Casa abierta al tiempo

Universidad Autónoma Metropolitana

unidad Iztapalapa

División de Ciencias Básicas e Ingenieria

Sobre Espectros Combinados en Álgebras no Conmutativas

Tesis que presenta

José Ricardo Núñez Hernández

Para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Asesor de tesis

Dr. Antoni A. Wawrzynczyk Wilkiewcz

Jurado

Dr. Antoni Wawrzyñczyk Wilkiewicz UAM-I

Dr. Jorge Ricardo Bolaños Servín UAM-I

Dr. Hugo Arizmendi Peimbert UNAM

Iztapalapa, Ciudad de México, México. 20 de Julio de 2018

Dedicado a

mis padres, esposa, hermanos y sobrinos.

Agradecimientos

Agradezco a Dios por todo lo que me ha brindado en esta vida.

A mi esposa Lorena, por animarme en esos momentos de angustia y preocupación, pero sobre todo por estar a mi lado en cada momento.

A mis padres, el señor Margarito y la señora Marisela. A mis hermanos y sobrinos, por darme su amor, su tiempo para escucharme, y darme sabios consejos y siempre apoyarme en cada decisión que tomé.

Al Dr. Antoni por su apoyo, dedicación y gran paciencia que tuvo conmigo.¡ Muchas gracias !

Al Dr. Jorge Ricardo Bolaños Servin y al Dr. Hugo Arizmendi Peimbert por sus observaciones y consejos para el mejoramiento de este trabajo que fue de gran valor.

A mis amigos, por esos momentos tan divertidos, por sus consejos y todo el apoyo brindado, en especial a mi mejor amigo, Israel, por esos buenos momentos de ajedrez, de platicas y discusiones tan interesantes, pero sobre todo, por ser mi amigo.

Al Dr. Gustavo Izquierdo, que además de ser mi profesor de licenciatura se convirtió en un nuevo amigo. Gracias por todo el tiempo y apoyo brindado.

Al Dr. Julio Ernesto Solis, Dra. Elsa Omaña, Dr. Bernardo Llano, Dr. Rogelio Fernandez, Dr. Luis M Villegas, Dra.Shirley Bromberg, Dra. Maria Jose Arroyo, Dr. Mario Pineda, Dr. Carlos Ibarra, Dr. Roberto Quezada, Dra. Patricia Saavedra y Dra. Maria Luisa Sandoval, por el apoyo moral y económico brindado para culminar esta meta.

A la Universidad Autónoma Metropolitana por abrirme las puertas y brindarme un espacio para realizar mis estudios de maestría.

Al CONACyT por financiar mis estudios y la elaboración de la presente.

Resumen

El presente trabajo de tesis tiene como principal tema de estudio la teoría espectral en álgebras no conmutativas; siendo más específico, el propósito de este trabajo es estudiar para un álgebra de Waelbroeck $\mathcal{W}$, I un ideal izquierdo de $\mathcal{W}$ y $(a_1, \ldots, a_n)$ un sistema finito de elementos de $\mathcal{W}$ (el cual cumple con ciertas propiedades), un espectro nuevo, a saber, el **espectro combinado asociado al ideal izquierdo** I, denotado por $\sigma_l^I(a_1, \ldots, a_n)$, el cual es definido en (3.5.1), capítulo 3.

A diferencia de otros espectros σ_l^I está definido para sistemas de elementos $(a_1, \ldots, a_n)$ que no necesariamente conmutan. Además σ_l^I es una generalización del espectro esencial que se estudia en teoría de operadores en espacios de Banach y cabe resaltar que coincide con espectro combinado clásico σ_l, para $I = \{0\}$.

Esta tesis está compuesta por tres capítulos principales y un cuarto capítulo destinado para las conclusiones y perspectivas. El capítulo 1 es una breve introducción a los espacios vectoriales topológicos y culmina en un ejemplo de espacio de Fréchet, el cual nos brindará herramientas para abordar el estudio de las álgebras de Waelbroeck en el capítulo número dos. Dentro del capítu-

lo 2, se estudia ejemplo de álgebra de Waelbreock la unitización $\tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$ del espacio de Schwartz de funciones rápidamente decrecientes ($\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$), esto es, $\tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) + \mathbb{C}$. Posteriormente se realiza un estudio breve del espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ bajo la transformada de Fourier el cual se extiende a matrices cuadradas con entradas en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. En este trabajo solo consideramos las matrices de 2×2 pero las demostraciones son análogas para el caso de matrices de $(n \times n)$. Esto asegura que además de las álgebras de Banach existen álgebras que son no conmutativas tales como las álgebras de Waelbroeck.

El tercer capítulo es el contenido original de este trabajo, pues nos introducimos en el estudio de la teoría espectral en álgebras de Waelbroeck. Como ya dijimos arriba, $\sigma_l^I(a_1, \ldots, a_n)$ es un espectro nuevo para un sistema finito de elementos del álgebra $\mathcal{W}$, y se demuestra que este nuevo espectro además de ser no vacío también cumple o satisface con la propiedad de mapeo espectral, esto es

$$P(\sigma_l^I(a_1, \ldots, a_n)) = \sigma_l^I(P(a_1, \ldots, a_n))$$

para cualquier sistema de polinomios $P = (P_1, \ldots, P_m)$ de n variables.

Índice general

Introducción

El principal objetivo de este trabajo de tesis es introducir un nuevo espectro combinado en una amplia clase de álgebras (álgebras de Waelbroeck) que contienen a todas las álgebras de Banach.
El estudio de las álgebras de Waelbroeck comienzan alrededor de los años 50's, con Lucien Waelbroeck (1929-2009). Estas constituyen una importante rama en el estudio de las álgebras topológicas, en las que se pueden encontrar muchos resultados similares de la teoría clásica de álgebras de Banach.

El **espectro combinado izquierdo** de un sistema finito $a_1, \ldots, a_n$ de elementos de un álgebra con unidad $\mathcal{A}$, está definido como el subconjunto $\sigma_l(a_1, \ldots, a_n) \subset \mathbb{C}^n$, dado por

$$\sigma_l(a_1, \ldots, a_n) = \left\{ \overline{\lambda} \in \mathbb{C}^n \mid I_l\langle a_1 - \lambda_1, \ldots, a_n - \lambda_n \rangle \neq \mathcal{A} \right\} \ ,$$

donde $I_l\langle a_1 - \lambda_1, \ldots, a_n - \lambda_n \rangle$ denota al ideal generado por $\{a_i - \lambda_i \mid \forall\ i = 1, \ldots, n\}$.

En 1971, R. E. Harte demostró (bajo la suposición de que el sistema $a_1, \ldots, a_n$ de elementos de un álgebra de Banach B es conmutativo), que

$\sigma_l(a_1, \ldots, a_n) \neq \phi$ y además que para cada $P = (P_1, \ldots, P_m)$ un sistema de polinomios de n variables satisface la propiedad de mapeo espectral, esto es

$$\sigma_l(P(a_1, \ldots, a_n)) = P(\sigma_l(a_1, \ldots, a_n)) \ .$$

Este teorema se aplica en particular a sistemas conmutativos de operadores en un espacio de Banach X, cuando, como se sabe, $L(X)$ es un álgebra de Banach. Si el espacio X no es de Banach, la estructura del álgebra de operadores continuos $L(X)$ se complica enormemente, pues no existe siquiera una topología en $L(X)$ que haga continua la aplicación $L(X) \times X \ni (T, x) \to Tx \in X$. Por tanto desaparecen las propiedades del álgebra $L(X)$ que en el caso de álgebras de Banach permiten probar las propiedades de σ_l.

El espectro que estamos introduciendo en este trabajo de tesis es una generalización del espectro esencial que aparece en la teoría de operadores en espacios de Banach.

Considere un espacio de Banach B, sea $K(B)$ el espacio de operadores compactos en B. $K(B)$ es un ideal bilateral cerrado en el álgebra $L(B)$ de operadores acotados en B; además el espacio cociente $L(B)/K(B)$ es un álgebra de Banach llamado el álgebra de Calkin.

Sea $A \in L(B)$. Se dice que A es un **operador de Fredholm** si $[A] \in L(B)/K(B)$ es invertible en $L(B)/K(B)$. Se define el **espectro esencial** de A, como el espectro

$$\sigma_{ess}(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (A - \lambda I) \text{ no es de Fredholm}\}$$

Observe que

$$\sigma_{ess}(A) := \sigma([A]).$$

Sean $A_1, \ldots, A_n \in L(B)$. Se define el **espectro esencial combinado** como el espectro $\sigma_l(\,[A_1], \ldots, [A_n]\,)$, donde cada $[A_i]$ denota la clase de A_i en el espacio cociente $L(B)/K(B)$.

En este trabajo fijamos un ideal izquierdo I en un álgebra de Waelbroeck. Por un **álgebra de Waelbroeck** se entiende un álgebra topológica con unidad, denotada por la letra $\mathcal{W}$, donde el grupo de elementos invertibles $G(\mathcal{W})$ es abierto en $\mathcal{W}$ y la función de tomar inverso $(\,a \mapsto a^{-1}\,)$ es continua. Por un **álgebra topológica** se entiende un espacio vectorial topológico V el cual es un álgebra, y en el cual el producto $V \times V \ni (x, y) \to x\,y \in V$ es continuo.

Sean $\mathcal{W}$ un álgebra de Waelbroeck con unidad e, I un ideal izquierdo en $\mathcal{W}$ y sea $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ con $a_i \in \mathcal{W}$ tal que $\forall\ i, j = 1, \ldots, n,$ se cumple que $[a_i, a_j] = a_i a_j - a_j a_i \in I$ y además $I a_i \subset I$. Entonces existe (Teorema(3.4.2)) $\overline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ tal que $I_l\langle I, a_1 - \lambda_1 e, \ldots, a_n - \lambda_n e\rangle$ es un ideal propio en $\mathcal{W}$.

Para $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ con $a_i \in \mathcal{W}$, $[a_i, a_j \in I$ y además $I a_i \subset I$ se define un espectro nuevo (3.5.1), el **espectro combinado asociado a un ideal izquierdo** I, $\sigma_l^I(\overline{a})$, como el subconjunto de $\mathbb{C}^n$, dado por

$$\sigma_l^I(\overline{a}) = \left\{\ \overline{\lambda} \in \mathbb{C}^n \mid I_l\langle I, a_1 - \lambda_1, \ldots, a_n - \lambda_n\rangle \neq \mathcal{W}\ \right\}\ .$$

Desde el punto de vista de teoría espectral, la ventaja que presenta el espectro

σ_l^I es que es no vacío y para $P = (P_1, \ldots, P_m)$ un sistema de polinomios de n variables, satisface la propiedad del mapeo espectral

$$P(\sigma_l^I(\overline{a})\,) = \sigma_l^I(P(\overline{a}))$$

sobre un sistema $\overline{a}$ de elementos no necesariamente conmutativos.
Como dijimos anteriormente, este nuevo espectro σ_l^I, es una generalización del espectro esencial si consideramos $I = K(X)$ y coincide con el espectro combinado izquierdo clásico σ_l cuando $I = \{0\}$.

Por otro lado, el espectro σ_l^I puede considerarse como función sobre operadores que actuan en el espacio $X = \mathcal{W}/I$ cuya topología no permite deducir directamente las propiedades que se espera de un espectro.

Capítulo 1

Espacios vectoriales topológicos

En éste capítulo se estudiaran algunas definiciones y resultados elementales de la topología general, vamos a definir el concepto de espacio vectorial topológico y abrir paso al concepto de espacio de Fréchet. Posteriormente se estudiará el espacio de Schwartz (el espacio de las funciones que decrecen más rápido en infinito que polinomialmente) como un ejemplo de espacio de Fréchet, pues en el capítulo dos este ejemplo nos brindará herramienta en el estudio de álgebras de Waelbroeck.

1.1. Preliminares de topología

Para dar inicio a este capítulo damos paso a la siguiente

Definición 1.1.1 *Sean X un conjunto y $\mathcal{B}$ un conjunto de subconjuntos de X, invariante bajo intersecciones finitas y uniones arbitrarias, para el cual $X \in \mathcal{B}$ y $\phi \in \mathcal{B}$. Entonces* *a) decimos que $\mathcal{B}$ define una topología τ en X,*

b) el conjunto X provisto de esta estructura se denomina ***Espacio topológico*** *y se designa por (X, τ), y*

c) los conjuntos $B \in \mathcal{B}$ se llaman abiertos y sus complementos $F = X \setminus B$ se llaman cerrados con respecto a la topologia τ.

Definición 1.1.2 *Se dice que un espacio topológico (X, τ) tiene la propiedad de Hausdorff o que es un espacio T_2, si para cada pareja de puntos distintos $x, y \in X$ existen abiertos disjuntos $U, V \in \tau$ tales que $x \in U$ e $y \in V$.*

Definición 1.1.3 *Sea X un espacio topológico con topología τ. Sea β una colección no vacía de elementos de τ tales que*

a) $\cup\{B | B \in \beta\} = X$

b) $\forall\ A \in \tau,\ \exists\ \ \{B_i\}_{i \in I} \subset \beta$ tal que $A = \cup_{i \in I} B_i$

en tal caso decimos que β es una base de la topología τ.

Definición 1.1.4 *Sean X un conjunto y β una familia no vacía de subconjuntos de X. β formará una base de alguna topología en X si se cumple que*

a) $\cup\{B | B \in \beta\} = X$

b) Si $B,\ B' \in \beta,\ \exists\ \{B_i\}_{i \in I} \subset \beta$ tal que $B \cap B' = \cup_{i \in I} B_i$.

1.2. Espacio vectorial topológico

Definición 1.2.1 *Sean V un espacio vectorial sobre un campo no discreto $\mathbb{K}$ (no necesariamente conmutativo) y τ una topología en V, se dice que **el par** (V, τ) **es un espacio vectorial topológico sobre** $\mathbb{K}$ si se cumplen los siguientes axiomas:*

i) $(x, y) \mapsto x + y$ *es continua de* $V \times V$ *en* V

ii) $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ *es continua de* $\mathbb{K} \times V$ *en* V.

Decir que la suma es continua significa que la aplicación $F : V \times V \to V$ dada por $F(x, y) = x+y$ es continua; esto es, si $x, y \in V$ y si U es un entorno de $x + y$, entonces existen entornos U_1, U_2 de x, y respectivamente tales que

$$U_1 + U_2 \subset U.$$

Análogamente, que la multiplicación por escalar sea continua significa que la aplicación de $\mathbb{K} \times V$ en V dada por $(\alpha, x) \mapsto \alpha\, x$ es continua; esto es, para $x \in V, \alpha \in \mathbb{K}$, sea U un entorno de $\alpha\, x$, entonces para algún $\delta > 0$ y algún entorno W de x, se verifica que $\gamma\, W \subset U$ siempre que $|\gamma - \alpha| < \delta$.

