



Universidad Autónoma Metropolitana

División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Ingeniería de procesos e Hidráulica
Posgrado en Ingeniería Química

Modelo de un dominio para el estudio de flujo bidimensional en una cavidad ocupada parcialmente por medio poroso

TESIS

Que para obtener el grado de:
Maestra en Ciencias (Ingeniería Química)

Tesis que presenta:
I.Q. Fátima Callejas Quiroz

Asesor:
Dr. Jesús Alberto Ochoa Tapia

Jurado:
Presidente: **Dr. José de Jesús Álvarez Ramírez**
Secretario: **Dr. Jorge Ramírez Muñoz**
Vocal: **Dr. Carlos Gilberto Aguilar Madera**

Iztapalapa, Ciudad de México, 13 de Mayo del 2021

Agradecimientos

A Dios por permitirme seguir en este camino.

Al *Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología* (CONACyT) por la beca de maestría otorgada y al proyecto CONACyT (256231) por las facilidades para la realización del presente trabajo.

A mi asesor, el Dr. Jesús Alberto Ochoa Tapia a quien le estoy sumamente agradecida por su participación en este trabajo, por su paciencia, su tiempo, sus conocimientos compartidos y por motivarme a crecer en todos sentidos.

Al MC. Roel Hernández Rodríguez, por sus enseñanzas, su tiempo, su motivación y la confianza depositada en mi.

A la Dra. Frixia Galán Méndez, con quien estoy muy agradecida por su amistad, sus consejos y por motivarme a crecer como persona.

Al Dr. Miguel Ángel Morales Cabrera, por seguir y apoyar mis proyectos.

Al Dr. Eliseo Hernández Martínez, por motivarme a ser mejor y estar pendiente de mis pasos en este largo camino.

A mis padres y hermana, quienes a pesar de la distancia, me apoyan incondicionalmente en cada uno de mis proyectos, me brindan amor y confianza y me motivan con sus palabras a seguir adelante. A mi madre Dora Quiroz Ruiz, a mi padre Martín Callejas Hernández y a mi hermana Esmeralda Callejas Quiroz.

A mi tía, Patricia Callejas Hernández, por su apoyo en los buenos y malos momentos, por la confianza brindada y por cada uno de sus consejos.

A ti, por tu amor, por tus cuidados, tu confianza en mi y porque haces mi vida un mejor escenario.

Índice general

1. Generalidades	1
1.1. Introducción	1
1.2. Antecedentes	3
1.3. Motivación del trabajo	14
1.4. Hipótesis	14
1.5. Objetivos	15
1.5.1. Objetivo general	15
1.5.2. Objetivos específicos	15
2. Metodología	16
2.1. Problema local	16
2.2. Método del promedio volumétrico	19
2.2.1. Región de promediado	19
2.2.2. Operadores de promediado y teoremas del promediado espacial	21
2.2.3. Cerradura local del problema	23
2.3. Ecuaciones de enfoque de un dominio (ODA)	23
2.3.1. Ecuaciones promedio con término \mathbf{f}_β	23
2.3.2. Ecuaciones promedio dependientes del tensor de permeabilidad \mathbf{K}_β	25
2.4. Caso de estudio: Flujo bidimensional	25
2.5. Esquema numérico	28
2.5.1. Esquema numérico para ecuaciones promedio con \mathbf{f}_β	29
2.5.2. Esquema numérico para ecuaciones promedio con término de Darcy	31

3. Resultados y discusión	34
3.1. Escala local	34
3.2. Coeficientes de transporte efectivos y vector \mathbf{f}_β	39
3.2.1. Fracción volumétrica	39
3.2.2. Vector de resistencias \mathbf{f}_β	41
3.2.3. Componentes no nulos del tensor de permeabilidad	45
3.3. GTE con vector \mathbf{f}_β	50
3.3.1. Campo de velocidad bidimensional	50
3.3.2. Campo de presión bidimensional	57
3.4. GTE con término de Darcy	60
3.4.1. Campo de velocidad bidimensional	60
3.4.2. Campo de presión bidimensional	67
4. Conclusiones y perspectivas	70
A. Ecuaciones promedio que consideran al vector \mathbf{f}_β	72
A.1. Ecuación de continuidad	72
A.2. Ecuación de movimiento	73
B. Ecuaciones promedio que consideran al tensor \mathbf{K}_β^{-1}	75
C. Error porcentual promedio	79
Bibliografía	80

Nomenclatura

$A_{\beta\sigma}$ Área interfacial de fluido-sólido, m^2

\mathbf{b}_β Vector que mapea a $\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta$ en \tilde{p}_β , m^{-1}

\mathbf{B}_β Tensor que mapea a $\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta$ en $\tilde{\mathbf{v}}_\beta$

dA Diferencial de área, m^2

dA^* Diferencial de área adimensional

\bar{E}_p Error porcentual promedio

\mathbf{e}_o Vector unitario que apunta en dirección del eje $o = x, y$

\mathbf{f}_β Vector de resistencias interfaciales, N/m^3

\mathbf{f}_β^* Vector adimensional de resistencias interfaciales

$f_{\beta x}$ Componente horizontal de \mathbf{f}_β^*

$f_{\beta y}$ Componente vertical de \mathbf{f}_β^*

\mathbf{I} Tensor identidad

\mathbf{K}_β Tensor de permeabilidad, m^2

$\mathbf{K}_{\beta\omega}$ Tensor de permeabilidad de región ω , m^2

$K_{\beta xx}, K_{\beta yy}$ Componentes no nulas del tensor de permeabilidad adimensional

$K_{\beta xy}, K_{\beta yx}$ Componentes despreciables del tensor de permeabilidad adimensional

ℓ Longitud característica de la celda unitaria, m

ℓ_β Longitud característica de la fase β , m

ℓ_σ Longitud característica de la fase σ , m

L_i Longitud característica de regiones $i = \eta, \omega$, m

L_a Ancho del sistema, m

M_{ij} Parámetro binario de transformación

$\mathbf{n}_{\beta\sigma}$ Vector normal dirigido de la fase β a la fase σ

n_x Componente horizontal del vector normal

n_y Componente vertical del vector normal

p_β Presión de la fase β , N/m^2

\tilde{p}_β Desviaciones espaciales de la presión de la fase β , N/m^2

$\langle p_\beta \rangle^\beta$ Presión promedio intrínseco, N/m^2

r_0 Radio de la región de promediado, m

u_0 Velocidad de la pared horizontal, m/s

\mathbf{u}_β Vector de velocidad adimensional de la fase β

\mathcal{V} Región de promediado

\mathcal{V}_β Región de la fase β contenida en la región de promediado

\mathcal{V}_σ Región de la fase σ contenida en la región de promediado

\mathcal{V}_δ Región de la fase δ contenida en la región de promediado

V Volumen de región de promediado, m^3

V_β Volumen de la fase β contenido en la región de promediado, m^3

V_σ Volumen de la fase σ contenido en la región de promediado, m^3

\mathbf{v}_β Vector de velocidad de la fase β , m/s

$\tilde{\mathbf{v}}_\beta$ Desviaciones espaciales del vector de velocidad de la fase β , m/s

$\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta$ Vector de velocidad promedio intrínseco, m/s

$\langle u_{\beta x} \rangle^\beta$ Componente horizontal de \mathbf{u}_β

$\langle u_{\beta y} \rangle^\beta$ Componente vertical de \mathbf{u}_β

x Coordenada horizontal, m

\mathbf{x} Vector que localiza el centroide de la región de promediado, m

y Coordenada vertical, m

\mathbf{y}_β Vector de posición relativo a puntos de la fase β , m

Abreviaturas

APSS Average pore scale simulation (Promedio de simulación a escala de poro)

BJ Beavers y Joseph

GTE Generalized transport equation (Ecuación generalizada de transporte)

ODA One Domain Approach (Enfoque de un dominio)

OT-W Ochoa-Tapia y Whitaker

PSS Pore scale simulation (Simulación a escala de poro)

TDA Two Domain Approach (Enfoque de dos dominios)

Símbolos griegos

α Parámetro adimensional empírico

β Fase fluida

Δk Espaciado entre los puntos nodales en la malla rectangular en $k = x, y$

ε_β Fracción volumétrica de la fase β dependiente de la posición

$\varepsilon_{\beta\omega}$ Fracción volumétrica de la fase ω

δ Fase sólida de paredes impermeables

η Región de fluido libre

\mathcal{K}_β Tensor adimensional de permeabilidad válido en todo el sistema

μ_β Viscosidad del fluido, $kg/(m \cdot s)$

μ_{eff} Viscosidad efectiva, $kg/(m \cdot s)$

σ Fase sólida del medio poroso

ω Región del medio poroso

Índice de figuras

1.1. Comparación de modelado por enfoque de un dominio y enfoque de dos dominios.	4
2.1. Sistema bidimensional fluido-medio poroso.	17
2.2. Esquema de región de promediado y longitudes características.	19
2.3. Inter-regiones en la cavidad.	20
2.4. Vectores de posición asociados a la operación de promediado.	22
2.5. Esquema de discretización espacial bidimensional en la cavidad.	29
2.6. Algoritmo para la solución de los modelos de enfoque ODA.	33
3.1. Líneas de corriente de \mathbf{u}_β obtenidas por PSS.	35
3.2. u_{β_x} adimensional de la velocidad obtenida por PSS.	36
3.3. u_{β_y} obtenida por PSS.	36
3.4. Líneas de corriente de \mathbf{u}_β en la inter-región.	37
3.5. p_β adimensional obtenida por PSS.	38
3.6. (a) Variaciones de la fracción volumétrica en la cavidad y (b) en $x/\ell = 0$ y $x/\ell = 5$	39
3.7. (a) Fracción volumétrica en inter-región fluido-medio poroso y (b) Fracción volumétrica en inter-región medio poroso-pared inferior.	40
3.8. (a) Variaciones de f_{β_x} y (b) f_{β_x} en $x/\ell = 2$ y $x/\ell = 5.25$	41
3.9. (a) Variaciones de f_{β_x} en la inter-región $\eta - \omega$ y (b) en la inter-región medio poroso-pared inferior.	42
3.10. (a) Variaciones de f_{β_y} en la cavidad y (b) en $x/\ell = 2$ y $x/\ell = 5.25$	43
3.11. (a) f_{β_y} en inter-región $\eta - \omega$ y (b) f_{β_y} en inter-región $\omega - \delta$	44
3.12. (a) Variaciones de $K_{\beta_\omega}/K_{\beta_{xx}}^{-1}$ y (b) $K_{\beta_\omega}/K_{\beta_{xx}}^{-1}$ en $x/\ell = 2$ y $x/\ell = 5.25$	45

3.13. (a) Variaciones de $K_{\beta\omega}/K_{\beta_{xx}}^{-1}$ en inter-región $\eta-\omega$ y (b) en inter-región $\omega-\delta$	46
3.14. (a) Variaciones de $K_{\beta\omega}/K_{\beta_{yy}}^{-1}$ y (b) $K_{\beta\omega}/K_{\beta_{yy}}^{-1}$ en $x/\ell = 2$ y $x/\ell = 5.25$	47
3.15. (a) Variaciones de $K_{\beta\omega}/K_{\beta_{yy}}^{-1}$ en la transición fluido-medio poroso y (b) en la transición del medio poroso a la pared inferior.	49
3.16. (a) $\langle u_{\beta x} \rangle^\beta$ en la cavidad y (b) Perfiles de corte de $\langle u_{\beta x} \rangle^\beta$ en $x/\ell = 5.25$	50
3.17. $\langle u_{\beta x} \rangle^\beta$ en inter-región fluido-medio poroso. Derecha: Enfoque ODA. Izquierda: APSS.	51
3.18. $\langle u_{\beta x} \rangle^\beta$ dentro del medio poroso. Derecha: Enfoque ODA. Izquierda: APSS.	52
3.19. $\langle u_{\beta x} \rangle^\beta$ en inter-región medio poroso-pared inferior. Derecha: Enfoque ODA. Izquierda: APSS.	53
3.20. (a) $\langle u_{\beta y} \rangle^\beta$ en la cavidad y (b) Perfil de corte de $\langle u_{\beta y} \rangle^\beta$ en $x/\ell = 4.5$	54
3.21. $\langle u_{\beta y} \rangle^\beta$ en inter-región fluido-medio poroso. Derecha: Enfoque ODA. Izquierda: APSS.	55
3.22. $\langle u_{\beta y} \rangle^\beta$ en el interior del medio poroso homogéneo (Región homogénea ω). Derecha: Enfoque ODA. Izquierda: APSS.	55
3.23. $\langle u_{\beta y} \rangle^\beta$ en inter-región medio poroso-pared inferior. Derecha: Enfoque ODA. Izquierda: APSS.	56
3.24. (a) $\langle p_\beta \rangle^\beta$ en la cavidad y (b) Perfil de corte de $\langle p_\beta \rangle^\beta$ en $x/\ell = 10$	57
3.25. $\langle p_\beta \rangle^\beta$ en inter-región. Derecha: Enfoque ODA. Izquierda: APSS.	58
3.26. $\langle u_{\beta y} \rangle^\beta$ dentro del medio poroso homogéneo. Derecha: Enfoque ODA. Izquierda: APSS.	59
3.27. $\langle p_\beta \rangle^\beta$ en inter-región medio poroso-pared inferior. Derecha: Enfoque ODA. Izquierda: APSS.	59
3.28. (a) $\langle u_{\beta x} \rangle^\beta$ en la cavidad y (b) en un perfil de corte en $x/\ell = 5.25$	60
3.29. $\langle u_{\beta x} \rangle^\beta$ en la inter-región. Derecha: Enfoque ODA. Izquierda: APSS.	61
3.30. $\langle u_{\beta x} \rangle^\beta$ en el interior del medio poroso. Derecha: Enfoque ODA. Izquierda: APSS.	62
3.31. $\langle u_{\beta x} \rangle^\beta$ en la zona de transición medio poroso-pared inferior. Derecha: Enfoque ODA. Izquierda: APSS.	63
3.32. (a) $\langle u_{\beta y} \rangle^\beta$ en la cavidad y (b) en un perfil de corte en $x/\ell = 4.5$	64
3.33. $\langle u_{\beta y} \rangle^\beta$ en la inter-región. Derecha: Enfoque ODA. Izquierda: APSS.	65

3.34. $\langle u_{\beta y} \rangle^\beta$ en la zona del medio poroso. Derecha: Enfoque ODA. Izquierda: APSS.	65
3.35. $\langle u_{\beta y} \rangle^\beta$ en inter-región $\omega - \delta$. Derecha: Enfoque ODA. Izquierda: APSS.	66
3.36. (a) $\langle p_\beta \rangle^\beta$ en la cavidad y (b) en un perfil de corte en $x/\ell = 10$	67
3.37. $\langle p_\beta \rangle^\beta$ en interface fluido/medio poroso . Derecha: Enfoque ODA. Izquierda: APSS.	68
3.38. $\langle p_\beta \rangle^\beta$ en el medio poroso homogéneo. Derecha: Enfoque ODA. Izquierda: APSS.	68
3.39. $\langle p_\beta \rangle^\beta$ en interface medio poroso/pared inferior. Derecha: Enfoque ODA. Izquierda: APSS.	69

Resumen

El estudio del flujo de un fluido alrededor de un medio poroso ha sido un tema de gran interés en la comunidad científica, dada las numerosas aplicaciones en la industria química. Particularmente, ha existido un esfuerzo importante en la descripción adecuada del campo de velocidad del fluido sobre y a través de dicho medio poroso. En el contexto del método del promedio volumétrico, la alternativa de descripción del transporte de momento en el sistema, vía una única ecuación promedio generalizada dependiente de coeficientes de medio efectivo (i.e., enfoque de un dominio), ha logrado capturar eficazmente las variaciones microscópicas y macroscópicas de la velocidad y presión de los sistemas tratados, además de que ha permitido deducir una vía para obtener las condiciones de frontera adecuadas para el enfoque de ecuaciones de coeficientes constantes en cada región del sistema (i.e., enfoque de dos dominios). Desafortunadamente, existe aún incertidumbre acerca de la determinación confiable de las variaciones espaciales de los coeficientes de medio efectivo (i.e., fracción volumétrica y permeabilidad) principalmente en la frontera fluido/medio poroso dado que ocurren rápidos cambios de la velocidad, de aquí hasta ahora solo se han impuesto tendencias lineales. Asimismo, hasta ahora no se ha garantizado la aplicación a situaciones reales puesto que solo se ha tratado flujo unidireccional de un fluido. El presente trabajo propone atender dicho problema a partir del uso del enfoque de un dominio en un sistema de flujo bidireccional de un fluido a través de un medio poroso homogéneo, en el cual las variaciones espaciales de la fracción volumétrica y las componentes no nulas del tensor de permeabilidad, son obtenidas haciendo uso de la geometría del medio poroso y vía la definición de un proceso de cerradura por simulación a escala de poro. En general, los resultados obtenidos mostraron que el ODA que toma en cuenta la primera y segunda corrección de Brinkman puede reproducir satisfactoriamente en cualquier zona del sistema a los perfiles bidireccionales de velocidad y presión promedio intrínseco obtenidos de promediar a los perfiles de velocidad y presión locales de forma casi exacta, mostrándose errores porcentuales promedio menores a la unidad. También, se evidenció que las variaciones espaciales de la fracción volumétrica en la inter-región pueden ser tratadas como funciones lineales, caso contrario, se encontró que las componentes $K_{\beta_{xx}}$ y $K_{\beta_{yy}}$ del tensor de permeabilidad no son lineales.

Capítulo 1

Generalidades

1.1. Introducción

El flujo de un fluido sobre y a través de un medio poroso se encuentra presente en numerosos procesos de la ingeniería química, tales como, transporte de contaminantes en acuíferos y suelos (Pinder y Gray, 2008), procesos de secado (Carbonell y Whitaker, 1984; Whitaker, 1977; Bear y Bachmat, 1990), extracción de petróleo en yacimientos (Escobar-Macualo, 2012), procesos en reactores heterogéneos (Geankoplis, 2007), entre otros. Su conocimiento es fundamental, dado que el perfil de velocidad del fluido es necesario para determinar el transporte de masa y energía involucrado y su efecto en el diseño, operación, y/o optimización de mencionados procesos. Por esto, su análisis a partir de modelos matemáticos que predigan de forma confiable el campo de velocidad del fluido se ha intentado desde años atrás y aún ahora. En la literatura, se ha optado, por la descripción de este tipo de fenómenos a partir de ecuaciones de medio efectivo, obtenidas por un proceso de escalamiento. En este contexto, existen dos propuestas de modelado matemático del transporte de momento entre un fluido y un medio poroso. El primero de ellos es el enfoque de un dominio (más conocido por sus siglas en inglés como ODA, *One Domain Approach*), el cual involucra una única ecuación promedio generalizada válida en todo el dominio del sistema (i.e., zona de fluido libre, inter-región y región de medio poroso homogéneo) dado que considera las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos de transporte (i.e., fracción volumétrica y permeabilidad). Y el segundo enfoque de dos dominios (más conocido por sus siglas en inglés como

TDA, *Two Domain Approach*), el cual considera ecuaciones promedio con coeficientes constantes para cada región del sistema y reemplaza a la inter-región por una superficie divisoria donde toma en cuenta condiciones de salto que requieren las variaciones espaciales de los coeficientes efectivos de transporte determinados por el ODA. Hasta ahora, la principal dificultad del enfoque ODA y en consecuencia del TDA, ha sido la determinación adecuada de los coeficientes de medio efectivo y la garantía de aplicación a situaciones realistas que consideren flujo en al menos más de una dirección. Para estudios de transporte de cantidad de movimiento, se han reportado propuestas de tendencias lineales de la fracción volumétrica y la permeabilidad en la inter-región; sin embargo, dado que no hay precedente de evidencia de ello, la información resultante es poco confiable. Dicho problema puede ser atendido, en el contexto del método del promedio volumétrico, mediante el desarrollo y solución de modelos ODA para flujo en más de una dirección y con la determinación apropiada de la variación de los coeficientes de medio efectivo vía un proceso de cerradura que resulta en un término de Darcy, el cual permite determinar las componentes de interés del tensor de permeabilidad. Para este fin, el presente trabajo se organiza de la siguiente manera. En el resto del capítulo 1, se discuten algunas propuestas de estudios de flujo alrededor de medios porosos, a partir de modelos ODA y TDA. Esto, para dar a conocer como se han determinado las variaciones espaciales de los coeficientes de medio efectivo del ODA, las condiciones de salto requeridas en el TDA y las relaciones entre ambos enfoques para tales fines. Además, se discute la motivación del trabajo y la meta del mismo. En el capítulo 2, se presenta el caso de estudio local de una cavidad de paredes impermeables y se desarrollan, detallan y solucionan las ecuaciones generalizadas del enfoque ODA dependientes de un vector de resistencias y de la permeabilidad, las cuales posteriormente se sitúan al problema de flujo bidimensional para dicho caso de estudio. También, se destina una sección al método del promedio volumétrico, para explicar la aplicación de sus teoremas así como su significado físico. En el capítulo 3, inicialmente se discuten los perfiles de velocidad y presión locales en la cavidad, obtenidos por una simulación a la escala de poro. Seguido, se muestran las variaciones espaciales de la fracción volumétrica obtenidas utilizando la definición geométrica del medio poroso homogéneo. Luego, se obtienen las componentes no nulas del vector de resistencias y del tensor de permeabilidad las cuales son necesarias para cerrar el ODA y resultan por el uso de la

simulación numérica a escala local. Después, se presentan los campos de velocidad y presión promedio intrínseco que son resultado de los dos tipos de modelos ODA tratados y su validez mediante la comparación con el promediado de los resultados a la escala local. Finalmente, en el capítulo 4 se presentan las conclusiones generales y las perspectivas de este trabajo.

1.2. Antecedentes

El flujo de un fluido sobre y a través de un medio poroso se encuentra presente en numerosos procesos de la ingeniería química, tal como se mencionó en la introducción. Por esto, ha existido un importante esfuerzo en la determinación apropiada del campo de velocidad del fluido. Dada la disparidad de longitudes características involucradas y las complejas geometrías de los medios porosos comunes, la descripción de estos fenómenos a la microescala o a 'escala de poro', es impráctico y su determinación casi imposible. Por tales motivos, en la literatura, se ha optado, por la descripción de este tipo de fenómenos a partir de ecuaciones de medio efectivo, obtenidas por un proceso de escalamiento, siendo preferido el método del promedio volumétrico dadas su ventajas de que la definición de la variable dependiente y los coeficientes de transporte asociados es clara y no está restringido a ninguna geometría (Ochoa-Tapia, 1995). En este contexto, existen dos propuestas de modelado matemático del transporte de momento entre un fluido y un medio poroso. El enfoque de un dominio (más conocido por sus siglas en inglés como ODA, *One Domain Approach*) y el enfoque de dos dominios (más conocido por sus siglas en inglés como TDA, *Two Domain Approach*) (Goyeau *et al.*, 2003; Váldez-Parada *et al.*, 2013) (Ver Figura 1.1). En el ODA, el sistema constituido de dos regiones homogéneas y una zona de transición, se considera como un pseudo continuo. Esto es, se supone como un continuo, en donde la fase dentro del medio poroso que originalmente ocupa subdominios dentro del mismo, ahora se asume 'continua' y por ende llena el dominio entero. Por lo anterior, en este enfoque, el transporte de momento se describe mediante una única ecuación generalizada (GTE por sus siglas en inglés, *Generalized transport equation*), libre de restricciones de escala y válida en todo el dominio del sistema (i.e., zona del fluido, zona del medio poroso y zona de transición (i.e. inter-región). Para ello, en dicho enfoque los coeficientes de transporte efectivos (i.e.,

porosidad y permeabilidad) dependen de la posición en la inter-región fluido libre-medio poroso. Por otro lado, el TDA plantea un sistema de dos regiones homogéneas separadas por una superficie divisoria 'virtual'. En este caso, el transporte se describe mediante ecuaciones promedio para cada región del sistema (i.e., zona de fluido libre y zona del medio poroso) con coeficientes efectivos constantes. Dichas ecuaciones se acoplan mediante condiciones de frontera de salto en la superficie divisoria, las cuales contienen parámetros de salto que tienen el objetivo de incluir el efecto de la microestructura en la inter-región en las ecuaciones gobernantes del transporte de momento.

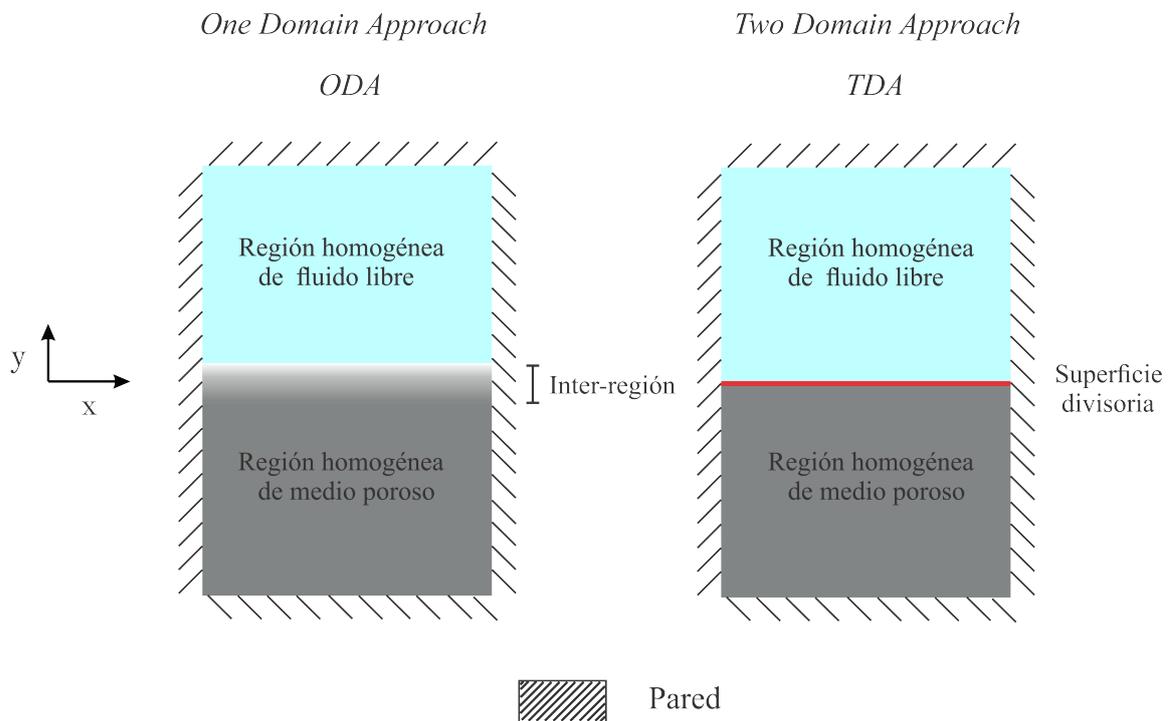


Figura 1.1: Comparación de modelado por enfoque de un dominio y enfoque de dos dominios.

Cada uno de estos enfoques de modelado presenta dificultades, para la solución del ODA se requiere una discretización espacial dentro de la inter-región, y el TDA necesita la deducción de las condiciones de salto 'confiables' en la superficie divisoria. La elección de modelado por ODA o TDA depende del nivel de descripción al que se quiera modelar, ya que el ODA es el enfoque más exacto y el que usualmente se utiliza en aplicaciones donde conocer los perfiles de masa, momento y/o calor en cada zona del sistema, es necesario, mientras que el TDA es más sencillo y alcanzable por ser solo una aproximación del ODA y se usa a menudo para aplicaciones mínimas como

conocer las entradas y salidas de masa, momento y/o calor en el sistema (Ochoa-Tapia y Whitaker, 1995). Por tales motivos, en dicha elección es importante considerar estos factores y en consecuencia las capacidades computacionales disponibles (Aguilar-Madera *et al.*, 2011). Con frecuencia, en la práctica, suelen preferirse ecuaciones basadas en el TDA para sistemas fluido-medio poroso dada su simplicidad y su fácil solución. De aquí la principal dificultad, ha sido encontrar la posición de la superficie divisoria y las condiciones de frontera apropiadas. En ese sentido, algunos otros trabajos basados en el ODA han intentado resolver estos problemas mediante equivalencias entre ambos enfoques. Para profundizar en tal situación, a continuación se presenta una revisión de las diferentes investigaciones de modelado en sistemas fluido-medio poroso basados en un TDA o un ODA. Los primeros trabajos se basaron en ecuaciones fundamentadas en el TDA, donde su principal meta a alcanzar fue la deducción de las condiciones de frontera de salto 'confiables'. Inicialmente, Beavers y Joseph (1967) estudiaron teóricamente y experimentalmente el efecto de una interfaz permeable entre un fluido y material permeable (i.e, medio poroso). Para ello, consideraron como caso de estudio, el flujo unidireccional de un fluido impulsado por un gradiente de presión constante, sobre un canal horizontal llenado parcialmente de un material poroso. El modelado matemático del sistema se realizó considerando que el transporte de momento en la zona de fluido homogéneo es gobernado por la ecuación de Stokes y en la zona del material permeable homogéneo por la ley de Darcy. Asimismo, propusieron un acoplamiento de las ecuaciones de cada zona, a partir de una condición de frontera semi-empírica de deslizamiento de la velocidad en la interfaz. Dicha condición incluye un parámetro adimensional empírico simbolizado como α , el cual depende de la microestructura del medio poroso en la interfaz fluido-medio poroso. Sus resultados mostraron para diferentes materiales permeables, que con valores de α entre el rango de 0.1 – 4 se representa adecuadamente el comportamiento experimental del flujo del fluido sobre los respectivos materiales permeables utilizados. Lo anterior evidenció la importancia del conocimiento de la microestructura del medio poroso en la inter-región en la descripción del flujo de fluidos en medios porosos. La investigación de Beavers y Joseph (1967) fue el punto de partida para el estudio del flujo de un fluido sobre y a través de medios porosos, ésta, motivó a otros autores que pusieron su atención en dichos fenómenos y que intentaron justificar y delimitar los alcances de su condición de frontera propuesta. Tal fue el caso de Taylor

