Sea $p(z) = z^3 + \frac{31}{30}z^2 + \frac{1}{3}z + \frac{1}{30}$. La abscisa de estabilidad de $p(z)$ es $\sigma_p = 0.50$ y la abscisa de estabilidad de $p'(z) = 3z^2 + \frac{31}{15}z + \frac{1}{3}$ es $\sigma_{p'} \approx 0.43$. Tenemos que $\sigma_{p'} < \sigma_p$.*

Ejemplo 10. *Consideremos $p(z) = z^4 + \frac{11}{6}z^3 + \frac{3}{2}z^2 + \frac{7}{12}z + \frac{1}{12}$. La abscisa de estabilidad de $p(z)$ es $\sigma_p \approx 0.70$ y la abscisa de estabilidad de $p'(z) = 4z^3 + \frac{11}{2}z^2 + 3z + \frac{7}{12}$ es $\sigma_{p'} \approx 0.59$. Por lo tanto, $\sigma_{p'} < \sigma_p$.*

El Teorema 19 plantea el siguiente problema abierto: Si $p(z)$ es un polinomio Schur, encontrar condiciones necesarias y suficientes para que se tenga la siguiente igualdad $\sigma_{p'} = \sigma_p$.

2.4.2. Una cota inferior de la abscisa de estabilidad de un polinomio Schur

A continuación presentamos el siguiente resultado.

Teorema 20. *Sea $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ un polinomio Schur.*

(a) $\left| \frac{a_{n-1}}{na_n} \right| \leq \sigma_p$.

(b) Si $[2(n-1)a_{n-1}]^2 - 8n(n-1)a_n a_{n-2} < 0$ entonces

$$\sqrt{\frac{2a_{n-2}}{n(n-1)a_n}} \leq \sigma_p.$$

Demostración. (a). Si $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_1 z + a_0$ es un polinomio Schur entonces $p^{(n-1)}(z) = n(n-1) \dots 3 \cdot 2a_n z + (n-1)(n-2) \dots 2a_{n-1}$ es un polinomio Schur. Por el teorema 19 tenemos que $\sigma_{p^{(n-1)}} \leq \sigma_{p^{(n-2)}} \leq \dots \leq \sigma_{p'} \leq \sigma_p$. Pero $p^{(n-1)}(z) = 0$, si y sólo si, $n(n-1) \dots 3 \cdot 2a_n z + (n-1)(n-2) \dots 2a_{n-1} = 0$. Esto implica que $z = -\frac{a_{n-1}}{na_n}$. Por lo tanto, $\sigma_{p^{(n-1)}} = \left| \frac{a_{n-1}}{na_n} \right| \leq \sigma_p$.

(b). Sea $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_1 z + a_0$ un polinomio Schur entonces $p^{(n-2)}(z) = n(n-1) \dots 3 \cdot a_n z^2 + (n-1)(n-2) \dots 2a_{n-1} z + (n-2) \dots + 2a_{n-2}$ es un polinomio Schur. Por el teorema 19 tenemos que $\sigma_{p^{(n-2)}} \leq \sigma_{p^{(n-3)}} \leq \dots \leq \sigma_{p'} \leq \sigma_p$. Pero $p^{(n-2)}(z) = 0$, si y sólo si, $n(n-1)a_n z^2 + 2(n-1)a_{n-1} z + 2a_{n-2} = 0$. Si $[2(n-1)a_{n-1}]^2 - 8n(n-1)a_n a_{n-2} < 0$ entonces

$$\left\| \frac{-2(n-1)a_{n-1} + \sqrt{[2(n-1)a_{n-1}]^2 - 8n(n-1)a_n a_{n-2}}}{2n(n-1)a_n} \right\| = \sqrt{\frac{2a_{n-2}}{n(n-1)a_n}} \leq \sigma_p.$$

\square

Ejemplo 11. Para el polinomio Schur $p(z) = z^5 + z^4 + \frac{1}{4}z^3 - \frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{8}z$, $n = 5$, $a_{n-2} = \frac{1}{4}$, $a_{n-1} = 1$, $a_n = 1$. Por la parte (a) del teorema 20 tenemos que $\left| \frac{a_{n-1}}{na_n} \right| = 0.2$ es una cota inferior de σ_p , es decir, $0.2 \leq \sigma_p \approx 0.70$.

Ejemplo 12. Considerar $p(z) = z^4 + \frac{11}{6}z^3 + \frac{3}{2}z^2 + \frac{7}{12}z + \frac{1}{12}$ un polinomio Schur. Aquí, $n = 4$, $a_{n-2} = \frac{3}{2}$, $a_{n-1} = \frac{11}{6}$, $a_n = 1$ y $[2(n-1)a_{n-1}]^2 - 8n(n-1)a_n a_{n-2} = -23 < 0$. Por la parte (b) del teorema 20 tenemos que $\sqrt{\frac{2a_{n-2}}{n(n-1)a_n}} = 0.50$ es una cota inferior de σ_p , es decir, $0.50 \leq \sigma_p \approx 0.70$.

2.4.3. Cotas inferiores para la abscisa de estabilidad de una Familia Intervalo de polinomios tipo Schur

Consideremos una Familia Intervalo de polinomios tipo Schur de la forma

$$\mathcal{F} = \{f(z) : f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, \text{ donde } a_i \in [\alpha_i, \beta_i], i = 0, 1, 2, \dots, n\}$$

la abscisa de estabilidad es definida como $\max_{p \in \mathcal{F}} \sigma_p$.

Teorema 21. Considerar la familia de polinomios Schur $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ con $0 < \alpha_0 \leq a_0 \leq \beta_0$, $0 < \alpha_1 \leq a_1 \leq \beta_1, \dots, 0 < \alpha_n \leq a_n \leq \beta_n$. Tenemos que si $[2(n-1)\alpha_{n-1}]^2 - 8n(n-1)\beta_n \beta_{n-2} < 0$ entonces $\sqrt{\frac{2\alpha_{n-2}}{n(n-1)\beta_n}}$ es una cota inferior de la abscisa de estabilidad de la familia de polinomios Schur.

Demostración. Del teorema 20 tenemos que si $[2(n-1)a_{n-1}]^2 - 8n(n-1)a_n a_{n-2} < 0$ entonces $\sqrt{\frac{2a_{n-2}}{n(n-1)a_n}}$ es una cota inferior de un polinomio $p(z)$ dado. Además, tenemos que $\alpha_{n-2} \leq a_{n-2} \leq \beta_{n-2}$, por otro lado, $\frac{1}{\beta_n} \leq \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{\alpha_n}$. Por lo tanto

$$\sqrt{\frac{2\alpha_{n-2}}{n(n-1)\beta_n}} \leq \sqrt{\frac{2a_{n-2}}{n(n-1)a_n}}.$$

□

Ejemplo 13. Consideremos la familia de polinomios Schur

$$f(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

donde $0.2 \leq a_0 \leq 0.8$, $0.1 \leq a_1 \leq 0.25$, $2.5 \leq a_2 \leq 4$. Aquí $\alpha_0 = 0.2$, $\beta_0 = 0.8$, $\alpha_1 = 0.1$, $\beta_1 = 0.25$, $\alpha_2 = 2.5$, $\beta_2 = 4$ y $n = 2$. Ya que $[2(n-1)\alpha_{n-1}]^2 - 8n(n-1)\beta_n \beta_{n-2} = -51.16 < 0$, por el teorema 21

$$\sqrt{\frac{2\alpha_{n-2}}{n(n-1)\beta_n}} \approx 0.22$$

es una cota inferior de la abscisa de estabilidad de la familia de polinomios Schur.

Capítulo 3

Aplicaciones de la Abscisa

3.1. Aplicaciones

Aplicaciones

Ahora presentamos algunas aplicaciones de la abscisa de estabilidad. Los resultados presentados en este capítulo están contenidos en el artículo [23].

Aplicación I El Teorema 11 tiene una aplicación directa si se analiza desde el siguiente punto de vista: Si el polinomio Hurwitz $p(z) = z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \dots + a_n$ es el polinomio característico de un sistema y existe la siguiente incertidumbre

$$p(z) + rp_1(z) + r^2p_2(z) + \dots + r^np_n(z) \quad (3.1)$$

donde $p_1(z), p_2(z), \dots, p_n(z)$ son los polinomios definidos en el Teorema (11) entonces estamos interesados en calcular el máximo \bar{r} , tal que, la familia (3.1) es Hurwitz $\forall r, 0 \leq r < \bar{r}$. El Teorema 11 dice que $\bar{r} = -\sigma$ donde σ es la abscisa de estabilidad de $p(z)$.

Aplicación II Consideremos el sistema $\dot{x} = Ax$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}$$

entonces $p_A(t) = t^n + a_1t^{n-1} + a_2t^{n-2} + \dots + a_n$ es el polinomio característico de A . Por lo tanto, el espectro de Lyapunov del sistema $\dot{x} = Ax$ es el conjunto $\{ \operatorname{Re} \lambda : p_A(\lambda) = 0 \}$. Así, tenemos que:

$$\sigma_{p_A} = \max\{ \operatorname{Re} \lambda : p_A(\lambda) = 0 \},$$

esto es, la abscisa de estabilidad de un polinomio es el valor máximo de los exponentes de Lyapunov de un sistema lineal.

Ejemplo 14. Consideremos el sistema $\dot{x} = Ax$ donde

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$P_A(t) = t^4 + \frac{13}{2}t^3 + 14t^2 + \frac{23}{2}t + 3$ es el polinomio característico de A . Podemos construir una familia de polinomios $f_r(t)$, tal que,

$$\begin{aligned} f_r(t) &= P_0(t) + rP_1(t) + r^2P_2(t) + r^3P_3(t) + r^4P_4(t), \\ &= \left[t^4 + \frac{13}{2}t^3 + 14t^2 + \frac{23}{2}t + 3 \right] + r \left[-4t^3 - \frac{39}{2}t^2 - 28t - \frac{23}{2} \right] + \\ &\quad + r^2 \left[6t^2 + \frac{39}{2}t + 14 \right] + r^3 \left[-4t - \frac{13}{2} \right] + r^4[1], \end{aligned}$$

con H_0, \dots, H_4 matrices Hurwitz de P_0, \dots, P_4 respectivamente,

$$\begin{aligned} H_0 &= \begin{pmatrix} \frac{13}{2} & \frac{23}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 14 & 3 & 0 \\ 0 & \frac{13}{2} & \frac{23}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 14 & 3 \end{pmatrix}, H_1 = \begin{pmatrix} -4 & -28 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{39}{2} & -\frac{23}{2} & 0 \\ 0 & -4 & -28 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{39}{2} & -\frac{23}{2} \end{pmatrix}, H_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{39}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{39}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 14 \end{pmatrix} \\ H_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{13}{2} \end{pmatrix} \text{ y } H_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Construimos la matriz N y calculamos sus valores propios los cuales son:

$$\lambda = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.33, 0.4, 0.5, 0.5, 0.57, 0.66, 0.8, 1, 1.33, 2\}.$$

Así, $\lambda_{\max}^+(N) = 2$ por el Teorema 11 tenemos que

$$\sigma_p = -\frac{1}{\lambda_{\max}^+(N)} = -\frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, el valor máximo de los exponentes de Lyapunov del sistema $\dot{x} = Ax$ es $\sigma_p = -\frac{1}{2}$.

Aplicación III La utilidad de conocer la abscisa de un polinomio se puede apreciar en el estudio de la estabilidad de fenómenos físicos, químicos o biológicos. Para explicar tal idea consideremos el sistema $\dot{x} = Ax$ donde σ es la abscisa de estabilidad del polinomio característico asociado al sistema $p_A(z)$, entonces las soluciones $x(z)$ satisfacen la siguiente desigualdad $\|x(z)\| \leq ke^{\sigma z}$, donde $k > 0$ es una constante.

3.2. Generación de atractores caóticos

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias paramétrico (SED):

$$\dot{x} = f(x, \mu),$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ y f es una función continuamente diferenciable en $U \in \mathbb{R}^n$. Diversas técnicas han sido desarrolladas para el análisis del comportamiento de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciables. El Teorema de Hartman-Grobman establece que su evolución interna es determinada por su matriz Jacobiana. Bajo determinadas condiciones, la estabilidad del sistema linealizado implica la estabilidad del sistema (SED). Esto es, el comportamiento de sus soluciones es descrita por el conjunto espectral del sistema linealizado. Muchas veces un cambio estructural de las soluciones es deseada para obtener una diferente dinámica según nuestras necesidades. El cambio obtenido es por medio del vector de parámetros μ . En el desarrollo de la sección se mostrará que la abscisa de estabilidad es un parámetro de bifurcación, ya que, $r = \sigma_p$ es un valor en donde las soluciones del sistema cambian su comportamiento (los retratos fase son diferentes). Ahora bien, si el parámetro de bifurcación varía en cierto intervalo, una dinámica no predecible podría aparecer en la solución de un sistema. Se han diseñado sistemas con diversas técnicas para obtener soluciones que presentan *atractores extraños* (que presentan enroscados). En este capítulo generamos atractores que presentan multi-enroscados, que es un tipo de *caos ordenado*, mediante una clase de sistemas lineales disipativos inestables (UDS) por medio de la utilización de cotas inferiores de la abscisa de estabilidad.

3.2.1. Preliminares

Nuevamente damos la definición de la abscisa de estabilidad de un polinomio Hurwitz.

Definición 3. Si $p(t)$ es un polinomio Hurwitz y z_1, z_2, \dots, z_n son sus raíces, el número negativo

$$\sigma_p = \max_{1 \leq i \leq n} \{\operatorname{Re} z_i\}. \quad (3.2)$$

es definido como la **abscisa de estabilidad** de $p(t)$.

3.2.2. La abscisa, generación de inestabilidad y multi enroscados

Ahora, utilizaremos la abscisa de estabilidad para encontrar una cota inferior de hiperbolicidad e inestabilidad necesaria en sistemas disipativos inestables (UDS) para generar caos. Consideremos el sistema controlado:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (3.3)$$

con el polinomio característico de A , $p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1t + a_0$ Hurwitz. Nuevamente definimos $f_r(t) = p(t-r)$ con $r \geq 0$. Notemos que $f_r(t)$ es un conjunto de polinomios, tal que, $f_0(t) = p(t)$ es un polinomio Hurwitz y la abscisa de estabilidad esta definida mediante la siguiente expresión:

$$\sigma_{f_r} = -\max_{\bar{r}} \{\bar{r} > 0 : f_r(t) \text{ es Hurwitz } \forall r, r < \bar{r}\}. \quad (3.4)$$

Por el Teorema de Taylor $f_r(t) = p(t-r)$ puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} f_r(t) &= t^n + \frac{p^{(n-1)}(-r)}{(n-1)!}t^{n-1} + \dots + \frac{p'(-r)}{1!}t + p(-r) \\ &= t^n + A_{n-1}(r)t^{n-1} + \dots + A_1(r)t + A_0(r). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Si $r = -\sigma_p$ entonces $f_r(t)$ tiene raíces en el eje imaginario. Por lo tanto, el sistema es inestable en el intervalo $(-\sigma_p, \infty)$. Ahora describiremos la clase de inestabilidad que vamos a considerar.

Definición 4. El sistema

$$\dot{x} = Ax, \quad (3.6)$$

con valores propios λ_i , $i = 1, 2, 3$ se dice ser disipativo (con respecto de la variedad generada mediante los valores propios con parte real negativa) si $\sum_{i=1}^3 \lambda_i < 0$. El sistema se dice ser inestable y disipativo de tipo I (UDS-I) si uno de sus valores propios es un número real negativo y los otros dos son complejos conjugados con parte real positiva y se dice ser de tipo II (UDS-II) si uno de sus valores propios es un real positivo y los otros dos son complejos conjugados con parte real negativa.

Así, podemos decir que el polinomio característico $p(t)$ asociado al sistema (3.6) es disipativo si la suma de sus raíces es negativa. De forma similar $p(t)$ será un polinomio UDS-I (UDS-II resp.) si sus raíces satisfacen la definición para los sistemas de tipo I (tipo II, resp.).

Lema 1. Sea $p(t)$ un polinomio real Hurwitz de grado n con raíces t_1, \dots, t_n . Entonces tenemos que:

- i) $f_r(t)$ es Hurwitz (y disipativo) para $r < -\sigma_p$.
- ii) $f_r(t)$ es disipativo para $r < U_{diss(p)} = -\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n t_j$.

Demostración. La prueba de i) es inmediata a partir de la definición de la abscisa de estabilidad. Para la parte ii) si las raíces t_j de $p(t)$ tienen parte imaginaria no nula entonces su traslación $r + t_j$ y su conjugada son raíces de $f_r(t)$ con $r \in \mathbb{R}$. Como $p(t) = \prod_{j=1}^n (t + t_j)$ entonces

$$\begin{aligned} f_r(t) &= \prod_{j=1}^n [(t+r) + t_j] \\ &= \prod_{j=1}^n [t + (r + t_j)]. \end{aligned}$$

Ahora, ya que $p(t)$ es Hurwitz $p(t)$ es disipativo. Además:

$$\sum_{j=1}^n (r + t_j) = \sum_{j=1}^n t_j + nr,$$

y como $\sum_{j=1}^n t_j < 0$ entonces se tiene que

$$\sum_{j=1}^n t_j + nr < 0 \Leftrightarrow r < -\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n t_j.$$

Por lo tanto, $f_r(t)$ es disipativo para $r < -\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n t_j$. □

Observación 1. *El Lema anterior nos da una cota superior de disipatividad, sin embargo podría pasar que $\sigma_p = U_{diss(p)}$ en el caso cuando $Re(t_j) = c$ para todo $j = 1, \dots, n$.*

El hecho de que un polinomio Hurwitz $p(t)$ es inestable para $(-\sigma_p, \infty)$ y que $U_{diss(p)}$ es una cota superior para la disipatividad nos permite *pasar* de la estabilidad al caos en el sentido de sistemas (UDS) si al menos una de sus raíces es diferente. El siguiente corolario es una consecuencia de estos resultados.

Corolario 1. *Consideremos el polinomio Hurwitz $p(t) = (t + \zeta)(t + \bar{\zeta})(t + \rho)$, con ρ real y $Im(\zeta) \neq 0$. Entonces*

i) $f_r(t)$ es Hurwitz, si y sólo si, $r < -\sigma_p$.

ii) Si $\rho \neq Re(\zeta)$ entonces $f_r(t)$ es UDS, si y sólo si, $r \in (-\sigma_p, U_{diss(p)})$

Para la generación de multi-enroscados vamos a considerar el siguiente sistema controlado:

$$\dot{x} = Ax + BS + bu \tag{3.7}$$

donde $B \in \mathbb{R}^n$, $b^T = (0, 0, \dots, 0, 1)$, S es la siguiente función de saturación:

$$S = \begin{cases} s_1 & \text{para } c_1 < x_1, \\ s_2 & \text{para } c_2 < x_1 \leq c_1, \\ \vdots & \\ s_m & \text{para } c_m < x_1 \leq c_{m-1}. \end{cases}$$

$u = c^T(r)x = (a_0 - A_0(r), a_1 - A_1(r), \dots, a_{n-1} - A_{n-1}(r))x$, donde $A_j(r) = \frac{p^j(-r)}{j!}$. Entonces el sistema controlado es

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -A_0(r) & -A_1(r) & -A_2(r) & \dots & -A_{n-1}(r) \end{pmatrix} x + BS.$$

El polinomio característico asociado al sistema es:

$$\begin{aligned} f_r(t) &= t^n + A_{n-1}(r)t^{n-1} + \dots + A_0(r), \\ &= t^n + \frac{p^{n-1}(-r)}{(n-1)!}t^{n-1} + \dots + \frac{p(-r)}{0!}, \\ &= p(t - r). \end{aligned}$$

Cuando $r = 0$ se tiene que A_0 es una matriz estable y $f_0(t) = p(t)$ pero cuando $r > -\sigma_p$ podemos obtener sistemas donde la presencia de atractores multi-enroscados es observada. Así, se tiene el siguiente teorema:

Teorema 22. *Consideremos el sistema controlado de dimensión tres (3.7) con polinomio característico Hurwitz $p_A(t) = (t + \zeta)(t + \bar{\zeta})(t + \rho)$ donde $Im(\zeta) \neq 0$. Si $Re(\zeta) \neq \rho$ entonces el sistema en lazo cerrado con el control $u = c^T(r)x$ es UDS para todo $r \in (-\sigma_{p_A}, U_{diss(p_A)})$.*

Demostración. La demostración se obtiene de los resultados anteriores. \square

Un sistema que satisface el teorema anterior puede presentar comportamiento caótico en sus puntos de equilibrio mediante una función de saturación S adecuada. Ahora ilustraremos la generación de atractores que presentan multi-enroscados. Consideremos el siguiente sistema:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -50 & -20 & -7 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -0.3 \\ -0.4 \\ 6.1 \end{pmatrix} S + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (3.8)$$

con

$$S = \begin{cases} 3, & \text{para } 0.375 < x_1; \\ 2, & \text{para } 0.225 < x_1 \leq 0.375; \\ 1, & \text{para } 0.075 < x_1 \leq 0.225; \\ 0, & \text{para } x_1 \leq 0.075. \end{cases}$$

$u = (50 - p(-r), 20 - \frac{p'(-r)}{1!}, 7 - \frac{p''(-r)}{2!})x$ donde $p(t) = t^3 + 7t^2 + 20t + 50$ es Hurwitz.