Definición 1.2.2 *Sea V un espacio vectorial. Un conjunto $\mathcal{O} \subset V$ es convexo si para $0 \leq t \leq 1$ y para cada $x, y \in \mathcal{O}$ se satisface que*

$$tx - (1 - t)y \in \mathcal{O}.$$

Definición 1.2.3 *Si V es un espacio complejo, decimos que $\mathcal{O} \subset V$ es absolutamente convexo cuando para $|\alpha| + |\beta| \leq 1, \quad x, y \in \mathcal{O}$ se cumple que*

$$\alpha x + \beta y \in \mathcal{O}.$$

Definición 1.2.4 *Decimos que* $\mathcal{O} \subset V$ *es balanceado si para* $x \in \mathcal{O}$ *y* $|\alpha| \leq 1$ *entonces* $\alpha x \in \mathcal{O}$ *y es absorbente si para cada* $x \in \mathcal{O}$ *existe* $t > 0$ *tal que* $x/t \in \mathcal{O}$.

Proposición 1.2.1 *Sea* V *un espacio vectorial topológico. Si* $\mathcal{O}$ *es una vecindad balanceada de cero en* V*, entonces es absorbente.*

Demo: La aplicación $\mathbb{K} \times V \ni (\alpha, x) \to \alpha\, x \in V$ es continua y su imagen contiene a cero. Por la continuidad en cero $\exists\ \delta > 0$ tal que para $|\alpha| < \delta$ se cumple que $\alpha x \in \mathcal{O}$ y como $\mathcal{O}$ es balanceada entonces $|\alpha| x \in \mathcal{O}$.

■

Proposición 1.2.2 *Sea* V *un espacio vectorial topológico. Cada conjunto balanceado y convexo* $\mathcal{O}$ *de* V *es absolutamente convexo.*

Demo: Consideremos $\alpha = re^{i\gamma}$, $\beta = te^{i\theta}$, para $r + t \leq 1$ y $x, y \in \mathcal{O}$. Entonces $e^{i\gamma}x \in \mathcal{O}$ y $e^{i\theta}y \in \mathcal{O}$ por el hecho de que $\mathcal{O}$ es balanceado. Por otro lado, como $\mathcal{O}$ es convexo, tenemos que para $0 \leq s \leq 1$

$$s\, e^{i\gamma}\, x + (1 - s)\ e^{i\theta}\, y \in \mathcal{O}.$$

Considere $s = \dfrac{t}{t+r}$, se tiene que $1 - s = \dfrac{r}{t+r}$ y haciendo

$$u = \frac{t}{t+r} e^{i\gamma} x + \frac{r}{t+r} e^{i\theta} y$$

se concluye que $(t + r)u \in \mathcal{O}$, pues $r + t \leq 1$. Por lo tanto

$$\alpha x + \beta y \in \mathcal{O}.$$

■

Definición 1.2.5 *Sea V un espacio vectorial topológico. Una seminorma en V es una función real $\rho : V \to [0,\infty)$ tal que para $x, y \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ se cumple que*

a) $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

b) $\rho(\alpha\, x) = |\alpha|\, \rho(x)$.

Proposición 1.2.3 *Sea V un espacio vectorial topológico. Sea ρ una seminorma en V. Son equivalentes las siguientes propiedades.*

(a) ρ *es continua en* $0 \in V$,

(b) $M_\rho = \{x \in V \mid \rho(x) < 1\}$ *es abierto en* V, *y*

(c) ρ *es uniformemente continua en* V.

Demo: $(c) \Rightarrow (b)$, por ser $M_\rho = \rho^{-1}[\,[0,1)]$ ya que $[0,1)$ es abierto relativo de $[0,\infty)$. $(b) \Rightarrow (a)$, ya que M_ρ es abierto, entonces para toda $\epsilon > 0$ el conjunto $\epsilon\, M_\rho = \{x \in V \mid \rho(x) < \epsilon\}$ es abierto. $(a) \Rightarrow (b)$, de la definición (1.2.5) inciso a) tenemos que para todo $x, y \in V$, $|\rho(x) - \rho(y)| \leq \rho(x+y)$.

■

Proposición 1.2.4 *Sean V un espacio vectorial topológico y ρ una seminorma en V. Entonces el conjunto $M_\rho = \{x \in V \mid \rho(x) < 1\}$ es absolutamente convexo.*

Demo: Consideremos $|\alpha| + |\beta| \leq 1$ y sean $x, y \in M_\rho$.

$$\rho(\alpha\, x + \beta\, y) \leq |\alpha|\rho(x) + |\beta|\, \rho(y) < 1.$$

Entonces $\alpha\, x + \beta\, y \in M_\rho$.

$\blacksquare$

Definición 1.2.6 *Sean V un espacio vectorial topológico, $C \subset V$ un subconjunto convexo y absorbente, en el sentido de que cada $x \in V$ pertenece a $t\,V$ para algún $t > 0$. Se define para $x \in V$:*

$$\rho_C(x) = \text{ínf}\left\{t > 0 \mid \frac{x}{t} \in C\right\}.$$

*A la función ρ_C se le llama **el funcional de Minkowski** del conjunto C.*

Lema 1.2.1 *Sea V un espacio vectorial topológico. Si $M,\ N \subset V$ convexos, tales que $M \subset N$ y además M es absorbente en V. Entonces*

$$\forall\ x \in V,\ \rho_N \leq \rho_M.$$

Teorema 1.2.1 *Sea $\mathcal{O} \subset V$ un conjunto convexo, absorbente y balanceado. Entonces, el funcional de Minkowski $\rho_{\mathcal{O}}$ es una seminorma.*

Demo: Consideremos el conjunto $H_{\mathcal{O}}(x) = \left\{s > 0 \mid \frac{x}{s} \in \mathcal{O}\right\}$. Por ser $\mathcal{O}$ absorbente, garantizamos que $H_{\mathcal{O}}(x) \neq \phi$. Para demostrar la subaditividad de $\rho_{\mathcal{O}}$ supongamos que para $x, y \in \mathcal{O}$, $\rho_{\mathcal{O}}(x) < t$ y también $\rho_{\mathcal{O}}(y) < r$, es decir $t \in H_{\mathcal{O}}(x)$ y $r \in H_{\mathcal{O}}(y)$, lo cual implica que $\frac{x}{t}, \frac{y}{r} \in \mathcal{O}$ y como $\mathcal{O}$ es convexo, obtenemos que

$$\frac{x+y}{t+r} \in \mathcal{O}.$$

Por tanto $t + r \in H_{\mathcal{O}}(x+y)$ y así $\rho_{\mathcal{O}}(x+y) < t + r$. Tomando el ínfimo con respecto a $t \in H_{\mathcal{O}}(x)$ y $r \in H_{\mathcal{O}}(y)$ llegamos a la desigualdad

$$\rho_{\mathcal{O}}(x+y) \leq \rho_{\mathcal{O}}(x) + \rho_{\mathcal{O}}(y).$$

Por otro lado, ya que $\mathcal{O}$ es balanceado, para $|\alpha| \leq 1$ y $x \in \mathcal{O}$ tenemos que $\alpha\, x \in \mathcal{O}$ o equivalentemente $|\alpha|\, x \in \mathcal{O}$. Así pues

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{O}}(\alpha\, x) &= \text{ínf}\left\{ s > 0 \mid \frac{\alpha\, x}{s} \in \mathcal{O} \right\} \\ &= \text{ínf}\left\{ s > 0 \mid \frac{|\alpha|\, x}{s} \in \mathcal{O} \right\} \\ &= |\alpha|\, \text{ínf}\left\{ \frac{s}{|\alpha|} > 0 \mid \frac{|\alpha|\, x}{s} \in \mathcal{O} \right\} \\ &= |\alpha|\, \rho_{\mathcal{O}}(x) \end{aligned}$$

■

Proposición 1.2.5 *Sea $\mathcal{O} \subset V$ un conjunto absolutamente convexo y abierto. Entonces su funcional de Minkowski $\rho_{\mathcal{O}}$, satisface que*

$$M_{\rho_{\mathcal{O}}} = \{x \in V \mid \rho_{\mathcal{O}}(x) < 1\} = \mathcal{O}.$$

Demo: Si $|\alpha| + |\beta| \leq 1$ y $x, y \in \mathcal{O}$ entonces $\alpha\, x + \beta\, y \in \mathcal{O}$ por ser absolutamente convexo. Luego,

$$\rho_{\mathcal{O}}(\alpha\, x + \beta\, y) \leq |\alpha|\, \rho_{\mathcal{O}}(x) + |\beta|\, \rho_{\mathcal{O}}(y),$$

y como $x \in \mathcal{O}$ y $\mathcal{O}$ es abierto, existe una vecindad U_x de x tal que $U_x \subset \mathcal{O}$. Luego como $x \in U_x$ y la función $F : \mathbb{K} \times V \to V$ es continua, existe $\delta > 0$ tal que para $\varepsilon_x > 0$, $|1 + \epsilon_x| < \delta$, entonces $(1 + \epsilon_x)\, x \in U_x \subset \mathcal{O}$. Lo cual implica que $\dfrac{x}{1 + \epsilon_x} \in \mathcal{O}$. Así pues, $\dfrac{1}{1 + \epsilon_x} \in H_{\mathcal{O}}(x)$ y en consecuencia obtenemos que

$$\rho_{\mathcal{O}}(x) \leq \frac{1}{1 + \epsilon_x}.$$

Análogamente para $y \in \mathcal{O}$. Así pues

$$\rho_{\mathcal{O}}(\alpha\, x + \beta\, y) \leq |\alpha|\, \rho_{\mathcal{O}}(x) + |\beta|\, \rho_{\mathcal{O}}(y) < |\alpha| + |\beta| \leq 1$$

luego entonces $\alpha\, x + \beta\, y \in M_{\rho_{\mathcal{O}}}$, y así $\mathcal{O} \subset M_{\rho_{\mathcal{O}}}$.

Ahora bien, si $x \in M_{\rho_{\mathcal{O}}}$, entonces $\rho_{\mathcal{O}}(x) < 1$ lo cual implica que $1 \in H_{\mathcal{O}}(x)$ y $x \in \mathcal{O}$, finalmente $M_{\rho_{\mathcal{O}}} \subset \mathcal{O}$

■

1.3. Espacio localmente convexo

Sea V un espacio vectorial topológico y sea $\mathcal{F} = \{\mathcal{O}_\alpha\}$ un sistema de conjuntos absorbentes, convexos y balanceados, tal que

1) Para $\mathcal{O}_1, \cdots, \mathcal{O}_n \in \mathcal{F}$, $\exists\ \mathcal{O} \in \mathcal{F}$ tal que $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{O}_n$

2) $\forall x \in V$, $\exists\ \mathcal{O} \in \mathcal{F}$ tal que , $x \notin \mathcal{O}$,

3) $\forall\ \mathcal{O}_\alpha \in \mathcal{F}$, $\exists\ \mathcal{O}_\beta$ tal que $2\mathcal{O}_\beta \subset \mathcal{O}_\alpha$.

Consideremos el conjunto $\{x + \mathcal{O} \mid x \in V, \mathcal{O} \in \mathcal{F}\}$, de la definición 1.1.4 y la propiedad 1) obtenemos que este conjunto es base de alguna topología τ, en V. La propiedad 2) asegura que esta topología τ es de Hausdorff. Finalmente por propiedad 3) tenemos que la operación suma es continua.

Definición 1.3.1 *La topología anterior τ se denomina **topología localmente convexa**. Así el par (V, τ) se dirá **espacio vectorial topológico localmente convexo** (o simplemente espacio localmente convexo).*

Sea V un espacio vectorial topológico. Decimos que el ***dual topológico*** de V es el espacio vectorial de los funcionales lineales continuos en V y lo denotamos por V'. El espacio V' es un subespacio del dual algebraico V^* de V.

Ahora, para definir un sistema de seminormas en V que conduzca a una topología localmente convexa, es suficiente introducir como primer sistema a la familia

$$\mathcal{P} = \{\ \rho_{\mathcal{O}} \mid \mathcal{O} \in \mathcal{F}\}.$$

Por la propiedad 1) anterior y por el lema(1.2.1) la familia $\mathcal{P}$ satisface que $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \rho_{\mathcal{O}_1}, \ldots \rho_{\mathcal{O}_n} \in \mathcal{P},\ \exists\ \mathcal{O} \in \mathcal{F}$ tal que

$$\rho_{\mathcal{O}_i} \leq \rho_{\mathcal{O}},$$

en este caso decimos que la familia de seminormas es **filtrante**. Además, si para cada $x \neq 0$ existe $\mathcal{O} \in \mathcal{F}$ tal que $\rho_{\mathcal{O}}(x) \neq 0$ decimos que la familia es separante o simplemente que separa puntos, ya que el dual topológico V' separa puntos.

Teorema 1.3.1 ***Hanh-Banach***
Sea V un espacio vectorial, provisto de una seminorma $\rho : V \to \mathbb{R}_+$. Sea E un subespacio de V y g un funcional lineal en E tal que

$$|g(x)| \leq \rho(x).$$

Entonces existe un funcional lineal f sobre V tal que

$$f|_E = g \ \text{y además}\ \ |f(x)| \leq \rho(x).$$

Corolario 1.3.1 *Si V es un espacio loc. convexo, entonces para cada $x \neq 0$ en V existe un funcional lineal $\varphi : V \to \mathbb{K}$ tal que $\varphi(x) = 1$.*

Demo: Para cada $x \in V$ consideramos el subespacio $E = \mathbb{K}x$ y sea ρ una seminorma en V. Definamos la siguiente forma lineal: $\gamma(\alpha x) := \alpha\rho(x)$. Por el teorema de Hahn-Banach, podemos extender la forma γ a todo el espacio V de forma tal que la relación, $|\gamma(y)| \leq \rho(y)$ es válida $\forall\ y \in V$. Tenemos entonces que, $|\gamma(\alpha x)| = |\alpha|\rho(x) = \rho(\alpha x)$. Definiendo $\varphi(x) = \dfrac{\gamma(x)}{\rho(x)}$ queda demostrado el corolario.