(1971) y Richardson (1971). Estudiaron teórica y experimentalmente la condición de frontera semiempírica de Beavers y Joseph (BJ), específicamente, cuestionaron la 'única' dependencia del parámetro empírico α con la microestructura del medio poroso. Para esto, consideraron un sistema de un flujo que fluye debido al movimiento de una placa horizontal y que se escurre a través de un medio poroso simplificado hecho de ranuras espaciadas. Como resultados obtuvieron expresiones analíticas para el parámetro α dependientes de la altura de la zona del fluido. Con esto, los autores observaron que α decrece hasta alcanzar un valor constante a medida que la altura de la zona del fluido incrementa. Por lo anterior, se concluyó que α no solo depende de la microestructura del medio poroso en la interfaz fluido-medio poroso, si no también de la altura de la zona de fluido libre. Mas aún, con el mismo objetivo de justificación de la condición de BJ, Saffman (1971) dedujo teóricamente la misma. Para ello, Saffman consideró un sistema como el de BJ y estableció que el transporte de movimiento en la zona del fluido libre se gobierna por la ecuación de Stokes y en la zona de medio poroso por una ley de Darcy extendida para su aplicabilidad a medios porosos no homogéneos. Esta última deducida en el mismo trabajo a partir de un enfoque estadístico. Con respecto a la deducción de la condición de frontera, el autor aplicó conceptos de teoría de capa límite en las ecuaciones del flujo antes descritas. Sus resultados mostraron que el parámetro α se ve afectado por la localización de la superficie divisoria, hasta ese momento desconocida. Otros trabajos aplicaron la mencionada condición de frontera de BJ, mostrando así su validez. Por ejemplo, Beavers *et al.*, (1970) verificaron esta condición en un sistema experimental igual que el de BJ (1967) pero con aparatos e instrumentos de medición más sofisticados. Para ello, utilizaron como flujo de trabajo agua desmineralizada y como medio poroso Níquel fibroso. En cuanto a los aspectos teóricos, su trabajo muestra el mismo tratamiento matemático de BJ. Sus resultados exhibieron una buena concordancia de la teoría con la experimentación para un valor empírico de $\alpha = 0.1$, siendo los errores no mayores al 1.5%. Lo anterior reafirmó la efectividad del modelo de condición de frontera de BJ. También, Beavers *et al.*, (1974) evaluaron esta condición de frontera para el caso de un flujo unidireccional de gas sobre un medio poroso homogéneo. Esto, usando aire como fluido de trabajo y dos medios porosos fibrosos de altas porosidades. Compararon los resultados experimentales con los resultados teóricos de la condición de frontera semiempírica propuesta para valores

empíricos de $\alpha = 0.27$ y $\alpha = 0.19$. Encontraron para los dos medios porosos estudiados una buena concordancia de las predicciones teóricas de la velocidad en la interfaz fluido-medio poroso con las predicciones experimentales, con una desviación máxima del 4%. Con lo anterior se comprobó la utilidad de dicha condición de frontera para casos donde el fluido que fluye sobre el medio poroso es un gas. A pesar de los buenos resultados obtenidos por la formulación matemática semiempírica de BJ, esta fue cuestionada dado que no considera los fenómenos de capa límite en el medio poroso causados por efectos de las fuerzas viscosas y puesto que su condición de frontera de deslizamiento de la velocidad no provee información de lo que ocurre en la inter-región. En este sentido, Neale y Nader (1974) propusieron el uso de la corrección de Brinkman en la ley de Darcy, para describir el transporte de movimiento en la zona del medio poroso en un sistema como el de BJ. Y además plantearon condiciones de frontera físicamente más realistas de continuidad de la velocidad y el esfuerzo en la inter-región. Solucionaron su sistema de ecuaciones de forma analítica, encontrando así un perfil de velocidad suavizado en la zona de la inter-región y concordancia de sus ecuaciones con las deducidas por BJ para cuando $\alpha = \sqrt{\frac{\mu_{eff}}{\mu}}$, donde μ_{eff} es una viscosidad efectiva y μ la viscosidad del fluido. Con todo lo anterior, Neal y Nader concluyeron que la condición de BJ es una buena aproximación, pero que solo es viable en situaciones donde las regiones de capa límite dentro del medio poroso son despreciables, ya que en caso contrario, la necesidad de la corrección de Brinkman a la ley de Darcy es evidente. Otros trabajos, como el de Neale y Epstein (1973) también abordaron esta idea pero en un caso de estudio de flujo de un fluido newtoniano en una esfera permeable. Sus resultados reiteraron que la descripción más satisfactoria del transporte de movimiento dentro del medio poroso es aquella que considera la extensión de Brinkman a ley de Darcy. Dado lo anterior, se prestó especial atención a la determinación del parámetro μ_{eff} en el medio poroso. No obstante, dada la falta de datos experimentales, no se lograron predicciones de este. Así que, la corrección de Brinkman no fue totalmente aceptada por ausencia de su comprobación experimental (Niel, 1983 ;Haber y Mauri, 1983). Con lo anterior, se evidenciaron las principales limitaciones de las propuestas antes descritas. Entonces, otros enfoques fueron propuestos. Por ejemplo, el enfoque de derivación de las condiciones de frontera de deslizamiento en la interfaz fluido-medio poroso basado en argumentos de escalamiento, propuesto por Ross (1983). Dicha pro-

puesta se fundamentaba en la teoría de Whitaker (1970) y suponía la existencia de una transformación lineal (i.e., M_{ij}) que 'mapea' a la velocidad promedio a partir de la velocidad local. De aquí, seleccionando una región de promediado, tomando en cuenta la asunción antes mencionada y otras de escalamiento, Ross desarrolló una condición de frontera válida para la velocidad promedio, la cual adicionaba un término a la conocida condición de frontera de BJ. Además, definió matemáticamente al parámetro α en función de M_{ij} para el caso de un medio poroso isotrópico. De este modo, Ross concluyó que en el estudio de la frontera fluido-medio poroso es necesario adicionar un término de derivadas de la velocidad promedio a la condición de BJ y que α puede ser reescrito en función de una transformación lineal M_{ij} . Desde otra perspectiva, Beckermann y Viskanta (1987) estudiaron el flujo estacionario de un fluido incompresible newtoniano y el transporte de calor en una placa plana incrustada con un medio poroso homogéneo isotrópico. Esto a partir de modelos de enfoque ODA, en los que se toma en cuenta la ley de Darcy y las correcciones de Forchheimer-Brinkman, además de los efectos inerciales en la ecuación de transporte de movimiento. De esto, obtuvieron en sus resultados concordancia aceptable de los perfiles analíticos de la velocidad y la temperatura con datos experimentales. Además, evidenciaron que el transporte de momento y calor en la frontera fluido-medio poroso depende de los números modificados de Reynolds y Prandtl y en consecuencia de los coeficientes efectivos del sistema (i.e., permeabilidad efectiva y difusividad térmica efectiva). Es importante señalar que en su ecuación de enfoque ODA las variaciones de la porosidad no fueron consideradas. En el mismo año, con la misma idea, Vafai y Thiyagaraja, estudiaron tres tipos de interfaces: a) interface entre una región de fluido y un medio poroso, b) interface entre dos medios porosos y c) interface entre un medio impermeable y un medio poroso. Esto, a partir de modelos de transporte de momento y calor de enfoque TDA que consideran los efectos de cada interface y los inerciales y que fueron obtenidos haciendo uso de la teoría de Whitaker (1970). Específicamente propusieron, en el estudio del flujo de fluidos, para la interface a): ecuaciones dependientes de las propiedades de cada medio poroso (i.e., permeabilidad, porosidad y factor de fricción), para la interface b): ecuación simplificada de Navier-Stokes en la región del fluido libre y un modelo que incluye la velocidad de Darcy y un número de Reynolds basado en la permeabilidad del medio poroso para la zona del medio poroso y para la interface c) ecuaciones dependientes de la porosidad

del medio poroso. En el caso del estudio de la distribución de calor, consideraron ecuaciones de calor simplificadas según las condiciones de temperatura establecidas. Fijando parámetros empíricamente obtuvieron soluciones analíticas de sus modelos y expresiones explícitas para la temperatura y la velocidad en la interfaces a partir de éstas. Los resultados de lo anterior fueron comparados con datos experimentales, exhibiéndose un buen acuerdo con estos para todos los tipos de interfaces involucradas. Posteriormente, Sahraoui y Kaviany (1991) estudiaron las posibles dependencias del coeficiente α de la condición de frontera en la interface fluido-medio poroso. Esto a partir de la solución numérica de las ecuaciones de Navier-Stokes y de continuidad cerca de esta interface, considerando al medio poroso como un arreglo hecho de cilindros. Para flujo paralelo y oblicuo a la interface, sus resultados mostraron que el parámetro α no solo depende de la estructura del medio poroso si no que también depende de la porosidad, los efectos inerciales (i.e., número de Reynolds), localización de la interface, dirección del flujo y la estructura en el arreglo de las partículas superficiales del medio poroso. En 1995, con la misma intención de abordar el problema de transporte de momento en la frontera entre un fluido y un medio poroso homogéneo, Ochoa-Tapia y Whitaker presentaron una metodología de derivación de la condición de frontera del esfuerzo en esta zona. Para esto, inicialmente dedujeron por el método del promedio volumétrico una GTE de momento que incluye cantidades que aparecen en el problema de cerradura de la ley de Darcy y que toman en cuenta la variación de la permeabilidad, así como un término nombrado como la segunda corrección de Brinkman que involucra las variaciones espaciales de la porosidad en el sistema. Esta GTE se reduce a las clásicas ecuaciones de transporte de Darcy y Stokes en las zonas de medio poroso homogéneo y fluido libre, respectivamente, dándose así lugar a las ecuaciones del enfoque TDA. Entonces, sus desarrollos aplicados a un caso de estudio análogo al experimental de BJ, dieron lugar a una condición de salto de frontera del esfuerzo que depende de un parámetro de salto ajustable β de orden uno que puede tener valor negativo o positivo y el cual debe determinarse por ajuste de datos experimentales. También, dichos autores extendieron su trabajo a una segunda parte donde validaron su condición de frontera mediante la comparación con datos experimentales obtenidos de BJ. Encontraron para un medio poroso de permeabilidad 1.1^{-5} in^2 una buena concordancia de la teoría con los experimentos para valores de β entre 1 y 1.5. Lo anterior mostró la

utilidad de esta condición de frontera propuesta y que el parámetro ajustable β podría dar más información de la naturaleza de esta frontera que otros parámetros anteriormente propuestos de longitud de escala $\sqrt{\mathbf{K}_{\beta_w}}$. Los trabajos antes descritos motivaron a algunos autores a usar la condición de frontera de Ochoa-Tapia y Whitaker (OT-W). Por ejemplo, Kuznetsov (1996) acopló y resolvió esta condición con las ecuaciones de Stokes y de Brinkman-Forchheimer-Darcy para el estudio estacionario del flujo de un fluido laminar en un canal lleno con medio poroso. Principalmente, analizó la influencia del número de Darcy y la viscosidad efectiva de la corrección de Brinkman en el parámetro de salto β . Sus resultados mostraron que la viscosidad efectiva modifica los perfiles de velocidad en la interface fluido-medio poroso. Además, encontró un decrecimiento de β con el decrecimiento del número de Darcy, evidenciando así la existencia de una relación de β con la microestructura de la interface. Sin embargo, Kuznetsov no derivó ninguna expresión que validara dicha relación. Por otra parte, otros autores intentaron proveer información acerca del coeficiente β . Goyeau *et al.*, 2003, derivaron una expresión explícita de este coeficiente ajustable. Esto a partir de la propuesta de acoplamiento de modelos de enfoque ODA que consideran una zona de transición entre las dos regiones homogéneas (i.e., fluido libre y medio poroso) donde existen variaciones espaciales de los coeficientes macroscópicos de transporte (i.e., permeabilidad, porosidad y viscosidad efectiva) con modelos de enfoque TDA. Sus resultados de los valores de β fueron comparados con los resultados experimentales obtenidos por BJ y OT-W resultando un buen acuerdo entre estos, donde la dependencia de la porosidad con la posición se supuso lineal y la permeabilidad fue calculada por la ecuación de Carman-Kozeny. Con lo anterior concluyeron que para la correcta descripción de los fenómenos de transporte en un sistema fluido-medio poroso es necesario considerar las variaciones de las propiedades efectivas en la zona de transición y que su expresión del coeficiente de salto es un paso 'importante' para el calculo exacto del mismo. Más aún, evidenciaron por comparación de resultados entre los modelos de enfoque ODA y TDA, que estos son equivalentes para una región interfacial homogénea ($\beta = 0$). También, algunas investigaciones como las de Chandris y Jamet (2005) y Deng y Martinez (2005) trabajaron en la definición formal del coeficiente de salto de la condición de frontera de OT-W, sin embargo, hasta ese momento no se logró ninguna definición explícita de como depende β de la microestructura de la zona de transición,

así que la información de dicho coeficiente era escasa. Valdés-Parada *et al.*, 2007a, para el mismo caso de estudio de BJ y considerando las GTE derivadas por OT-W desarrollaron una condición de frontera para la superficie divisoria entre el fluido-medio poroso libre de parámetros ajustables y dependiente de un tensor de esfuerzo mixto \mathbf{K}_β^{-1} , que considera la contribución de Brinkman y el esfuerzo global en la zona de transición. También, en un trabajo de seguimiento (2007b), derivaron problemas de cerradura locales simplificados para la determinación del esfuerzo global y para la contribución de Brinkman, los cuales incluyen expresiones relacionadas con variaciones de la porosidad. Más tarde, en el 2009, Valdés-Parada *et al.* continuaron con el estudio de las GTE, específicamente con la cerradura de estas. Para esto, retomaron el caso de estudio de BJ y los desarrollos de OT-W y solucionaron problemas de cerradura locales antes deducidos, en celdas unitarias representativas de la zona de transición entre el fluido y el medio poroso, calculando así los coeficientes de transporte de medio efectivo. Lo anterior, permitió cerrar los modelos de enfoque ODA o GTE y además por combinación con los modelos de enfoque TDA deducir una expresión semi-analítica del parámetro β dependiente de la microestructura de la zona de transición, de la cual se obtuvieron resultados en buen acuerdo con los ya antes reportados por Goyeau *et al.*, 2003. En el mismo año, Jiménez-Islas *et al.*, estudiaron la convección natural 2D en una cavidad cuadrada parcialmente ocupada por un medio poroso isotrópico generador de calor constante. Esto, a partir de modelos de momento y energía ODA que incluyen un parámetro binario M_p que adquiere valores de 0 o 1 según la zona de la cavidad (i.e., fluido y medio poroso) y coeficientes de transporte constantes. Los autores solucionaron sus modelos mediante colocación ortogonal y mostraron con sus resultados que su propuesta de modelos ODA es aceptable para describir problemas de flujo 2D en cavidades aún cuando se tiene generación de calor en el medio poroso y sin necesidad de especificar condiciones de frontera interfaciales fluido-medio poroso. De este trabajo es importante señalar que no se consideró a la inter-región. Más tarde, Lacis y Bagheri (2017) propusieron una metodología de derivación de las condiciones de frontera de salto entre un fluido y un medio poroso para el caso de flujo bidimensional en una cavidad rectangular llenada con medio poroso homogéneo donde el flujo es producido por la tapa superior de la misma. Su metodología consiste en 1) descomponer el sistema en dos dominios (i.e., fluido libre y medio poroso) y una interfaz entre ambos, 2) proponer

las ecuaciones de momento gobernantes para los dominios, establecieron la ecuación de Stokes para la zona del fluido libre y la ley de Darcy para la parte porosa y 3) por el método de homogenización derivar las condiciones para la interfaz de la velocidad y la presión. Entonces, obtuvieron una condición de frontera de salto tensorial que es una generalización de la condición de BJ y que considera la permeabilidad en la interface. Sus resultados usando dicha condición fueron comparados con la simulación a la escala de poro obtenidos buenos acoplamientos, mayormente en las zonas del fluido y la zona porosa. En el caso de la zona de transición donde ocurren los rápidos cambios de la velocidad se mostraron algunas diferencias, ya que no se logró captar por completo las fluctuaciones microscópicas de la velocidad cerca de la interface. Hasta ese momento y en la actualidad, la elección del enfoque de modelado es 'personal' y la mayoría de los autores prefiere modelos basados en el TDA a pesar de los cuestionamientos hacia la localización de la superficie divisoria y de su invalidez en la inter-región. Lo anterior se debe a que sus ecuaciones diferenciales requieren coeficientes de transporte constantes, haciendo menos costoso computacionalmente su solución numérica con respecto a las soluciones del ODA. Valdés-Parada *et al.*, 2013 dedujeron las condiciones de frontera de salto en la inter-región considerando desviaciones macroscópicas de la velocidad en esta zona entre los enfoques ODA y TDA, para diferentes casos de estudio. Sus resultados mostraron que para cerrar las condiciones de salto se requiere conocer las variaciones espaciales de los coeficientes de medio efectivo implícitas en la GTE. De lo anterior, como se puede notar, ya sea mediante un ODA o un TDA, en ambos casos es necesario contar con modelos ODA. En relación a eso, algunos trabajos han mostrado que a partir de modelos ODA se describe adecuadamente el transporte de momento de un fluido que fluye en un medio poroso homogéneo y que la información brindada por este enfoque permite deducir las condiciones de frontera en la interfaz fluido-medio poroso del sistema (Hernández-Rodríguez, 2017). Sin embargo, los casos de estudio se han restringido a flujos unidireccionales, lo cual limita la consideración de situaciones reales. Recientemente, Luminari *et al.*, (2019) propusieron el estudio de flujo en más de una dirección. Estudiaron flujo bidimensional fluyendo en una cavidad llena parcialmente con un material poroso fibroso (i.e, hecho de fibras cilíndricas). Para ello, supusieron flujo incompresible, régimen laminar y efectos inerciales importantes. En su metodología, desarrollaron ecuaciones de enfoque ODA a partir de la aplicación sistemática

del método del promedio volumétrico a las ecuaciones de Navier-Stokes y solucionaron las mismas suponiendo a las variaciones espaciales de la fracción vacía y la permeabilidad como lineales. La comparación de las componentes de la velocidad y los gradientes de presión obtenidos de sus modelos ODA con simulaciones numéricas directas para números de Reynolds de 100 y 1000, mostraron buenas concordancias de los perfiles de las componentes x y y de la velocidad en las regiones: fluido libre, medio poroso y en la interfaz fluido-medio poroso. Para el caso del gradiente de presión, se exhibieron sobrestimaciones de éste en cualquiera de las zonas del sistema. De este trabajo, se concluyó que el enfoque por ecuaciones de un dominio para sistemas 2D es confiable y que captura con errores aceptables la dinámica de fluidos en medios porosos fibrosos. Del trabajo de Luminari et al., (2019) las principales limitaciones son que la suposición de tendencia lineal de la permeabilidad no es confiable dado que no existe evidencia de ello, que la existencia de una zona de transición no es aceptada y que existe sobrestimación del campo de la presión que no se pueden ignorar. Con todo lo anterior, se hace evidente la necesidad de estudiar por medio de ecuaciones de enfoque ODA, flujo en más de una dirección en sistemas fluido-medio poroso, además de la determinación adecuada de los coeficientes efectivos, principalmente las componentes del tensor del tensor de permeabilidad. Esto, para garantizar un acercamiento a procesos reales y para generalizar a partir del uso del método del promedio volumétrico una sola descripción del flujo en más de una dirección de un fluido sobre y través de un medio poroso. En ese sentido, en el presente trabajo se propone estudiar flujo bidimensional de un fluido newtoniano sobre y través de un medio poroso homogéneo por medio de GTE. Para esto, se considera como caso de estudio una cavidad rectangular de paredes impermeables ocupada parcialmente por un medio poroso hecho de una fase sólida rígida, donde el flujo es generado como consecuencia del movimiento constante de la pared superior. Para el modelado matemático de la cavidad se tomaron en cuenta dos formas de la ecuación de momento del enfoque ODA, una dependiente de un vector de resistencias interfaciales y otra en función de un término de Darcy. Los resultados de los perfiles 2D de velocidad y presión promedio intrínseco se validan por la comparación con los obtenidos de promediar a los perfiles de velocidad y presión locales.

1.3. Motivación del trabajo

El flujo de fluidos sobre y a través de medios porosos está presente en innumerables procesos de interés en ingeniería química, tales como, dispersión de contaminantes en suelos y acuíferos, procesos de separación, sistemas de reacciones heterogéneas, procesos de secado, por decir algunos. Así, su estudio a partir de modelos matemáticos lo más exactos posibles, es fundamental. La alternativa de modelado matemático de este fenómeno a partir de GTE (Generalized transport equations) de transferencia de momento y masa total válidas en todo el sistema, ha resultado atractiva y viable. Sin embargo, sus aplicaciones se han restringido a flujo unidireccional, lo cual limita el análisis de procesos a estudios más alejados de la realidad. Más aún, la determinación de las variaciones de los coeficientes de medio efectivo no ha sido bien establecida y la existencia de una zona de transición aún no es totalmente aceptada. En este sentido, es necesario el desarrollo y la solución de modelos de enfoque ODA (One Domain Approach) que consideren flujo en más de una dirección, además de la determinación apropiada de los coeficientes asociados. Esto, con el objeto de garantizar su aplicación a situaciones realistas y de generalizar a partir de un análisis sistemático y racional con el método del promedio volumétrico una sola descripción del flujo bidimensional de un fluido sobre y a través de un medio poroso.

1.4. Hipótesis

La velocidad promedio de fluidos con movimiento bidimensional en cavidades parcialmente ocupadas por medio poroso, puede ser descrita adecuadamente por ecuaciones de medio efectivo generalizadas válidas en todo el sistema.

1.5. Objetivos

1.5.1. Objetivo general

Estudiar por medio de modelos de medio efectivo con enfoque de un dominio, el transporte de momento bidimensional en un cavidad parcialmente ocupada por un medio poroso.

1.5.2. Objetivos específicos

- Desarrollar modelos matemáticos de transporte de masa y momento a escala local, para el flujo bidimensional en una cavidad rectangular ocupada por medio poroso, considerando flujo reptante y condiciones estacionarias.
- Implementar la técnica de promedio volumétrico en los modelos a la escala local, para obtener dos tipos de modelos de medio efectivo: a) uno dependiente del vector de resistencias interfaciales y b) uno en función de un término de Darcy, válidos en cualquier zona de la cavidad (*ODA, One Domain Approach*).
- Obtener las componentes de interés del tensor de permeabilidad y la fracción volumétrica. En el fluido, en el medio poroso homogéneo y en la inter región.
- Resolver numéricamente los modelos a la escala local en toda la cavidad.
- Evaluar la capacidad de los modelos de enfoque de un dominio para reproducir los perfiles de velocidad promedio resultantes del promediado de la solución local.

Capítulo 2

Metodología

En este capítulo se presentan las ecuaciones generalizadas del enfoque de un dominio (ODA) que describen el flujo bidimensional de un fluido en una cavidad rectangular de paredes impermeables, ocupada parcialmente por un medio poroso. La metodología de obtención de dichos modelos se basa en el promediado espacial de las ecuaciones que gobiernan el transporte de momento y de masa total a la escala local, haciendo uso del método del promedio volumétrico. Son presentados dos tipos de GTE, unas que considera al vector \mathbf{f}_β en la ecuación de movimiento y otras que sustituyen a dicho vector por un término de Darcy que depende del tensor de permeabilidad inverso \mathbf{K}_β^{-1} . Ambos modelos son solucionados vía esquemas numéricos y comparados con el promediado de los resultados a la escala local.

2.1. Problema local

Tal como lo muestra la Figura 2.1 se consideró como caso de estudio el flujo de un fluido en una cavidad rectangular de paredes impermeables ocupada parcialmente por un medio poroso, donde el flujo es generado por el movimiento en la dirección horizontal de la pared superior, de tal manera, que existe recirculación del fluido y en consecuencia, este fluye en dos direcciones sobre y a través de dicho medio poroso. En la cavidad se distinguen dos regiones y tres fases, tal como se describe a continuación.

Regiones:

- Región del fluido libre (región- η): zona de longitud característica L_η , que con-

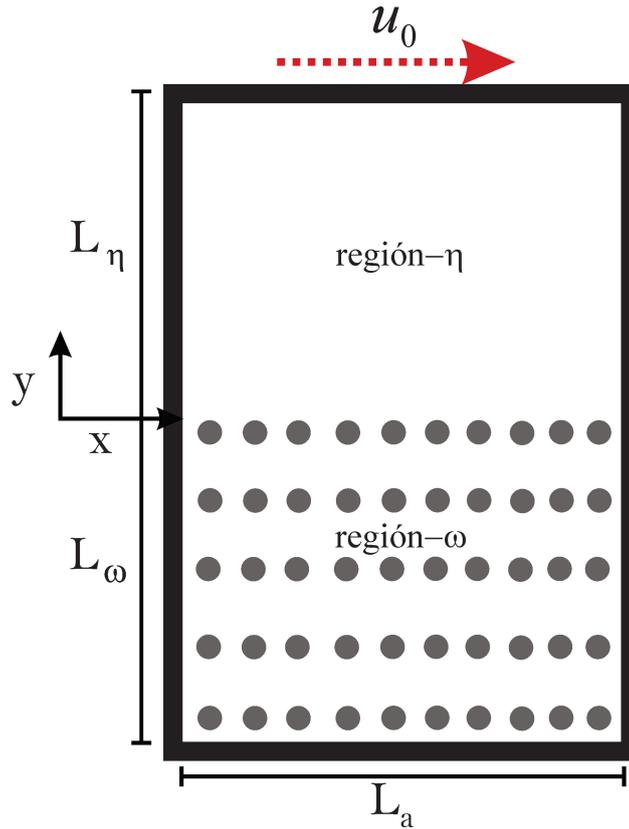


Figura 2.1: Sistema bidimensional fluido-medio poroso.

tiene únicamente a la fase fluida.

- Región del medio poroso (región- ω): zona de longitud característica L_ω que contiene fase fluida y fase sólida rígida.

Fases:

- Fase fluida (fase- β).
- Fase sólida que constituye al medio poroso (fase- σ).
- Fase sólida que constituye las paredes (fase- δ).

Además, el sistema estudiado está sujeto a los siguientes supuestos:

- Proceso en condiciones estacionarias.
- Flujo incompresible.
- Fluido newtoniano.

- Régimen de Stokes.
- Medio poroso homogéneo, supuesto como un arreglo de partículas rígidas y caracterizado por celdas unitarias.

De tal manera que, dadas las suposiciones antes descritas, las ecuaciones gobernantes del transporte de masa total y de cantidad de momento a la escala del continuo están dadas como

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_\beta = 0 \text{ en la fase } - \beta \quad (2.1)$$

$$\mathbf{0} = -\nabla p_\beta + \mu_\beta \nabla^2 \mathbf{v}_\beta \text{ en la fase } - \beta \quad (2.2)$$

Aquí el primer término de la ecuación refiere a las fuerzas superficiales de la presión y el segundo a las fuerzas viscosas donde \mathbf{v}_β y p_β son la velocidad y la presión modificada local la cual incluye los efectos de las fuerzas de gravedad presentes, respectivamente. Además, μ_β es la viscosidad dinámica del fluido. Las Ecs. (2.1)-(2.2) están sujetas a la condición de no deslizamiento en la interface fluido-sólido (i.e, $A_{\beta\sigma}$)

$$\mathbf{v}_\beta = \mathbf{0} \text{ en } A_{\beta\sigma} \quad (2.3)$$

con condición de entradas y salidas

$$\mathbf{v}_\beta = \mathbf{v}_{\beta,es} \text{ en } A_{\beta,es} \quad (2.4)$$

y condiciones de frontera

$$\mathbf{v}_\beta = u_0 \mathbf{e}_x \text{ en } y = L_\eta \quad (2.5)$$

$$\mathbf{v}_\beta = \mathbf{0} \text{ en } y = -L_\omega \quad (2.6)$$

$$\mathbf{v}_\beta = \mathbf{0} \text{ en } x = 0, L_a \quad (2.7)$$

las cuales establecen el movimiento constante horizontal de la pared superior a una velocidad u_0 y condiciones antideslizamiento en todas las demás paredes de la cavidad. Ahora, dado que el análisis de sistemas bidimensionales fluido-medio poroso a la microescala suele ser difícil, por la disparidad de longitudes características y la complejidad de las típicas estructuras de medios porosos, en las siguientes secciones se derivan los modelos de medio efectivo con enfoque de un dominio y las condiciones de frontera, con el objeto de capturar la información relevante de la microescala en un modelo simple, válido en todo el dominio de la cavidad e independiente de su geometría.

Esto, a partir del promediado espacial de las ecuaciones válidas a la escala del continuo con el método del promedio volumétrico. Dicho método es una técnica que produce ecuaciones continuas válidas en cualquier parte del sistema, obtenidas por la aplicación de teoremas de promediado espaciales y del uso de la definición formal de cantidades promedios en ecuaciones válidas en una fase particular (Whitaker, 1999). Es importante señalar que en el uso del mencionado método es fundamental el entendimiento de las definiciones y los teoremas involucrados, así como su aplicación, dado que esto no es 'asunto' trivial. Por esta razón, antes de aplicar el método al caso de estudio abordado, en este capítulo, se destinara una sección a la descripción de su uso y el significado físico de cada uno de sus pasos.

2.2. Método del promedio volumétrico

2.2.1. Región de promediado

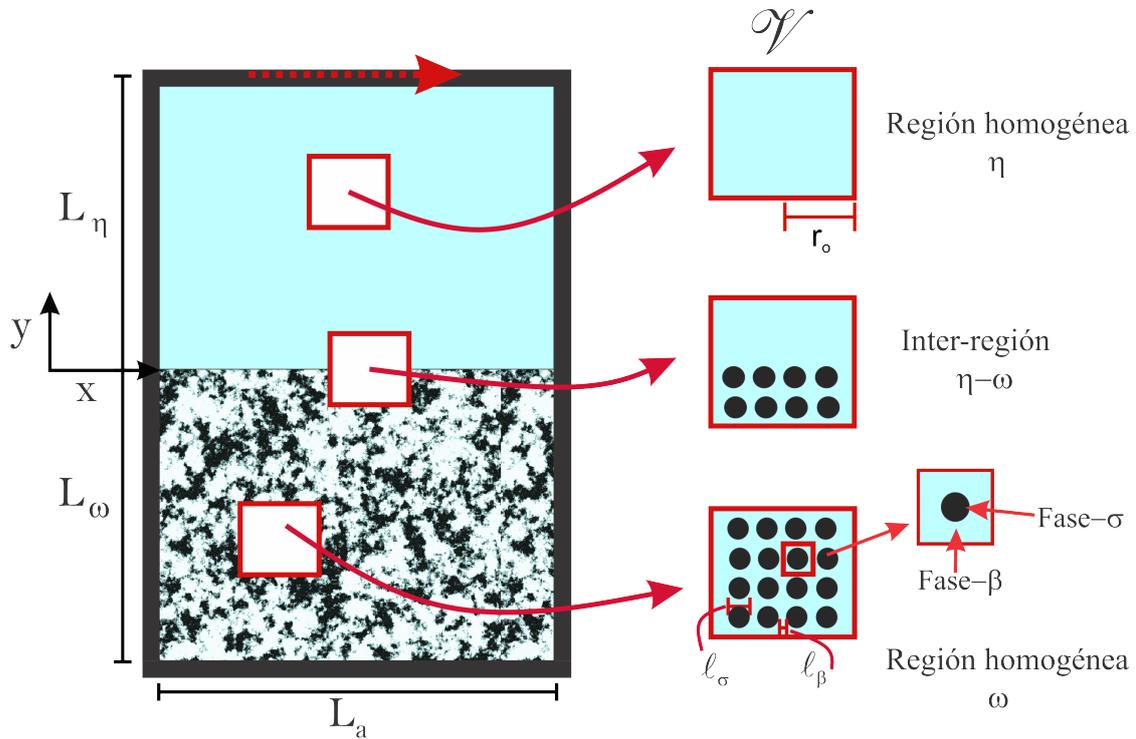


Figura 2.2: Esquema de región de promediado y longitudes características.

Tal como lo muestra la Figura 2.2, el primer paso del método del promedio volumétrico es la designación de una región representativa de promediado \mathcal{V} de tamaño

característico r_0 y volumen V . La región de promediado se localiza en la zona del fluido libre (i.e., región- η), en la zona del medio poroso (i.e., región- ω) o en algunas de las siguientes cinco inter-regiones mostradas y descritas a continuación.

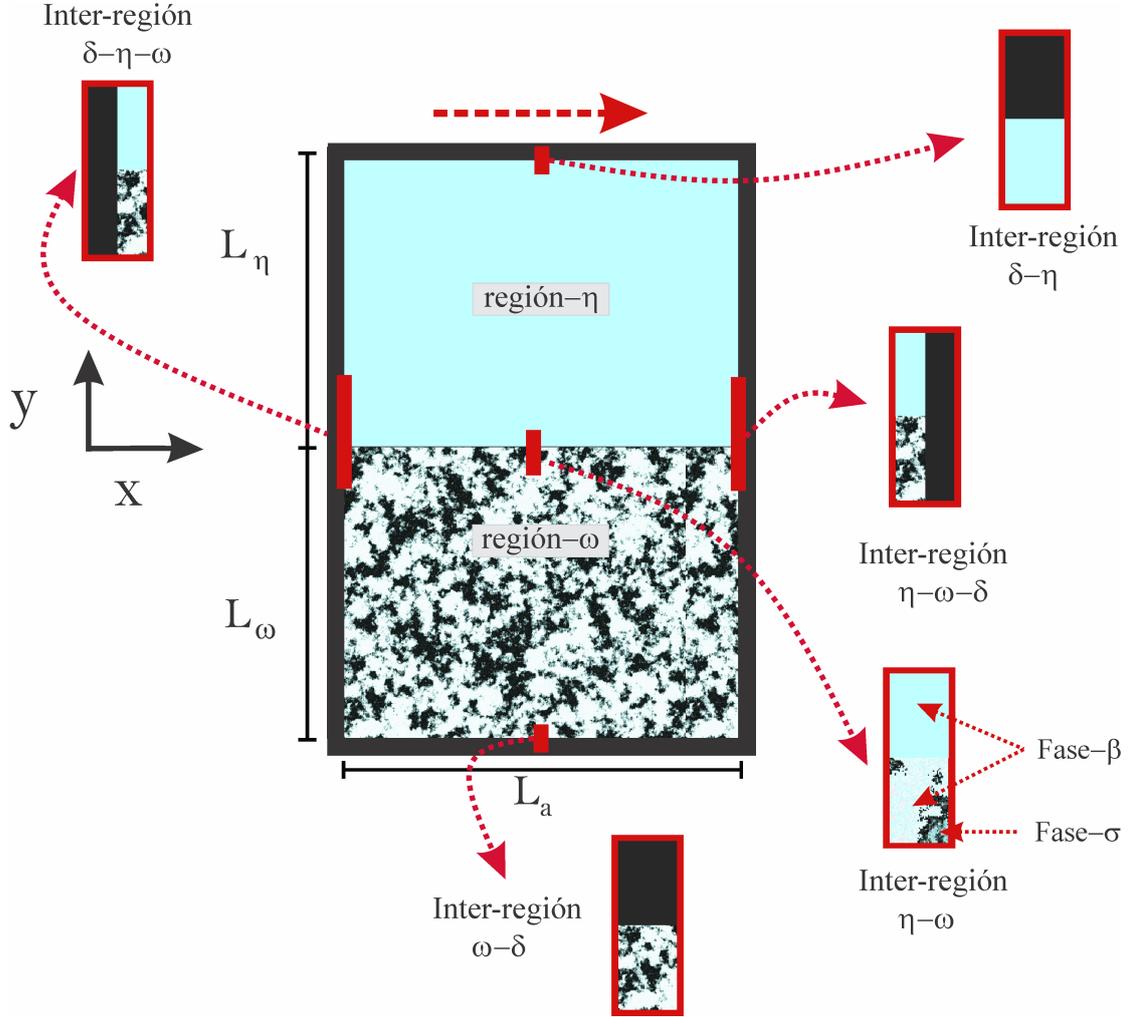


Figura 2.3: Inter-regiones en la cavidad.