El sistema controlado es:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -p(-r) & -\frac{p'(-r)}{1!} & -\frac{p''(-r)}{2!} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -0,3 \\ -0,4 \\ 6,1 \end{pmatrix} S. \quad (3.9)$$

Tenemos que $f_r(t) = t^3 + \frac{p''(-r)}{2!}t^2 + \frac{p'(-r)}{1!}t + p(-r)$ para $r = 0$ se tiene que $f_0(t) = t^3 + 7t^2 + 20t + 50$ es un polinomio Hurwitz y no hay multi-enroscados en las soluciones. La figura 3.1 muestra las proyecciones de la solución estable sobre los planos: a) (x_1, x_2) ; b) (x_1, x_3) y c) (x_2, x_3) .

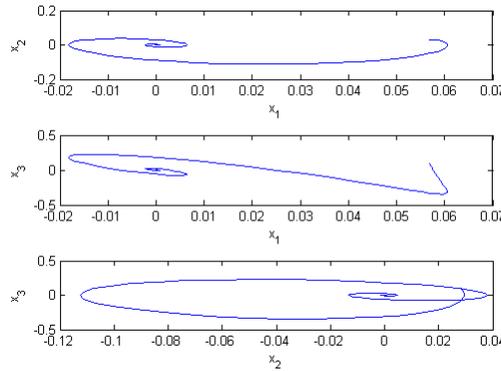


Figura 3.1: Proyecciones de la solución del sistema (3.8) sobre los planos: a) (x_1, x_2) ; b) (x_1, x_3) y c) (x_2, x_3) .

La abscisa de $f_0(t)$ es $\sigma_{f_0} = -1$. Entonces otro comportamiento podría aparecer cuando $r \in (1, \infty)$. Por ejemplo, para $r = 2$, $f_2(t) = t^3 + t^2 + 4t + 30$ y se tiene que $\sum_{j=1}^3 t_j < 0$. Por lo tanto, el sistema (3.9) es disipativo cuando $r = 2$. En la figura 3.2 en el sistema dado se muestra la generación de atractores con multi-enroscado con comportamiento caótico.

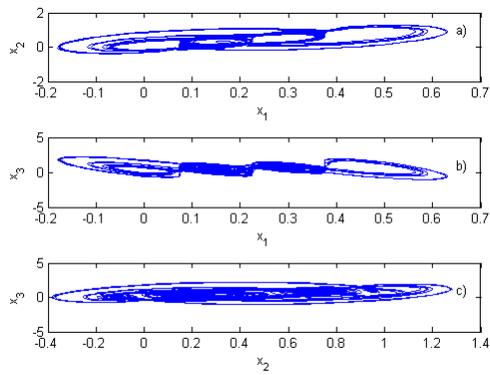


Figura 3.2: Proyecciones del atractor sobre los planos: a) (x_1, x_2) ; b) (x_1, x_3) y c) (x_2, x_3) .

Capítulo 4

Máximo intervalo para la presencia de atractores extraños enroscados

Los resultados presentados en este capítulo se encuentran contenidos en el trabajo [5]. En este capítulo vamos a considerar un sistema lineal capaz de generar atractores con multi-enroscado con comportamiento caótico cuando es controlado por una ley u determinada:

$$\dot{x} = Ax \quad (4.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es un vector de estado y $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ determina la dinámica del sistema. Información cualitativa acerca del comportamiento de las soluciones es determinada por el operador lineal A de (4.1) y específicamente sus valores propios $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Un punto de equilibrio x^* de (4.1) es llamado silla si es un punto de equilibrio *hiperbólico* en el sentido de que A tiene al menos un valor propio con parte real positiva y al menos un valor propio con parte real negativa pero no valores propios con parte real nula. Los puntos de equilibrio silla, los cuales conectan las variedades estables e inestables, W^s y W^u respectivamente, son responsables de sucesivas dilataciones y estrechamientos, por lo tanto, juegan un rol importante en la generación de caos, particularmente puntos de equilibrio silla-focos. La dilatación (expansión) causa que las trayectorias del sistema exhiban dependencia sensitiva sobre las condiciones iniciales, mientras que el estrechamiento crea el comportamiento de enroscado en las soluciones. Los puntos de equilibrio *silla-foco* de un sistema caótico en \mathbb{R}^3 pueden ser caracterizados en dos tipos según sus valores propios $\Lambda = \{\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k\} \subset \mathbb{C}$: (i) el punto de equilibrio silla foco es estable en uno de sus componentes pero inestable y oscilatorio en los otros dos. Esto es, el componente estable correspondiente a un valor propio real negativo ($\text{Re}\{\lambda_i\} < 0$ y $\text{Im}\{\lambda_i\} = 0$) mientras que las componentes inestables relativas a dos valores propios complejos conjugados ($\text{Re}\{\lambda_k\} > 0$ y $\text{Im}\{\lambda_k\} \neq 0$). (ii) el punto de equilibrio silla foco que es estable en dos de sus componentes pero inestable y oscilatorio en la otra. Así, las componentes disipativas son oscilatorias: ($\text{Re}\{\lambda_k\} < 0$ y $\text{Im}\{\lambda_k\} \neq 0$) mientras que la componente inestable corresponde a un valor propio real positivo ($\text{Re}\{\lambda_k\} > 0$ y $\text{Im}\{\lambda_k\} = 0$).

Si el sistema (4.1) tiene un punto de equilibrio silla-foco el cual es responsable de variedades estables e inestables y la suma de sus valores propios es negativa entonces el sistema es llamado *sistema inestable disipativo* (UDS). Según la discusión anterior es posible definir dos tipos de UDS y dos tipos de puntos de equilibrios correspondientes en \mathbb{R}^3 .

Definición 5. Consideremos el sistema (4.1) en \mathbb{R}^3 con valores propios λ_i , $i = 1, 2, 3$, tal que $\sum_{i=1}^3 \lambda_i < 0$. Entonces el sistema se dice ser un UDS de tipo I (UDS-I) si uno de sus valores propios es un real negativo y los otros dos son complejos conjugados con parte real positiva y se dice ser de tipo II (UDS-II) si uno de sus valores propios es real positivo y los otros dos son complejos conjugados con parte real negativa.

La definición anterior implica que el sistema UDS-I es disipativo en uno de sus componentes pero inestable en las otras dos, las cuales son oscilatorias. El inverso es el sistema UDS-II el cual es disipativo y oscilatorio en dos de sus componentes pero inestable en la otra. Algunos sistemas hiperbólicos de dinámica caótica en \mathbb{R}^3 pueden ser relacionados a estos dos tipos de UDS alrededor de sus puntos de equilibrio; por ejemplo, el sistema de Chua, otros sistemas lineales por pedazos y sistemas no lineales.

Para la generación de caos también se utilizan sistemas discontinuos, estos han sido extensivamente usados en diferentes áreas de la ciencia. Existe interés en la generación de atractores caóticos o hiper-caóticos con múltiples enroscados basados en UDS-I.

Por otro lado, a través de las aproximaciones para generar atractores caóticos con multi-enroscado existen unos pocos trabajos para generar familias de atractores caóticos con multi-enroscado. Por ejemplo, en [27] una familia de atractores con multi-enroscado fue presentada basada en un sistema dado por (4.1) y aplicando diferentes señales de control. En [5] una familia de atractores con multi-enroscado fue presentada como una familia monoparamétrica debido a que con solamente un parámetro el sistema genera un único, doble o triple atractor de enroscado. Recientemente en [33, 34] una familia hipercaótica de atractores con multi-enroscado fue introducida definiendo un sistema con multi-enroscado en \mathbb{R}^3 y este es tomado como un subsistema para sistemas con multi-enroscado en \mathbb{R}^n con $4 \leq n \in \mathbb{N}$. Otros trabajos has desarrollado una metodología sistemática para la construcción de sistemas autónomos hipercaóticos de tiempo continuo con múltiples exponentes de Liapunov [35, 36].

Ahora en este capítulo introducimos una familia de atractores con multi-enroscado basada en una familia de polinomios. Esto es, consideremos un sistema como (4.1) con polinomio característico p_0 y UDS-I, así el interés es generar una familia polinomial $\mathbb{P}(t, k) = p_0 + kp_1$, tal que, soporte un nuevo sistema dado por (4.1) pero permaneciendo UDS-I. Información acerca de la Teoría de Familias de polinomios $\mathbb{P}(t, k)$ puede ser estudiada en [37-39]. El objetivo es encontrar el intervalo máximo de inestabilidad, ie, el *intervalo máximo de dinámica robusta* (MDI) que nos asegura puntos de equilibrios-silla en (4.1) para conectar las variedades estables e inestables, W^s y W^u respectivamente.

En este capítulo generamos una familia de sistemas UDS mediante la construcción de una familia monoparamétrica de atractores caóticos basada en una clase de sistemas dinámicos. El resto del capítulo es organizado como sigue: la sección 4.1 contiene los preliminares de familias de atractores caóticos generadas por sistemas lineales definidos por pedazos. La sección 4.2 describe la teoría para que a partir de una familia de polinomios encontrar el *intervalo máximo de dinámica robusta* (MDI). La sección 4.3 contiene el mecanismo para generar una familia monoparamétrica de atractores multienrollamiento basado en sistemas inestables disipativos (UDS);

4.1. Establecimiento del problema

Consideremos un sistema controlado de la forma siguiente:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (4.2)$$

donde $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y el par ordenado (A, B) esta en forma canónica controlable donde $u \in \mathbb{R}^m$ es la señal de control. Consideramos que el sistema (4.2) es un sistema UDS-I para $u = 0$ y el polinomio característico asociado a la matriz A es p_0 . Es posible generar un polinomio característico de una familia de sistemas lineales de la siguiente manera: Sea $\mathbb{P}(t, k) = p_0(t) + kp_1(t)$ donde k es un parámetro real, $p_0(t)$ es el polinomio característico de A y $p_1(t) = c_n t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \dots + c_1$ es un polinomio arbitrario. Por lo tanto, la dinámica de una familia de sistemas lineales dados por (4.2) para $u = 0$ es gobernada por la familia polinomial $\mathbb{P}(t, k)$. Si $k = 0$ entonces el comportamiento de las soluciones para el sistema es dado por el polinomio característico $p_0(t)$. Entonces, podríamos perturbar la variable k alrededor de cero y mantener la misma estabilidad o inestabilidad de la dinámica original. Siguiendo este concepto una pregunta surge: ¿Qué tanto podemos perturbar el parámetro k para preservar la dinámica del sistema? ie, estamos interesados en conocer el rango máximo del parámetro k , tal que, el sistema permanece UDS-I. El caso para $p_0(t)$ estable es llamado el problema de encontrar el intervalo máximo de estabilidad y fue estudiado por Bialas [10, 12] y recientemente por López-Rentería et al. en [48]. Usando estas ideas generamos y caracterizamos la dinámica de sistemas mediante sus puntos de equilibrio. La descripción de la caracterización es dada como sigue: Supongamos que la familia monoparamétrica de sistemas:

$$\dot{x} = \mathcal{F}_k(A, B, p_1, x, u) \quad (4.3)$$

para $k = k_0$ tiene n_1 valores propios en \mathbb{C}^- y $n - n_1$ valores propios en \mathbb{C}^+ . Por la continuidad de los coeficientes del polinomio $p_0(t)$ la perturbación de k alrededor de k_0 nos da la siguiente definición.

Definición 6. Llamamos intervalo de dinámica robusta de la familia monoparamétrica (4.3) a un intervalo $[a, b]$ alrededor de k_0 si el polinomio característico $p_k(t)$ tiene n_1 raíces en \mathbb{C}^- y $n - n_1$ raíces en \mathbb{C}^+ para todo $k \in [a, b]$.

Entonces el siguiente paso es la búsqueda del intervalo máximo de dinámica robusta, esto es, encontrar un intervalo para k alrededor de k_0 donde el sistema conserve su dinámica.

Bajo el siguiente esquema, otro importante problema relacionado es el diseño del control para generar atractores caóticos con multi-enroscado mediante sistemas inestables disipativos discontinuos de tipo lineal con múltiples puntos de equilibrio $x^* = -A^{-1}Bu \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ los cuales son puntos silla hiperbólicos con variedades asociadas estables e inestables, $W_{x^*}^s$ y $W_{x^*}^u$, respectivamente. La dinámica de la solución del sistema lineal (4.2) es caracterizada por el conjunto de valores propios $\Lambda : \text{espectro}(A)$. Así, el polinomio característico $p_0(t)$ de A esta restringido a tomar valores que satisfacen la hipótesis para sistemas de tipo I o II dados en la definición 6.

Estamos interesados en generar una familia de sistemas continuos a trozos en la siguiente forma: Diseñamos una familia monoparametrica de sistemas $\dot{x} = A(k)x + Bu$, $k \in \mathbb{R}$ gobernada por una ley definida de la siguiente manera:

$$u = \begin{cases} u_1 & \text{en } \mathcal{D}_{x_1^*}; \\ \vdots & \\ u_j & \text{en } \mathcal{D}_{x_j^*}; \\ \vdots & \\ u_r & \text{en } \mathcal{D}_{x_r^*}. \end{cases} \quad (4.4)$$

que genera atractores con multi-enroscado con u_i en un dominio $\mathcal{D}_i \subset \mathbb{R}^m$, $i = 1, 2, 3, \dots, r$ con $\cap_{i=1}^r \mathcal{D}_i = \emptyset$ y $\cup_{i=1}^r \mathcal{D}_i = \mathbb{R}^m$. Además, determinaremos el intervalo máximo de disipatividad y dinámica robusta (\underline{k}, \bar{k}) alrededor de $k = 0$, esto es, el intervalo máximo de perturbación de la matriz $A(k)$ por medio del parámetro k para tener atractores con enroscados. Para conseguir esto supondremos que el sistema (4.2) tiene las siguientes características:

DS1: En lazo cerrado es disipativo e inestable, esto es, el origen es un punto silla hiperbólico.

DS2: Es completamente controlable.

Respecto a la hiperbolicidad se requiere que $A(0)$ tenga n_1 valores propios en \mathbb{C}^- y $n - n_1$ valores propios en \mathbb{C}^+ sin valores propios imaginarios puros.

4.2. El intervalo máximo UDS

La finalidad es establecer un resultado para una familia de polinomios $\mathbb{P}(t, k) = p_0(t) + kp_1(t)$ para la cual $p_0(t)$ tiene n_1 raíces en \mathbb{C}^- y $n - n_1$ raíces en \mathbb{C}^+ para todo k en el intervalo máximo de dinámica robusta (k_{\min}^-, k_{\max}^+) . Supongamos que la familia $\mathbb{P}(t, k)$ satisface las siguientes suposiciones:

Suposición 1. $\mathbb{P}(t, k)$ es una familia de polinomios de

1. grado fijo n ,
2. coeficientes continuos con respecto de $k \in I = [a, b]$.

Así, calculamos el intervalo de máxima inestabilidad y el intervalo de disipatividad y en consecuencia el intervalo máximo UDS (\underline{k}, \bar{k}) . Finalmente, estudiamos una familia de atractores basada en una clase de sistemas disipativos inestables. Comenzaremos enunciando algunos resultados que nos ayudaran a establecer el intervalo máximo de inestabilidad y disipatividad.

Teorema 23 (Intersección de la frontera). *Bajo la suposición 1, si $\mathbb{P}(t, a)$ tiene todas sus raíces en $\mathcal{G} \subset \mathbb{C}$ en tanto que $\mathbb{P}(t, b)$ tiene al menos una raíz en $\mathcal{U} = \mathbb{C} - \mathcal{G}$. Entonces existe al menos un ρ en $[a, b]$, tal que*

- $\mathbb{P}(t, \rho)$ tiene todas sus raíces en $\mathcal{G} \cup \partial\mathcal{G}$,
- $\mathbb{P}(t, \rho)$ tiene al menos una raíz en $\partial\mathcal{G}$

donde $\partial\mathcal{G}$ es la frontera de \mathcal{G} . Para un polinomio específico $\mathbb{P}(t, k_0)$, con $k_0 \in [a, b]$, sus coeficientes dependen continuamente sobre el vector de parámetros $\acute{c}(k_0) \in \mathbb{R}^n$ entonces el vector de parámetros $\acute{c}(k)$ asociado a la familia de polinomios $\mathbb{P}(t, k)$ varia en un conjunto $\Omega \in \mathbb{R}^n$. Si $\mathbb{P}(t^*, k_0) = 0$ entonces t^* es una raíz, de esta manera, el conjunto de raíces $\Lambda_{k_0}(t) := \{t^* | \mathbb{P}(t, k_0) = 0\}$ esta compuesto de los valores propios asociados al sistema. A continuación enunciamos el siguiente teorema.

Teorema 24 (Principio de exclusión del cero). *Bajo la suposición 1 la familia polinomial $\mathbb{P}(t, k)$ contiene al menos un polinomio estable y Ω es arco-conexo. Entonces la familia entera es estable, si y sólo si*

$$0 \notin \mathbb{P}(t^*, k), \forall t^* \in \partial\mathcal{G}. \quad (4.5)$$

La generalización de este teorema fue presentada en [48].