$\blacksquare$

Sea V un espacio localmente convexo y considere un sistema $\mathcal{F} = \{\mathcal{O}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de abiertos numerable. Tenemos entonces un sistema de seminormas

$$P = \{\rho_n := \rho_{\mathcal{O}_n}\}$$

el cual es numerable. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos las semimétricas

$$m_n(x, y) := \rho_n(x - y),$$

entonces la función

$$m(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_n(x, y)}{2^n(1 + m_n(x, y))}$$

es una métrica que define una topología equivalente a la definida por $\mathcal{F}$.

1.4. Espacio de Fréchet

Definición 1.4.1 *Un espacio vectorial topológico se dice metrizable si su topología esta definida por una base numerable formada por conjuntos convexos y equilibrados en sucesion decreciente. Análogamente, un espacio localmente convexo es metrizable si su topología esta generada por un sistema numerable de seminormas y de ahí por una sucesión creciente de seminormas,* $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

.

Definición 1.4.2 *Un espacio vectorial topológico, localmente convexo, metrizable y completo se denomina* ***Espacio de Fréchet****.*

Evidentemente, todo espacio normable y completo (y en consecuencia todo espacio de Banach) es un espacio de Fréchet.

Definición 1.4.3 *Sea V un espacio métrico, se dice que V es* ***localmente completo*** *si cada punto tiene una vecindad completa, es decir, si $\forall\ x \in \mathcal{A}$, $\exists\ B(x,r)$ tal que $\overline{B(x,r)}$ es completa.*

1.5. Ejemplo de espacio de Fréchet

Ejemplo 1.5.1 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto y no vacío. Consideremos el espacio vectorial*

$$C^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{K} \mid \forall\ \alpha \in \mathbb{N}_0^k,\ \exists\ D^\alpha f \textit{ en } \Omega \textit{ y es continua } \}$$

Aquí, $\mathbb{N}_0^k = \mathbb{N}_0 \times \cdots \times \mathbb{N}_0$ y los elementos $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ se llaman multiíndices.

Considerando para cada multiíndice α el operador diferencial

$$D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial\, x_1^{\alpha 1}, \ldots, \partial\, x_n^{\alpha_k}},$$

cuyo orden es $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k$.

Sea $f \in C^\infty(\Omega)$ y $\overline{x} \in \Omega$, se tiene que

$$(D^\alpha f)(\overline{x}) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x_1, \ldots, x_k)}{\partial\, x_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial\, x_n^{\alpha_k}}$$

Para cada multiíndice α, considere la siguiente seminorma

$$\rho_\alpha(f) = \sup_{\overline{x}\in\Omega} \left| \frac{\partial^{|\alpha|} f(x_1,\ldots,x_k)}{\partial x_1^{\alpha_1},\ldots,\partial x_n^{\alpha_k}} \right|.$$

Sea $f \in C^\infty(\Omega)$. Para cada $\varepsilon > 0$, cada compacto $K \subset \Omega$ y cada $k \in \mathbb{N}$, definimos

$$\mathcal{O}_{(f,\varepsilon,K,k)} = \{g \in C^\infty(\Omega) \mid \rho_\alpha(f-g) < \varepsilon, \forall\, \overline{x} \in K, \forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^k \text{ tal que } |\alpha| < k\}$$

Tenemos entonces que la familia $\{\mathcal{O}_{(f,\varepsilon,K,k)}\}$ es una base para una topología τ en $C^\infty(\Omega)$, la cual es de convergencia uniforme en compactos, pero además, también estamos considerando sus derivadas de orden $|\alpha|$. Si fijamos f y hacemos variar ε, K y k, tenemos entonces una base de entornos de f la cual es separada y tenemos entonces un espacio vectorial topológico. Además, como cada conjunto $\mathcal{O}_{(0,\varepsilon,K,k)}$ es convexo, se tiene que $C^\infty(\Omega)$ es un espacio localmente convexo, solo resta ver que es metrizable.
En efecto, considere una sucesión exhaustiva de subconjuntos compactos de Ω, digamos $\{K_n\}$; mediante la familia de seminormas

$$\rho_{\alpha,K_n}(f) = \sup_{\overline{x}\in K_n} \left\{ \left| \frac{\partial^{|\alpha|} f(x_1,\ldots,x_k)}{\partial x_1^{n_1},\ldots,\partial x_n^{n_k}} \right| \;:\; |\alpha| < n, n \in \mathbb{N} \right\}$$

se puede generar la topología de espacio vectorial topológico, ya que cada conjunto $\{f \mid \rho_n(f) < \varepsilon\}$ es un entorno de cero. Reciprocamente, dado un entorno de cero $\mathcal{O}_{(0,\varepsilon,K,k)}$, es suficiente con elegir $n > k$ y $K_n \supset K$ para obtener que

$$\mathcal{O}_{(0,\varepsilon,K,k)} \supset \{f \mid \rho_n(f) < \varepsilon\}$$

así pues, podemos obtener una base local que sea numerable de entornos del origen, lo cual garantiza la metrizabilidad del espacio $C^\infty(\Omega)$. ∎

Ahora bien, observemos que si $\{f_n\}$ *es una sucesion de Cauchy en* $C^\infty(\Omega)$, *para cada multiíndice* α *se tiene que* $D^{|\alpha|}f_n$ *es una sucesión de Cauchy en cada compacto, luego existe una función continua* g_α *tal que* $D^\alpha f_n \to g_\alpha$ *uniformemente en compactos. Así pues,* $g_0 \in C^\infty(\Omega)$ *y* $D^\alpha g_0 = g_\alpha$, *luego entonces* $f_n \to g_0 \in C^\infty(\Omega)$. *Por lo tanto* $C^\infty(\Omega)$ *es completo.*

Finalmente, tenemos que el espacio $C^\infty(\Omega)$ *es un espacio de Fréchet.*

Capítulo 2

Álgebras de Waelbroeck

2.1. Álgebra topológica

Definición 2.1.1 *Un espacio vectorial lineal* $\mathcal{A}$ *sobre un campo* $\mathbb{K}$ *no discreto y no necesariamente conmutativo, junto con la aplicación* $f : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ *dada por* $f(x, y) = xy$*, la cual para todo* x, y, $z \in \mathcal{A}$*, y* $\alpha \in \mathbb{K}$ *satisface la siguientes condiciones*

1) $(xy)z = x(yz)$

2) $x(y + z) = xy + zy, \ (x + y)z = xz + yz;$

3) $(\alpha x)y = \alpha(xy) = x(\alpha y)$

es llamado un álgebra.

Si además en el álgebra existe un elemento $e \neq 0$ tal que $xe = x = ex$ para todo $x \in \mathcal{A}$ entonces tenemos un álgebra con unidad e.

Definición 2.1.2 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra. Se dice que $\mathcal{A}$ es un* ***álgebra topológica*** *si es un espacio vectorial topológico tal que la aplicación*

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \ni (x, y) \mapsto x\, y \in \mathcal{A}$$

es continua.

Sea $\{\mathcal{O}_\alpha\}$ una base de vecindades de cero para una topología de $\mathcal{A}$. La continuidad en cero significa que para todo $\mathcal{O}_\alpha$, existen $\mathcal{O}_{\beta_1}, \mathcal{O}_{\beta_2}$ tales que

$$\mathcal{O}_{\beta_1}\, \mathcal{O}_{\beta_2} = \{x\, y : x \in \mathcal{O}_{\beta_1},\ y \in \mathcal{O}_{\beta_2}\} \subset \mathcal{O}_\alpha,$$

considerando $\mathcal{O}_\beta \subset \mathcal{O}_{\beta_1} \cap \mathcal{O}_{\beta_2}$, queda que

$$\mathcal{O}_\beta^2 \subset \mathcal{O}_\alpha\ .$$

Esta ultima es una condición necesaria y suficiente para la continuidad del producto; esto es , $\forall\ \mathcal{O}_\alpha,\ \exists\ \mathcal{O}_\beta$ en la familia de vecindades de cero, tal que para $x, y \in \mathcal{A}$ se cumple que $\rho_{\mathcal{O}_\alpha}(xy) \leq \rho_{\mathcal{O}_\beta}(x)\rho_{\mathcal{O}_\beta}(y)$ si y solo si la aplicación producto es continua.

Definición 2.1.3 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra. Sea $a \in \mathcal{A}$, si existen $b \in \mathcal{A}$ tal que $a\, b = b\, a = e$ se dice que b es el inverso de a y denotamos $b = a^{-1}$.*

Ahora veamos la importancia de la metrizabilidad de las álgebras para el estudio de la continuidad del inverso $x \mapsto x^{-1}$.

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra topológica con unidad e. Denotamos por $G(\mathcal{A})$ al grupo de elementos invertibles en el álgebra $\mathcal{A}$. En los grupos localmente completos métricos la continuidad de la multiplicación implica la continuidad del inverso, como veremos en el siguiente teorema el cual es un resultado de Banach.

Teorema 2.1.1 *Sea G un grupo métrico localmente completo. Supongamos que las aplicaciones*

$$x \mapsto a\,x \quad y \quad x \mapsto x\,a$$

son aplicaciones continuas para toda a. Entonces la aplicación

$$x \mapsto x^{-1}$$

es continua.

Demo: Es suficiente probar la continuidad en la identidad e.
Sea $\{x_n\} \to e$. Primero se probará que para una subsucesión $\{x_k\}$ se cumple que $\{x_k^{-1}\} \to e$.
Sea $\overline{B(e,r)}$ compacta. Sea $x_k = x_{n_k} \in \overline{B(e,r)}$. Construimos dos sucesiones (P_k) , $(q_{s,k})$ tal que $P_1 = x_1 = q_{s,1}$, supongamos que ya tenemos $P_1, \dots, P_k$ y $q_{s,1}, \dots, q_{s,k}$ tales que $P_i = x_1\,x_2 \dots x_i \quad \forall i = 1, \dots k$

$$q_{s,k} = \begin{cases} P_k x_s^{-1} & s \le k \\ P_k & s > k \end{cases}$$

con

$$d(P_k, P_{k+1}) \le C\,2^{-k-1}$$

$$d(q_{s,k}, q_{s,k+1}) \le C\,2^{-k-1}$$

y como $q_{s,k} = x_1 x_2 \dots x_k\,x_s^{-1}$, en particular tenemos que

$$q_{k,k} = x_1\,x_2 \dots x_k\,x_{k-1} = P_{k-1}$$

así pues

$$q_{s,k+1} = x_1 \, x_2 \ldots \, x_{k+1} \, x_s^{-1}.$$

Por tanto existen $P_{k+1}, q_{s,k+1}$ que satisfacen las desigualdades. Así pues la sucesión $\{P_k\}$ es de Cauchy y por tanto converge. Definimos así los siguientes límites

$$P = \lim_{k\to\infty} P_k$$

para cada s existe

$$q_s = \lim_{k\to\infty} q_{s,k}$$

además

$$d(P, P_k) \leq C \, 2^{-k}, \;\; d(q_s, q_{s,k}) \leq 2^{-k}$$

y ya que $q_{s,s} = P_{s-1}$, obtenemos que

$$d(P, q_s) \leq d(P, q_{s,s}) + d(q_{s,s}, q_s) = d(P, P_{s-1}) + d(P_{s-1}, P) \leq C \, 2^{-s-1} + C 2^{-s}.$$

Por lo tanto

$$P = \lim_{s\to\infty} q_s \; .$$

Luego

$$x_s^{-1} = P^{-1} q_s \to e$$

■

2.2. Q-álgebra

Definición 2.2.1 *Un álgebra topológica $\mathcal{A}$ con identidad* **e***, es llamada* ***Q-álgebra*** *si $G(\mathcal{A})$ es abierto en $\mathcal{A}$.*

Corolario 2.2.1 *Sea $\mathcal{A}$ una Q-álgebra metrizable completa. Entonces el inverso es continuo.*

Demo: En un espacio métrico completo cada abierto es localmente completo. G($\mathcal{A}$) es abierto metrizable entonces es localmente completo. Por teorema (2.1.1) el inverso es continuo.

$\blacksquare$

2.3. El espacio de Schwartz

Ahora pasamos a definir y estudiar el llamado **espacio de Schwartz** ($\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) (llamado así en honor a su creador L. Schwartz) (1915 - 2002), como el subespacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ dado por

$$\left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \ : \ \sup_{\overline{x}\in\mathbb{R}^n} \left| x_1^{\alpha_1}\, x_2^{\alpha_2} \, \ldots \, x_n^{\alpha_n} \frac{\partial^\beta f(\overline{x})}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}} \right| < \infty \, , \ \forall \ \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n \right\}.$$

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es el espacio de funciones cuyas derivadas parciales de todos los órdenes tienden en ∞ a cero más rápido que polinomialmente. Hasta el momento tenemos que el espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dotado de la multiplicación puntual es un álgebra, o en su respectivo caso, álgebra convolutiva, si en lugar del producto usual de funciones dotamos al espacio de Schwartz con la convolución como producto del espacio.

Para cualesquiera que sean α, β multiíndices, se define la familia de seminormas $\{P_{\alpha,\beta}\}$, donde

$$P_{\alpha,\beta} = \sup_{\overline{x}\in\mathbb{R}^n} \left| x_1^{\alpha_1}\, x_2^{\alpha_2} \, \ldots \, x_n^{\alpha_n} \frac{\partial^\beta f(\overline{x})}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}} \right|$$

Al igual que en el ejemplo (1.5.1), sea $\varepsilon > 0$, considere la familia $\{\mathcal{O}_{(\varepsilon,\alpha,\beta)}\}$, donde

$$\mathcal{O}_{(\varepsilon,\alpha,\beta)} = \{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mid P_{(\alpha,\beta)}(f) < \varepsilon\}$$

la cual es una base para una topología τ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de entornos de cero que es separada y en la cual cada $\mathcal{O}_{(\varepsilon,\alpha,\beta)}$ es convexo. Si consideramos $\varepsilon = \frac{1}{N}$ para cada $N \in \mathbb{N}$ tal que $|\alpha|, |\beta| < N$ se tiene que la topología τ es inducida por la familia numerable de seminormas $\{P_{\alpha,\beta}\}$, tenemos que el espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es metrizable, ahora para probar que es completo. Sea $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^k$ las funciones

$$g_i = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_k} \frac{\partial^{|\beta|} f_i(\overline{x})}{\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_n^{\beta_k}}$$

convergen uniformemente en $\mathbb{R}^n$ a una función acotada g cuando $i \to \infty$, es decir,

$$g(x) = \lim_{i\to\infty} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_k} \frac{\partial^{|\beta|} f_i(x)}{\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_n^{\beta k}} \ .$$

Resulta que

$$g(x) = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\beta_k} \frac{\partial^{|\beta|} f(\overline{x})}{\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_n^{\beta_k}}$$

donde

$$\frac{\partial^{|\beta|} f(\overline{x})}{\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_n^{\beta_k}} = \lim_{i\to\infty} \frac{\partial^{|\beta|} f_i(x)}{\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_n^{\beta k}}$$

y por consiguiente,

$$\lim_{i\to\infty} f_i(x) = f(x) \ .$$

En conclusión $\{f_i\}$ converge a f en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, así pues, este espacio es completo. Por lo tanto $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Frechét.