Inter-regiones:

- Inter-región (pared superior)-(región- η) ($\delta - \eta$).
- Inter-región (región- ω)-(pared inferior) ($\omega - \delta$).
- Inter-región (pared lateral derecha)-(regiones- $\eta - \omega$) ($\delta - \eta - \omega$).
- Inter-región (regiones- $\eta - \omega$)-(pared lateral izquierda) ($\eta - \omega - \delta$).
- Inter-región (fluido)-(medio poroso) ($\eta - \omega$).

De lo anterior, en general dicha región de promediado se define como

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_\beta(\mathbf{x}) + \mathcal{V}_\sigma(\mathbf{x}) + \mathcal{V}_\delta(\mathbf{x}) \quad (2.8)$$

donde $\mathcal{V}_\beta, \mathcal{V}_\sigma, \mathcal{V}_\delta$ son las regiones ocupadas por las fases β, σ y inter-regiones δ dentro de la región de promediado, respectivamente. Es de relevancia señalar que se garantiza la obtención de cantidades promedio aceptables si la región de promediado es mucho menor que las longitudes características macroscópicas (i.e, L_η, L_ω) y mucho mayor que las longitudes características microscópicas (i.e., ℓ_β, ℓ_σ) de las fases contenidas en la misma y que a su vez bastará con satisfacer que el tamaño característico de la región de promediado sea igual a la longitud característica de la celda unitaria. Lo anterior, lleva a que en este método se debe prestar especial atención a que se satisfaga la restricción

$$\ell_\beta, \ell_\sigma \ll r_0 \ll L_\eta, L_\omega, \ell \leq r_0 \quad (2.9)$$

2.2.2. Operadores de promediado y teoremas del promediado espacial

A continuación, para la obtención de las cantidades promedio se aplican los operadores de promedio superficial a las ecuaciones válidas a escala de poro. Para esto, es necesario el conocimiento de las definiciones formales de cantidades promedio superficial e intrínseco. Estas se definen como

$$\langle \psi_\beta \rangle|_{\mathbf{x}} = \frac{1}{V} \int_{V_{\beta(x)}} \psi_\beta|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\beta} dV \quad (2.10)$$

$$\langle \psi_\beta \rangle^\beta|_{\mathbf{x}} = \frac{1}{V_\beta} \int_{V_{\beta(x)}} \psi_\beta|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\beta} dV \quad (2.11)$$

donde $\psi_\beta = \mathbf{v}_\beta, p_\beta$, de aquí, para una región de promediado donde r_0 es al menos cinco veces más grande que el diámetro de poro satisfaciendo $r_0 \ll L_\omega, L_\eta$ y permitiendo establecer a la porosidad del seno del medio poroso como constante se 'rastrea' a cada valor de la velocidad y presión promedio intrínseco a partir de la aplicación de la Ec. (2.11) a los valores locales de la misma dentro de la región de promediado que se mueve

en dirección tanto x como y de izquierda a derecha. En cuanto a los vectores de posición involucrados en las definiciones antes presentadas estos se detallan en la Figura 2.4 y se describen a continuación. Entonces, \mathbf{x} es un vector de posición el cual representa al centroide de la región de promediado. Por su parte, $\mathbf{y}_\beta(\mathbf{r}_\beta - \mathbf{x})$, es también un vector de posición el cual localiza puntos de la fase- β dentro de la misma región y relativos a \mathbf{x} y a un sistema de coordenadas arbitrario.

Mencionadas definiciones se relacionan mediante

$$\langle \psi_\beta \rangle|_{\mathbf{x}} = \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \langle \psi_\beta \rangle^\beta|_{\mathbf{x}} \quad (2.12)$$

donde ε_β es la fracción volumétrica de la fase β la cual se define como $\varepsilon_\beta = \frac{V_\beta(\mathbf{x})}{V}$ y de la cual es bien sabido que toma valores constantes en las regiones homogéneas del sistema, tales como

$$\varepsilon_\beta(\mathbf{x}) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{región} - \eta \\ \varepsilon_{\beta\omega} & \text{región} - \omega \end{array} \right\} \quad (2.13)$$

donde $\varepsilon_{\beta\omega}$ es la fracción volumétrica de la región- ω , mejor conocida como porosidad y definida como la relación del volumen de huecos con respecto al volumen de una muestra de material poroso.

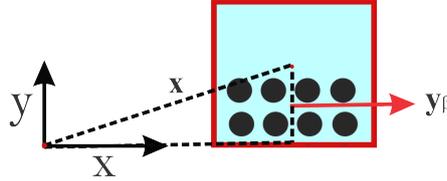


Figura 2.4: Vectores de posición asociados a la operación de promediado.

También, es importante mencionar que en la aplicación de los operadores de promediado, en las ecuaciones resultantes será necesario intercambiar la integración de cantidades promedio por la diferenciación espacial de las mismas. Para esto se toman en cuenta los teoremas de promediado espacial presentados a continuación.

$$\langle \nabla \psi_\beta \rangle|_{\mathbf{x}} = \nabla \langle \psi_\beta \rangle|_{\mathbf{x}} + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}(\mathbf{x})} n_{\beta\sigma} \psi_\beta|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\beta} dA \quad (2.14)$$

$$\langle \nabla \cdot \psi_\beta \rangle|_{\mathbf{x}} = \nabla \cdot \langle \psi_\beta \rangle|_{\mathbf{x}} + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}(\mathbf{x})} n_{\beta\sigma} \cdot \psi_\beta|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\beta} dA \quad (2.15)$$

2.2.3. Cerradura local del problema

Descomposición espacial

Aquí, dado que las ecuaciones promedio están en función de cantidades locales aún, es necesario eliminar dicha dependencia, esto mediante el uso de la descomposición espacial de cualquier cantidad puntual (Gray, 1975), así pues

$$\psi_\beta|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\beta} = \langle \psi_\beta \rangle^\beta|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\beta} + \tilde{\psi}_\beta|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\beta} \quad (2.16)$$

donde $\tilde{\psi}_\beta|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\beta}$ representa las desviaciones espaciales de ψ_β . Seguido, las ecuaciones generalizadas de medio efectivo están definidas en términos de promedios y desviaciones, por lo que es necesario deducir los problemas para $\tilde{\psi}_\beta$ para cerrar los modelos, lo anterior se logra a partir de un proceso denominado *proceso de cerradura*, este se describe a continuación.

Cerradura

En esta etapa, se desarrollan las ecuaciones que gobiernan a las desviaciones y sus condiciones de frontera a partir de la introducción de la definición de las desviaciones en los modelos a escala local y de la resta de este resultado a las ecuaciones promedio. De lo anterior, se permite escribir soluciones al problema de las desviaciones en función de las fuentes involucradas en el sistema y en términos de *variables de cerradura*. Finalmente, en consecuencia los problemas de las variables de cerradura permiten predecir los coeficientes efectivos de transporte, como lo es el tensor de permeabilidad de la ley de Darcy \mathbf{K}_β .

2.3. Ecuaciones de enfoque de un dominio (ODA)

2.3.1. Ecuaciones promedio con término \mathbf{f}_β

Ahora, se presentan los modelos del enfoque de un dominio o GTE para el transporte de masa total y de cantidad de movimiento, los cuales consideran al vector \mathbf{f}_β . Estos fueron obtenidos aplicando los operadores y teoremas de promediado espacial antes discutidos en el problema local. Su derivación ya ha sido abordada por varios autores

en la literatura de medios porosos y también se describe a detalle en el apéndice B de este trabajo. Por lo tanto, dichas ecuaciones promedio son

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} = -\varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \nabla \varepsilon_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \quad (2.17)$$

$$0 = -\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \mu_\beta \nabla^2 \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \varepsilon_\beta^{-1} \mu_\beta \nabla \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} - \mathbf{f}_\beta \quad (2.18)$$

Estas ecuaciones son conocidas como las GTE de transferencia de masa total y de cantidad de momento, dado que describen dichos transportes en todo el sistema. Aquí \mathbf{f}_β es un término resultante del método del promediado que incluye un vector que físicamente representa las resistencias interfaciales que ejerce el medio poroso al flujo del fluido. Este puede ser calculado por simulaciones a la escala de poro (PSS por sus siglas en inglés, *Pore scale simulation*) a partir de su definición:

$$-\mathbf{f}_\beta = \frac{1}{V_\beta} \int_{A_{\beta\sigma}(\mathbf{x})} -n_{\beta\sigma} \cdot \mathbf{I} p_\beta \Big|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\beta} dA - \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \nabla \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \langle p_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \frac{\mu_\beta}{V_\beta} \int_{A_{\beta\sigma}(\mathbf{x})} n_{\beta\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta \Big|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\beta} dA + \varepsilon_\beta^{-1} \mu_\beta \nabla \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \quad (2.19)$$

Las Ecs. (2.17)-(2.18) suelen ser presentadas en términos de cantidades promedio superficiales, porque los términos viscosos de la ecuación promedio superficial de cantidad de movimiento, tiene significados físicos justificados, entonces con la finalidad de discutir los mismos en el presente trabajo, estas ecuaciones se reescriben como

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \Big|_{\mathbf{x}} = 0 \quad (2.20)$$

$$0 = -\nabla \langle p_\beta \rangle \Big|_{\mathbf{x}} + \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_{\mathbf{x}} - \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \mu_\beta \nabla \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \cdot \nabla (\varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_{\mathbf{x}}) - \mathbf{f}_\beta \quad (2.21)$$

donde el primer término viscoso representa las fuerzas normales causadas por un gradiente de presión macroscópico, por su parte, el segundo término conocido en la literatura como la corrección de Brinkman refiere a las fuerzas viscosas macroscópicas y es frecuentemente utilizado en el análisis de flujo en la frontera entre un fluido y un medio poroso homogéneo. Finalmente, el penúltimo término representa a las fuerzas

viscosas macroscópicas ocasionadas por la variación de la fracción volumétrica en el sistema, este término ha sido denominado como la segunda corrección de Brinkman (Ochoa-Tapia y Whitaker, 1995).

2.3.2. Ecuaciones promedio dependientes del tensor de permeabilidad \mathbf{K}_β

En esta sección, se discute una forma más conveniente de reescribir las ecuaciones promedio antes presentadas, esta, consiste en reescribir al vector \mathbf{f}_β como un término de Darcy que involucra al tensor de permeabilidad intrínseco. Lo anterior se obtiene vía un proceso de cerradura de la Ec. (2.18) (Ver Apéndice B). Entonces el vector de resistencias \mathbf{f}_β se puede escribir como

$$-\mathbf{f}_\beta = -\mu_\beta \mathbf{K}_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \quad (2.22)$$

En consecuencia, las GTE de transporte de masa total y cantidad de movimiento dependientes de \mathbf{K}_β^{-1} se escriben como

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} = -\varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \nabla \varepsilon_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \quad (2.23)$$

$$0 = -\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_{\mathbf{x}} - \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \mu_\beta \nabla \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \cdot \nabla (\varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_{\mathbf{x}}) - \mu_\beta \mathbf{K}_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_{\mathbf{x}} \quad (2.24)$$

donde \mathbf{K}_β^{-1} en las regiones homogéneas del sistema, se convierte en

$$\mathbf{K}_\beta^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{región-}\eta \\ \mathbf{K}_{\beta\omega}^{-1} & \text{región-}\omega \end{cases} \quad (2.25)$$

donde $\mathbf{K}_{\beta\omega}$ es la permeabilidad en la región- ω que representa la facilidad con la que el fluido fluye en el medio poroso. De aquí, el tensor de permeabilidad intrínseco puede ser determinado a partir del vector \mathbf{f}_β (i.e., por PSS) o del mismo proceso de cerradura. El presente trabajo se limitará a su calculo por su definición en función del vector \mathbf{f}_β .

2.4. Caso de estudio: Flujo bidimensional

En esta sección se presentan los modelos de enfoque ODA aplicados al caso tratado: flujo bidimensional. Por simplicidad se adimensionalizan las GTE antes descritas. Para

ello se introducen los parámetros dimensionales:

$$\mathbf{u}_\beta = \frac{\mathbf{v}_\beta}{u_0}, p_\beta = \frac{\ell p_\beta}{\mu_\beta u_0}, dA^* = \frac{dA}{\ell^2}, \mathcal{K}_\beta^{-1} = \mathbf{K}_\beta^{-1} \ell^2 \quad (2.26)$$

donde ℓ es el ancho de una celda unitaria. Las Ecs. (2.17)-(2.18) se convierten en

$$\mathbf{0} = -\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \nabla^2 \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \langle \mathbf{u}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \nabla^2 \langle \mathbf{u}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \nabla \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \cdot \nabla \langle \mathbf{u}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} - \mathbf{f}_\beta^* \quad (2.27)$$

donde el vector de fricción \mathbf{f}_β se escribe en su forma adimensional como:

$$\begin{aligned} -\mathbf{f}_\beta^* = & -\mathcal{K}_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \langle \mathbf{u}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} = -\frac{1}{V_\beta^*} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \mathbf{I} p_\beta \Big|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\beta} dA^* - \\ & \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \nabla \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \langle p_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \frac{1}{V_\beta^*} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \nabla \mathbf{u}_\beta \Big|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\beta} dA^* + \\ & \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \nabla \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \cdot \nabla \langle \mathbf{u}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Ahora, situando los modelos del enfoque ODA dependientes del vector \mathbf{f}_β al caso de estudio abordado de flujo bidireccional en la cavidad ocupada parcialmente por un medio poroso homogéneo y rígido (Figura 2.3), aplicando $\cdot \mathbf{e}_x$ y $\cdot \mathbf{e}_y$ a las Ecs. (2.17-2.18) y Ecs. (2.23-2.24), para la obtención de las ecuaciones de la presión y las componentes horizontal y vertical de la velocidad, respectivamente, las Ecs. (2.17)-(2.18) se simplifican como

$$\frac{\partial \langle u_{\beta x} \rangle^\beta}{\partial x} + \frac{\partial \langle u_{\beta y} \rangle^\beta}{\partial y} = -\varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \left[\frac{\partial \varepsilon_\beta(\mathbf{x})}{\partial x} \langle u_{\beta x} \rangle^\beta + \frac{\partial \varepsilon_\beta(\mathbf{x})}{\partial y} \langle u_{\beta y} \rangle^\beta \right] \quad (2.29)$$

$$\mathbf{0} = -\frac{\partial \langle p_\beta \rangle^\beta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \langle u_{\beta x} \rangle^\beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \langle u_{\beta x} \rangle^\beta}{\partial y^2} + \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \left[\frac{\partial \varepsilon_\beta(\mathbf{x})}{\partial x} \frac{\partial \langle u_{\beta x} \rangle^\beta}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_\beta(\mathbf{x})}{\partial y} \frac{\partial \langle u_{\beta x} \rangle^\beta}{\partial y} \right] - f_{\beta x} \quad (2.30)$$

$$\mathbf{0} = -\frac{\partial \langle p_\beta \rangle^\beta}{\partial y} + \frac{\partial^2 \langle u_{\beta y} \rangle^\beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \langle u_{\beta y} \rangle^\beta}{\partial y^2} + \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \left[\frac{\partial \varepsilon_\beta(\mathbf{x})}{\partial x} \frac{\partial \langle u_{\beta y} \rangle^\beta}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_\beta(\mathbf{x})}{\partial y} \frac{\partial \langle u_{\beta y} \rangle^\beta}{\partial y} \right] - f_{\beta y} \quad (2.31)$$

donde

$$\begin{aligned}
-f_{\beta x} = & \frac{1}{V_\beta^*} \int_{A_{\beta\sigma(\mathbf{x})}} -n_x p_\beta dA^* - \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \frac{\partial \varepsilon_\beta(\mathbf{x})}{\partial x} \langle p_\beta \rangle^\beta + \\
& \frac{1}{V_\beta^*} \int_{A_{\beta\sigma(\mathbf{x})}} \left(n_x \frac{\partial u_{\beta x}}{\partial x} + n_y \frac{\partial u_{\beta x}}{\partial y} \right) dA^* + \\
& \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \left[\frac{\partial \varepsilon_\beta(\mathbf{x})}{\partial x} \frac{\partial \langle u_{\beta x} \rangle^\beta}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_\beta(\mathbf{x})}{\partial y} \frac{\partial \langle u_{\beta x} \rangle^\beta}{\partial y} \right] \quad (2.32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-f_{\beta y} = & \frac{1}{V_\beta^*} \int_{A_{\beta\sigma(\mathbf{x})}} -n_y p_\beta dA^* - \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \frac{\partial \varepsilon_\beta(\mathbf{x})}{\partial y} \langle p_\beta \rangle^\beta + \\
& \frac{1}{V_\beta^*} \int_{A_{\beta\sigma(\mathbf{x})}} \left(n_x \frac{\partial u_{\beta y}}{\partial x} + n_y \frac{\partial u_{\beta y}}{\partial y} \right) dA^* + \\
& \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \left[\frac{\partial \varepsilon_\beta(\mathbf{x})}{\partial x} \frac{\partial \langle u_{\beta y} \rangle^\beta}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_\beta(\mathbf{x})}{\partial y} \frac{\partial \langle u_{\beta y} \rangle^\beta}{\partial y} \right] \quad (2.33)
\end{aligned}$$

donde $\langle u_{\beta x} \rangle^\beta$ y $\langle u_{\beta y} \rangle^\beta$ son las componentes x y y de la velocidad promedio intrínseco, respectivamente. Para la solución de estas ecuaciones de medio efectivo son necesarias las condiciones de frontera para cada componente de la velocidad, estas son las mismas establecidas en el enfoque a la microescala (Ecs. (2.5)-(2.7)) pero en su forma adimensional, tal que

Componente- x

$$u_{\beta x} = 1 \text{ en } y/\ell = L_\eta/\ell \quad (2.34)$$

$$u_{\beta x} = 0 \text{ en } y/\ell = -L_\omega/\ell \quad (2.35)$$

$$u_{\beta x} = 0 \text{ en } x/\ell = 0, L_a/\ell \quad (2.36)$$

Componente- y

$$u_{\beta y} = 0 \text{ en } y/\ell = L_\eta/\ell, -L_\omega/\ell \quad (2.37)$$

$$u_{\beta y} = 0 \text{ en } x/\ell = 0, L_a/\ell \quad (2.38)$$

Se nota en las GTE bidimensionales que es necesario conocer la fracción volumétrica bidimensional en las zonas homogéneas y en las inter-regiones de la cavidad y que también se requieren las componentes no nulas del vector de fricción \mathbf{f}_β^* (i.e., $f_{\beta x}$ y $f_{\beta y}$). La fracción volumétrica se determina a partir de $\varepsilon_\beta = \frac{V_\beta(\mathbf{x})}{V}$ y $f_{\beta x}$ y $f_{\beta y}$ por PSS utilizando las Ecs. (2.32-2.33). Ahora, en el caso de los modelos enfoque ODA dependientes de \mathbf{K}_β^{-1} , la aplicación de $\cdot \mathbf{e}_x$ y $\cdot \mathbf{e}_y$ en Ecs. (2.23-2.24) y considerando que $\varepsilon_\beta(\mathbf{x}) K_{\beta_{xx}}^{-1} \langle u_{\beta x} \rangle^\beta > \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) K_{\beta_{xy}}^{-1} \langle u_{\beta y} \rangle^\beta$ y $\varepsilon_\beta(\mathbf{x}) K_{\beta_{yy}}^{-1} \langle u_{\beta y} \rangle^\beta > \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) K_{\beta_{yx}}^{-1} \langle u_{\beta x} \rangle^\beta$, da

$$\frac{\partial \langle u_{\beta x} \rangle^\beta}{\partial x} + \frac{\partial \langle u_{\beta y} \rangle^\beta}{\partial y} = -\varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \left[\frac{\partial \varepsilon_\beta(\mathbf{x})}{\partial x} \langle u_{\beta x} \rangle^\beta + \frac{\partial \varepsilon_\beta(\mathbf{x})}{\partial y} \langle u_{\beta y} \rangle^\beta \right] \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= -\frac{\partial \langle p_\beta \rangle^\beta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \langle u_{\beta x} \rangle^\beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \langle u_{\beta x} \rangle^\beta}{\partial y^2} + \\ \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) &\left[\frac{\partial \varepsilon_\beta(\mathbf{x})}{\partial x} \frac{\partial \langle u_{\beta x} \rangle^\beta}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_\beta(\mathbf{x})}{\partial y} \frac{\partial \langle u_{\beta x} \rangle^\beta}{\partial y} \right] - \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) K_{\beta_{xx}}^{-1} \langle u_{\beta x} \rangle^\beta \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= -\frac{\partial \langle p_\beta \rangle^\beta}{\partial y} + \frac{\partial^2 \langle u_{\beta y} \rangle^\beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \langle u_{\beta y} \rangle^\beta}{\partial y^2} + \\ \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) &\left[\frac{\partial \varepsilon_\beta(\mathbf{x})}{\partial x} \frac{\partial \langle u_{\beta y} \rangle^\beta}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_\beta(\mathbf{x})}{\partial y} \frac{\partial \langle u_{\beta y} \rangle^\beta}{\partial y} \right] - \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) K_{\beta_{yy}}^{-1} \langle u_{\beta y} \rangle^\beta \end{aligned} \quad (2.41)$$

De aquí, en la solución de las Ecs. (2.39-2.41) se consideran las condiciones de frontera de las Ecs. (2.34-2.38) y se calculan las componentes del tensor de permeabilidad intrínseco $K_{\beta_{xx}}^{-1}$ y $K_{\beta_{yy}}^{-1}$ por PSS, tal como

$$K_{\beta_{xx}}^{-1} = \frac{-f_{\beta x}}{-\varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \langle u_{\beta x} \rangle^\beta} \quad (2.42)$$

$$K_{\beta_{yy}}^{-1} = \frac{-f_{\beta y}}{-\varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \langle u_{\beta y} \rangle^\beta} \quad (2.43)$$

2.5. Esquema numérico

En esta sección se presenta el procedimiento numérico de solución de los modelos matemáticos de medio efectivo propuestos, para esto se reescribe a las variables involucradas como:

$$\langle u_{\beta x} \rangle^\beta = U; \langle u_{\beta y} \rangle^\beta = V; \langle p_\beta \rangle^\beta = P; \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) = \varepsilon \quad (2.44)$$

2.5.1. Esquema numérico para ecuaciones promedio con \mathbf{f}_β

Entonces, las ecuaciones generalizadas de transporte bidimensional dependientes del vector de resistencias \mathbf{f}_β están dadas como

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = -\varepsilon^{-1} \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} U + \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} V \right] \quad (2.45)$$

$$\mathbf{0} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \varepsilon^{-1} \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y} \right] - f_{\beta x} \quad (2.46)$$

$$\mathbf{0} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \varepsilon^{-1} \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} \right] - f_{\beta y} \quad (2.47)$$

entonces tomando en cuenta una discretización de la derivada espacial 2D según el método de diferencias finitas centradas de segundo orden y hacia atrás de primer orden (Chapra y Raymond, 2007), tal como lo muestra la Figura 2.5, las ecuaciones (2.45-2.47) se aproximan como

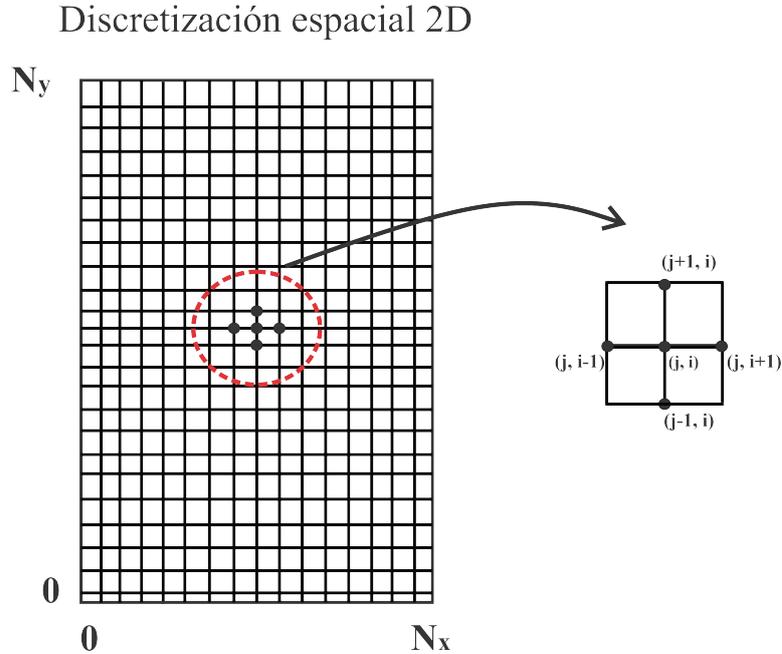


Figura 2.5: Esquema de discretización espacial bidimensional en la cavidad.

$$\frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{\Delta x} + \frac{V_{i,j} - V_{i,j-1}}{\Delta y} = -\varepsilon_{i,j}^{-1} \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_{i,j}} U_{i,j} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial y_{i,j}} V_{i,j} \right] \quad (2.48)$$

$$\mathbf{0} = -\frac{(P_{i,j} - P_{i-1,j})}{\Delta x} + \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{\Delta y^2} + \varepsilon_{i,j}^{-1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_{i,j}} \frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{\Delta x} + \varepsilon_{i,j}^{-1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y_{i,j}} \frac{U_{i,j} - U_{i,j-1}}{\Delta y} - f_{\beta x_{i,j}} \quad (2.49)$$

$$\mathbf{0} = -\frac{(P_{i,j} - P_{i,j-1})}{\Delta y} + \frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}}{\Delta y^2} + \varepsilon_{i,j}^{-1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_{i,j}} \frac{V_{i,j} - V_{i-1,j}}{\Delta x} + \varepsilon_{i,j}^{-1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y_{i,j}} \frac{V_{i,j} - V_{i,j-1}}{\Delta y} - f_{\beta y_{i,j}} \quad (2.50)$$

donde $i = 2, 3 \dots Nx - 1$ y $j = 1, 2, 3 \dots Ny - 1$ representan los nodos en las direcciones x y y , respectivamente.

Multiplicando por $\Delta x \Delta y$ y $\Delta x^2 \Delta y^2$ las Ecs. (2.48) y (2.49-2.50), respectivamente y factorizando, se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$0 = \alpha U_{i,j} - \Delta y U_{i-1,j} + \beta V_{i,j} - \Delta x V_{i,j-1} \quad (2.51)$$

$$0 = \Delta y^2 \Delta x (P_{i-1,j} - P_{i,j}) + \sigma U_{i,j} + \gamma U_{i-1,j} + \psi U_{i,j-1} + \Delta y^2 U_{i+1,j} + \Delta x^2 U_{i,j+1} - \Delta x^2 \Delta y^2 f_{\beta x_{i,j}} \quad (2.52)$$

$$0 = \Delta x^2 \Delta y (P_{i,j-1} - P_{i,j}) + \sigma V_{i,j} + \gamma V_{i-1,j} + \psi V_{i,j-1} + \Delta y^2 V_{i+1,j} + \Delta x^2 V_{i,j+1} - \Delta x^2 \Delta y^2 f_{\beta y_{i,j}} \quad (2.53)$$

donde fueron definidos los parámetros:

$$\alpha = \Delta y + \Delta x \Delta y \varepsilon_{i,j}^{-1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_{i,j}}; \beta = \Delta x + \Delta x \Delta y \varepsilon_{i,j}^{-1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \quad (2.54)$$

$$\sigma = -2\Delta y^2 - 2\Delta x^2 + \Delta y^2 \Delta x \varepsilon_{i,j}^{-1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_{i,j}} + \Delta x^2 \Delta y \varepsilon_{i,j}^{-1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y_{i,j}} \quad (2.55)$$

$$\gamma = \Delta y^2 - \Delta y^2 \Delta x \varepsilon_{i,j}^{-1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_{i,j}}; \psi = \Delta x^2 - \Delta x^2 \Delta y \varepsilon_{i,j}^{-1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y_{i,j}} \quad (2.56)$$

Así mismo las condiciones de frontera adimensionales de la velocidad y la presión modificada fueron aproximadas, tal que

$$U_{1:N_x,1} = 0, V_{1:N_x,1} = 0, P_{1,1:N_y} = P_{2,1:N_y} \quad (2.57)$$

$$U_{1:N_x,N_y} = 1, V_{1:N_x,N_y} = 0, P_{N_x,1:N_y} = P_{N_x-1,1:N_y} \quad (2.58)$$

$$U_{1,1:N_y} = 0, V_{1,1:N_y} = 0, P_{1:N_x,1} = P_{1:N_x,2} \quad (2.59)$$

$$U_{N_x,1:N_y} = 0, V_{N_x,1:N_y} = 0, P_{1:N_x,N_y} = P_{1:N_x,N_y-1} \quad (2.60)$$

De aquí las ecuaciones algebraicas dadas por Ecs. (2.51-2.53) se resuelven con las condiciones de frontera del sistema (Ecs. (2.57-2.60)) a partir del uso del método de Newton Raphson Multivariable.

2.5.2. Esquema numérico para ecuaciones promedio con término de Darcy

Ahora, como se discutió en la metodología se escriben los coeficientes $f_{\beta x}$ y $f_{\beta y}$ como un término de Darcy con las variaciones espaciales del tensor de permeabilidad intrínseco y se aplica la discretización 2D, resultando

$$\frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{\Delta x} + \frac{V_{i,j} - V_{i,j-1}}{\Delta y} = -\varepsilon_{i,j}^{-1} \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_{i,j}} U_{i,j} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial y_{i,j}} V_{i,j} \right] \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} 0 = & -\frac{(P_{i,j} - P_{i-1,j})}{\Delta x} + \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{\Delta y^2} + \\ & \varepsilon_{i,j}^{-1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_{i,j}} \frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{\Delta x} + \varepsilon_{i,j}^{-1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y_{i,j}} \frac{U_{i,j} - U_{i,j-1}}{\Delta y} - \varepsilon_{i,j} K_{\beta_{xx} i,j}^{-1} U_{i,j} \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} 0 = & -\frac{(P_{i,j} - P_{i,j-1})}{\Delta y} + \frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}}{\Delta y^2} + \\ & \varepsilon_{i,j}^{-1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_{i,j}} \frac{V_{i,j} - V_{i-1,j}}{\Delta x} + \varepsilon_{i,j}^{-1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y_{i,j}} \frac{V_{i,j} - V_{i,j-1}}{\Delta y} - \varepsilon_{i,j} K_{\beta_{yy} i,j}^{-1} V_{i,j} \end{aligned} \quad (2.63)$$

Las Ecs. (2.61-2.63) se reescriben como

$$0 = \alpha U_{i,j} - \Delta y U_{i-1,j} + \beta V_{i,j} - \Delta x V_{i,j-1} \quad (2.64)$$

$$0 = \Delta x \Delta y^2 (P_{i-1,j} - P_{i,j}) + \xi U_{i,j} + \gamma U_{i-1,j} + \psi U_{i,j-1} + \Delta y^2 U_{i+1,j} + \Delta x^2 U_{i,j+1} \quad (2.65)$$

$$0 = \Delta y \Delta x^2 (P_{i,j-1} - P_{i,j}) + \zeta V_{i,j} + \gamma V_{i-1,j} + \psi V_{i,j-1} + \Delta y^2 V_{i+1,j} + \Delta x^2 V_{i,j+1} \quad (2.66)$$

donde

$$\xi = -2\Delta y^2 - 2\Delta x^2 + \Delta y^2 \Delta x \varepsilon_{i,j}^{-1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_{i,j}} + \Delta x^2 \Delta y \varepsilon_{i,j}^{-1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y_{i,j}} - \Delta x^2 \Delta y^2 \varepsilon_{i,j} K_{\beta_{xx} i,j}^{-1} \quad (2.67)$$

$$\zeta = -2\Delta y^2 - 2\Delta x^2 + \Delta y^2 \Delta x \varepsilon_{i,j}^{-1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_{i,j}} + \Delta x^2 \Delta y \varepsilon_{i,j}^{-1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y_{i,j}} - \Delta x^2 \Delta y^2 \varepsilon_{i,j} K_{\beta_{yy} i,j}^{-1} \quad (2.68)$$

Entonces, se resuelven las ecuaciones algebraicas dadas por las Ecs. (2.64-2.66) acopladas a las condiciones de frontera de la cavidad por el método de Newton Raphson Multivariable siguiendo el diagrama de flujo mostrado en la Figura 2.6 y sustituyendo a las componentes no nulas del vector de resistencias \mathbf{f}_β por las del tensor de permeabilidad inverso.

