
“Convexificación en control óptimo para la gestión energética de termostatos”

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE:

**MAESTRA EN CIENCIAS
(MATEMÁTICAS APLICADAS E INDUSTRIALES)**

PRESENTA:

Brenda Abril Néquiz Guillén

Matrícula: 2233803357

Correo electrónico: *abril.nequiz@gmail.com*

DIRECTOR DE TESIS:

Dra. Karla Lorena Córtez del Río

Dr. Joaquín Delgado Fernández

JURADO

Presidente:

Dr. Baltazar Aguirre Hernández

Secretario:

Dr. Julio Ernesto Solís Daun

Vocal:

Dr. Jorge Antonio Becerril Gómez

Dra. Karla Lorena Córtez del Río

IZTAPALAPA, CIUDAD DE MÉXICO, A 12 DE DICIEMBRE DE 2025



Agradecimientos

*Si existiera una palabra capaz de expresar la valía, el profesionalismo y la calidad humana con la que fui guiada, motivada y acompañada tanto por la **Dra. Karla Cortez** como por el **Dr. Joaquín Delgado**, sin duda estaría aquí escrita. A ambos les agradecemos profundamente su dedicación, su apoyo constante, su ejemplo, su paciencia y la claridad con la que orientaron cada paso de este trabajo. Tuve el privilegio de contar con dos guías excepcionales, y valoro todo lo que aprendí de cada uno de ustedes.*

*Al **Dr. Baltazar Aguirre Hernández**, por la prestexa y el cuidado con que revisó este trabajo. Aprecio profundamente su profesionalismo y las orientaciones que aportaron claridad y solidez a esta tesis.*

*Al **Dr. Julio Solís Daun**, por su diligencia al revisar este trabajo y por las enseñanzas precisas y siempre amenas que han marcado mi formación.*

*Al **Dr. Jorge Antonio Becerril Gómez**, por sus comentarios y observaciones precisos, orientados al mejoramiento de este trabajo, y también por el apoyo que me brindó en esta labor.*

*Este proyecto fue realizado con el apoyo de la beca **CONAHCYT**, número 1329811. Agradecemos a esta institución por su valioso respaldo, sin el cual la culminación de este trabajo no habría sido posible.*

*“Du coup, la chenille a serré de toutes
ses forces ses petites et charnues excroissances
pour reprendre ce chemin-là.”*

A todos mis seres queridos

Índice general

Agradecimientos	I
Dedicatoria	II
Índice general	III
Índice de figuras	V
Nomenclatura	VII
Introducción	1
1. Motivación	3
1.1. El cambio climático antropogénico	3
1.2. La crisis energética mundial actual	4
1.2.1. La transición energética actual	5
1.2.2. Electrificación	6
1.3. Energías renovables	6
1.4. Energía y usuarios	8
1.5. Energía en México	8
1.5.1. Precios de la electricidad en México	9
1.6. Soluciones a la problemática mediante el uso de la teoría de control óptimo	11
2. Teoría del control óptimo	12
2.1. El problema del control óptimo	13
2.2. Condiciones necesarias: Principio del Mínimo de Pontryagin	14
2.3. Suficiencia	19
2.4. Restricciones de estado	20

2.5. Resultados de relajación y de existencia	22
2.6. Teorema de existencia	23
3. Convexificación en control óptimo para la gestión energética de termostatos	25
3.1. Planteamiento del problema de gestión energética	25
3.2. Tratamiento de las restricciones de estado	28
3.3. Convexificación del conjunto de controles	29
3.3.1. Control equivalente implementable	30
3.4. Condiciones necesarias de optimalidad para el problema relajado	31
4. Simulaciones	34
4.1. <i>ICLOCS</i>	34
4.2. Resultados de la simulación con temperatura ambiente constante	35
4.3. Segunda simulación	38
4.3.1. Obtención del control implementable	39
4.3.2. Obtención de las trayectorias	40
4.3.3. Obtención del costo	41
4.4. Temperatura exterior sinusoidal	42
4.5. Temperatura exterior constante con un término de penalización	45
4.6. Temperatura exterior sinusoidal con un término de penalización	48
5. Resultados y conclusiones	51
Apéndices	55
A. Precios de la energía eléctrica en México.	55
B. Teoremas	56
C. Justificación de la obtención numérica de lambda	57
D. Códigos	59
Bibliografía	71

Índice de figuras

1.1. Temperatura media mínima mensual en ($^{\circ}$) C en México en julio de 2024. Se observa que la mayoría de los estados encuentra su media mínima por encima de los 20°C [1].	10
3.1. Escenario del problema de gestión energética. Se tiene un conjunto de n espacios interiores, por ejemplo, que cuentan con acondicionadores de aire cuya energía es suministrada por una tecnología verde, en este caso celdas solares conectadas a una central de almacenamiento energético.	26
3.2. Escenario del espacio interior: cada interior está en contacto con el ambiente de temperatura exterior $\hat{x}$ y tiene un acondicionador de aire, con control (ON/OFF). Cada espacio tiene sus propios coeficientes térmicos α_i y β_i	27
4.1. Gráficas de la reproducción del artículo [2], obtenidas con ICLOCS, para el caso de una temperatura exterior constante de 30°C y precio monótono creciente. . .	37
4.2. Trayectorias óptimas de las variables de estado y secuencia de entradas óptimas obtenidas con ICLOCS con base en el artículo [2] para el caso de una temperatura exterior constante de 30°C y precio monótono creciente.	38
4.3. Controles intermedios óptimos y equivalentes implementables para el caso de $\hat{x} = 30^{\circ}\text{C}$. Arriba: controles óptimos para el problema convexo $\hat{u}_1$ y $\hat{u}_2$ obtenidos con ICLOCS. Abajo: controles equivalentes implementables $\tilde{u}_1$ y $\tilde{u}_2$ obtenidos tras la obtención de cada λ_{ij}	40
4.4. Gráficas de las variables de estado para el caso de $\hat{x} = 30^{\circ}\text{C}$. Arriba: Trayectorias óptimas obtenidas mediante ICLOCS. Abajo: Trayectorias obtenidas con los controles equivalentes implementables $\tilde{u}_1$, verde, y $\tilde{u}_2$, rojo.	41
4.5. Costo acumulado para el caso de $\hat{x} = 30^{\circ}\text{C}$ tras la operación de ambos controles equivalentes implementables en sus respectivos interiores: en verde para el interior 1 y en rojo para el interior 2.	42
4.6. Variación de la temperatura a lo largo de un día caluroso.	43

4.7. Trayectorias óptimas y controles intermedios óptimos obtenidos con ICLOCS para el caso de una temperatura exterior sinusoidal.	44
4.8. Controles intermedios óptimos y equivalentes implementables para el caso de una temperatura exterior de tipo sinusoidal. Arriba: controles óptimos para el problema convexo $\hat{u}_1$ y $\hat{u}_2$ obtenidos con ICLOCS. Abajo: controles equivalentes implementables $\tilde{u}_1$ y $\tilde{u}_2$ obtenidos tras el cálculo de cada λ_{ij}	44
4.9. Gráficas de las variables de estado para el caso de $\hat{x}$ sinusoidal. Arriba: Trayectorias óptimas obtenidas mediante ICLOCS. Abajo: Trayectorias obtenidas con los controles equivalentes implementables $\tilde{u}_1$, verde, y $\tilde{u}_2$, rojo.	45
4.10. Costo acumulado para el caso de $\hat{x}(t)$ sinusoidal tras la operación de ambos controles equivalente implementables en sus respectivos interiores.	46
4.11. Trayectorias de $x_1(t)$ y $x_2(t)$ obtenidas a partir de los controles equivalentes implementables $\tilde{u}_1$ y $\tilde{u}_2$ para el caso de temperatura exterior constante y un término de penalización.	47
4.12. Gráficas de las variables de estado para el caso de $\hat{x} = 30^\circ\text{C}$ y un término de penalización. Arriba: Trayectorias óptimas obtenidas mediante ICLOCS. Abajo: Trayectorias obtenidas con los controles equivalentes implementables $\tilde{u}_1$, verde, y $\tilde{u}_2$, rojo.	48
4.13. Controles óptimos y equivalentes implementables para el caso de una temperatura exterior sinusoidal y un término de penalización. Arriba: controles óptimos convexos $\hat{u}_1$ y $\hat{u}_2$ obtenidos con ICLOCS. Abajo: controles equivalentes implementables $\tilde{u}_1$ y $\tilde{u}_2$ obtenidos tras la obtención de cada λ_{ij}	49
4.14. Gráficas de las variables de estado para el caso de una temperatura exterior sinusoidal y un término de penalización. Arriba: Trayectorias óptimas obtenidas mediante ICLOCS. Abajo: Trayectorias obtenidas con los controles equivalentes implementables $\tilde{u}_1$, verde, y $\tilde{u}_2$, rojo.	50
4.15. Costo acumulado para el caso de una temperatura exterior sinusoidal y un término de penalización tras la operación de ambos controles equivalentes implementables en sus respectivos interiores.	50
5.1. Comprobación de los valores de los coestados.	53
5.2. Comprobación de los valores de los coestados: temperatura sinusoidal con penalización.	54

Nomenclatura

General

$[n]$	La colección de los naturales que van desde 1 hasta n
$\mathbb{N}$	Números naturales
$\mathbb{R}$	Números reales
Ω	Dominio del funcional J

Parámetros del problema

α_i	Coefficiente de convección del i -ésimo sistema
β_i	Coefficiente térmico del i -ésimo sistema
λ_{ij}	j -ésimo intervalo de conmutación para el i -ésimo sistema.
L_i	Valor mínimo de confort térmico
U_i	Valor máximo de confort térmico

Variables del problema

ΔJ	Incremento del funcional J
δu	Variación de la función u .
$\eta(t)$	Multiplicador de Lagrange para la restricción de estado
$\hat{u}(t)$	Vector de control convexo
$\hat{x}(t)$	Temperatura Exterior
$\pi(t)$	Precio de la energía eléctrica consumida (kW/h)
$\tilde{u}(t)$	Vector de control equivalente implementable
E	Energía total disponible

e^{tA}	Exponencial de la matriz A
f_u	Dada $f(t, x, u)$, primera derivada parcial de f respecto a u
f_{xx}	Dada $f(t, x, u)$, segunda derivada parcial de H respecto a x
$g(t, x, u)$	Dinámica del sistema
H	Función hamiltoniana
J	Funcional de costo
$P(t)$	Potencia requerida por cada AC encendido
$p(t)$	Vector de coestado
T	Tiempo final
t	Tiempo
$u(t)$	Vector de control o simplemente control
$x'(t)$	Primera derivada del vector de estado respecto al tiempo
$x(t)$	Vector de estado
x_{i0}, t_0	Vector de estado del i -ésimo sistema en la condición inicial

Introducción

En las últimas décadas, el incremento en el consumo de energía eléctrica, junto con el calentamiento global, ha generado un círculo vicioso: el aumento de las temperaturas intensifica el uso de acondicionadores de aire, lo que a su vez implica un mayor consumo de electricidad y, en consecuencia, una mayor contribución al cambio climático. Este escenario plantea un problema crítico no solo por las limitaciones en la generación eléctrica, sino también por el impacto ambiental, la explotación de recursos y los costos económicos asociados.

En este trabajo se aborda el problema de la gestión energética de un conjunto de acondicionadores de aire desde la perspectiva de la teoría del control óptimo con el objetivo de mantener la temperatura de los interiores dentro de un rango de confort térmico, garantizando al mismo tiempo la eficiencia en el consumo de energía.

Diversos trabajos han aplicado herramientas de control óptimo a la optimización de sistemas energéticos. Particularmente, en [2] se propone un modelo para planificar el consumo de cargas termostáticas con el fin de minimizar el costo de energía sin salir del intervalo de confort térmico. Esta tesis retoma dicho planteamiento y lo extiende hacia una aplicación concreta, incorporando además nuevas estrategias que permitan obtener soluciones implementables.

Otros enfoques relacionados incluyen la estrategia de control en cascada desarrollada en [3] para sistemas de energía eólica aérea, orientada a mantener condiciones que aseguren la máxima extracción de potencia sin comprometer la estabilidad, así como el trabajo de planificación estratégica para la captura de carbono en [4]. Aunque en distintos contextos, estos estudios comparten el objetivo de diseñar estrategias de control óptimo que permitan gestionar recursos energéticos bajo restricciones dinámicas.

El problema de gestión energética se formula a partir de la ley de enfriamiento de Newton para un conjunto de n interiores en contacto con un ambiente térmico externo, considerando que la energía proviene de una fuente renovable con capacidad de almacenamiento finita. El

carácter híbrido del problema —dinámicas continuas en el tiempo y controles discretos— motivó la aplicación de una convexificación que permitió utilizar el solucionador *ICLOCS* y posteriormente, la obtención de un control equivalente implementable. Este control fue materializado mediante el desarrollo de código propio en MATLAB, lo que constituye una de las principales aportaciones de este trabajo. Finalmente, se propuso una reformulación con penalización destinada a garantizar la existencia de soluciones al problema planteado.

La tesis se organiza de la siguiente manera. En el capítulo 1 se introduce la problemática de la gestión energética en el contexto del suministro finito de energía eléctrica y sus implicaciones ambientales y económicas. En el capítulo 2 se presentan los fundamentos teóricos del control óptimo necesarios para la obtención de las soluciones y del control equivalente implementable, así como las hipótesis a cumplirse para garantizar la existencia de soluciones. En el capítulo 3 se detalla la formulación del problema de gestión energética, junto con las propiedades de la función hamiltoniana asociada. En el capítulo 4 se muestran las simulaciones realizadas para los casos de temperatura exterior constante y sinusoidal, incluyendo la solución obtenida con *ICLOCS* y la construcción del control equivalente mediante el código desarrollado en MATLAB. Finalmente, en el capítulo 5 se expone el análisis de resultados y las conclusiones principales.

Capítulo 1

Motivación

1.1. El cambio climático antropogénico

El aumento en la emisión de gases de efecto invernadero, la sobreexplotación de recursos naturales y los actuales patrones de consumo han ocasionado un aumento sostenido de temperatura de hasta 1.1°C en la superficie terrestre durante la última década [5]. El cambio climático antropogénico (es decir, causado por actividades humanas) es actualmente observable en cada región del mundo, directa o indirectamente, ya sea en forma de fenómenos climáticos extremos, alteraciones en los ecosistemas naturales, o como impactos negativos en la economía, en la seguridad alimenticia, en el acceso al agua y en la salud humana y de otras especies [5].

El incremento en la temperatura global ha repercutido negativamente en la calidad de vida humana mediante un aumento en la mortalidad, la morbilidad humana, las enfermedades transmitidas por vectores y en la salud mental [6]; además, en el cambio de los movimientos migratorios y en la pérdida de medios de vida y cultura [5]. Consecuentemente, y gracias al alto nivel de confianza de las pruebas que corroboran su existencia, a las crecientes ambiciones internacionales de acción climática y al aumento paulatino de la conciencia pública, el cambio climático antropogénico se ha establecido como uno de los principales retos a superar en la agenda mundial, lo que se ha traducido en la creación de políticas para su mitigación.

En este sentido, cabe destacar el Acuerdo de París como la política de alcance mundial más ambiciosa de los últimos años para combatir el cambio climático antropogénico y en cuyo artículo segundo se establece que tiene el objetivo de “*reforzar la respuesta mundial a la amenaza del cambio climático, en el contexto del desarrollo sostenible y de los esfuerzos*

por erradicar la pobreza, y para ello:

- a) *Mantener el aumento de la temperatura media mundial muy por debajo de 2°C con respecto a los niveles preindustriales, y proseguir los esfuerzos para limitar ese aumento de la temperatura a 1.5°C con respecto a los niveles preindustriales, reconociendo que ello reduciría considerablemente los riesgos y los efectos del cambio climático;*
- b) *Aumentar la capacidad de adaptación a los efectos adversos del cambio climático y promover la resiliencia al clima y un desarrollo con bajas emisiones de gases de efecto invernadero, de un modo que no comprometa la producción de alimentos; y*
- c) *Situar los flujos financieros en un nivel compatible con una trayectoria que conduzca a un desarrollo resiliente al clima y con bajas emisiones de gases de efecto invernadero” [7].*

Con el fin de alcanzar los objetivos del Acuerdo de París y de otras iniciativas similares, las naciones firmantes se han propuesto reducir drásticamente el uso de combustibles fósiles, crear políticas públicas para la conversión a tecnologías de baja emisión de gases de efecto invernadero y promover la conciencia social e individual para reducir el consumo eléctrico indiscriminado [6].

Ahora, podría parecer contradictoria la urgencia en la transición energética a tecnologías que funcionan con energías renovables de bajas emisiones dadas la mayor eficiencia energética y la menor huella de carbono de la tecnología actual; sin embargo, el estilo de vida moderno ha conducido a un consumo energético desmedido, no equitativo y encarecido que no puede ser cubierto en su totalidad y que además es producido mayormente por el sector energético basado en el uso de combustibles fósiles, los cuales producen alrededor de tres cuartas partes de las emisiones mundiales de gases de efecto invernadero.

Así, una acción central para lidiar con las consecuencias del cambio climático antropogénico es promover un desarrollo sostenible que considere el proceso de electrificación actual y la transición a formas limpias de generación de electricidad. De esta manera, la generación de energía limpia y asequible se vuelve clave para el desarrollo de la agricultura, las empresas, las comunicaciones, la educación, la sanidad y el transporte [8].

1.2. La crisis energética mundial actual

La Agencia Internacional de la Energía ha señalado que la precipitada recuperación económica ocurrida inmediatamente después de la pandemia de COVID-19, la invasión rusa

a Ucrania de 2022¹, las adversas condiciones meteorológicas registradas recientemente en varias partes del mundo, el aplazamiento en los trabajos de mantenimiento de la infraestructura energética y las decisiones tomadas por los países exportadores y las compañías de petróleo y gas para reducir inversiones han generado récords en los precios del gas natural, del petróleo y de la energía eléctrica, así como también han acelerado la escasez de combustible, el aumento en la inflación y en la pobreza, lo cual a su vez ha ralentizado el crecimiento económico hasta el punto de que algunos países van en camino a una fuerte recesión [9].

La crisis energética actual concierne a todos los combustibles fósiles. Luego, esta crisis ha ocasionado encarecimiento de servicios y productos, cortes en el suministro eléctrico y tensiones económicas, sociales y políticas a nivel mundial. Más aún, algunos países han retomado e incluso ampliado el uso de carbón para generar electricidad como estrategia para emparchar el impacto de esta problemática [9]. Estas acciones alejan a la humanidad de poder cumplir con los acuerdos necesarios contra el cambio climático antropogénico.

1.2.1. La transición energética actual

En el contexto de la crisis energética mundial actual, la transición energética adquiere un rol medular. La transición energética no es característica de la época contemporánea. A lo largo de los últimos mil años la humanidad ha experimentado muchas transiciones energéticas: de la fuerza muscular a las energías hidráulica y eólica; de la energía hidráulica a la de vapor; del carbón al petróleo y al gas; de la luz de gas a la luz eléctrica; de los vehículos de tracción animal a los automóviles; y así sucesivamente. Cada nueva forma de energía se fue integrando en el sistema socioeconómico y nunca reemplazó por completo a las formas anteriores. Las transiciones energéticas son progresivas y no solo conciernen a la fuente de energía sino también a cómo se convierte, almacena y utiliza la energía misma [10].

La transición energética actual se centra en el cambio de fuentes convencionales de energía para generar electricidad por fuentes basadas en energías renovables. Así, este proceso procura el decrecimiento en la producción de energía mediante combustibles fósiles [10]. A la par de la transición energética actual se tiene la electrificación masiva de los distintos sectores de la actividad humana, como lo son la industria, el transporte, los comercios, la vivienda y los sectores económicos por lo cual el éxito de esta transición dependerá de generar cambios fundamentales en las arquitecturas energéticas de cada sector de actividad que aseguren menores costos tanto ambientales como económicos [11].

¹Rusia es el mayor exportador de combustibles fósiles del mundo [9].

1.2.2. Electrificación

La acelerada expansión actual del uso de la electricidad como medio de energía para realizar trabajo con diversos fines y a distintas escalas responde no solo a la versatilidad y a la controlabilidad de esta forma de energía, sino también a la posibilidad de que esta sea generada a partir de energías renovables y de bajas emisiones de carbono. En ese sentido, investigaciones recientes señalan que el presente proceso de electrificación se encuentra en una etapa con características propias de cambios en la estructura energética y por ende que es fundamental realizar investigación interdisciplinaria que integre los campos de ingeniería, informática, ecología, economía y gestión. Con este enfoque, se hace factible una mayor eficiencia energética y un aumento en la generación de electricidad a partir de fuentes renovables, viabilizando la posibilidad de mantener estable el costo para los consumidores [11].

Recientemente ha surgido una nueva fase de electrificación: la creación de ciudades inteligentes [12], en esta las estructuras separadas de suministro de energía, calor, gas, agua, y de telecomunicaciones forman un *sistema de sistemas* que requiere nuevos enfoques de control y despacho [11]. Así, ante los nuevos retos que supone el fenómeno de electrificación es importante abordar las soluciones a su problemática de manera interdisciplinaria, es decir, incluyendo desde el diseño físico, la arquitectura de funcionamiento, la creación y distribución de las tecnologías, el almacenamiento energético, etc, hasta la operación de los usuarios para garantizar soluciones reales a mediano y largo plazo.

1.3. Energías renovables

Las energías renovables consisten en aquellas formas de energía que son producidas por fuentes naturales cuyas tasas de renovación son mayores a sus respectivas tasas de consumo. Dada su abundancia en los entornos naturales, las fuentes de energías renovables son capaces de proveer de manera sostenible la energía necesaria para cubrir las necesidades humanas básicas e industriales. Más aún, la generación de electricidad a partir del aprovechamiento de fuentes de energías renovables produce emisiones netas de gases de efecto invernadero menores que aquellas resultantes de la quema de combustibles fósiles, de manera que este tipo de fuentes de energía tiene un papel destacado en las acciones llevadas a cabo para mitigar el cambio climático antropogénico [11, 13, 14].

El Grupo Intergubernamental de Expertos sobre el Cambio Climático de la Organización de las Naciones Unidas establece en su *informe sobre fuentes de energía renovables y mitigación del cambio climático* que las fuentes de energía de nulas o bajas emisiones de carbono son: la solar, la eólica, la geotérmica, la hidroeléctrica y la oceánica [13].