2.4. La transformada de Fourier en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Sea $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ el espacio de Schwartz de las funciones que decrecen más rápido en infinito que polinomialmente. Considere $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ y $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, para cualquier polinomio $Q(\overline{x})$, lo que se desea es que

$$Q(\overline{x})\frac{\partial^{|\beta|} f(\overline{x})}{\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_n^{\beta_k}}$$

sea acotada en $\mathbb{R}^n$, para cualquiera que sea el multi-índice β. Puesto que esta condición se cumple para $(1+|x|^2)^N Q(\overline{x})$ en lugar de $Q(\overline{x}\,)$, (recordando que $|\overline{x}|^2 = \sum x_i^2$), para todo $N = 0, 1, 2, 3, \ldots$, resulta que toda

$$Q(\overline{x})\frac{\partial^{|\beta|} f(\overline{x})}{\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_n^{\beta_k}}$$

pertenece a $L^1(\mathbb{R}^n)$; en particular $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$.

Definición 2.4.1 *Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Se define la transformada de Fourier de la función f, como $\mathcal{F}[f] : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ dada por*

$$\mathcal{F}[f](y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i y \cdot x} dx \ .$$

El siguiente teorema nos dice que podemos recuperar la función f mediante su transformada de Fourier. Omitimos la demostración por fines prácticos.

Teorema 2.4.1 ***(Fórmula de inversión)**. Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}[f](y)\, e^{2\pi i x \cdot y} dy$$

para toda $x \in \mathbb{R}^n$.

Note que

$$f(-x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}[f](y)\, e^{-ix\cdot y} dy = \mathcal{F}[\mathcal{F}[f]\,](x).$$

Teorema 2.4.2 *Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Para* $\dfrac{\partial^{|\beta|} f(x)}{\partial\, x_1^{\beta_1}, \ldots, \partial\, x_n^{\beta_n}}$*, la transformada de Fourier está dada por*

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial\, x_1^{\beta_1}, \ldots, \partial\, x_n^{\beta_n}}\right](y) = (2\pi i)^{|\beta|}\, y^{\beta} \mathcal{F}[f](y)\ .$$

Demo: Escribimos

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial\, x_1^{\beta_1}, \ldots, \partial\, x_n^{\beta_n}}\right](y) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^{|\beta|} f(x)}{\partial\, x_1^{\beta_1}, \ldots, \partial\, x_n^{\beta_n}} e^{-2\pi i y\cdot x} dx$$

utilizando integración por partes, tenemos que;

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^{|\beta|} f(x)}{\partial\, x_1^{\beta_1}, \ldots, \partial\, x_n^{\beta_n}} e^{-2\pi i y\cdot x} dx &= (-1)^{|\beta|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial^{|\beta|} e^{-2\pi i y\cdot x}}{\partial\, x_1^{\beta_1}, \ldots, \partial\, x_n^{\beta_n}} dx \\
&= (-1)^{|\beta|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) (-2\pi i)^{|\beta|} y^{\beta} e^{-2\pi i y\cdot x} dx \\
&= (2\pi i)^{|\beta|}\, y^{\beta} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i y\cdot x} dx
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial\, x_1^{\beta_1}, \ldots, \partial\, x_n^{\beta_n}}\right](y) = (2\pi i)^{|\beta|}\, y^{\beta} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i y\cdot x} dx = (2\pi i)^{|\beta|}\, y^{\beta} \mathcal{F}[f][y]$$

$\blacksquare$

Teorema 2.4.3 *Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Entonces, la derivada* $\dfrac{\partial^{|\beta|} \mathcal{F}[f](y)}{\partial y_1^{\beta_1} \cdots \partial y_n^{\beta_n}}$ *esta dada por*

$$\frac{\partial^{|\beta|} \mathcal{F}[f](y)}{\partial y_1^{\beta_1} \cdots \partial y_n^{\beta_n}} = \mathcal{F}[(-2\pi i)^{|\beta|} y^{\beta} f](y)\ .$$

Demo: Escribimos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{|\beta|}\mathcal{F}[f](y)}{\partial y_1^{\beta_1}\cdots\partial y_n^{\beta_n}} &= \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial y_1^{\beta_1}\cdots\partial y_n^{\beta_n}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i y\cdot x}dx\right)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\frac{\partial^{|\beta|}e^{-iy\cdot x}}{\partial y_1^{\beta_1}\cdots\partial y_n^{\beta_n}}dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(-2\pi i)^{|\beta|}y^{\beta}e^{-2\pi i y\cdot x}dx\\ &= \mathcal{F}[(-2\pi i)^{|\beta|}y^{\beta}f](y)\end{aligned}$$

■

Teorema 2.4.4 *Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Se cumple que la transformada de Fourier $\mathcal{F}[f] : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ es una función continua y acotada en $\mathbb{R}^n$. Además*

$$\lim_{|y|\to\infty} \mathcal{F}[f](y) = 0 \ .$$

Demo: Para demostrar la continuidad de $\mathcal{F}[f]$ basta con considerar la siguiente desigualdad

$$|\mathcal{F}[f](y) - \mathcal{F}[f](y_0)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\ f(x)(e^{-2\pi i x\cdot y} - e^{-2\pi i x\cdot y_0}\ )\ |\, dx\,,$$

tomemos un sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to y_0$ y obtenemos que el integrando converge puntualmente a cero, además esta acotado por $2\,|f(x)|$. Ocupando el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} |\ f(x)\ (e^{-2\pi i x\cdot y_n} - e^{-2\pi i x\cdot y_0}\ )|\, dx\ = 0$$

el resultado se sigue.

Para demostrar que es acotada, solo hay que observar que

$$|\mathcal{F}[f](y)| \leq ||f||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \quad \forall \; y \in \mathbb{R}^n$$

Finalmente, para demostrar que $\mathcal{F}[f](y)$ tiende a cero cuando $|y| \to \infty$, escribimos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f](y) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-2\pi i x\cdot y}\, dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-2\pi i (x\cdot y + \frac{1}{2})}\, dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-2\pi i \left(\left(x + \frac{y}{2|y|^2}\right)\cdot y\right)}\, dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} f\left(z - \frac{y}{2|y|^2}\right)\, e^{-2\pi i z\cdot y}\, dz
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
2|\mathcal{F}[f](y)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left(f(z) - f\left(z - \frac{y}{2|y|^2}\right)\right)\, e^{-2\pi i z\cdot y}\, dz \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| f(z) - f\left(z - \frac{y}{2|y|^2}\right) \right| dz
\end{aligned}$$

ya que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, se sabe que es continua en la norma $|| \cdot ||_{L^1}$. Por lo tanto

$$\lim_{|y|\to\infty} \left|\left| f(z) - f\left(z - \frac{y}{2|y|^2}\right) \right|\right|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 0$$

y el resultado se sigue.

■

Teorema 2.4.5 *Sea $\mathcal{F}$ la transformada de Fourier y $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ el espacio de Schwartz. Entonces $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Demo: Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, se tiene que $(-2\pi i)^{|\alpha|}\, x^\beta f$ pertenece a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Como la transformada de Fourier es continua, en virtud del teorema (2.4.3) podemos afirmar que $\dfrac{\partial^{|\alpha|}\mathcal{F}[f](y)}{\partial y_1^{\alpha_1}\cdots\partial y_n^{\alpha_n}}$ es continua cualquiera que sea el multiíndice α o, equivalentemente, que $\mathcal{F}[f]\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ahora considérese $P(x)$ un polinomio, por el teorema (2.4.3) y luego por teorema (2.4.2) queda que

$$\begin{aligned}
P(x)\,\frac{\partial^{|\alpha|}\mathcal{F}[f](x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}} &= \sum C_\beta x^\beta\,\mathcal{F}[(-2\pi i)^{|\alpha|}y^\alpha f](x)\\
&= \mathcal{F}\left[\sum C_\beta(-2\pi i)^{|\alpha|-|\beta|}\frac{\partial^{|\beta|}\,(\,y^\alpha f\,)}{\partial x_1^{\beta_1}\cdots\partial x_n^{\beta_n}}\right](x)\\
&= \mathcal{F}\left[\frac{\partial^{|\beta|}\,(\,\sum C_\beta(-2\pi i)^{|\alpha|-|\beta|}y^\alpha f\,)}{\partial x_1^{\beta_1}\cdots\partial x_n^{\beta_n}}\right](x)
\end{aligned}$$

donde C_β son los coeficientes del polinomio, y ya que

$$\frac{\partial^{|\beta|}\,(\,\sum C_\beta(-2\pi i)^{|\alpha|-|\beta|}y^\alpha f\,)}{\partial x_1^{\beta_1}\cdots\partial x_n^{\beta_n}}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

resulta que la última expresión de las igualdades anteriores se anula en infinito en virtud del teorema anterior (2.4.4), y así concluimos que $P(x)\,\dfrac{\partial^{|\alpha|}\mathcal{F}[f](x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$ es acotada , lo cual implica que $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,)\subset\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Ahora, de la fórmula de inversión, queda que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\subset\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,)$, por el hecho de que para toda $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{F}[f]\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tenemos que

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}[f]\,](x)=f(-x).$$

$$\blacksquare$$

Definición 2.4.2 *Para $f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se define la convolución $[f*g](y)$ dada por*

$$[f*g](y)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)g(y-x)dx\ .$$

Teorema 2.4.6 ***(De la convolucion)*** *Sean $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. La transformada de Fourier satisface*

$$\mathcal{F}[f * g](y) = \mathcal{F}[f](y) \cdot \mathcal{F}[g](y) \ .$$

Demo: Se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f * g](y) &= \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x)\, e^{-2\pi i x \cdot y} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(\zeta)\, g(x - \zeta) d\zeta \right) e^{-2\pi i x \cdot y} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(\zeta) e^{-2\pi i\, \zeta \cdot y} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x - \zeta) e^{-2\pi i (x - \zeta) \cdot y} dx \right) d\zeta \\
&= \mathcal{F}[f](y)\, \mathcal{F}[g](y)
\end{aligned}$$

■

Sea $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ el espacio de Schwartz. Denotamos por $M_{2\times 2}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ el álgebra de las matrices cuadradas de 2×2 con entradas en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Sean $F, G \in M_{2\times 2}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$. Definimos la convolución para las matrices F, G de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
F * G\,(y) &= \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} (y) \\
&= \begin{pmatrix} (f_{11} * g_{11})(y) + (f_{12} * g_{21})(y) & (f_{11} * g_{12})(y) + (f_{12} * g_{22})(y) \\ (f_{21} * g_{11})(y) + (f_{22} * g_{21})(y) & (f_{21} * g_{12})(y) + (f_{22} * g_{22})(y) \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Definición 2.4.3 *Sea $F \in M_{2\times 2}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$. Definimos la transformada de Fourier para F como sigue*

$$\mathcal{F}[F](y) = \begin{pmatrix} \mathcal{F}[f_{11}](y) & \mathcal{F}[f_{12}](y) \\ \mathcal{F}[f_{21}](y) & \mathcal{F}[f_{22}](y) \end{pmatrix} .$$

Teorema 2.4.7 ***(De la convolución para matrices cuadradas)*** *Sean $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ el espacio de Schwartz y $M_{2\times 2}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ el álgebra de matrices cuadradas de 2×2 con entradas en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Entonces, para todas $F, G \in M_{2\times 2}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$, la transformada de Fourier $\mathcal{F}[F] : \mathbb{R}^n \to M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ satisface*

$$\mathcal{F}[F * G](y) = \mathcal{F}[F](y) \cdot \mathcal{F}[G](y) \ .$$

Demo: Sean $F, G \in M_{2\times 2}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ dadas por

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}, \ G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

Por las definición (2.4.2), la linealidad de la transformada de Fourier y luego por definición (2.4.3) resulta que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[F * G](y) &= \begin{pmatrix} \mathcal{F}[(f_{11} * g_{11})(y) + (f_{12} * g_{21})](y) & \mathcal{F}[(f_{11} * g_{12})(y) + (f_{12} * g_{22})](y) \\ \mathcal{F}[(f_{21} * g_{11})(y) + (f_{22} * g_{21})](y) & \mathcal{F}[(f_{21} * g_{12})(y) + (f_{22} * g_{22})](y) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathcal{F}[f_{11} * g_{11}](y) + \mathcal{F}[f_{12} * g_{21}](y) & \mathcal{F}[f_{11} * g_{12}](y) + \mathcal{F}[f_{12} * g_{22}](y) \\ \mathcal{F}[f_{21} * g_{11}](y) + \mathcal{F}[f_{22} * g_{21}](y) & \mathcal{F}[f_{21} * g_{12}](y) + \mathcal{F}[f_{22} * g_{22}](y) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathcal{F}[f_{11}]\mathcal{F}[g_{11}] + \mathcal{F}[f_{12}]\mathcal{F}[g_{21}] & \mathcal{F}[f_{11}]\mathcal{F}[g_{12}] + \mathcal{F}[f_{12}]\mathcal{F}[g_{22}] \\ \mathcal{F}[f_{21}]\mathcal{F}[g_{11}] + \mathcal{F}[f_{22}]\mathcal{F}[g_{21}] & \mathcal{F}[f_{21}]\mathcal{F}[g_{12}] + \mathcal{F}[f_{22}]\mathcal{F}[g_{22}] \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathcal{F}[f_{11}](y) & \mathcal{F}[f_{12}](y) \\ \mathcal{F}[f_{21}](y) & \mathcal{F}[f_{22}](y) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \mathcal{F}[g_{11}](y) & \mathcal{F}[g_{12}](y) \\ \mathcal{F}[g_{21}](y) & \mathcal{F}[g_{22}](y) \end{pmatrix} \\
&= \mathcal{F}[F](y) \cdot \mathcal{F}[G](y)
\end{aligned}$$

■

El estudio del álgebra $M_{2\times 2}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ resulta muy interesante pues es un ejemplo de álgebra de Waelbroeck no conmutativa.