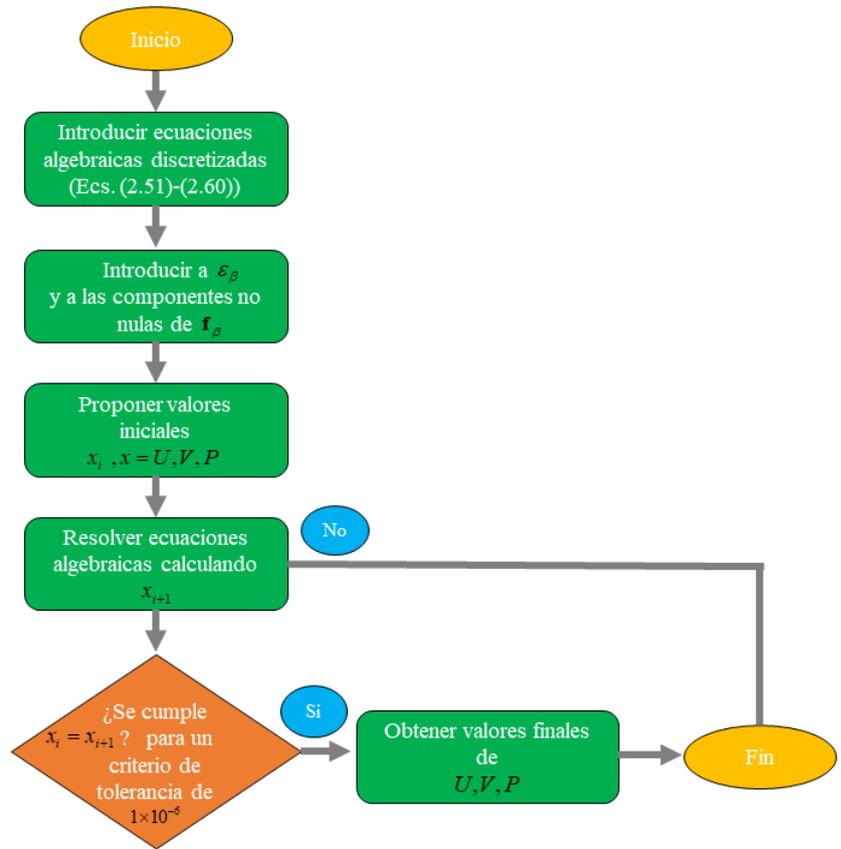


Figura 2.6: Algoritmo para la solución de los modelos de enfoque ODA.

Capítulo 3

Resultados y discusión

Este capítulo presenta los resultados de la magnitud de la velocidad, los perfiles de las componentes vertical (y) y horizontal (x) de la velocidad y el campo de la presión en la cavidad, los cuales fueron obtenidos por la resolución de los modelos a la escala local y los de enfoque de un dominio dependientes de un vector de resistencias interfaciales y de un término de Darcy, respectivamente. Para los cálculos se estableció $L_\eta = L_a = 10\ell$, $L_\omega = 5\ell$, siendo $L_\eta + L_\omega$ el largo de la cavidad, lo anterior conduce al cumplimiento de las restricciones de escala en al menos un orden de magnitud de la escala de poros a la escala macroscópica ya que $\ell_\sigma, \ell_\beta \ll L_\omega, L_\eta$. Para el proceso de promediado, se consideró una región de promediado de tamaño $2r_0 = \ell$ y una $\varepsilon_{\beta\omega} = \frac{V_\beta}{V_\beta + V_\sigma} = 1 - \frac{\pi}{4} \left(\frac{\ell_\sigma}{\ell}\right)^2 = 0.95$.

3.1. Escala local

Aquí, se discuten los resultados de la resolución de las ecuaciones gobernantes del transporte de momento y masa total en la cavidad a la escala local. Inicialmente, la Figura 3.1 exhibe la magnitud adimensional de la velocidad en el sistema, obtenida por PSS en función de líneas de flujo. De aquí es importante observar que el flujo bidimensional del fluido causado por el movimiento de la pared superior se recircula en la cavidad ocasionando dificultades de penetración al medio poroso y formación de vórtices. Por su parte, la Figura 3.2 muestra la componente horizontal de la velocidad adimensional local en la cavidad. Se nota que el perfil de velocidad distingue la microestructura del medio poroso, además, muestra el patrón de flujo, el cual incluye la

máxima velocidad en la pared superior causado por el movimiento constante de esta y su decrecimiento debido al viaje del fluido de la zona del fluido libre al interior del medio poroso. Se debe señalar que existen velocidades negativas, lo anterior es atribuido a la recirculación del flujo.

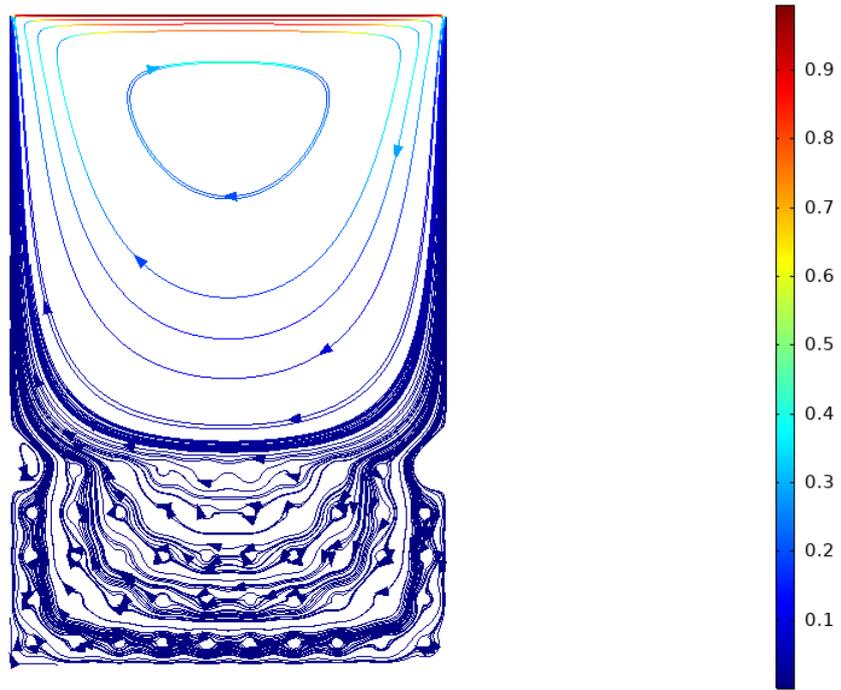


Figura 3.1: Líneas de corriente de \mathbf{u}_β obtenidas por PSS.

Asimismo, la Figura 3.3 presenta la componente vertical de la velocidad adimensional local. Se nota un perfil de velocidad antisimétrico debido físicamente a la recirculación del fluido en todas las zonas del sistema y que la velocidad en esta dirección es menor a la que ocurre en la dirección x en órdenes de magnitud, pero que independientemente de esto, su cálculo es importante para la correcta descripción del flujo del fluido en la cavidad ya que la conservación de masa total en el sistema debe satisfacerse, tal como lo describe la Ec.(2.29).

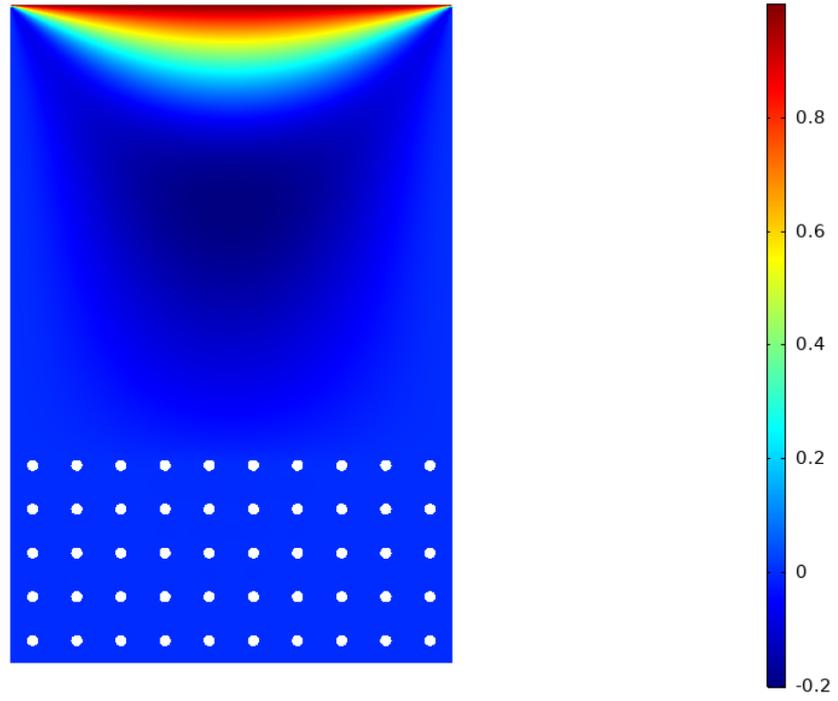


Figura 3.2: u_{β_x} adimensional de la velocidad obtenida por PSS.

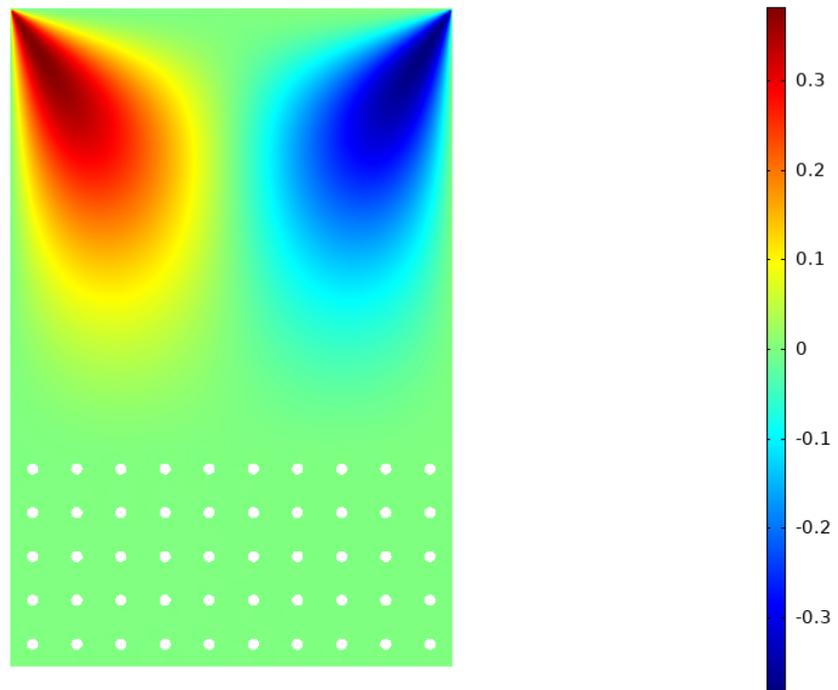


Figura 3.3: u_{β_y} obtenida por PSS.

En la Figura 3.4 se muestran las líneas de corriente de la magnitud adimensional de la velocidad en una región del sistema de tamaño $-r_0 \leq y/\ell \leq r_0$; $r_0 \leq x/\ell \leq L_a - r_0$ que al ser promediada espacialmente da lugar a la denominada zona de transición o inter-región (Ochoa-Tapia *et al.*, 2017), que tal como se observa en la Figura 3.4 es donde ocurren cambios rápidos de la velocidad en la región del fluido libre a la velocidad en el medio poroso. También, se nota con detalle la formación de vórtices cerca de las paredes laterales, ocasionados por el choque del flujo con estas y en consecuencia la recirculación del mismo en dicha zona. Lo anterior descrito válida que el estudio del transporte de momento en esta zona debe incluir las correcciones de Brinkman que consideran las variaciones de los coeficientes de transporte efectivos.

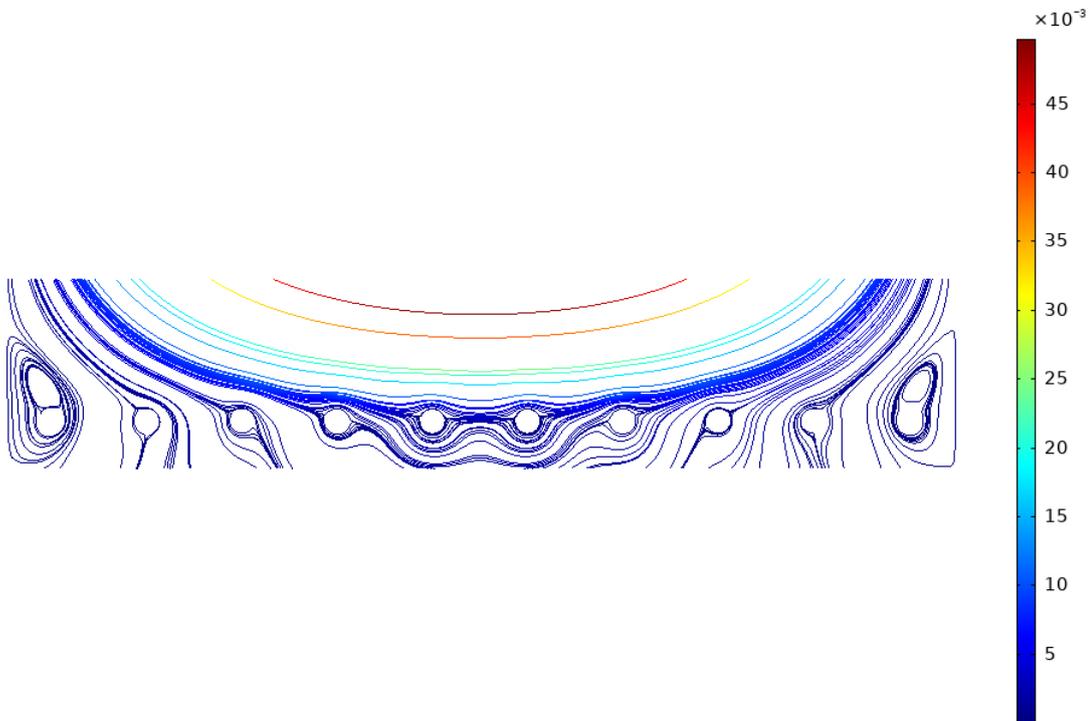


Figura 3.4: Líneas de corriente de \mathbf{u}_β en la inter-región.

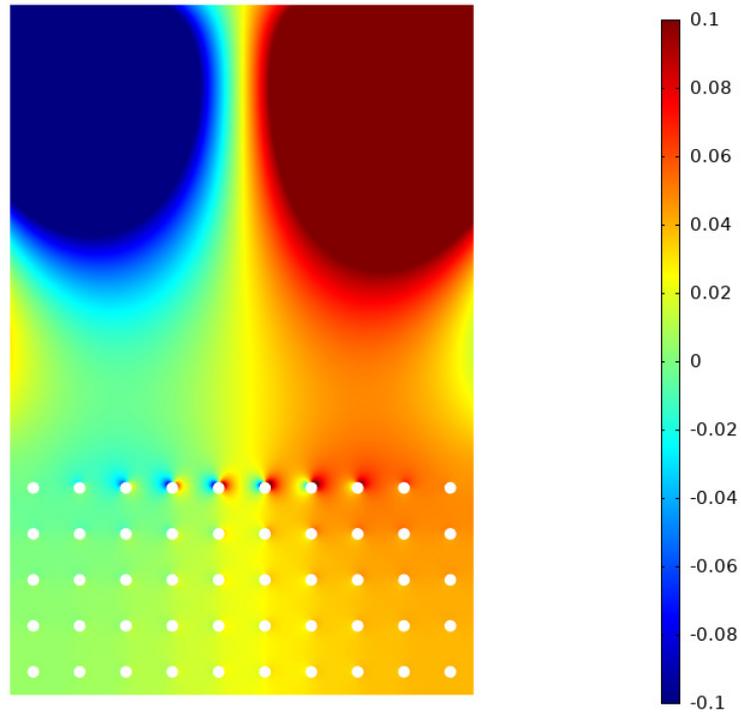


Figura 3.5: p_β adimensional obtenida por PSS.

En la Figura 3.5 se muestra el campo de la presión adimensional, donde se observa que la caída de presión en la cavidad es de tipo forzada, ya que existe solo por consecuencia del movimiento de la tapa superior. También, se ve que debido a lo antes mencionado, las mayores presiones se sitúan cerca de la pared superior, caso contrario en la zona del medio poroso donde es sumamente pequeña. Además, se notan presiones negativas asociadas físicamente a las fuerzas contrarias al movimiento de la pared superior.

3.2. Coeficientes de transporte efectivos y vector \mathbf{f}_β

En esta sección, son discutidas las variaciones de la fracción volumétrica y las componentes no nulos del vector de resistencias y del tensor de permeabilidad, en cada punto de la cavidad.

3.2.1. Fracción volumétrica

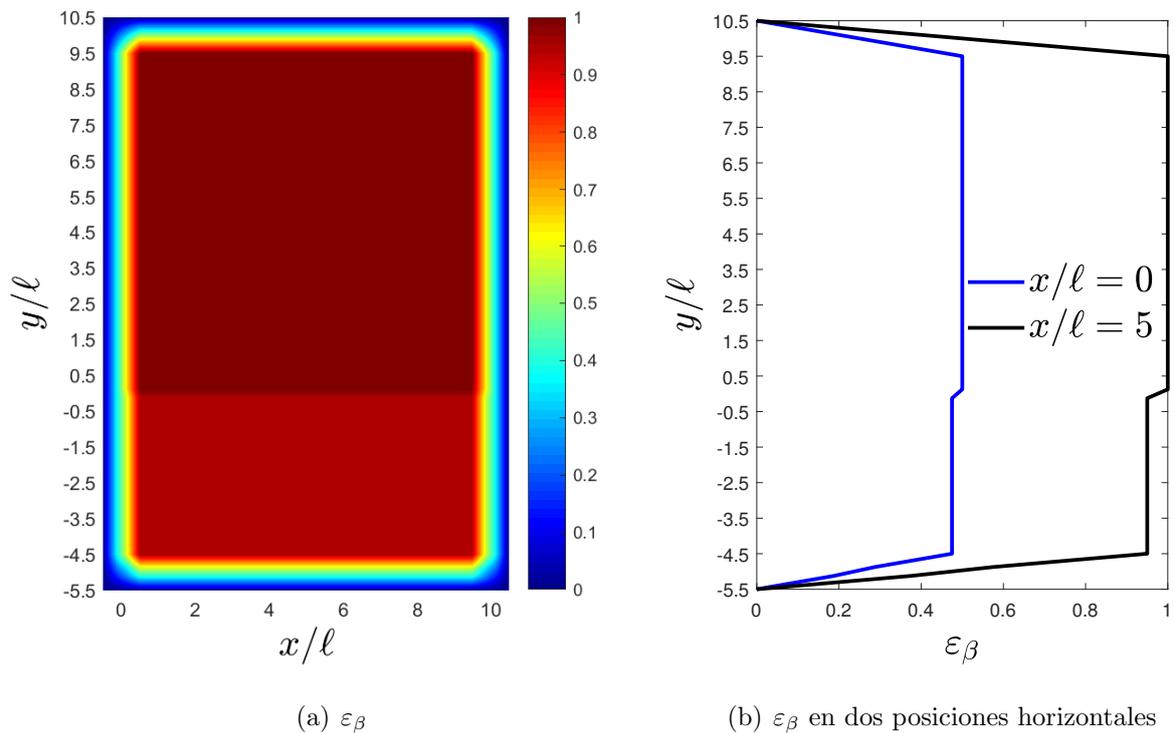


Figura 3.6: (a) Variaciones de la fracción volumétrica en la cavidad y (b) en $x/\ell = 0$ y $x/\ell = 5$.

La fracción volumétrica ε_β , está definida como el cociente del volumen de la fase β entre el volumen total dentro de la región de promediado. Las Figuras 3.6a y 3.6b muestran las variaciones de la fracción volumétrica en la cavidad y los perfiles de ε_β en las posiciones $x/\ell = 0$ y $x/\ell = 5$, respectivamente. Se observa en la Figura 3.6 que la fracción volumétrica cambia linealmente en las zonas de transición del sistema, específicamente, se nota en los dos perfiles de corte de la Figura 3.6b que existe una variación lineal en la inter-región fluido-medio poroso. También, se notan variaciones lineales en cada una de las inter-regiones con las paredes, en este caso, la fracción volumétrica

decrece hasta valores cercanos a ceros, que es cuando en la muestra de promediado $V_\beta \simeq 0$. Ahora las Figuras 3.7a y 3.7b muestran las variaciones espaciales bidimensionales de ε_β en la zona de transición y en la inter-región medio poroso-pared inferior, respectivamente. En la Figura 3.7a se observa una transición entre el valor de $\varepsilon_{\beta\omega}$ en $y/\ell = -r_0$, $x/\ell = r_0$ al valor de la unidad en el fluido libre en $y/\ell = r_0$, $x/\ell = L_a - r_0$, dicha transición representada por una tendencia lineal de colores. Por otro lado, la Figura 3.7b exhibe los cambios espaciales en ε_β en la inter-región medio poroso-pared inferior de tamaño $-L_\omega - r_0 \leq y/\ell \leq -L_\omega + r_0$; $r_0 \leq x/\ell \leq L_a - r_0$, de igual forma que en la Figura 3.7a, se notan variaciones lineales desde $\varepsilon_{\beta\omega}$ hasta valores de ceros en la pared. Con lo anteriormente descrito, se puede concluir que los cambios espaciales bidireccionales de la fracción volumétrica en las inter-regiones de sistemas bidimensionales fluido-medio poroso pueden ser descritos a partir de la deducción de expresiones algebraicas que para fines prácticos pueden ser tratados como funciones lineales, tal como se ha establecido en otras investigaciones (Luminari *et al.*, 2018; Luminari *et al.*, 2019).

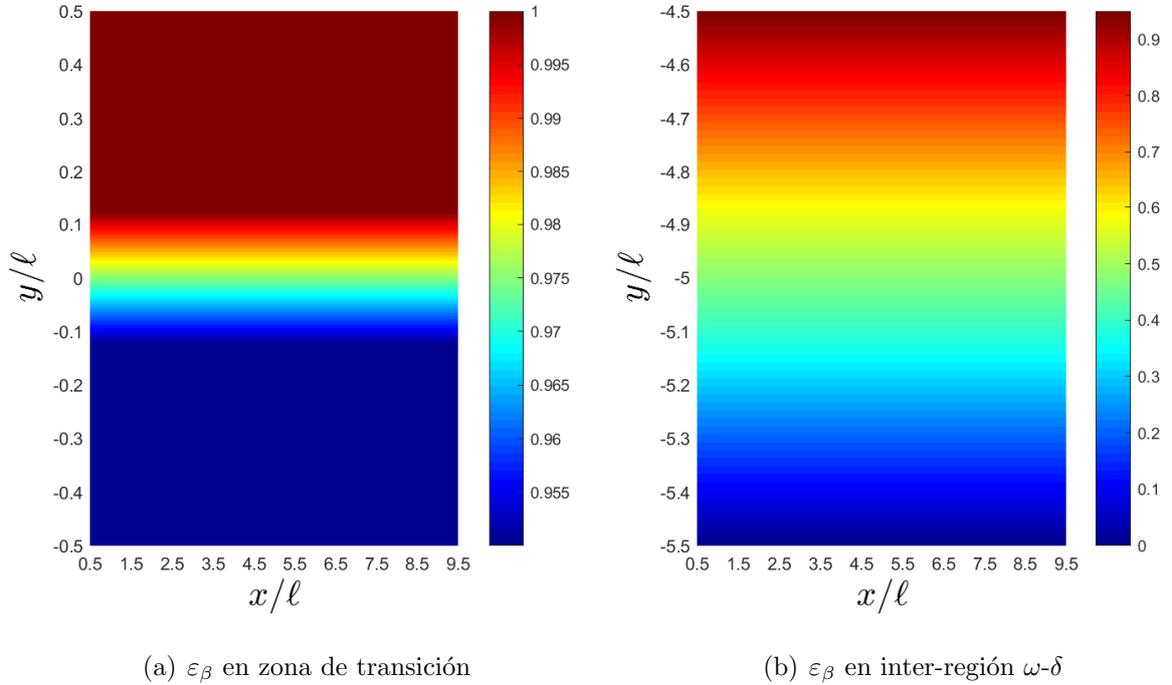


Figura 3.7: (a) Fracción volumétrica en inter-región fluido-medio poroso y (b) Fracción volumétrica en inter-región medio poroso-pared inferior.

3.2.2. Vector de resistencias f_β

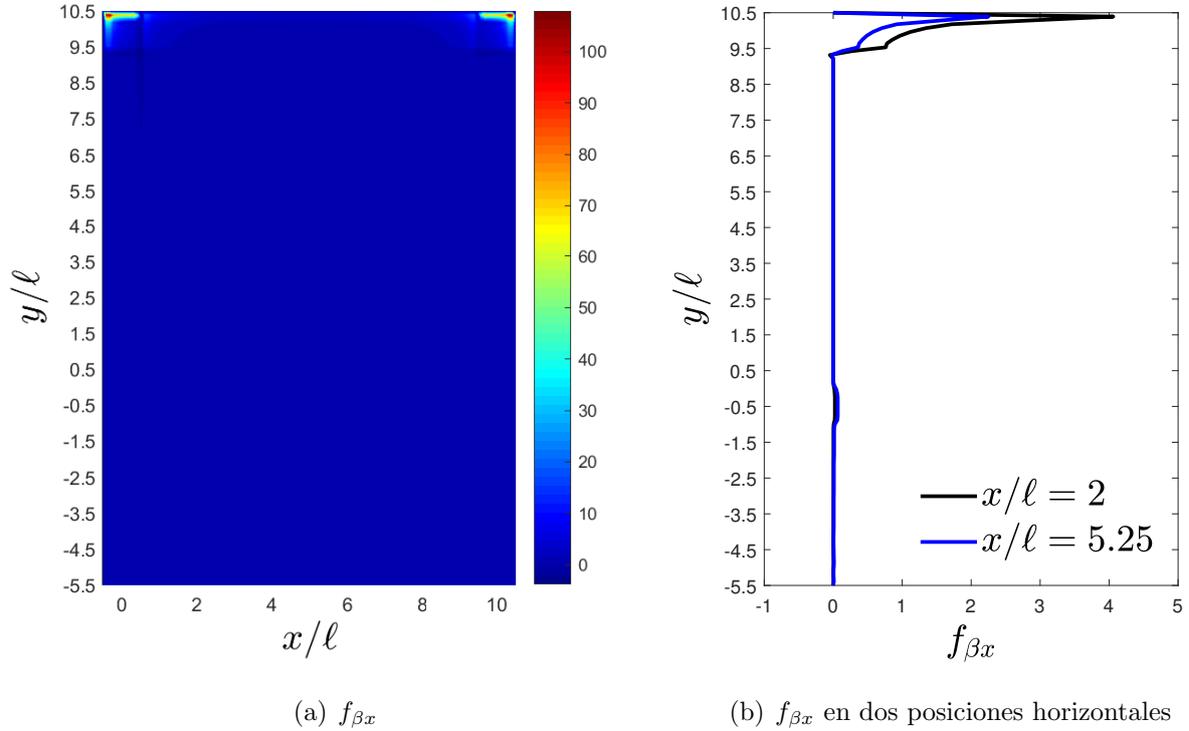


Figura 3.8: (a) Variaciones de $f_{\beta x}$ y (b) $f_{\beta x}$ en $x/\ell = 2$ y $x/\ell = 5.25$.

Las Figuras 3.8a y 3.8b muestran las variaciones bidimensionales del vector de resistencias $f_{\beta x}$ en la cavidad y dos perfiles de éste en dos cortes horizontales en la misma, respectivamente. En la Figura 3.8a se observa como existen las mayores resistencias al flujo entre las transiciones de la pared superior y las paredes laterales, por el movimiento de la pared superior. Esto se reitera con la Figura 3.8b y además exhibe que existen resistencias del fluido a fluir en la inter-región debidas a la presencia del medio poroso. De forma más específica, en los perfiles de corte tratados se notan las mayores resistencias en las inter-regiones: pared superior-región- η y pared lateral derecha-regiones- η - ω , lo anterior físicamente asociado a que el movimiento constante en la dirección x de la pared superior genera recirculación del flujo y choque de este con la pared lateral derecha, complicando así su libre movimiento en esa dirección. También, se debe señalar que en la región- η , el flujo fluye libremente por lo que $f_{\beta x}$ es cero.

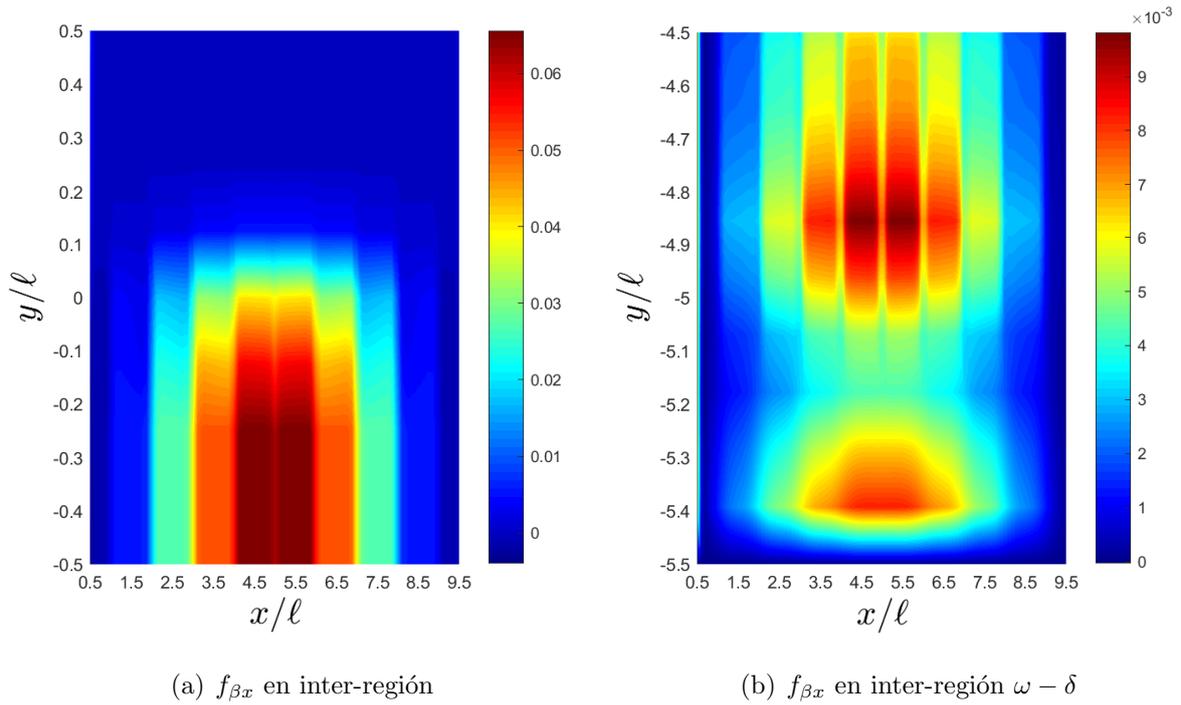


Figura 3.9: (a) Variaciones de $f_{\beta x}$ en la inter-región $\eta - \omega$ y (b) en la inter-región medio poroso-pared inferior.