La energía contenida en la radiación electromagnética proveniente del Sol puede aprovecharse actualmente de forma sistemática a través de paneles solares y colectores solares para contribuir con el suministro eléctrico y térmico, respectivamente, a nivel tanto doméstico como industrial [11, 13]. La energía solar tiene las ventajas de ser hoy en día económicamente accesible, esencialmente inagotable y de producción local. La energía cinética del viento, por otro lado, es ampliamente aprovechada alrededor del mundo mediante el uso de turbinas eólicas para generación de electricidad. Aún cuando los vientos son variables y mayormente impredecibles, el desarrollo de fuentes de energía eólica no se ha encontrado con obstáculos técnicos insuperables [13].

Las fuentes de energía geotérmicas utilizan la energía térmica generada naturalmente en el interior de la Tierra. Una vez extraída, la energía geotérmica puede utilizarse como suministro de energía térmica o para producir electricidad, mediante gradientes de temperatura. Contrario a las fuentes solares y eólicas, las fuentes geotérmicas son constantes y, por ende, ofrecen un suministro energético ininterrumpido [13].

Por otra parte, la energía asociada al movimiento del agua cuando esta desciende de forma pronunciada ha sido aprovechada históricamente para la realización de trabajo. Particularmente, las centrales hidroeléctricas generan electricidad de esta forma a partir de embalses y turbinas hidráulicas [14]. La producción de hidroelectricidad tiene la ventaja de ser controlable, por lo que permite cubrir los picos de demanda eléctrica y ayuda a equilibrar los suministros eléctricos de aquellas fuentes renovables de producción variable [13]. Más aún, la creación de embalses para las centrales hidroeléctricas trae consigo beneficios adicionales para la vida humana como son suministros de agua potable para consumo o riego, control de crecidas de los ríos, entre otros.

Finalmente, las fuentes de energía oceánica aprovechan la energía potencial, cinética, térmica o química del mar mediante tecnologías como muros de contención de mareas, turbinas submarinas y una gran diversidad de dispositivos que permiten explotar la energía del oleaje y de los gradientes de salinidad para la generación de electricidad. Al tener su origen en fenómenos con diferentes grados de predictibilidad, las fuentes de energía oceánica pueden ser suministros energéticos de régimen variable, constante e incluso controlable [13].

La implementación exitosa de la transición energética a energías renovables requiere necesariamente de la optimización y la adecuación de las diferentes tecnologías existentes para volverlas más eficientes y de menor impacto medioambiental [11, 13]. Sin estas medidas preventivas, un incremento desmedido en la dependencia del suministro eléctrico en las fuentes de energías renovables podría conducir a fallos de abastecimiento dadas la variabilidad, disponibilidad por ubicación, capacidad de abastecimiento y otras especificaciones

técnicas de este tipo de fuentes [11].

1.4. Energía y usuarios

Las fluctuaciones generadas por la creciente demanda de electricidad en las redes de suministro eléctrico han ocasionado recientemente interrupciones en el servicio que han afectado de manera directa a la población civil. Como respuesta a esta problemática se ha propuesto una serie de medidas cuyo fin es reducir estas fluctuaciones, entre las cuales destaca el incentivar a los usuarios a ajustar sus patrones de consumo. Un ejemplo de este tipo de estrategias es la técnica de respuesta a la demanda, la cual tiene por objetivo reducir el uso de energía eléctrica durante los picos de consumo, ocasionando además un decremento de la variabilidad de la demanda [15].

Las principales variables que influyen en la demanda de energía eléctrica son la hora del día, el día de la semana, las festividades, el mes del año, las condiciones meteorológicas, especialmente la temperatura media del ambiente; y el precio. La variabilidad de la demanda de energía eléctrica, la cual puede darse a lo largo de los días e incluso a lo largo de las horas del día, genera una incertidumbre al sistema eléctrico que afecta de forma significativa el costo final de este servicio [16]. Este costo involucra la generación, el almacenamiento, el suministro y el consumo de este bien. Por lo tanto, el optimizar el consumo de energía eléctrica involucra a todos los sectores y beneficia no solo a los proveedores sino también a los usuarios finales.

1.5. Energía en México

La producción de electricidad en México tiende a ajustarse estrechamente a su demanda, la cual está impulsada por el crecimiento económico y poblacional, así como por los cambios en la estructura de la economía. En México, la electricidad se utiliza principalmente para calefacción, refrigeración, iluminación, cocina y para alimentar dispositivos, electrodomésticos y equipos industriales. El consumo eléctrico per cápita en México en 2023 fue de 2.42 MWh / Capita [17].

Uno de los usos domésticos que mayor cantidad de energía eléctrica consume es el destinado al confort térmico por medio de acondicionadores de aire. Considerando la ubicación geográfica de México, y que buena parte del año las temperaturas se encuentran por encima de los 25°C en diversas entidades del país, véase por ejemplo el mapa de la figura (1.1), la climatización resalta como una demanda considerable al suministro energético así como un gasto importante para los consumidores.

Por ello, la Comisión Federal de Electricidad (CFE) ha emitido una serie de recomendaciones para no provocar un aumento considerable en la demanda de energía eléctrica durante el verano, especialmente entre las 6:30 pm y la 1:00 am. De acuerdo con la CFE este exceso en la demanda es ocasionado principalmente por el uso simultáneo de equipos eléctricos para refrescar los hogares y el consumo habitual de luces, pantallas, lavadoras y otros electrodomésticos [18].

Aunado a lo anterior, las recomendaciones incluyen ajustar los equipos acondicionadores de aire a no menos de 23°C y la planificación de actividades en las que se requiera utilizar electrodomésticos en horarios fuera de los picos de demanda [18]. De esta manera se entrevé que la solución al problema de la electrificación depende tanto de la generación de energía eléctrica a partir de fuentes de cero o bajas emisiones de gases causantes del efecto invernadero, del almacenamiento y de la distribución adecuados y del mantenimiento y mejoras constantes en la infraestructura eléctrica, como del consumo responsable por parte del usuario.

Adicionalmente, resulta indispensable la participación activa de los desarrolladores tecnológicos en la mejora de sus dispositivos, orientándolos hacia una mayor eficiencia energética. Para ello, se deben implementar políticas públicas que obliguen a las empresas del sector a optimizar el desempeño energético de sus productos y a establecer límites en las emisiones de gases de efecto invernadero. Entre estas medidas destacan los sistemas de etiquetado como *Energy Star*, que identifica productos que cumplen con estándares de eficiencia más estrictos que los convencionales, así como las Normas Oficiales Mexicanas (NOM), las cuales han demostrado beneficios tanto en la reducción del consumo energético como en la generación de ahorros económicos [19, 20].

Para determinar qué acondicionador de aire es superior en términos de eficiencia se deben considerar la eficiencia energética, la capacidad de enfriamiento, si cuenta con certificación *Energy Star* y el costo a largo plazo dado por la relación entre el consumo energético, el mantenimiento y la vida útil, más allá del precio inicial de compra [21]. Finalmente, cabe destacar que dentro del sector privado se tiene la opinión de que establecer políticas adecuadas para estandarizar las tecnologías ha permitido competencias más equitativas [20].

1.5.1. Precios de la electricidad en México

La Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP) es la entidad encargada de establecer las tarifas finales de energía eléctrica del suministro básico a usuarios domésticos. Esta tarifa se ajusta dependiendo de la localidad y de la temporada. Particularmente, para establecer la tarifa en una localidad se considera la temperatura media mínima en verano en grados

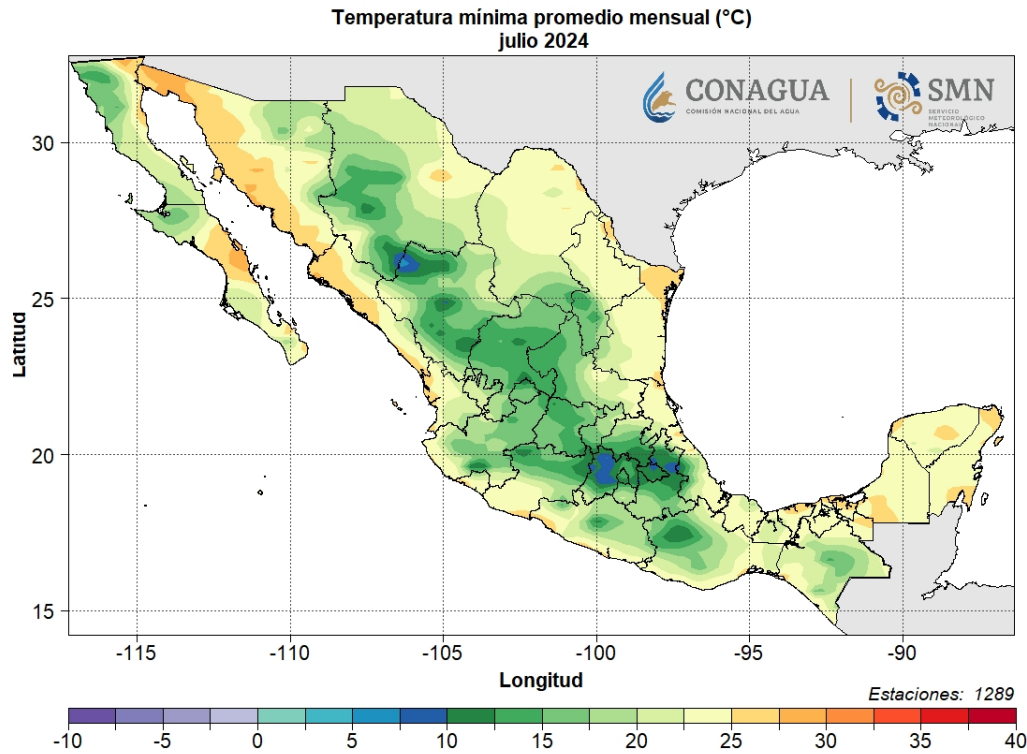


Figura 1.1: Temperatura media mínima mensual en (°) C en México en julio de 2024. Se observa que la mayoría de los estados encuentra su media mínima por encima de los 20°C [1].

centígrados; así, las tarifas tipo 1A son las que encuentran su temperatura media mínima en 25°C, la 1B en 28°C, la 1C en 30°C, la 1D en 31°C, la 1E en 32°C y la 1F en 33°C [22]. En la tabla (A.1), mostrada en el apéndice A, se puede observar la tarifa establecida por la SHCP para el año 2025.

Por otro lado, respecto a la temporalidad, la CFE cuenta con una tarifa diferente para la mayoría de localidades en el país durante el verano, definido por esta comisión como “*el período que comprende los seis meses consecutivos más cálidos del año*” [22], lo cual, si bien implica una reducción en la tarifa por kWh en el consumidor, al final impacta directamente en los precios en todas las etapas que involucren el uso del sistema eléctrico, pues se tiene una mayor demanda, como se mencionó previamente.

1.6. Soluciones a la problemática mediante el uso de la teoría de control óptimo

Diversos objetivos relacionados con la sostenibilidad —como la planificación estratégica para maximizar la captura de carbono [4], la reducción del consumo de combustible [23], de emisiones de gases de efecto invernadero [24, 25], del uso de gas natural [26] y del consumo eléctrico en vehículos híbridos enchufables [27, 28]— así como la mejora en la eficiencia de tecnologías verdes [29], la optimización del pronóstico de demanda energética [16] y la promoción del desarrollo sostenible [30], han sido abordados mediante la formulación de problemas que restringen o penalizan el uso de ciertos recursos y buscan maximizar el rendimiento de otros. Estos objetivos se pueden modelar, estudiar y resolver mediante herramientas de cálculo de variaciones y control óptimo, tales como el Principio del Máximo de Pontryagin y otras técnicas geométricas y de análisis funcional.

Estas problemáticas implican la toma de decisiones secuenciales en el tiempo, dentro de sistemas gobernados por dinámicas complejas [30]. Para abordarlas, se recurre a la modelación matemática y a la optimización de una función objetivo mediante herramientas de la teoría de control óptimo. Entre las estrategias utilizadas se encuentran la Estrategia de Minimización de Consumo Equivalente (ECMS) aplicada a vehículos PHEV, la programación económica de sistemas eléctricos con integración de fuentes renovables y almacenamiento, y la optimización de trayectorias bajo distintas restricciones operativas.

En esta tesis se estudia la minimización del costo asociado al consumo de energía eléctrica en un sistema de acondicionadores de aire, considerando un suministro energético limitado y la necesidad de mantener la temperatura dentro de rangos de confort en espacios cerrados e independientes. Este objetivo no solo busca optimizar el uso de recursos, considerando además la variabilidad en la disponibilidad de fuentes renovables como la energía solar, sino también minimizar el costo final de operación y la demanda total de energía. Para ello, se emplean herramientas teóricas y numéricas del control óptimo que permiten modelar y resolver este tipo de problemas de manera rigurosa. En el capítulo siguiente se presentan los principales resultados teóricos que servirán de base para el desarrollo de la metodología propuesta.

Capítulo 2

Teoría del control óptimo

Si las decisiones del presente no afectaran el futuro sería suficiente tomar la mejor decisión para el presente a cada instante [31]. Sin embargo, las decisiones del presente afectan los eventos del futuro ya sea volviéndolos realizables, imposibles o alterando sus costos.

La teoría del control óptimo se centra en encontrar las mejores decisiones para moldear, a conveniencia, los eventos del futuro. El génesis de la teoría de control óptimo se sobrepone con el del cálculo de variaciones y puede rastrearse hasta los orígenes de la antigua Grecia, en la cual ya se conocía que el camino más corto entre dos puntos está dado por una línea recta y que la solución del problema isoperimétrico, también conocido como problema de la reina Dido, es un círculo [32].

Después de más de 25 siglos, la teoría del control óptimo resurgió de la solución hallada al problema de la braquistócrona de Johann Bernoulli en 1697 que posteriormente fue estudiada y ampliada por Euler y Lagrange. A su vez, las ecuaciones de Euler y Lagrange fueron reformuladas por Hamilton y formalizadas por Weierstrass [32]. En el siglo pasado, la teoría del control óptimo fue rigurosamente formulada durante la década de 1950 en la Unión Soviética por L. S. Pontryagin y sus colaboradores [31], en un ambiente marcado por la búsqueda de aplicaciones militares en la Guerra Fría.

Si bien, durante el siglo pasado se consideraba como una parte del cálculo de variaciones [31, 32], en la actualidad, la teoría de control óptimo ha sido complementada y formalizada por muchos otros investigadores en todo el mundo y se considera que es, en realidad, una generalización mucho más rica y amplia que el cálculo de variaciones. Afortunadamente, sus aplicaciones van mucho más allá de lo militar. Un ejemplo de ello es el presente trabajo, que busca contribuir a la determinación de estrategias óptimas para mantener un ambiente

en confort térmico mediante un uso adecuado de la energía disponible, siguiendo enfoques previamente estudiados en la literatura [2, 33] pero, aportando nuevas perspectivas y mejoras.

2.1. El problema del control óptimo

En la teoría del control óptimo se pretende dominar el estado de un sistema mediante controles con el objetivo de optimizar un *funcional*. Un funcional es una regla de correspondencia que asigna a cada función $x \in \Omega^1$ un único número real; intuitivamente, se dice que un funcional es una función de funciones [34, 35]. En este contexto, optimizar significa encontrar la función que minimiza o maximiza un funcional, la cual recibe el nombre de extremal. Así, se tiene que la función u^* es un mínimo relativo para el funcional J si el incremento $\Delta J(u, u^*) := J(u) - J(u^*) \geq 0$.

Ahora, el funcional que se desea minimizar puede estar sujeto a ciertas restricciones, que pueden estar escritas en forma de igualdades, desigualdades o ambas. Al minimizar, es primordial fijar un objetivo dependiente de las variables características del sistema. Esto se condensa en el problema fundamental del control óptimo, el cual busca minimizar el funcional de costo, J , siguiente,

$$J = \int_{t_0}^{t_f} f(t, x(t), u(t)) dt, \quad (2.1)$$

donde

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)),$$

es el vector de estado, con $n \in \mathbb{N}$, que es dirigido a un objetivo específico mientras es gobernado por el vector de ecuaciones diferenciales de primer orden²

$$x'(t) = g(t, x(t), u(t)),$$

también llamado *dinámica del problema* [34], y donde

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_K(t)),$$

con $K \in \mathbb{N}$, $K \leq n$, es el vector o la *función de control*. Al conjunto de valores que puede tomar la función de control u se le llama *conjunto de controles admisibles* y se le denota

¹ Ω es el dominio del funcional.

²Cualquier problema que contenga derivadas de orden mayor puede transformarse en uno cuya derivada de mayor orden sea uno.

por U . Además, f y g son funciones continuamente diferenciables de los tres argumentos independientes t , x y u , ninguno de los cuales es una derivada, es decir, $f(t, x(t), u(t))$ y $g(t, x(t), u(t))$ no dependen de ninguna derivada de x o de u como lo serían x'' o u' , etc. Además, se considera que t_0, t_f y $x(t_0) = x_0$ están fijos pero $x(t_f)$ es libre [31]. A la función f se le suele llamar *función de costo corriente*.

El problema del control óptimo

$$\text{mín } \int_{t_0}^{t_f} f(t, x(t), u(t)) dt, \quad (2.2)$$

$$\text{sujeto a } x'(t) = g(t, x(t), u(t)), \quad (2.3)$$

$$u(t) \in U(t) \text{ c. t. } t, \quad (2.4)$$

$$t_0, t_f, x(t_0) = x_0 \text{ fijas; } x(t_f) \text{ libre.} \quad (2.5)$$

Para incluir la dinámica en el problema de minimización óptima y encontrar las condiciones necesarias que deben cumplir nuestras variables se hará uso del teorema conocido como Principio del Máximo de Pontryagin enunciado para mínimos³.

2.2. Condiciones necesarias: Principio del Mínimo de Pontryagin

Físicamente, los controles realizables requieren tener magnitudes limitadas, que a menudo surgen como restricciones de estado, por ejemplo, la corriente en un motor eléctrico no debe exceder un cierto valor para no dañar las bobinas o el radio de giro de una aeronave de maniobra no puede ser inferior a un valor mínimo especificado [35].

Como se mencionó en la sección (2.1), en el problema de control óptimo el objetivo es encontrar el control óptimo, u^* , que haga que el funcional J tenga un mínimo relativo. Para que J tenga un mínimo se necesita que el incremento del funcional de costo, ΔJ , cumpla la siguiente desigualdad

$$\Delta J(u, u^*) := J(u) - J(u^*) \geq 0, \quad (2.6)$$

³Lev Semiónovich Pontryagin lo formuló como el Principio del Máximo pero debido a la naturaleza de los controles buscados se continuará con la notación para mínimos, la diferencia radica en el sentido de la desigualdad.

para todas las funciones de control u que toman valores en el conjunto de controles admisibles $U \subset \mathbb{R}^K$, suficientemente cercanas a u^* . Nótese que tomando $u = u^* + \delta u$, lo suficientemente “cercana” a u^* , entonces el incremento en J puede expresarse como

$$\Delta J(u^*, \delta u) = \delta J(u^*, \delta u) + \mathcal{O}([\delta x(t)]^2, [\delta x'(t)]^2), \quad (2.7)$$

donde $x(t)$ es la trayectoria óptima resultante y $\mathcal{O}([\delta x(t)]^2, [\delta x'(t)]^2)$ son los términos de orden cuadrático o superior. En este caso δu corresponde a la variación de la función u y δJ es la variación del funcional J evaluada para u . Por definición, δJ incluye únicamente los términos lineales en δu ; además, se tiene que los términos de orden superior, los cuales dependen de la norma de u , tienden a cero cuando $\|\delta u\| \rightarrow 0$, [35].

