



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Iztapalapa

Posgrado en Ciencias (Matemáticas)

División de Ciencias Básicas e Ingeniería

**“Métricas difusas inducidas a
hiperespacios”**

Tesis que presenta:

César Geovanni Reyes Pérez

Matrícula: 2233803311

Correo electrónico: crptmrf123@gmail.com

Para obtener el grado de:

Maestro en ciencias (Matemáticas)

Director de Tesis:

Dr. Iván Sánchez Romero

Jurado:

Presidente: Dr. Mikhail Tkachenko Gelievich

Secretario: Dr. Rodrigo Jesús Hernández Gutiérrez

Vocal: Dr. Daniel Roberto Jardón Arcos

Iztapalapa, Ciudad de México, 13 de Mayo del 2026

A mis padres
José A. Reyes Sánchez y
Josefina T. Pérez García

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a mi familia: a mis padres, Alberto Reyes y Josefina Pérez, por su amor, apoyo incondicional y confianza a lo largo de cada etapa de mi vida, y a mis hermanos, Cristhian Reyes y Eduardo Reyes, por todos los momentos compartidos, las risas, las bromas y las innumerables anécdotas que hemos construido juntos. Gracias por los sacrificios realizados, por el esfuerzo constante para salir adelante y por acompañarme en cada uno de mis proyectos. La persona que soy hoy se la debo a ustedes, y les estaré agradecido por el resto de mi vida. Este logro también les pertenece.

Agradezco profundamente a mi pareja, Ana Castillo, por su compañía, comprensión y apoyo incondicional a lo largo de este camino. Gracias por estar a mi lado en los momentos de dificultad, por tus palabras de aliento y por celebrar conmigo cada avance y cada logro. Tu cariño y confianza fueron una fuente invaluable de motivación para culminar este trabajo. Este logro también lleva una parte de ti, pues tu apoyo fue fundamental durante todo el proceso.

A mi asesor de tesis, el Dr. Iván Sánchez Romero, gracias por compartir sus conocimientos y por sus valiosas observaciones. Agradezco todo el apoyo que me ha brindado desde mis años de licenciatura. A pesar de no conocerme en aquel entonces, siempre confió en mis capacidades y me impulsó a seguir creciendo académicamente. Más allá de su papel como profesor y asesor, lo considero un amigo, alguien que siempre estuvo dispuesto a brindarme apoyo cuando lo necesitaba. Por todo ello, le estaré siempre agradecido.

A mis sinodales, los Dres. Mikhail Tkachenko Gelievich, Daniel Roberto Jardón Arcos y Rodrigo Jesús Hernández Gutiérrez, por el tiempo dedicado a la revisión

de esta tesis y por sus comentarios, sugerencias y observaciones, los cuales contribuyeron significativamente a mejorar la calidad de este documento. También quiero expresar mi agradecimiento al Dr. Rodrigo Hernández por los apoyos que me brindó para asistir a congresos y eventos académicos. Gracias a estas oportunidades pude ampliar mis conocimientos, compartir experiencias con otros investigadores y fortalecer mi formación como matemático.

Finalmente, quiero agradecer a la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI) por el apoyo otorgado a través de la beca que hizo posible la realización de mis estudios de posgrado.

Índice general

Agradecimientos	II
Resumen	VI
Introducción	VIII
1. Preliminares	1
1.1. La métrica de Hausdorff	1
1.2. Conjuntos difusos y t-normas continuas	3
1.3. Espacios uniformes	7
2. Espacios métricos difusos	13
3. Topología de los espacios métricos difusos	22
3.1. Topología inducida por una métrica difusa	22
3.2. Axiomas de separación en (X, τ_M)	25
3.3. Completez, precompacidad y compacidad	28
3.4. Completación métrica difusa	32
4. La métrica difusa de Hausdorff	42
5. Propiedades de la métrica difusa de Hausdorff	50
6. Filtrado de imágenes usando métricas difusas	61
6.1. Píxeles y el sistema RGB	61
6.2. Filtro de Mediana Vectorial	62

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	v
6.3. Versión difusa del VMF	64
7. Conjuntos difusos en espacios uniformes	67
7.1. La uniformidad de Skorokhod y la uniformidad por niveles	67
7.2. La uniformidad endográfica y la uniformidad sendográfica	78
Conclusión	85
Bibliografía	86

Resumen

El presente trabajo se centra en el estudio de los espacios métricos difusos y del hiperespacio de los conjuntos difusos que son semicontinuos superiormente, normales y con soporte compacto.