Por su parte, la Figura 3.9a muestra los cambios espaciales de $f_{\beta x}$ en la inter-región fluido-medio poroso, donde se observa que las resistencias se presentan por la presencia del medio poroso y que estas aumentan a medida que crece L_ω . De forma específica, se observa que las mayores resistencias se presentan en el centro del medio poroso, debido a que la recirculación del flujo conduce a éste a chocar con las paredes laterales y a dirigirse al centro de la cavidad donde intenta 'escurrirse' a través de las primeras partículas que conforman al medio, provocándose así fuerzas de resistencias. Asimismo, la Figura 3.9b muestra las variaciones de $f_{\beta x}$ en la inter-región medio poroso-pared inferior, donde se observa el mismo comportamiento acerca de las mayores resistencias interfaciales en la zona centro de esta inter-región. Cabe destacar que en este caso las resistencias son mínimas y se deben al medio poroso y a la pared inferior.

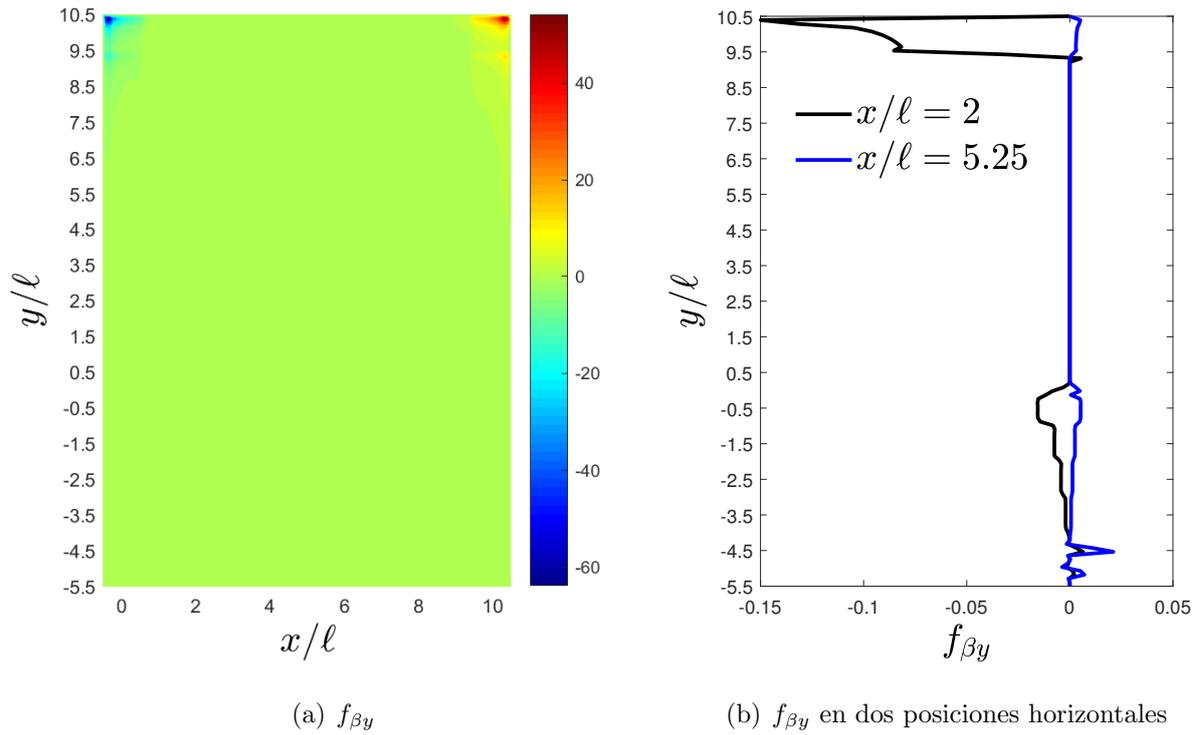
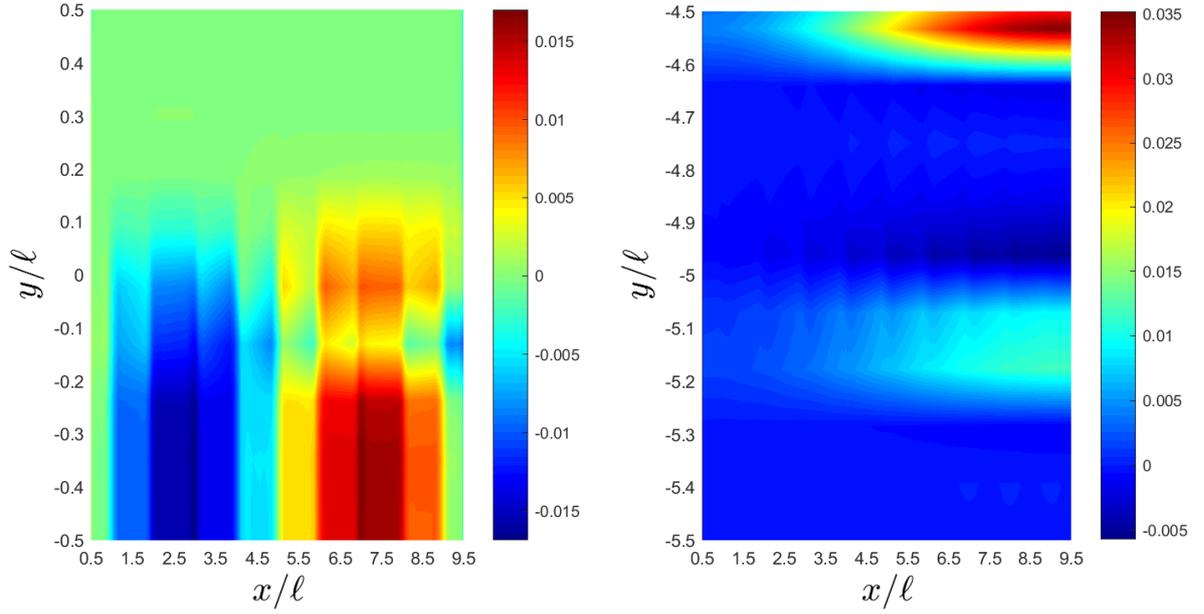


Figura 3.10: (a) Variaciones de $f_{\beta y}$ en la cavidad y (b) en $x/\ell = 2$ y $x/\ell = 5.25$.

Por su parte, las Figuras 3.10a y 3.10b muestran al vector de resistencias $f_{\beta y}$ en cada punto la cavidad y dos perfiles de corte en dos posiciones horizontales en la misma, respectivamente. La Figura 3.10a muestra que caso contrario a $f_{\beta x}$, existen resistencias 'negativas' en $x/\ell \leq 0$ las cuales están asociadas a la recirculación del fluido en dirección contraria a donde se genera el movimiento (i.e, dirección x). Por otro lado, la Figura 3.10b exhibe para que las resistencias negativas antes descritas se deben mayormente al choque del fluido con la pared lateral izquierda por la recirculación y que existen otras asociadas al ingreso del fluido al medio poroso en dirección contraria al movimiento en la zona de transición. En el caso de las resistencias positivas estas se presentan en la frontera fluido-medio poroso y en la transición medio poroso-pared inferior y se deben físicamente a el flujo que circula en dirección donde se genera el movimiento lejos de la pared lateral izquierda.



(a) $f_{\beta y}$ en inter-región fluido-medio poroso (b) $f_{\beta y}$ en inter-región medio poroso-pared inferior

Figura 3.11: (a) $f_{\beta y}$ en inter-región $\eta - \omega$ y (b) $f_{\beta y}$ en inter-región $\omega - \delta$.

Ahora, la Figura 3.11a muestra un comportamiento antisimétrico de $f_{\beta y}$ en la inter-región fluido-medio poroso, atribuido a la recirculación del flujo en la cavidad. Además, se observa que en esta zona las fuerzas interfaciales se presentan cuando el flujo se obstaculiza por la presencia de la primera fila de partículas que conforman al medio poroso y que igualmente que en el caso de $f_{\beta x}$ aumentan a medida que crece L_ω , dado que en el interior del medio poroso más cantidad de partículas retrasan el flujo del fluido. Acerca de la Figura 3.11b, muestra que en esta inter-región las mayores resistencias en la dirección y se presentan en la salida del medio poroso y disminuyen a medida que la muestra de promediado se aleja de éste. También, se notan resistencias cuando la muestra considera a la pared inferior. Es importante señalar que las resistencias por la presencia de la pared inferior y por ende de cada pared sin movimiento, son mínimas pero importantes en las GTE para capturar lo que sucede en cada pared impermeable de la cavidad.

3.2.3. Componentes no nulos del tensor de permeabilidad

En esta sección se presentan y discuten las componentes inversas $K_{\beta_{xx}}$ y $K_{\beta_{yy}}$ del tensor de permeabilidad intrínseco obtenidas por PSS y normalizadas con el valor de K_{β_ω} en el seno del medio poroso homogéneo caracterizado por una partícula dentro de una celda unitaria representativa.

- Componente $K_{\beta_\omega}/K_{\beta_{xx}}^{-1}$

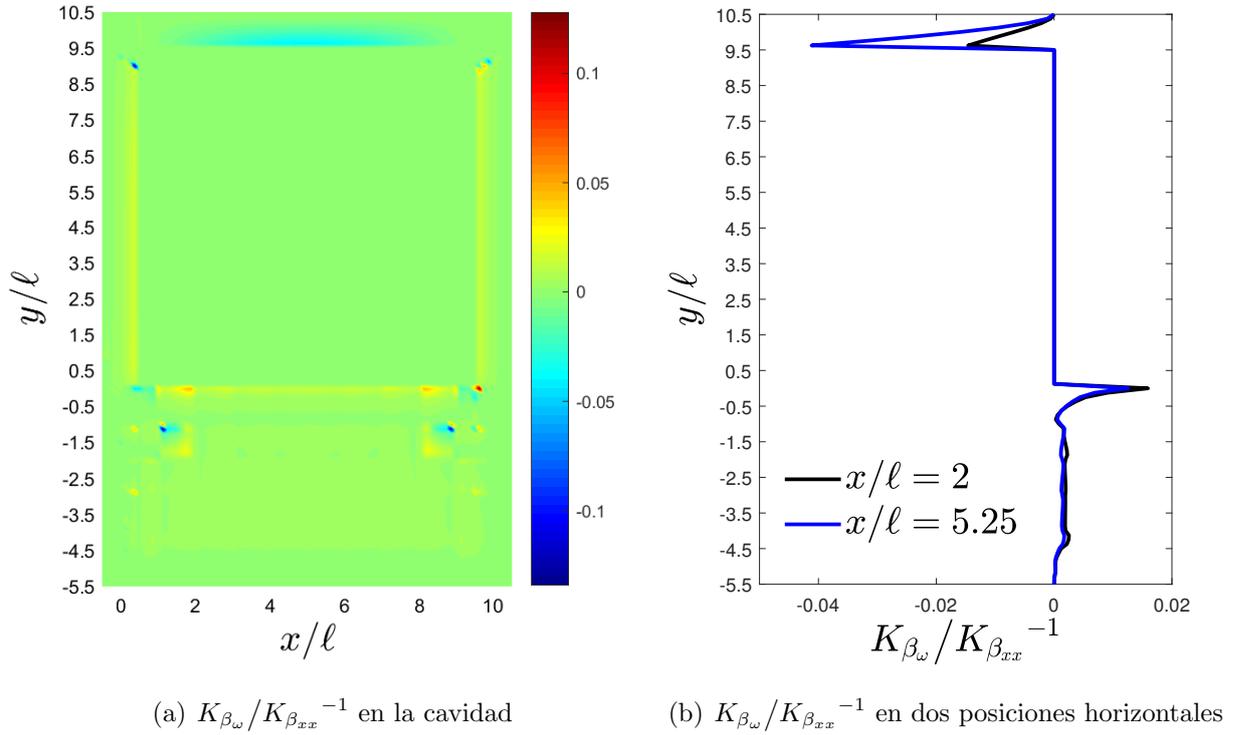


Figura 3.12: (a) Variaciones de $K_{\beta_\omega}/K_{\beta_{xx}}^{-1}$ y (b) $K_{\beta_\omega}/K_{\beta_{xx}}^{-1}$ en $x/\ell = 2$ y $x/\ell = 5.25$.

La Figura 3.12a muestra los cambios espaciales del inverso de la componente normalizado del tensor de permeabilidad $K_{\beta_{xx}}$ en cada punto de la cavidad, donde se ve que $K_{\beta_\omega}/K_{\beta_{xx}}^{-1}$ decrece a medida que la región de promediado se acerca a las paredes laterales impermeables, lo que indica que las resistencias al flujo por la presencia de las paredes son significativas. También, se observa que existen valores negativos del inverso de dicha componente normalizada de la permeabilidad, lo anterior a causa de que existen resistencias al flujo del fluido en el sistema contrarias a la dirección en la que se genera el movimiento (i.e., $-\mathbf{i}$). Por su parte, en la Figura 3.12b se presentan dos perfiles de cortes del inverso de la componente $K_{\beta_{xx}}$ en dos posiciones horizontales, donde

se ve que mencionado coeficiente de transporte para $x/\ell = 2$ y $x/\ell = 5.25$ presenta los mayores valores en la inter-región fluido-medio poroso entre la longitud $-r_0 \leq y/\ell \leq r_0$ dado que gran cantidad de flujo es impulsado hacia esa zona fluyendo con facilidad en la dirección \mathbf{x} y que estos decrecen a medida que el flujo ingresa al medio poroso por la presencia de las partículas que lo conforman. También, es importante señalar que se cumple en la zona del fluido libre que el valor de esta componente es 0 y que no se cuenta con un valor constante de la permeabilidad del medio poroso, dado que, los efectos de la pared en movimiento aún le afectan al flujo en el interior del mismo.

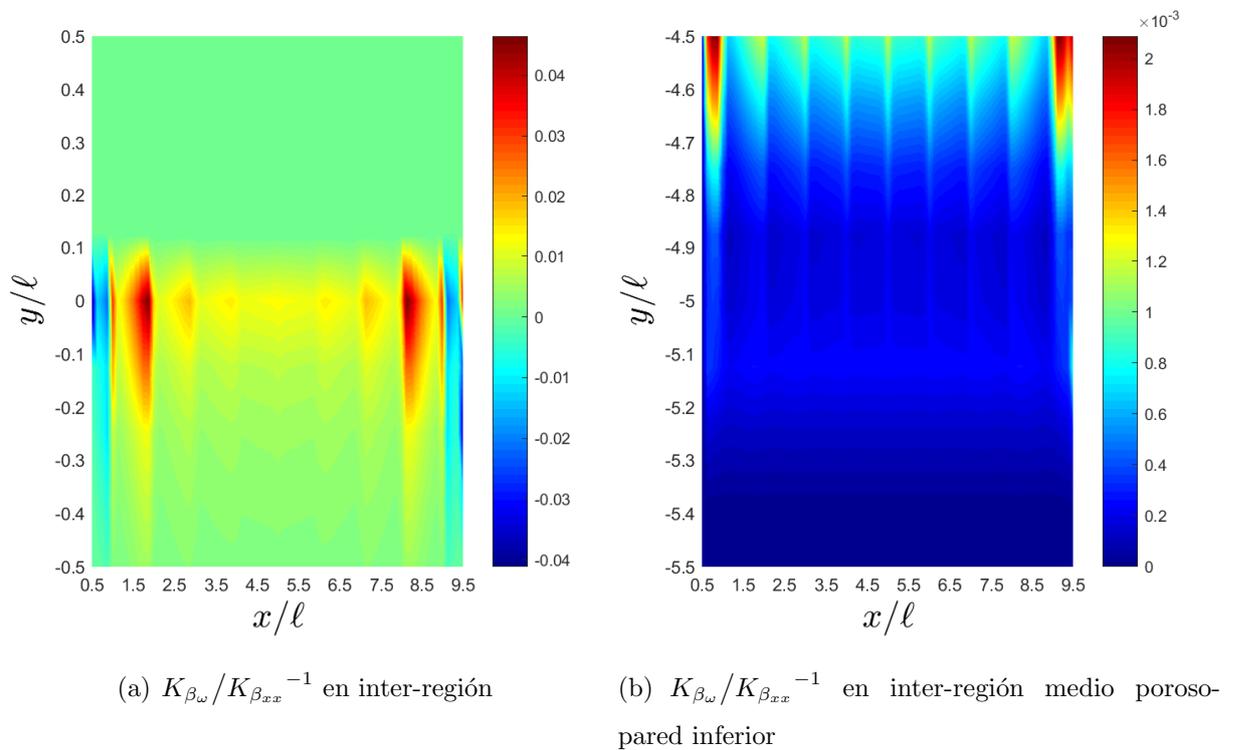
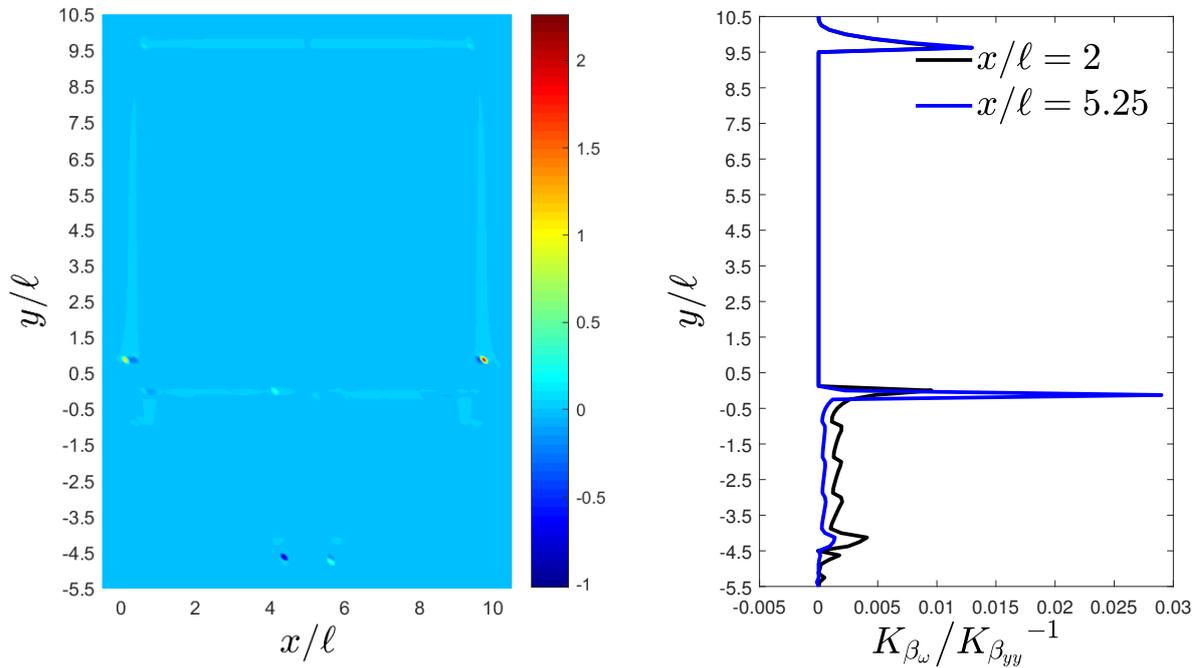


Figura 3.13: (a) Variaciones de $K_{\beta_\omega}/K_{\beta_{xx}}^{-1}$ en inter-región $\eta - \omega$ y (b) en inter-región $\omega - \delta$.

Las Figuras 3.13a y Figura 3.13b muestran las transiciones de los valores de la componente inversa normalizada del tensor de permeabilidad en las zonas de transición fluido-medio poroso y medio poroso-pared inferior. En la primera inter-región se observa que existen cambios de valores de ésta componente de 0 en la región del fluido libre a valores de 0.04 en y -0.04 en la inter-región. De forma más específica, se notan los valores más altos de $K_{\beta_\omega}/K_{\beta_{xx}}^{-1}$ en el centro de la cavidad ($y/\ell = 0$) lejos de las paredes y los más pequeños por la vecindad de las paredes laterales, esto debido a que

tal como se muestra en Figura 3.4 el flujo fluye más fácilmente a través de la zona centro de la inter-región y con más dificultad cerca las paredes. Además, se ve que cerca del ingreso al medio poroso en $y/\ell = -r_0$ los valores de éste componente son sumamente pequeños porque hay dificultades del flujo a fluir por la presencia de las partículas que conforman al medio. Es importante señalar que la Figura 3.13a da una clara idea de que $K_{\beta\omega}/K_{\beta_{xx}}^{-1}$ no puede ser tratado como una función lineal en esta zona y que en consecuencia su correcto cálculo es relevante. En lo que refiere a la segunda inter-región se observa un decrecimiento de los valores de ésta componente a medida que L_ω crece, esto significa que las mayores resistencias se asocian a la presencia de la pared dado que cuando la región de promediado ingresa a la vecindad de ésta, la región contiene cada vez más pared.

- Componente $K_{\beta\omega}/K_{\beta_{yy}}^{-1}$



(a) $K_{\beta\omega}/K_{\beta_{yy}}^{-1}$ en la cavidad

(b) $K_{\beta\omega}/K_{\beta_{yy}}^{-1}$ en dos posiciones horizontales

Figura 3.14: (a) Variaciones de $K_{\beta\omega}/K_{\beta_{yy}}^{-1}$ y (b) $K_{\beta\omega}/K_{\beta_{yy}}^{-1}$ en $x/\ell = 2$ y $x/\ell = 5.25$.

Ahora, las Figuras 3.14a y 3.14b muestran el inverso de la componente normalizada $K_{\beta_{yy}}$ en cada punto de la cavidad y en dos perfiles de corte en dos posiciones horizontales, respectivamente. En la primera Figura se ve como los valores del inverso de ésta componente normalizada superan a los de $K_{\beta_{\omega}}/K_{\beta_{xx}}^{-1}$ en las cercanías de las paredes laterales, esto debido a que en la dirección y en esa zona los efectos gravitatorios son más significativos permitiendo al fluido 'escurrirse' con facilidad. Y, en la Figura 3.14b se muestra al inverso del mismo componente normalizado en las posiciones $x/\ell = 2$ y $x/\ell = 5.25$ (mitad de la cavidad), donde se observa con mayor detalle lo antes descrito, los mayores valores se encuentran antes del ingreso al medio poroso por las paredes laterales exactamente en la inter-region fluido-medio poroso y en la transición de la pared superior a la zona del fluido libre. Específicamente, para $x/\ell = 2$ se nota como existen mayores resistencias al flujo en la zona de transición fluido-medio poroso que en las cercanías de la pared en movimiento mientras que para $x/\ell = 5.25$ las mayores resistencias están situadas en la pared superior de la cavidad, lo anterior debido a que el flujo choca con las paredes laterales tendiendo a fluir en el centro de la cavidad permitiendo fluir con facilidad a través del medio poroso que en posiciones alejadas a este centro. Además, se observa para los dos perfiles de corte que el flujo fluye con dificultad a través del medio poroso y lo hace con mayor facilidad a medida que sale de éste en la transición medio poroso-pared inferior. Es importante señalar aquí que en la inter-región $K_{\beta_{\omega}}/K_{\beta_{yy}}^{-1}$ no se visualiza una tendencia lineal, ésto se discute en la siguiente Figura.

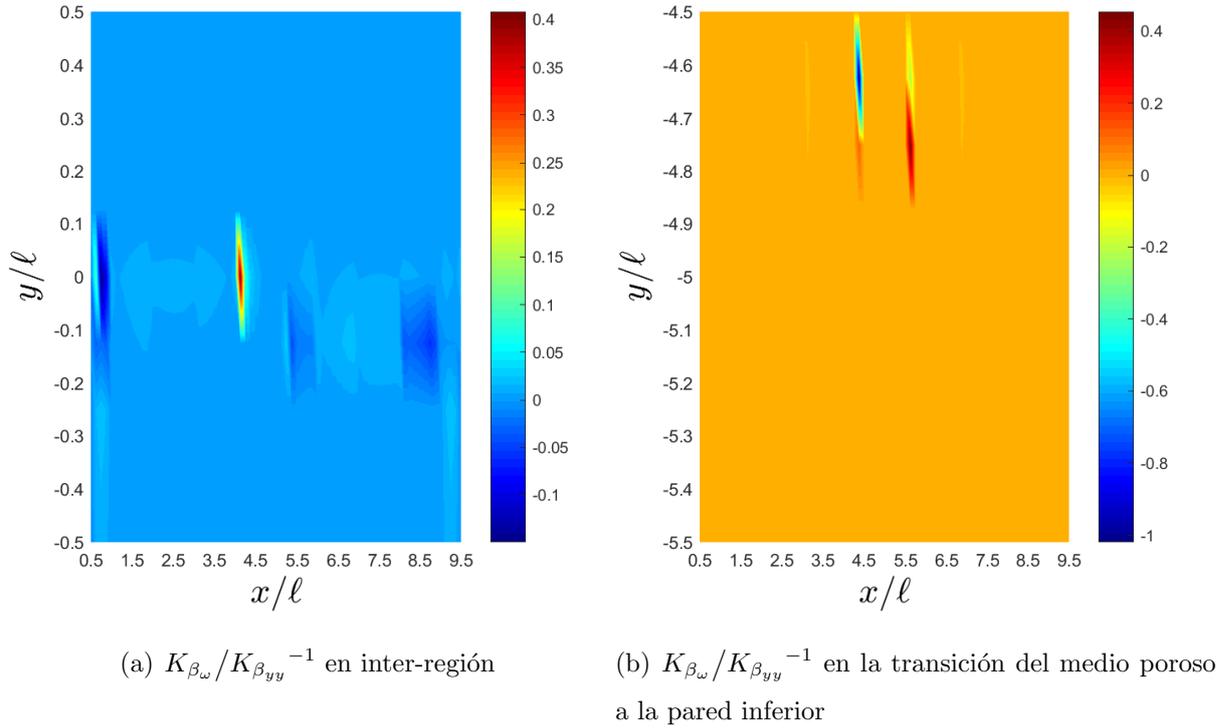


Figura 3.15: (a) Variaciones de $K_{\beta\omega}/K_{\beta yy}^{-1}$ en la transición fluido-medio poroso y (b) en la transición del medio poroso a la pared inferior.

Luego, las Figuras 3.15a y 3.15b muestran al componente $K_{\beta yy}$ inverso normalizado de la permeabilidad en la inter-regiones fluido-medio poroso y medio poroso-pared inferior, respectivamente. En la Figura 3.15a inicialmente se observa un comportamiento atípico a las tendencias lineales propuestas en otros trabajos (Luminari *et al.*, 2019). También, se ve que los valores más altos de éste componente inverso se encuentran en la parte central de la inter-región y que los valores más pequeños en la vecindad de la zona del medio poroso. Lo anterior, debido a que el fluido fluye con mayor facilidad por el centro dado que las paredes laterales lo impulsan por esa dirección. En cuanto a los valores negativos, se puede decir que solo demuestran la resistencia al flujo del fluido en la dirección contraria a donde se genera el movimiento y que coinciden con los valores de las fuerzas de resistencias negativas anteriormente discutidas. Por su parte, la Figura 3.15b exhibe que en la parte central de esta zona de transición es donde el flujo viaja con mayor facilidad debido a lo antes descrito y que caso contrario con mayor dificultad a medida que la muestra de promediado incluye más pared inferior y que ésta llega a valores de ceros cuando la muestra esta completamente dentro de

dicha pared.

3.3. GTE con vector \mathbf{f}_β

En esta sección se muestran los resultados del modelado del transporte de movimiento y masa total a partir de modelos de enfoque de un dominio dependientes del vector \mathbf{f}_β . Se presentan las componentes bidireccionales de la velocidad y la presión promedio intrínseca, además de su comparación con el promediado de los resultados a la escala local.

3.3.1. Campo de velocidad bidimensional

- Componente horizontal de la velocidad

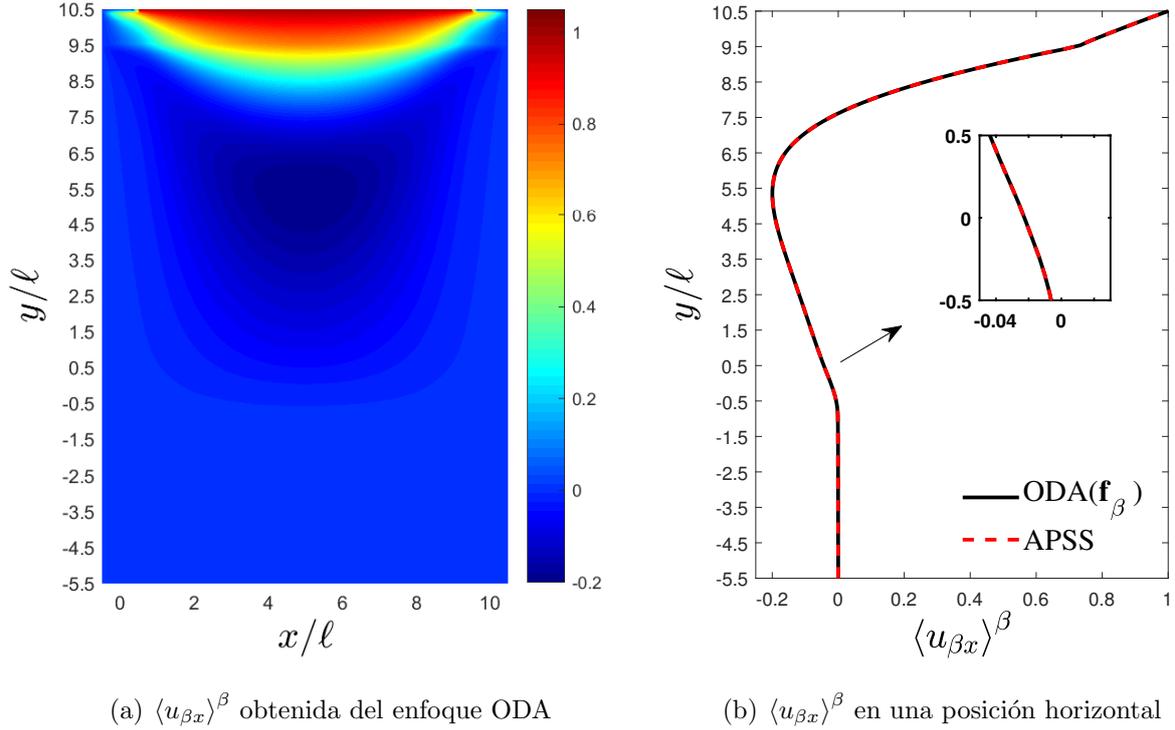


Figura 3.16: (a) $\langle u_{\beta x} \rangle^\beta$ en la cavidad y (b) Perfiles de corte de $\langle u_{\beta x} \rangle^\beta$ en $\frac{x}{\ell} = 5.25$.

La Figura 3.16a muestra el perfil bidimensional de $\langle u_{\beta x} \rangle^\beta$ en la cavidad, obtenido por la resolución de los modelos promedio bidireccionales dependientes del vector de resistencias \mathbf{f}_β (Ecs.(2.47)-(2.53)), donde se observa que el perfil de velocidad promedio

no distingue la microestructura del medio poroso, lo cual es una característica de las cantidades promedio. Además, se nota que los modelos ODA logran captar el patrón de flujo en esa dirección en la cavidad, el cual incluye la máxima velocidad en la pared superior y su decrecimiento hacia el interior del medio poroso. Por lo que refiere a la Figura 3.16b, ésta exhibe la comparación de un perfil de corte de $\langle u_{\beta x} \rangle^\beta$ en $\frac{x}{\ell} = 5.25$ (mitad de la cavidad) obtenido por la resolución de los modelos ODA y por el promedio espacial de los resultados de la PSS (i.e., APSS, *Average pore scale simulation*), que muestra diferencias mínimas despreciables en todas las zonas de la cavidad incluyendo la zona de interés denominada inter-región fluido-medio poroso y un $\bar{E}_p = 5 \times 10^{-2}$ (Ver Apéndice C) insignificante, lo anterior y en particular el acercamiento en la zona de la inter-región hace notar que ésta metodología discutida es viable.