Considerando todas las variaciones con $\|\delta u\|$ suficientemente pequeña tal que el signo de ΔJ esté determinado por δJ , entonces, la condición necesaria para que u^* minimice J , ecuación (2.6), es equivalente a

$$\delta J(u^*, \delta u) \geq 0. \quad (2.8)$$

Para incluir la dinámica del problema, (2.3), en el problema de minimización, ecuación (2.6), se define el funcional aumentado J_g mediante la introducción de los multiplicadores de Lagrange $p(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t))$:

$$J_g(u) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ f(t, x(t), u(t)) + p(t) \left[g(t, x(t), u(t)) - x' \right] \right\} dt; \quad (2.9)$$

también, se define la función de costo aumentada f_g

$$f_g(x(t), x'(t), u(t), p(t), t) := f(t, x(t), u(t)) + p(t) \left[g(t, x(t), u(t)) - x' \right], \quad (2.10)$$

de modo que el problema ahora es equivalente a minimizar J_g

$$J_g(u) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ f_g(x(t), x'(t), u(t), p(t), t) \right\} dt, \quad (2.11)$$

y por lo tanto se busca que $\delta J_g \geq 0$, equivalentemente a (2.8). Para determinar la variación de J_g considerando $x(t_0) = x_0$, t_0 y t_f fijas y $x(t_f)$ libre, se introducen las variaciones δx , $\delta x'$, δu y δp , de modo que al tener δJ_g evaluada en el control óptimo entonces se cumple⁴

⁴Este resultado es el teorema fundamental del cálculo de variaciones. Si u^* es un extremal, la variación de J debe anularse en u^* : $\delta J(u, \delta u^*) = 0$ para todos los δu^* admisibles.

que

$$\begin{aligned}
 \delta J_g(u^*) = 0 = & \left[\frac{\partial f_g}{\partial x'}(x^*(t_f), x'^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f) \right] \delta x_f \\
 & + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\left(\frac{\partial f_g}{\partial x'}(x^*(t_f), x'^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f) \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_g}{\partial x'}(x^*(t_f), x'^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f) \right) \right] \delta x(t) \right. \\
 & + \left[\frac{\partial f_g}{\partial u}(x^*(t_f), x'^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f) \right] \delta u(t) \\
 & \left. + \left[\frac{\partial f_g}{\partial p}(x^*(t_f), x'^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f) \right] \delta p(t) \right\} dt. \tag{2.12}
 \end{aligned}$$

Primero notamos que el término dentro de la integral se puede escribir explícitamente en términos de f , g y p como sigue

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) \right] + p^*(t) \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) \right] \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{d}{dt} [-p^*(t)] \right\} \delta x(t) + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), t) \right) + p^*(t) \left(\frac{\partial g}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), t) \right) \right] \delta u(t) \right. \\
 & \left. + \left[\left(g(x^*(t), u^*(t), t) - x' \right) \right] \delta p(t) \right\} dt; \tag{2.13}
 \end{aligned}$$

ahora, para cualquier extremal, sin importar las restricciones, esta integral es nula [35, Pág. 187]. Nótese pues que, por la ecuación (2.3),

$$\left(g(x^*(t), u^*(t), t) - x' \right) \delta p(t) = 0.$$

Dado que el extremal debe satisfacer también la ecuación (2.3) entonces $\delta p(t) = 0$, por lo cual el último término se anula. El término con $\delta u(t)$ se anula pues δJ está evaluado en

$u^*(t)$, con lo cual $\delta u = 0$. Como los multiplicadores de Lagrange son arbitrarios, se puede elegirlos de modo en que el coeficiente de δx sea cero, así se tiene la siguiente igualdad

$$-p'^*(t) = \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) \right] p^*(t) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t). \quad (2.14)$$

Finalmente, como $\delta J_g(u^*) = 0$, el término de afuera de la integral en la ecuación (2.12) también debe anularse, esto es,

$$p^*(t_f)\delta x_f = 0. \quad (2.15)$$

Lo cual implica que $p^*(t_f) = 0$ ya que $\delta x_f \neq 0$ pues x_f es libre. Por otro lado, se define la función hamiltoniana como: $H(x, u, p, t) := p(t)g(t, x, u) + p_0 f(t, x, u)$, donde p_0 recibe el nombre de multiplicador de costo y es una constante real positiva a la cual se le suele asignar el valor de la unidad para poder obtener la información proveniente de la función de costo corriente f [36, Pág. 438] [31, Pág. 219], por lo cual, nuestra definición de la función hamiltoniana será la siguiente:

$$H(t, x, u, p) := p(t)g(t, x, u) + f(t, x, u). \quad (2.16)$$

el incremento del funcional J , ecuación (2.7), se puede escribir como sigue:

$$\begin{aligned} \Delta J(u^*, \delta u) = & -p^*\delta x_f + H(x^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f))\delta t_f \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ p'^*(t) + \frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t)\delta x(t) \right. \\ & + \frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t)\delta u(t) \\ & + \left[\frac{\partial H}{\partial p}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) - x'^*(t) \right] \delta p(t) \Big\} dt \\ & + \mathcal{O}([\delta x(t)]^2, [\delta x'(t)]^2). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Si las ecuaciones de estado se satisfacen y $p^*(t)$ se selecciona de modo que el coeficiente de δx sea idénticamente cero en la frontera se tiene que

$$\Delta J(u^*, \delta u) = \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t)\delta u(t)dt + \mathcal{O}([\delta x(t)]^2[\delta x'(t)]^2); \quad (2.18)$$

cuando se cumple (2.15), la cual reescrita en términos de H es

$$-p^*(t_f)\delta x_f + H(x^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f)\delta t_f = 0. \quad (2.19)$$

Es decir, el incremento en J depende de la $(\partial H/\partial u)$. Nótese que se puede aproximar el valor de la pendiente de la función hamiltoniana en u^* en términos de $u + \delta u$ en una vecindad suficientemente pequeña de u^* como sigue

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \delta u(t) = H(x^*(t), u^*(t) + \delta u, p^*(t), t) - H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t), \quad (2.20)$$

entonces, se cumple que el incremento en J , ecuación (2.18), está dado por la siguiente igualdad

$$\Delta J(u^*, \delta u) = \int_{t_0}^{t_f} \left[H(x^*(t), u^*(t) + \delta u, p^*(t), t) - H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \right] dt + \mathcal{O}([\delta x(t)]^2 [\delta x'(t)]^2), \quad (2.21)$$

expresión en la cual los términos de orden superior tienden a cero y por ello la integral domina el lado derecho de esta igualdad. Así, los controles u son tales que se cumple la siguiente desigualdad

$$\int_{t_0}^{t_f} \left[H(x^*(t), u^*(t) + \delta u, p^*(t), t) - H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \right] dt \geq 0, \quad (2.22)$$

para todos los valores admisibles de δu en la vecindad. Esto es, la función hamiltoniana evaluada en estos controles satisface

$$H(x^*(t), u^*(t) + \delta u, p^*(t), t) \geq H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t), \quad (2.23)$$

expresión que es equivalente a la desigualdad siguiente

$$H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \leq H(x^*(t), u(t), p^*(t), t), \quad (2.24)$$

para todo $t \in [t_0, t_f]$.

La desigualdad (2.24) se conoce como el Principio del Mínimo de Pontryagin, *PMP*. Todo control óptimo debe satisfacer el Principio del Mínimo de Pontryagin, pero no todos los controles que satisfacen el PMP son óptimos.

Teorema 2.1 (Principio del Mínimo de Pontryagin). *Dado el problema de control óptimo (2.2)-(2.5) y la restricción de control (2.4), con las mismas condiciones de continuidad dadas para f, g, f_x, g_x en la sección (2.1). Para que $(x^*(t), u^*(t))$ sean los óptimos para*

este problema es necesario que existan las funciones continuas $p(t) = (p_1(t), \dots, p_n(t))$ tales que $\forall t \in [t_0, t_f]$ se cumpla :

$$H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \leq H(x^*(t), u, p^*(t), t), \quad (2.24)$$

con la función hamiltoniana H definida por

$$H(t, x, u, p) = f(t, x, u) + \sum_{i=1}^n p_i g_i(x, u, t). \quad (2.25)$$

Es decir, si u^* es óptimo, existen el coestado p y los multiplicadores tales que se cumple la condición de mínimo del Hamiltoniano y son tales que satisfacen las condiciones de optimalidad, las cuales suelen expresarse en términos de la función hamiltoniana, $H(t, x, u, p)$, ecuación (2.16), como sigue (en lo subsecuente la notación para derivada parcial será por medio de subíndices):

Remark 2.2 (Condiciones necesarias de optimalidad).

$$x'(t) = H_p(t, x^*, u^*, p^*) = g(t, x^*(t), u^*(t)), \quad (2.3)$$

$$H_u(t, x^*, u^*, p^*) = f_u(t, x^*, u^*) + p^*(t)g_u(t, x^*, u^*) = 0, \quad (2.26)$$

$$-p^{*'}(t) = H_x(t, x^*, u^*, p^*) = f_x(t, x^*, u^*) + p^*(t)g_x(t, x^*, u^*), \quad (2.14)$$

$$H(t, x^*, u^*, p^*) \leq H(t, x^*, u, p^*). \quad (2.24)$$

2.3. Suficiencia

En la sección anterior se encontró que si $H_u = 0$ se tiene una condición necesaria para optimalidad; sin embargo, para garantizar que la función hamiltoniana tenga un mínimo local, o global, en u^* una condición suficiente es que su segunda derivada parcial respecto al control sea definida positiva:

$$H_{uu}(t, x^*(t), u^*(t), p^*(t)) > 0. \quad (2.27)$$

Sin embargo, si f y g son conjuntamente convexas en x , u^* y p , cumpliendo las condiciones necesarias de optimalidad, Remark (2.2), entonces las condiciones necesarias también son

suficientes en el problema de control óptimo [31, Pág. 133]. Es decir, si f es convexa no es necesario verificar que $H_{uu} > 0$ para asegurar que el óptimo es un mínimo global.

Condiciones suficientes

$$H_{uu}(t, x^*(t), u^*(t), p(t)) > 0. \quad (2.28)$$

2.4. Restricciones de estado

En la teoría del control óptimo es usual denotar por U al *conjunto de controles admisibles*, es decir, al conjunto de valores que puede tomar la función de control $u(t)$, (2.4). Dada una función $u(t) : I \rightarrow U$, a la solución del problema de valores iniciales $\dot{x} = f(t, x(t), u(t))$, $x(0) = x_0$, se le llama *trayectoria*; cuando una trayectoria satisface las restricciones correspondientes en todo el intervalo, recibe el nombre de *trayectoria admisible* [35, Pág. 6].

Estas definiciones resaltan el papel fundamental de las restricciones para que el problema (2.1) modele adecuadamente un sistema real, garantizando que tanto las trayectorias como los controles sean factibles, es decir, tengan sentido en un contexto de aplicación.

Las restricciones pueden aplicarse al conjunto de controles, a las variables de estado y/o al tiempo. A continuación, se describen tres casos particulares de restricciones consideradas en este trabajo.

La primera restricción se refiere a la *no negatividad* de las variables de estado. Siguiendo a [31, Pág. 230] y a [37, Pág. 323], cuando una variable de estado, o una función de esta, debe ser no negativa para conservar sentido físico, la restricción se introduce de forma explícita en el problema de control óptimo, ecuaciones (2.2)–(2.5), añadiendo el multiplicador de Lagrange $\eta(t)$ asociado a la condición $k(t, x) \geq 0$, (η puede ser una función o, más generalmente, una medida) de manera que la función hamiltoniana toma la forma

$$H = f(t, x, u) + q(t)g(t, x, u) + \eta(t)k(t, x), \quad (2.29)$$

con

$$q(t) = \begin{cases} p(t) + \int_{[t_0, t_f)} k_x(s, x(s))\eta(ds) & t \in [t_0, t_f) \\ p(t_f) + \int_{[t_0, t_f]} k_x(s, x(s))\eta(ds) & t = t_f. \end{cases}$$

La ecuación para el coestado, (2.3), se modifica a

$$-p' = H_x = f_x + qg_x + \eta k_x, \quad (2.30)$$

además de las condiciones necesarias estándar, Remark (2.2), ahora se debe cumplir la pareja de *condiciones de complementariedad*

Condición de complementariedad

$$\eta \geq 0, \quad \text{supp}\{\eta\} \subset \{t \in [t_0, t_f] \mid k(t, x(t)) = 0\}. \quad (2.31)$$

El segundo tipo de restricción considerado recibe el nombre de *restricción isoperimétrica* y ocurre cuando en el problema de control óptimo, ecuaciones (2.2)- (2.5), se tiene una restricción integral como la siguiente

$$\int_{t_0}^{t_f} G(t, x, u) \leq E, \quad (2.32)$$

donde G es continua y dos veces diferenciable, y E es un número dado. Esta restricción se reescribe de manera diferencial mediante la técnica de *aumentación de estado* la cual consiste en la introducción de la variable adicional $x_{n+1}(t)$ como sigue:

$$\begin{aligned} x'_{n+1}(t) &= G(t, x, u), \\ x_{n+1}(t_0) &= 0, \\ x_{n+1}(t_f) &\leq E, \end{aligned}$$

de modo que la ecuación (2.32) es equivalente a las restricciones (2.33) [31, Pág. 228].

Restricción isoperimétrica

$$\begin{aligned} x'_{n+1}(t) &= G(t, x, u), \\ x_{n+1}(t_0) &= 0, \\ x_{n+1}(t_f) &\leq E. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Las últimas dos condiciones de (2.33) son ejemplos del tercer tipo de restricciones aquí estudiado, las cuales reciben el nombre de *restricciones de punto inicial y final*. Esto significa que las condiciones $x(t_0) = x_0$ fija y $x(t_f)$ libre se sustituyen por una más general que se puede expresar como

$$(x(t_0), x(t_f)) \in \mathcal{E},$$

donde $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^{2n}$ es un subconjunto cerrado. Cuando se considera dicha restricción en el PMP aparece una nueva condición llamada *condición de transversalidad*, la cual puede expresarse de la siguiente manera:

Condición de transversalidad

$$(p(t_0), -q(t_f)) \in \mathcal{N}_{\mathcal{E}}(x^*(t_0), x^*(t_f)), \quad (2.34)$$

donde $\mathcal{N}_{\mathcal{E}}(x^*(t_0), x^*(t_f))$ es el cono normal de $\mathcal{E}$ en el punto $(x^*(t_0), x^*(t_f))$.

Tomando, por ejemplo, las ecuaciones (2.33) en consideración, la condición (2.34) implica que

$$q_{n+1}(t_f) \geq 0. \quad (2.35)$$

2.5. Resultados de relajación y de existencia

Nótese que, hasta el momento, se ha estudiado cómo identificar posibles soluciones del problema (2.1), sin embargo, no se puede garantizar que dichas soluciones existan.

De acuerdo con [36, Pág. 474], para que el conjunto de las trayectorias admisibles $x(t)$ sea cerrado (lo cual es relevante para que se cumplan algunos resultados de existencia de soluciones), se debe cumplir que el conjunto de controles admisibles U sea compacto y que, para cada par (t, x) , el conjunto de todas las velocidades posibles, $g(t, x, U)$, que se pueden generar desde el punto (t, x) , variando $u(t)$ dentro del conjunto de controles permitidos U , debe ser convexo, donde

$$g(t, x, U) := \{g(t, x, u) \mid u \in U\}. \quad (2.36)$$

Así, al tener una sucesión de *trayectorias admisibles*, $x_n(t)$, tales que converjan a la función $x(t)$, entonces $x(t)$ también será una *trayectoria* admisible.

Sin embargo, si alguna de estas hipótesis no se cumple, como se menciona en el Teorema (B.1), existe la posibilidad de que los conjuntos de velocidades no sean convexos por lo cual, se considera lo que se conoce como un conjunto de trayectorias relajadas en el intervalo $[t_0, t_f]$ el cual contendrá a las trayectorias originales [36, Pág. 477].

El conjunto de trayectorias relajadas es el conjunto de trayectorias que resultan de sustituir el conjunto de velocidades original, por la cerradura de su envolvente convexa. El resultado sobre trayectorias relajadas más relevante para este trabajo, es que se puede aproximar una trayectoria relajada mediante trayectorias del sistema original tanto como se desee.

Definición 2.1 (Trayectorias relajadas). Una trayectoria relajada del sistema (g, U) en un intervalo $[a, b]$ se refiere a un arco x que satisface la inclusión diferencial

$$x'(t) \in \overline{\text{co}} g(t, x, U), \quad t \in [a, b] \text{ c. t. p.} \quad (2.37)$$

Nótese que el conjunto de trayectorias relajadas incluye al conjunto de las trayectorias usuales, que se denominan trayectorias originales a efectos de contraste. Adaptado de [36, Pág. 487].

2.6. Teorema de existencia

El problema de control (2.1) se puede escribir de la siguiente forma

El problema del control óptimo (existencia)

$$\text{mín} \int_{t_0}^{t_f} f(t, x(t), u(t)) dt, \quad (2.2)$$

$$\text{sujeto a} \quad x'(t) = g(t, x(t), u(t)), \quad (2.3)$$

$$u(t) \in U(t) \text{ c. t. p. } [t_0, t_f], \quad (2.4)$$

$$(t, x(t)) \in Q, \quad (x(t_0), x(t_f)) \in \mathcal{E}. \quad (2.38)$$

donde $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ y $Q := \{(t, x) \in [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^n \mid k(t, x) \geq 0\}$. Se tienen, entonces, los elementos necesarios para enunciar el siguiente teorema de existencia.

Teorema 2.3. [Teorema 23.11 de [36, Pág. 481]]. Sea el problema de control óptimo de la sección (2.6) tal que satisface las siguientes hipótesis:

- (a) g es medible en t , continua en x y crece linealmente tal que existe una constante M tal que $(t, x) \in Q \Rightarrow |g(t, x)| \leq M(1 + |x|)$;
- (b) para casi todo t , el conjunto $U(t)$ es cerrado y convexo;
- (c) los conjuntos $\mathcal{E}$ y Q son cerrados;
- (d) la función de costo corriente, $f(t, x, u)$, es medible en el sentido de Lebesgue en t y en (x, u) y semi-continua inferiormente en (x, u) ; $f(t, x, u)$ es convexa para cada

$(t, x) \in Q$; existe una constante λ_0 tal que $(t, x) \in Q, u \in U(t) \Rightarrow f(t, x, u) \geq \lambda_0$;

(e) la proyección $\{\gamma \in \mathbb{R}^n : (\gamma, b) \in \mathcal{E} \text{ para algún } b \in \mathbb{R}^n\}$ de $\mathcal{E}$ es acotada;

(f) existe $k \in L^r(t_0, t_f)$ tal que, para casi todo $t, u \in U(t) \Rightarrow |u| \leq k(t)$.

Entonces, si hay por lo menos un proceso admisible (x, u) para el cual $J(x, u)$ es finito, el problema admite una solución [36, Pág. 481].

En la siguiente sección se verá que el problema de gestión energética en su formulación convexa satisface las condiciones del Teorema (2.3).

Capítulo 3

Convexificación en control óptimo para la gestión energética de termostatos

En esta sección se plantea el problema de minimizar el costo económico asociado a la regulación de la temperatura en un conjunto de espacios interiores, cada uno regulado por su respectivo sistema de aire acondicionado alimentado con energía solar. Se formula este objetivo como un problema de control óptimo, describiendo las variables involucradas, las restricciones pertinentes y el tratamiento adecuado de las mismas.

3.1. Planteamiento del problema de gestión energética

Se tiene un sistema de n acondicionadores de aire (AC) cuyo suministro energético proviene de un único generador eléctrico con energía eléctrica total almacenada E que puede suministrar. Cada AC_i se encuentra a una respectiva temperatura interior al tiempo t , descrita por la variable de estado $\{x_i(t)\}_{i=1}^n$, y cuenta con los botones de encendido y apagado $\{u_i(t)\}_{i=1}^n$ que le permiten controlar, hasta cierto punto, esos respectivos estados. Las condiciones iniciales de los AC's están dadas por $\{x_{i0}(t)\}_{i=1}^n$, y cada AC_i está sujeto a los niveles de confort térmico restringidos por los intervalos $[L_i, U_i]_{i=1}^n$. Además, se considera que la temperatura del ambiente es mayor que el máximo de las temperaturas deseables $\hat{x}(t) > \max_i U_i$.

La temperatura de cada interior, correspondiente al lugar cerrado y aislado en el cual se encuentra cada AC_i (cuyo comportamiento a lo largo del tiempo es descrito mediante la variable de estado $\{x_i(t)\}_{i=1}^n$), obedece la ley de enfriamiento de Newton con un respectivo coeficiente de convección α_i y está sujeta al control $u_i(t)$ con coeficiente térmico β_i . De

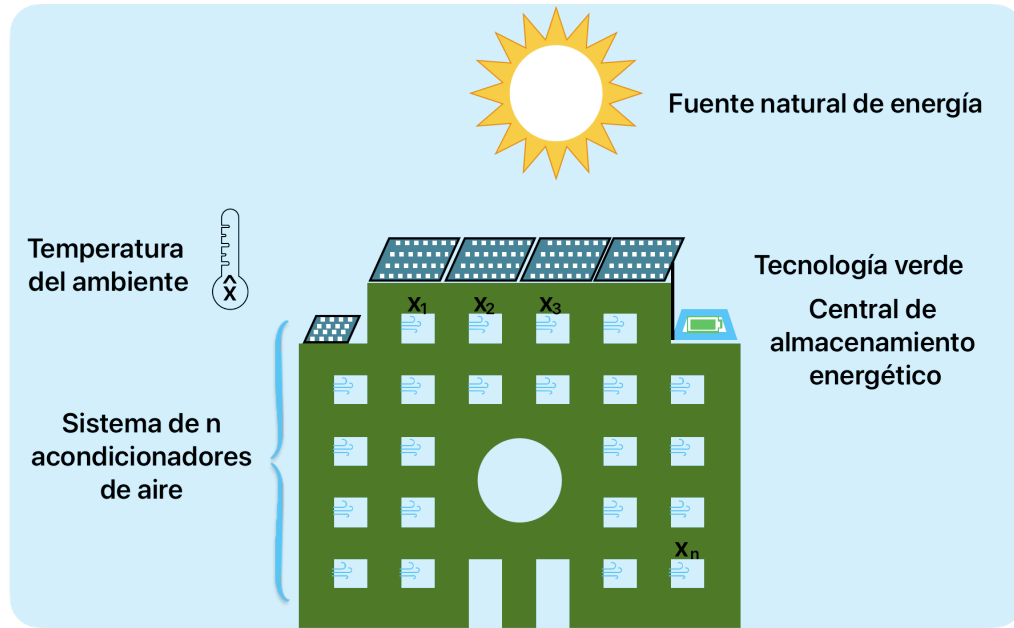


Figura 3.1: Escenario del problema de gestión energética. Se tiene un conjunto de n espacios interiores, por ejemplo, que cuentan con acondicionadores de aire cuya energía es suministrada por una tecnología verde, en este caso celdas solares conectadas a una central de almacenamiento energético.

modo que su evolución queda descrita por la siguiente ecuación diferencial:

$$x'_i(t) = -\alpha_i(x_i(t) - \hat{x}(t)) - \beta_i u_i(t), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.1)$$

donde $\hat{x}(t)$ es la temperatura ambiente, y los coeficientes α_i y β_i son positivos, $\alpha_i, \beta_i > 0$.