Teorema 25 (Generalización del principio de exclusión del cero). *Consideremos la familia polinomial $P(\lambda, t)$ con grado constante donde $\lambda \in \Omega$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^l$ es un conjunto arco-conexo. Supongamos que existe un elemento de la familia con n_1 raíces en \mathbb{C}^- y $n - n_1$ raíces en \mathbb{C}^+ . Entonces la familia entera seguirá teniendo n_1 raíces en \mathbb{C}^- y $n - n_1$ raíces en \mathbb{C}^+ , si y sólo si, $P(\lambda, i\omega) \neq 0$ para todo $\lambda \in \Omega$ y para todo $\omega \in \mathbb{R}^l$.*

Demostración. Ver [48] para una prueba. □

En [48] el intervalo máximo de estabilidad robusta es calculado mediante el uso del principio de exclusión del cero generalizado, el cual puede ser visto como un caso particular en nuestro nuevo contexto de dinámica robusta. (Definición 6 para $n_1 = n$). Ahora, en un caso más general, consideramos el problema de encontrar el intervalo máximo de dinámica robusta mediante una aproximación polinomial. Estamos interesados en el intervalo máximo (k_{\min}^-, k_{\max}^+) , tal que, $P(t, k)$ tiene n_1 raíces en \mathbb{C}^- y $n - n_1$ raíces en \mathbb{C}^+ para todo k en (k_{\min}^-, k_{\max}^+) y $n > \text{gr } p_1(t)$. En la misma forma que en [48], calculamos k_{\min}^- y k_{\max}^+ . Si $p_0(-i\omega) = P(\omega^2) - i\omega Q(\omega^2)$ y $p_1(i\omega) = p(\omega^2) + i\omega q(\omega^2)$ entonces

$$\mathbb{P}(i\omega, k)p_0(-i\omega) = G(\omega) + kF(\omega) + ik\omega H(\omega),$$

donde

$$\begin{aligned} F(\omega) &= p(\omega^2)P(\omega^2) + \omega^2 q(\omega^2)Q(\omega^2), \\ G(\omega) &= P^2(\omega^2) + \omega^2 Q^2(\omega^2), \\ H(\omega) &= q(\omega^2)P(\omega^2) - p(\omega^2)Q(\omega^2). \end{aligned}$$

Ahora definimos para un polinomio arbitrario $f(t)$ el conjunto

$$R(f) = \{\epsilon \in \mathbb{C} : f(\epsilon) = 0\}.$$

Sea $R(f)_{\mathbb{R}^+}$ el conjunto de elementos reales positivos de $R(f)$ y ahora definimos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} K^+ &= \{F(\omega_l) : \omega_l \in R(H)_{\mathbb{R}^+} \cup \{0\}, F(\omega_l) > 0\}, \\ K^- &= \{F(\omega_l) : \omega_l \in R(H)_{\mathbb{R}^+} \cup \{0\}, F(\omega_l) < 0\}. \end{aligned}$$

De esta manera con lo antes mencionado damos el siguiente resultado para una familia de polinomios.

Teorema 26 (Intervalo máximo de dinámica robusta). *Considerar la familia polinomial $P(t, k) = p_0(t) + kp_1(t)$ donde $p_0(t)$ es un polinomio de grado n con n_1 raíces en \mathbb{C}^- y $n - n_1$ raíces en \mathbb{C}^+ . Supongamos que $n > \text{gr } p_1(t)$ y sean $F(\omega)$, $G(\omega)$ y $H(\omega)$ los polinomios definidos anteriormente. Entonces $\mathbb{P}(t, k)$ tiene n_1 raíces en \mathbb{C}^- y $n - n_1$ raíces en \mathbb{C}^+ para todo $k \in (k_{\min}^-, k_{\max}^+)$ donde*

$$\begin{aligned} k_{\min}^* &= \max \left\{ -\frac{G(\omega_l)}{F(\omega_l)} : F(\omega_l) \in K^+ \right\}, \\ k_{\max}^* &= \min \left\{ -\frac{G(\omega_l)}{F(\omega_l)} : F(\omega_l) \in K^- \right\}. \end{aligned}$$

Demostración. Para $k = 0$ tenemos que $P(t, 0) = p_0(t)$ tiene n_1 raíces en \mathbb{C}^- y $n - n_1$ raíces en \mathbb{C}^+ . Para aplicar el principio de exclusión generalizado necesitamos que si para todo $k \in [k^-, k^+]$, $P(i\omega, k)p_0(i\omega) \neq 0$ para todo $\omega \in \mathbb{R}$ entonces $P(t, k)p_0(-t)$ tiene n raíces en \mathbb{C}^- y n raíces en \mathbb{C}^+ . De la construcción de la familia se tiene que si $k = 0$

entonces $\mathbb{P}(i\omega, 0)p_0(-i\omega) = p_0(i\omega)p_0(-i\omega)$ tiene n raíces en \mathbb{C}^- y n raíces en \mathbb{C}^+ para todo $\omega \in \mathbb{R}$. Entonces, estamos interesados en los valores máximo y mínimo (alrededor de $k = 0$) de k donde ocurra un cambio de estabilidad en el sistema. Esto es, el máximo k^- y el mínimo k^+ para el cual ocurre que $\mathbb{P}(i\omega, k)p_0(-i\omega) = G(\omega) + kF(\omega) + ik\omega H(\omega) = 0$. Para lograr esto, debemos resolver el sistema de ecuaciones:

$$G(\omega) + kF(\omega) = 0 \text{ y } \omega H(\omega) = 0. \quad (4.6)$$

El sistema anterior se satisface de forma simultanea si $G(\omega_l) + kF(\omega_l) = 0$ donde $\omega_l \in R(H)_{\mathbb{R}^+} \cup \{0\}$. Así, tenemos que $k = -\frac{G(\omega_l)}{F(\omega_l)}$. Por lo tanto, ya que $G(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \mathbb{R}$, los valores deseados están dados por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} k_{\min}^- &= \max \left\{ -\frac{G(\omega_l)}{F(\omega_l)} : F(\omega_l) > 0, \omega_l \in R(H)_{\mathbb{R}^+} \cup \{0\} \right\} \\ &= \max \left\{ -\frac{G(\omega_l)}{F(\omega_l)} : F(\omega_l) \in K^+ \right\} \\ k_{\max}^+ &= \min \left\{ -\frac{G(\omega_l)}{F(\omega_l)} : F(\omega_l) < 0, \omega_l \in R(H)_{\mathbb{R}^+} \cup \{0\} \right\} \\ &= \min \left\{ -\frac{G(\omega_l)}{F(\omega_l)} : F(\omega_l) \in K^- \right\} \end{aligned}$$

como afirmamos. □

Observación 1. *En la demostración consideramos valores reales positivos $\omega_l \in R(H)_{\mathbb{R}^+}$ debido a la simetría de $H(\omega)$ y el valor real de los valores de k . Además, no es necesario considerar casos cuando $F(\omega_l) = 0$ ya que de lo contrario el sistema (4.6) podría tener $G(\omega_l) = 0$, pero*

$$G(\omega_l) = |p_0(i\omega_l)|^2 = p_0(i\omega)p_0(-i\omega) = 0,$$

lo cual es imposible que pase ya que $p_0(t)$ no tiene raíces en $i\mathbb{R}$. Sin embargo, si ocurre esto se tiene que $K^+ = \{0^+\}$ ó $K^- = \{0^-\}$, entonces evaluando en $\omega = 0$ y dependiendo del signo de $F(0)$ podríamos tener que:

$$k_{\min}^- = \lim_{r \rightarrow 0^+} -\frac{G(0)}{r} = -\infty,$$

ó

$$k_{\max}^+ = \lim_{r \rightarrow 0^-} -\frac{G(0)}{r} = +\infty.$$

Similares resultados pero para Familias de polinomios de tipo Segmentos y rayos de polinomios Hurwitz se pueden ver en [2, 3].

Ahora, si $n = 3$ y $n_1 = 1$ podemos obtener información acerca del máximo intervalo de dinámica robusta, además, necesitamos una condición para la suma negativa de raíces de un polinomio dado (condición de disipatividad).

Lema 2 (Disipatividad). *La suma de las raíces del polinomio $p(t) = a_0t^n + a_1t^{n-1} + \dots + a_{n-1}t + a_n$ es negativa, si y sólo si, $\frac{a_1}{a_0} > 0$.*

Demostración. Sean z_1, \dots, z_n las raíces de $p(t)$ y

$$p(t) = a_0 \prod_{j=1}^n (t - z_j),$$

su factorización. Por las formulas de Viète (ver en [49]) tenemos que:

$$p(t) = a_0(t^n - s_1t^{n-1} + \dots + (-1)^n s_n),$$

donde $s_j = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n} z_{i_1} \dots z_{i_j}$ para $j = 1, 2, \dots, n$. Entonces $a_j = (-1)^j a_0 s_j$ donde $j = 1, \dots, n$. Para $j = 1$ tenemos que $s_1 = z_1 + \dots + z_n$ y $a_1 = -a_0 s_1$. Por lo tanto, s_1 es negativo, si y sólo si, $\frac{a_1}{a_0} > 0$. □

Mediante la aplicación del Teorema 26 y el Lema 2 a la familia $P(t, k) = p_0(t) + kp_1(t)$ podemos establecer una familia de sistemas que presenta en su solución múltiples enroscados como se mostrará en la siguiente sección.

4.3. Generación de una familia monoparametrica de atractores con multi-enroscado

El sistema controlado (4.2) puede ser caracterizado por su par (A, B) :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Ahora definimos la matriz D en términos de los coeficientes del polinomio $p_1(t) = c_{n-1}t^{n-1} + c_{n-2}t^{n-2} + \cdots + c_0$ de la siguiente manera:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Así, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 27. *El sistema controlado (4.2) satisface las hipótesis (DS1) y (DS2) si $\dot{x} = (A+kD)x + Bu$ es un miembro de la familia $\mathcal{F}_k(A, B, p_1, x, u)$ con polinomio característico asociado $P(t, k)$ para todo $k \in (\underline{k}, \bar{k})$. Entonces es posible generar una familia monoparametrica de atractores con multi-enroscados.*

Demostración. La demostración se obtiene de los resultados anteriores. □

Observación 2. *Si $c_1 = 0$ tenemos que $(\underline{k}, \bar{k}) = (k_{\min}^-, k_{\max}^+)$. Si $c_1 \neq 0$ tenemos que el sistema (4.2) es UDS-I, por lo tanto, satisface que la suma de todos los valores propios, de su polinomio asociado, es negativa y esta condición es también afectada por la perturbación kc_1 en el coeficiente a_1 , y por lo tanto, (k_{\min}^-, k_{\max}^+) es no vacío.*

A continuación desarrollamos un ejemplo ilustrativo.

Ejemplo 15. *Considerar el sistema controlado dado por (4.2) para*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -30 & -4 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 0.15 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{pmatrix},$$

entonces el número de enroscados mostrados en el atractor puede ser determinado por la señal de control u . Por ejemplo, un atractor con cuatro enroscados puede ser dado por la siguiente señal de control:

$$u = \begin{cases} 3, & \text{para } 0.375 < x_1; \\ 2, & \text{para } 0.225 < x_1 \leq 0.375; \\ 1, & \text{para } 0.075 < x_1 \leq 0.225; \\ 0, & \text{para } x_1 \leq 0.075. \end{cases}$$

La figura 4.1 muestra la proyección del atractor sobre los planos: (a) (x_1, x_2) ; (b) (x_1, x_3) y (c) (x_2, x_3) .

Como estamos interesados en la generación de una familia monoparametrica de atractores con multi-enroscados determinada de la siguiente manera:

$$\dot{x} = (A + kD)x + Bu, \quad (4.9)$$

donde k es el parámetro de la familia (4.9). Sin pérdida de generalidad, la matriz D puede ser dada de la siguiente forma:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

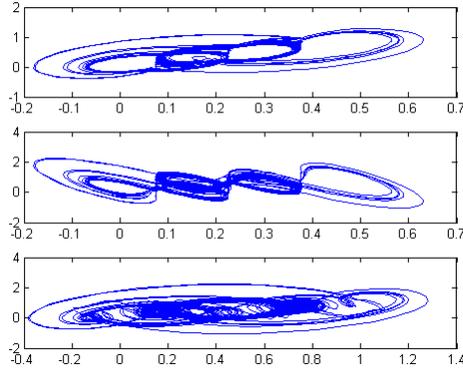


Figura 4.1: Proyección del atractor para $k = 0$ sobre los planos.

Notemos que el polinomio característico para $k = 0$ es $p_0(t) = t^3 + t^2 + 4t + 30$; del ejemplo 15 y del Lema 2 el sistema (4.2) es UDS-I para $u = 0$. Por otra parte, el polinomio característico de $A + kD$ es $P(t, k) = t^3 + (1 - \frac{1}{2}k)t^2 + 4t + 30$, así, tenemos que $p_1(t) = -\frac{1}{2}t^2$. Además,

$$\begin{aligned} p_A(i\omega) &= 30 - \omega^2 + i\omega(4 - \omega^2), \\ p_1(i\omega) &= \frac{1}{2}\omega^2, \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned} P(\omega^2) &= 30 - \omega^2, \\ Q(\omega^2) &= 4 - \omega^2, \\ p(\omega^2) &= \frac{1}{2}\omega^2, \\ q(\omega^2) &= 0, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{2}\omega^2(30 - \omega^2), \\ G(\omega) &= \omega^6 - 7\omega^4 - 44\omega^2 + 900, \\ H(\omega) &= -\frac{1}{2}\omega^2(4 - \omega^2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $R(H)_{\mathbb{R}^+} = \{2\}$ y $F(2) = 52 > 0$. Entonces $K^- = \{0^-\}$ y $K^+ = \{52\}$. Así que $k_{\text{máx}}^+ = +\infty$ y $k_{\text{mín}}^- = -\frac{G(2)}{F(2)} = -\frac{676}{52} = -13$. En consecuencia, el intervalo máximo es $(k_{\text{mín}}^-, k_{\text{máx}}^+) = (-13, +\infty)$ y ya que $a_1 + kc_1 = 1 - \frac{1}{2}k$ entonces $S = (-\infty, 2)$. Así, si $k \in (-13, 2)$ entonces el sistema (4.9) es un UDS-I para el cual se tiene una familia que presenta en su solución atractores con multi-enroscados.

La figura 4.1 muestra las proyecciones del atractor para $k = 0$ y la figura 4.2 muestra las proyecciones del atractor para $k = -1$ sobre los planos: (a) (x_1, x_2) ; (b) (x_1, x_3) y (c) (x_2, x_3) .

Para generar una atractor con cuatro enroscados la señal de control puede ser dada como sigue:

$$u = \begin{cases} 3, & \text{para } 0.75 < x_1; \\ 2, & \text{para } 0.45 < x_1 \leq 0.75; \\ 1, & \text{para } 0.15 < x_1 \leq 0.45; \\ 0, & \text{para } x_1 \leq 0.15. \end{cases}$$

En este caso definimos B de la siguiente forma:

$$B = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.25 \\ 0.4 \end{pmatrix}.$$

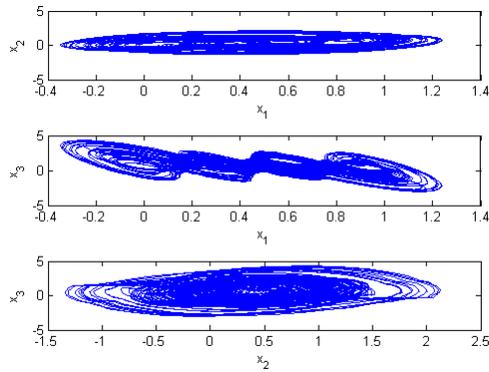


Figura 4.2: Proyección del atractor para $k = -1$ sobre los planos.

Capítulo 5

Otros resultados sobre la presencia de atractores caóticos

En este capítulo consideramos un sistema inestable disipativo lineal controlado mediante una *función multi-saturada* y un control con retroalimentación con un parámetro k . Nuevamente usamos el concepto de *intervalo máximo de dinámica robusta* para el parámetro k que está presente en la señal de control y damos condiciones necesarias y suficientes para que este parámetro preserve atractores con multi-enroscados. Así, una familia de atractores con multi-enroscados es generada por medio de una familia de sistemas discontinuos con matrices compañeras monoparamétricas múltiples. Por último presentamos un ejemplo para ilustrar el trabajo teórico.

Los resultados de este capítulo están contenidos en el artículo [24].

5.1. Establecimiento del problema

El problema de la generación de atractores caóticos a partir de sistemas disipativos inestables ha sido estudiado mediante la construcción de una familia monoparamétrica de sistemas dinámicos llamados *sistemas controlados* de la forma:

$$\dot{\chi} = \tilde{A}\chi + \tilde{b}u, \quad (5.1)$$

donde $\chi \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es un operador lineal, $\tilde{b} \in \mathbb{R}^n$ es un vector constante. El polinomio característico de la matriz \tilde{A} es $p_{\tilde{A}} = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n$. Es conocido que si el par (\tilde{A}, \tilde{b}) es completamente controlable existe un cambio de coordenadas $x = Q^{-1}\chi$, tal que, el sistema (5.1) puede ser expresado como:

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (5.2)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

El control más comúnmente usado para esta clase de sistemas es de la forma $u = -kc^T x$ con vector de incertidumbre $c^T = (c_n, c_{n-1}, \dots, c_1)$. Entonces el polinomio característico del sistema en lazo cerrado es de la siguiente forma $p_A(t) + kp_1(t)$, el cual es un rayo de polinomios donde $p_A(t)$ es el vértice y $p_1(t) = c_n t^{n-1} + c_{n-1} t^{n-2} + \dots + c_1$ es la dirección. Si $p_A(t)$ es inestable entonces es posible perturbar el sistema mediante el parámetro k para encontrar un rayo o segmento de polinomios inestables. En ese sentido, puede ser determinado el intervalo máximo de inestabilidad (k_{\min}^-, k_{\max}^+) para el cual la familia $p_A(t) + kp_1(t)$ es inestable, i.e., si $k \in (k_{\min}^-, k_{\max}^+)$ entonces al menos uno de los valores propios de A está contenido en la zona de inestabilidad.

Nuestro caso de estudio es cuando el parámetro k varia en el intervalo máximo de inestabilidad, para generar sistemas disipativos inestables (UDS) con puntos de equilibrio silla-foco los cuales son responsables de las variedades estables e inestables y la suma de sus valores propios es negativa. Para generar una familia de atractores mediante sistemas UDS con múltiples puntos de equilibrio silla hiperbólicos p_1, p_2, \dots, p_m utilizamos una familia de sistemas continuos definidos por pedazos que generan atractores con multi-enroscados mediante un sistema definido como en (5.2) provisto de la familia de leyes de control que conmutan u_j , las cuales originan sistemas lineales por pedazos de la forma siguiente:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} A_1(k)\mathbf{x} + bu_1, & \text{para } \mathbf{x} \in \mathcal{D}_{p_1}; \\ A_2(k)\mathbf{x} + bu_2, & \text{para } \mathbf{x} \in \mathcal{D}_{p_2}; \\ \vdots \\ A_m(k)\mathbf{x} + bu_m, & \text{para } \mathbf{x} \in \mathcal{D}_{p_m}; \end{cases} \quad (5.3)$$

donde $k \in (\underline{k}, \bar{k})$, $\mathcal{D}_{p_i} \subset \mathbb{R}^3$ son los dominios para cada u_i , para $i = 1, 2, \dots, m$, tal que, $\cap_{i=1}^m \mathcal{D}_{p_i} = \emptyset$ y $\cup_{i=1}^m \mathcal{D}_{p_i} = \mathbb{R}^3$. El intervalo (\underline{k}, \bar{k}) es el intervalo máximo de disipatividad y dinámica robusta, esto es, el intervalo máximo de perturbación de la matriz A que nos permitirá seguir teniendo atractores con enroscados alrededor del punto de equilibrio $p_i = -A^{-1}(k)bu_i$. Para conseguir lo antes mencionado supondremos que el sistema (5.2) satisface que:

DS1 es disipativo e inestable en el punto de equilibrio $p = -A^{-1}bu \in \mathbb{R}^3$ el cual es un punto de equilibrio silla hiperbólico.

DS2 esta en forma canónica controlable.

En las siguientes secciones diseñaremos el sistema definido por pedazos $A_i(k)x + bu_i$, $i = 1, \dots, m$ para $m \geq 3$.

5.2. Puntos de equilibrios hiperbólicos de tipo I y II

El análisis comenzará con un test para conocer si un polinomio satisface las condiciones de inestabilidad y disipatividad. Para establecer esta caracterización de los puntos de equilibrio hiperbólicos de tipo I y II es necesario el siguiente resultado.