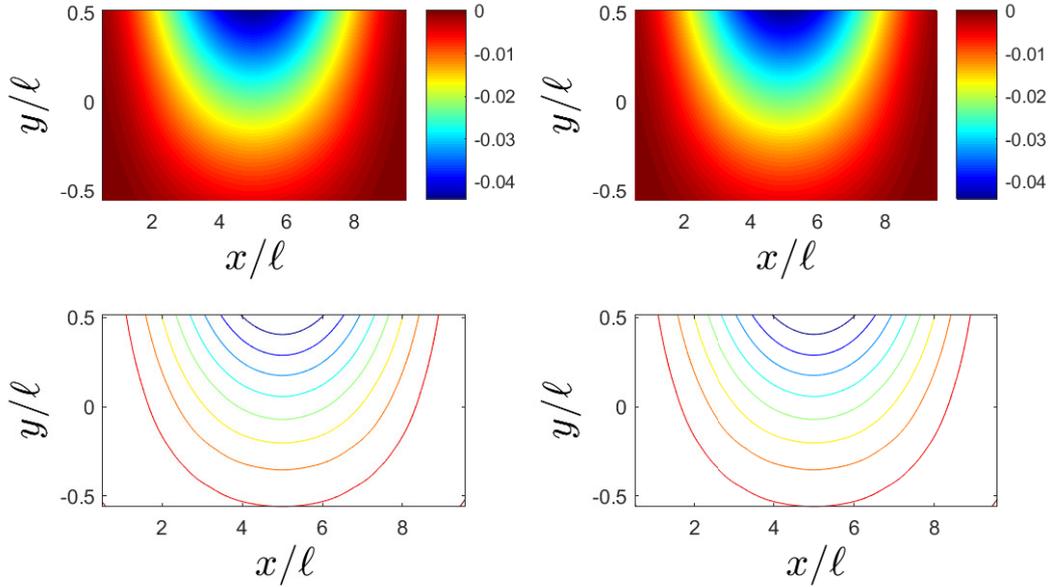


Figura 3.17: $\langle u_{\beta x} \rangle^\beta$ en inter-región fluido-medio poroso. Derecha: Enfoque ODA. Izquierda: APSS.

Ahora las Figuras 3.17 y 3.18 muestran a $\langle u_{\beta x} \rangle^\beta$ en la inter-región fluido-medio poroso de tamaño $-r_0 \leq y \leq r$ y $r_0 \leq x \leq L_a - r_0$ y dentro del medio poroso de tamaño $-L_\omega + r_0 \leq y/\ell \leq -r_0$ y $r_0 \leq x/\ell \leq L_a - r_0$, obtenida por solución de los modelos ODA con \mathbf{f}_β y su comparación con los resultados del APSS, respectivamente. De manera general se observa buena concordancia de ambos enfoques en las zonas mostradas en cuestión de patrones del flujo del fluido y magnitudes de la velocidad. De

forma específica, en la Figura 3.17 se observa que el enfoque ODA aquí tratado predice aceptablemente las variaciones rápidas de la velocidad en esa zona y que además capta el patrón de flujo del cambio de la velocidad en la zona del fluido libre a la del medio poroso. Asimismo, la Figura 3.18 exhibe que dicho enfoque logra describir la formación de vórtices en el ingreso al medio poroso causados por las obstaculizaciones al flujo dado el choque de éste con las paredes laterales y las partículas rígidas cercanas.

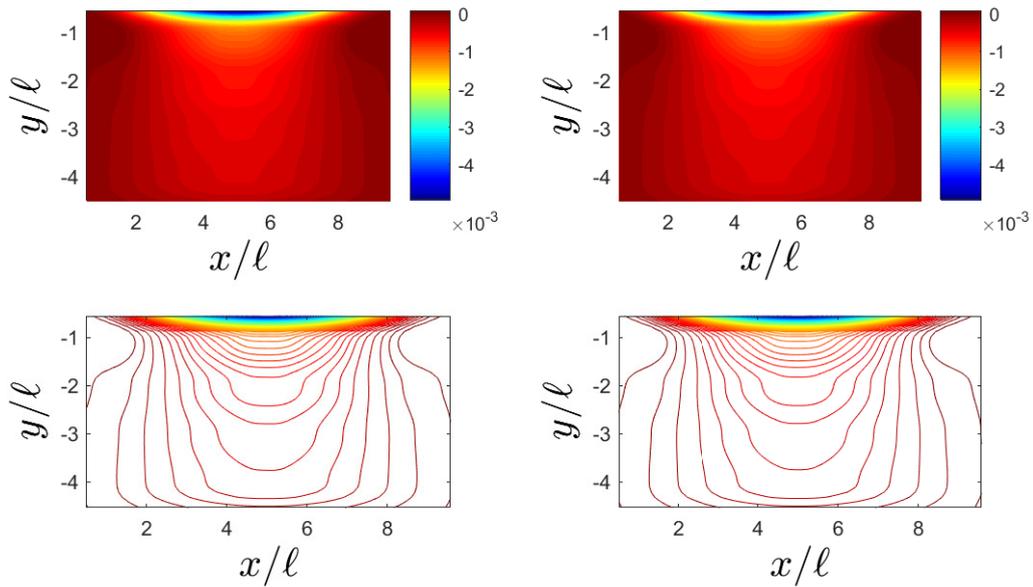


Figura 3.18: $\langle u_{\beta x} \rangle^\beta$ dentro del medio poroso. Derecha: Enfoque ODA. Izquierda: APSS.

Por otra parte, la Figura 3.19 muestra la componente horizontal de la velocidad en la inter-región medio poroso-pared inferior, donde similar a lo antes descrito se muestran diferencias no significativas entre el enfoque ODA descrito y el APSS. Se nota como estos modelos ODA describen el decrecimiento de la componente x de la velocidad en la transición de la región representativa de promediado \mathcal{V} de la zona final del medio poroso a la pared inferior.

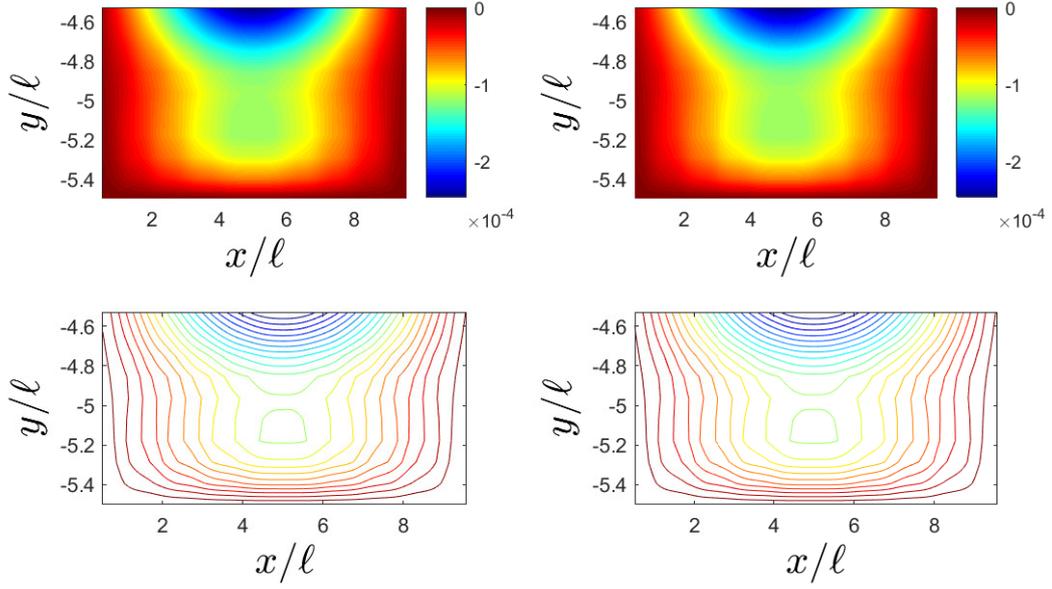


Figura 3.19: $\langle u_{\beta x} \rangle^\beta$ en inter-región medio poroso-pared inferior. Derecha: Enfoque ODA. Izquierda: APSS.

- Componente vertical de la velocidad

En la Figura 3.20a se muestra la componente vertical de la velocidad adimensional promedio intrínseco en el sistema simbolizada como $\langle u_{\beta y} \rangle^\beta$ y obtenida por el enfoque ODA. Se observa un perfil antisimétrico en la cavidad ocasionado por la recirculación del fluido en la misma y velocidades diminutas en el interior del medio poroso. Por su parte, la Figura 3.20b muestra un perfil de corte horizontal de $\langle u_{\beta y} \rangle^\beta$ para $x/\ell = 4.5$ obtenido por modelos ODA y el cual corresponde a lo reportado por Luminari et al., (2019) en su trabajo de estudio de flujo bidireccional por modelos a escala local y promedio. Además, se muestra su comparación con aquel calculado por APSS, donde se observa buena concordancia entre dichos perfiles, inclusive en la zona de cambios rápidos entre las zonas homogéneas: la inter-región fluido-medio, en este caso se tiene un valor de $\bar{E}_p = 1\%$ que reitera la viabilidad del enfoque propuesto de modelos promedio dependientes de \mathbf{f}_β para el flujo bidireccional de un fluido en un medio poroso homogéneo.

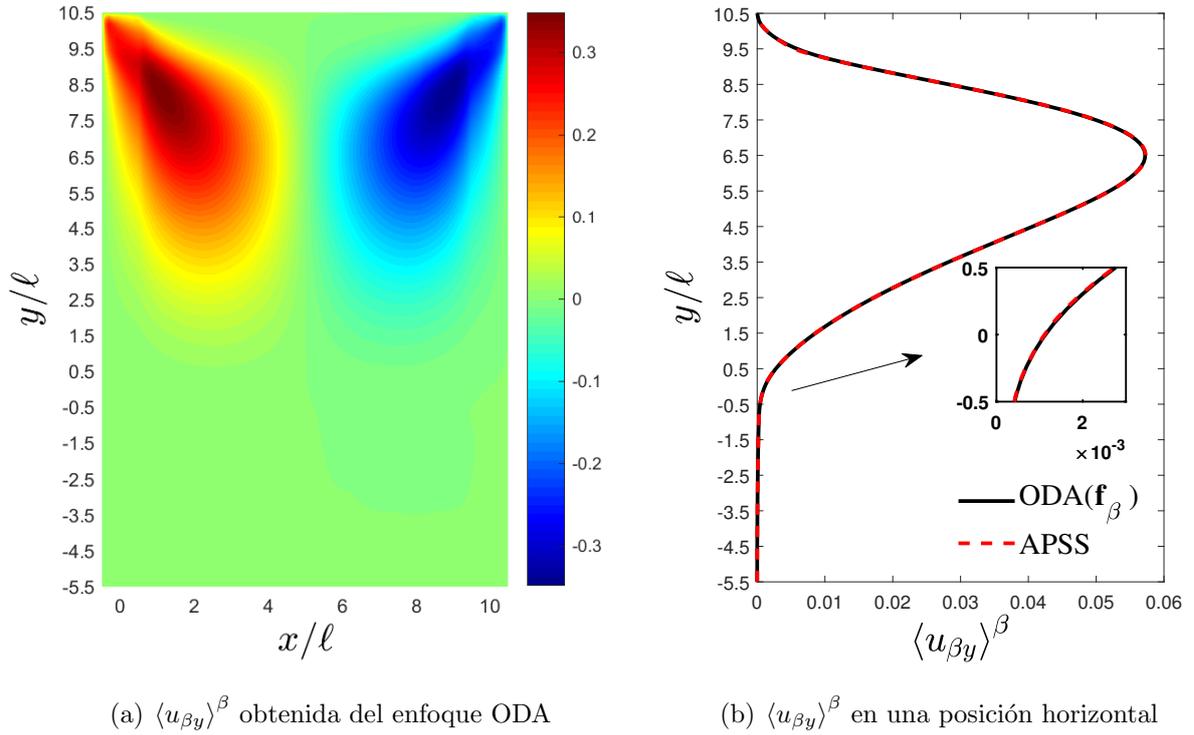


Figura 3.20: (a) $\langle u_{\beta y} \rangle^\beta$ en la cavidad y (b) Perfil de corte de $\langle u_{\beta y} \rangle^\beta$ en $x/\ell = 4.5$.

Ahora la Figura 3.21a muestra la comparación de los perfiles de velocidad bidimensionales en la inter-región fluido-medio poroso obtenidos mediante enfoques ODA y por APSS. En general, se notan buenas correspondencias del enfoque ODA con la solución exacta del problema de la cavidad y específicamente se observa que este enfoque ODA dependiente de \mathbf{f}_β reproduce satisfactoriamente el perfil antisimétrico de velocidad en esta zona y que además representa acertadamente en cuestión de magnitudes positivas y negativas el viaje de la velocidad de la región del fluido libre al interior del medio poroso homogéneo. De aquí se debe señalar que no existen sobre estimaciones de las magnitudes de la velocidad en esta zona, tal como en otras metodologías propuestas se ha obtenido (Luminari et al., (2019)).

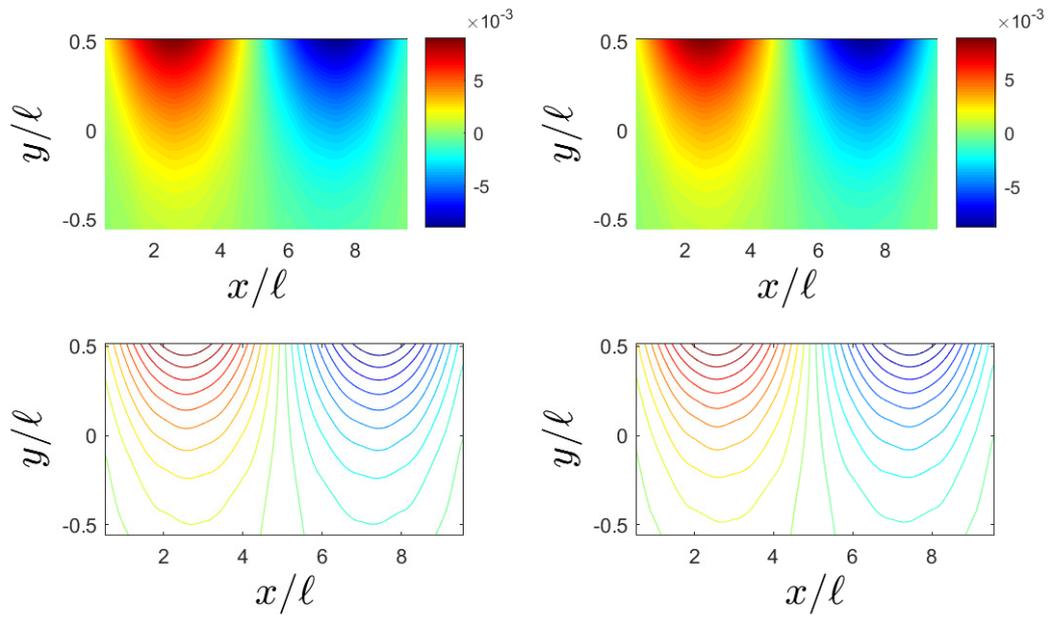


Figura 3.21: $\langle u_{\beta y} \rangle^\beta$ en inter-región fluido-medio poroso. Derecha: Enfoque ODA. Izquierda: APSS.

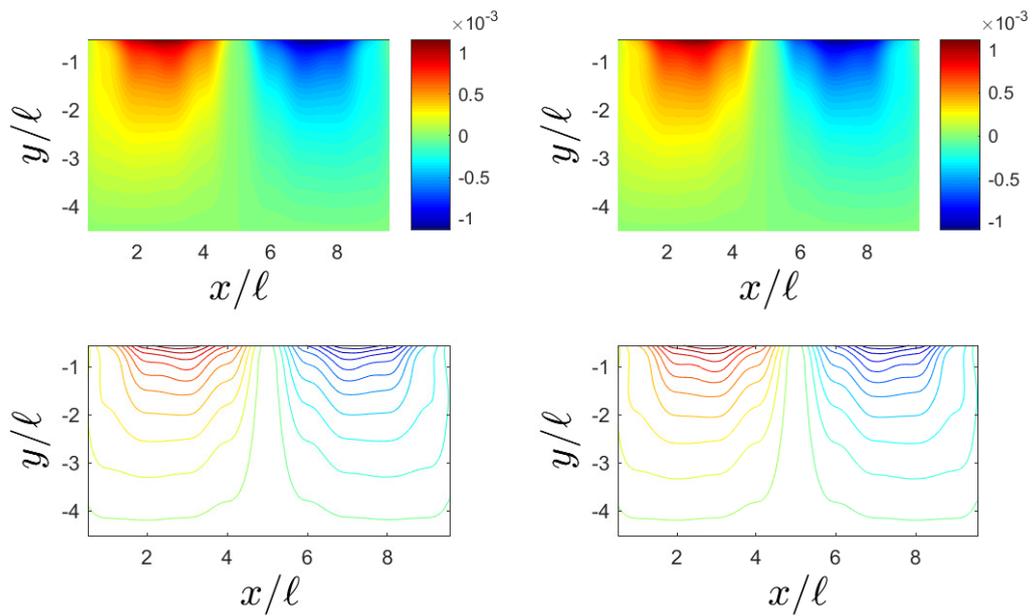


Figura 3.22: $\langle u_{\beta y} \rangle^\beta$ en el interior del medio poroso homogéneo (Región homogénea ω). Derecha: Enfoque ODA. Izquierda: APSS.

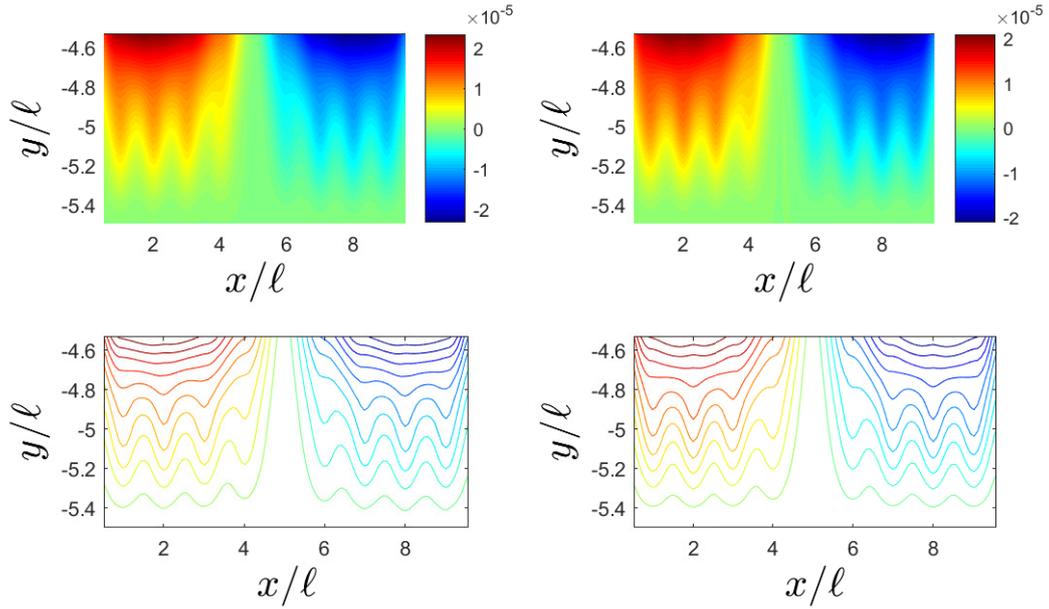


Figura 3.23: $\langle u_{\beta y} \rangle^\beta$ en inter-región medio poroso-pared inferior. Derecha: Enfoque ODA. Izquierda: APSS.

Adicionalmente, la Figura 3.22 muestra a $\langle u_{\beta y} \rangle^\beta$ dentro del medio poroso. Asimismo que la Figura 3.21 se notan correspondientes casi exactas entre los enfoques presentados. De aquí, se debe resaltar que el enfoque ODA que considera al vector de resistencias \mathbf{f}_β logra representar adecuadamente el decrecimiento de la velocidad al ingresar al medio poroso y que tal como lo muestran los mapas de contorno describe adecuadamente la recirculación que se da en el ingreso al mismo. En tanto a magnitudes de la componente de la velocidad aquí descrita, éstas concuerdan para ambas metodologías presentadas. Por su parte, la Figura 3.23 exhibe las variaciones de $\langle u_{\beta y} \rangle^\beta$ en la inter-región medio poroso-pared inferior, donde se observa que el enfoque ODA describe sin problema el decrecimiento de velocidades en el medio poroso a velocidades nulas en la pared inferior de la cavidad que es cuando la región de promediado \mathcal{V} esta completamente dentro de la pared. Además, como se ve en los mapas de contorno de la Figura 3.23 la distribución del flujo en esta zona concuerda con errores casi nulos para los dos enfoques.

3.3.2. Campo de presión bidimensional

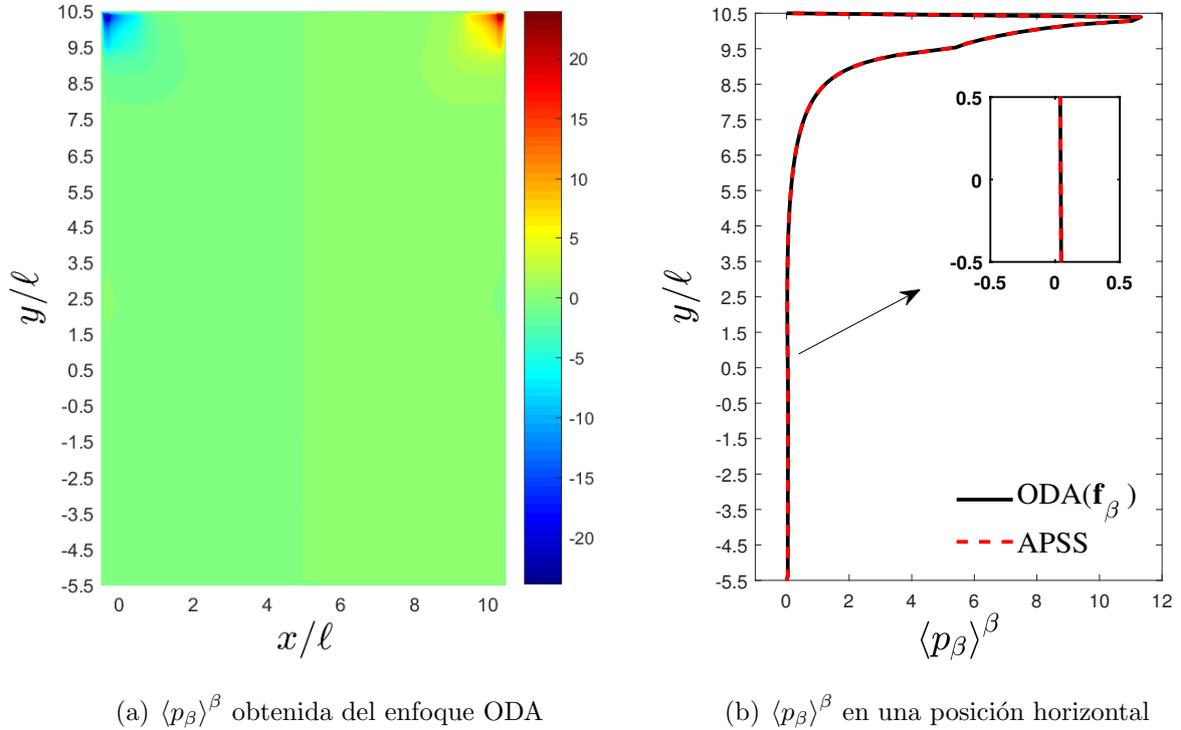


Figura 3.24: (a) $\langle p_\beta \rangle^\beta$ en la cavidad y (b) Perfil de corte de $\langle p_\beta \rangle^\beta$ en $x/\ell = 10$.

Ahora, la Figura 3.24a muestra el campo bidimensional de la presión promedio intrínseco obtenida a partir de la propuesta de estudio por las GTE (Ecs. (2.17-2.19)) del flujo en la cavidad, donde se observa que la presión es forzada por el movimiento de la pared superior y que la propuesta de modelado capta dicho comportamiento. En relación con la Figura 3.24b, ésta muestra una comparación del comportamiento de un perfil de corte de $\langle p_\beta \rangle^\beta$ en $x/\ell = 10$ y que es capturado de forma casi exacta (i.e., $\bar{E}_p \simeq 1 \times 10^{-8}$) por el enfoque propuesto en todas las zonas de la cavidad incluyendo la zona de rápidos cambios (Ver acercamiento en Figura 3.24b) y que además no se sobrestima en ninguna región como en otras metodologías de enfoque de ecuaciones promedio reportadas en la literatura.

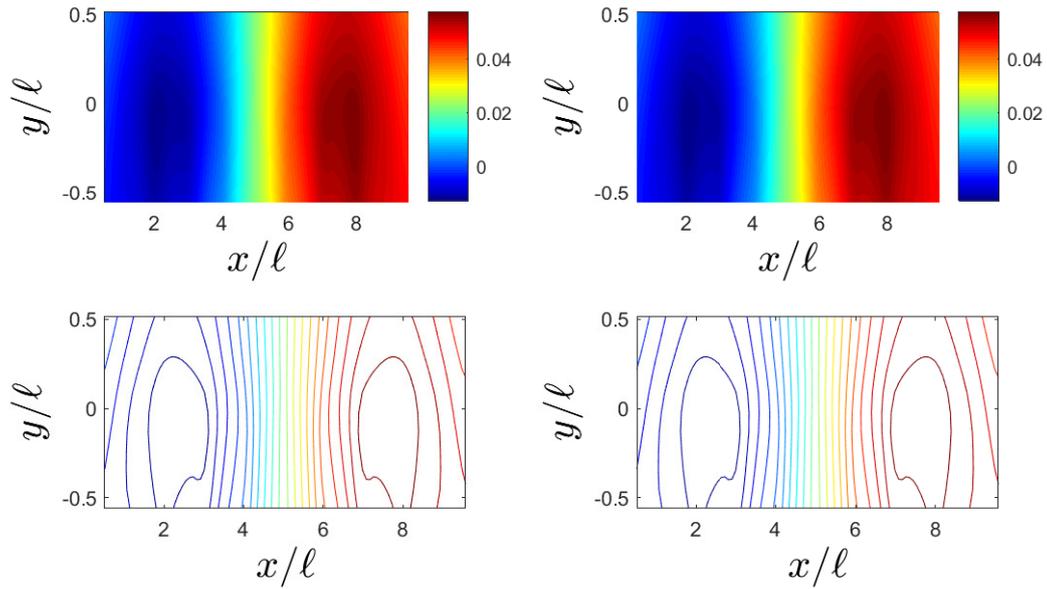


Figura 3.25: $\langle p_\beta \rangle^\beta$ en inter-región. Derecha: Enfoque ODA. Izquierda: APSS.

En tanto a la Figura 3.25, muestra el comportamiento de la presión adimensional promedio intrínseco en la inter-región fluido medio poroso descrito por modelos ODA que consideran a \mathbf{f}_β y por el promedio de la PSS, donde se ven presiones mínimas dado que no actúa ninguna fuerza en dicha zona y donde también se notan excelentes correspondencias entre ambos enfoques para la descripción del evidente decrecimiento de la presión en la región de fluido libre a la de la inter-región, lo anterior reitera las buenas capacidades predictivas de las GTE que toman en cuenta a \mathbf{f}_β . Finalmente, las Figuras 3.26 y 3.27 exhiben las variaciones de $\langle p_\beta \rangle^\beta$ dentro del medio poroso y en la transición del mismo con la pared impermeable inferior de la cavidad, respectivamente. En la Figura 3.26 se observan presiones tanto negativas como positivas dada las fuerzas del fluido a fluir en sentido contrario a donde se genera el movimiento, también se notan valores pequeños de la presión debido a que lejos de la pared en movimiento las fuerzas que actúan allí ya no tienen efecto. Por su parte, en la Figura 3.27 se observan las menores presiones puesto aquí se tienen efectos casi nulos de la pared sobre el flujo del fluido. Con referencia a los enfoques ODA y el promediado de la PSS presentados, las figuras antes discutidas muestran muy buenos acuerdos entre éstos, reiterando que el enfoque ODA dependiente de un vector de resistencias es confiable.

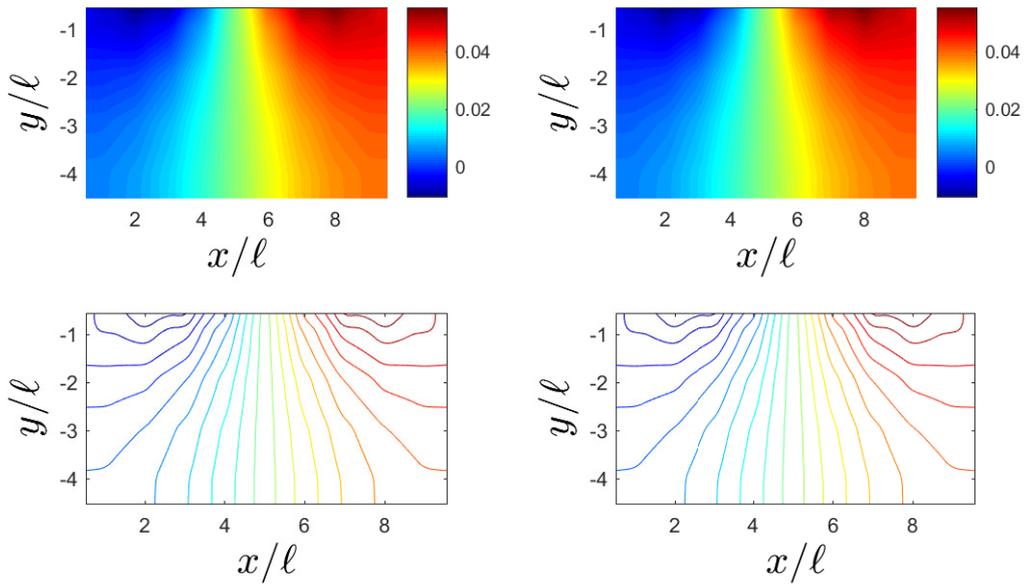


Figura 3.26: $\langle u_{\beta y} \rangle^\beta$ dentro del medio poroso homogéneo. Derecha: Enfoque ODA. Izquierda: APSS.

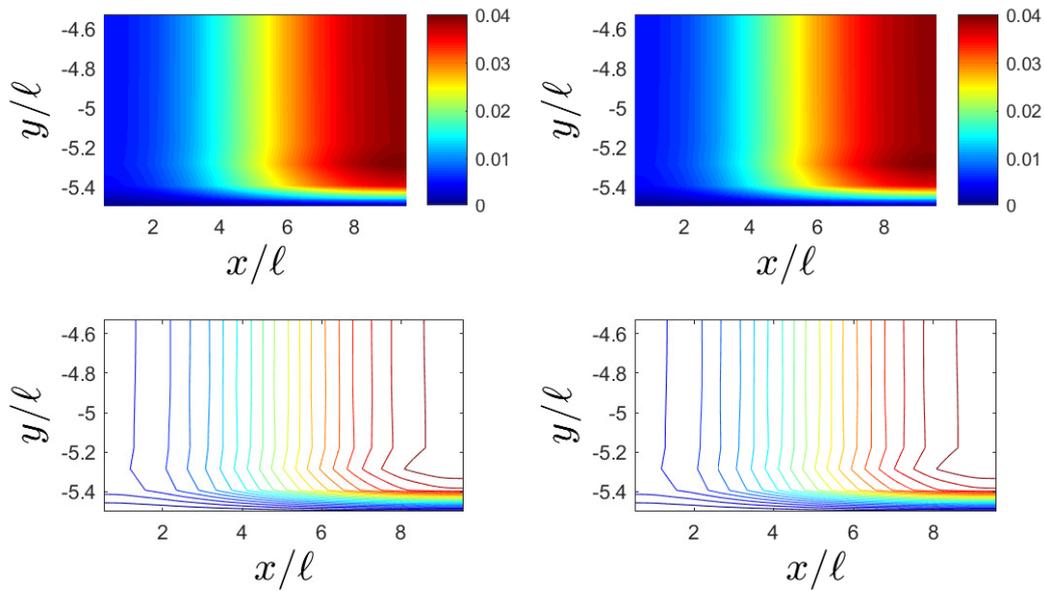


Figura 3.27: $\langle p_\beta \rangle^\beta$ en inter-región medio poroso-pared inferior. Derecha: Enfoque ODA. Izquierda: APSS.