Puesto que el objetivo del estudio es optimizar el uso de los AC_i de modo que se minimice el costo de la energía eléctrica utilizada, matemáticamente se busca minimizar el funcional de costo, $J(u)$, dado por

$$J(u) = \int f(t, u, x) dt = \int_0^{t_f} \pi(t) (u_1(t) + u_2(t) + \dots + u_n(t)) P dt, \quad (3.2)$$

donde $\mathbf{u}(t) \in \{0, 1\}^n$, $\pi(t)$ es la predicción de precios dependiente del tiempo t , y $P > 0$ es la potencia requerida por cada AC encendido; además, $t_0 = 0$ y t_f son fijas en este caso. Nótese que $J(u)$ tiene unidades monetarias, (\$), y $\pi(t)$ tiene unidades monetarias (\$) por joule, (\$/J). Luego, dada la limitación en la energía disponible, se debe cumplir con la

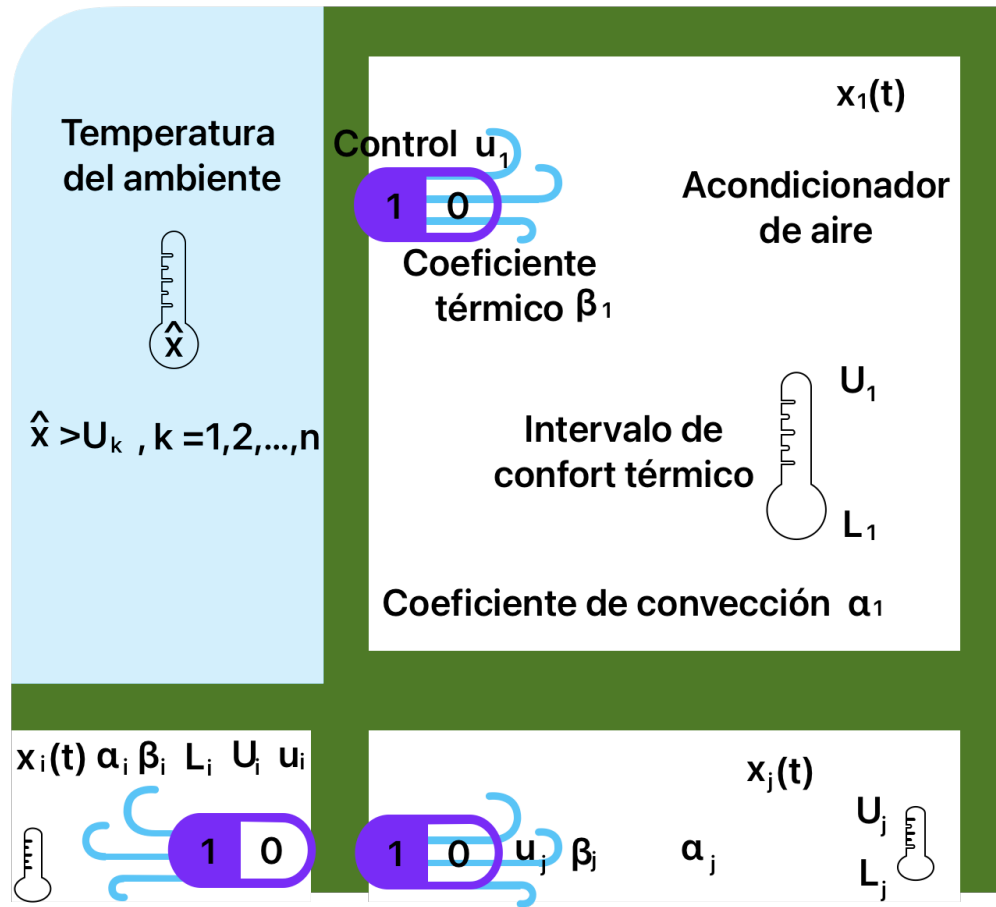


Figura 3.2: Escenario del espacio interior: cada interior está en contacto con el ambiente de temperatura exterior $\hat{x}$ y tiene un acondicionador de aire, con control (ON/OFF). Cada espacio tiene sus propios coeficientes térmicos α_i y β_i .

siguiente restricción integral

$$P \int_0^{t_f} \sum_{i=1}^n u_i(t) dt \leq E.$$

con $\mathbf{u}(t) \in \{0, 1\}^n$ actuando en casi todo $t \in [0, t_f]$. Esta última igualdad se puede escalar tomando $P = 1$ W de modo que la ecuación anterior se escriba de la siguiente manera, (3.3), respetando las unidades de energía:

$$\int_0^{t_f} \sum_{i=1}^n u_i(t) dt \leq E. \quad (3.3)$$

Esto permite vislumbrar que esta restricción busca el mínimo de tiempo en que debe estar encendido el conjunto de los n acondicionadores de aire.

3.2. Tratamiento de las restricciones de estado

La restricción de confort térmico, $L_i \leq x_i \leq U_i$, se puede escribir como

$$k(t, x) = (U_i - x_i)(x_i - L_i) \geq 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.4)$$

Obsérvese que la restricción anterior es equivalente a $L_i \leq x_i(t) \leq U_i$. Si, por otro lado, $x_i < L_i$, entonces $x_i - L_i < 0$ y $U_i - x_i > 0$, lo que implica que el producto es negativo; o finalmente, si $x_i > U_i$, entonces $x_i - L_i > 0$ y $U_i - x_i < 0$, por lo que el producto también es negativo. Por tanto, el requerimiento $(U_i - x_i)(x_i - L_i) \geq 0$ fuerza a que $x_i(t)$ permanezca en el intervalo $[L_i, U_i]$ durante todo el horizonte temporal, en particular en $t = t_f$.

Nótese que si $x_i = L_i$ o $x_i = U_i$, entonces $k(t, x) = 0$ y el último término de la ecuación (2.30) se anula por lo cual se regresa a la ecuación (2.14). Sin embargo, si ocurriese que $x_i(t_f) = L_i$ o $x_i(t_f) = U_i$, adicionalmente deberá considerarse que en la ecuación (2.12) el término que incluye δx_f debe anularse, lo cual conduce a que la ecuación (2.15) no implique que $p^*(t_f)$ sea nulo.

Por otro lado, y con el fin de facilitar el análisis subsecuente, la *restricción isoperimétrica* (3.3) será reformulada usando una técnica de aumentación de estado, como se explicó por medio de la ecuación (2.32). Así, tómese la nueva variable de estado $x_{n+1}(t)$, gobernada por la ecuación diferencial

$$x'_{n+1}(t) = \sum_{i=1}^n u_i(t), \quad (3.5)$$

y que satisface las siguientes condiciones de frontera

$$\begin{aligned} x_{n+1}(0) &= 0, \\ x_{n+1}(t_f) &\leq E, \end{aligned} \quad (3.6)$$

también llamadas condiciones de punto final. Así, se obtiene un sistema con $n + 1$ estados definidos en el intervalo $[0, t_f]$ cuya evolución está descrita por el sistema:

$$\begin{cases} x'_i = -\alpha_i(x_i - \hat{x}) - \beta_i u_i & i = 1, 2, \dots, n, \\ x'_{n+1} = \sum_{i=1}^n u_i, \end{cases} \quad (3.7)$$

sujeto a $x(0) = (x_0, 0)$, $x_{n+1}(t_f) \leq E$ y $u_i(t) \in \{0, 1\}$ en $t \in [0, t_f]$, $i \in [n]$.

3.3. Convexificación del conjunto de controles

El sistema (3.7) puede ser reescrito en notación matricial como una ecuación de la forma $\dot{x} = \alpha x + f(t)$, donde

$$\begin{aligned}\alpha &= (-\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_n, 0)\mathbf{I} \\ &= -\text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0),\end{aligned}$$

y

$$f(t) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0)\hat{x} - (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, 0)\left(\mathbf{u}, \sum_{i=1}^n u_i\right),$$

esto es

$$x' = \underbrace{\begin{pmatrix} -\alpha_1 x_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 x_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\alpha_n x_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\alpha x} + \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \hat{x} - \beta_1 u_1 \\ \alpha_2 \hat{x} - \beta_2 u_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \hat{x} - \beta_n u_n \\ \sum_{i=1}^n u_i \end{pmatrix}}_{f(t)}, \quad (3.8)$$

por lo que, usando el método de variación de parámetros, se obtiene que la solución $x(t)$, correspondiente al control $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))$, está dada por

$$x(t) = \exp(t\alpha)\left(x_0 + \int_0^{t_f} \exp(-s\alpha)f(s)ds\right). \quad (3.9)$$

De donde se obtiene

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \\ x_{n+1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{10}e^{-\alpha_1 t} \\ x_{20}e^{-\alpha_2 t} \\ \vdots \\ x_{n0}e^{-\alpha_n t} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^{t_f} e^{-\alpha_1(t_f-s)}[\alpha_1 \hat{x}(s) - \beta_1 u_1(s)]ds \\ \int_0^{t_f} e^{-\alpha_2(t_f-s)}[\alpha_2 \hat{x}(s) - \beta_2 u_2(s)]ds \\ \vdots \\ \int_0^{t_f} e^{-\alpha_n(t_f-s)}[\alpha_n \hat{x}(s) - \beta_n u_n(s)]ds \\ \int_0^{t_f} \sum_{i=1}^n u_i(s)ds \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

que condensadamente se escribe como

$$\begin{cases} x_i = x_{i0}e^{-\alpha_i t} + \int_0^{t_f} e^{-\alpha_i(t_f-s)}[\alpha_i \hat{x}(s) - \beta_i u_i(s)]ds, & i \in [n], \\ x_{n+1} = \int_0^{t_f} \sum_{i=1}^n u_i(s)ds, \end{cases} \quad (3.11)$$

donde $t \in [0, t_f]$. Dado que $g(t) = -\alpha_i(x_i(t) - \hat{x}(t)) - \beta_i u_i(t)$, con $i = 1, \dots, n$, es continua en (x, u) y medible en t , se puede garantizar que el conjunto de trayectorias $x(t)$ es cerrado siempre que, como se señaló en la sección (2.5), se tomen los controles

$$u_i(t) \in [0, 1] \quad \text{en casi todo } t \in [0, t_f], \quad i \in [n], \quad (3.12)$$

de modo que el conjunto de controles admisibles y, en consecuencia, de velocidades, sea *convexo*.

Claramente, esto puede conducir a una solución con valores intermedios, lo cual haría (x, u) inadmisibles y carente de sentido físico, dado que cada AC_i solo puede encontrarse en estado encendido (ON) o apagado (OFF), representados por 1 y 0, respectivamente. No obstante, como muestra la definición (2.1) de la sección (2.5), si se obtiene un valor intermedio para algún control en algún intervalo de tiempo no trivial, aproximaremos “lo mejor posible” este control usando uno que sí se pueda implementar y que definiremos tomando en cuenta el periodo mínimo de permutación, esto es, el tiempo mínimo que debe transcurrir entre dos *conmutaciones* consecutivas del AC, es decir, completando el ciclo ON-OFF-ON (o viceversa).

3.3.1. Control equivalente implementable

Al suponer que T_m es el periodo mínimo de conmutación de todos los AC's y un **control intermedio** $\hat{u}_i \in [0, 1]$, se define en un intervalo de tiempo de longitud KT_m , con $K \in \mathbb{N}$, se define el **control equivalente implementable**, $\tilde{u}_i \in \{0, 1\}$, que represente la secuencia de encendido y apagado correspondiente a dicho intervalo de forma que en cada periodo de conmutación se cumpla que:

$$\tilde{u}_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t \in [0, \lambda_{ij}), \\ 0 & \text{para } t \in [\lambda_{ij}, T_m), \end{cases} \quad (3.13)$$

de modo que la señal periódica entera está dada por

$$\tilde{u}_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t \in [(j-1)T_m, (j-1)T_m + \lambda_{ij}), \\ 0 & \text{para } t \in [(j-1)T_m + \lambda_{ij}, jT_m), \end{cases} \quad (3.14)$$

con $j = 1, \dots, K$. Aquí, los tiempos $\lambda_{ij}(t)$ donde el control $\tilde{u}_i$ se vuelve encendido (ON) son tales que las trayectorias de x_i resultantes de aplicar ya sea $\tilde{u}_i$ o $\hat{u}_i$ coinciden al final del periodo de conmutación, es decir, se pueden aproximar tanto como el sistema lo permita,

(ver sección (2.5)). Por ejemplo, en el intervalo $[(j-1)T_m, jT_m]$, esto significa que para cada $i \in [n]$ se cumpla

$$\begin{aligned} x_i(jT_m) &= e^{-\alpha_i T_m} x_{i0} + \int_{(j-1)T_m}^{jT_m} e^{-\alpha_i(jT_m-s)} [\alpha_i \hat{x}(s) - \beta_i \tilde{u}_i(s)] ds \\ &= e^{-\alpha_i T_m} x_{i0} + \int_{(j-1)T_m}^{jT_m} e^{-\alpha_i(jT_m-s)} [\alpha_i \hat{x}(s) - \beta_i \hat{u}_i(s)] ds, \end{aligned} \quad (3.15)$$

sumando y restando en ambos lados se obtiene que

$$\int_{(j-1)T_m}^{jT_m} e^{-\alpha_i(jT_m-s)} [\alpha_i \hat{x}(s) - \beta_i \tilde{u}_i(s)] ds = \int_{(j-1)T_m}^{jT_m} e^{-\alpha_i(jT_m-s)} [\alpha_i \hat{x}(s) - \beta_i \hat{u}_i(s)] ds, \quad (3.16)$$

es decir, λ_{ij} debe cumplir con la siguiente igualdad:

$$\int_{(j-1)T_m}^{jT_m} e^{-\alpha_i(jT_m-s)} \tilde{u}_i(s) ds = \int_{(j-1)T_m}^{(j-1)T_m + \lambda_{ij}} e^{-\alpha_i(jT_m-s)} ds, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.17)$$

Dado que el término de la derecha se puede integrar, denotando como $\mathbb{I}_i$ a la integral de la izquierda, se obtiene

$$\mathbb{I}_i = \int_{(j-1)T_m}^{(j-1)T_m + \lambda_{ij}} e^{-\alpha_i(jT_m-s)} ds = \frac{e^{\alpha_i \lambda_{ij}} - 1}{\alpha_i e^{\alpha_i T_m}} \quad (3.18)$$

de donde se puede despejar λ_{ij} :

$$\lambda_{ij} = \frac{1}{\alpha_i} \ln(1 + \alpha_i \mathbb{I}_i e^{\alpha_i T_m}), \quad (3.19)$$

Una vez obtenidos los intervalos $[(j-1)T_m, (j-1)T_m + \lambda_{ij}]$ es posible utilizar las ecuaciones (3.17) y (3.14) y los resultados de relajación, sección (2.5), para obtener el vector del control equivalente implementable $\tilde{u}$.

3.4. Condiciones necesarias de optimalidad para el problema relajado

Finalmente se tienen las condiciones necesarias para aplicar el Principio del Máximo de Pontryagin pues se tiene el siguiente problema de control óptimo,

Problema de gestión energética

$$\min J(u) = \min \int_0^{t_f} \pi(t) \left(u_1(t) + u_2(t) + \dots + u_n(t) \right) P dt, \quad (3.2)$$

$$\text{sujeto a} \quad \begin{cases} x'_i = -\alpha_i(x_i - \hat{x}) - \beta_i u_i, & i = 1, 2, \dots, n, \\ x'_{n+1} = \sum_{i=1}^n u_i, \end{cases} \quad (3.7)$$

$$t_0 = 0, t_f, (\{x_i(0)\}_{i=1}^n, x_{n+1}(0)) = (x_0, 0) \text{ fijas; } x(t_f) \text{ libre.} \quad (3.20)$$

$$E - x_{n+1}(t_f) \geq 0, \quad (3.6)$$

$$\{x_i(t)\}_{i=1}^n \in [L_i, U_i]_{i=1}^n, \quad x_{n+1}(t) \in \mathbb{R}_+, \quad (3.21)$$

$$(U_i - x_i)(x_i - L_i) \geq 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.4)$$

$$u_i(t) \in [0, 1] \text{ en casi todo } t \in [t_0, t_f], \quad i \in [n], \quad (3.12)$$

que cumple con las hipótesis de la sección (2.1), tomando $f(t, x, u)$ como el argumento de la integral de (3.2), y $g(t, x, u)$ como el lado derecho de (3.7), y la cual, de acuerdo con la sección (2.2) tiene asociado el coestado $p(t)$ y satisface (2.14) y la condición de optimalidad.

Note que en la ecuación (3.7) $\alpha_i > 0$ y $\hat{x} > x_i$ por lo cual el primer término de la derecha es positivo, lo que hace que la temperatura aumente; sin embargo, ya que β es positivo y $1 \geq u_i(t) \geq 0$ entonces se tiene que el descenso en la temperatura está dado por el control en estado encendido, con una β suficientemente grande para ello.

Reuniendo estos elementos, se tiene que la función hamiltoniana asociado al problema es el siguiente

$$H = f(t, x, u) + q(t)g(t, x, u) + \eta(t)k(t, x), \quad (2.29)$$

el cual, al sustituir los términos ya mencionados para cada elemento del sistema, se escribe como

$$\begin{aligned} H = \pi(t)P \sum_{i=1}^n u_i - \sum_{i=1}^n q_i \left[\alpha_i(x_i(t) - \hat{x}(t)) + \beta_i u_i(t) \right] + q_{n+1} \sum_{i=1}^n u_i \\ + \sum_{i=1}^n \eta_i (U_i - x_i)(x_i - L_i). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ahora, ya que este sistema tiene asociado el coestado, $q(t)$, de modo que cumple con la

ecuación (2.14), se tiene que

$$\begin{aligned} H_{x_i} &= -q_i \alpha_i - 2x_i \eta_i + (L_i + U_i) \eta_i = -p'_i(t), \\ H_{x_{n+1}} &= 0 = p'_{n+1}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

de estas ecuaciones se obtiene que se deben cumplir las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} (2x_i - L_i - U_i) \eta_i &= p'_i(t) - q_i \alpha_i, \\ q_{n+1} &= p_{n+1} = \text{constante}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

esto significa que $p_{n+1}(t)$ es un valor constante, mientras que, de acuerdo con la condición de optimalidad, los valores de $p_i(0)$ ($i = 1, \dots, n+1$) son libres y $q_i(t_f) = 0$ ¹.

Por otro lado, ya que el cambio de la hamiltoniana respecto al control está dado por

$$H_{u_i} = -q_i \beta_i + p_{n+1} - P\pi(t), \quad (3.25)$$

se concluye que $H_{u_i} \propto u_i(t)$, esto es que la función hamiltoniana depende linealmente del control u_i y que, por ello, encuentra sus valores máximo y mínimo en los extremos del intervalo $[0, 1]$.

Sin embargo, si la expresión que aparece en (3.25) se anula, entonces el control óptimo, será **singular**, pues no podrá ser determinado por el signo de (3.25) y, en general, puede tomar valores en $(0, 1)$. Obsérvese que, si esto sucede en un intervalo de medida positiva, se tiene entonces que

$$q_i(t) = \frac{p_{n+1} - P\pi(t)}{\beta_i}, \quad (3.26)$$

con lo cual el coestado depende directamente de la predicción de precios en el tiempo. Dado que $p_{N+1}(t) \geq 0$ es un valor constante, se puede extraer que $\beta^{-1} p_{N+1} > q_i(t)$. Así, cuando se tiene el caso en que $p_{N+1} = 0$ entonces $q_i(t) < 0$.

Se verá que la solución encontrada para la formulación convexa podrá ser aproximada como se vio en la sección (2.5) por trayectorias del problema original (no convexo). En el siguiente capítulo, (sección (4.1)), se muestra cómo se obtuvieron las soluciones al problema de gestión energética en esta formulación convexa y cómo, a partir de esta solución, se obtuvo la trayectoria “óptima” implementable.

¹Se obtuvo numéricamente que $q_i(t_f) \neq 0$, ya que, en la formulación en ICLOCS se extendió la restricción de estado al punto final de forma explícita, i.e., considérese $x_i(t_f) \in [L_i, U_i]$ y $x_{n+1}(t_f) \in [0, E]$.

Capítulo 4

Simulaciones

Una vez formulado el teorema de gestión energética basado en la teoría de control óptimo, fue posible utilizar *ICLOCS* para simular un sistema con el fin de obtener las soluciones óptimas al problema convexo correspondientes a las trayectorias relajadas. Las soluciones así obtenidas incluyen la secuencia de controles óptimos intermedios y las trayectorias correspondientes. A partir de estas soluciones fue posible encontrar la secuencia de controles equivalentes implementables y sus trayectorias asociadas, así como los costos de operación.

En esta sección se muestran los resultados de las simulaciones llevadas a cabo. Primero, se muestra la reproducción de los resultados obtenidos en el artículo de Fontes, Halder y Becerril, [2], tomando los mismos valores de los parámetros del problema, es decir, de los coeficientes de transferencia térmica, de la potencia eléctrica y de la función de la predicción de precios, para un sistema de dos interiores, $n = 2$. Se simularon los casos para una temperatura exterior constante y para una sinusoidal.

4.1. *ICLOCS*

ICLOCS, *Imperial College London Optimal Control Software*, es un paquete de software diseñado por el *Imperial College London* para resolver problemas de control óptimo. Está implementado en MATHWORKS MATLAB y permite al usuario definir y resolver problemas con varias restricciones y tiempos finales libres o fijos. *ICLOCS* convierte los problemas de control óptimo en problemas de programación no lineal (*NLP*, por sus siglas en inglés). Esta herramienta es compatible con diversos solucionadores para problemas *NLP*, tales como *IPOPT* (un solucionador basado en métodos de punto interior), *fmincon* y *WORHP* [38]. Un problema típico de *ICLOCS* se compone de las funciones presentadas

en la tabla (4.1).

Se adaptó el código de *ICLOCS* llamado *bangbang.m*¹ correspondiente a un problema de tipo bangbang al problema de gestión energética (3.4). En *main.m*, (D.1), se puede elegir el método de solución y sus respectivos ajustes con lo cual finalmente se puede ejecutar el programa para obtener, o no, una solución que proporcionará las trayectorias y la secuencia de controles óptimas; además, también es posible obtener los coestados, con los que será posible verificar que se satisfagan las condiciones de optimalidad, ver sección (3.4). En el código *myproblem_Dynamics_Internal.m*, de *ICLOCS* adaptado en (D.2), se especifican la dinámica del sistema y las restricciones de la trayectoria. La definición general del problema se hace en *myproblem.m*, código (D.3), la cual incluye las restricciones temporales, los parámetros asociados al problema, las condiciones iniciales, los valores de las variables de estado, el posible estado final, el número de acciones de control aplicadas, los valores permitidos para los controles, la definición de la función de costo por etapa, la dinámica del sistema, entre otros [38].

4.2. Resultados de la simulación con temperatura ambiente constante

Para establecer valores de referencia, se emplearon los parámetros reportados en el artículo de Fontes, Halder y Becerril, [2], que considera: $n = 2$ sistemas de aire acondicionado, un horizonte temporal $T = 24$ h, temperaturas límite $L_i = 18^\circ\text{C}$ y $U_i = 22^\circ\text{C}$, temperatura exterior constante $\hat{x} = 30^\circ\text{C}$, coeficientes $\alpha = 0.1$ y $\beta = 20\alpha$, potencia $P = 1$ kWh, y una función de peso temporal $\pi(t) = 1 + t$. En dicho artículo, el valor mínimo de la función de costo con estos parámetros es $J = \$245.9712$. En la simulación actual, bajo las mismas condiciones, se obtuvo una solución con costo mínimo de $J(u) = \$248.6441$ ².