Definición 7. Un polinomio $p(t)$ de grado 3 es llamado disipativo si la suma de sus raíces λ_i , $i = 1, 2, 3$ es negativa. Un polinomio disipativo $p(t)$ será llamado polinomio UDS-I si tiene una raíz real negativa y las otras dos son complejos conjugados con parte real positiva. Por otro lado, será llamado polinomio UDS-II si una de sus raíces es positiva real y las otras dos son complejos conjugados con parte real negativa.

Lema 3. El polinomio $p(t) = t^3 + a_1t^2 + a_2t + a_3$ tiene dos raíces imaginarias puras, si y sólo si, $a_2a_1 - a_3 = 0$ y $a_2 > 0$.

Demostración. (\Rightarrow) Sí $i\omega$ es una raíz de $p(t)$ entonces $a_3 - a_1\omega^2 + i\omega(a_2 - \omega^2) = 0$. Esto implica que $a_3 - a_1\omega^2 = 0$ y $a_2 = \omega^2$. Así, $a_2a_1 - a_3 = 0$ y $a_2 > 0$.

(\Leftarrow) Si $a_2a_1 - a_3 = 0$ y $a_2 > 0$ entonces

$$\begin{aligned} p(t) &= t^3 + a_1t^2 + a_2t + a_2a_1 \\ &= t(t^2 + a_2) + a_1(t^2 + a_2) \\ &= (t + a_1)(t^2 + a_2) \\ &= (t + a_1)(t + i\sqrt{a_2})(t - i\sqrt{a_2}) \end{aligned}$$

□

Ejemplo 16. Consideremos el polinomio $p(t) = t^3 - t^2 + 4t - 4$, podemos ver que $a_2 = 4 > 0$ y $a_2a_1 - a_3 = (4)(-1) - (-4) = 0$. Por lo tanto, $p(t)$ tiene dos raíces imaginarias puras.

El lema 3 nos da la posibilidad de determinar los límites del intervalo máximo de inestabilidad, estamos interesados en encontrar polinomios que garanticen la generación de sistemas UDS-I. Supongamos que si $p(t) = t^3 + a_1t^2 + a_2t + a_3$ es un polinomio con $a_3 > 0$ y tiene dos raíces de la forma $\alpha \pm i\beta$ con $\alpha > 0$ del análisis de la derivada de $p(t)$ y su discriminante $4a_1^2 - 12a_2$, $(a_1^2 - 3a_2)$ se tiene el siguiente teorema.

Teorema 28. El polinomio $p(t) = t^3 + a_1t^2 + a_2t + a_3$ tiene una raíz negativa real y dos raíces complejas conjugadas $\alpha \pm i\beta$ con $\alpha > 0$ y $\beta \neq 0$, si y sólo si, $a_3 > 0$ y una de las siguientes condiciones se satisface:

a) $a_1^2 - 3a_2 \leq 0$ y $[a_2a_1 \leq 0$ o $a_2a_1 - a_3 < 0]$;

b) $a_1^2 - 3a_2 > 0$, $\frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 3a_2}}{3} < 0$ y

$$p\left(\frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 3a_2}}{3}\right) > 0;$$

c) $a_1^2 - 3a_2 > 0$, $\frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 3a_2}}{3} > 0$ y

$$p\left(\frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 3a_2}}{3}\right) > 0;$$

d) $a_1^2 - 3a_2 > 0$, $\frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 3a_2}}{3} < 0$, $\frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 3a_2}}{3} > 0$ y

$$p\left(\frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 3a_2}}{3}\right) > 0.$$

Demostración. \Rightarrow]. Si $p(t) = t^3 + a_1t^2 + a_2t + a_3$ ($a_3 > 0$) tiene una raíz negativa real y dos raíces complejas conjugadas $\alpha \pm i\beta$ con $\alpha > 0$ y $\beta \neq 0$ entonces la gráfica de $p(t)$ puede tener una de las siguientes formas (ver la figura 5.1):

Las gráficas están determinadas por el comportamiento de la derivada de $p'(t)$: En las gráficas 1 y 3 la función $p(t)$

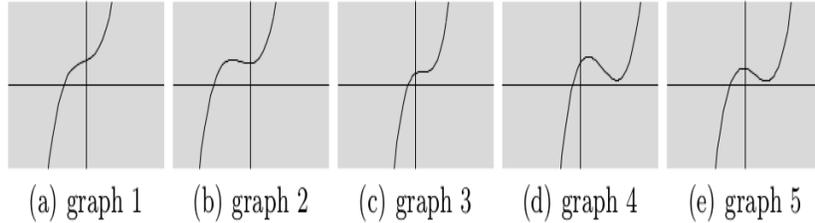


Figura 5.1: Gráfica de $p(t)$.

es creciente y entonces $p'(t) = 3t^2 + 2a_1t + a_2$ es positivo para cada valor de t , por consiguiente, $a_1^2 - 3a_2 \leq 0$; por lo tanto, a) se tiene.

La gráfica 2 indica que $p(t)$ tiene dos puntos críticos negativos (cuando $p'(t) = 0$) que determinan valores mínimos y máximos locales donde el valor máximo local es negativo, esto es, $a_1^2 - 3a_2 > 0$, $\frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 3a_2}}{3} < 0$ y $p\left(\frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 3a_2}}{3}\right) > 0$; por lo tanto, b) se tiene.

La gráfica 4 indica que $p(t)$ tiene dos puntos críticos positivos (cuando $p'(t) = 0$) que determinan un valor mínimo local y un valor máximo local el cual este último es positivo, esto es, $a_1^2 - 3a_2 > 0$, $\frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 3a_2}}{3} > 0$ y $p\left(\frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 3a_2}}{3}\right) > 0$ y entonces c) se tiene.

La gráfica 5 indica que $p(t)$ tiene un punto crítico negativo y un punto crítico positivo (cuando $p'(t) = 0$) que determinan un valor máximo local y un valor mínimo local, respectivamente, los cuales son positivos, esto es, $a_1^2 - 3a_2 > 0$, $\frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 3a_2}}{3} < 0$, $\frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 3a_2}}{3} > 0$ y $p\left(\frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 3a_2}}{3}\right) > 0$ y entonces d) se tiene.

\Leftarrow] Supongamos que a) se satisface, entonces $p'(t) \geq 0$ para cada $t \in \mathbb{R}$, así, $p(t)$ es una función creciente. Puesto que $a_3 > 0$ obtenemos la gráfica 1 y en consecuencia $p(t)$ tiene una raíz negativa y dos raíces $\alpha + i\beta$ con $\alpha > 0$ y $\beta \neq 0$. Los otros casos se demuestran en forma similar. \square

Ejemplo 17. Si consideramos el siguiente polinomio $p_0(t) = t^3 + t^2 + 4t + 30$ del análisis de sus coeficientes podemos ver que:

1. $a_3 = 30 > 0$,
2. $4a_1^2 - 12a_2 = -52 < 0$,
3. $a_2a_1 - a_3 = -26 < 0$.

Esto es, $p_0(t)$ satisface la condición a) del Teorema 28, así, tiene una raíz real negativa y dos raíces de la forma $\alpha + i\beta$ con $\alpha > 0$ y $\beta \neq 0$.

En forma similar, tomando $f(t) = p(-t)$ tenemos el siguiente resultado para caracterizar los puntos hiperbólicos de tipo II.

Teorema 29. El polinomio $f(t) = t^3 + b_2t^2 + b_1t + b_0$ tiene una raíz real positiva y dos raíces complejas de la forma $\alpha \pm i\beta$ con $\alpha < 0$, si y sólo si, una de las siguientes condiciones se satisface:

a) $b_0 < 0$, $b_2^2 - 3b_1 \leq 0$ y $[b_1b_2 \geq 0$ o $b_0 - b_1b_2 < 0]$;

b) $b_0 < 0$, $b_2^2 - 3b_1 > 0$, $\frac{-b_2 + \sqrt{b_2^2 - 3b_1}}{3} < 0$ y

$$f\left(\frac{-b_2 - \sqrt{b_2^2 - 3b_1}}{3}\right) < 0;$$

c) $b_0 < 0$, $b_2^2 - 3b_1 > 0$, $\frac{-b_2 - \sqrt{b_2^2 - 3b_1}}{3} > 0$ y

$$f\left(\frac{-b_2 + \sqrt{b_2^2 - 3b_1}}{3}\right) < 0;$$

d) $b_0 < 0$, $b_2^2 - 3b_1 > 0$, $\frac{-b_2 - \sqrt{b_2^2 - 3b_1}}{3} < 0$, $\frac{-b_2 + \sqrt{b_2^2 - 3b_1}}{3} > 0$ y

$$f\left(\frac{-b_2 \pm \sqrt{b_2^2 - 3b_1}}{3}\right) < 0.$$

Demostración. Es similar a la prueba del Teorema 28. □

5.2.1. El máximo intervalo UDS con funciones de saturación

Como hemos mencionado el objeto de estudio de este capítulo es la generación de atractores extraños desde el punto de vista de la teoría de diseño de control mediante la consideración del siguiente sistema de control:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \tag{5.4}$$

donde $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ y el par ordenado (\mathbf{A}, \mathbf{b}) esta en forma canónica controlable. Además, si se considera el control lineal $u(k, \mathbf{x}) = -k\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ con $\mathbf{c}^T = (c_n, c_{n-1}, \dots, c_1)$ entonces el polinomio característico del sistema en lazo cerrado es $P(t, k) = p_0(t) + kp_1(t)$ donde k es un parámetro real, $p_0(t)$ es el polinomio característico de \mathbf{A} y $p_1(t) = c_n t^{n-1} + c_{n-1} t^{n-2} + \dots + c_1$ es un polinomio arbitrario. Si consideramos a $p_0(t)$ como un polinomio estable (sus n raíces están contenidas en el semiplano abierto izquierdo) entonces la familia polinomial $\mathbb{P}(t, 0) = p_0(t)$ es estable. Así, podemos perturbar la variable k alrededor del cero manteniendo la estabilidad del sistema, tal problema es llamado el *problema* de encontrar el intervalo máximo de estabilidad y fue estudiado por Bialas alrededor de 1985 [10] y recientemente por López-Rentería et al en [48]. Problemas relacionados fueron estudiados en [2, 3].

El objetivo es establecer un resultado similar para la familia de polinomios $P(t, k) = p_0(t) + kp_1(t)$ para la cual $p_0(t)$ tiene n_1 raíces en \mathbb{C}^- y $n - n_1$ raíces en \mathbb{C}^+ para todo k en el intervalo máximo de perturbación alrededor del

cero. Este es el problema de encontrar el intervalo máximo de dinámica robusta con una aproximación polinomial y fue resuelto en [5] (ver el capítulo 4 de esta tesis).

El siguiente resultado concerniente al intervalo máximo UDS fue reportado en la referencia citada.

Recordemos la siguiente definición, que fue establecida en el capítulo anterior.

Definición 1. Un intervalo de dinámica robusta de la familia monoparamétrica $p_k(t)$ es un intervalo $[a, b]$ donde $p_k(t)$ tiene n_1 raíces en \mathbb{C}^- y $n - n_1$ raíces en \mathbb{C}^+ para todo $k \in [a, b]$. El más grande de estos intervalos será llamado el intervalo máximo de dinámica robusta.

Consideremos $p_0(-i\omega) = P(\omega^2) - i\omega Q(\omega^2)$ y $p_1(i\omega) = p(\omega^2) + i\omega q(\omega^2)$ entonces

$$P(i\omega, k)p_0(-i\omega) = G(\omega) + kF(\omega) + ik\omega H(\omega),$$

donde

$$\begin{aligned} F(\omega) &= p(\omega^2)P(\omega^2) + \omega^2 q(\omega^2)Q(\omega^2), \\ G(\omega) &= P^2(\omega^2) + \omega^2 Q^2(\omega^2), \\ H(\omega) &= q(\omega^2)P(\omega^2) - p(\omega^2)Q(\omega^2). \end{aligned}$$

Ahora, definimos para un polinomio arbitrario $f(t)$ el siguiente conjunto:

$$R(f) = \{\xi \in \mathbb{C} : f(\xi) = 0\}.$$

Así, $R(f)_{\mathbb{R}^+}$ denota el conjunto de elementos reales positivos de $R(f)$ y ahora definimos los conjuntos siguientes:

$$\begin{aligned} K^+ &= \{F(\omega_l) : \omega_l \in R(H)_{\mathbb{R}^+} \cup \{0\}, F(\omega_l) > 0\}, \\ K^- &= \{F(\omega_l) : \omega_l \in R(H)_{\mathbb{R}^+} \cup \{0\}, F(\omega_l) < 0\}. \end{aligned}$$

Si no existen elementos en $R(H)_{\mathbb{R}^+} \cup \{0\}$, tales que, $F(\omega_l) > 0$ entonces definimos $K^+ = \{0^+\}$. En forma similar, si $R(H)_{\mathbb{R}^+} \cup \{0\}$ no contiene elementos, tales que, $F(\omega_l) < 0$ entonces definimos $K^- = \{0^-\}$. Con lo antes mencionado se tiene el siguiente resultado para una familia de polinomios, que corresponde al Teorema 26 del capítulo anterior.

Teorema 30. (Intervalo máximo de dinámica robusta) Consideremos la familia polinomial $P(t, k) = p_0(t) + kp_1(t)$ donde $p_0(t)$ es un polinomio de grado n con n_1 raíces en \mathbb{C}^- y $n - n_1$ raíces en \mathbb{C}^+ . Supongamos que $n > \deg p_1(t)$ y sean $F(\omega)$, $G(\omega)$ y $H(\omega)$ los polinomios definidos anteriormente. Entonces $P(t, k)$ tiene n_1 raíces en \mathbb{C}^- y $n - n_1$ raíces en \mathbb{C}^+ para todo $k \in (k_{\min}^-, k_{\max}^+)$ donde

$$\begin{aligned} k_{\min}^- &= \max \left\{ -\frac{G(\omega_l)}{F(\omega_l)} : F(\omega_l) \in K^+ \right\}, \\ k_{\max}^+ &= \min \left\{ -\frac{G(\omega_l)}{F(\omega_l)} : F(\omega_l) \in K^- \right\}. \end{aligned}$$

Si $K^+ = \{0^+\}$ ($K^- = \{0^-\}$, resp.) entonces $k_{\min}^- = -\infty$ ($k_{\max}^+ = \infty$, resp.).

Para crear una familia de sistemas de USD necesitamos obtener el intervalo máximo de inestabilidad y necesitamos la condición de negatividad para la suma de las raíces que es la condición de disipatividad (ver [5]).

Lema 4. La suma de las raíces del polinomio $p(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n$ es negativa, si y sólo si, $\frac{a_1}{a_0} > 0$.

Los resultados anteriores son suficientes para establecer el intervalo máximo UDS.

Teorema 31. Consideremos el sistema controlado:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + bu,$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $u = -kc^T \mathbf{x}$ con $k \in \mathbb{R}$ y $c^T = (c_n, c_{n-1}, \dots, c_1)$. Si el polinomio característico de A , $p_0(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$, tiene n_1 raíces en \mathbb{C}^- y $n - n_1$ raíces en \mathbb{C}^+ entonces el intervalo máximo de dinámica robusta esta dado por $K = S \cap (k_{\min}^-, k_{\max}^+)$ donde $S = \{k \in \mathbb{R} : a_1 + kc_1 > 0\}$.

5.3. Una familia de atractores con multi-enroscado

En esta sección se genera una familia de atractores con múltiple-enroscados basada en un sistema lineal definido por pedazos diseñado utilizando su matriz compañera, que depende de un parámetro k , mediante el uso de un control multi-saturado.

Vamos a considerar el siguiente sistema controlado:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + bu, \quad (5.5)$$

donde A es una matriz 3×3 con entradas en \mathbb{R} ; $x, b \in \mathbb{R}^3$ y $u \in \mathbb{R}$ es un control saturado dado por $u = -kc^T \mathbf{x} - f_s(c^T \mathbf{x})$ donde $k \in \mathbb{R}$, $c^T = (c_3, c_2, c_1)$ y $f_s(c^T \mathbf{x})$ es la función saturada siguiente:

$$f_s(c^T \mathbf{x}) = \begin{cases} w, & \text{para } v < c^T \mathbf{x}; \\ \mu c^T \mathbf{x}, & \text{para } |c^T \mathbf{x}| \leq v; \\ -w, & \text{para } c^T \mathbf{x} < -v. \end{cases} \quad (5.6)$$

Supongamos que el sistema satisface las hipótesis **DS1** y **DS2**. La hipótesis **DS2** nos permite considerar el sistema (5.5) en forma controlable, esto es,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, \text{ y } b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

donde su polinomio característico es $P_A(t) = t^3 + a_1 t^2 + a_2 t + a_3$. No es difícil ver que la matriz A^{-1} tiene la siguiente expresión:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{a_2}{a_3} & -\frac{a_1}{a_3} & -\frac{1}{a_3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

y si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ el punto de equilibrio $\mathbf{x}^* = -A^{-1}bu = (-\frac{u}{a_3}, 0, 0)^T$ es localizado en el eje x_1 . Por lo tanto, basta con considerar los planos de conmutación $c_3 x_1 = v$ y $c_3 x_1 = -v$ (con $c_1 = c_2 = 0$) los cuales son ortogonales al eje x_1 . Por lo tanto, el control saturado es $u = -kc_3 x_1 - f_s(x_1)$ y f_s es dada por la siguiente función saturada:

$$f_s(x_1, w) = \begin{cases} w, & \text{para } v/c_3 < x_1; \\ \mu c_3 x_1, & \text{para } |x_1| \leq v/c_3; \\ -w, & \text{para } x_1 < -v/c_3; \end{cases} \quad (5.7)$$

donde μ es la pendiente del segmento medio, el radial superior $\{f_s(x_1, w) = w : x_1 \geq v/c_3\}$ y el radial inferior $\{f_s(x_1, w) = -w : x_1 \leq -v/c_3\}$ son llamadas *mesetas saturadas* y el segmento $\{f_s(x_1, \mu) = \mu x_1 : |x_1| \leq v/c_3\}$ entre las dos mesetas saturadas es llamado la *pendiente saturada*. Para $k = 0$ el sistema es capaz de generar atractores caóticos mediante una función saturada y el sistema *conmuta* entre UDS-I y UDS-II para la *meseta* saturada y la *pendiente saturada* respectivamente (ver [54] por ejemplo). El sistema en lazo cerrado (5.5) con control de retroalimentación escalar $u(\mathbf{x}, k) = -kc^T \mathbf{x} - f_s(x_1, w)$ está dado por:

$$\dot{\mathbf{x}} = (A - kbc^T)\mathbf{x} - f_s(x_1, w)b \quad (5.8)$$

El polinomio característico de la *meseta saturada* $A + kbc^T$ es $P_{SP}(t, k) = t^3 + t^2 + t + (a_3 + kc_3)$ y corresponde a un sistema UDS de tipo I.

En forma similar, el polinomio característico de la *pendiente saturada* es $P_{SS}(t, k) = t^3 + a_1 t^2 + a_2 t + (a_3 + kc_3 + \mu c_3)$. La parte de la *pendiente saturada* puede modificar la estabilidad del sistema y corresponde a un sistema UDS de tipo II. Por lo tanto el control de realimentación puede modificar la estabilidad del sistema y destruir el comportamiento caótico, los resultados anteriores del intervalo máximo de inestabilidad máxima nos ayudan a garantizar que el sistema tenga soluciones con comportamiento caótico.

Con el fin de lograr la aparición de múltiples puntos de equilibrio en los cuales la solución del sistema se comporta de forma caótica, una serie de funciones multi-saturadas es considerada en lugar de una función saturada. En primer lugar,

vamos a considerar dos conjuntos, el primero es el conjunto de valores de saturación $\Lambda_w = \{w_1, w_2, \dots, w_d\}$ y el segundo es el conjunto de valores de conmutación $\Lambda_v = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$, tal que, $v_1 < v_2 < \dots < v_r$ y $w_1 < w_2 < \dots < w_d$ con $d = 2(r - 1)$ y $r, d \in \mathbb{N}$. La cardinalidad del conjunto Λ_w es el número de enroscados en el atractor.