En el Capítulo 1 se presentan los conceptos preliminares necesarios para el desarrollo de los capítulos posteriores, tales como la métrica de Hausdorff, funciones semicontinuas, t-normas continuas y espacios uniformes. Además, se exponen resultados importantes dentro de la teoría de espacios métricos y de espacios uniformes. La mayoría de los resultados presentados en este capítulo serán utilizados más adelante.

En el Capítulo 2 se introducen los espacios métricos difusos en el sentido de George y Veeramani, junto con algunas de sus propiedades básicas. También se presentan ejemplos que permiten asimilar mejor esta noción.

El Capítulo 3 está dedicado al estudio de las propiedades de los espacios métricos difusos. En la Sección 3.1 se muestra que todo espacio métrico difuso induce una topología que resulta ser primero numerable. En la Sección 3.2 se demuestra que dicha topología es Hausdorff y, más aún, que todo espacio métrico difuso es un espacio topológico metrizable. La Sección 3.3 traslada los conceptos de precompacidad y completez, propios de la teoría de espacios métricos, al contexto difuso, y se prueban resultados importantes relacionados con ellos. Finalmente, el capítulo concluye con la Sección 3.4, dedicada al estudio de la completación métrica difusa, un concepto análogo al de completación en espacios métricos. En esta sección se muestra un ejemplo de un espacio métrico difuso que no admite una completación métrica difusa, lo cual contrasta con el hecho conocido de que todo espacio métrico

admite una completación única, salvo isometrías.

En el Capítulo 4, dado un espacio métrico difuso, se introduce la métrica difusa de Hausdorff, definida en el hiperespacio de los subconjuntos compactos. Todo el capítulo está dedicado a probar que dicha función es, efectivamente, una métrica difusa. Posteriormente, en el Capítulo 5, se estudia esta métrica difusa de Hausdorff, analizando sus propiedades y comparándola con su versión clásica.

El Capítulo 6 se orienta hacia el ámbito aplicado. En él se desarrolla una versión difusa del Filtro de Mediana Vectorial (VMF) para imágenes a color. La métrica difusa propuesta combina similitud cromática y espacial, ofreciendo un manejo más flexible frente al ruido impulsivo multicanal sin introducir colores artificiales.

Finalmente, en el Capítulo 7 se definen distintas uniformidades para el hiperespacio de los conjuntos difusos. En la Sección 7.1 se presentan la uniformidad de Skorokhod y la uniformidad por niveles, las cuales generalizan a las uniformidades inducidas por la métrica de Skorokhod y la métrica por niveles, respectivamente. En la Sección 7.2 se presentan la uniformidad endográfica y la uniformidad sendográfica, que generalizan a las uniformidades inducidas por la métrica endográfica y la métrica sendográfica, respectivamente.

Introducción

En la teoría clásica de conjuntos, un elemento pertenece o no pertenece a un conjunto, es decir, la pertenencia está completamente determinada. Sin embargo, muchos fenómenos del mundo real no pueden describirse de manera tan rígida, pues existen situaciones en las que la transición entre pertenecer y no pertenecer es gradual. Para modelar este tipo de incertidumbre o vaguedad, Zadeh introdujo en 1965 el concepto de conjunto difuso (fuzzy set) (ver [1]). Un conjunto difuso es una generalización del concepto tradicional de conjunto, en la que cada elemento posee un grado de pertenencia que toma valores en el intervalo $[0, 1]$. Dicho grado cuantifica qué tanto un elemento pertenece al conjunto, permitiendo describir nociones que, en la práctica, no son absolutas.