2.5. La unitización de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Evidentemente la función constante 1 no pertenece al espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, por lo tanto no tenemos unidad, al suceder esto no podemos hablar sobre elementos invertibles en el espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sin embargo la forma natural de agregar la unidad es definiendo la unitización $\tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$\tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \oplus \mathbb{C} = \{f(\overline{x}) + z : f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ z \in \mathbb{C}\}$$

En este espacio ya podemos hablar de elementos invertibles.

Para todas $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $z, w \in \mathbb{C}$ tenemos que $\tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$ es un álgebra con unidad, dotada con las operaciones algebraicas

1. $(f + z) \cdot (g + w) = (fg + wf + zg) + (zw) \in \tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$

2. $(f + z) + (g + w) = (f + g) + (z + w) \in \tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$

3. $w \cdot (f + z) = wf + wz \in \tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$

En el cual el elemento unidad está dado por $e = 0_{\mathcal{S}} + 1$ y para el cual tenemos un sistema de seminormas inducida por las seminormas de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$\tilde{P}_{\alpha,\beta}(f + z) = P_{\alpha,\beta}(f) + |z|,$$

la cual genera una topología como ya hemos visto antes.

Corolario 2.5.1 $\tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$ *es un álgebra topológica.*

Proposición 2.5.1 *Para* $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *se tiene que*

$$\tilde{P}_{\alpha,\beta}((f + z)\,(g + w)) \leqslant \tilde{P}_{\alpha,\beta}(f + z)\,\tilde{P}_{\alpha,\beta}(g + w).$$

2.6. Álgebras de Waelbroeck

A continuación vamos a estudiar algunas de las propiedades muy importantes que se cumplen para Q-álgebras y álgebras de Waelbroeck las cuales van a ser utilizadas o mejor dicho serán el fundamento principal para la teoría del próximo capitulo. Recordando de la teoría clásica de álgebras topológicas, si I es un ideal bilateral en un álgebra topológica $\mathcal{A}$, entonces el espacio cociente $\mathcal{A}/I$ provisto de las estructuras algebraicas y topológicas naturales es también un álgebra topológica. Si $\mathcal{A}$ es una Q-álgebra, el espacio cociente es también una Q-álgebra. Sin embargo cuando existe continuidad del inverso en un álgebra y pasamos al espacio cociente no necesariamente se conserva dicha propiedad, pero es precisamente en las álgebras de Waelbroeck donde se preserva esta última propiedad.

Definición 2.6.1 *Sea $\mathcal{W}$ una Q-álgebra. $\mathcal{W}$ es llamada **Álgebra de Waelbroeck** si la aplicación $G(\mathcal{W}) \ni x \mapsto x^{-1} \in G(\mathcal{W})$ es continua.*

El siguiente resultado puede encontrarse en [?]

Proposición 2.6.1 *Sea $\mathcal{W}$ una Q-álgebra. Sea I un ideal (izquierdo, derecho o bilateral). Entonces $\overline{I}$, la cerradura de I, es un ideal propio. Más aún, cada ideal esta contenido en un ideal maximal.*

Demo: Sea I un ideal propio en $\mathcal{A}$. Cada ideal propio consiste de elementos no invertibles, entonces $I \subset G(\mathcal{A})^c$ el cual es cerrado. Por tanto $\overline{I}$ consiste de elementos no invertibles. Ahora bien, si $x_\alpha \in I$ es una sucesión tal que $x_\alpha \to x$, entonces para cada $a \in \mathcal{A}$, $I \ni a\,x_\alpha \mapsto a\,x$. Entonces, $a\,x \in \overline{I}$. Por lo tanto $\overline{I}$ es ideal y es propio porque no contiene a la unidad.

Ahora, consideremos $M_I = \{J \ : \ I \subset J, J \ ideal\}$ con orden (parcial) de contención. Si $\{J_\alpha\}_\alpha \subset M_I$ es linealmente ordenada entonces $\tilde{J} = \cup_\alpha J_\alpha$ es un ideal, luego por el lema de Kuratowski-Zorn existe un ideal maximal.

$$\blacksquare$$

Corolario 2.6.1 *Sea $\mathcal{W}$ un álgebra de Waelbroeck localmente convexa. Cada ideal maximal en $\mathcal{W}$ es cerrado.*

Definición 2.6.2 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra con unidad. Sea $G(\mathcal{A})$ el grupo de elementos invertibles. Para $a \in \mathcal{A}$ se define el espectro de a como el conjunto*

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ (a - \lambda\, e) \notin G(\mathcal{A})\}$$

Proposición 2.6.2 *Sean $\mathcal{A}$ un álgebra con identidad e, $a \in \mathcal{A}$ tal que $\|a\| < 1$ entonces $e + a \in G(\mathcal{A})$ y además el inverso esta dado por $(e + a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a^n$.*

Teorema 2.6.1 *Sea $\mathcal{W}$ un álgebra de Waelbroeck localmente convexa . Para cada $x \in \mathcal{W}$ el espectro $\sigma(x) \neq \phi$ y compacto.*

Demo: Sea $\mathcal{W}$ un álgebra de Waelbroeck con unidad. Sean $x \in \mathcal{W}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $|\lambda| > \|x\|$, entonces $e - \frac{x}{\lambda} \in G(\mathcal{W})$. Por lo tanto, si $|\lambda| \leq \|x\|$ se tiene que $x - \lambda\, e = -\lambda(e - \frac{x}{\lambda}) \notin G(\mathcal{W})$. Así pues obtenemos que si $\lambda \in \sigma(x)$ entonces $|\lambda| \leq \|x\|$ y por lo tanto el espectro $\sigma(x)$ es acotado. Ahora bien, para demostrar que es cerrado consideramos $x - \lambda e \in G(\mathcal{W})$ lo cual implica que $\lambda \in (\sigma(x))^c$, pero como $G(\mathcal{W})$ es abierto existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \lambda\, e) - \mu\, e \in G(\mathcal{W})$ siempre que $|\mu| < \varepsilon$, es decir $x - (\lambda + \mu)e \in G(\mathcal{W})$,

luego entonces $\lambda + \mu \in (\sigma(x))^c$ por lo tanto el espectro $\sigma(x)$ es cerrado y en consecuencia es compacto.
La demostración de que es no vacío es una consecuencia del teorema de Liouville, el cual nos dice que si una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es entera y acotada para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces resulta que f es constante. Ahora bien, para cada $x \in \mathcal{W}$, supongamos que $\sigma(x)$ es vacío. Consideremos la función resolvente $\rho : \mathbb{C} \to \mathcal{W}$ dada por, $\rho(\lambda) = (x - \lambda\, e)^{-1}$ tendríamos que para cualquier funcional φ para el cual se tiene $\varphi(\rho(\lambda)) = f(\lambda)$ estaría definida en todo el plano complejo y sería holomorfa y acotada. Por el teorema de Liouville resultaría que f es constante, y dado que

$$\lim_{\lambda \to \infty} \rho(\lambda) = 0$$

tendría que ser cero en todas partes y eso es una contradicción con el hecho de que la resolvente es un operador lineal acotado.
El resultado se sigue.

$\blacksquare$

El siguiente resultado puede encontrarse en [14]

Teorema 2.6.2 *Sea $\mathcal{W}$ un álgebra de Waelbroeck localmente convexa tal que $\mathcal{W}' \neq 0$. Entonces $\sigma(x)$ es un conjunto compacto y no vacío para cada $x \in \mathcal{W}$.*

Definición 2.6.3 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra con e. Se dice que $\mathcal{A}$ es un álgebra de división si para cada $a \in \mathcal{A},\ a \neq 0,$ existe $b \in \mathcal{A}$ tal que $a\, b = e$.*

2.7. Teorema de Gelfand-Mazur

Teorema 2.7.1 ***De Gelfand-Mazur*** *[14]*

Sea $\mathcal{W}$ un álgebra de Waelbroeck localmente convexa con unidad e, tal que $\mathcal{W}' \neq 0$. Si $\mathcal{W}$ es un álgebra de división, entonces $\mathcal{W} \cong \mathbb{C}$.

Demo: Sea $x \in \mathcal{W}$, por el teorema (2.6.2) existe $\lambda \in \sigma(x)$ tal que $x - \lambda\, e \notin G(\mathcal{W})$. Por ser $\mathcal{W}$ un álgebra de división tenemos que $G(\mathcal{W}) = \mathcal{W} \setminus \{0\}$, luego entonces $x - \lambda\, e = 0$ y el resultado se sigue.

■

Teorema 2.7.2 *Sea $\mathcal{W}$ un álgebra de Waelbroeck localmente convexa e I un ideal bilateral cerrado en $\mathcal{W}$. Entonces, el espacio cociente $\tilde{\mathcal{W}} = \mathcal{W}/I$ es un álgebra de Waelbroeck.*

Demo: Sea $[x^{-1}] = [y]$ y sea U una vecindad de $[y]$. Entonces $[x]\, U = [\mathcal{O}]$, donde $\mathcal{O}$ es una vecindad de e en $\mathcal{W}$. Existe $\mathcal{O}_1$ compuesto de elemento invertibles. Por lo tanto $[\mathcal{O}]$ consta de elementos invertibles en $\tilde{\mathcal{W}}$ y es una vecindad de $[e]$ contenida en $[x]U$. Finalmente $[x][\mathcal{O}]$ consiste de elementos invertibles en $\tilde{\mathcal{W}}$ y es abierto $([x][\mathcal{O}])^{-1} \subset U$. Así pues el inverso es continuo en $\tilde{\mathcal{W}}$ y al mismo tiempo hemos probado que el conjunto de elemento invertibles es abierto.

■

Proposición 2.7.1 *Si $\mathcal{W}$ es un álgebra de Waelbroeck localmente convexa y $\mathcal{A}$ una subálgebra cerrada con respecto al inverso. Entonces $\mathcal{A}$ es de Waelbroeck.*

Demo: $G(\mathcal{W})$ es abierto en $\mathcal{W}$. $G(\mathcal{W}) \cap \mathcal{A}$ es abierto en $\mathcal{A}$. Y como $\mathcal{A}$ es cerrada bajo el inverso, el resultado se sigue.

$\blacksquare$

2.8. Ejemplo de álgebra de Waelbroeck

Ejemplo 2.8.1 *El espacio $\tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$ es un álgebra de Frechét, entonces es suficiente probar que es una $Q-$álgebra, es decir que el conjunto G de elementos invertibles es abierto.*

Considérese $g = f + z$, con $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Tenemos que:

$$\tilde{P}_{\alpha,\beta}(g) = P_{\alpha,\beta}(f) + |z| < \infty \quad \textit{pues} \quad P_{\alpha,\beta}(f) < \infty,$$

y ya que

$$\tilde{P}_{\alpha,\beta}(g) = \sup_{\overline{x} \in \mathbb{R}^n} \left| x^{\alpha_1} \cdots x^{\alpha_n} \frac{\partial^{|\beta|} f(\overline{x})}{x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}} \right| \; + \; |z|,$$

resulta que

$$\lim_{\overline{x} \to \infty} \frac{\partial^{|\beta|} f(\overline{x})}{x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}} = 0,$$

así pues

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{f+z} \quad \xrightarrow[\overline{x} \to \infty]{} \quad \frac{1}{z}.$$

Por lo tanto podemos considerar

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{z} + h,$$

de donde se obtiene

$$h = \frac{1}{f+z} - \frac{1}{z} = \frac{-f}{z(f+z)}.$$

Ahora bien, para simplificar la notación y no involucrar la fórmula de Leibnitz, solo vamos a considerar, sin pérdida de generalidad, $\dfrac{\partial h(\overline{x})}{\partial x_1}$ *dada por*

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial h(\overline{x})}{\partial x_1} &= \frac{\left(-\dfrac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_1}\right)(z(f(x)+z\,))+f(x)\left(z\dfrac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_1}\right)}{(z(f(x)+z))^2} \\
&= \frac{\dfrac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_1}(\,f(\overline{x})(z-1)-z\,)}{(z(f(x)+z))^2}
\end{aligned}
$$

En conclusión, tenemos que $\dfrac{\partial h}{\partial x_1}$ *existe y es continua. Esto se puede hacer para cualquier* α *multi-índice, pues el denominador nunca de anula y en la parte del numerador siempre tenemos algún elemento de* $\tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$. *Finalmente* $h \in \mathcal{S}$ *y es continua. Ademas el espacio* $\tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$ *es un álgebra de Frechét, por el teorema (2.1.1) obtenemos que la inversión es continua. Así concluimos que* $\tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$ *es un álgebra de Waelbroeck*

$\blacksquare$

2.9. El espectro combinado clásico

En 1971 R. E. Harte estudió y demostró que para un sistema de elementos que conmutan mutuamente de un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ que el espectro combinado izquierdo $\sigma_l(\overline{A})$ es no vacío y además satisface la propiedad de mapeo espectral, teorema (2.9.1). Uno puede consultar este y más resultados en [4].

Definición 2.9.1 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra con unidad e. Sea $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un sistema finito de elementos de $\mathcal{A}$. Para $\overline{a}$ se define el espectro combinado izquierdo $\sigma_l(\overline{a})$, como*

$$\sigma_l(\overline{a}) = \{\overline{\lambda} \in \mathbb{C}^n \mid I_l(\overline{a} - \overline{\lambda}\, e) \neq \mathcal{A}\},$$

donde, $I_l(\overline{a} - \overline{\lambda}\, e)$ denota al ideal izquierdo generado por todos los elementos $a_i - \lambda_i\, e$.

Teorema 2.9.1 *Sea $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ un sistema finito de elementos de un álgebra con unidad $\mathcal{A}$ que conmutan mutuamente. El espectro combinado izquierdo $\sigma_l(\overline{a})$ es no vacío y para $P = (P_1, \ldots, P_m)$ un sistema de polinomios en n variables se cumple la propiedad de mapeo espectral*

$$\sigma_l(P(\overline{a})\,) = P(\sigma_l(\overline{a})\,)$$

Análogamente, definimos el espectro combinado derecho para un sistema $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de elementos del álgebra $\mathcal{A}$ como

$$\sigma_r(\overline{a}) = \{\overline{\lambda} \in \mathbb{C}^n \mid I_r(\overline{a} - \overline{\lambda}\, e) \neq \mathcal{A}\},$$

donde, I_r es el ideal derecho generado por todos los elementos $a_i - \lambda_i\, e$ para $i = 1, \ldots, n$.