Así, con estos dos conjuntos es posible definir la función continua multi-saturada definida por pedazos de la siguiente manera:

$$f_s(x_1, \Delta_w, \Delta_v) = \begin{cases} w_d, & \text{para } v_r/c_3 \leq x_1; \\ \mu_{d-1}c_3x_1 + \beta_{d-1}, & \text{para } v_{r-1}/c_3 \leq x_1 < v_r/c_3; \\ \vdots & \\ \mu_2c_3x_1 + \beta_2, & \text{para } v_3/c_3 \leq x_1 < v_4/c_3; \\ w_2, & \text{para } v_2/c_3 \leq x_1 < v_3/c_3; \\ \mu_1c_3x_1 + \beta_1, & \text{para } v_1/c_3 \leq x_1 < v_2/c_3; \\ w_1, & \text{para } x_1 < v_1/c_3; \end{cases} \quad (5.9)$$

con

$$\mu_1 = \frac{w_2 - w_1}{v_2 - v_1}, \mu_2 = \frac{w_3 - w_2}{v_4 - v_3}, \dots, \mu_{d-1} = \frac{w_d - w_{d-1}}{v_r - v_{r-1}},$$

and $\beta_1 = -\mu_1v_1 + w_1, \beta_2 = -\mu_2v_3 + w_2, \dots, \beta_{d-1} = -\mu_{d-1}v_{r-1} + w_{d-1}$.

El sistema (5.5) con control multi-saturado $u = -kc^T \mathbf{x} - f_s(x_1, \Delta_w, \Delta_v)$ es dado de la siguiente manera:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} (A - kbc^T)\mathbf{x} - w_db, & \text{para } v_r/c_3 \leq x_1; \\ (A - (k + \mu_{d-1})bc^T)\mathbf{x} - \beta_{d-1}b, & \text{para } v_{r-1}/c_3 \leq x_1 < v_r/c_3; \\ \vdots & \\ (A - (k + \mu_2)bc^T)\mathbf{x} - \beta_2b, & \text{para } v_3/c_3 \leq x_1 < v_4/c_3; \\ (A - kbc^T)\mathbf{x} - w_2b, & \text{para } v_2/c_3 \leq x_1 < v_3/c_3; \\ (A - (k + \mu_1)bc^T)\mathbf{x} - \beta_1b, & \text{para } v_1/c_3 \leq x_1 < v_2/c_3; \\ (A - kbc^T)\mathbf{x} - w_1b, & \text{para } x_1 < v_1/c_3. \end{cases} \quad (5.10)$$

Entonces, hay dos clases de puntos de equilibrio que se describen en los siguientes conjuntos:

$$A_{x_1} = \left\{ w_j (A - kbc^T)^{-1} b = \left(\frac{w_j}{a_3 + kc_3}, 0, 0 \right)^T \right\}_{j=1}^d,$$

$$B_{x_1} = \left\{ \beta_j (A - (k + \mu_j)bc^T)^{-1} b = \left(\frac{\beta_j}{a_3 + (k + \mu_j)c_3}, 0, 0 \right)^T \right\}_{j=1}^{d-1}.$$

El polinomio característico de la *meseta* saturada $A - kbc^T$ es el mismo $P_{SP}(t, k) = t^3 + a_1t^2 + a_2t + (a_3 + kc_3)$ mientras que el polinomio característico de la *pendiente* saturada $A - kbc^T + \mu_jbc^T$ es $P_{SS}(t, k) = t^3 + a_1t^2 + a_2t + (a_3 + kc_3 + \mu_jc_3)$ para $j = 1, \dots, d - 1$.

El teorema 30 nos muestra como encontrar el intervalo máximo de dinámica robusta para P_{SP} y el lema 4 nos permite obtener el intervalo de disipatividad. En consecuencia el teorema 31 nos permite mantener la inestabilidad y disipatividad en un intervalo máximo no importando que tipo de sistema UDS tengamos en el sistema en lazo abierto. De aquí en adelante, supondremos que el conjunto de puntos de equilibrio A_{x_1} son de tipo I. Sin embargo, es necesario garantizar el cambio de inestabilidad de los polinomios característicos de las *pendientes saturadas* de tipo I a tipo II.

Lema 5. Consideremos el polinomio $P_{SS}(t, k) = t^3 + a_1t^2 + a_2t + (a_3 + kc_3 + \mu_jc_3)$ con $a_1 > 0$. Supongamos que para $k = -\mu$ el polinomio P_{SS} tiene una raíz negativa y un par de raíces complejas con parte real positiva (UDS-I). Entonces P_{SS} tiene una raíz positiva y dos raíces complejas con parte real negativa (UDS-II), si y sólo si, $a_1^2 - 3a_2 > 0$ y $k \in K_B^j$ donde

$$K_B^j = \begin{cases} k < k_{1,j}, & \text{si } D < 0; \\ k < k_{2,j}, & \text{si } \bar{D} > 0; \\ k < \min\{k_1, k_2\}, & \text{si } \bar{D} < 0 \text{ y } D > 0; \end{cases} \quad (5.11)$$

con

$$\begin{aligned} k_{1,j} &= \min \left\{ -\frac{1}{c_3}(D^3 + a_1D^2 + a_2D + a_3 + \mu_j c_3), -\frac{a_3}{c_3} - \mu_j \right\}, \\ k_{2,j} &= \min \left\{ -\frac{1}{c_3}(\bar{D}^3 + a_1\bar{D}^2 + a_2\bar{D} + a_3 + \mu_j c_3), -\frac{a_3}{c_3} - \mu_j \right\}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} D &= \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 3a_2}}{3}, \\ \bar{D} &= \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 3a_2}}{3}. \end{aligned}$$

Demostración. La prueba se basa en el teorema 29. Ya que $P_{SS}(t, -\mu)$ satisface una de las hipótesis del teorema 28 entonces no puede satisfacer el inciso a) del teorema 29 para todo k . Sin embargo, la condición $a_1^2 - 3a_2 > 0$ es la misma en ambos teoremas. Ahora, la condición $a_3 + kc_3 + \mu_j c_3 < 0$ se satisface, si y sólo si, $k < -\frac{a_3}{c_3} - \mu_j$. Entonces, si $D = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 3a_2}}{3}$ y $\bar{D} = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 3a_2}}{3}$ podemos ver que $P(D, k) < 0$, si y sólo si, $k < -\frac{1}{c_3}(D^3 + a_1D^2 + a_2D + a_3 + \mu_j c_3)$. En forma similar, $P(\bar{D}, k) < 0$ se satisface, si y sólo si, $k < -\frac{1}{c_3}(\bar{D}^3 + a_1\bar{D}^2 + a_2\bar{D} + a_3 + \mu_j c_3)$. Definimos

$$\begin{aligned} k_{1,j} &= \min \left\{ -\frac{1}{c_3}(D^3 + a_1D^2 + a_2D + a_3 + \mu_j c_3), -\frac{a_3}{c_3} - \mu_j \right\}, \\ k_{2,j} &= \min \left\{ -\frac{1}{c_3}(\bar{D}^3 + a_1\bar{D}^2 + a_2\bar{D} + a_3 + \mu_j c_3), -\frac{a_3}{c_3} - \mu_j \right\}. \end{aligned}$$

De esto, el inciso b) del teorema 29 se cumple, si y sólo si, $D < 0$ y $k < k_1$; el inciso c) se satisface si $\bar{D} > 0$ y $k < k_2$ y el inciso d) es válido, si y sólo si, $k < \min \{k_1, k_2\}$, $\bar{D} < 0$ y $D > 0$. Por último, el cambio de inestabilidad es dado por:

$$K_B^j = \begin{cases} k < k_{1,j}, & \text{si } D < 0; \\ k < k_{2,j}, & \text{si } \bar{D} > 0; \\ k < \min \{k_1, k_2\}, & \text{si } \bar{D} < 0 \text{ y } D > 0; \end{cases} \quad (5.12)$$

Esto termina la demostración. □

Sea $K_{A_{x_1}}$ el intervalo máximo UDS de tipo I para la *meseta saturada*. Entonces todas las pendientes saturadas son UDS de tipo II si $k \in K_{B_{x_1}} = \bigcap_{j=1}^{d-1} K_B^j$. Así, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 32. *Consideremos el sistema controlado en \mathbb{R}^3 :*

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (5.13)$$

que satisface las hipótesis **DS1** y **DS2**. Sea $u = -kc_3x_1 - f_s(x_1, \Delta_w, \Delta_v)$ el control saturado con $f_s(x_1, \Delta_w, \Delta_v)$ la función multi-saturada (5.9). Entonces, el sistema en lazo cerrado (5.1) posee los conjuntos de puntos de equilibrio A_{x_1} UDS de tipo I y B_{x_1} UDS de tipo II, si y sólo si, $k \in K_{\text{máx}} = K_{A_{x_1}} \cap K_{B_{x_1}}$. Además, es posible generar una k -familia la cual tiene d -atractores con enroscados los cuales se generan a partir del conjunto de puntos de equilibrio A_{x_1} .

Demostración. La demostración se obtiene a partir de los resultados anteriores. □

Para ilustrar los resultados obtenidos hemos tomado el ejemplo numérico citado en [54] donde con los resultados obtenidos se pueden generar atractores caóticos. El ejemplo es dado de la siguiente manera:

Ejemplo 18. *Consideremos el sistema controlado*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_I x + bu \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0,7 & -0,7 & -0,7 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \end{aligned} \quad (5.14)$$

El polinomio característico del sistema en lazo abierto es $p_{A_I}(t) = t^3 + 0,7t^2 + 0,7t + 0,7$ y por el inciso a) del teorema 28 tenemos que:

$$\begin{aligned} a_3 &= 0,7 > 0, \\ 4a_1^2 - 12a_2 &= -6,44 \leq 0, \\ a_1a_2 - a_3 &= -0,21 < 0. \end{aligned}$$

Esto implica que la matriz A asociada al sistema tiene un valor propio real negativo y un par de valores propios complejos de la forma $\alpha \pm i\beta$ con $\alpha > 0$. Además, por el lema 4 la suma de sus valores propios es negativa debido a que $a_1 = 0,7 > 0$. Por lo tanto, el sistema (5.14) es UDS de tipo-I. La función de saturación implementada (5.7) es dada como sigue:

$$f_s(x_1) = \begin{cases} 7, & \text{si } 1 < x_1; \\ 7x_1, & \text{si } |x_1| \leq 1; \\ -7, & \text{si } x_1 < -1. \end{cases} \quad (5.15)$$

A partir de esta función saturada es posible generar la función multi-saturada como sigue:

$$f_s(x_1) = \begin{cases} 35, & \text{si } 41 \leq x_1; \\ 7x_1 - 252, & \text{si } 39 \leq x_1 < 41; \\ 21, & \text{si } 21 \leq x_1 < 39; \\ 7x_1 - 126, & \text{si } 19 \leq x_1 < 21; \\ 7, & \text{si } 1 \leq x_1 < 19; \\ 7x_1, & \text{si } -1 \leq x_1 < 1; \\ -7, & \text{si } x_1 < -1. \end{cases} \quad (5.16)$$

El sistema (5.14) es UDS de tipo I en la meseta saturada, sin embargo, el sistema (5.14) cambia a UDS de tipo II (como se mencionó anteriormente debido a la pendiente saturada) teniendo la siguiente matriz A_{II} :

$$A_{II} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6,3 & -0,7 & -0,7 \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

Debido a que los puntos de equilibrio están situados sobre el eje x_1 podemos tomar $c_1 = c_2 = 0$ y $c_3 = 1$; también con los conjuntos $\Lambda_v = \{-1, 1, 19, 21, 39, 41\}$ y $\Lambda_w = \{-7, 7, 21, 35\}$ obtenemos $\mu_0 = 7$ y la otra parte de la retroalimentación $u = -kx_1 - f_s(x_1)$ generamos a partir del sistema (5.14) el sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ (-0,7 - k) & -0,7 & -0,7 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 35 \end{bmatrix}, & \text{si } 41 \leq x_1; \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ (6,3 - k) & -0,7 & -0,7 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -252 \end{bmatrix}, & \text{si } 39 \leq x_1 < 41; \\ \vdots & \vdots \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ (-0,7 - k) & -0,7 & -0,7 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}, & \text{si } 1 \leq x_1 < 19; \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ (6,3 - k) & -0,7 & -0,7 \end{bmatrix} \mathbf{x}, & \text{si } -1 \leq x_1 < 1; \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ (-0,7 - k) & -0,7 & -0,7 \end{bmatrix} \mathbf{x} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}, & \text{si } x_1 < -1. \end{cases} \quad (5.18)$$

A continuación calculamos el intervalo máximo para obtener un sistema UDS de tipo I: Para los polinomios $p_{A_I}(t) = t^3 + 0.7t^2 + 0.7t + 0.7$ y $p_1(t) = t^2$ tenemos que:

$$\begin{aligned} p_{A_I}(i\omega) &= (0.7 - 0.7\omega^2) + i\omega(0.7 - \omega^2), \\ p_1(i\omega) &= -\omega^2, \end{aligned}$$

para los cuales

$$\begin{aligned} P(\omega^2) &= 0.7 - 0.7\omega^2, \\ Q(\omega^2) &= 0.7 - \omega^2, \\ p(\omega^2) &= -\omega^2, \\ q(\omega^2) &= 0, \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \omega^2(0.7\omega^2 - 0.7), \\ G(\omega) &= (0.7 - 0.7\omega^2)^2 + \omega^2(0.7 - \omega^2)^2, \\ H(\omega) &= \omega^2(0.7 - \omega^2). \end{aligned}$$

No es difícil de ver que $K^- = \{F(\sqrt{0.7}) = -0.147\}$ y $K^+ = \{0^+\}$. Por lo tanto, por el teorema (30) y el lema (4) el intervalo máximo UDS de tipo I es descrito mediante $k_{\max}^+ = \min\left\{-\frac{G(\sqrt{0.7})}{F(\sqrt{0.7})} = 0.3\right\} = 0.3$ y $k_{\min}^- = -\infty$. Para el cálculo del intervalo máximo UDS de tipo II tenemos que: Para los polinomios $p_{A_{II}}(t) = t^3 + 0.7t^2 + 0.7t - 6.3$ y $p_1(t) = t^2$ obtenemos que:

$$\begin{aligned} p_{A_{II}}(i\omega) &= (-6.3 - 0.7\omega^2) + i\omega(0.7 - \omega^2), \\ p_1(i\omega) &= -\omega^2, \end{aligned}$$

para los cuales

$$\begin{aligned} P(\omega^2) &= -6.3 - 0.7\omega^2, \\ Q(\omega^2) &= 0.7 - \omega^2, \\ p(\omega^2) &= -\omega^2, \\ q(\omega^2) &= 0, \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \omega^2(6.3 + 0.7\omega^2), \\ G(\omega) &= (6.3 + 0.7\omega^2)^2 + \omega^2(0.7 - \omega^2)^2, \\ H(\omega) &= \omega^2(0.7 - \omega^2). \end{aligned}$$

Así, tenemos que $K^- = \{0^-\}$ y $K^+ = \{F(\sqrt{0.7}) = 4.753\}$. Por lo tanto, por el teorema (30) y el lema (4) el intervalo máximo para tener un sistema UDS de tipo II está dado por $k_{\max}^+ = +\infty$ y $k_{\min}^- = \max\left\{-\frac{G(\sqrt{0.7})}{F(\sqrt{0.7})} = -9.7\right\} = -9.7$. Entonces, $k \in K_{\max} = (-9.7, 0.3)$. Si $k = 0$ y $x_0 = (0.0569, 0.02847, 0.09492)$ las soluciones del sistema (5.18) presentan atractores caóticos como se muestra en la figura 5.2.

Para $k = 0.2$ y $x_0 = (0.0569, 0.02847, 0.09492)$ las soluciones del sistema (5.18) generan atractores caóticos como se muestra en la figura 5.3.

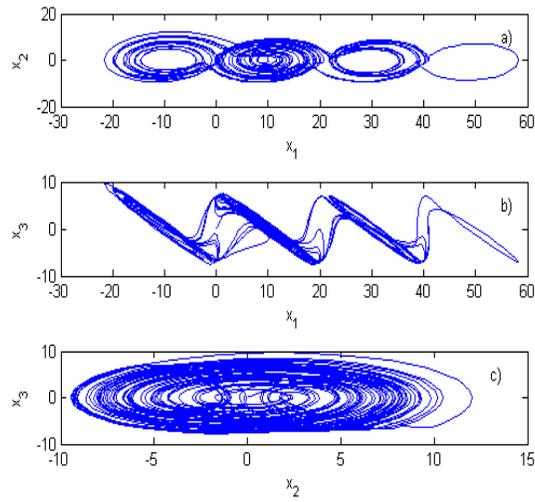


Figura 5.2: Proyección del atractor sobre los planos: a) (x_1, x_2) ; b) (x_1, x_3) ; y c) (x_2, x_3) for $k = 0$.

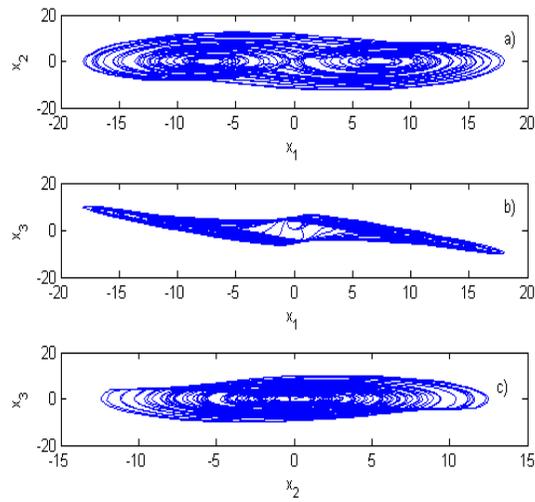


Figura 5.3: Proyección del atractor sobre los planos: a) (x_1, x_2) ; b) (x_1, x_3) ; y c) (x_2, x_3) for $k = 0,2$.

Capítulo 6

Abscisa de estabilidad y el producto de Hadamard

Los resultados de este capítulo fueron publicados en el artículo [7]. En este capítulo se realiza un acercamiento al estudio de la abscisa de estabilidad de un polinomio y el producto de Hadamard. Nuevamente enunciamos la definición de la abscisa de estabilidad. Consideremos un polinomio $p(t)$ de grado n de la forma siguiente:

$$p(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n \quad (6.1)$$

donde a_1, a_2, \dots, a_n son números reales, los ceros de $p(t)$ son denotados por ξ_1, \dots, ξ_n . Así definimos la abscisa de estabilidad de $p(t)$ de la forma siguiente:

$$\sigma_p := \max_{1 \leq i \leq n} \{\operatorname{Re}(\xi_i)\}.$$

Usaremos la siguiente notación:

- \mathcal{P}_n denota al conjunto de polinomios reales de grado n .
- \mathcal{H}_n denota al conjunto de polinomios reales que son Hurwitz y tienen grado n .
- \mathcal{H}_n^+ denota al conjunto de polinomios Hurwitz de grado n con coeficientes reales
- $\mathcal{H}(\text{Had})$ denota al conjunto de polinomios Hurwitz Hadamardizados.