3.4. GTE con término de Darcy

En esta sección se presentan los resultados de los campos de velocidad y presión promedio intrínseco obtenidos reescribiendo al vector de resistencias \mathbf{f}_β como un término de Darcy dependiente de las componentes no nulas del tensor de permeabilidad intrínseco, obtenidas por PSS. Entonces, se muestran las dos componentes promedio intrínseco de interés de la velocidad y la presión y su comparación con el APSS en el interior del medio poroso, en la inter-región fluido-medio poroso y en la transición entre el medio poroso y la pared inferior de la cavidad.

3.4.1. Campo de velocidad bidimensional

- Componente horizontal de la velocidad

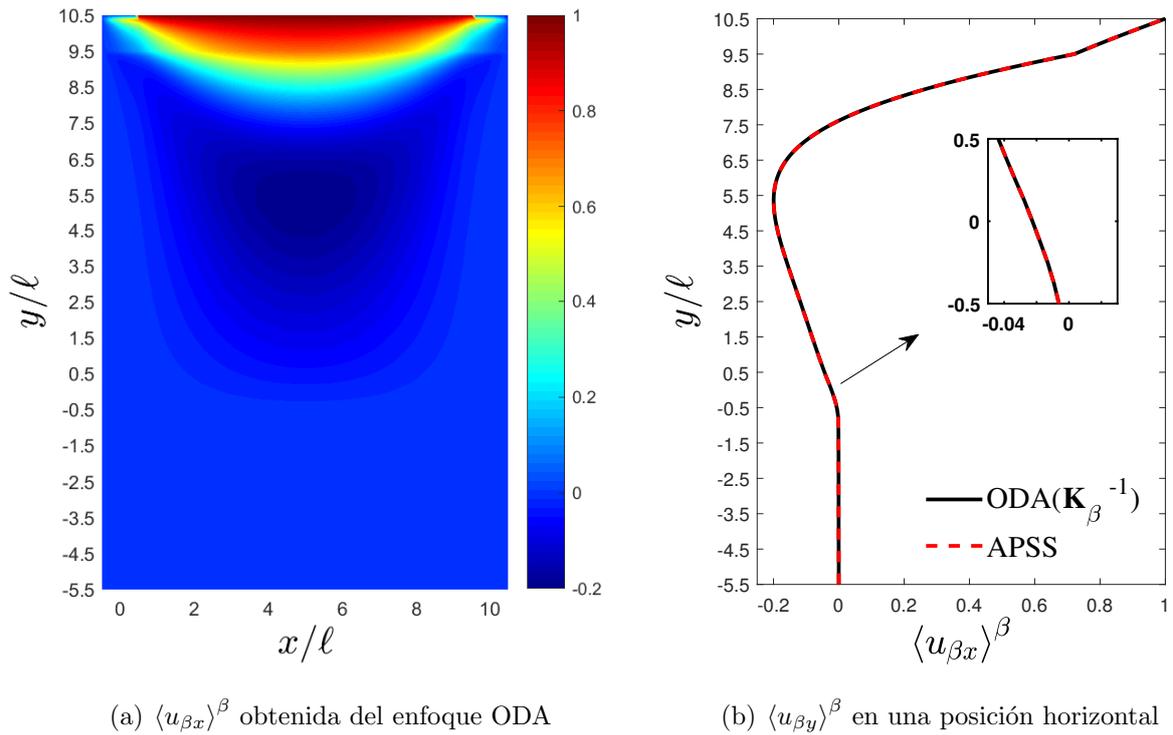


Figura 3.28: (a) $\langle u_{\beta x} \rangle^\beta$ en la cavidad y (b) en un perfil de corte en $x/\ell = 5.25$.

Las Figuras 3.28a y 3.28b muestran al campo bidimensional de la componente horizontal de la velocidad promedio intrínseco en la cavidad y un perfil de corte horizontal en la mitad de la misma, obtenidos por las GTE que consideran las componentes no

nulas del tensor \mathbf{K}_β^{-1} , respectivamente. De forma específica, en la Figura 3.28a se nota un campo similar a la Figura 3.16, se reproduce la velocidad constante de la pared superior y su decrecimiento a través de las regiones de fluido libre y medio poroso, además se notan las transiciones entre las paredes laterales e inferior, ya que a medida que se acerca la muestra de promediado a éstas, la velocidad decrece hasta valores de cero. Por su parte, en la Figura 3.28b se observan buenas correspondencias de los resultados de las GTE aquí discutidas con el promedio de la PSS, en cualquier punto de la cavidad, especialmente se ve en el acercamiento de la figura un excelente acuerdo en la zona de rápidos cambios de la velocidad delimitada entre $-r_0 \leq y \leq r_0$. Para este caso, se tiene un valor de $\bar{E}_p = 1.7 \times 10^{-4}$ que es menor al de las GTE que consideran al vector de resistencias, con lo anterior se puede concluir que las dos metodologías de GTE presentadas son viables con errores despreciables.

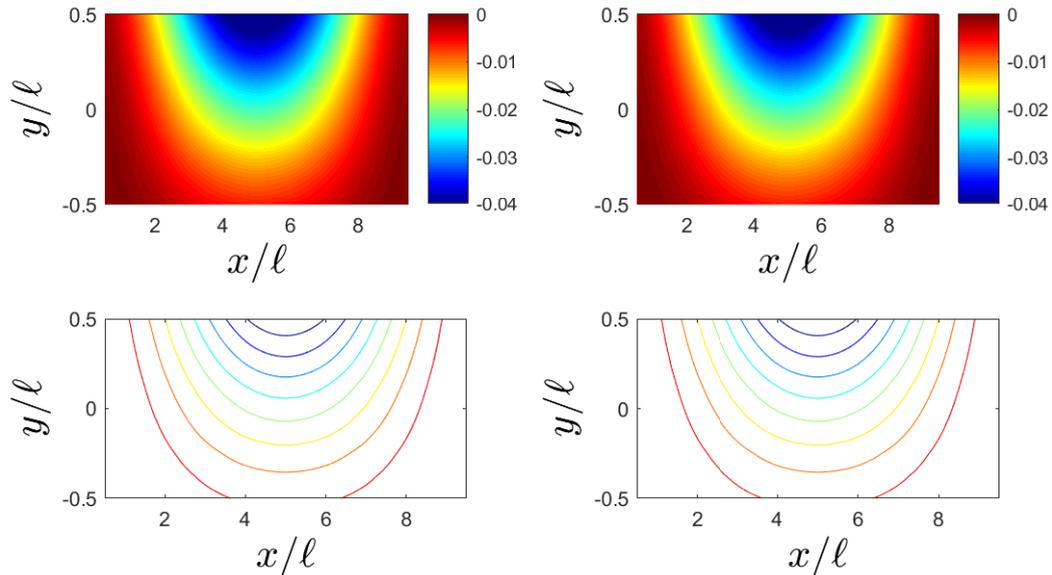


Figura 3.29: $\langle u_{\beta x} \rangle^\beta$ en la inter-región. Derecha: Enfoque ODA. Izquierda: APSS.

Ahora, las Figuras 3.29 muestran a $\langle u_{\beta x} \rangle^\beta$ en la inter-región obtenida por modelos ODA dependientes de \mathbf{K}_β^{-1} y su comparativo con el APSS, donde se observa que existen similitudes entre ambos enfoques tanto en patrones de flujo como en magnitudes de la componente de la velocidad descrita, reiterando así la viabilidad de las ecuaciones promedio. Además, como la Figura 3.17 se reproduce acertadamente con esta metodología presentada el cambio de velocidad de -0.04 a la salida de la región del fluido libre

a -0.01 en el ingreso al medio poroso, evidenciando así la importancia de la correcta determinación de las componentes no nulas de \mathbf{K}_β^{-1} en esta zona.

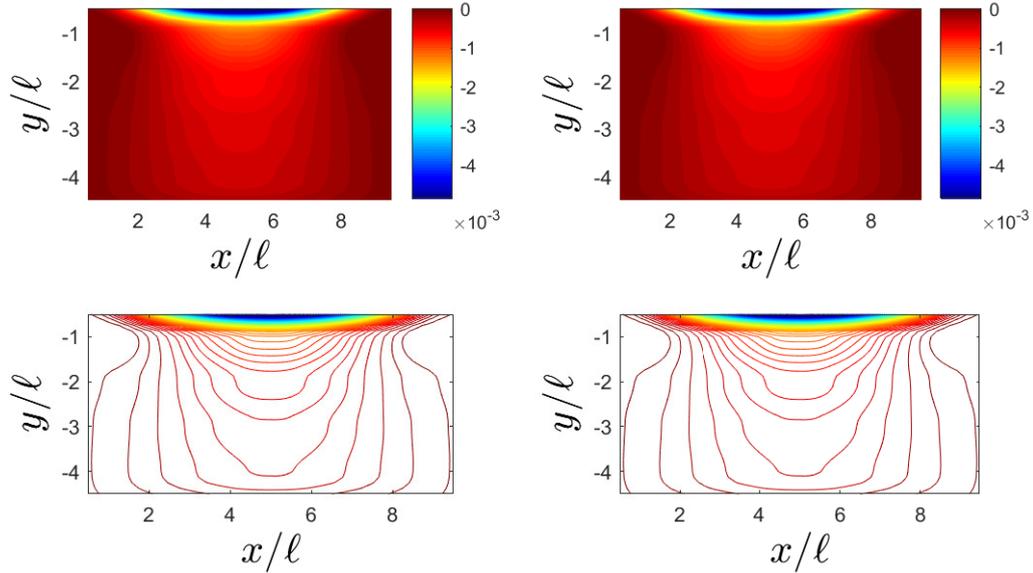


Figura 3.30: $\langle u_{\beta x} \rangle^\beta$ en el interior del medio poroso. Derecha: Enfoque ODA. Izquierda: APSS.

Por su parte, la Figura 3.30 muestra las variaciones espaciales de $\langle u_{\beta x} \rangle^\beta$ dentro de la región homogénea del medio poroso obtenidas por enfoque ODA y a partir del promedio de PSS. Inicialmente, se observa que hay concordancia de los patrones del flujo entre los enfoques presentados y que comparado a la Figura 3.18 se ven diferencias en la vecindad de las paredes laterales al inicio de esta región, ya que las GTE con el vector de resistencias describen al flujo que recircula y no resbala por las paredes laterales, mientras que las GTE aquí discutidas exhiben recirculación y posterior escurrimiento por todo el medio. Lo anterior, se atribuye al concepto de empirismo de la relación entre dicho vector y el tensor de permeabilidad, pero aún así éstas diferencias no son importantes por lo que las dos tipos de metodológicas por GTE son atractivas y viables.

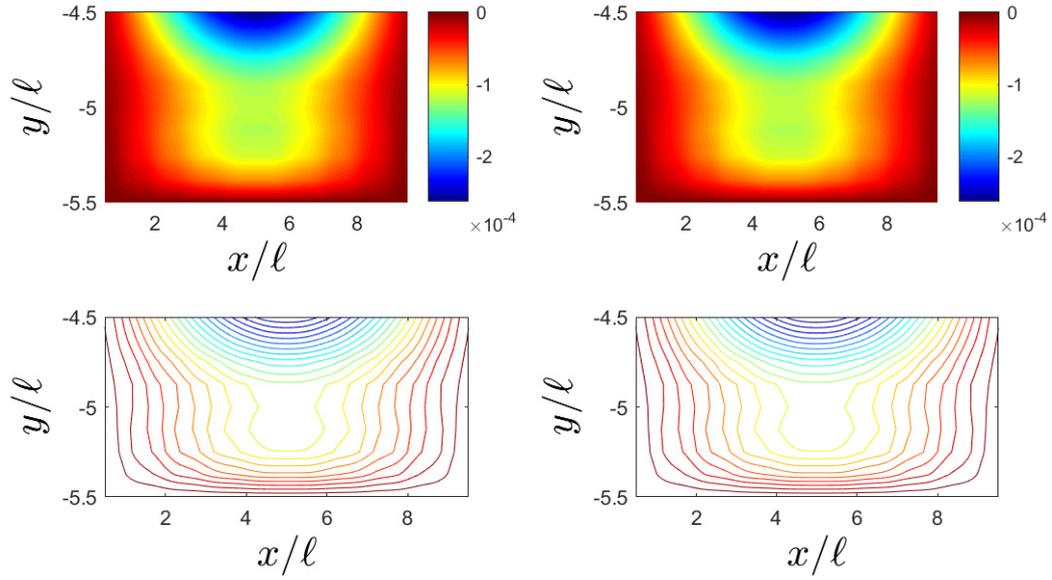


Figura 3.31: $\langle u_{\beta x} \rangle^\beta$ en la zona de transición medio poroso-pared inferior. Derecha: Enfoque ODA. Izquierda: APSS.

En la Figura 3.31 se observan las variaciones espaciales de $\langle u_{\beta x} \rangle^\beta$ en la transición $\omega - \delta$ obtenidas de GTE (\mathbf{K}_β) y del promedio de la PSS, donde se notan concordancias en la predicción de los valores de la velocidad al final de la región ω y su decrecimiento a medida que la región de promediado se mueve a lo largo de L_ω hasta valores nulos de la velocidad que es cuando \mathcal{V} contiene solo \mathcal{V}_δ . Lo anterior, reitera la capacidad predictiva de éstas GTE en las transiciones con las paredes del sistema y la importancia del conocimiento de las componentes $K_{\beta_{xx}}$ y $K_{\beta_{yy}}$ en cada una de éstas transiciones.

- Componente vertical de la velocidad

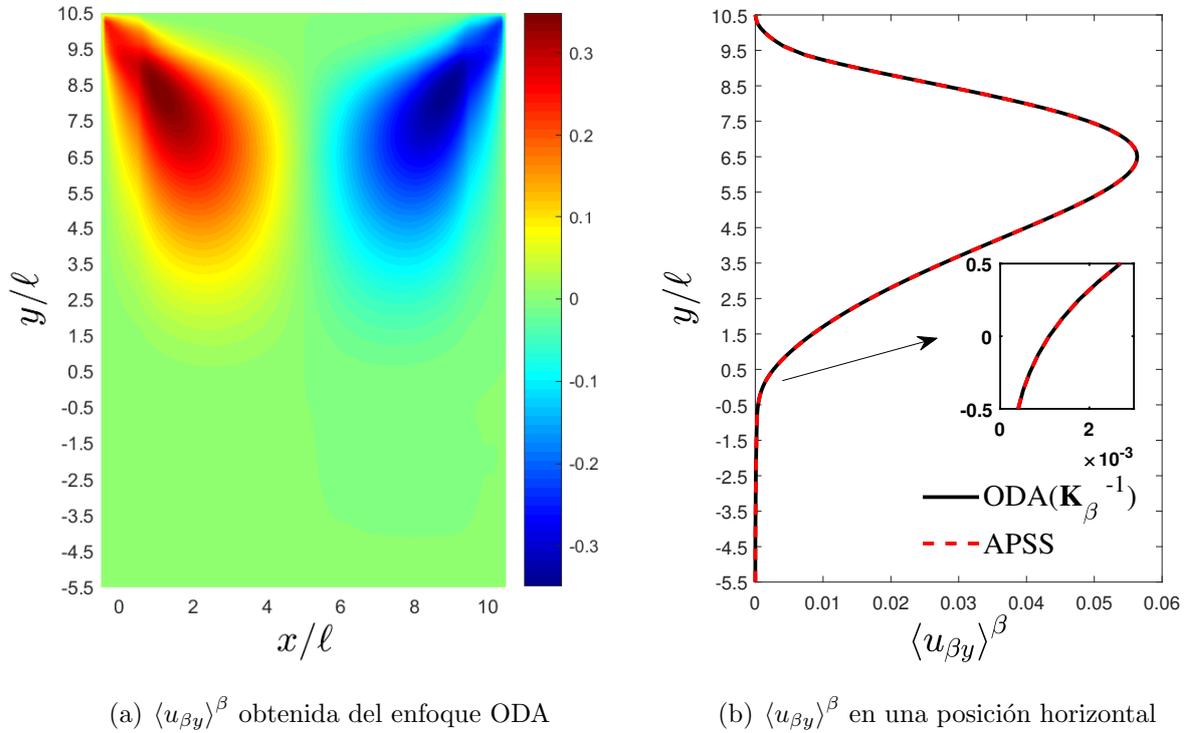


Figura 3.32: (a) $\langle u_{\beta y} \rangle^\beta$ en la cavidad y (b) en un perfil de corte en $x/\ell = 4.5$.

En la Figura 3.32a se muestra a la componente vertical de la velocidad en la cavidad obtenida por resolución de las GTE (\mathbf{K}_β), donde se observa el perfil antisimétrico en la región- η predicho anteriormente por las GTE (\mathbf{f}_β) y las mismas magnitudes de la velocidad en esta zona y en el interior del medio poroso. En tanto, la Figura 3.32b muestra el perfil de corte de la misma variable discutida, en una posición cercana a la mitad de la cavidad y con un acercamiento en la zona de transición de la cavidad para los enfoques ODA y del promedio de la PSS, donde se observa que el enfoque ODA tratado describe con exactitud con un valor de $\bar{E}_p = 9 \times 10^{-4}$ el comportamiento del decrecimiento de la velocidad de la zona del fluido libre al interior del medio poroso y en especial en la inter-región fluido-medio poroso.

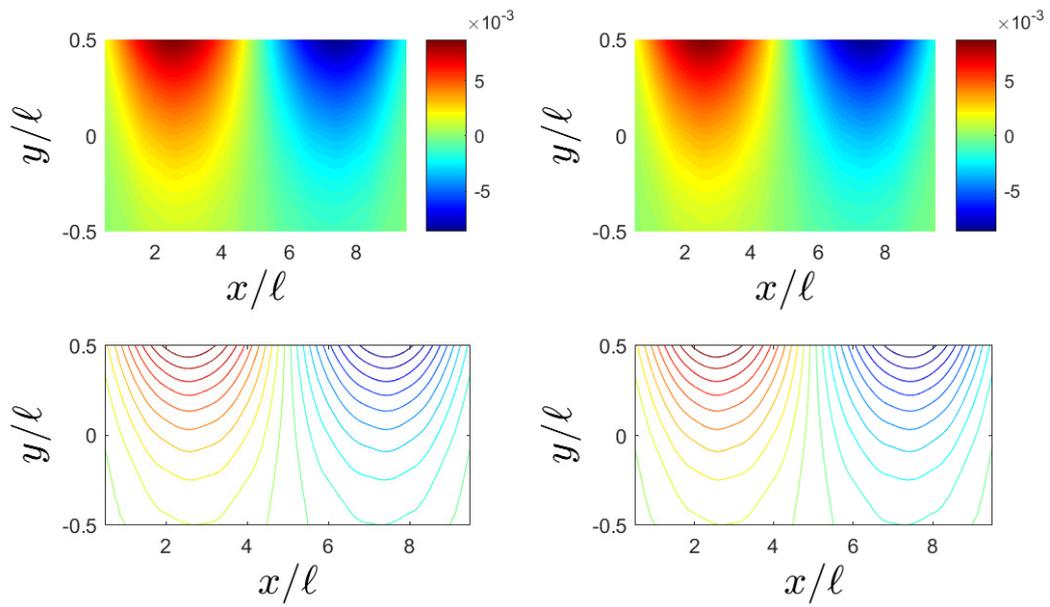


Figura 3.33: $\langle u_{\beta y} \rangle^\beta$ en la inter-región. Derecha: Enfoque ODA. Izquierda: APSS.

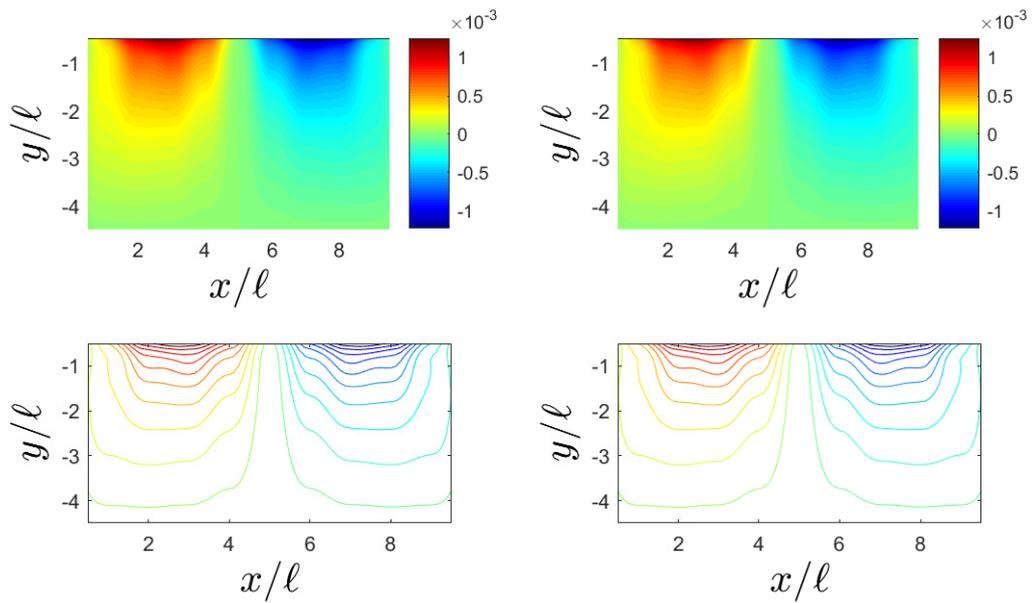


Figura 3.34: $\langle u_{\beta y} \rangle^\beta$ en la zona del medio poroso. Derecha: Enfoque ODA. Izquierda: APSS.

Ahora, las Figuras 3.33 y 3.34 muestran la comparación de las variaciones espaciales de $\langle u_{\beta y} \rangle^\beta$ en la inter-región $\eta - \omega$ y en la región- ω obtenidas del enfoque ODA aquí discutido, respectivamente. En la primera Figura se ve un patrón de flujo similar a la Figura 3.32a, un perfil antisimétrico de ésta componente de la velocidad que decrece a medida que crece L_ω , atribuido físicamente a las obstaculizaciones de las partículas sólidas al final de ésta transición y que además tal como se ve en los mapas de contorno coincide con el APSS de forma casi exacta. Con lo que respecta a la Figura 3.34, se observa la misma tendencia de antisimetría que las demás zonas descritas y además se nota como este tipo de perfil decrece a medida que el flujo atraviesa las partículas rígidas que conforman al medio, dado que se ralentiza el flujo por tales motivos. También, se debe señalar que las concordancias del enfoque propuesto y APSS es aceptable en cada punto de la zona.

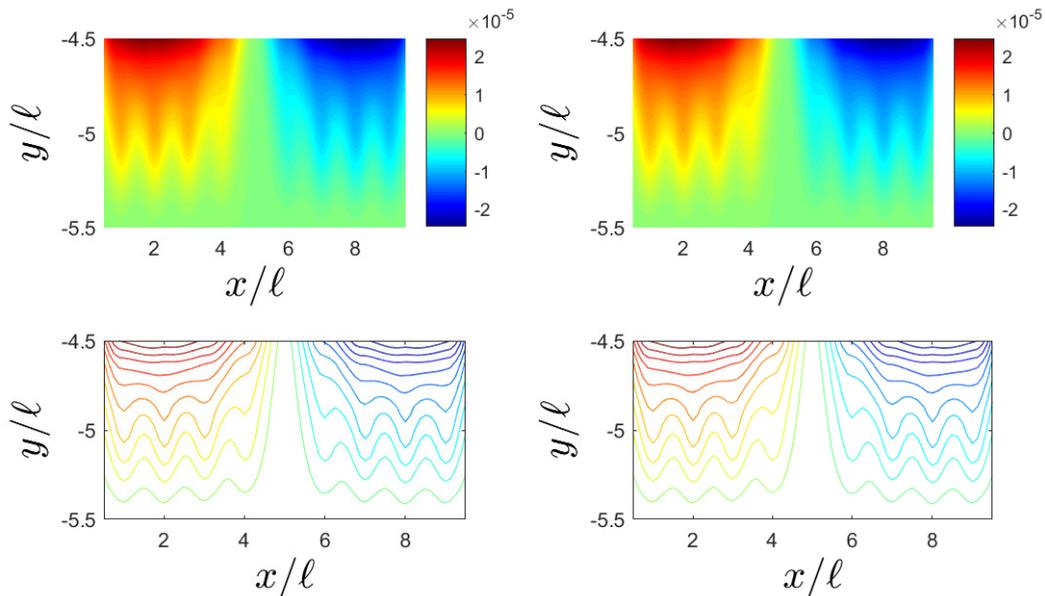


Figura 3.35: $\langle u_{\beta y} \rangle^\beta$ en inter-región $\omega - \delta$. Derecha: Enfoque ODA. Izquierda: APSS.

Finalmente, la Figura 3.35 exhibe las variaciones bidimensionales de $\langle u_{\beta y} \rangle^\beta$ en la transición de la región ω a la pared inferior, donde se observan para los dos enfoques mostrados concordancias excelentes en la predicción de los mayores valores de la velocidad al final de la región ω porque se tiene más volumen de fluido en la región de promediado y menores valores a medida que crece L_ω y se considera más región δ ocupada en la misma.

3.4.2. Campo de presión bidimensional

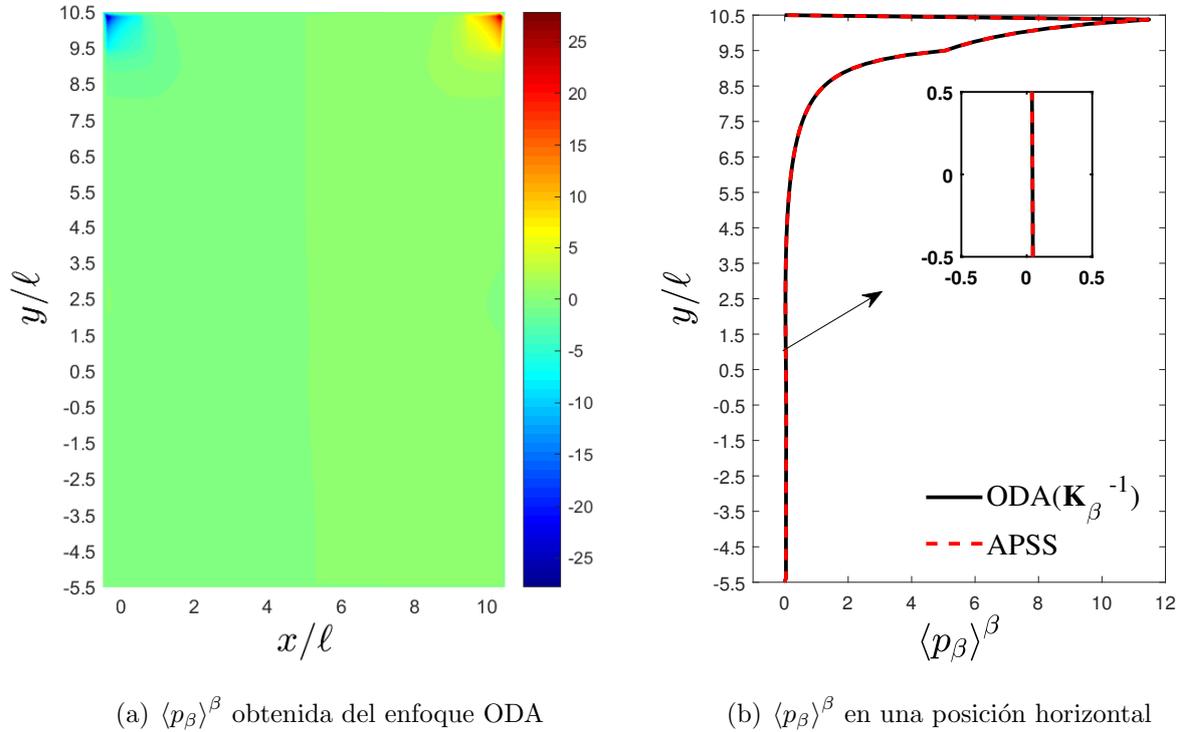


Figura 3.36: (a) $\langle p_\beta \rangle^\beta$ en la cavidad y (b) en un perfil de corte en $x/\ell = 10$.

Ahora, las Figuras 3.36a y 3.36b muestran al campo de la presión en cada punto de la cavidad obtenido del enfoque ODA (\mathbf{K}_β) y el perfil de corte de éste campo en $x/\ell = 10$ además de su comparativo con el promedio de la PSS, donde se observa que el enfoque propuesto capta las presiones causadas por las fuerzas de movimiento de la pared superior y además las presiones pequeñas en las demás zonas en la cavidad, incluyendo la inter-región. Se debe señalar que el error porcentual en este caso es 1×10^{-7} , así que, tal como el caso del enfoque que considera al vector de resistencias, resulta que la variable mejor descrita por los dos tipos de GTE es la presión, concluyendo entonces que tanto el enfoque ODA como las condiciones de frontera establecidas de la presión y el método de discretización, son viables, lo anterior es importante en el diseño termodinámico de procesos donde el conocimiento del campo de presión es de interés (Jiménez-Islas, 1999).

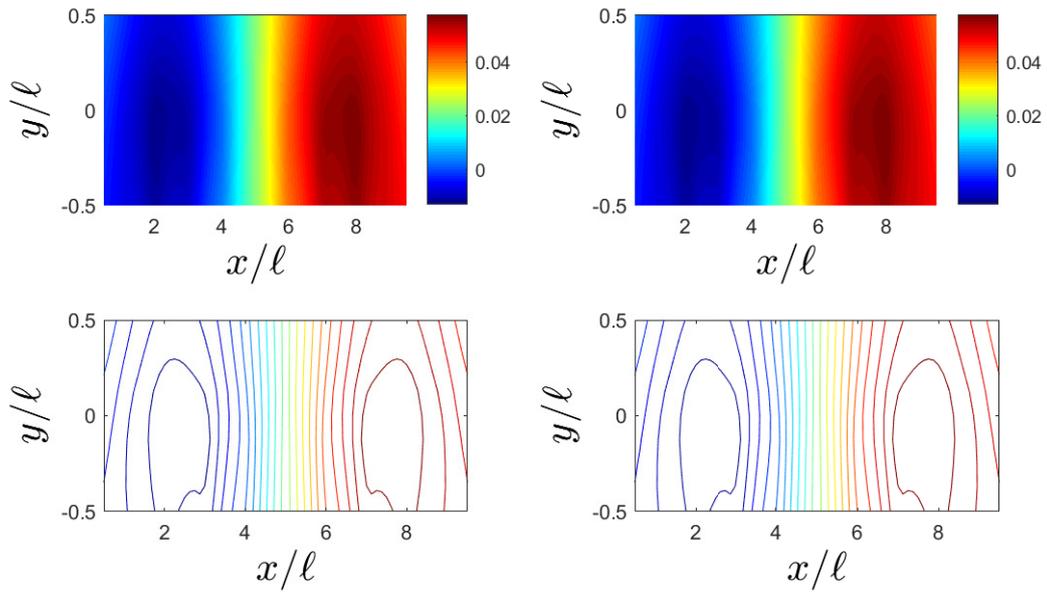


Figura 3.37: $\langle p_\beta \rangle^\beta$ en interface fluido/medio poroso . Derecha: Enfoque ODA. Izquierda: APSS.

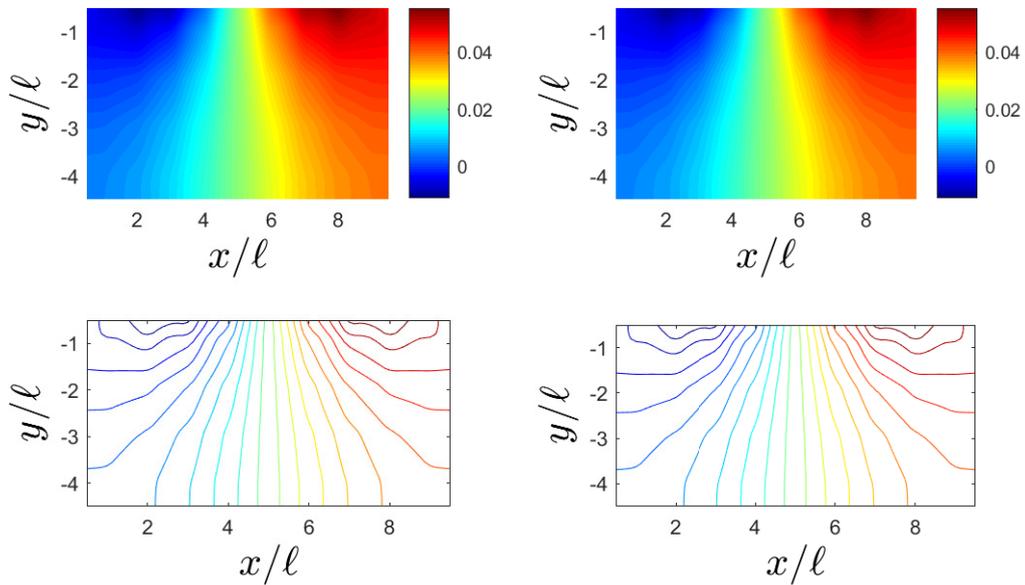


Figura 3.38: $\langle p_\beta \rangle^\beta$ en el medio poroso homogéneo. Derecha: Enfoque ODA. Izquierda: APSS.