Definición 2.9.2 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra no conmutativa con unidad. Para un sistema finito $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de elementos del álgebra $\mathcal{A}$ definimos el espectro de Harte, $\sigma_H(\overline{a})$, como*

$$\sigma_H(\overline{a}) = \sigma_l(\overline{a}) \cup \sigma_r(\overline{a}).$$

Proposición 2.9.1 *Sea $\sigma_H(\overline{a})$ el espectro de Harte. Entonces,*

$$\sigma_H(\overline{a}) \subset \prod_{i=1}^{n} \sigma(a_i).$$

Demo: Supongamos que $\lambda \notin \sigma(a_i)$, entonces $a_i - \lambda\, e$ es invertible, por tanto

$$\mathcal{A}(a_i - \lambda\, e)^{-1}(a_i - \lambda\, e) = \mathcal{A}$$

es decir, $(a_i - \lambda\, e)$ genera a $\mathcal{A}$. Si $\overline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ es tal que algún $\lambda_i \notin \sigma(a_i)$, entonces $\overline{\lambda} \notin \sigma_r(\overline{a})$.

■

Capítulo 3

Espectros combinados

3.1. Representaciones

Sean $\mathcal{A}$ un álgebra, X un espacio vectorial topológico y sea $L(X)$ el espacio de operadores continuos.

Definición 3.1.1 *Una representación del álgebra $\mathcal{A}$ en X es un homomorfismo $\phi : \mathcal{A} \to L(X)$ tal que para $\alpha \in \mathbb{K}$ se cumple que*

$$\phi(a + \alpha b) = \phi(a) + \alpha\phi(b),$$
$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b).$$

Ejemplo 3.1.1 *(Representacion semiregular) Si $I \subset \mathcal{A}$ es un ideal izquierdo en $\mathcal{A}$, en el espacio*

$$X = \mathcal{A}/I = \{\ [a] = a + I : a \in \mathcal{A}\ \},$$

consideramos la representación $\quad L_a[x] = [ax] = ax + aI \in ax + I$

tenemos que $\quad L_{ab}[x] = [abx] = L_a[bx] = L_aL_b[x].$

Proposición 3.1.1 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra. Si $I \subset \mathcal{A}$ es un ideal cerrado con respecto alguna topología en $\mathcal{A}$, entonces existe una topología en $X = \mathcal{A}/I$ tal que la proyección natural $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/I$ es un operador continuo y abierto lo cual hace que los operadores L_a sean continuos.*

Demo: Sea $\mathcal{A}$ un álgebra con topología e I un ideal cerrado en $\mathcal{A}$. Un conjunto U en el espacio cociente $\mathcal{A}/I$ es abierto si existe $\mathcal{O} \subset \mathcal{A}$ tal que $U = [\mathcal{O}]$. Si $a \in \mathcal{A}$ y $[\mathcal{O}]$ es vecindad de cero en $\mathcal{A}/I$, por la continuidad de la multiplicación existe $\mathcal{O}_1$ abierto tal que $a\,\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}$, Luego $L_a[\mathcal{O}_1] = [a\,\mathcal{O}_1] \subset [\mathcal{O}]$, es decir $[\mathcal{O}_1] \subset L_a^{-1}[\mathcal{O}]$.

■

3.2. Representación irreducible

Definición 3.2.1 *Una representación ϕ de $\mathcal{A}$ en X se dice que es algebraicamente irreducible si,*

$$\forall\ 0 \neq x \ni X, \quad \phi(\mathcal{A})x = X.$$

Nota: *Decimos que es topológicamente irreducible cuando $\phi(\mathcal{A})x$ es denso en X.*

Directamente de la definición obtenemos el siguiente resultado:

Lema 3.2.1 *Sea ϕ una representación de un álgebra $\mathcal{A}$ en un espacio vectorial X irreducible algebraicamente. Entonces ϕ no tiene subespacios invariantes no triviales.*

Si ϕ es una representación de un álgebra $\mathcal{A}$ en un espacio X, entonces el par (ϕ, X) denotará dicha representación.

Teorema 3.2.1 *Sea $\mathcal{A}$ un algebra con ideal izquierdo I. Entonces la representacion $(L, \mathcal{A}/I)$ es irreducible si y solo si I es ideal izquiero maximal.*

Demo: Sea I maximal. Supongamos que $V = L(\mathcal{A})\, x \subsetneq X$. El espacio V es invariante bajo los operadores L_a. Luego $\pi^{-1}(V)$ es un ideal que contiene a I, como I es maximal obtenemos que $V = 0$ entonces $x = 0$ y por tanto es irreducible.

Supongamos que la representación $(L, \mathcal{A}/I)$ es irreducible y que $J \supset I$ es un ideal propio, entonces $\pi(J)$ es un espacio invariante que contiene a I , entonces $\pi(J) = J/I = X$ y por tanto $J = \mathcal{A}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto I es maximal.

$\blacksquare$

Definición 3.2.2 *Sean $\mathcal{A}$ un álgebra, X un espacio vectorial y la representación (ϕ, X). Definimos el conmutador de ϕ, como el conjunto*

$$\phi^{conm} = \{\psi \in L(X) : (\psi \circ \phi)(x) = (\phi \circ \psi)(x), \forall\ x \in X\}.$$

Ahora, para conocer los operadores en $L(X)$ que conmutan con los operadores L pasamos al siguiente teorema:

Teorema 3.2.2 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra y sea I un ideal izquierdo en $\mathcal{A}$. Sea R un operador en $L(X)$. Entonces*

$$RL_a = L_a R \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad \textit{si y solo si existe} \quad b \in \mathcal{A} \quad \textit{tal que}$$

$$Ib \subset I \ \textit{y que además} \ R[x] = [xb].$$

Demo: Supongamos que existe $b \in \mathcal{A}$ tal que $Ib \subset I$. Definamos $R_b(x+I) = xb + I$, entonces

$$L_a R_b[x] = [axb] = R_b[ax] = R_b L_a[x].$$

Considere $R \in L(X)$ tal que $RL_a = L_a R \ \forall \ a \in \mathcal{A}$. Sea $R[e] = [b]$. Por consiguiente

$$R[a] = RL_a[e] = L_a R[e] = L_a[b] = [ab] = R_b[a].$$

Por lo tanto $R = R_b$ y $R[0] = [0\,b] = [0] = I$, entonces $[0] = Ib \subset I$.

■

3.3. Lema de Schur

Teorema 3.3.1 *(Lema de Schur)*

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra y sea (ϕ, X) una representación de $\mathcal{A}$ en el espacio vectorial X. Si (ϕ, X) es algebraicamente irreducible entonces el conmutador

ϕ_{conm} (el álgebra de todos los operadores que conmutan con $\phi(a)$, $a \in \mathcal{A}$)

es un campo.

Demo:

Sea $0 \neq R \in L(X)$ tal que $R\phi(a) = \phi(a)R \;\; \forall a \in \mathcal{A}$. El espacio $\ker R$ es invariante bajo ϕ,

Pues, sea $x \in \ker R$, $Rx = 0$ entonces $R\phi(a)x = \phi(a)Rx = 0$ y por tanto $\phi(a)x \in \ker R$.
Por ser ϕ una representación irreducible tenemos que $\ker R = 0$, por tanto, tenemos entonces que $R = 0$ ó R es inyectivo. Así pues R es inyectivo.

El espacio Im R es invariante bajo ϕ. Si $z = Rx$ tenemos

$$\phi(a)z = \phi(a)Rx = R\phi(a)x \in \text{Im } R,$$

Así pues por ser ϕ irreducible tenemos que Im $R = V$ para $R \neq 0$ y por lo tanto R es biyectivo. Luego entonces existe el inverso R^{-1}.

$$R\phi(a) = \phi(a)R \text{ entonces } R^{-1}R\phi(a) = R^{-1}\phi(a)R \text{ y por tanto}$$
$$\phi(a) = R^{-1}\phi(a)R \;\text{ y }\; \phi(a)R^{-1} = R^{-1}\phi(a).$$

■

Corolario 3.3.1 *El espacio conmutador de los operadores L_a, es decir*

$$L^{conm} = \{R \in L(X) : RL_a = L_aR,\; a \in \mathcal{A}\}$$

es un campo.

3.4. Ideales generados por un sistema

En esta sección se va a estudiar a los ideales generados por un sistema finito de elementos de un álgebra de Waelbroeck loc. convexa para posteriormente dar paso a la definición del nuevo espectro combinado izquierdo que a diferencia del espectro izquierdo clásico no recurrimos a la conmutatividad del sistema de elementos para garantizar la propiedad de mapeo espectral.

Sean $\mathcal{W}$ un álgebra de Waelbroeck localmente convexa con identidad e, I un ideal izquierdo en $\mathcal{W}$, $a \in \mathcal{W}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Denotamos por $I_l(I, a - \lambda e)$ al ideal generado por $I, (a - \lambda e)$ y por $\mathcal{W}(a)$ la subálgebra con identidad generada por a.

Teorema 3.4.1 *Sean $\mathcal{W}$ un álgebra de Waelbroeck localmente convexa con unidad e, I un ideal izquierdo en $\mathcal{W}$ y $a \in \mathcal{W}$ con la propiedad de que $Ia \subset I$. Entonces existe $\lambda \in \sigma(a)$ tal que $I_l(I, a - \lambda e)$ es un ideal propio.*

Demo: Consideremos la familia $\mathcal{F}$ de todos los ideales izquierdos J en $\mathcal{W}$ ordenada por inclusión, que contienen a I y que satisfacen que $Ja \subset J$. Por el lema de *Kuratowski- Zorn* existe un ideal maximal M en $\mathcal{F}$ que contiene a I y que satisface que $Ma \subset M$.
Basta demostrar que M es maximal en el álgebra $\mathcal{W}$. Consideremos entonces el espacio cociente $X = \mathcal{W}/M$. Sea $\mathcal{W}(a)$ el álgebra generada por $a \in \mathcal{W}$ y la representación (T, X) de $\mathcal{W} \times \mathcal{W}(a)$ en X dada por la fórmula

$$T_{(b,c)}[x] = L_b R_c[x] = [bxc]$$

para $[x] \in X$ y sea $\pi : \mathcal{W} \to X$ la proyección natural.

Considerando un subespacio $V \subsetneq X$ que sea invariante bajo la acciones de $\mathcal{W}$ y $\mathcal{W}(a)$, en particular es invariante bajo la acción de $\mathcal{W}$, es decir bajo los operadores L_b con $b \in \mathcal{W}$, así pues, $M' = \pi^{-1}(V)$ es un ideal de $\mathcal{W}$

que contiene a M. Luego por la invarianza de la acción de $\mathcal{W}(a)$ tenemos que $M'\mathcal{W}(a) \subset M'$ pero por la maximalidad de M en la cadena de ideales, $M' = M$ luego entonces M es maximal en el álgebra $\mathcal{W}$. Luego, por el teorema (3.2.1) la representación (T, X) es irreducible, entonces no tiene subespacios invariantes.

Sea $\mathcal{T}$ la familia de operadores de la forma

$$\mathcal{T} = \{T_{(b,c)} \ : \ (b, c) \in \mathcal{W} \times \mathcal{W}(a)\}$$

y sea $\mathcal{D}$ el espacio conmutador de la familia $\mathcal{T}$, por el lema de Schur el conmutante $\mathcal{D}$ es un álgebra de división. El conmutante $\mathcal{D}$ puede ser descrito por los elementos del álgebra $\mathcal{W}$ si consideramos el espacio E dado por

$$E = \{a \in \mathcal{W} : \ M\,a \subset M \ y \ ab - ba \in M, \ b \in \mathcal{W}(a)\}.$$

El espacio E es una subálgebra en $\mathcal{W}$ que contiene la unidad y al ideal M, el cual forma en E ideal bilateral. Para cada $a \in E$ el operador $R_a[x] = [xa]$ define un elemento de $\mathcal{D}$. Por teorema (3.2.2) aseguramos que todos los elementos de $\mathcal{D}$ son de esta forma. El mapeo $E \ni a \to R_a \in \mathcal{D}$ es sobre y tiene como kernel al ideal M, por lo tanto $\mathcal{D} \cong E/M$. Por proposición (3.1.1) los elementos de $\mathcal{D}$ son operadores continuos sobre X. Note que la subálgebra E es cerrada en $\mathcal{W}$ y además es cerrada con respecto al inverso en $\mathcal{W}$, ya que si $a \in \mathcal{W}$ tiene inverso $a^{-1} \in \mathcal{W}$, entonces el espacio $M' = M + Ma^{-1}$ es ideal izquierdo en $\mathcal{W}$ el cual contiene a M, y además es propio por que $M'a = Ma + M \subset M$. Ahora hay que demostrar que si $a \in E$ entonces $a^{-1} \in E$. Para esto, si $b \in E$, entonces $ba - ab = m$, donde $m \in M$ y $a \in \mathcal{W}(a)$. Obtenemos entonces que $M'b = (M + Ma^{-1})b \subset M + Ma^{-1}baa^{-1} =$

$M + Ma^{-1}(ab+m)a^{-1} = M + Mb + Ma^{-1}ma^{-1} \subset M + Ma^{-1} = M'$. Por lo tanto el ideal M' pertenece a la familia $\mathcal{F}$ pero por la maximalidad de M en dicha familia obtenemos que $M' = M$ y $Ma^{-1} \subset M$. Ahora, de la igualdad

$$a^{-1}b - ba^{-1} = a^{-1}baa^{-1} - a^{1}aba^{-1} = a^{-1}(ba - ab)a^{-1} = a^{-1}ma^{-1} \in M,$$

concluimos que $a^{-1} \in E$. Lo cual hace de E un álgebra de Waelbroeck por teorema (2.7.1). Luego por el teorema (2.7.2) tenemos que $\mathcal{D} = E/M$ es de la misma clase. Finalmente por el teorema de Gelfand-Mazur (2.7), $\mathcal{D} \cong \mathbb{C}$.

Por lo tanto, para cada $b \in \mathcal{W}(a)$ existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $R_b[x] = \lambda[x]$, y cada $[x] \in x = \mathcal{W}/M$, entonces $R_a[x] - \lambda[x] = [0]$ esto es,

$$[xa - \lambda x] = [x][a - \lambda e] = [0]$$

Por lo tanto $(a - \lambda e) \in M$ y como $I \subset M$, entonces $I_l(I, a - \lambda e)$ es un ideal propio.