Para n fijo, el conjunto \mathcal{H}_n es un espacio métrico de dimensión $n+1$, en forma usual lo identificamos como isomorfo al conjunto \mathbb{R}^{n+1} con la norma euclidiana usual $\|\cdot\|$. Por otro lado, consideremos dos polinomios $p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_0$ y $q(t) = b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \cdots + b_0$, decimos que

$$(p * q)(t) = a_n b_n t^n + a_{n-1} b_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_0 b_0, \quad (6.2)$$

es el producto de Hadamard de p y q . Garloff y Wagner mostraron que el conjunto de polinomios Hurwitz es cerrado bajo el producto de Hadamard (ver [31]) y preserva la Total no negatividad (ver [32]). De forma inversa decimos que un polinomio Hurwitz $p(t)$ admite una factorización de Hadamard si existen dos polinomios Hurwitz $f(t)$ y $g(t)$, tales que, $(f * g)(t) = p(t)$. Tal conjunto será llamado *conjunto de polinomios Hurwitz Hadamardizados* ($\mathcal{H}(\text{Had})$).

Conociendo las abscisas de estabilidad de $f(t)$ y $g(t)$ un problema abierto es: ¿Qué relación hay entre σ_f , σ_g y σ_{f*g} ?

Para $n = 1$ Sean $f(t) = a_1 t + a_0$ y $g(t) = b_1 t + b_0$ polinomios Hurwitz entonces $(f * g)(t) = a_1 b_1 t + a_0 b_0$. Por lo tanto, tenemos que

$$\sigma_{f*g} = -\sigma_f \sigma_g.$$

Para $n = 2$ Sean $f(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0$ y $g(t) = b_2 t^2 + b_1 t + b_0$ polinomios Hurwitz entonces $(f * g)(t) = a_2 b_2 t^2 + a_1 b_1 t + a_0 b_0$.

Como $f(t)$ es Hurwitz para tener estabilidad robusta es necesario y suficiente que $a_2 > 0$, $a_1 > 0$ y $a_0 > 0$. Analizando el discriminante $a_1^2 - 4a_2 a_0$ tenemos que:

1. si $a_1^2 - 4a_2a_0 \leq 0 \Rightarrow \sigma_f = -\frac{a_1}{2a_2}$
2. si $a_1^2 - 4a_2a_0 > 0 \Rightarrow \sigma_f = -\frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}$.

De forma análoga se hace un análisis para los otros polinomios. Por lo tanto, tenemos lo siguiente:

para $a_1^2 - 4a_2a_0 \leq 0$ tenemos que

$$\sigma_{f*g} = -\frac{(a_1b_1)^2}{2a_2b_2} \neq \sigma_f\sigma_g.$$

De forma similar se tiene el mismo resultado para el otro caso.

Del análisis para el caso $n = 2$ se tiene que en general para dos elementos f y g del conjunto de *polinomios Hurwitz Hadamardizados* se tiene que

$$\sigma_{f*g} \neq \sigma_f\sigma_g. \quad (6.3)$$

El estudio de la relación entre la abscisa y el producto de Hadamard nos llevo a desarrollar un estudio de las propiedades del conjunto de polinomios Hurwitz Hadamardizados. Ahora en este capítulo presentamos algunos resultados topológicos y geométricos acerca de este conjunto. Denotamos por $\mathcal{H}(Had)$ al conjunto de *polinomios Hurwitz Hadamardizados* y denotamos por $\mathcal{H}(Had)_n$ al conjunto de polinomios Hurwitz Hadamardizados de grado n . En la sección 6.1 se probará que $\mathcal{H}(Had)$ es un conjunto no acotado, abierto, no convexo y arco-conexo. Además en la sección 6.2 se da un resultado acerca de la factorización de Hadamard de un polinomio intervalo Hurwitz de grado cuatro. Finalmente en la sección 6.3 presentamos un acercamiento mediante conceptos de topología diferencial para el estudio del conjunto de polinomios Hurwitz Hadamardizados.

6.1. Propiedades topológicas del conjunto $\mathcal{H}(Had)$

Comenzamos esta sección demostrando una propiedad del conjunto de polinomios Hurwitz Hadamardizados.

6.1.1. $\mathcal{H}(Had)$ es un conjunto abierto

A continuación damos las siguientes definiciones que necesitaremos.

Definición 8. Sean X y Y espacios métricos. Entonces se dice que $T : D(T) \rightarrow Y$ (con $D(T) \subset X$) es un mapeo abierto si para todo conjunto abierto en $D(T)$ la imagen es un conjunto abierto en Y .

Definición 9 (Operador lineal acotado). Sean X y Y espacios normados y $T : D(T) \rightarrow Y$ un operador lineal donde $D(T) \subset X$. El operador T se dice acotado si existe un número real c , tal que, para todo $x \in D(T)$ tenemos que

$$\|Tx\| \leq c\|x\|.$$

También utilizaremos el siguiente Teorema.

Teorema 33 (Teorema del Mapeo Abierto). Un operador lineal acotado T de un espacio de Banach X sobre un espacio de Banach Y es un mapeo abierto.

Demostración. Ver [44] para una demostración. □

Teorema 34 (Ver [51, 52]). El polinomio $f(t) = \alpha_4t^4 + \alpha_3t^3 + \alpha_2t^2 + \alpha_1t + \alpha_0$ es Hadamardizado, si y sólo si,

$$\frac{\alpha_0\alpha_3}{\alpha_1} < \left(\sqrt{\frac{\alpha_1\alpha_4}{\alpha_3}} - \sqrt{\alpha_2} \right)^2.$$

Del Teorema 33 tenemos que el conjunto de polinomios Hurwitz Hadamardizados grado cuatro es un conjunto abierto ya que si $q(t) = \alpha_4 t^4 + \alpha_3 t^3 + \alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0$ es un polinomio Hurwitz Hadamardizado entonces

$$\frac{\alpha_0 \alpha_3}{\alpha_1} < \left(\sqrt{\frac{\alpha_1 \alpha_4}{\alpha_3}} - \sqrt{\alpha_2} \right)^2 \quad (6.4)$$

y esta desigualdad se mantiene para pequeñas perturbaciones de los coeficientes. Ya que no se conocen condiciones necesarias y suficientes (en términos de los coeficientes) para que un polinomio Hurwitz de grado n tenga una factorización de Hadamard necesitamos un resultado para probar que el conjunto $\mathcal{H}(Had)$ es abierto. Tal resultado es el *Teorema del Mapeo Abierto*.

Teorema 35. $\mathcal{H}(Had)$ es un conjunto abierto.

Demostración. Sea $p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$ un polinomio Hurwitz Hadamardizado. Entonces existen dos polinomios Hurwitz $f(t) = b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \dots + b_0$ y $g(t) = c_n t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \dots + c_0$, tales que, $(f * g)(t) = p(t)$. Consideremos el operador $T_f : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_n$, donde \mathcal{P}_n es el conjunto de polinomios de grado n definido por $T_f(h(t)) = (f * h)(t)$. T es un operador lineal y si $h(t) = d_n t^n + d_{n-1} t^{n-1} + \dots + d_0$ entonces

$$\begin{aligned} \|T_f(h(t))\| &= \|(b_n d_n, \dots, b_1 d_1, b_0 d_0)\| \\ &\leq \|(b_n, \dots, b_1, b_0)\| \|(d_n, \dots, d_1, d_0)\|. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Así se tiene que T_f es un operador lineal acotado, además, T_f es un mapeo suprayectivo ya que si $q(t) = q_n t^n + q_{n-1} t^{n-1} + \dots + q_1 t + q_0$ es un polinomio arbitrario entonces

$$T_f \left(\frac{q_n}{b_n} t^n + \frac{q_{n-1}}{b_{n-1}} t^{n-1} + \dots + \frac{q_1}{b_1} t + \frac{q_0}{b_0} \right) = q(t). \quad (6.6)$$

Por otro lado, ya que \mathcal{H}_n (el conjunto de polinomios Hurwitz de grado n) es un conjunto abierto, sea U un conjunto abierto, tal que, $g \in U \subset \mathcal{H}_n$. Entonces $T_f[U] \subset \mathcal{H}_n$ (ver [31]) y por el Teorema del Mapeo Abierto [44] tenemos que $T_f[U]$ es un conjunto abierto. Ya que $p(t) \in T_f[U]$ se tiene que $p(t) \in T_f[U] \subset \mathcal{H}(Had)$. Por lo tanto, $\mathcal{H}(Had)$ es un conjunto abierto. \square

6.1.2. Aplicación

Consideremos el sistema $\dot{x} = A(\lambda)x$ donde $A(\lambda) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathcal{R})$ y $\lambda \in \mathcal{R}^n$ es un parámetro. Sea $p_\lambda(t) = a_n(\lambda)t^n + a_{n-1}(\lambda)t^{n-1} + \dots + a_1(\lambda) + a_0(\lambda)$ el polinomio característico de la matriz $A(\lambda)$.

Supongamos que p_{λ_0} es un polinomio Hurwitz Hadamardizado. Por el Teorema 35 existe una bola abierta $B_\epsilon(p_{\lambda_0})$, tal que, cada elemento de $B_\epsilon(p_{\lambda_0})$ es un polinomio Hurwitz Hadamardizado. Entonces podemos encontrar dos polinomios Hurwitz:

$$\begin{aligned} f_\lambda(t) &= b_n(\lambda)t^n + b_{n-1}(\lambda)t^{n-1} + \dots + b_1(\lambda)t + b_0(\lambda), \\ g_\lambda(t) &= c_n(\lambda)t^n + c_{n-1}(\lambda)t^{n-1} + \dots + c_1(\lambda)t + c_0(\lambda), \end{aligned} \quad (6.7)$$

tales que, $f_\lambda * g_\lambda = p_\lambda$ para $\lambda \approx \lambda_0$. La idea es obtener una factorización de Hadamard de $p_\lambda(t)$ donde los coeficientes de $f_\lambda(t)$ y $g_\lambda(t)$ sean más simples que los de $p_\lambda(t)$. Para ilustrar esto damos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 19. Consideremos el sistema $\dot{x} = Ax$ donde las entradas $a_{ij}(\lambda)$ de A están dadas por: $a_{11} = -\lambda^2 - 8\lambda - 15$, $a_{12} = -\lambda^2 - 11\lambda - 29$, $a_{13} = -\lambda^2 - 12\lambda - 36$, $a_{14} = 2\lambda + 7$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = 0$, $a_{23} = 1$, $a_{24} = 0$, $a_{31} = 0$, $a_{32} = 0$, $a_{33} = 0$, $a_{34} = 1$, $a_{41} = -\lambda^2 - 8\lambda - 15$, $a_{42} = -\lambda^2 - 11\lambda - 30$, $a_{43} = -\lambda^2 - 12\lambda - 36$, $a_{44} = \lambda + 7$.

El polinomio característico asociado a la matriz es $p_\lambda(t) = t^4 + (\lambda^2 + 6\lambda + 8)t^3 + (\lambda^2 + 12\lambda + 36)t^2 + (\lambda^2 + 11\lambda + 30)t + (\lambda^2 + 8\lambda + 15)$. Para $\lambda = 0$ tenemos que $p_0(t) = t^4 + 8t^3 + 36t^2 + 30t + 15$ el cual, por el Teorema 34, es un polinomio Hurwitz Hadamardizado.

Por el Teorema 35 podemos encontrar dos polinomios Hurwitz, tales que, su producto de Hadamard es igual a $p_\lambda(t)$ para λ suficientemente pequeña. Consideremos los polinomios Hurwitz:

$$\begin{aligned} F_0(t) &= t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 6t + 5, \\ G_0(t) &= t^4 + 2t^3 + 6t^2 + 5t + 3. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Notemos que $F_0 * G_0 = t^4 + 8t^3 + 36t^2 + 30t + 15$. La familia de polinomios

$$\begin{aligned} F_\lambda(t) &= t^4 + (\lambda + 4)t^3 + (\lambda + 6)t^2 + (\lambda + 6)t + (\lambda + 5), \\ G_\lambda(t) &= t^4 + (\lambda + 2)t^3 + (\lambda + 6)t^2 + (\lambda + 5)t + (\lambda + 3) \end{aligned} \quad (6.9)$$

es Hurwitz para valores pequeños de λ , el producto de Hadamard $F_\lambda * G_\lambda$ satisface que $(F_\lambda * G_\lambda)(t) = p_\lambda(t)$ y los coeficientes de F_λ y G_λ son más simples que los de p_λ .

6.1.3. $\mathcal{H}(Had)$ es un conjunto no-convexo

Tenemos que $\mathcal{H}(Had) \subset \mathcal{H}$ (ver [51]) donde $\mathcal{H}(Had) \neq \mathcal{H}$ y \mathcal{H} es el conjunto de polinomios Hurwitz, se conoce que el conjunto de polinomios Hurwitz es un conjunto no-convexo (ver [2, 3]). Sin embargo, esto no implica que el conjunto $\mathcal{H}(Had)$ es también no-convexo. Por lo tanto, probaremos que el conjunto $\mathcal{H}(Had)$ también es no-convexo.

Consideremos el rayo de polinomios:

$$F_k = t^4 + t^3 + 6.9t^2 + 2t + 3 + k(t^3 + t^2 + 2t + 1), \quad (6.10)$$

$$= t^4 + (1+k)t^3 + (6.9+k)t^2 + (2+2k)t + (3+k). \quad (6.11)$$

Entonces $F_k(t)$ es Hurwitz, si y sólo si, $1+k > 0$, $6.9+k > 0$, $2+2k > 0$, $3+k > 0$ y $(1+k)(6.9+k)(2+2k) - (2+2k)^2 - (1+k)^2(3+k) > 0$. Estas desigualdades se tienen, si y sólo si, $k > -1$, y $F_k(t)$ es Hadamardizado, si y sólo si,

$$\frac{(3+k)(1+k)}{2+2k} < \left(\sqrt{\frac{2+2k}{1+k}} - \sqrt{6.9+k} \right)^2. \quad (6.12)$$

Así, tenemos que $F_k(t)$ es Hurwitz Hadamardizado, si y sólo si, $k \in (-1, 1.2 - \sqrt{3.2}) \cup (1.2 + \sqrt{3.2}, \infty)$ y $F_k(t)$ es Hurwitz pero no Hadamardizado, si y sólo si, $k \in [1.2 - \sqrt{3.2}, 1.2 + \sqrt{3.2}]$.

Teorema 36. $\mathcal{H}(Had)$ es un conjunto no-convexo.

Demostración. De la discusión anterior, tomemos $k = -0.75$ y $k = 3$. Entonces obtenemos los polinomios Hurwitz Hadamardizados $r(t) = t^4 + t^3 + 6.9t^2 + 2t + 3 - 0.75(t^3 + t^2 + 2t + 1)$ y $h(t) = t^4 + t^3 + 6.9t^2 + 2t + 3 + 3(t^3 + t^2 + 2t + 1)$. Ahora consideremos la combinación convexa $\lambda r(t) + (1-\lambda)h(t)$. Para $\lambda = 1/2$ obtenemos el polinomio $t^4 + 2.125t^3 + 8.025t^2 + 4.25t + 4.125$ el cual no es Hadamardizado, por lo tanto, $\mathcal{H}(Had)$ es un conjunto no-convexo. \square

6.1.4. $\mathcal{H}(Had)$ es un conjunto no acotado

Teorema 37. Existen rayos de polinomios contenidos en el conjunto $\mathcal{H}(Had)$. Por lo tanto, es un conjunto no acotado.

Ejemplo 20. Consideremos el polinomio siguiente:

$$\begin{aligned} G_k(t) &= t^4 + t^3 + 7t^2 + 2t + 3 + k(t^3 + t^2 + 2t + 1) \\ &= t^4 + (1+k)t^3 + (7+k)t^2 + (2+2k)t + (3+k). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Entonces $G_k(t)$ es Hurwitz, si y sólo si, $1+k > 0$, $7+k > 0$, $2+2k > 0$, $3+k > 0$ y $(1+k)(7+k)(2+2k) - (2+2k)^2 - (1+k)^2(3+k) > 0$. Además, $G_k(t)$ es Hadamardizado, si y sólo si,

$$\frac{(3+k)(1+k)}{2+2k} < \left(\sqrt{\frac{2+2k}{1+k}} - \sqrt{7+k} \right)^2. \quad (6.14)$$

Así, tenemos que $G_k(t)$ es un polinomio Hurwitz Hadamardizado para $k > -1$ y $\mathcal{H}(Had)$ es un conjunto no acotado.

La existencia rayos de polinomios Hurwitz Hadamardizados nos permite mostrar una aplicación en el diseño de controles de estabilización.

6.1.5. Aplicación

El siguiente ejemplo ilustra el diseño de un *control con retroalimentación* que estabiliza el sistema para cada valor positivo del parámetro k . Consideremos el sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -7 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u; \quad (6.15)$$

y el control con retroalimentación siguiente:

$$u(x) = k(-1, -2, -1, -1) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad (6.16)$$

donde $k \in \mathcal{R}$ es un parámetro. Entonces el sistema controlado es

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3-k & -2-2k & -7-k & -1-k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}. \quad (6.17)$$

El polinomio característico asociado al sistema es $G_k(t) = t^4 + t^3 + 7t^2 + 2t + 3 + k(t^3 + t^2 + 2t + 1)$ el cual es un polinomio Hurwitz Hadamardizado para todo $k > -1$, por lo tanto, el sistema es estable para todo $k > -1$. Además, $G_k(t)$ es Hadamardizado para todo $k > -1$.

6.1.6. $\mathcal{H}(Had)$ con coeficientes positivos es arco-conexo

Para probar esta propiedad necesitaremos el siguiente lema.

Lema 4. \mathcal{H}_n^+ es un conjunto arco-conexo.

Demostración. Sean $P_1(t)$ y $P_2(t)$ polinomios Hurwitz con coeficientes positivos. Supongamos que $n = 2m$. Entonces $P_1(t)$ y $P_2(t)$ pueden ser escritos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} P_1(t) &= b_0(t^2 + b_1t + b_2)(t^2 + b_3t + b_4) \cdots (t^2 + b_{2m-1}t + b_{2m}), \\ P_2(t) &= a_0(t^2 + a_1t + a_2)(t^2 + a_3t + a_4) \cdots (t^2 + a_{2m-1}t + a_{2m}), \end{aligned} \quad (6.18)$$

donde $b_i > 0$ y $a_i > 0$ para todo $i = 1, \dots, 2m$. Definimos

$$\begin{aligned} H_\lambda(t) &= [\lambda a_0 + (1-\lambda)b_0](t^2 + [\lambda a_1 + (1-\lambda)b_1]t + [\lambda a_2 + (1-\lambda)b_2])(t^2 + [\lambda a_3 + (1-\lambda)b_3]t + \\ &\quad + [\lambda a_4 + (1-\lambda)b_4]) \cdots (t^2 + [\lambda a_{2m-1} + (1-\lambda)b_{2m-1}]t + [\lambda a_{2m} + (1-\lambda)b_{2m}]), \end{aligned} \quad (6.19)$$

con $\lambda \in [0, 1]$. Tenemos que $H_0(t) = P_1(t)$, $H_1(t) = P_2(t)$, además, $H_\lambda(t)$ es un polinomio Hurwitz para todo $\lambda \in [0, 1]$. Por lo tanto, \mathcal{H}_n^+ es un conjunto arco-conexo. \square

Así, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 38. $\mathcal{H}(Had)$ con coeficiente positivos es arco-conexo.