Los resultados se reprodujeron con las variables como están definidas en el código (D.2) y tomando $xbarra = 30$ ³ (temperatura exterior, $\hat{x}$); análogamente, con los valores de las variables mostrados en el código (D.3), tomando *problem.states.xl* = [18, 18, 24] (valores mínimos posibles de la variable de estado $[x_1, x_2, x_3]$) y en el código (D.4), tomando $f(t, x, u)$ del costo J , ecuación (3.2), como *stageCost* = $P \cdot P_{pi} \cdot (u1 + u2)$, donde P_{pi} es la predicción de precios. Las gráficas asociadas se muestran en (4.1a) y (4.1b).

En la gráfica (4.1a) se puede observar que el interior con variable de estado $x_1(t)$, que en

¹Este código y los de la tabla (4.1) pueden ser consultados en la página de la bibliografía marcada con [39].

²Valor ligeramente superior al reportado en [2], atribuible a diferencias en la implementación numérica.

³Las variables del código se indican en cursivas.

Nombre	Descripción	Variables/parámetros	Código
main.m	Script principal	Ajustes del solucionador	Rutina (D.1)
myProblem_ Dynamics_ Internal.m	Especificar la dinámica y las restricciones	$X, \dot{X}, U$	Función (D.2)
myproblem.m	Variables temporales, condiciones iniciales, límites de las variables de estado. Estimaciones iniciales. Errores y tolerancias. Definición del costo.	t0_min, t0_max, tf_min, tf_max, guess.t0, guess.tf, states.x0, states.x0l, states.x0u, states.xl, states.xu, states.xErrorTol_local, states.xErrorTol_integral, states.xConstraintTol, states.xfl, states.xflu, guess.states, stageCost	Funciones (D.3), (D.4) y (D.5).
myproblem_ Dynamics_Sim.m	(Opcional) Generar simulaciones	Ninguna adicional.	Función. No se incluye.
gradCost_ myproblem.m	Devuelve el gradiente del costo en forma analítica	Ninguna adicional.	Función. No se incluye.
hessianLagrangian_ myproblem.m	Calcula y devuelve la matriz hessiana del lagrangiano.	Ninguna adicional.	Función. No se incluye.
jacConst_ myproblem.m	Calcula y devuelve el gradiente del sistema.	Ninguna adicional.	Función. No se incluye.
settings_ myproblem.m	Ajustes generales y específicos del solucionador.	Ninguna adicional.	Función. No se incluye.

Tabla 4.1: Funciones y scripts usuales en los problemas de ICLOCS.

la gráfica se representa por una línea azul, comienza en $x_{10} = 19^\circ\text{C}$, es decir, el interior 1 al tiempo $t = 0$, desciende en la primera hora a 18°C y se mantiene constante hasta las 16 horas cuando incrementa hasta llegar a los 22°C a las 20 horas. Posteriormente, permanece constante hasta las 24 horas.

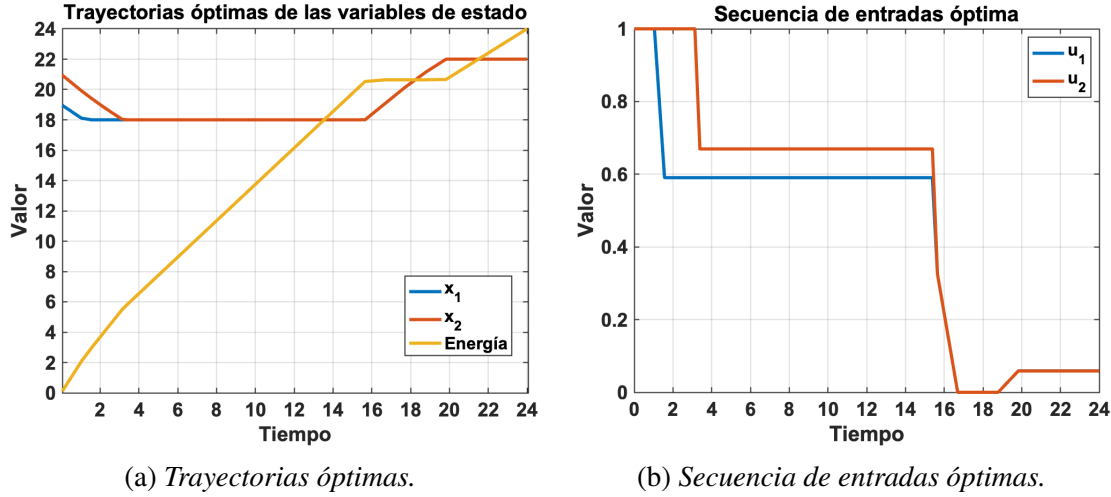


Figura 4.1: Gráficas de la reproducción del artículo [2], obtenidas con ICLOCS, para el caso de una temperatura exterior constante de 30°C y precio monótono creciente.

Para el interior con variable de estado $x_2(t)$, que en la gráfica se representa por una línea roja, comienza en $x_{20} = 21^\circ\text{C}$ (temperatura inicial del segundo interior), desciende en las primeras tres horas hasta llegar a los 18°C y se mantiene constante hasta las 16 horas cuando incrementa monótonamente hasta llegar a los 22°C a las 20 horas. Después, permanece constante nuevamente hasta las 24 horas.

Finalmente, la variable de estado $x_3(t)$, que en este caso representa la cantidad de energía disponible utilizada, como se planteó en la restricción isoperimétrica, ecuación (3.3), se muestra en la gráfica como una línea amarilla. Comienza en el origen, al tener toda la energía disponible e incrementa hasta las 16 horas en donde se han utilizado 21 J, después permanece constante hasta las 20 horas, cuando vuelve a incrementar hasta llegar a 24 J.

En la figura gráfica (4.1b) se muestra el comportamiento de los controles óptimos. En este caso, el control $\hat{u}_1$ para la variable de estado x_1 está representado como una línea azul mientras que el control $\hat{u}_2$ para la variable de estado x_2 se representa con una línea roja. Debido que ambos controles óptimos presentan valores intermedios, los cuales carecen de sentido físico en este problema, es necesario determinar el control equivalente implementable.

4.3. Segunda simulación

Se hizo una simulación adicional con los mismos parámetros del artículo [2], expuestos en la sección (4.2), pero con los valores presupuestos para las trayectorias y controles como se muestran en los códigos (D.2), (D.3), (D.4) y (D.5); es decir, el único cambio respecto al caso anterior es que se tomaron los valores mínimos para las variables de estado como $problem.states.xl = [18, 18, 0]$ en (D.3). El costo obtenido para este caso fue de $J = \$233.7223$ y las trayectorias y controles óptimos se muestran en las gráficas (4.2a) y (4.2b), respectivamente. Esta diferencia se explica porque, en la presente simulación, las temperaturas interiores permanecieron más tiempo cercanas al límite superior del intervalo de confort térmico, en comparación con el caso original en el que predominó el límite inferior. Con el objetivo de mantener los costos bajos, se utilizó esta segunda simulación. En la gráfica (4.2a) se observan trayectorias para las temperaturas parecidas a las obtenidas en la sección anterior (4.2); con la diferencia de que en este caso se tiene un mayor número de horas en el límite superior del intervalo de confort térmico, 22°C , y en el caso anterior se tenía un mayor número de horas en el límite inferior, 18°C . Este cambio en el comportamiento da origen a los quince dólares de diferencia en el costo y a que la energía final sea de 21 J.

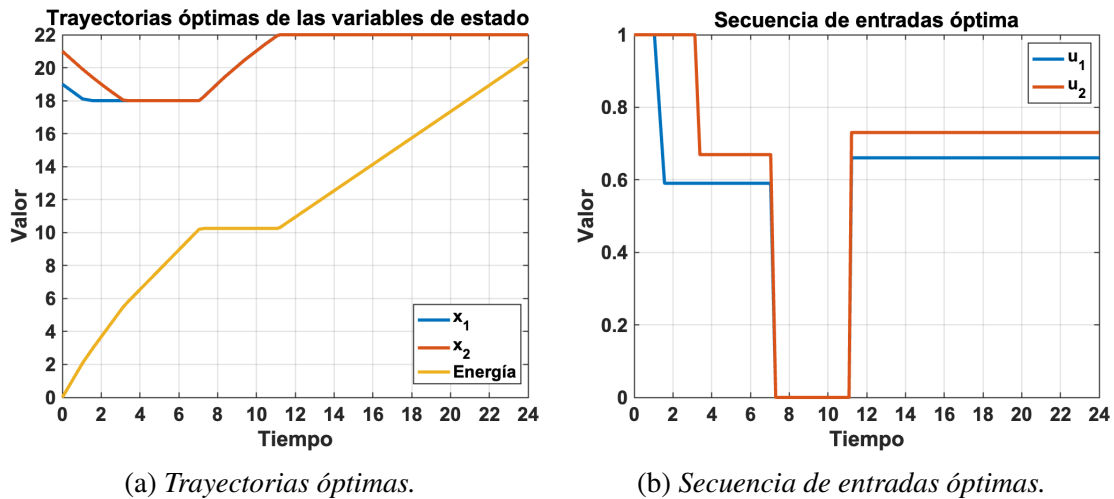


Figura 4.2: Trayectorias óptimas de las variables de estado y secuencia de entradas óptimas obtenidas con ICLOCS con base en el artículo [2] para el caso de una temperatura exterior constante de 30°C y precio monótono creciente.

Para los controles intermedios óptimos, gráfica (4.2b), se obtuvieron comportamientos similares en ambos interiores. Se comienza con un estado de encendido y, de 7:00 a 11:00, se

encuentran apagados ambos acondicionadores de aire. Nuevamente, es necesario obtener los controles equivalentes implementables para encontrar el sentido físico de los valores intermedios de esta secuencia.

4.3.1. Obtención del control implementable

Analíticamente es posible obtener la secuencia de controles equivalentes implementables de la manera en que se explicó en la sección (3.3.1); sin embargo, dado que las soluciones discretas obtenidas por medio de *ICLOCS* presentan una cantidad variable de valores para cada intervalo T_m , en los cuales no siempre se contó con el número suficiente de puntos para poder realizar la integración numérica primero fue necesario interpolar los valores faltantes tanto de los controles como de los tiempos, esto es para obtener al menos tres puntos por intervalo.

Así, se utilizó el código (D.6) para crear los vectores de tamaño apropiado para poder llevar a cabo la integración numérica, la cual se hizo mediante la función *trapz*⁴ de *Matlab* véase apéndice C. Posteriormente, se utilizó el código (D.7) para obtener numéricamente I_1 , el lado izquierdo de la ecuación (3.18).

Después, se utilizó el código (D.8) para la obtención de λ , para cada sistema y una vez obtenidos estos resultados fue posible usar el código (D.9) para obtener el control equivalente implementable con la secuencia de valores de λ , obtenida para cada interior. Estas secuencias se muestran en las figuras (4.3a) y (4.3b).

En la gráfica (4.3a) se muestra en azul el control intermedio óptimo $\hat{u}_1$ obtenido mediante *ICLOCS*, el mismo de la gráfica (4.2b), y en verde el control equivalente implementable, $\tilde{u}_1$. De esta manera, el área bajo la curva del control equivalente implementable es menor a la de la curva del control óptimo. Asimismo, se observa que el control equivalente implementable coincide con el control intermedio óptimo en los intervalos en los que este está encendido (valor de 1) y apagado (valor de 0), esto es al inicio del periodo de 24 horas y entre las 7 y las 11 horas.

Análogamente, en la gráfica (4.3b) se muestra arriba el control intermedio óptimo $\hat{u}_2$ obtenido mediante *ICLOCS*, el mismo de la gráfica (4.2b), y en verde el control equivalente implementable, $\tilde{u}_2$. Nuevamente, se observa que hay coincidencia en los intervalos donde el control óptimo toma los valores extremos.

⁴<https://la.mathworks.com/help/matlab/ref/trapz.html>

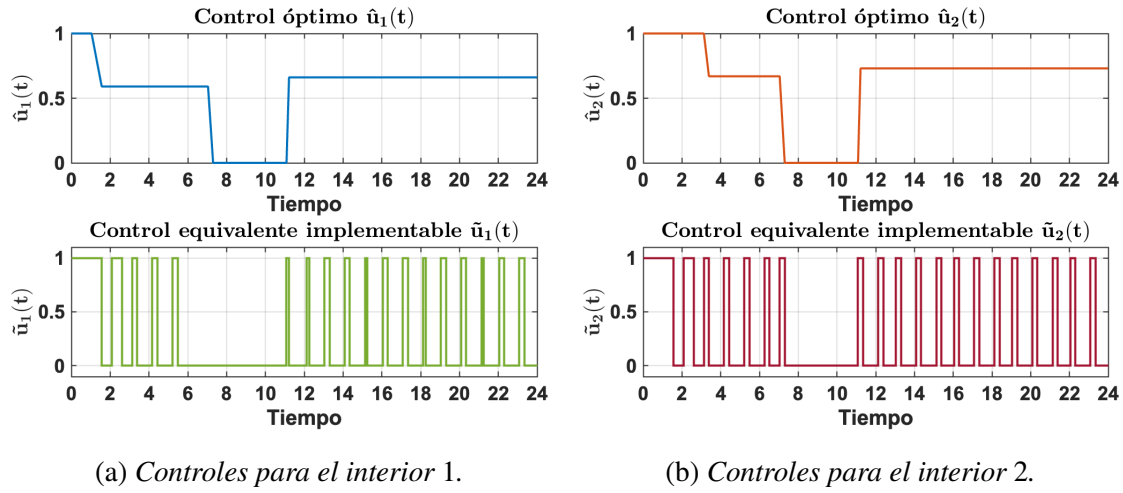


Figura 4.3: *Controles intermedios óptimos y equivalentes implementables para el caso de $\hat{x} = 30^\circ\text{C}$. Arriba: controles óptimos para el problema convexo $\hat{u}_1$ y $\hat{u}_2$ obtenidos con ICLOCS. Abajo: controles equivalentes implementables $\tilde{u}_1$ y $\tilde{u}_2$ obtenidos tras la obtención de cada λ_{ij} .*

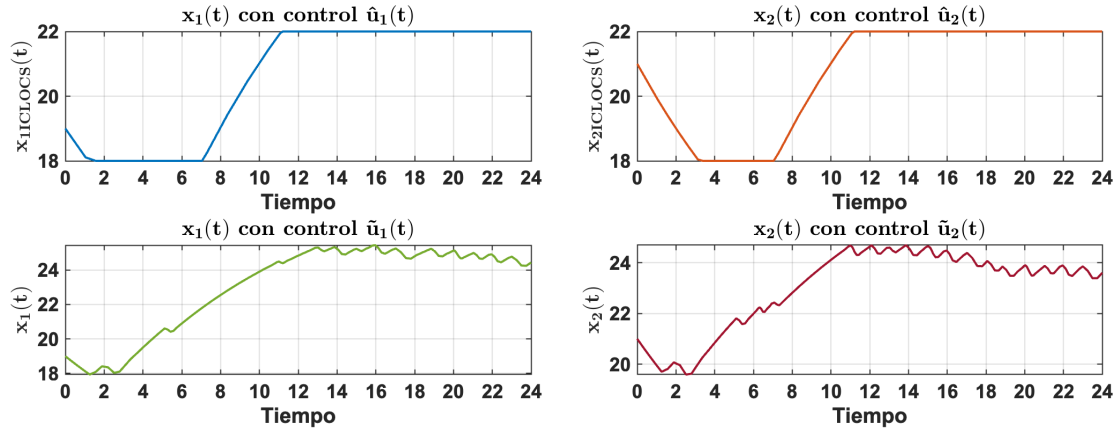
4.3.2. Obtención de las trayectorias

A partir de los resultados para los controles óptimos dados por *ICLOCS* se obtuvieron las trayectorias asociadas al resolver numéricamente las ecuaciones provenientes de la dinámica inicial y sustituyendo los respectivos valores para cada parámetro, esto es,

$$\begin{aligned} x'_1(t) &= -0.1(x_1 - 30) - 2\tilde{u}_1(t), \\ x'_2(t) &= -0.1(x_2 - 30) - 2\tilde{u}_2(t), \end{aligned} \quad (4.1)$$

con los controles equivalentes implementables obtenidos numéricamente $\tilde{u}_i$ en la sección anterior (4.3.1). Para ello, primero se concatenaron los resultados en el código (D.10) para después poder obtener las trayectorias $x_i(t)$ mediante el código (D.11). Las trayectorias obtenidas para este problema se muestran en las figuras (4.4a) y (4.4b), para cada interior, respectivamente. Así, para x_1 se tiene que la trayectoria obtenida con el control equivalente implementable se sale de los valores de confort térmico, llegando a poco menos de los 26°C después de las 13 horas, pero manteniéndose después cerca de los 24°C .

Para x_2 se muestra un comportamiento análogo, salvo que la temperatura siempre se mantiene por debajo de los 25°C . Nótese la similitud en la forma de las curvas de la solución.



(a) Trayectorias de la variable de estado $x_1(t)$. (b) Trayectorias de la variable de estado $x_2(t)$.

Figura 4.4: Gráficas de las variables de estado para el caso de $\hat{x} = 30^\circ\text{C}$. Arriba: Trayectorias óptimas obtenidas mediante ICLOCS. Abajo: Trayectorias obtenidas con los controles equivalentes implementables $\tilde{u}_1$, verde, y $\tilde{u}_2$, rojo.

4.3.3. Obtención del costo

Una vez que se tienen explícitamente los controles equivalentes implementables es posible obtener el costo mediante la ecuación (3.2); así, para $n = 2$ se tiene que

$$J(u) = \int_0^{24} (1+t)(u_1 + u_2)dt, \quad (4.2)$$

por lo que individualmente se tiene

$$J_1(u_1) = \int_0^{24} u_1(1+t)dt, \quad J_2(u_2) = \int_0^{24} u_2(1+t)dt. \quad (4.3)$$

Numéricamente, se obtuvieron los valores $J_1 = \$59.0189$, $J_2 = \$73.8715$, por lo que $J = \$132.8904$ mediante el código (D.12). En la figura (4.5) se muestra el costo acumulado para cada interior individualmente y en conjunto.

En la gráfica se muestra $J = \$133.99$, es decir, numéricamente en la gráfica se obtuvo un error propagado de \$1.10 el cual se atribuye a la interpolación en los subintervalos no homogéneos en el proceso de graficación al utilizar la función `diff`⁵ y al posterior uso del solucionador `ode45` de *Matlab* en la misma secuencia de entradas óptimas. Finalmente,

⁵<https://la.mathworks.com/help/matlab/ref/double.diff.html>

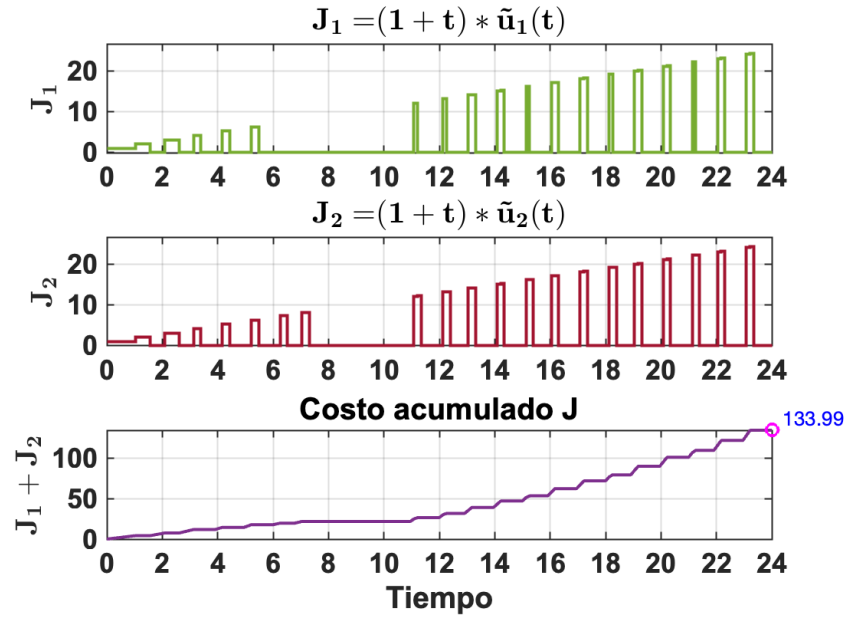


Figura 4.5: Costo acumulado para el caso de $\hat{x} = 30^\circ\text{C}$ tras la operación de ambos controles equivalentes implementables en sus respectivos interiores: en verde para el interior 1 y en rojo para el interior 2.

se utilizó la función del código (D.13) para obtener las gráficas correspondientes que se muestran en esta tesis.

4.4. Temperatura exterior sinusoidal

Para representar el cambio de temperatura en un día caluroso se utilizó la función

$$\hat{x}(t) = 5 \sin(t\pi/12) + 30^\circ\text{C}, \quad (4.4)$$

la cual oscila entre 25°C y 35°C con un periodo T de 24 horas. Utilizando los mismos valores de los parámetros que se utilizaron en los dos casos anteriores se obtuvieron las soluciones óptimas para las trayectorias y los controles con *ICLOCS* para el caso de $\hat{x}(t)$ como en la ecuación (4.4).

Los códigos utilizados son los mismos que los de los casos anteriores pero con x_{barra} para el caso de *Temperatura exterior sinusoidal* en el código (D.2). Así, se obtuvo un costo de $J = \$188.0954$; las trayectorias y los controles se muestran graficados en (4.7a) y (4.7b), respectivamente.

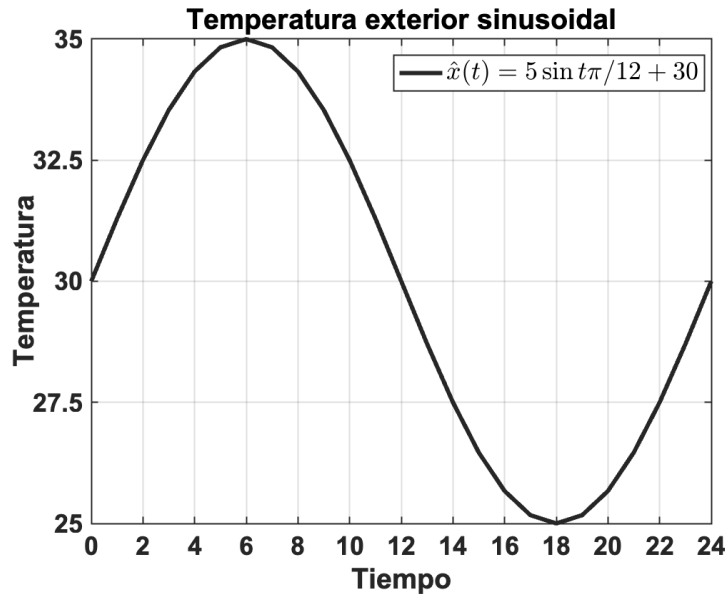


Figura 4.6: Variación de la temperatura a lo largo de un día caluroso.