La Figuras 3.37 y 3.38 muestran las presiones promedio adimensionales en la inter-región fluido/medio poroso y en el medio poroso, obtenidas por las GTE y el promedio

de la PSS, respectivamente. En la Figura 3.37 se observa que los dos enfoques captan de forma semejante los valores pequeños de dicha variable en ésta zona, los cuales se deben a la presión hidrostática del fluido dado que no existe una fuerza impulsora allí. La Figura 3.38 muestra que para los dos enfoques las mayores presiones se encuentran en las vecindades de las transiciones del medio poroso con las paredes laterales y las menores en la parte central del medio, lo anterior físicamente asociado a que el fluido ejerce fuerzas sobre las paredes de la cavidad incrementándose la presión. Se debe señalar que el enfoque discutido da un excelente acuerdo con el APSS y que logra describir las presiones promedio intrínseco negativas ocasionadas por la recirculación del fluido.

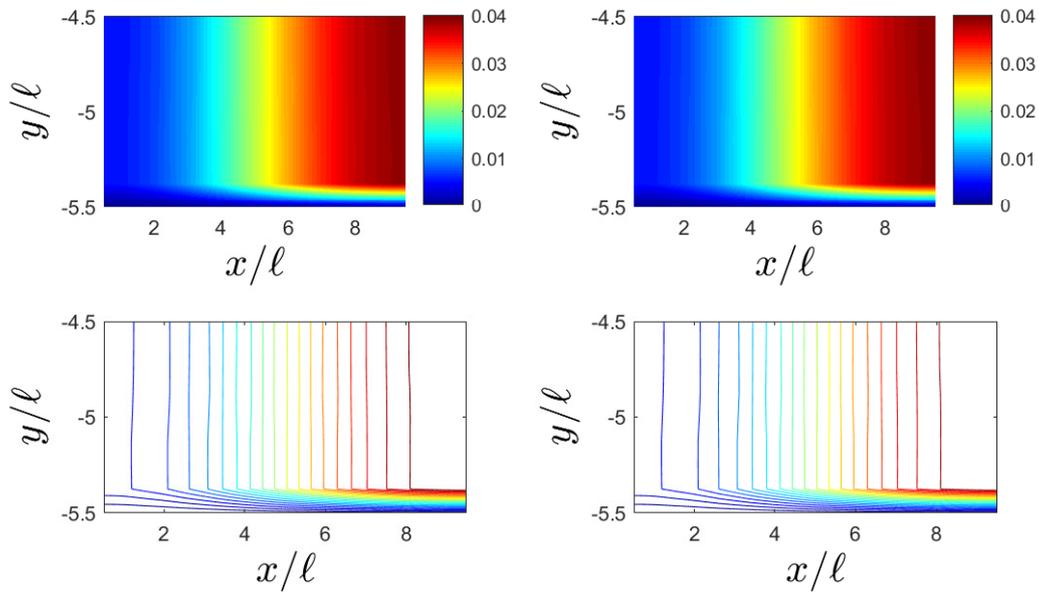


Figura 3.39: $\langle p_\beta \rangle^\beta$ en interface medio poroso/pared inferior. Derecha: Enfoque ODA. Izquierda: APSS.

Finalmente, la Figura 3.39 exhibe igualmente buenas correspondencias de los dos enfoques en la descripción del decrecimiento de la presión adimensional promedio intrínseco en la zona de transición del medio poroso a la pared inferior.

Capítulo 4

Conclusiones y perspectivas

Conclusiones

En el presente trabajo se estudió a partir de ecuaciones generalizadas promedio el flujo bidimensional de un fluido newtoniano en una cavidad de paredes impermeables ocupado por un medio poroso homogéneo, encontrándose que:

- La variación de la fracción volumétrica en casos de flujo bidireccional en medios porosos puede ser tratada como una función lineal en la inter-región.
- Las ecuaciones generalizadas promedio bidimensionales de cantidad de movimiento y masa total dependientes de un vector de resistencias pueden ser reescritas en base a un proceso de cerradura como un término de Darcy, donde el conocimiento de las componentes del tensor de permeabilidad K_{xx} y K_{yy} , es suficiente.
- Las variaciones espaciales de K_{xx} y K_{yy} en la inter-región no son lineales.
- Las GTE bidireccionales en sus dos formas tratadas reproducen de forma casi exacta los campos de velocidad y presión obtenidas del APSS en cualquier zona de la cavidad inclusive en la zona de interés: interface fluido/medio poroso, lo que sugiere que la primera y segunda corrección de Brinkman deben ser incluidas.
- Los menores errores porcentuales promedio en la descripción por enfoque de GTE se encontraron en el campo de la presión, lo anterior sugiere que las capacidades predictivas de la propuesta superan a otras metodologías que sobrestiman dicha variable.

- El enfoque ODA puede describir los efectos de recirculación en sistemas de flujo 2D en cavidades ocupadas parcialmente por un medio poroso homogéneo.

Perspectivas

Como trabajo futuro se tiene:

- Implementar y resolver las GTE dependientes de \mathbf{f}_β y \mathbf{K}_β en una cavidad con efectos inerciales y comparar los resultados con el APSS.

Apéndice A

Ecuaciones promedio que consideran al vector \mathbf{f}_β

En este apéndice se presenta el desarrollo matemático correspondiente a la derivación de las ecuaciones promedio del enfoque de un dominio. Lo anterior se realizó a partir del método del promedio volumétrico. En este sentido, inicialmente se consideraron las ecuaciones gobernantes a la escala local, tal que

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_\beta = 0 \text{ en la fase } -\beta \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{0} = -\nabla p_\beta + \mu_\beta \nabla^2 \mathbf{v}_\beta \text{ en la fase } -\beta \quad (\text{A.2})$$

con

$$\mathbf{v}_\beta = \mathbf{0} \text{ en } A_{\beta\sigma} \quad (\text{A.3})$$

y

$$\mathbf{v}_\beta = \mathbf{v}_{\beta,es} \text{ en } A_{\beta,es} \quad (\text{A.4})$$

A.1. Ecuación de continuidad

Inicialmente, prestando atención al transporte de masa total, entonces, aplicando el operador de promediado superficial a la Ec. A.1, se tiene

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{v}_\beta \rangle|_{\mathbf{x}} = 0 \quad (\text{A.5})$$

Ahora, haciendo uso del teorema de promediado espacial (Whitaker, 1999), así que

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle|_{\mathbf{x}} + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma(\mathbf{x})}} n_{\beta\sigma} \cdot \mathbf{v}_\beta|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\beta} dA = 0 \quad (\text{A.6})$$

Aplicando la condición de no deslizamiento (Ec. A.3) en la Ec. A.6 y considerando la relación de Dupuit-Forchheimer, se puede escribir la Ec. A.6 en términos de promedios intrínsecos como

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta|_{\mathbf{x}} = -\varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \nabla \varepsilon_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta|_{\mathbf{x}} \quad (\text{A.7})$$

A.2. Ecuación de movimiento

Ahora bien, para la ecuación promedio de cantidad de movimiento, tal como la ecuación de continuidad, se aplica el teorema de promediado superficial a la Ec. A.2, esto es

$$\mathbf{0} = \langle -\nabla p_\beta \rangle|_{\mathbf{x}} + \langle \mu_\beta \nabla^2 \mathbf{v}_\beta \rangle|_{\mathbf{x}} \quad (\text{A.8})$$

Considerando a la viscosidad contante dentro de la región de promediado y usando el teorema de promediado espacial en el término derecho de la presión, da

$$\langle -\nabla p_\beta \rangle|_{\mathbf{x}} = -\nabla \langle p_\beta \rangle|_{\mathbf{x}} - \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma(\mathbf{x})}} n_{\beta\sigma} p_\beta|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\beta} dA \quad (\text{A.9})$$

y con la relación de Dupuit-Forchheimer en el mismo término, la Ec. A.8 se reescribe como

$$\mathbf{0} = -\nabla \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \langle p_\beta \rangle^\beta|_{\mathbf{x}} - \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \nabla \langle p_\beta \rangle^\beta|_{\mathbf{x}} - \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma(\mathbf{x})}} n_{\beta\sigma} p_\beta|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\beta} dA + \mu_\beta \langle \nabla^2 \mathbf{v}_\beta \rangle|_{\mathbf{x}} \quad (\text{A.10})$$

Ahora, aplicando el teorema del promediado espacial en el último término de la Ec. A.10, se obtiene

$$\mu_\beta \langle \nabla \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta \rangle|_{\mathbf{x}} = \mu_\beta \left(\nabla \cdot \langle \nabla \mathbf{v}_\beta \rangle|_{\mathbf{x}} + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma(\mathbf{x})}} n_{\beta\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\beta} dA \right) \quad (\text{A.11})$$

sustituyendo la Ec. A.11 en la Ec. A.10, se da lugar a

$$\mathbf{0} = -\nabla \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \langle p_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} - \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \nabla \langle p_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} - \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma(\mathbf{x})}} n_{\beta\sigma} p_\beta \Big|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\beta} dA + \mu_\beta \nabla \cdot \langle \nabla \mathbf{v}_\beta \rangle \Big|_{\mathbf{x}} + \frac{\mu_\beta}{V} \int_{A_{\beta\sigma(\mathbf{x})}} n_{\beta\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta \Big|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\beta} dA \quad (\text{A.12})$$

Intercambiando la integración por la diferenciación espacial en el cuarto término de la Ec. A.12 por el teorema del promediado espacial, tal que

$$\mu_\beta \nabla \cdot \left\{ \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma(\mathbf{x})}} n_{\beta\sigma} \cdot \mathbf{v}_\beta \Big|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\beta} dA \right\} = \mu_\beta \nabla \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \quad (\text{A.13})$$

desarrollando este mismo término, de tal forma que se llega a

$$\mu_\beta \nabla^2 \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \mu_\beta (\nabla \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \cdot \nabla (\varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \langle \mathbf{v}_\beta \rangle \Big|_{\mathbf{x}})) - \frac{\mu_\beta}{V} \int_{A_{\beta\sigma(\mathbf{x})}} n_{\beta\sigma} \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} dA + \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \quad (\text{A.14})$$

reemplazando la Ec. A.14 en Ec. A.12

$$0 = -\nabla \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \langle p_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} - \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \nabla \langle p_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} - \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma(\mathbf{x})}} n_{\beta\sigma} p_\beta \Big|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\beta} dA + \mu_\beta \nabla^2 \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) + \mu_\beta \nabla \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} - \frac{\mu_\beta}{V} \int_{A_{\beta\sigma(\mathbf{x})}} n_{\beta\sigma} \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} dA + \frac{\mu_\beta}{V} \int_{A_{\beta\sigma(\mathbf{x})}} n_{\beta\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta \Big|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\beta} dA \quad (\text{A.15})$$

Dividiendo la Ec. A.15 entre ε_β , se puede escribir como

$$0 = -\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \mu_\beta \nabla^2 \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \varepsilon_\beta^{-1} \mu_\beta \nabla \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} - \mathbf{f}_\beta \quad (\text{A.16})$$

donde se ha introducido un vector \mathbf{f}_β definido por Ochoa-Tapia y Whitaker (1995a) y Valdés-Parada (2007) como

$$-\mathbf{f}_\beta = \frac{1}{V_\beta} \int_{A_{\beta\sigma(\mathbf{x})}} -n_{\beta\sigma} \cdot \mathbf{I} p_\beta \Big|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\beta} dA - \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \nabla \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \langle p_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \frac{\mu_\beta}{V_\beta} \int_{A_{\beta\sigma(\mathbf{x})}} n_{\beta\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta \Big|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\beta} dA + \varepsilon_\beta^{-1} \mu_\beta \nabla \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \quad (\text{A.17})$$

que representa las resistencias interfaciales que ejerce el medio poroso al flujo del fluido.

Apéndice B

Ecuaciones promedio que consideran al tensor \mathbf{K}_β^{-1}

En este apéndice se derivan, a partir de un proceso de cerradura, las ecuaciones promedio del enfoque de un dominio, con dependencia del tensor de permeabilidad intrínseco \mathbf{K}_β^{-1} en la ecuación de movimiento. El desarrollo considera únicamente a la ecuación de movimiento, dado que es donde aparece el vector \mathbf{f}_β . Entonces, inicialmente se considera a la ecuación promedio de movimiento en su forma

$$0 = -\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \mu_\beta \nabla^2 \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \varepsilon_\beta^{-1} \mu_\beta \nabla \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} - \mathbf{f}_\beta \quad (\text{B.1})$$

Es posible notar por la Ec. (A.17) que el vector \mathbf{f}_β de la Ec. (B.1) está definido en términos de cantidades locales y cantidades promedio intrínseco. Entonces, con el fin de eliminar la dependencia de cantidades locales en esta ecuación se recurre a la descomposición espacial de una cantidad local (Gray, 1975), tal como

$$\psi_\beta|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\beta} = \langle \psi_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\beta} + \tilde{\psi}_\beta \Big|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\beta} \quad (\text{B.2})$$

Sin embargo, los promedios intrínsecos de la Ec. (B.1) y las derivadas de estos están evaluados en el vector de posición \mathbf{x} , mientras que en la definición dada por la Ec. (B.2) lo están en $\mathbf{x} + \mathbf{y}_\beta$, por lo anterior, es necesario una aproximación por expansiones en series de Taylor de los valores evaluados en $\mathbf{x} + \mathbf{y}_\beta$ con su valor evaluado en \mathbf{x} . De este modo, da

$$\langle \psi_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\beta} = \langle \psi_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \mathbf{y}_\beta \cdot \nabla \langle \psi_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \mathbf{y}_\beta \mathbf{y}_\beta : \nabla \nabla \langle \psi_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \dots \quad (\text{B.3})$$

$$\nabla \langle \psi_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\beta} = \nabla \langle \psi_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \mathbf{y}_\beta \cdot \nabla \nabla \langle \psi_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \mathbf{y}_\beta \mathbf{y}_\beta : \nabla \nabla \nabla \langle \psi_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \dots \quad (\text{B.4})$$

De aquí, se tienen ordenes de magnitud:

$$\langle \psi_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} = O \left(\langle \psi_\beta \rangle^\beta \right) \quad (\text{B.5})$$

$$\mathbf{y}_\beta \cdot \nabla \langle \psi_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} = O \left(\frac{r_0}{L_\Upsilon} \langle \psi_\beta \rangle^\beta \right) \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{1}{2} \mathbf{y}_\beta \mathbf{y}_\beta : \nabla \nabla \langle \psi_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} = O \left(\frac{r_0^2}{L_\Upsilon^2} \langle \psi_\beta \rangle^\beta \right) \quad (\text{B.7})$$

$$\nabla \langle \psi_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} = O \left(\frac{1}{L_\Upsilon} \langle \psi_\beta \rangle^\beta \right) \quad (\text{B.8})$$

$$\mathbf{y}_\beta \cdot \nabla \nabla \langle \psi_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} = O \left(\frac{r_0}{L_\Upsilon^2} \langle \psi_\beta \rangle^\beta \right) \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{1}{2} \mathbf{y}_\beta \mathbf{y}_\beta : \nabla \nabla \nabla \langle \psi_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} = O \left(\frac{r_0^2}{L_\Upsilon^3} \langle \psi_\beta \rangle^\beta \right) \quad (\text{B.10})$$

Ahora, al usar la restricción de escala (Valdés-Parada *et al.*, 2007)

$$\frac{r_0}{L_\Upsilon} \ll 1, \quad \Upsilon = \eta, \omega \quad (\text{B.11})$$

donde L_Υ es la longitud característica asociada con las fases η y ω , la descomposición espacial (Ec. B.2) se puede reescribir como

$$\langle \psi_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\beta} \simeq \langle \psi_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \quad (\text{B.12})$$

Así pues, dado que $\psi_\beta = p_\beta, \mathbf{v}_\beta$, en particular, la descomposición espacial de la presión local y velocidad local se pueden escribir como

$$p_\beta \Big|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\beta} = \langle p_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \tilde{p}_\beta \Big|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\beta} \quad (\text{B.13})$$

$$\mathbf{v}_\beta \Big|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\beta} = \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{v}}_\beta \Big|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\beta} \quad (\text{B.14})$$

Usando las Ecs. (B.13-B.14) en la Ec. B.1, el vector $-\mathbf{f}_\beta$ se reescribe como

$$-\mathbf{f}_\beta = \frac{1}{V_\beta} \int_{A_{\beta\sigma(\mathbf{x})}} -\mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \mathbf{I} \tilde{p}_\beta|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\beta} dA + \frac{\mu_\beta}{V_\beta} \int_{A_{\beta\sigma(\mathbf{x})}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\beta} dA \quad (\text{B.15})$$

Debido a lo anterior, la ecuación promedio de movimiento del enfoque ODA (B.1), se convierte en

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = & -\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \mu_\beta \nabla^2 \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \\ & \varepsilon_\beta^{-1} \mu_\beta \nabla \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} - \frac{1}{V_\beta} \int_{A_{\beta\sigma(\mathbf{x})}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \mathbf{I} \tilde{p}_\beta|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\beta} dA + \\ & \frac{\mu_\beta}{V_\beta} \int_{A_{\beta\sigma(\mathbf{x})}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\beta} dA \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

De aquí, la ecuación promedio resultante depende de cantidades promedios y desviaciones. Por ende, es necesario desarrollar un problema para dichas desviaciones. Esto se logra a partir de un proceso de cerradura. Lo anterior permitirá la deducción del modelo del enfoque ODA en función del tensor de permeabilidad intrínseco. Entonces, para este fin, es necesario introducir las definiciones Ecs. (B.13 -B.14) en la ecuación de movimiento a la escala local (Ec. (A.2)) y restar a ese resultado la ecuación promedio de momento del enfoque ODA (Ec. B.16). De esto se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = & -\nabla \tilde{p}_\beta|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\beta} + \mu_\beta \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}}_\beta|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\beta} - \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \mu_\beta \nabla^2 \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} - \\ & \varepsilon_\beta^{-1} \mu_\beta \nabla \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \frac{1}{V_\beta} \int_{A_{\beta\sigma(\mathbf{x})}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \mathbf{I} \tilde{p}_\beta|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\beta} dA - \\ & \frac{\mu_\beta}{V_\beta} \int_{A_{\beta\sigma(\mathbf{x})}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta|_{\mathbf{x}+\mathbf{y}_\beta} dA \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Ahora, utilizando el principio de superposición las desviaciones de la velocidad y la presión se pueden representar como

$$\tilde{\mathbf{v}}_\beta = \mathbf{B}_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \zeta \quad (\text{B.18})$$

$$\tilde{p}_\beta = \mu_\beta \mathbf{b}_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \mu_\beta \xi \quad (\text{B.19})$$

donde \mathbf{B}_β y \mathbf{b}_β son variables de cerradura. Considerando que ciertas restricciones de escalas son cumplidas (Whitaker, 1985), $\zeta, \xi \simeq 0$, se tiene

$$\tilde{\mathbf{v}}_\beta = \mathbf{B}_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \quad (\text{B.20})$$

$$\tilde{p}_\beta = \mu_\beta \mathbf{b}_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \quad (\text{B.21})$$

Introduciendo las Ecs. (B.20-B.21) en la Ec. (B.16)

$$\mathbf{0} = -\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \mu_\beta \nabla^2 \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \varepsilon_\beta^{-1} \mu_\beta \nabla \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \mu_\beta \left\{ \frac{1}{V_\beta} \int_{A_{\beta\sigma}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (-\mathbf{Ib}_\beta + \nabla \mathbf{B}_\beta) dA \right\} \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \quad (\text{B.22})$$

Es importante notar de las Ecs.(B.16) y (B.22) que

$$\left\{ \frac{1}{V_\beta} \int_{A_{\beta\sigma}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (-\mathbf{I}\tilde{p}_\beta + \mu_\beta \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta) dA \right\} = \left\{ \frac{1}{V_\beta} \int_{A_{\beta\sigma}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (-\mathbf{Ib}_\beta + \nabla \mathbf{B}_\beta) dA \right\} \quad (\text{B.23})$$

Más aún, tal como lo señala Whitaker (1985)

$$\frac{1}{V_\beta} \int_{A_{\beta\sigma}(\mathbf{x})} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (-\mathbf{Ib}_\beta + \nabla \mathbf{B}_\beta) dA = -\varepsilon_\beta \mathbf{K}_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \quad (\text{B.24})$$

Por consiguiente, el vector de resistencias \mathbf{f}_β puede reescribirse como

$$-\mathbf{f}_\beta = -\mu_\beta \mathbf{K}_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \quad (\text{B.25})$$

De tal forma que la ecuación de transporte de momento del enfoque ODA puede expresarse como

$$0 = -\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \mu_\beta \nabla^2 \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \mu_\beta \nabla \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} - \mu_\beta \mathbf{K}_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} \quad (\text{B.26})$$

la cual puede escribirse también en términos de promedios superficiales como

$$0 = -\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta \Big|_{\mathbf{x}} + \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_{\mathbf{x}} - \varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \mu_\beta \nabla \varepsilon_\beta(\mathbf{x}) \cdot \nabla (\varepsilon_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_{\mathbf{x}}) - \mu_\beta \mathbf{K}_\beta^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_{\mathbf{x}} \quad (\text{B.27})$$

Apéndice C

Error porcentual promedio

En este apéndice se presenta la ecuación para el cálculo del error porcentual promedio de los perfiles de corte de las componentes horizontal y vertical de la velocidad y la presión promedio obtenidas por los modelos ODA, con respecto a los resultados del promediado de la solución local. El error fue calculado a partir de la siguiente ecuación

$$\bar{E}_p = \frac{\sum \left(\left(abs \left| \frac{\psi_{APSS} - \psi_{ODA}}{\psi_{APSS}} \right| \right) (100) \right)}{\#datos} \quad (C.1)$$

donde ψ_{APSS} es el valor exacto y ψ_{ODA} el valor aproximado. Aquí, ψ_{APSS} es cada una de los valores de las componentes horizontal y vertical de la velocidad y la presión promedio obtenido por modelos locales y ψ_{ODA} cada valor de las mismas pero calculadas a partir del promediado de la solución a escala local.

Bibliografía

- [1] Aguilar-Madera, C. G., Valdés-Parada, F. J., Goyeau, B., y Ochoa-Tapia, J. A. (2011). One-domain approach for heat transfer between a porous medium and a fluid. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 54(9-10), 2089-2099.
- [2] Bear, J., y Bachmat, Y. (1990). *Introduction to Modeling of Transport Phenomena in Porous Media*, EU: Kluwer Academic Publishers.
- [3] Beavers, G. S., y Joseph, D. D. (1967). Boundary conditions at a naturally permeable wall. *Journal of fluid mechanics*, 30(1), 197-207.
- [4] Beavers, G. S., Sparrow, E. M., y Magnuson, R. A. (1970). Experiments on coupled parallel flows in a channel and a bounding porous medium. *Journal of Basic Engineering*, 843-848.
- [5] Beavers, G. S., Sparrow, E. M., y Masha, B. A. (1974). Boundary Condition at a Surface Which Bounds a Fluid Flow. *AIChE Journal*, 20 (3) , 596-597.
- [6] Beckermann, C., y Viskanta, R. (1987). Forced convection boundary layer flow and heat transfer along a flat plate embedded in a porous medium. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 30 (7), 1547-1551.
- [7] Carbonell, R. G., y Whitaker, S. (1984). Heat and mass transfer in porous media. *Fundamentals of transport phenomena in porous media*, 82, 121-198.
- [8] Chandesris, M., y Jamet, D. (2006). Boundary conditions at a planar fluid-porous interface for a Poiseuille flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 49 (13-14), 2137-2150.

- [9] Chapra, S. C., y Raymond, P. C. (2007). *Métodos numéricos para ingenieros*. México: McGraw-Hill.
- [10] Deng, C., y Martinez, D. M. (2005). Viscous flow in a channel partially filled with a porous medium and with wall suction. *Chemical Engineering Science* 60, 329-336.
- [11] Escobar-Macualo, F. H. (2012). *Fundamentos de Ingeniería de Yacimientos*, Colombia: Editorial Universidad Surcolombiana.
- [12] Geankoplis, C. J. (2007). *Procesos de transporte y principios de procesos de separación*. México: Editorial Patria.
- [13] Goyeau, B., Lhuillier, D., y Velarde, M. G. (2003). Momentum transport at a fluid/porous interface. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 46(21), 4071-4081.
- [14] Haber, S., y Mauri, R. (1983). BOUNDARY CONDITIONS FOR DARCY'S FLOW THROUGH POROUS MEDIA. *Int. J. Multiphase Flow*, 9 (5), 561-574.
- [15] Hernández-Rodríguez, R. (2017). *Modelos de uno y dos dominios para el transporte de cantidad de movimiento entre un fluido homogéneo y un medio poroso*. (Tesis de maestría). Universidad autónoma metropolitana, México.
- [16] Hernández-Rodríguez, R., Goyeau, B., Angot, P., y Ochoa-Tapia, J. A (2020). Average velocity profile between a fluid layer and a porous medium: Brinkman boundary layer. *Revista Mexicana de Ingeniería Química*, 19 (1), 495-520.
- [17] Howes, F. A., y Whitaker, S. (1985). The spatial averaging theorem revisited. *Chemical Engineering Science*, 40 (8), 1387-1392.
- [18] Jiménez-Islas, H. (1999). *Modelamiento matemático de los procesos de transferencia de momentum, calor y masa en medios porosos*. (Tesis de doctorado). Instituto tecnológico de Celaya, México.

- [19] Jiménez-Islas, H., Calderón-Ramírez, M., Navarrete-Bolaños, J. L., Botello-Álvarez, J. E., Martínez-González, G. M., y López-Isunza, F. (2009). Estudio numérico de la convección natural en una cavidad cuadrada en 2-D con interfase fluido-medio poroso y generación de calor. *Revista mexicana de ingeniería química*, 8(2), 169-185.
- [20] Kuznetsov, A. V. (1996). Analytical Investigation of the Fluid Flow in the Interface Region between a Porous Medium and a Clear Fluid in Channels Partially Filled with a Porous Medium. *Applied Scientific Research*, 56, 53-67.
- [21] Lacis, U., y Bagheri, S. (2017). A framework for computing effective boundary conditions at the interface between free fluid and a porous medium. *Journal of Fluid Mechanics*, 812, 866-889.
- [22] Neale, G., Epstein, N., y Nader, W. (1973). Creeping flow relative to permeable spheres. *Chemical Engineering Science*, 28(10), 1865-1874.
- [23] Luminari, N., Airiau, C., y Bottaro, A. (2018). Effects of porosity and inertia on the apparent permeability tensor in fibrous media. *International Journal of Multiphase Flow*, 106, 60-74.
- [24] Luminari, N., Zampogna, G., Airiau, C., y Bottaro, A. (2019). A penalization method to handle the interface between a free-fluid region and a fibrous porous medium. *Journal of Porous Media*, 22(9), 1095-1107.
- [25] Neale, G., y Nader, W. (1974). Practical significance of Brinkman's extension of Darcy's law: coupled parallel flows within a channel and a bounding porous medium. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 52(4), 475-478.
- [26] Nield, D. A. (1983). The boundary correction for the Rayleigh-Darcy problem : limitations of the Brinkman equation. *J. Fluid Mech*, 128, 37-46.
- [27] Richardson, S. (1971). A model for the boundary condition of a porous material. Part 2. *Journal of Fluid Mechanics*, 49(2), 327-336.

- [28] Ross, S. M. (1983). Theoretical Model of the Boundary Condition at a Fluid-Porous Interface. *AIChE Journal*, 29 (5), 840-846.
- [29] Sahraoui, M., y Kaviany, M. (1991). Slip and no-slip velocity boundary conditions at interface of porous, plain media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 35(4), 927-943.
- [30] Saffman, P. G. (1971). On the boundary condition at the surface of a porous medium. *Studies in applied mathematics*, 50(2), 93-101.
- [31] Taylor, G. T. (1971). A model for the boundary condition of a porous material. Part 1. *Journal of Fluid Mechanics*, 49(2), 319-326.
- [32] Ochoa-Tapia, J. A. (1995). El método del promedio volumétrico para el estudio de difusión en sistemas de varias componentes. *Revista Mexicana de Física*, 41(3), 451-470.
- [33] Ochoa-Tapia, J. A., y Whitaker, S. (1995). Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid. I. Theoretical development. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 38(14), 2635-2646.
- [34] Ochoa-Tapia, J. A., Valdés-Parada, F. J., Goyeau, B., y Lasseux, D. (2017). Fluid motion in the fluid/porous medium inter-region. *Revista Mexicana de Ingeniería Química*, 16(3), 923-938.
- [35] Paéz-García, C. T., Valdés-Parada, F. J., y Lasseux, D. (2017). Macroscopic momentum and mechanical energy equations for incompressible single-phase flow in porous media. *Physical Review E*, 95(2), 1-12.
- [36] Pinder, G. F., y Gray, W. G. (2008). *Essentials of Multiphase Flow in Porous Media*, EU: John Wiley & Sons.
- [37] Valdés-Parada, F. J., Goyeau, B., y Ochoa-Tapia, J. A. (2007). Jump momentum boundary condition at a fluid?porous dividing surface: derivation of the closure problem. *Chemical engineering science*, 62(15), 4025-4039.

- [38] Valdés-Parada, F. J., Aguilar-Madera, C. G., Ochoa-Tapia, J. A., y Goyeau, B. (2013). Velocity and stress jump conditions between a porous medium and a fluid. *Advances in water resources*, 62, 327-339.
- [39] Vafai, K., y Thiyagaraja, R. (1987). Analysis of flow and heat transfer at the interface region of a porous medium. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 30 (7), 1391-1405.
- [40] Whitaker, S. (1970). Advances in Theory of Fluid Motion in Porous Media. *INDUSTRIAL AND ENGINEERING CHEMISTRY*, 61 (12), 14-28.
- [41] Whitaker, S. (1986). Flow in Porous Media I: A Theoretical Derivation of Darcy's Law. *Transport in Porous Media*, 1 (1), 3-25.
- [42] Whitaker, S. The method of volume averaging (1999). *Springer Science y Business Media*.



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00144

Matrícula: 2183802326

Modelo de un dominio para el estudio de flujo bidimensional en una cavidad ocupada parcialmente por medio poroso.

Con base en la Legislación de la Universidad Autónoma Metropolitana, en la Ciudad de México se presentaron a las 13:00 horas del día 13 del mes de mayo del año 2021 POR VÍA REMOTA ELECTRÓNICA, los suscritos miembros del jurado designado por la Comisión del Posgrado:

DR. JOSE DE JESUS ALVAREZ RAMIREZ
DR. CARLOS GILBERTO AGUILAR MADERA
DR. JORGE RAMIREZ MUÑOZ



Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRA EN CIENCIAS (INGENIERIA QUIMICA)

DE: FATIMA CALLEJAS QUIROZ

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó a la interesada el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

Fátima C.Q

FATIMA CALLEJAS QUIROZ
ALUMNA

REVISÓ

MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA

PRESIDENTE

DR. JOSE DE JESUS ALVAREZ RAMIREZ

VOCAL

DR. CARLOS GILBERTO AGUILAR MADERA

SECRETARIO

DR. JORGE RAMIREZ MUÑOZ

El presente documento cuenta con la firma –autógrafa, escaneada o digital, según corresponda- del funcionario universitario competente, que certifica que las firmas que aparecen en esta acta – Temporal, digital o dictamen- son auténticas y las mismas que usan los c.c. profesores mencionados en ella