Demostración. Sean $P_1(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_0$ y $P_2(t) = b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \cdots + b_0$ polinomios Hurwitz Hadamardizados con coeficientes positivos, entonces existen

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \alpha_n t^n + \alpha_{n-1} t^{n-1} + \cdots + \alpha_0, \\ f_2(t) &= \beta_n t^n + \beta_{n-1} t^{n-1} + \cdots + \beta_0, \\ g_1(t) &= \gamma_n t^n + \gamma_{n-1} t^{n-1} + \cdots + \gamma_0, \\ g_2(t) &= \delta_n t^n + \delta_{n-1} t^{n-1} + \cdots + \delta_0, \end{aligned} \quad (6.20)$$

tal que, f_1, f_2, g_1 y g_2 son polinomios Hurwitz con coeficientes positivos los cuales cumplen que $(f_1 * g_1)(t) = P_1(t)$ y $(f_2 * g_2)(t) = P_2(t)$, así, se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha_n \gamma_n t^n + \alpha_{n-1} \gamma_{n-1} t^{n-1} + \cdots + \alpha_0 \gamma_0 &= a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_0, \\ \beta_n \delta_n t^n + \beta_{n-1} \delta_{n-1} t^{n-1} + \cdots + \beta_0 \delta_0 &= b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \cdots + b_0. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Ya que \mathcal{H}_n^+ es un conjunto arco-conexo entonces existen

$$\begin{aligned} G_{1,\lambda}(t) &= c_n(\lambda)t^n + c_{n-1}(\lambda)t^{n-1} + \cdots + c_0(\lambda), \\ G_{2,\lambda}(t) &= d_n(\lambda)t^n + d_{n-1}(\lambda)t^{n-1} + \cdots + d_0(\lambda), \end{aligned} \quad (6.22)$$

tales que

$$\begin{aligned} G_{1,0}(t) &= c_n(0)t^n + c_{n-1}(0)t^{n-1} + \cdots + c_0(0) \\ &= f_1(t), \\ G_{2,0}(t) &= d_n(0)t^n + d_{n-1}(0)t^{n-1} + \cdots + d_0(0) \\ &= g_1(t), \end{aligned} \quad (6.23)$$

$$\begin{aligned} G_{1,1}(t) &= c_n(1)t^n + c_{n-1}(1)t^{n-1} + \cdots + c_0(1) \\ &= f_2(t), \\ G_{2,1}(t) &= d_n(1)t^n + d_{n-1}(1)t^{n-1} + \cdots + d_0(1) \\ &= g_2(t) \end{aligned} \quad (6.24)$$

y cada $G_{i,\lambda}(t) \in \mathcal{H}_n^+$ para todo $\lambda \in [0, 1]$. Ahora consideremos

$$(G_{1,\lambda} * G_{2,\lambda})(t) = c_n(\lambda)d_n(\lambda)t^n + c_{n-1}(\lambda)d_{n-1}(\lambda)t^{n-1} + \cdots + c_0(\lambda)d_0(\lambda) \quad (6.25)$$

y entonces $(G_{1,\lambda} * G_{2,\lambda})(t)$ es un polinomio Hurwitz Hadamardizado para todo $\lambda \in [0, 1]$ (ver [31]) y

$$\begin{aligned} (G_{1,0} * G_{2,0})(t) &= (f_1 * g_1)(t) = P_1(t), \\ (G_{1,1} * G_{2,1})(t) &= (f_2 * g_2)(t) = P_2(t). \end{aligned} \quad (6.26)$$

Por lo tanto, el conjunto de polinomios Hurwitz Hadamardizados con coeficientes constantes es arco-conexo. \square

6.2. El Teorema de Kharitonov y el conjunto $\mathcal{H}(Had)$

El teorema de Kharitonov (ver [43]) ha motivado una gran cantidad de investigación sobre el tema de familias de polinomios estables. Ahora analizamos la siguiente pregunta: Supongamos que tenemos una familia intervalo de polinomios Hurwitz. Si los cuatro polinomios de Kharitonov son polinomios Hadamardizados ¿cada elemento de la familia es Hadamardizado?. Analizamos el caso para polinomios de grado cuatro en donde necesitaremos el siguiente resultado.

Teorema 39. *El polinomio Hurwitz $f(t) = \alpha_4 t^4 + \alpha_3 t^3 + \alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0$ es Hadamardizado, si y sólo si, $g(t) = \sqrt{\alpha_4} t^4 + \sqrt{\alpha_3} t^3 + \sqrt{\alpha_2} t^2 + \sqrt{\alpha_1} t + \sqrt{\alpha_0}$ es un polinomio Hurwitz.*

Demostración. La condición necesaria es inmediata. Para probar la condición suficiente supongamos que $f(t)$ es Hadamardizado y entonces (ver [52]) se tiene que:

$$\frac{\alpha_0 \alpha_3}{\alpha_1} < \left(\sqrt{\frac{\alpha_1 \alpha_4}{\alpha_3}} - \sqrt{\alpha_2} \right)^2. \quad (6.27)$$

Notemos que $\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1 \alpha_4 > 0$ (ya que f es Hurwitz) y entonces

$$\sqrt{\alpha_2} - \sqrt{\frac{\alpha_1 \alpha_4}{\alpha_3}} > 0. \quad (6.28)$$

Entonces, si $f(t)$ es Hadamardizado se tiene que

$$\sqrt{\frac{\alpha_0 \alpha_3}{\alpha_1}} < \sqrt{\alpha_2} - \sqrt{\frac{\alpha_1 \alpha_4}{\alpha_3}}. \quad (6.29)$$

de donde $0 < \sqrt{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} - \alpha_1 \sqrt{\alpha_4} - \sqrt{\alpha_0} \alpha_3$ lo cual implica que $g(t)$ es un polinomio Hurwitz. \square

El último teorema nos ayuda a establecer el siguiente resultado.

Teorema 40. *Consideremos la familia intervalo $F(t) = [a_4, b_4]t^4 + [a_3, b_3]t^3 + [a_2, b_2]t^2 + [a_1, b_1]t + [a_0, b_0]$ la cual consiste de polinomios Hurwitz. Si los cuatro polinomios de Kharitonov son polinomios Hadamardizados entonces cada elemento de la familia es un polinomio Hadamardizado.*

Demostración. Los cuatro polinomios de Kharitonov son:

$$\begin{aligned} k_1(t) &= a_4t^4 + b_3t^3 + b_2t^2 + a_1t + a_0, \\ k_2(t) &= a_4t^4 + a_3t^3 + b_2t^2 + b_1t + a_0, \\ k_3(t) &= b_4t^4 + b_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + b_0, \\ k_4(t) &= b_4t^4 + a_3t^3 + a_2t^2 + b_1t + b_0. \end{aligned} \tag{6.30}$$

Cada uno es polinomio Hurwitz. Si los cuatro polinomios de Kharitonov son Hadamardizados, entonces, aplicando el teorema previo, los polinomios

$$\begin{aligned} g_1(t) &= \sqrt{a_4}t^4 + \sqrt{b_3}t^3 + \sqrt{b_2}t^2 + \sqrt{a_1}t + \sqrt{a_0}, \\ g_2(t) &= \sqrt{a_4}t^4 + \sqrt{a_3}t^3 + \sqrt{b_2}t^2 + \sqrt{b_1}t + \sqrt{a_0}, \\ g_3(t) &= \sqrt{b_4}t^4 + \sqrt{b_3}t^3 + \sqrt{a_2}t^2 + \sqrt{a_1}t + \sqrt{b_0}, \\ g_4(t) &= \sqrt{b_4}t^4 + \sqrt{a_3}t^3 + \sqrt{a_2}t^2 + \sqrt{b_1}t + \sqrt{b_0} \end{aligned} \tag{6.31}$$

son Hurwitz. Por el teorema de Kharitonov se tiene que el polinomio intervalo

$$G(t) = \left[\sqrt{a_4}, \sqrt{b_4} \right] t^4 + \left[\sqrt{a_3}, \sqrt{b_3} \right] t^3 + \left[\sqrt{a_2}, \sqrt{b_2} \right] t^2 + \left[\sqrt{a_1}, \sqrt{b_1} \right] t + \left[\sqrt{a_0}, \sqrt{b_0} \right] \tag{6.32}$$

es también Hurwitz. Sea $f(t) = c_4t^4 + c_3t^3 + c_2t^2 + c_1t + c_0$ un elemento arbitrario de $F(t)$ donde $c_i \in [a_i, b_i]$ para $i = 1, 2, 3, 4$ y consideremos el siguiente polinomio en $G(t)$

$$g(t) = \sqrt{c_4}t^4 + \sqrt{c_3}t^3 + \sqrt{c_2}t^2 + \sqrt{c_1}t + \sqrt{c_0} \tag{6.33}$$

el cual es Hurwitz; este polinomio cumple que

$$f(t) = g(t) * g(t), \tag{6.34}$$

por lo tanto, el teorema se tiene. □

Observación 3. *La discusión anterior nos conduce a proponer el siguiente problema abierto.*

Problema Abierto 1. *Consideremos el polinomio Hurwitz $f(t) = \alpha_n t^n + \dots + \alpha_1 t + \alpha_0$ con $n \geq 5$ y $\alpha_m > 1$; si $f(t)$ es un polinomio Hadamardizado entonces $g(t) = \sqrt{\alpha_n} t^n + \dots + \sqrt{\alpha_1} t + \sqrt{\alpha_0}$ es un polinomio Hurwitz.*

Observación 4. *Notemos que, mediante la aplicación repetida de la raíz, el polinomio ${}^{2m}\sqrt{\alpha_n} t^n + \dots + {}^{2m}\sqrt{\alpha_1} t + {}^{2m}\sqrt{\alpha_0}$ converge al polinomio $t^n + t^{n-1} + \dots + t + 1$, cuando $m \rightarrow \infty$, el cual tiene sus raíces distribuidas en el círculo unitario, y por lo tanto, no es un polinomio Hurwitz. Así establecemos el siguiente problema abierto.*

Problema Abierto 2. *Sean $\alpha_n t^n + \dots + \alpha_1 t + \alpha_0$ y $\sqrt{\alpha_n} t^n + \dots + \sqrt{\alpha_1} t + \sqrt{\alpha_0}$ polinomios Hurwitz. ¿Cuál es el valor máximo de m , tal que, ${}^{2m}\sqrt{\alpha_n} t^n + \dots + {}^{2m}\sqrt{\alpha_1} t + {}^{2m}\sqrt{\alpha_0}$ es un polinomio Hurwitz?*

Observación 5. *Ya que para n de grado mayor o igual a cinco no tenemos un resultado similar al Teorema 40 podemos plantear los siguientes dos problemas abiertos.*

Problema Abierto 3. *Consideremos la familia de polinomios Hurwitz de grado $n \geq 5$: $[a_n, b_n]t^n + \dots + [a_1, b_1]t + [a_0, b_0]$. Si los cuatro polinomios de Kharitonov son polinomios Hadamardizados entonces cada elemento de la familia es Hadamardizado.*

Problema Abierto 4. *Si todos los vértices de una familia intervalo de polinomios con grado $n \geq 5$ son polinomios Hurwitz Hadamardizados ¿La familia entera consiste de polinomios Hurwitz Hadamardizados?*

6.3. El test de estabilidad, $\mathcal{H}(Had)$ y Topología diferencial

El test de estabilidad es un criterio para verificar cuando un polinomio dado es Hurwitz. Consideremos el siguiente polinomio de grado n con coeficientes positivos:

$$P(t) = A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \cdots + A_1 t + A_0. \quad (6.35)$$

Definimos el polinomios de grado $n - 1$

$$R(t) = A_{n-1}^2 t^{n-1} + (A_{n-1} A_{n-2} - A_n A_{n-3}) t^{n-2} + A_{n-1} A_{n-3} t^{n-3} + (A_{n-1} A_{n-4} - A_n A_{n-5}) t^{n-4} \cdots, \quad (6.36)$$

entonces tenemos el siguiente resultado.

Teorema 41. $P(t)$ es un polinomio Hurwitz, si y sólo si, $R(t)$ es un polinomio Hurwitz.

Demostración. Ver [11] para una prueba. □

La importancia del test de estabilidad fue apreciada cuando Kharitonov lo uso para obtener su celebré teorema. Además, otra propiedad importante del conjunto de polinomios Hurwitz fue mostrada con el test de estabilidad (ver [4, 51]). Ahora usamos el test de estabilidad para el siguiente subconjunto del conjunto de polinomios Hurwitz Hadamardizados:

$$\mathcal{H}(Had)_n^* = \{f(t) = a_n t^n + \cdots + a_0 \in \mathcal{H}_n^+ : h(t) = \sqrt{a_n} t^n + \cdots + \sqrt{a_0} \in \mathcal{H}_n^+\}. \quad (6.37)$$

Como se indica en el problema abierto 1 no conocemos la respuesta a la siguiente pregunta: ¿ $\mathcal{H}(Had)_n^* \subsetneq \mathcal{H}(Had)_n$ o $\mathcal{H}(Had)_n^* = \mathcal{H}(Had)_n$? A continuación damos un test el cual es aplicable a el estudio del conjunto $\mathcal{H}(Had)_n^*$. Este test es obtenido de la siguiente propiedad: $\mathcal{H}(Had)_n^*$ es un *haz vectorial* sobre el conjunto $\mathcal{H}(Had)_{n-1}^*$. Existen trabajos previos (ver [4, 8]) donde algunas ideas de topología diferencial han sido usadas en el estudio del espacio de polinomios Hurwitz. Una presentación de estos conceptos puede ser consultada en [4, 8, 15, 35].

6.3.1. Un test para $\mathcal{H}(Had)_n^*$

Considerar el polinomio de grado n con coeficientes positivos como (6.35); definimos el polinomio de grado $n - 1$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} Q(t) &= A_{n-1}^2 t^{n-1} + \left(\sqrt{A_{n-1}} \sqrt{A_{n-2}} - \sqrt{A_n} \sqrt{A_{n-3}} \right)^2 t^{n-2} \\ &\quad + A_{n-1} A_{n-3} t^{n-3} + \left(\sqrt{A_{n-1}} \sqrt{A_{n-4}} - \sqrt{A_n} \sqrt{A_{n-5}} \right)^2 t^{n-4} + \cdots \end{aligned} \quad (6.38)$$

y entonces tenemos el siguiente resultado.

Teorema 42. $P(t) \in \mathcal{H}(Had)_n^*$, si y sólo si, $Q(t) \in \mathcal{H}(Had)_{n-1}^*$.

Demostración. Supongamos que $P(t) \in \mathcal{H}(Had)_n^*$ entonces $\sqrt{A_n} t^n + \sqrt{A_{n-1}} t^{n-1} + \cdots + \sqrt{A_1} t + \sqrt{A_0} \in \mathcal{H}(Had)_n^+$, por el test de estabilidad tenemos que

$$\begin{aligned} A_{n-1} t^{n-1} + \left(\sqrt{A_{n-1}} \sqrt{A_{n-2}} - \sqrt{A_n} \sqrt{A_{n-3}} \right) t^{n-2} + \sqrt{A_{n-1}} \sqrt{A_{n-3}} t^{n-3} + \\ \left(\sqrt{A_{n-1}} \sqrt{A_{n-4}} - \sqrt{A_n} \sqrt{A_{n-5}} \right) t^{n-4} + \cdots \in \mathcal{H}_{n-1}^+. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Entonces $Q(t)$ es un polinomio Hurwitz (ver [31]), por lo tanto, $Q(t) \in \mathcal{H}(Had)_{n-1}^*$, esto prueba la condición suficiente.

Ahora si $Q(t) \in \mathcal{H}(Had)_{n-1}^*$ entonces obtenemos la ecuación (6.39), por el test de estabilidad tenemos que

$$\sqrt{A_n} t^n + \sqrt{A_{n-1}} t^{n-1} + \cdots + \sqrt{A_1} t + \sqrt{A_0} \in \mathcal{H}_n^+, \quad (6.40)$$

donde $P(t) \in \mathcal{H}_n^+$ (ver [31]) y entonces $P(t) \in \mathcal{H}(Had)_n^*$. Por lo tanto, el teorema se tiene. □

6.3.2. Una aproximación mediante la Topología Diferencial del estudio de $\mathcal{H}(Had)$

Supongamos que el siguiente polinomio de grado $n - 1$

$$Q(t) = b_{n-1}t^{n-1} + b_{n-2}t^{n-2} + \dots + b_1t + b_0 \quad (6.41)$$

es un elemento de $\mathcal{H}(Had)_{n-1}^*$, entonces se tiene que

$$q(t) = \sqrt{b_{n-1}}t^{n-1} + \sqrt{b_{n-2}}t^{n-2} + \dots + \sqrt{b_1}t + \sqrt{b_0} \quad (6.42)$$

es un elemento de \mathcal{H}_{n-1}^+ . Podemos calcular la *fibra* (ver [4, 51]) de $q(t)$:

$$P_s(t) = st^n + b_{n-1}^{1/4}t^{n-1} + \left(\frac{\sqrt{b_{n-2}}}{b_{n-1}^{1/4}} + \frac{\sqrt{b_{n-3}}}{b_{n-1}^{1/2}}s \right) t^{n-2} + \frac{\sqrt{b_{n-3}}}{b_{n-1}^{1/4}}t^{n-3} + \left(\frac{\sqrt{b_{n-4}}}{b_{n-1}^{1/4}} + \frac{\sqrt{b_{n-5}}}{b_{n-1}^{1/2}}s \right) t^{n-4} + \dots \quad (6.43)$$

con $s > 0$; entonces tenemos que:

$$(P_s * P_s)(t) = s^2t^n + \sqrt{b_{n-1}}t^{n-1} + \left(\frac{b_{n-2}}{\sqrt{b_{n-1}}} + \frac{2\sqrt{b_{n-2}}\sqrt{b_{n-3}}}{b_{n-1}^{3/4}}s + \frac{b_{n-3}}{b_{n-1}}s^2 \right) t^{n-2} + \frac{b_{n-3}}{\sqrt{b_{n-1}}}t^{n-3} + \dots \quad (6.44)$$

Entonces $(P_s * P_s)(t)$ podría ser la *fibra* de $Q(t)$. Así, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 43. $\mathcal{H}(Had)_n^*$ es un haz vectorial con base $\mathcal{H}(Had)_{n-1}^*$.

Demostración. Sea $P(t) = A_nt^n + A_{n-1}t^{n-1} + \dots + A_1t + A_0 \in \mathcal{H}(Had)_n^*$, $Q(t)$ es un polinomio de grado $n - 1$ definido como en la ecuación (6.38). Entonces podemos definir $\varphi : \mathcal{H}(Had)_n^* \rightarrow \mathcal{H}(Had)_{n-1}^* \times \mathbb{R}$ de la siguiente manera: $\varphi(P(t)) = (Q(t), l_n(b_n))$.

Ahora definimos $\varphi^{-1} : \mathcal{H}(Had)_{n-1}^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H}(Had)_n^*$. Dado el polinomio $Q(t)$ definido en la ecuación (6.41) con $l \in \mathbb{R}$, $\varphi^{-1}(Q(t), l)$ es el siguiente polinomio $\varphi^{-1}(Q(t), l) = (P_{e^{1/2}} * P_{e^{1/2}})(t)$ obtenido mediante la sustitución de s por $e^{1/2}$ en la ecuación (6.44).

Así, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(Had)_n^* & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{H}(Had)_{n-1}^* \times \mathbb{R} \\ & \searrow H & \downarrow \\ & & \mathcal{H}(Had)_{n-1}^* \end{array} \quad (6.45)$$

donde H es determinado por el nuevo test establecido en el Teorema 40, así, $H(P(t)) = Q(t)$. Por lo tanto, $\mathcal{H}(Had)_n^*$ es un *haz vectorial* con base $\mathcal{H}(Had)_{n-1}^*$. \square

Observación 6. Del último teorema podemos decir que $\mathcal{H}(Had)_n^* \approx \mathcal{H}(Had)_{n-1}^* \times \mathbb{R}$ y esto implica que

$$\mathcal{H}(Had)_n^* \approx \mathcal{H}(Had)_4 \times \mathbb{R}^{n-4}. \quad (6.46)$$

Capítulo 7

Conclusiones y perspectivas

En esta tesis se abordó el estudio de la estabilidad y estabilización de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, además, el estudio del comportamiento de las soluciones del sistemas controlados (estabilidad, presencia de atractores extraños, etc.) desde distintos enfoques, tales como:

1. La abscisa de estabilidad de un polinomio.
2. La generalización del máximo intervalo de estabilidad.
3. Las propiedades del conjunto de polinomios Hurwitz Hadamardizados.