Nótese que en la gráfica (4.7a) se muestra en azul la trayectoria de la variable de estado x_1 , correspondiente al interior 1, la cual es muy similar a las obtenidas anteriormente ya que comienza en 19°C, baja a 18°C en la primera hora y después de las 7:00 vuelve a subir hasta llegar a los 22°C, manteniéndose así hasta el final del periodo de 24 horas. Para la trayectoria de la variable de estado x_2 , mostrada en rojo, se comienza en 21°C, se descende monótonamente a los 18°C hasta las 5:00, manteniéndose así hasta después de las 7:00 y luego se sube hasta los 22°C en los que permanece hasta el final del periodo. Finalmente, para la variable de estado x_3 , línea amarilla, se tiene nuevamente la cantidad de energía utilizada en el proceso y se puede observar que aproximadamente entre las 8:00 y las 11:00 permanece constante, es decir no hay gasto energético y que después vuelve a subir de manera suave hasta llegar por debajo de los 21 unidades de energía.

El comportamiento observado en las trayectorias es el esperado al analizar la gráfica que contiene los valores de los controles óptimos obtenidos con *ICLOCS*, gráfica (4.7b). Nótese que ambos controles intermedios óptimos comienzan en estado encendido, lo cual ocasiona que haya un descenso en la temperatura, y que entre las 8 y las 11 horas permanecen en estado apagado, lo cual ocasiona que x_3 sea constante en el mismo intervalo.

Para traducir el comportamiento de los valores intermedios de estos controles óptimos a valores con sentido físico se obtuvo el control equivalente implementable para cada caso por medio de los mismos códigos utilizados pero cambiando al caso de *Temperatura exterior*

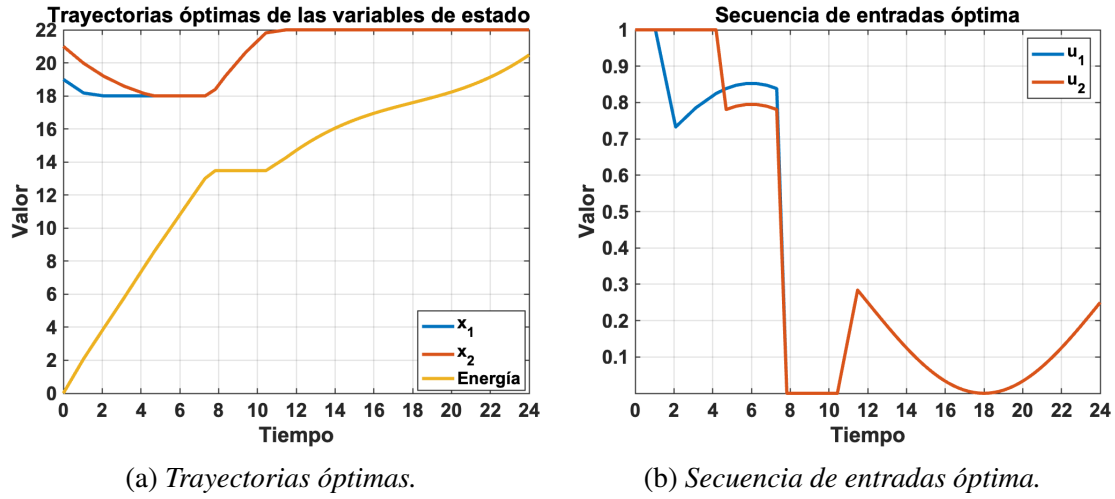


Figura 4.7: Trayectorias óptimas y controles intermedios óptimos obtenidos con ICLOCS para el caso de una temperatura exterior sinusoidal.

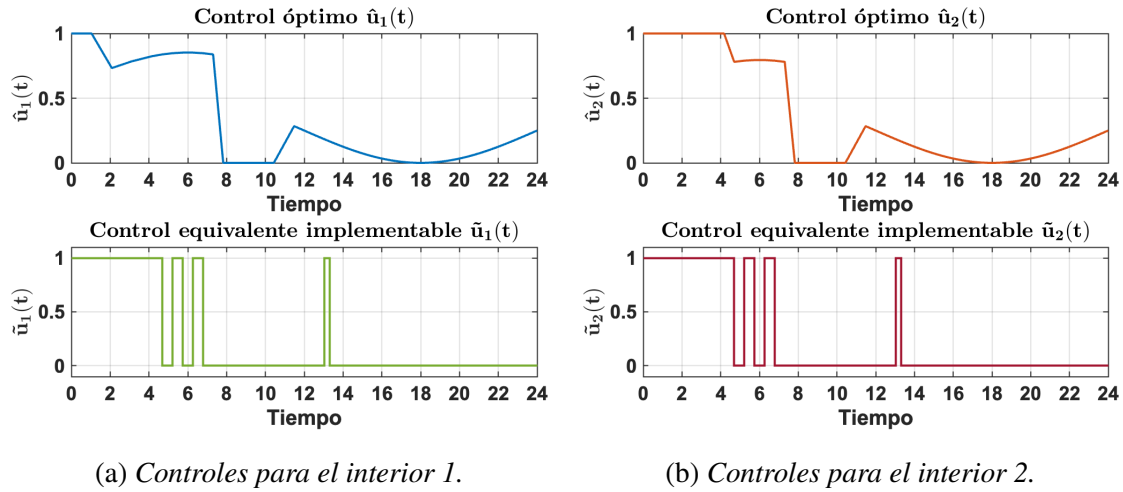
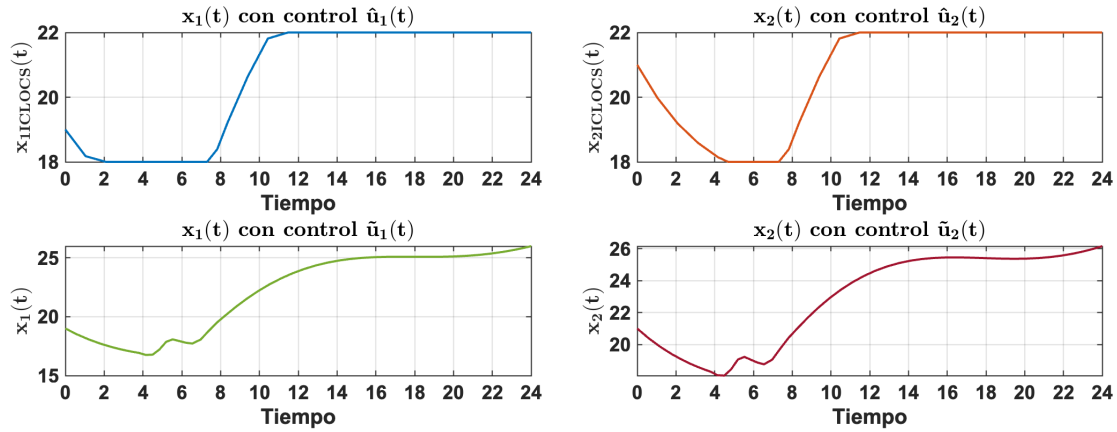


Figura 4.8: Controles intermedios óptimos y equivalentes implementables para el caso de una temperatura exterior de tipo sinusoidal. Arriba: controles óptimos para el problema convexo $\hat{u}_1$ y $\hat{u}_2$ obtenidos con ICLOCS. Abajo: controles equivalentes implementables $\tilde{u}_1$ y $\tilde{u}_2$ obtenidos tras el cálculo de cada λ_{ij} .

sinusoidal en (D.11). Las gráficas de los controles obtenidos se muestran en (4.8a) y (4.8b). En estas gráficas se puede observar que para ambos interiores los equipos acondicionadores de aire se apagan después de las 14:00 horas y no vuelven a encenderse.

Una vez obtenidos los valores de los controles equivalentes implementables, se generaron las trayectorias respectivas, como se justificó en la subsección (4.3.2), las gráficas correspondientes se muestran en (4.9a) y (4.9b).



(a) Trayectorias de la variable de estado $x_1(t)$. (b) Trayectorias de la variable de estado $x_2(t)$.

Figura 4.9: Gráficas de las variables de estado para el caso de $\hat{x}$ sinusoidal. Arriba: Trayectorias óptimas obtenidas mediante ICLOCS. Abajo: Trayectorias obtenidas con los controles equivalentes implementables $\tilde{u}_1$, verde, y $\tilde{u}_2$, rojo.

Finalmente, se obtuvo el costo de operación de estos controles, individualmente se obtuvo que $J_1 = \$24.9301$ $J_2 = \$24.9301$, por lo cual en conjunto $J = \$49.8601$, la gráfica (4.10) muestra el costo acumulado durante el tiempo de funcionamiento.

Nótese que el costo de este funcionamiento, $J = \$49.8601$ es aproximadamente \$138 menor que el obtenido mediante ICLOCS ($J = \$188.0954$). Esta disminución en el precio se refleja asimismo en las trayectorias relajadas, gráficas (4.9a) y (4.9b), ya que la temperatura alcanzada en éstas es de alrededor de 25°C después de las 14 horas, y hasta el final del periodo, generando una diferencia de por lo menos 5°C respecto a la temperatura ambiente pero manteniendo el estado del acondicionador de aire en apagado.

4.5. Temperatura exterior constante con un término de penalización

Es importante notar que en las soluciones obtenidas en las secciones anteriores no se cuenta con la garantía de la existencia de las trayectorias admisibles debido a que, en general, no

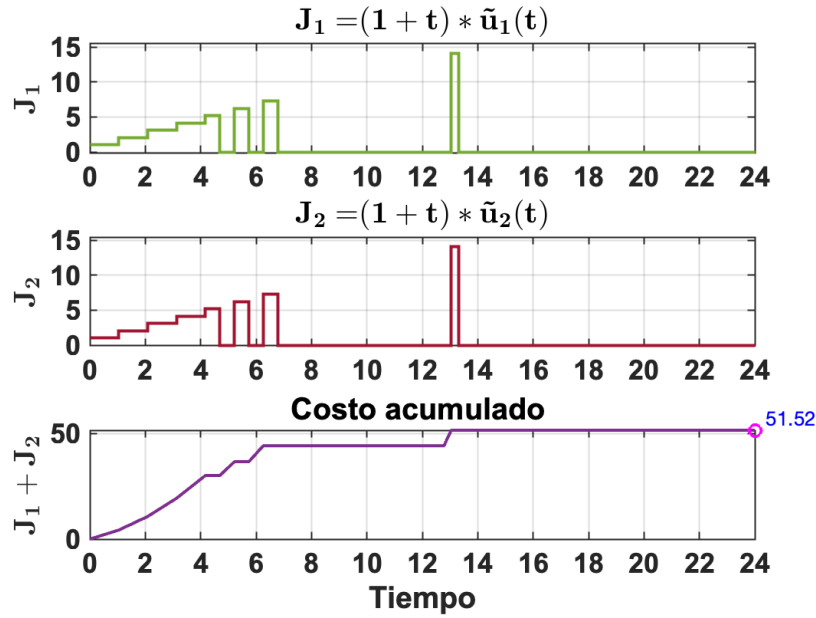


Figura 4.10: Costo acumulado para el caso de $\hat{x}(t)$ sinusoidal tras la operación de ambos controles equivalente implementables en sus respectivos interiores.

se conoce si la energía E será suficiente para mantener al sistema dentro de la franja de confort térmico; sin embargo, es posible garantizar la existencia de dichas soluciones al añadir un término al problema.

Nótese que en la sección (4.3) se obtuvo que, para el caso de temperatura exterior constante, el costo de operación fue $J = \$132.8904$, con trayectorias que alcanzaron valores máximos de confort térmico cercanos a 25°C en ambos interiores. Esto implica una desviación aproximada de 3°C respecto al límite superior del intervalo de confort. Surge entonces la pregunta de si es posible aproximarse más a los límites deseados sin incrementar significativamente el costo.

Para explorarlo, en estas secciones se considerará la función de costo (3.2) de la forma:

$$f(t, x, u) = P\pi(u_1^2 + u_2^2) + A(x_1 - 20)^2 + A(x_2 - 20)^2, \quad (4.5)$$

donde los términos multiplicados por A constituyen un *término de penalización*. El parámetro A asigna un peso a la desviación con respecto a la temperatura objetivo, tomada como 20°C (mediana del intervalo de confort). Nótese que en este caso $f(t, x, u)$ es estrictamente convexa tanto en x como en u haciendo que el problema cumpla con las hipótesis

del teorema (2.3), lo cual garantiza la existencia de la solución, contrariamente a los casos anteriores en los que no necesariamente ocurre.

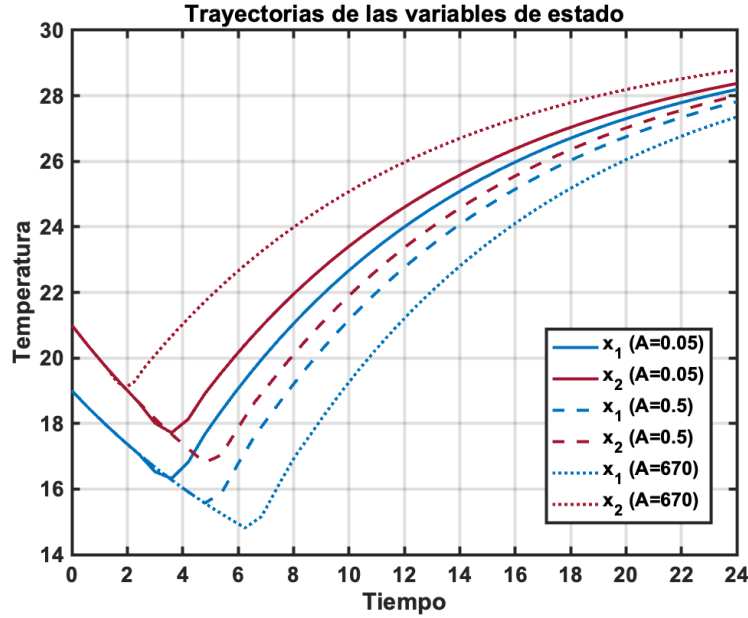
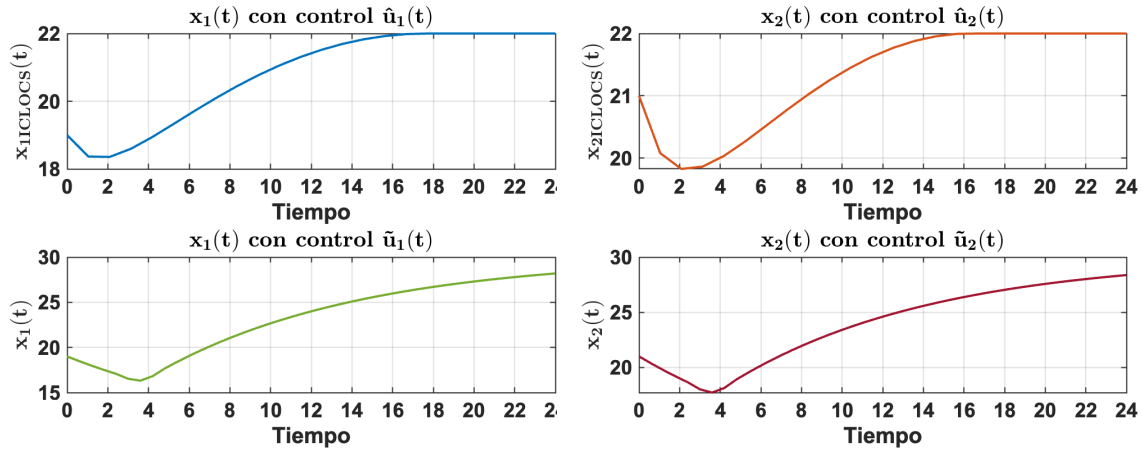


Figura 4.11: Trayectorias de $x_1(t)$ y $x_2(t)$ obtenidas a partir de los controles equivalentes implementables $\tilde{u}_1$ y $\tilde{u}_2$ para el caso de temperatura exterior constante y un término de penalización.

Se obtuvieron los controles intermedios y las trayectorias óptimas para generar los controles equivalentes implementables y sus correspondientes trayectorias para diferentes valores de A y para diferentes temperaturas objetivo. Por un lado, los resultados obtenidos al variar las temperaturas objetivo no resultaron en cambios de comportamiento ni en cambios significativos en el costo de operación. Por otro lado, al cambiar los valores del peso, A , resultó relevante que tanto para valores *pequeños* como *grandes* de A no se observó un cambio relevante respecto a la solución sin penalización. Así, tomando en el código (D.4) con $A = 0.05$ se obtiene $J = \$19.33$, para $A = 0.5$ se obtiene $J = \$31.1682$, con $A = \$323.6$ se tiene $J = \$25.7694$, para el valor de $A = 605$ se consigue un costo de $J = \$21.4594$ y, finalmente, con $A = 670$ se tiene el costo $J = \$24.7259$.

En la gráfica (4.11) se muestran las trayectorias obtenidas a partir del control equivalente implementable para tres de estos casos. Nótese que la forma de la trayectoria para ambos sistemas es la misma, cambiando únicamente en el tiempo en que se obtienen los mínimos para cada sistema, pero al final del periodo se tienen temperaturas alrededor de los 28°C.

En las gráficas (4.12a) y (4.12b) se presentan las trayectorias óptimas obtenidas con ICLOCS



(a) Trayectorias de la variable de estado $x_1(t)$. (b) Trayectorias de la variable de estado $x_2(t)$.

Figura 4.12: Gráficas de las variables de estado para el caso de $\hat{x} = 30^\circ\text{C}$ y un término de penalización. Arriba: Trayectorias óptimas obtenidas mediante ICLOCS. Abajo: Trayectorias obtenidas con los controles equivalentes implementables $\tilde{u}_1$, verde, y $\tilde{u}_2$, rojo.

y las trayectorias obtenidas mediante los respectivos controles equivalentes implementables para el costo

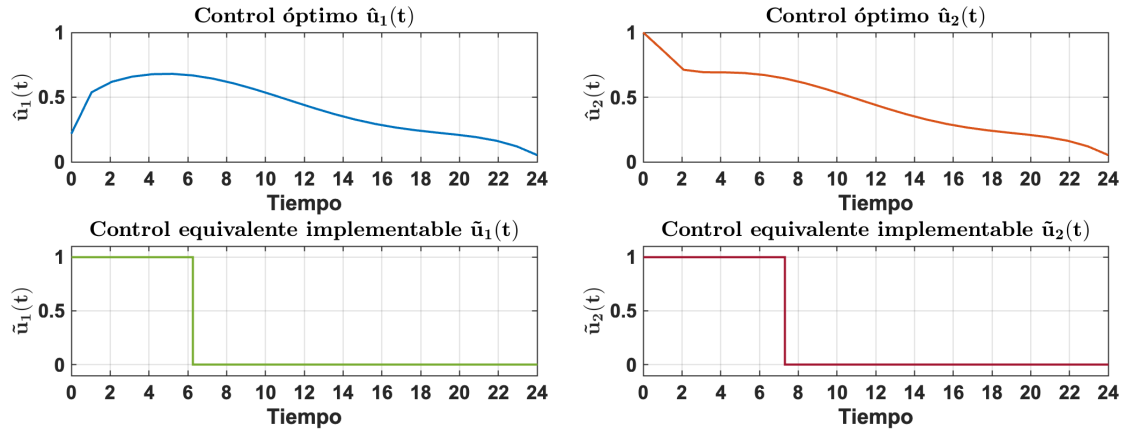
$$f(t, x, u) = P\pi(u_1^2 + u_2^2). \quad (4.6)$$

Observe que las trayectorias relajadas alcanzan los 28°C al final del periodo de operación. Reuniendo estos elementos resulta que el peso A es despreciable para el caso de la temperatura externa constante.

4.6. Temperatura exterior sinusoidal con un término de penalización

En la sección (4.4) se obtuvo el costo, $J = \$51.52$, de mantener los dos equipos generadores de aire acondicionado en funcionamiento durante 24 horas para el caso de una temperatura exterior sinusoidal, ecuación (4.4). En esta sección se averiguará si es posible implementar un término de penalización, ecuación (4.5), de modo que los valores de las trayectorias de las variables de estado permanezcan *cercanos* a los valores del intervalo de confort térmico. Para ello, primero se tomaron diversos valores del término de penalización de modo que los costos de operación coincidieran con el costo sin penalización, así se encontró que el valor $A = 0.5119$, genera un costo de $J = \$51.7202$, donde $J_1 = \$22.0718$ y $J_2 = \$29.6484$.

Para observar el efecto de la penalización cabe comparar las gráficas obtenidas en la sección (4.4) con las obtenidas en esta sección. Si bien, las soluciones óptimas obtenidas en (4.8a) y (4.8b) son aparentemente desemejantes, al obtener los controles equivalentes implementables se observa que el comportamiento es similar y que la acción del término de penalización se refleja en que en este último caso se tienen 6 horas continuas de estado encendido (*ON*) y en el caso sin penalización son poco más de 4 horas con tres periodos de conmutación breves, por lo cual el costo es aproximadamente el mismo.



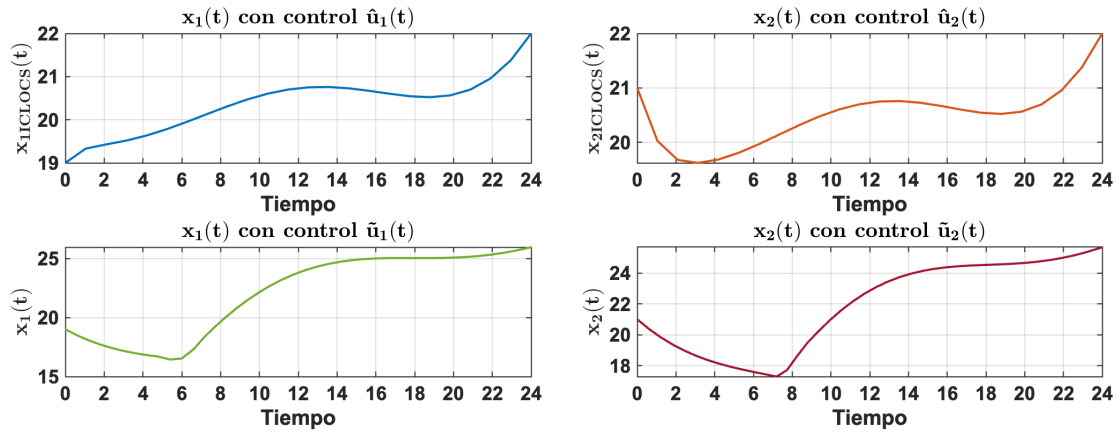
(a) Controles para el interior 1.