■

Corolario 3.4.1 *Sean $\mathcal{W}$ un álgebra de Waelbroeck localmente convexa con unidad e, I un ideal izquierdo en $\mathcal{W}$ y $a \in \mathcal{W}$ con la propiedad de que $Ia \subset I$. Entonces existe $\lambda \in \sigma(a)$ y un ideal maximal $M \subset \mathcal{W}$ tal que $I_l(I, a - \lambda e) \subset M$.*

Teorema 3.4.2 *Sean $\mathcal{W}$ un álgebra de Waelbroeck localmente convexa con unidad e, I un ideal izquierdo en $\mathcal{W}$ y sea $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ con $a_i \in \mathcal{W}$ tal que $\forall\ i, j = 1, \ldots, n$. $[a_i, a_j] = a_ia_j - a_ja_i \in I$ y además $Ia_i \subset I$. Entonces existe $\overline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ tal que $I_l(I, a_1 - \lambda_1 e, \ldots, a_n - \lambda_n e)$ es un ideal propio en $\mathcal{W}$.*

Demo: La demostración la haremos por inducción. Asi pues, para $n = 1$ tenemos el teorema (3.4.1). Supongamos válido para n.

Sea $a_{n+1} \in \mathcal{W}$, I_l el ideal generado por $I, a_i - \lambda_i e$ para $1 \leq i \leq n$. Si $[a_i, a_{n+1}] = a_i a_{n+1} - a_{n+1} a_i \in I$ para cada $i = 1, \cdots, n$, como I_l es ideal propio por hipótesis de inducción, es suficiente con demostrar que $I_l a_{n+1} \subset I_l$, para utilizar el teorema (3.4.1).

Si $[a_i, a_{n+1}] = a_i a_{n+1} - a_{n+1} a_i \in I_l$, entonces

$$a_i a_{n+1} - a_{n+1} a_i = k \in I_l$$

luego $a_i a_{n+1} - \lambda_i a_{n+1} + a_{n+1} \lambda_i - a_{n+1} a_i = k$, por tanto

$$(a_i - \lambda_i e) a_{n+1} = k + a_{n+1}(a_i - \lambda_i e),$$

luego

$$I a_{n+1} + (a_i - \lambda_i e) a_{n+1} = I a_{n+1} + k + a_{n+1}(a_i - \lambda_i e) \subset$$
$$I + k + a_{n+1}(a_i - \lambda_i e) \subset I_l \ \forall i = 1, \cdots, n.$$

Por lo tanto $I_l a_{n+1} \subset I_l$.

Luego por teorema (3.4.1) tenemos demostrado el resultado.

$\blacksquare$

Lema 3.4.1 *Sean $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ y P un polinomio en n variables, digamos $P(x) = \sum_{K=(k_1,\ldots,k_n)} C_K x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n}$. Entonces*

$$P(x) - P(y) = \sum_{i=1}^{n} q_i(x)(x_i - y_i)$$

$\blacksquare$

Proposición 3.4.1 *Sean $\mathcal{W}$ un álgebra de Waelbroeck localmente convexa e I un ideal izquierdo de $\mathcal{W}$. Sea $\{a_1, \ldots, a_n\}$ un sistema finito de elementos de $\mathcal{W}$ tal que para cada $1 \leq i, j \leq n$, $\quad [a_i, a_j] \in I, \quad I\, a_i \subset I$. Entonces, para cada permutación π de los elementos $a_1, \ldots, a_n$ se cumple que*

$$P(a_1, \ldots, a_n) - P(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)\,) \in I$$

para cualquier polinomio P.

Demo: Recordemos que las transposiciones de elementos generan a todo grupo de permutaciones, así que es suficiente demostrar este resultado para transposiciones, y además es suficiente considerar al polinomio P como un monomio. Así pues, sea π la permutación de los elementos $a_1, \ldots, a_n$ dada por

$$(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_i), \pi(a_{i+1}), \ldots, \pi(a_n)\,) = (a_1, \ldots, a_{i+1}, a_i, \ldots, a_n),$$

sin perdida de generalidad consideremos al polinomio P de la siguiente manera

$$P(x_1, \ldots, x_n) = x_1\, x_2\, \cdots\, x_n$$

así pues

$P(a_1, \ldots, a_n) - P(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)\,) =$

$$= (a_1\, \cdots\, a_i\, a_{i+1}\, \cdots\, a_n) - (a_1\, \cdots\, a_{i+1}\, a_i\, \cdots\, a_n)$$

$$= a_1\, \cdots\, a_{i-2}(a_i\, a_{i+1} - a_{i+1}\, a_i)\, a_{i+2}\, \cdots\, a_n$$

$$= a_1\, \cdots\, a_{i-2}[a_i, a_{i+1}]\, a_{i+2}\, \cdots\, a_n$$

y el resultado se sigue.

■

Corolario 3.4.2 *Sean $\mathcal{W}$ un álgebra de Waelbroeck localmente convexa e I un ideal izquierdo de $\mathcal{W}$. Sea $\{a_1, \ldots, a_n\}$ un sistema finito de elementos de $\mathcal{W}$ tal que para cada $1 \leq i, j \leq n$, $[a_1, a_j] \in I$, $I\, a_i \subset I$. Si π es una permutacion de los elementos $a_1, \ldots, a_n$ y si P y Q son dos polinomios de n, entonces el operador conmutador*

$$[P(a_1, \ldots, a_n), Q(a_1, \ldots, a_n)] \in I$$

Demo: El reultado se sigue del hecho de que cada término del producto $P(\overline{a})\, Q(\overline{a})$ es una permutación de un término de $Q(\overline{a})\, P(\overline{a})$ y ocupando la propocición anterior.

■

El siguiente teorema es un resultado muy parecido al teorema anterior, el cual demostraremos utilizando técnicas muy similares al teorema (3.4.1).Consideramos el álgebra de todos los polinomios en n variables.

$$\wp = \left\{ P(\overline{x}) = \sum_{K=(k_1,\ldots,k_n)} C_K x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n} |\ k_j \in \mathbb{N}, \quad j = 1, \ldots, n \right\}$$

Teorema 3.4.3 *Sean $\mathcal{W}$ un álgebra de Waelbroeck localmente convexa con unidad e, I un ideal izquierdo en $\mathcal{W}$, $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{W}^n$, $P \in \wp$ y sea $I_l = \langle I, a_1 - \lambda_1 e, \ldots, a_n - \lambda_n e \rangle$ el ideal generado por I y por cada uno de los elementos $(a_i - \lambda_i e)$. Si $I_l\, P(\overline{a}) \subset I_l$, entonces existe $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}^n$ tal que el ideal generado por $\langle I\ ,\ (\, P(\overline{a}) - P(\overline{\lambda}\,)\, e\,)\, \rangle$es un ideal propio en $\mathcal{W}$.*

Demo: Sean $P \in \wp$ y $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ un sistema finito de elementos de un álgebra de Waelbroeck. Es suficiente demostrar que $I\, P(\overline{a}) \subset I$ para estar en las hipótesis del teorema (3.4.1) y concluir el resultado. Considere una permutación π del sistema $\overline{a}$, se tiene que $P(\pi(\overline{a})) = Q(\overline{a})$ para algún $Q \in \wp$. Por el corolario (3.4.2) el conmutador $[Q(\overline{a}), P(\overline{a})] \in I$, entonces existe $j \in I$ tal que $[\,Q(\overline{a}), P(\overline{a})\,] = j$. Así pues

$$Q(\overline{a})P(\overline{a}) - P(\overline{a})Q(\overline{a}) = j \in I,$$

luego entonces

$$(Q(\overline{a}) - Q(\overline{\lambda})e)\,P(\overline{a}) = j + P(\overline{a})\,(Q(\overline{a}) - Q(\overline{\lambda})e\,);$$

por el lema (3.4.1) queda que

$$\sum_{i=1}^{n} R_i(\overline{a})\,(a_i - \lambda_i e)P(\overline{a}) = j + P(\overline{a})\,(\sum_{i=1}^{n} R_i(\overline{a})\,(a_i - \lambda_i e)\,),$$

entonces

$$IP(\overline{a}) + \sum_{i=1}^{n} R_i(\overline{a})\,(a_i - \lambda_i e)P(\overline{a}) = IP(\overline{a}) + j + P(\overline{a}) \left(\sum_{i=1}^{n} R_i(\overline{a})\,(a_i - \lambda_i e) \right),$$

por lo tanto

$$\left(I + \sum_{i=1}^{n} R_i(\overline{a})\,(a_i - \lambda_i e) \right) P(\overline{a}) \subset I + \sum_{i=1}^{n} P(\overline{a})R_i(\overline{a})\,(a_i - \lambda_i e)\,);$$

finalmente

$$I_l\,P(\overline{a}) \subset I_l.$$

Del teorema (3.4.1) se sigue el resultado.

$\blacksquare$

3.5. Espectro combinado izquierdo

A continuación se da la definición del espectro combinado izquierdo asociado a un ideal izquierdo fijo I de un sistema finito de elementos de un álgebra de Waelbroeck localmente convexa $\mathcal{W}$. Cabe resaltar que este es un nuevo espectro, y el propósito del resto de este capítulo es estudiar algunas de las propiedades que cumple cumplir dicho espectro. En particular la propiedad del mapeo espectral.

Definición 3.5.1 *Sea $\mathcal{W}$ un álgebra de Waelbrock localmente convexa con unidad e. Sean $\mathcal{B} \subset \mathcal{W}$ una subálgebra con unidad e y sea $I \subset \mathcal{W}$ un ideal izquierdo cerrado. Para $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ con $a_i \in \mathcal{B}$ $\forall\, i = 1, \ldots, n$, definimos el* ***Espectro combinado izquierdo asociado al ideal I****, $\sigma_l^I(\overline{a})$, como*

$$\sigma_l^I(\overline{a}) = \left\{ \ \overline{\lambda} \in \mathbb{C}^n \mid (I, a_1 - \lambda_1, \ldots, a_n - \lambda_n) \ \ \textit{generan ideal propio en } \mathcal{W} \ \right\}$$

Teorema 3.5.1 *Sean $\mathcal{W}$ un álgebra de Waelbroeck localmente convexa con unidad, $\mathcal{B}$ una subálgebra con unidad de $\mathcal{W}$, I un ideal izquiero cerrado en $\mathcal{W}$ con la propiedad de que $I\,\mathcal{B} \subset I$ y $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{B}$ tales que el operador conmutador $[a_i, a_j] \in I$ para cada $i, j = 1, \ldots, n$,. Si $\overline{\lambda} \in \sigma_l^I(\overline{a})$ y $a_{n+1} \in \mathcal{B}$ es tal que $[a_i, a_{n+1}] \in I$ para todo $i = 1, \ldots, n$, entonces existe $\lambda_{n+1} \in \mathbb{C}$ tal que*

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}) \in \sigma_l^I(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}).$$

Más aún, para $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *y para un sistema finito de polinomios* $P() = (\, P_1, \ldots, P_m\,)$ *donde cada* P_i *es un polinomio en* n *variables, entonces*

$$P(\sigma_l^I(\overline{a})\,) = \sigma_l^I(P(\overline{a})).$$

En tal caso, decimos que $\sigma_l^I(\overline{a})$ *satisface la* ***propiedad de mapeo espectral***.

Demo: Sea I ideal izquierdo en $\mathcal{W}$. Para $\overline{\lambda} \in \sigma_l^I(\overline{a})$ tenemos que $I' = I_l(I, a_1 - \lambda_1 e, \ldots, a_n - \lambda_n e)$ es ideal propio en $\mathcal{W}$. Luego, si $a_{n+1} \in \mathcal{B}$ tal que $\forall\ i = 1, \ldots, n,\ \ [a_i, a_{n+1}] \in I,\ \ I\, a_{n+1} \subset I$ por el teorema (3.4.2) existe $\lambda_{n+1} \in \mathbb{C}$ tal que $I', a_{n+1} - \lambda_{n+1} e$ generan ideal propio en $\mathcal{W}$. Así pues

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}) \in \sigma_l^I(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}).$$

Ahora hay que demostrar que $P(\sigma_l^I(a_1, \ldots, a_n)) = \sigma_l^I(P(a_1, \ldots, a_n)\,)$ para algún sistema finito de polinomios P.

Sean $\overline{\lambda} \in \sigma_l^I(\overline{a})$. Si $P(\overline{\lambda}) \notin \sigma_l^I(P(\overline{a}))$ entonces el ideal generado por I y $P(\overline{a}) - P(\overline{\lambda})e$ no es propio, por tanto contiene la identidad e. Así pues, existe $\overline{b} = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathcal{W}^m$ tal que

$$e = \overline{b}\,(\,P(\overline{a}) - P(\overline{\lambda})e\,) = \sum_{i=1}^{m} b_i(\,P_i(\overline{a}) - P_i(\overline{\lambda})e\,),$$

donde la multiplicación es coordenada a coordenada. Luego por el lema (3.4.1) queda que

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_i\, Q_{i,j}(\overline{a})\,(a_j - \lambda_j, e) = e,$$

entonces $\overline{\lambda} \notin \sigma_l^I(\overline{a})$, contradicción.

Por lo tanto $P(\overline{\lambda}) \in \sigma_l^I(\,P(\overline{a})\,)$, es decir $P(\sigma_l^I(a_1,\ldots,a_n)) \subset \sigma_l^I(P(a_1,\ldots,a_n)\,)$.

Ahora supongamos que $\overline{\mu} \in \sigma_l^I(P(\overline{a})\,)$, entonces el ideal J generado por I, $(\,P(\overline{a}) - \overline{\mu}\, e\,)$ es un ideal propio en $\mathcal{W}$, esto es

$$J = I_l\langle I, P_1(\overline{a}) - \mu_1\, e, \ldots, P_m(\overline{a}) - \mu_m\, e\rangle \neq \mathcal{W}.$$

Este ideal J es izquierdo y propio en $\mathcal{W}$. Sea $\overline{\lambda} \in \sigma_l^J(\overline{a})$, se cumple que $P(\overline{\lambda}) \in \sigma_l^J(P(\overline{a})\,)$, por lo tanto el ideal generado

$$I_l\langle J, P_1(\overline{a}) - P_1(\overline{\lambda})\, e, \ldots, P_m(\overline{a}) - P_m(\overline{\lambda})\, e\rangle \neq \mathcal{W}.$$

Por el corolario (3.4.1) existe un ideal propio J_1 en $\mathcal{W}$ tal que para elementos arbitrarios $g_1, \ldots, g_m, h_1, \ldots, h_m \in \mathcal{W}$ se tiene que

$$I + \sum_{j=1}^{m} h_j(P_j(\overline{a}) - P_j(\overline{\lambda})\, e\,) + \sum_{j=1}^{m} g_j(P_j(\overline{a}) - \mu_j\, e\,) \subset J_1.$$

En particular para g_j arbitrario y $h_j = -g_j$, se tiene que

$$I + \sum_{j=1}^{m} g_j(P_j(\overline{\lambda}) - \mu_j\,)\, e \,\subset J_1$$

Si $(P_j(\overline{\lambda}) - \mu_j\,) \neq 0$, entonces llegamos a una contradicción, $J_1 = \mathcal{W}$.