Sobre el primer punto se obtuvieron los siguientes resultados: Se obtuvo una relación entre la abscisa de estabilidad de un polinomio Hurwitz $p(t)$ y el Teorema de Bialas Generalizado. También se pudo obtener una relación entre las abscisas de estabilidad de un polinomio Hurwitz y su derivada, así como también para polinomios Schur. Esto nos permitió obtener cotas inferiores para la abscisa de estabilidad de una familia de tipo *Intervalo* de polinomios Hurwitz.

Como perspectivas de investigación tenemos que a partir del estudio de la relación de la abscisa de $p(t)$ y la abscisa de $p'(t)$ tenemos el siguiente problema abierto: Si $p(t)$ es un polinomio Hurwitz de grado n encontrar condiciones necesarias y suficientes para tener la igualdad entre $\sigma_{p'}$ y σ_p . Este problema se puede generalizar para el caso discreto (polinomios Schur). Por otro lado, ya que σ_p es la abscisa de estabilidad del polinomio estable $p(t)$ entonces $p(t - \sigma_p)$ es semiestable entonces es interesante el estudio de la aparición de bifurcaciones cuando $p(t - \sigma_p)$ es el polinomio característico de la parte lineal de un sistema.

Sobre el segundo punto se obtuvieron los siguientes resultados: En el capítulo 4 se introdujo una familia monoparametrica de sistemas que generan multi-enroscados basada en sistemas lineales definidos por pedazos (sistemas UDS de tipo I). Se obtuvieron condiciones para generar una familia de polinomios $P(t, k) = p_0(t) + kp_1(t)$ para la cual $p_0(t)$ tiene n_1 raíces en \mathbb{C}^- y $n - n_1$ raíces en \mathbb{C}^+ para todo k en el intervalo máximo de dinámica robusta. Entonces, obtenemos una familia monoparametrica de atractores con multi-enroscados. Así, tenemos una forma de perturbar un sistema y generar atractores que presentan multi-enroscados. En el capítulo 5 a partir de una familia de sistemas definidos por pedazos (con un control compuesto de una *función multi-saturada* y un control con retroalimentación, con un parámetro k) se genero una familia de sistemas que presentan atractores con multi-enroscados. Se obtuvieron condiciones necesarias y suficientes para preservar atractores con multi-enroscados en las soluciones del sistema.

Sobre el tercer punto se obtuvieron los siguientes resultados: Se probó que el conjunto de polinomios Hurwitz Hadamardizados es abierto, no-conexo, no acotado y arco-conexo. Además, se obtuvo una condición para verificar cuando una familia de polinomios intervalo de grado cuatro consta de polinomios Hurwitz Hadamardizados. También se obtuvo una aproximación mediante Topología Diferencial para el estudio del conjunto de polinomios Hurwitz Hadamardizados. Se obtuvieron algunos resultados que son validos para polinomios de grado n y otros resultados que se cumplen para polinomios de grado cuatro.

Como perspectivas de investigación en este tema a partir del estudio del Teorema de Kharitonov y el conjunto $\mathcal{H}(Had)$ se tienen los siguientes problemas abiertos:

Problema Abierto 5. Consideremos el polinomio Hurwitz $f(t) = \alpha_n t^n + \dots + \alpha_1 t + \alpha_0$ con $n \geq 5$ y $\alpha_m > 1$; si $f(t)$ es un polinomio Hadamardizado entonces $g(t) = \sqrt{\alpha_n} t^n + \dots + \sqrt{\alpha_1} t + \sqrt{\alpha_0}$ es un polinomio Hurwitz.

Problema Abierto 6. Sean $\alpha_n t^n + \dots + \alpha_1 t + \alpha_0$ y $\sqrt{\alpha_n} t^n + \dots + \sqrt{\alpha_1} t + \sqrt{\alpha_0}$ polinomios Hurwitz. ¿Cuál es el valor máximo de m , tal que, $\sqrt[m]{\alpha_n} t^n + \dots + \sqrt[m]{\alpha_1} t + \sqrt[m]{\alpha_0}$ es un polinomio Hurwitz?

Ya que para n de grado mayor o igual a cinco no tenemos un resultado similar al Teorema 40 también podemos plantear los siguientes dos problemas abiertos.

Problema Abierto 7. Consideremos la familia de polinomios Hurwitz de grado $n \geq 5$: $[a_n, b_n]t^n + \dots + [a_1, b_1]t + [a_0, b_0]$. Si los cuatro polinomios de Kharitonov son polinomios Hadamardizados entonces cada elemento de la familia es Hadamardizado.

Problema Abierto 8. Si todos los vértices de una familia intervalo de polinomios con grado $n \geq 5$ son polinomios Hurwitz Hadamardizados ¿La familia entera consiste de polinomios Hurwitz Hadamardizados?

Bibliografía

- [1] Ackermann, J. (2002) *Robust Control. The Parameter Space Approach*. Springer-Verlag, New York, NY, USA.
- [2] Aguirre, B., Ibarra, C. and Suárez, R. (2002) *Sufficient algebraic conditions for stability of cones of polynomials*, Systems and Control Letters 46, no. 4, 255–263.
- [3] Aguirre, B. and Suárez, R. (2006) *Algebraic test for the Hurwitz stability of a given segment of polynomials*, Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana Vol. 12, no. 2, 261–275.
- [4] Aguirre–Hernández, B., Frías–Armenta, M. E. and Verduzco, F. (2009) *Smooth trivial vector bundle structure of the space of Hurwitz polynomials*, Automatica 45, pp. 2864–2868.
- [5] Aguirre-Hernández B., Campos-Cantón E., López-Rentería J.A. and Díaz González E. C. (2015) *A polynomial approach for generating a monoparametric family of chaotic attractors via switched linear systems*, Chaos, Solitons and Fractals **71**, pp. 100-106, <http://dx.doi.org/10.1016/j.chaos.2014.12.012>
- [6] Aguirre-Hernández, B., Cisneros-Molina, J. L. and Frías–Armenta, M. E. (2012) *Polynomials in Control Theory parametrized by their roots*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences Vol. 2012, Article ID595076, 19 pages, doi:10.1155/2012/595076.
- [7] Aguirre-Hernández, B., Díaz-González, E. C., Loredó-Villalobos, C. A. and García-Sosa, F. R. (2015) *Properties of the Set of Hadamardized Hurwitz Polynomials*, Mathematical Problems in Engineering, Volume 2015, Article ID 695279, 8 pages, <http://dx.doi.org/10.1155/2015/695279>.
- [8] Aguirre–Hernández, B., Frías–Armenta, M. E. and Verduzco, F. (2012) *On differential structures of polynomial spaces in Control Theory*, Journal of Systems Science and Systems Engineering Vol. 21, Issue 3, September 2012, pages 372–382, doi: 10.1007/s11518-012-5197-y.
- [9] Barmish, B.R. (1984) *Invariance of strict Hurwitz property of polynomial with perturbed coefficients*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-29, No. 10, pp. 935–936.
- [10] Barmish, B.R. (1994) *New Tools for Robustness of Linear Systems*, Macmillan Publishing Co., New York.
- [11] Bhattacharyya, S.P., Chapellat, H., Keel, L.H. (1995) *Robust Control: The Parametric Approach*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.
- [12] Bialas, S. (1985) *A necessary and sufficient condition for the stability of convex combinations of stable polynomials or matrices*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences Vol. 33, no. 9–10, 473–480.
- [13] Bialas, S. (1984) *Upper Bounds for the Abscissa of Stability of a Stable Interval Polynomial*, Bulletin of the Academy of Sciences Mathematics, vol. 32, no. 1–2, pp. 1–9.
- [14] Blanchini, F., Tempo, R. and Dabbene, F. (1998) *Computation of the minimum destabilizing volume for interval and affine families of polynomials*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 43, no. 18, 1159–1163.
- [15] Brocker, T. and Janich, K. (1982) *Introduction to Differential Topology*, Cambridge University Press.

- [16] Bückner, H. (1952) *A formula for an integral occurring in the theory of linear servomechanisms and control systems*, Quart. Appl. Math., vol. 10, pp. 205–213.
- [17] Campos-Cantón, E., Barajas-Ramírez, J. G., Solís-Perales, G., Femat, R. (2010) *Multiscroll attractors by switching systems*, Chaos 2010;20;013116.
- [18] Chen, G., Ueta, T. (1999) *Yet another chaotic attractor*, Int J Bifurcation Chaos, 9, 1465–1466.
- [19] Chen, J. (1995) *Static output feedback stabilization for SISO systems and related problems: Solution via generalized eigenvalues*, Control–Theory and Advanced Technology, vol. 10, 2233–2244.
- [20] Dabbene, F., Polyak, B.I. and Tempo, R. (2007) *On the complete instability of interval polynomials*, Systems and Control Letters, Vol. 56, no. 6, 431–438.
- [21] Devaney, R. L. (1992) *A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiment*, 1st ed. Westview Press.
- [22] Díaz, E.C. (2010) *El Teorema de Hermite–Biehler*, Tesis de Maestría, UAM-Iztapalapa, México, D.F.
- [23] Díaz González E. C., Aguirre-Hernández B., López-Rentería J.A. and Campos-Cantón E. (2016) *Stability and multiscroll attractors in control systems via the abscissa*, sometido a la revista APPLIED MATHEMATICS AND COMPUTATION.
- [24] Díaz González E. C., López-Rentería J.A., Campos-Cantón E. and Aguirre-Hernández B. (2016) *Maximal unstable dissipative interval to preserve multi-scroll attractors via multi-saturated functions*, sometido a la revista Journal of Nonlinear Science.
- [25] Dorato, P., Tempo, R. and Moscato, G. (1993) *Bibliography on Robust Control*, Automatica Vol. 29, no. 1, 201–213.
- [26] Effertz, F.H. (1957) *Darstellung der quadratischen Regelfläche als Funktion der Routhschen Probefunktionen und der Anfangswerte des Regelungssystems*, Regelungstechnik, S. 298, Oldenbourg, München.
- [27] Effertz, F.H. and Kolberg, F. (1963) *Einführung in die Dynamik selbsttätiger Regelungssysteme*, Verlag des Vereins Deutscher Ingenieure, Düsseldorf.
- [28] Faedo, S. (1953) *A new stability problem for polynomials with real coefficients*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Sci. Fis. Mat. Ser. 3–7, pp. 53–63.
- [29] Fu, M. and Barmish, B. R. (1988) *Maximal unidirectional perturbation bounds for stability of polynomials and matrices*, Systems and Control Letters, vol. 11, 173–179.
- [30] Gantmacher, F. R. (1959) *The Theory of Matrices*, Chelsea Publishing Company, New York.
- [31] Garloff, J. and Wagner, D. (1996) *Hadamard Product of stable polynomials are stable*, Journal of Math. Analysis and Applications 202, 797–809.
- [32] Garloff, J. and Wagner, D. (1996) *Preservation of total nonnegativity under the Hadamard product and related topics*, in Total Positivity and Its Applications, vol. 359 of Mathematics and Its Applications, Springer, 97–102.
- [33] Henrici, P. (1974) *Applied and Computational Complex Analysis*, vol. 1, John Wiley & Sons.
- [34] Henrici, P. (1970) *Upper bounds for the abscissa of stability of a stable polynomial*, SIAM J. Numer. Anal, vol. 7, pp. 538 – 544.
- [35] Hirsch, M. W. (1976) *Differential Topology*, Graduate Texts in Mathematics, Springer.
- [36] Henrion, D. (2001) *Course on polynomial methods for robust control*, Universidad de los Andes, Merida, Venezuela.
- [37] Hermite, C. (1856) *On the number of roots of an algebraic equation between two limits*, Extract of a letter from Mr. C. Hermite of Paris to Mr. Borchardt of Berlin, J. reine angew. Math., vol. 52, pp. 39–51. Translation by P. C. Parks, Int. J. Cont., vol. 26, no. 2, pp. 183–196, 1977.

- [38] Hinrichsen, D., Pritchard, A.J. (2005) *Mathematical Systems Theory I*, Texts in Applied Mathematics, Vol. 48, Mathematical Systems Theory, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [39] Huang, X., Ye, G. (2014) *An efficient self-adaptive model for chaotic image encryption algorithm*, Commun Nonlinear Sci Numer Simul, 19: pp. 4094–4104.
- [40] Hurwitz, A. (1895) *Ueber die Bedingungen unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt*, Math. Ann., vol. 46, pp. 273–284.
- [41] Jury, E. I. (1982) *Inners and Stability of Dynamic Systems*, Robert Krieger Publishing Company, Malabar, Florida.
- [42] Kale, A. A. and Tits, A. L. (2000) *On Kharitonov's theorem without invariant degree assumption*, AUTOMATICA J. IFAC 36, no. 7, 1075–1076.
- [43] Kharitonov, V.L. (1978) *Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations*, Differential Uravnen, vol. 14, pp. 2086 - 2088. Translation in Differential Equations, vol. 14, pp. 1483 - 1485, 1979.
- [44] Kreyszig, E. (1989) *Introductory Functional Analysis with Applications*, vol. 17 of Wiley Classics Library, John Wiley & Sons, New York, NY, USA.
- [45] Kuetche, AES., Fotsin, HB. Kengne, J, Woafu, P. (2014) *Parameters estimation based adaptive generalized projective synchronization (GPS) of chaotic Chua's circuit with application to chaos communication by parametric modulation*, Chaos Solitons Fractals; 61:27–37.
- [46] Kurosch, A.G. (1981) *Curso de Álgebra Superior*. Editorial Mir, 4 Edición, Moscú.
- [47] Lancaster, P., Tismenetsky, M. (1985) *The Theory of Matrices with Applications*, Academic Press, San Diego, CA.
- [48] López-Rentería, J. A., Aguirre-Hernández, B. and Verduzco, F. (2011) *The Boundary Crossing Theorem and the Maximal Stability Interval*, Math. Prob. in Eng. Vol. 2011, Article ID123403, 13 pages, doi:10.1155/2011/1234-03.
- [49] López-Rentería, J. A., Aguirre-Hernández, B. and Verduzco, F. (2011) *On Hurwitz and Schur connecting-curves and dense trajectories*, AIP Conf. Proc. Vol. 1368, p. 271, doi:10.1063/1.3663511, 4 pages.
- [50] Loredó-Villalobos, C.A. (2005) *Criterios para determinar si un polinomio es un polinomio Hurwitz*, Reporte de los Seminarios de Investigación I y II, UAM-I.
- [51] Loredó-Villalobos, C.A. and Aguirre-Hernández, B. (2011) *Necessary conditions for Hadamard factorizations of Hurwitz polynomials*, AUTOMATICA Vol. 47, no. 7, 1409–1413.
- [52] Loredó-Villalobos, C.A. and Aguirre-Hernández, B. (2012) *Hadamard factorization of stable polynomials*, in Advances in Mathematical and Computational Methods, I. Kotsireas, R. Melnik, and B. West, Eds., vol. 1368 of AIP Conference Proceedings, Waterloo, Canada, July, pp. 251–254.
- [53] Lu, J. Chen, G. (2002) *A new chaotic attractor coined*, Int J Bifurcation Chaos; 12: 659–661.
- [54] Lü, J., Chen, G., Yu, X. & Leung H. (2004) *Design and analysis of multiscroll chaotic attractors from saturated function series*, IEEE Transactions on Circuits and Systems, Part I, 51 (12) pp. 2476-2490.
- [55] Marden, M. (1949) *The Geometry of the Zeros of a Polynomial in a Complex Variable*, American Mathematical Society, New York.
- [56] Matsumoto, T. (1984) *A chaotic attractor from Chua's circuit*, IEEE Trans Circuit Syst; 31 (12); 1055–1080.
- [57] Maxwell, J.C. (1868) *On governors*, Proceedings of the Royal Society Vol. 16, 270–283.
- [58] Olifrov, K. L. (1977) *Determination of a neighborhood of the imaginary axis which is disjoint from the spectrum of a real polynomial*, Mathematical Notes, 22, 2, 581–584. Translation of Mat. Zametki, vol. 22, Issue 2, 161–166.
- [59] Rubel, L. A. (1966) *Some applications of the Gauss-Lucas theorem*, Enseignement Math., 2, 12, 33–39.

- [60] Saydy, L., Tits, A. L. and Abed, E. H. (1990) *Guardian maps and the generalized stability of parametrized families of matrices and polynomials*, Mathematics of Control, Signal and Systems, vol. 3, 345–371.
- [61] Schrack, G. F. (1967) *Lower Bounds for the Abscissa of Stability of Stable Polynomials*, Dissertation 4065, Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich.
- [62] Schrack, G. F. (1971) *Lower bounds to the abscissa of stability of a stable polynomial from symmetric functions*, SIAM J. Appl. Math. vol. 21, no. 3, 373–379.
- [63] Spivak, M. (1996) *Cálculo Infinitesimal*, Universidad Brandeis, Editorial Reverté S. A., Barcelona-Buenos Aires-México.
- [64] O. Taussky–Todd (1968) *On stable matrices*, Programmation en mathématiques numériques, Colloques internationaux du centre national de la recherche scientifique, 165, Paris, pp. 75–88.
- [65] Tempo, R. (1990) *A dual result to Kharitonov’s theorem*, IEEE Trans. Automat. Control 35, no. 2, 195–198.
- [66] Willems, J. C. and Tempo, R. (1999) *The Kharitonov theorem with degree drop*, IEEE Transactions on Automatic Control Vol. 44, no. 11, 2218–2220.
- [67] Wilf, Herbert. S. (1962) *Mathematics for the Physical Sciences*, Dover Publications, Inc, New York, N. Y.
- [68] Xu, Y., Wang, H., Li, Y., Pei, B. (2014) *Image encryption based on synchronization of fractional chaotic systems*, Commun Nonlinear Sci Numer Simul, 19; 3735–3744.
- [69] Zakian, V. and Al–Naib, U. (1973) *Design of dynamical and control systems by the method of inequalities*, Proc. Inst. Elect. Eng. Vol. 120, no. 14, 2–3.
- [70] Zakian, V. (1979) *New formulations for the method of inequalities*, Proc. Inst. Elect. Eng. Vol. 126, 579–584.
- [71] Zakian, V. (1979) *Computation of the Abscissa of Stability by Repeated Use of the Routh Test*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC–24, No. 4, pp. 604–606.



Abscisa de estabilidad,
generación de atractores
caóticos y algunas
propiedades del conjunto de
polinomios Hurwitz
Hadamardizados

En la Ciudad de México, se presentaron a las 15:00 horas del día 30 del mes de noviembre del año 2016 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

- DR. ALEJANDRO RICARDO FEMAT FLORES
- DR. CARLOS IBARRA VALDEZ
- DR. BALTAZAR AGUIRRE HERNANDEZ
- DR. JOAQUIN COLLADO MOCTEZUMA
- DR. JULIO ERNESTO SOLIS DAUN



EDGAR CRISTIAN DIAZ GONZALEZ
ALUMNO

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron a la presentación de la Disertación Pública cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMATICAS)
DE: EDGAR CRISTIAN DIAZ GONZALEZ

y de acuerdo con el artículo 78 fracción IV del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

REVISÓ



LIC. JULIO CESAR DE LARANSASSI
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI



DR. JOSE GILBERTO CORDOBA HERRERA

PRESIDENTE



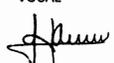
DR. ALEJANDRO RICARDO FEMAT FLORES

VOCAL



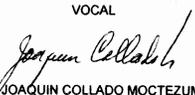
DR. CARLOS IBARRA VALDEZ

VOCAL



DR. BALTAZAR AGUIRRE HERNANDEZ

VOCAL



DR. JOAQUIN COLLADO MOCTEZUMA

SECRETARIO



DR. JULIO ERNESTO SOLIS DAUN