(b) Controles para el interior 2.

Figura 4.13: Controles óptimos y equivalentes implementables para el caso de una temperatura exterior sinusoidal y un término de penalización. Arriba: controles óptimos convexos $\hat{u}_1$ y $\hat{u}_2$ obtenidos con ICLOCS. Abajo: controles equivalentes implementables $\tilde{u}_1$ y $\tilde{u}_2$ obtenidos tras la obtención de cada λ_{ij} .

Además, las gráficas (4.9a) y (4.14a) muestran que las trayectorias obtenidas a partir de los respectivos controles equivalentes implementables son similares, pero que al tomar el término con penalización se obtiene una temperatura ligeramente menor para el primer sistema. Análogamente, las gráficas (4.9b) y (4.14b) muestran que las trayectorias obtenidas a partir de los respectivos controles equivalentes implementables son similares. Para este interior se aprecia que se obtienen temperaturas por debajo de los 18°C y que no se llega a los 26°C , siendo esta la principal contribución del término de penalización para obtener una diferencia en costo de veinte centavos, \$0.20.

Finalmente, se muestra el costo acumulado para este caso con término de penalización en la gráfica (4.15). Se puede observar que el comportamiento es el mismo, salvo por el aumento de costo alrededor de las 13 horas en el cual, en el caso sin penalización, se tiene encendido por unos minutos cada AC.



(a) Trayectorias de la variable de estado $x_1(t)$. (b) Trayectorias de la variable de estado $x_2(t)$.

Figura 4.14: Gráficas de las variables de estado para el caso de una temperatura exterior sinusoidal y un término de penalización. Arriba: Trayectorias óptimas obtenidas mediante ICLOCS. Abajo: Trayectorias obtenidas con los controles equivalentes implementables $\tilde{u}_1$, verde, y $\tilde{u}_2$, rojo.

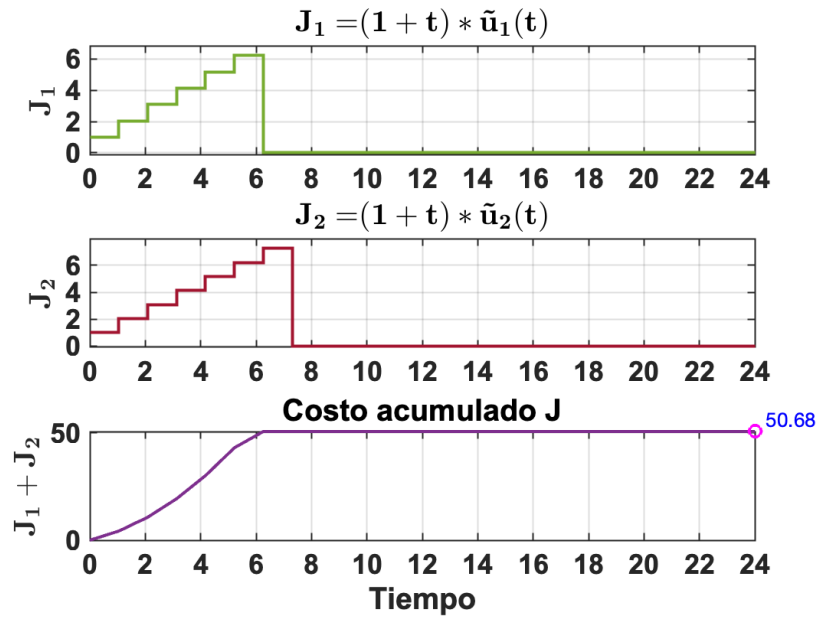


Figura 4.15: Costo acumulado para el caso de una temperatura exterior sinusoidal y un término de penalización tras la operación de ambos controles equivalentes implementables en sus respectivos interiores.

Capítulo 5

Resultados y conclusiones

Este trabajo consistió en el planteamiento del problema de gestión energética dentro de la teoría de control óptimo y la simulación de controles, trayectorias y costos obtenidos numéricamente.

Primero, se hizo el planteamiento físico del problema para un número n de interiores en contacto con un ambiente térmico externo. El problema se formuló a partir de la ecuación de enfriamiento de Newton, tras la consideración de la interacción entre el medio exterior, el espacio interior y el equipo de climatización, con sus respectivos parámetros de transferencia térmica y consumo energético.

La característica de variables híbridas, continuas y discretas, de este problema dificulta la obtención de soluciones numéricas por lo cual se convexificó el problema de modo que fuera posible resolverlo con *ICLOCS*. Esta convexificación trajo consigo la existencia de valores intermedios en los controles, los cuales fueron abordados en la misma teoría como trayectorias relajadas de modo en que se asegurara que los controles obtenidos seguían siendo soluciones del problema original y se obtuviesen controles implementables a partir de los controles convexificados.

Se realizaron simulaciones en *Matlab* para analizar el desempeño del método propuesto al comparar los valores obtenidos de los costos al mantener en funcionamiento dos equipos acondicionadores de aire durante 24 horas expuestos a dos diferentes ambientes térmicos: uno con temperatura exterior constante y otro con temperatura exterior variable de tipo sinusoidal.

Al evaluar el costo con los controles equivalentes implementables y al comparar con el costo obtenido en *ICLOCS*, se encontró que el control implementable reduce el gasto. Este resultado implica que la aplicación del método propuesto permite una disminución signifi-

cativa en el costo operativo, manteniendo las temperaturas cercanas al intervalo de confort térmico. Sin embargo, dada la desviación del intervalo de confort térmico en las trayectorias surge la cuestión de si es posible reducir esta desviación sin incrementar significativamente el costo.

Un inconveniente en la formulación sin penalización es que no garantiza la existencia de soluciones admisibles por lo cual se incorporó un término de penalización en la función de costo, como se mostró en la ecuación (4.5) donde el parámetro A pondera la desviación respecto a la temperatura objetivo de 20°C , valor medio del intervalo de confort. Se calcularon los controles equivalentes implementables y sus respectivas trayectorias para diferentes valores de A y diversas temperaturas objetivo en ambos casos de temperatura exterior.

La figura (4.11) muestra que tanto valores pequeños como grandes de A mantienen un comportamiento similar al caso de temperatura exterior constante sin penalización. Los mínimos se alcanzan en instantes distintos y las temperaturas finales se sitúan alrededor de 28°C . En las figuras (4.12a) y (4.12b) se comparan las trayectorias óptimas con las generadas por los controles equivalentes implementables para la función de costo $f(t, x, u) = P\pi(u_1^2 + u_2^2)$. En todos los casos, las trayectorias relajadas terminan cerca de 28°C , lo que sugiere que agregar un término de penalización no contribuye significativamente a mejorar el confort térmico ni a reducir el costo operativo.

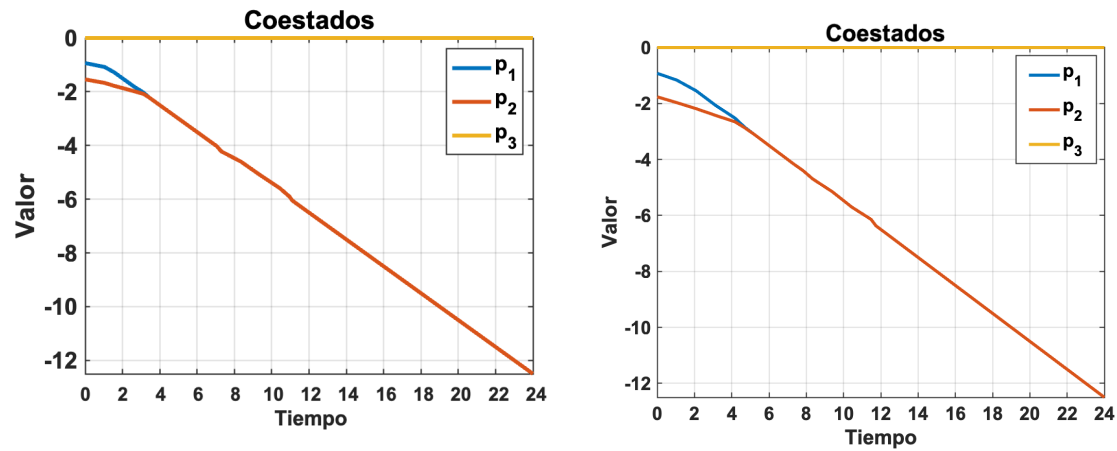
El segundo tipo de interacción térmica fue el de temperatura exterior de tipo sinusoidal con penalización. Para que la comparación fuera objetiva, se seleccionó un valor del parámetro de penalización, A , tal que el costo total resultante sea comparable al caso sin penalización.

Las figuras (4.13a) y (4.13b) muestran los controles óptimos convexos $(\hat{u}_1, \hat{u}_2)$ y los controles equivalentes implementables $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ para el caso con penalización. Al compararlos con los controles del caso sin penalización, figuras (4.8a) y (4.8b), se observa que el comportamiento general es similar. Este comportamiento explica por qué el costo total es prácticamente el mismo, pero la estrategia de control cambia para priorizar las trayectorias cercanas a la franja de confort térmico. Esto significa que el término de penalización prolonga el intervalo temporal en el cual se tienen temperaturas más cercanas L_i sin aumentar el costo de forma significativa.

Adicionalmente, se verificó que los coestados en todos los casos satisfacieran la ecuación (3.26). Así, en las figuras (5.1a), (5.1b) y (5.2) se tiene que $p_{N+1} = 0$, línea amarilla, y que $q_i(t) < 0$, líneas azul y roja.

Así, es posible concluir los siguientes resultados

- Se encontró que es posible incluir un término de penalización para prolongar la pro-



(a) Temperatura constante sin penalización. (b) Temperatura sinusoidal sin penalización.

Figura 5.1: Comprobación de los valores de los coestados.

ximidad al intervalo de confort térmico sin incrementar significativamente el costo total.

- La inclusión de la penalización permite cumplir objetivos adicionales de confort térmico sin afectar el costo de operación de manera relevante y garantizando la existencia de las soluciones.
- Este hallazgo sugiere que en sistemas reales es viable aplicar términos de penalización para mejorar el confort, priorizando el confort térmico frente a pequeñas diferencias en costo.
- También indica que los controles equivalentes implementables responden bien a esta modificación, manteniendo la factibilidad práctica del método.

Finalmente, los resultados muestran que el enfoque propuesto es viable para implementar controles binarios equivalentes a los controles óptimos relajados, y no físicamente posibles, logrando un ahorro considerable en costos con una ligera penalización en el comportamiento térmico. Esto sugiere que el método es prometedor para la gestión eficiente de energía en sistemas de climatización.

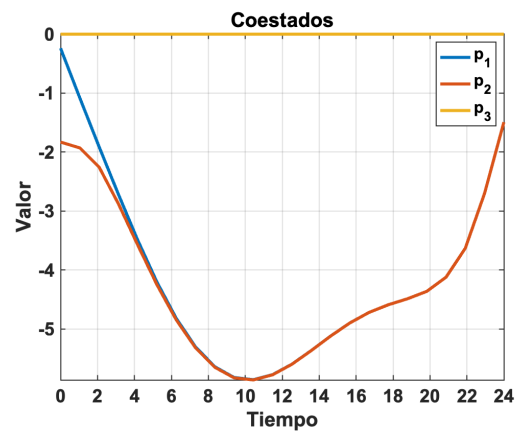


Figura 5.2: Comprobación de los valores de los coestados: temperatura sinusoidal con penalización.

Apéndice A

Precios de la energía eléctrica en México.

55

Tarifa 1 (\$/kWh)														
Tipo de Consumo	Rango	dic-23	ene-24	feb-24	mar-24	abr-24	may-24	jun-24	jul-24	ago-24	sep-24	oct-24	nov-24	dic-24
Básico	75 kWh/mes	1.059	1.063	1.067	1.071	1.075	1.079	1.083	1.087	1.091	1.095	1.099	1.103	1.107
Intermedio	76–140 kWh/mes	1.286	1.290	1.295	1.300	1.305	1.310	1.315	1.320	1.326	1.330	1.335	1.340	1.345
Excedente	141 kWh +	3.763	3.777	3.791	3.805	3.819	3.833	3.847	3.861	3.875	3.889	3.903	3.917	3.932

Tarifa 1A Verano (\$/kWh)														
Tipo de Consumo	Rango	dic-23	ene-24	feb-24	mar-24	abr-24	may-24	jun-24	jul-24	ago-24	sep-24	oct-24	nov-24	dic-24
Básico	100 kWh/mes	0.942	0.945	0.949	0.953	0.957	0.961	0.965	0.969	0.973	0.977	0.981	0.985	0.989
Intermedio	101–150 kWh/mes	1.095	1.099	1.103	1.107	1.111	1.115	1.119	1.123	1.127	1.131	1.135	1.139	1.143
Excedente	151 kWh +	3.763	3.777	3.791	3.805	3.819	3.833	3.847	3.861	3.875	3.889	3.903	3.917	3.932

Tarifa 1A Fuera de Verano (\$/kWh)														
Tipo de Consumo	Rango	dic-23	ene-24	feb-24	mar-24	abr-24	may-24	jun-24	jul-24	ago-24	sep-24	oct-24	nov-24	dic-24
Básico	75 kWh/mes	1.059	1.063	1.067	1.071	1.075	1.079	1.083	1.087	1.091	1.095	1.099	1.103	1.107
Intermedio	76–150 kWh/mes	1.285	1.290	1.295	1.300	1.305	1.310	1.315	1.320	1.326	1.330	1.335	1.340	1.345
Excedente	151 kWh +	3.763	3.777	3.791	3.805	3.819	3.833	3.847	3.861	3.875	3.889	3.903	3.917	3.932

Tabla A.1: Precios de la energía eléctrica en México. Tarifas establecidas por la SHCP para el año 2025. Nótese el ajuste por temporada de verano y fuera de verano [22].

Apéndice B

Teoremas

Teorema B.1. [Teorema 23.2 de [36, Pág. 477]]. Sea (g, U) un sistema de control definido en el intervalo $[t_0, t_f]$, para el cual se cumple:

- (a) $g(t, x, u)$ es continua en (x, u) y medible en t ;
- (b) $U(\cdot)$ es medible y con valores compactos;
- (c) g tiene crecimiento lineal: existe una función sumable $M(t)$ tal que

$$(t, x) \in [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^n, u \in U(t) \Rightarrow |g(t, x, u)| \leq M(t)(1 + |x|); \quad (\text{B.1})$$

- (d) El conjunto $g(t, x, U(t))$ es convexo para todo (t, x) .

Sea (x_i, u_i) una secuencia de procesos del sistema de control (g, U) , tal que el conjunto $\{x_i(t_0) : i \geq 1\}$ es acotado. Entonces, existe una subsucesión de x_i que converge uniformemente hacia una trayectoria de estado x^* del sistema.

Esta conclusión significa que el límite x^* es un arco que admite una función de control u^* que satisface

$$x'^*(t) = g\left(t, x^*(t), u^*(t)\right), \quad \text{para casi todo } t \in [t_0, t_f]. \quad (\text{B.2})$$

No se afirma en ningún momento que u_i converja en algún sentido hacia u^* .

Apéndice C

Justificación de la obtención numérica de lambda

Una de las facilidades que brinda *Matlab* es la de tener la función *trapz* predefinida la cual sirve para obtener la integral por medio del método del trapecio para un mínimo de tres puntos la cual puede adaptarse para el caso en el que no son equidistantes. En este apéndice se observa que el método es válido y equivalente al obtenido en la sección (3.19). Nótese que la ecuación (3.18) también puede aproximarse de la siguiente manera

$$\int_{(j-1)T_m}^{(j-1)T_m+\lambda_{ij}} e^{\alpha_i(jT_m-s)} ds = \frac{\lambda_{ij}e^{\alpha_i T_m}}{2} (e^{-\alpha_i \lambda_{ij}} + 1), \quad (\text{C.1})$$

de donde se obtiene que

$$\lambda_{ij} (e^{-\alpha_i \lambda_{ij}} + 1) = 2I_{-1} e^{-\alpha_i T_m}. \quad (\text{C.2})$$

Ya que $0 \leq \lambda_{ij} \leq T_m$ se puede hacer un desarrollo de Taylor alrededor del cero, pues se quiere que $\lambda_{ij}^- \in [0, 1]$, de modo que

$$\lambda_{ij} (e^{-\alpha_i \lambda_{ij}} + 1) \approx \lambda_{ij} (2 - \alpha_i \lambda_{ij}), \quad (\text{C.3})$$

igualdad que conduce a la ecuación cuadrática para λ_{ij}

$$\lambda_{ij}^2 - \frac{2}{\alpha_i} \lambda_{ij} + \frac{2I_{-1} e^{-\alpha_i T_m}}{\alpha_i} = 0, \quad (\text{C.4})$$

cuyas raíces están dadas por

$$\lambda_{ij} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2\alpha_i I_{-1} e^{-\alpha_i T_m}}}{\alpha_i}. \quad (\text{C.5})$$

Tomando la raíz negativa se garantiza que las raíces estén en el intervalo deseado, $\lambda_{ij}^- \in [0, 1]$:

$$\lambda_{ij}^- = \frac{1 - \sqrt{1 - 2\alpha_i \mathbb{I}_i e^{-\alpha_i T_m}}}{\alpha_i}, \quad (\text{C.6})$$

lo cual es deseable dada la definición de λ_{ij} en la ecuación (3.14), expresión utilizada para integrar por el método del trapecio equivalente a la ecuación (3.19).

Apéndice D

Códigos

Código D.1.

```
[problem,guess]=myProblem;  
options= problem.settings(24); % Get options and solver  
    settings  
[solution,MRHistory]=solveMyProblem(problem,guess,options);  
genSolutionPlots(options, solution);
```

Código D.2.

```
function [dx] = myproblem_Dynamics_Internal(x,u,p,t,vdat)  
x1 = x(:,1); x2 = x(:,2); x3 = x(:,3); %Definición de variables  
u1 = u(:,1); u2 = u(:,2); %Definición de controles  
  
%xbarra = 30; % Temperatura exterior constante  
xbarra = 5*sin(t*pi/12)+30; % Temperatura exterior sinusoidal  
alpha = 0.1; beta = 20*alpha; %Coeficientes térmicos  
  
dx(:,1) = -alpha*(x1-xbarra)-beta*(u1); %Dinámica original  
dx(:,2) = -alpha*(x2-xbarra)-beta*(u2); %Dinámica original  
dx(:,3) = u1+u2; %Dinámica de la variable aumentada
```

Código D.3.

```
function [problem,guess] = myProblem
```

```
% Tiempo inicial.  $t_0 < t_f$ 
problem.time.t0_min=0;
problem.time.t0_max=0;
guess.t0=0;

% Tiempo final. Sea  $t_{f\_min}=t_{f\_max}$  si  $t_f$  es fijo.
problem.time.tf_min=24;
problem.time.tf_max=24;
guess.tf=24;

% Límites de los parámetros.  $p_l \leq p \leq p_u$ 
problem.parameters.pl=[];
problem.parameters.pu=[];
guess.parameters=[];

% Condiciones iniciales para el sistema
problem.states.x0=[19 21 0];

% Condiciones iniciales para el sistema. Límites si  $x_0$  es libre, esto es
%  $x_{0l} \leq x_0 \leq x_{0u}$ 
problem.states.x0l=[19 21 0];
problem.states.x0u=[19 21 0];

% Cotas de estado  $x_l \leq x \leq x_u$ 
problem.states.xl=[18 18 0];
problem.states.xu=[22 22 48];

% Límites de error del estado
problem.states.xErrorTol_local=[1e-2 1e-2 1e-2];
problem.states.xErrorTol_integral=[1e-2 1e-2 1e-2];

% Límites de error de restricción del estado
problem.states.xConstraintTol=[1e-2 1e-2 1e-2];

% Límites de estado terminal.  $x_{fl} \leq x_f \leq x_{fu}$ 
problem.states.xfl=[18 18 0]; %24
problem.states.xfu=[22 22 48];

% Presuposición de las trayectorias de estado con  $[x_0 x_f]$ 
```

```

guess.states(:,1)=[19 22];
guess.states(:,2)=[21 22];
guess.states(:,3)=[0 24];

problem.inputs.N=0;

% Límites de entrada
problem.inputs.ul=[0 0];
problem.inputs.uu=[1 1];

% Límites de la primera acción de control
problem.inputs.u0l=[0 0];
problem.inputs.u0u=[1 1];

% Límites de error de restricción de entrada
problem.inputs.uConstraintTol=[0.1 0.1];

% Presuposición de la secuencia de entrada con [u0 uf]
guess.inputs(:,1)=[0 1];
guess.inputs(:,2)=[0 1];

% Elección de los puntos de ajuste (en caso de ser necesario)
problem.setpoints.states=[];
problem.setpoints.inputs=[];

% Límites para la función de restricción de trayectoria  $gl \leq g(x,u,p,t) \leq gu$ 
problem.constraints.ng_eq=0;
problem.constraints.gTol_eq=[];

problem.constraints.gl=[];
problem.constraints.gu=[];
problem.constraints.gTol_neq=[];

% Límites para las restricciones de límite  $bl \leq b(x0,xf,u0,uf,p,t0,tf) \leq bu$ 
problem.constraints.bl=[];
problem.constraints.bu=[];
problem.constraints.bTol=[];

```

Código D.4.

```
function stageCost = L_unscaled(x,xr,u,ur,p,t,vdat)
P = 1; P_pi = 1+t; u1 = u(:,1); u2 = u(:,2);
x1 = x(:,1); x2 = x(:,2);
stageCost = P.*P_pi.*(u1+u2); %sin penalización
%stageCost = P.*P_pi.*(u1.^2+u2.^2);
%Penalización cuadrática
%A=650;
%stageCost = P.*P_pi.*(u1.^2+u2.^2)+A*(x1-20).^2+A*(x2-20).^2;
```

Código D.5.

```
function boundaryCost=E_unscaled(x0,xf,u0,uf,p,t0,tf,vdat)
boundaryCost=0; %Función de costo
```