Por lo tanto $\mu_j = P_j(\overline{\lambda})$ y la demostración se sigue.

■

Corolario 3.5.1 *Sean $\mathcal{W}$ un álgebra de Waelbroeck localmente convexa, $\overline{a} \in \mathcal{W}^n$, $\;n = m\;$ y $\;P, Q \in \mathcal{P}\;$ tales que*

$$P(Q(\overline{a})\,) = \overline{a} = Q(P(\overline{a})\,).$$

Entonces $P(\sigma_l^I(\overline{a})\,) = \sigma_l^I(P(\overline{a})\,)$.

Demo: Las aplicaciones P, Q satisfacen las hipótesis del teorema (3.5.1), así pues,

$$\sigma_l^I(P(\overline{a})\,) = P[Q(\sigma_l^I\,(P(\overline{a})\,)] \subseteq P[\sigma_l^I\,(Q(P(\overline{a})\,)\,] = P[\sigma_l^I\,(\overline{a})] \subseteq \sigma_l^I(P(\overline{a})).$$

Luego entonces $P(\sigma_l^I(\overline{a})\,) = \sigma_l^I(P(\overline{a})\,)$.

■

Corolario 3.5.2 *Sean $\mathcal{W}$ un álgebra de Waelbroeck localmente convexa, $\overline{a} \in \mathcal{W}^n$, P un sistema de m polinomios en n variables. Si $m > n$ y $P(\overline{a}) = (\overline{a}, Q(\overline{a})\,)$ para algún sistema Q de $m - n$ polinomios cada uno de ellos en n variables. Entonces $P(\sigma_l^I(\overline{a})\,) = \sigma_l^I(P(\overline{a})\,)$.*

Demo: Al igual que en el corolario (3.5.1), las aplicaciones P, Q satisfacen las hipótesis del teorema (3.5.1). Si $\overline{a} \in \mathcal{W}^n$ y $\overline{b} \in \mathcal{W}^{m-n}$, entonces

$$\sigma_l^I(\overline{a}, \overline{b}) \subseteq \sigma_l^I(\overline{a}) \times \sigma_l^I(\overline{b}),$$

sustituyendo $\overline{b} = Q(\overline{a})$ y aplicando de nuevo el teorema (3.5.1), resulta que

$$\{\,(\,\overline{\lambda}, Q(\overline{\lambda}\,)\,) \mid \overline{\lambda} \in \sigma_l^I(\,\overline{a}\,)\,\} \subseteq \sigma_l^I(\,P(\overline{a})\,) = \sigma_l^I(\,\overline{a}, Q(\overline{a})\,) \subseteq \sigma_l^I(\,\overline{a}\,) \times \sigma_l^I(\,Q(\overline{a}\,)\,) = P(\sigma_l^I(\overline{a})\,).$$

Solo resta demostrar que si $(\overline{\lambda}, t) \in \sigma_l^I(P(\overline{a})\,)$, entonces $t = Q(\overline{\lambda})$.
Para $\overline{b} \in \mathcal{A}^{m-n}$, definimos h como

$$h(\overline{a}, \overline{b}) = \overline{b} - Q(\overline{a}),$$

luego

$$t - Q(\overline{\lambda}) = h(\overline{\lambda}, t) \in \sigma_l^I(\,h[P(\overline{a})\,]\,) = \sigma_l^I(\,h(\overline{a}, Q(\overline{a}\,)\,) = \sigma_l^I(0) = \{0\},$$

así pues,

$$P(\sigma_l^I(\overline{a})) = \{ (\overline{\lambda}, Q(\overline{\lambda})) \mid \overline{\lambda} \in \sigma_l^I(\overline{a}) \} \subseteq \sigma_l^I(P(\overline{a})),$$

y queda demostrada la igualdad.

■

3.6. Espectro combinado derecho

Ya tenemos definido el espectro $\sigma_l^I(\overline{a})$. Ahora, para $\mathcal{W}$ un álgebra de Waelbroeck localmente convexa con unidad. Sea I un ideal derecho en $\mathcal{W}$ con la propiedad de que $a\,I \in I$. Para $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{W}$ se define el espectro combinado derecho $\sigma_r^I(a_1, \ldots, a_n)$ como

$$\sigma_r^I(a_1, \ldots, a_n) = \{\overline{\lambda} \in \mathbb{C}^n \mid \langle I, a_1 - \lambda_1\, e, \ldots, a_n - \lambda_n\, e\rangle \textit{ generan ideal propio en } \mathcal{W}\}$$

Con la multiplicación por la derecha, esto es;

$$\sigma_r^I(\overline{a}) = \left\{ \overline{\lambda} \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{i=1}^{n} (x_i - \lambda_i)\, I \textit{ es un ideal propio en } \mathcal{W} \right\}$$

De manera análoga al espectro $\sigma_l^I(a_1, \ldots, a_n)$, este nuevo espectro derecho $\sigma_r^I(a_1, \ldots, a_n)$ satisface los teoremas y propiedades anteriores debido a que las demostraciones son puramente algebraicas.

Asi pues, el espectro $\sigma_r^I(a_1, \ldots, a_n)$ satisface también la propiedad del mapeo espectral.

Teorema 3.6.1 *Sea $\mathcal{W}$ un álgebra de Waelbroeck l.c. con unidad. Sea $\mathcal{B}$ una subálgebra con unidad de $\mathcal{W}$. Sea J un ideal derecho cerrado en $\mathcal{W}$ con* *la propiedad de que* $\mathcal{B}\, J \subset J$. *Sea* $a_1, \ldots, a_n$ *un sistema de* n *elementos de* $\mathcal{B}$. *Si para cada* $i, j = 1, \ldots, n$, *el conmutador* $[a_i, a_j] \in J$, *y para cada* $\overline{\lambda} \in \sigma_r^I(\overline{a})$ *y* $a_{n+1} \in \mathcal{B}$ *tal que* $[a_i, a_{n+1}] \in J$ *para cada* $1 \leq i \leq n$. *Entonces existe* $\lambda_{n+1} \in \mathbb{C}$ *tal que*

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}) \in \sigma_r^I(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})$$

Más aún, para $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *y* $P(\overline{x}) = (\, P_1(\overline{x}), \ldots, P_m(\overline{x})\,)$ *donde cada* P_i *es un polinomio de* n *variables, entonces el espectro* $\sigma_r^I(a_1, \ldots, a_n)$ *satisface la propiedad del mapeo espectral.*

$$P(\sigma_r^I(\overline{a})\,) = \sigma_r^I(P(\overline{a}))$$

Demo: Análogo a la demostración del teorema 3.5.1, solo hay que considerar la multiplicación por la derecha.

$\blacksquare$

Capítulo 4

Conclusiones

Al comenzar el trabajo de investigación de la presente tesis el propósito fue estudiar un espectro combinado nuevo el cual generalizara al espectro combinado clásico estudiado desde principios de los 70's por R. E. Harte y al espectro esencial que se estudia en la teoría de operadores y en el que la conmutatividad del sistema de elementos del álgebra involucrados no fuera necesaria. Para visualizar la importancia de este nuevo espectro damos el siguiente ejemplo.

Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $L(\mathcal{H})$ el álgebra de operadores continuos sobre $\mathcal{H}$. Sean $T, S \in L(\mathcal{H})$ y sea $\mathcal{A}$ el álgebra generada por T, S. Considere el operador conmutador $[T, S] = T\,S - S\,T$. Suponiendo que el ideal izquierdo generado por $[T, S]\,\mathcal{A}$ es no trivial en $L(\mathcal{H})$, entonces por los teoremas 3.4.1 y 3.4.2, existen $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tales que $(\lambda, \mu) \in \sigma(T, S)$; esta es una condición más débil que pedir que el conmutador sea cero. Ahora, considérese $I =$

$L(\mathcal{H})[T,S]\mathcal{A}$ ideal izquierdo en $L(\mathcal{H})$, entonces el ideal $I_l(I, T-\lambda, S-\mu)$, (el ideal izquierdo generado por $I, T-\lambda$ y $S-\mu$) es un ideal propio, lo cual nos garantiza por el teorema (3.4.3) que el espectro σ_l^I es no vacío y además, para $P = (P_1, \ldots, P_n)$ un sistema de polinomios, en este caso de dos variables, se cumple la propiedad de mapeo espectral, es decir

$$\sigma_l^I(P_1(T,S), \ldots, P_n(T,S)) = P(\sigma_l^I(T,S)).$$

Sea $\mathcal{W}$ un álgebra de Waelbroeck localmente convexa, I un ideal izquierdo en $\mathcal{W}$. Considere el espacio cociente $X = \mathcal{W}/I$ el cual no necesariamente es álgebra de Banach, entonces la estructura del álgebra de operadores continuos $L(X)$ se complica enormemente, de hecho no existe siquiera una topología en $L(X)$ que haga continua la aplicación $L(X) \times X \ni (T,x) \to Tx \in X$. Así pues, desaparecen las propiedades del álgebra $L(X)$ que en el caso de álgebras de Banach permiten probar las propiedades del espectro clásico σ_l. En nuestro caso al fijar un ideal izquierdo I en el álgebra de Waelbroeck $\mathcal{W}$ y para un sistema de elementos $a_1, \ldots, a_n$ tales que $[A_i, a_j] \in I$ y $Ia_i \subset I$ para cada $1 \leq i, j \leq n$ definimos el espectro $\sigma_l^I(a_1, \ldots, a_n)$ y se demostró que este espectro es no vacío y cumple la propiedad de mapeo espectral para una familia de elementos no necesariamente conmutativos, la cual es una ventaja muy grande desde el punto de vista de la teoría espectral.

Por otro lado, el espectro σ_l^I puede interpretarse como funciones sobre operadores que actúan en el espacio $X = \mathcal{W}/I$ el cual, como ya dijimos arriba, no tiene una topología que permite deducir directamente las propiedades que se espera de un espectro. Sin embargo, ya que el espacio $X = \mathcal{W}/I$ contiene al vector cíclico $[e]$, esto es que $X = \mathcal{W}[e]$ para un sistema $a_1, \ldots, a_n$ tales que $[A_i, a_j] \in I$ y $Ia_i \subset I$ para cada $1 \leq i, j \leq n$, entonces a cada a_i le corresponde un operador $L(X) \ni R(a_i) : [x] \to [xa]$ el cual actúa en $X = \mathcal{W}/I$.

Bibliografía

[1] Arredondo J. H . y Wawrzyñczyk Antoni. *Medidad e integrales*, Colección CBI. Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa. 2010.

[2] Che–Kao Fong y Andrzej Soltysiak. *On the left and right joint spectra in Banach algebras*, Studia Mathematica 97(2). 1990.

[3] Dales H. G. *Banach Algebras and Automatic continuity,* Clerendon Press, Oxfort, 2000.

[4] Harte R. E. *Spectral mapping theorems*, Proc. R. Ir. Acad, Vol. 72, Sect. A, págs. 89–107. 1972.

[5] H. H. Schaefer. *Topological Vector Spaces*, Springer-Verlag, New York, USA. 1971.

[6] Janas Jan. *Note on the joint espectrum of the Wiener-Hopf operators.* Proc. American Math. Sci, Vol. 50. No. 1. 1975. PP. 303–308.

[7] Mallios A. *Topological Algebras. Seleted topics*, North Holland. 1986.

[8] Müller Vladimir. *Spectral theory of linear operators.* Czech Academic of Sciences, Birkhäuser. Germany.

[9] Müller Vladimir y Andrzej Soltysiak. *Spectrum of generators of a nonconmutative Banach algebra* , Studia Mathematica, T. 93. págs 87–95. 1989.

[10] Pryde Alan y Andrzej Soltysiak. *On Join spectra of nonconmutating normal operators.* Bull. Austral. Math. Soc. Vol. 48. 1993. pp. (163–170).

[11] Rudin Walter . *Functional Analisis*, McGraw-Hill, New York, USA. 1979.

[12] Waelbroeck L. *Les algèbres a inverse continu,* C. R. Acad. Sci. Paris Ser. AB 238, 1954, Págs 640–641.

[13] Waelbroeck L. *Structure des algèbres a inverse continu,* ibid., Págs 762–764.

[14] Wawrzynczyk Antoni. *Joint spectra in Waelbroeck algebras*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3), Vol. 13, págs. 321–343, 2007.

[15] Wawrzynczyk Antoni. *Schur Lemma and the Spectral Mapping Formula*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. Vol. 55, No. 1, pás. 63–69, 2007.

[16] Wawrzynczyk Antoni . *Subsets of non-empty join spectum in topological algebras,* Matemática Bohemiana, en impreso.

[17] ZELAZKO W. *An Axiomatic approach to joint spectra I,* Studia Math, 64, 1979, Págs. 249–261.

[18] ZELAZKO W. *An Axiomatic approach to joint spectra I,* Studia Math, 64, 1979, Págs. 249–261.

[19] ZELAZKO W. *Operators on locally convex spaces, Operator theory*, Advances and applications, Vol. 187, págs 237–247. (2008).

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00179
Matrícula: 2153805793

SOBRE ESPECTROS COMBINADOS EN ÁLGEBRAS NO CONMUTATIVAS

En la Ciudad de México, se presentaron a las 13:00 horas del día 20 del mes de julio del año 2018 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. ANTONI ADAM WAWRZYÑCZYK WILKIEWICZ
DR. HUGO ARIZMENDI PEIMBERT
DR. JORGE RICARDO BOLAÑOS SERVIN

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

DE: JOSE RICARDO NUÑEZ HERNANDEZ

JOSE RICARDO NUÑEZ HERNANDEZ
ALUMNO

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

REVISÓ

LIC. JULIO CESAR DE LARA ISASSI
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA

PRESIDENTE

DR. ANTONI ADAM WAWRZYÑCZYK WILKIEWICZ

VOCAL

Hugo Arizmendi P.

DR. HUGO ARIZMENDI PEIMBERT

SECRETARIO

DR. JORGE RICARDO BOLAÑOS SERVIN