Código D.6.

```
function [grupos_T, grupos_U1, grupos_U2] =
    segmentar_intervalos_con_interpolacion(T, U1, U2, limites)
num_intervals = numel(limites) - 1; %24 horas dan 23 intervalos de
    una hora para la integración numérica
grupos_T = cell(num_intervals,1); % Interpolación del tiempo
grupos_U1 = cell(num_intervals,1); % Interpolación de u_1
grupos_U2 = cell(num_intervals,1); % Interpolación de u_2
%Vectores para cada T_m de 1 hora con al menos tres puntos, elimina
    repeticiones.
for i = 1:num_intervals
    a = limites(i);
    b = limites(i+1);
    idx = T >= a & T <= b;
    T_seg = T(idx);
    U1_seg = U1(idx);
    U2_seg = U2(idx);

    if ~ismember(a, T_seg)
        U1_a = interp1(T, U1, a, 'linear', 'extrap');
```

```

        U2_a = interp1(T, U2, a, 'linear', 'extrap');
        T_seg = [a; T_seg];
        U1_seg = [U1_a; U1_seg];
        U2_seg = [U2_a; U2_seg];
    end
    if ~ismember(b, T_seg)
        U1_b = interp1(T, U1, b, 'linear', 'extrap');
        U2_b = interp1(T, U2, b, 'linear', 'extrap');
        T_seg = [T_seg; b];
        U1_seg = [U1_seg; U1_b];
        U2_seg = [U2_seg; U2_b];
    end

    grupos_T{i} = T_seg;
    grupos_U1{i} = U1_seg;
    grupos_U2{i} = U2_seg;
end
end

```

Código D.7.

```

function integrales_exp = calcular_integral_exponencial(grupos_T,
    grupos_U, T_m)
num_intervals = numel(grupos_T); %Tiempo
integrales_exp = zeros(num_intervals,1); %Inicialización
%Obtención de la integral numérica para cada T_m = 1 hr
for j = 1:num_intervals
    T_vals = grupos_T{j};
    U_vals = grupos_U{j};
    kernel = exp(0.1 * (j * T_m - T_vals));
    integrales_exp(j) = trapz(T_vals, kernel .* U_vals);
end
end

```

Código D.8.

```

function lambda_minus = calcular_lambda(integrales_exp)
exp_m1 = exp(-1); %Obtención de lambda_ij para cada intervalo

```

```

D = 1 - 0.2 * integrales_exp * exp_m1; %Discriminante
lambda_minus = NaN(size(integrales_exp)); %En caso de obtener una
    raíz compleja
lambda_minus(D > 0) = 10 - 10*sqrt(D(D > 0)); %La raíz necesaria
    está entre 0 y 1, por lo cual se toma el signo menos
end

```

Código D.9.

```

function [grupos_ut1, grupos_ut2] =
    generar_control_escalonado(grupos_T, lambda1, lambda2, T_m)
num_intervals = numel(grupos_T); %Tiempo
grupos_ut1 = cell(num_intervals,1); %Control u_1 convexo interpolado
grupos_ut2 = cell(num_intervals,1); %Control u_2 convexo interpolado

for j = 1:num_intervals
    t_j = grupos_T{j};
    % Control equivalente implementable u_1
    if isnan(lambda1(j))
        grupos_ut1{j} = zeros(size(t_j));
    else
        t_switch = (j - 1 + lambda1(j)) * T_m;
        grupos_ut1{j} = double(t_j <= t_switch);
    end
    % Control equivalente implementable u_1
    if isnan(lambda2(j))
        grupos_ut2{j} = zeros(size(t_j));
    else
        t_switch = (j - 1 + lambda2(j)) * T_m;
        grupos_ut2{j} = double(t_j <= t_switch);
    end
end
end
end

```

Código D.10.

```

function [Tiempo_Completo, Control1_Completo, Control2_Completo] =
    limpiar_y_concatenar_resultados(grupos_T, grupos_ut1,

```

```

        grupos_ut2, T)
    tol = 1e-10;
    num_intervals = numel(grupos_T);
    for j = 1:num_intervals
        idx = ismembertol(grupos_T{j}, T, tol);
        grupos_T{j} = grupos_T{j}(idx);
        grupos_ut1{j} = grupos_ut1{j}(idx);
        grupos_ut2{j} = grupos_ut2{j}(idx);
    end
    Tiempo_Completo = vertcat(grupos_T{:});
    Control1_Completo = vertcat(grupos_ut1{:});
    Control2_Completo = vertcat(grupos_ut2{:});
    [Tiempo_Completo, ia] = uniquetol(Tiempo_Completo, tol);
    Control1_Completo = Control1_Completo(ia);
    Control2_Completo = Control2_Completo(ia);
end

```

Código D.11.

```

function [t_x, x] = simular_sistema(Tiempo_Completo,
    Control1_Completo, Control2_Completo)
u1_interp = @(t) interp1(Tiempo_Completo, Control1_Completo, t,
    'previous', 0);
u2_interp = @(t) interp1(Tiempo_Completo, Control2_Completo, t,
    'previous', 0);

%Temperatura exterior constante
dxdt_both = @(t, x) [
    -0.1 * (x(1) - 30) - 2 * u1_interp(t); % x1(t)
    -0.1 * (x(2) - 30) - 2 * u2_interp(t) % x2(t)
];

%Temperatura exterior inusoidal
% dxdt_both = @(t, x) [
%     -0.1 * (x(1) - 5*sin(t*pi/12)-30) - 2 * u1_interp(t);
%     -0.1 * (x(2) - 5*sin(t*pi/12)-30) - 2 * u2_interp(t)
% ];

x0 = [19; 21];

```

```
tspan = [0 24];
[t_x, x] = ode45(dxd_t_both, tspan, x0);
end
```

Código D.12.

```
function [J1, J2, J, acumulado, costo_total_final] =
    calcular_costos(Tiempo_Completo, Control1_Completo,
        Control2_Completo)
J1 = trapz(Tiempo_Completo, (1 + Tiempo_Completo) .*
    Control1_Completo);
J2 = trapz(Tiempo_Completo, (1 + Tiempo_Completo) .*
    Control2_Completo);
J = J1 + J2;
delta_t = [0; diff(Tiempo_Completo)];
acumulado = cumsum((1 + Tiempo_Completo) .* (Control1_Completo +
    Control2_Completo) .* delta_t);
costo_total_final = acumulado(end);
end
```

Código D.13.

```
function graficar_resultados(T, U1, U2, Tiempo_Completo,
    Control1_Completo, Control2_Completo, t_x, x, acumulado,
    costo_total_final, X1ICLOCS, X2ICLOCS)
% ----- GRAFICAR EN SUBPLOTS ----- %
figure;
% Subplot para U1
subplot(2,1,1);
stairs(Tiempo_Completo, Control1_Completo, 'LineWidth', 1.5);
xlabel('Tiempo');
ylabel('\tilde{u}_2^{\{1\}}(t)');
title('Control implementable basado en U_1');
grid on;
ylim([-0.1 1.1]);
xlim([0 24]);
xticks([0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24]);
```

```

% Subplot para U2
subplot(2,1,2);
stairs(Tiempo_Completo, Control2_Completo, 'LineWidth', 1.5);
xlabel('Tiempo');
ylabel('\tilde{u}_2^{\{2\}}(t)');
title('Control implementable basado en U_2');
grid on;
ylim([-0.1 1.1]);
xlim([0 24]);
xticks([0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24]);

% ----- FIGURA 1: U1 -----
figure;
subplot(2,1,1);
plot(T, U1, 'b', 'LineWidth', 1.5);
xlabel('Tiempo');
ylabel('U_1(t)');
title('Señal original U_1(t)');
grid on;
xlim([0 24]);
xticks([0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24]);

subplot(2,1,2);
stairs(Tiempo_Completo, Control1_Completo, 'r', 'LineWidth', 1.5);
xlabel('Tiempo');
ylabel('\tilde{u}_2^{\{1\}}(t)');
title('Control implementable a partir de U_1');
grid on;
ylim([-0.1 1.1]);
xlim([0 24]);
xticks([0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24]);

% ----- FIGURA 2: U2 -----
figure;
subplot(2,1,1);
plot(T, U2, 'b', 'LineWidth', 1.5);
xlabel('Tiempo');
ylabel('U_2(t)');

```

```

    title('Señal original  $U_2(t)$ ');
    grid on;
    xlim([0 24]);
    xticks([0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24]);

    subplot(2,1,2);
    stairs(Tiempo_Completo, Control2_Completo, 'r', 'LineWidth', 1.5);
    xlabel('Tiempo');
    ylabel('\tilde{u}_2^{(2)}(t)');
    title('Control implementable a partir de  $U_2$ ');
    grid on;
    ylim([-0.1 1.1]);
    xlim([0 24]);
    xticks([0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24]);

%Trayectorias para el sistema 1
figure;
subplot(2,1,1);
plot(T, X1ICLOCS, 'r', 'LineWidth', 1.5);
xlabel('Tiempo'); ylabel('x_1ICLOCS(t)');
title('Solución de  $x_1(t)$  con control  $\hat{u}_2^{(1)}(t)$ ');
grid on; xlim([0 24]); %ylim([0,26]);
xticks([0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24]);

subplot(2,1,2);
plot(t_x, x(:,1), 'b', 'LineWidth', 1.5);
xlabel('Tiempo'); ylabel('x_1(t)');
title('Solución de  $x_1(t)$  con control  $\tilde{u}_2^{(1)}(t)$ ');
grid on; xlim([0 24]); %ylim([0,26]);
xticks([0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24]);

%Trayectorias para el sistema 2
figure;
subplot(2,1,1);
plot(T, X2ICLOCS, 'r', 'LineWidth', 1.5);
xlabel('Tiempo'); ylabel('x_2ICLOCS(t)');
title('Solución de  $x_2(t)$  con control  $\hat{u}_2^{(2)}(t)$ ');
grid on; xlim([0 24]); %ylim([0,26]);
xticks([0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24]);

```

```

subplot(2,1,2);
plot(t_x, x(:,2), 'b', 'LineWidth', 1.5);
xlabel('Tiempo'); ylabel('x_2(t)');
title('Solución de x_2(t) con control \tilde{u}_2^{(2)}(t)');
grid on; xlim([0 24]); %ylim([0,26]);
xticks([0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24]);

% --- Control ponderado escalonado para U1 ---
figure; box on;
subplot(3,1,1); box on;
stairs(Tiempo_Completo, (1 + Tiempo_Completo) .* Control1_Completo,
    'Color','#77AC30', 'LineWidth', 1.5);
xlabel('Tiempo');
ylabel('(1 + t) * \tilde{u}_2^{(1)}(t)');
title('Costo a partir de U_1 (escalonado)');
grid on;
xlim([0 24]);
ylim([-0.1 1.1 * max((1 + Tiempo_Completo) .* Control1_Completo)]);
xticks([0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24]);

% --- Control ponderado escalonado para U2 ---
subplot(3,1,2); box on;
stairs(Tiempo_Completo, (1 + Tiempo_Completo) .* Control2_Completo,
    'Color','#0072BD', 'LineWidth', 1.5);
xlabel('Tiempo');
ylabel('(1 + t) * \tilde{u}_2^{(2)}(t)');
title('Costo a partir de U_2 (escalonado)');
grid on;
xlim([0 24]);
ylim([-0.1 1.1 * max((1 + Tiempo_Completo) .* Control2_Completo)]);
xticks([0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24]);

% --- Acumulado del control ponderado combinado ---
ponderado_total = (1 + Tiempo_Completo) .* (Control1_Completo +
    Control2_Completo);
delta_t = [0; diff(Tiempo_Completo)];
acumulado = cumsum(ponderado_total .* delta_t);

```

```
subplot(3,1,3);box on;
plot(Tiempo_Completo, acumulado, 'Color', "#7E2F8E", 'LineWidth', 1.5);
xlabel('Tiempo');
ylabel('Costo acumulado');
title('Costo acumulado');
grid on;
xlim([0 24]);
xticks([0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24]);
% --- Marcar el costo total final ---
costo_total_final = acumulado(end);
hold on;
plot(Tiempo_Completo(end), costo_total_final, 'mo', 'MarkerSize', 8,
      'LineWidth', 1.5); % punto rojo
text(Tiempo_Completo(end), costo_total_final, ...
      sprintf(' %.2f', costo_total_final), ...
      'VerticalAlignment', 'bottom', 'Color', 'b', 'FontSize', 10);
end
```

Bibliografía

- [1] Servicio Meteorológico Nacional (CONAGUA). Resúmenes mensuales de temperaturas y lluvias: Julio 2024 (mapa). <https://smn.conagua.gob.mx/es/climatologia/temperaturas-y-lluvias/resumenes-mensuales-de-temperaturas-y-lluvias>, jul 2024. Accedido el 13 de junio de 2025.
- [2] Fernando A. C. C. Fontes, Abhishek Halder, Jorge Becerril, and P. R. Kumar. Optimal control of thermostatic loads for planning aggregate consumption: Characterization of solution and explicit strategies. *IEEE Control Systems Letters*, 3(4):877–882, 2019.
- [3] Ali Arshad, Manuel Fernandes, Sérgio Vinha, and Fernando Fontes. Cascade control of the ground station module of an airborne wind energy system. *Energies*, 14:8337, 12 2021.
- [4] Alex Altamirano Fernández, Alejandro Rojas-Palma, and Sergio Espinoza. Optimal management strategies to maximize carbon capture in forest plantations: A case study with pinus radiata d. don. *Forests*, 14:82, 01 2023.
- [5] Grupo Intergubernamental de Expertos sobre el Cambio Climático (IPCC). Climate change 2023 synthesis report a report of the intergovernmental panel on climate change, 2023. Url=https://www.ipcc.ch/report/ar6/syr/downloads/report/IPCC_AR6_SYR_FullVolume.pdf.
- [6] Lasse Brandt, Kristina Adorjan, Kirsten Catthoor, Eka Chkonja, Peter Falkai, Andrea Fiorillo, Tomasz M Gondek, Jessica Newberry, Martina Rojnic, Andreas Meyer-Lindenberg, Andreas Heinz, Geert Dom, and Jurjen J Luykx. Climate change and mental health: Position paper of the european psychiatric association. *European psychiatry*, 67:1–34, 05 2024.
- [7] Organización de las Naciones Unidas. Acuerdo de París. *United Nations Treaty Collection, Chapter XXVII 7. d*, 2015. Url=https://unfccc.int/sites/default/files/spanish_paris_agreement.pdf.

- [8] ONU. Objetivo 7: Garantizar el acceso a una energía asequible, segura, sostenible y moderna, 2023. Url=<https://www.un.org/sustainabledevelopment/es/energy/>.
- [9] Agencia Internacional de la Energía. Crisis Energética Mundial. <https://www.iea.org/topics/global-energy-crisis?language=es>, 2013. Online; último acceso enero de 2025.
- [10] W.B. Carlson and E.M. Conway. *Electrical Conquest: New Approaches to the History of Electrification*. Archimedes Series. Springer, 2025.
- [11] Lazar Gitelman, Mikhail Kozhevnikov, and Maksim Ditenberg. Electrification as a factor in replacing hydrocarbon fuel. *Energy*, 307:132800, 2024.
- [12] Chun Sing Lai, Kim-Fung Tsang, and Yinhai Wang. Electrification of smart cities. *Applied Sciences*, 13(7), 2023.
- [13] Grupo Intergubernamental de Expertos sobre el Cambio Climático (IPCC). Fuentes de energía renovables y mitigación del cambio climático: resumen para responsables de políticas y resumen técnico. *Informe especial del grupo intergubernamental de expertos sobre el cambio climático*, page 132800, 2011.
- [14] Organización de las Naciones Unidas. ¿Qué son las energías renovables? <https://www.un.org/es/climatechange/what-is-renewable-energy>, 2013. Online; último acceso enero de 2025.
- [15] Zhenwei Guo, Xinyu Wang, Yao Wang, Fenglei Zhu, Haizhu Zhou, Miao Zhang, and Yuxiang Wang. The cost-optimal control of building air conditioner loads based on machine learning: A case study of an office building in nanjing. *Buildings*, 14:3040, 09 2024.
- [16] Jesús Tabares Ospina, Héctor Hernández Riveros. Pronósticos demanda de energía y potencia a corto plazo. caso de estudio: unidad de control de pronóstico noroeste (área antioquia-chocó). *TecnoLógicas*, 2009.
- [17] Agencia Internacional de la Energía. México. <https://www.iea.org/countries/mexico/electricity>, 2013. Online; último acceso enero de 2025.
- [18] <https://app.cfe.mx/Aplicaciones/OTROS/Boletines/boletin?i=10281>. Online; último acceso junio de 2025.
- [19] R Nava y Uribe. Energy efficiency standards in mexico state of art. Informe técnico, Organization of American States (OAS), Sustainable Energy Division, 2015. Accedido el 1 de junio de 2025.

- [20] Richard Brown, Eric Masanet, Arman Shehabi, Jonathan G. Koomey, Ben Nordman, William Tschudi, Dale Sartor, Peter Chan, Joshua Loper, Sam Capana, Bob Hedman, Ruth Duff, Erin Haines, David Sass, and Anthony Fanara. Impacts evaluation of appliance energy efficiency standards in the united states. Technical Report LBNL-1003758, Lawrence Berkeley National Laboratory, Berkeley, CA, USA, 2025. Accedido el 12 de junio de 2025.
- [21] Bob Vila. The best energy-efficient air conditioners. <https://www.bobvila.com/articles/best-energy-efficient-air-conditioners/>, August 2024. Accedido el 12 de junio de 2025.
- [22] <https://app.cfe.mx/Aplicaciones/CCFE/Tarifas/TarifasCRECasa/Casa.aspx>. Online; último acceso junio de 2025.
- [23] Quansheng Zhang, Stephanie Stockar, and Marcello Canova. Energy-optimal control of an automotive air conditioning system for ancillary load reduction. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 24(1):67–80, 2016.
- [24] Bojin Liu, Dipak Ghosal, Chen-Nee Chuah, and H. Michael Zhang. Reducing greenhouse effects via fuel consumption-aware variable speed limit (fc-vsl). *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 61(1):111–122, 2012.
- [25] G.S. Christensen, M.E. El-Hawary, and S.A. Soliman. *Optimal Control Applications in Electric Power Systems*. Mathematical Concepts and Methods in Science and Engineering. Springer US, 2013.
- [26] Yanbiao Feng, Haijia Zhu, and Zuomin Dong. Simultaneous and global optimizations of lng-fueled hybrid electric ship for substantial fuel cost, co2, and methane emission reduction. *IEEE Transactions on Transportation Electrification*, 9(2):2282–2295, 2023.
- [27] Bin Zhou, Jeffrey B. Burl, and Amir Rezaei. Equivalent consumption minimization strategy with consideration of battery aging for parallel hybrid electric vehicles. *IEEE Access*, 8:204770–204781, 2020.
- [28] G. P. Padilla, S. Weiland, and M. C. F. Donkers. A global optimal solution to the eco-driving problem. *IEEE Control Systems Letters*, 2(4):599–604, 2018.
- [29] Paulo H. F. Biazetto, Gustavo A. de Andrade, and Julio E. Normey-Rico. Development of an optimal control strategy for temperature regulation and thermal storage operation of a solar power plant based on fresnel collectors. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 31(3):1149–1164, 2023.
- [30] Michel De Lara and Luc Doyen. *Sustainable Management of Natural Resources:*

- Mathematical Models and Methods*. Environmental Science and Engineering. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2008.
- [31] M[orton] Kamien and N[ancy] Schwartz. *Dynamic Optimization: the calculus of variations and optimal control in economics and management*. Dover, Amsterdam, Países Bajos, 2012.
 - [32] H.J. Sussmann and J.C. Willems. 300 years of optimal control: from the brachystochrone to the maximum principle. *IEEE Control Systems Magazine*, 17(3):32–44, 1997.
 - [33] Zhenwei Guo, Xinyu Wang, Yao Wang, Fenglei Zhu, Haizhu Zhou, Miao Zhang, and Yuxiang Wang. The cost-optimal control of building air conditioner loads based on machine learning: A case study of an office building in nanjing. *Buildings*, 14(10), 2024.
 - [34] J[ack] Macki and A[aron] Strauss. *Introduction to Optimal Control Theory*. Springer-Verlag, Nueva York, EUA, 1995.
 - [35] D.E. Kirk. *Optimal Control Theory: An Introduction*. Dover Books on Electrical Engineering Series. Dover Publications, 2004.
 - [36] Francis Clarke. *Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control*. Springer London, 1 edition, 2013. véase p. 477.
 - [37] R. Vinter. *Optimal Control*. Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhäuser Boston, 2000.
 - [38] P Falugi, E Kerrigan, and E Van Wyk. Imperial college london optimal control software user guide (iclocs). *Department of Electrical and Electronic Engineering, Imperial College London London England, UK*, 2010.
 - [39] <https://github.com/ImperialCollegeLondon/ICLOCS/tree/26e5b418e597a1585b5a3d67bc33b712c02d7958/exampleProblems/BangBang/Fixed%20Mesh>. Junio, 2025.



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00250

Matrícula: 2233803357

Convexificación en control
óptimo para la gestión
energética de termostatos.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 9:00 horas
del día 12 del mes de diciembre del año 2025 en la Unidad
Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los
suscritos miembros del jurado:

DR. BALTAZAR AGUIRRE HERNANDEZ
DR. JORGE ANTONIO BECERRIL GOMEZ
DRA. KARLA LORENA CORTEZ DEL RIO
DR. JULIO ERNESTO SOLIS DAUN

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de
Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen
de Grado cuya denominación aparece al margen, para la
obtención del grado de:

MAESTRA EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS APLICADAS E INDUSTRIALES)

DE: BRENDA ABRIL NEQUIZ GUILLEN

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del
Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad
Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado
resolvieron:

APROBAR

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó a la
interesada el resultado de la evaluación y, en caso
aprobatorio, le fue tomada la protesta.



BRENDA ABRIL NEQUIZ GUILLEN
ALUMNA

REVISÓ

MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

Roman Linares Romero
DR. ROMAN LINARES ROMERO

PRESIDENTE

DR. BALTAZAR AGUIRRE HERNANDEZ

VOCAL

DR. JORGE ANTONIO BECERRIL GOMEZ

VOCAL

DRA. KARLA LORENA CORTEZ DEL RIO

SECRETARIO

DR. JULIO ERNESTO SOLIS DAUN