Por otro lado, un concepto de gran relevancia en las matemáticas es el de espacio métrico. Un espacio métrico (X, d) está formado por un conjunto de objetos X (que pueden ser palabras, puntos, conjuntos, etc.) y una función d llamada métrica, la cual asigna a cada par de elementos un número real que representa la distancia entre ellos. Dicha función debe satisfacer ciertas propiedades que surgen de intentar formalizar matemáticamente la idea intuitiva de distancia. De manera informal, estas propiedades pueden describirse de la siguiente forma:

- a)** La distancia entre cualesquiera dos puntos debe ser un número real concreto.
- b)** La distancia de un punto consigo mismo debe ser 0.
- c)** Si la distancia entre dos puntos es cero, entonces dichos puntos deben ser iguales.
- d)** La distancia entre dos puntos no depende del orden en que se tomen.
- e)** La distancia entre dos puntos debe ser menor o igual que la longitud de cual-

quier camino que pase por un tercer punto, en otras palabras, la forma más rápida de ir de un punto a otro es hacerlo directamente.

Estas propiedades han dado lugar a una amplia teoría de espacios métricos, sin embargo, a lo largo de su desarrollo, algunos autores han explorado qué ocurre al eliminar o debilitar ciertas condiciones con el fin de obtener estructuras más generales. Por ejemplo, si se elimina la condición **c)**, se obtiene lo que se conoce como un espacio pseudométrico. No obstante, la propiedad **a)** ha sido la más difícil de abandonar, pues resulta poco intuitivo pensar que la distancia entre dos puntos no sea un número real definido con exactitud. Pero, si lo consideramos con detenimiento, en la vida real rara vez podemos medir una distancia con precisión absoluta, ya que siempre existe un margen de error en los instrumentos de medición. Muchos investigadores han abordado este problema desde la perspectiva probabilística, sin embargo, existe otra alternativa basada en el concepto de conjunto difuso. Desde esta aproximación, la distancia deja de entenderse como un número que podamos determinar exactamente y pasa a verse como un valor acerca del cual solo podemos hacer diversas afirmaciones con distintos grados de certeza, asignando números entre 0 y 1.

En 1975, I. Kramosil y J. Michálek introdujeron una primera definición de espacio métrico difuso (ver [2]). Posteriormente, en 1994, A. George y V. Veeramani presentaron en [7] su propia definición, haciendo una ligera modificación a la propuesta original de Kramosil y Michálek. A partir de esta nueva definición, lograron dotar a cada espacio métrico difuso de una topología Hausdorff y primero numerable. Entre otras contribuciones destacadas en esta dirección se encuentran las adaptaciones de las nociones de sucesión de Cauchy, completez, completación y precompacidad al contexto difuso. Un hecho importante es que no todo espacio métrico difuso admite una completación difusa (ver [10]), lo cual contrasta con el resultado clásico de que todo espacio métrico admite una completación única salvo isometrías. Todos estos temas se desarrollan en los capítulos 2 y 3 de este trabajo.

Continuando con las contribuciones en el marco de los espacios métricos difusos en el sentido de George y Veeramani, en [11] J. Rodríguez-López y S. Romaguera introducen una métrica difusa definida en el hiperespacio de los subconjuntos com-

pactos no vacíos, la cual traslada las ideas de la métrica de Hausdorff al contexto difuso. Esta métrica recibe el nombre de métrica difusa de Hausdorff. En dicho artículo se estudian propiedades fundamentales como la completez, la precompacidad y la completación. Todos estos resultados se analizan de manera detallada en los capítulos 4 y 5 del presente trabajo.

Además de estos desarrollos teóricos, la noción de métrica difusa ha mostrado ser especialmente útil en aplicaciones. Debido a la idea de incertidumbre que subyace al concepto de espacio métrico difuso, este concepto ha sido empleado con éxito en diversas áreas de las matemáticas. Un ejemplo notable es su aplicación en el filtrado de imágenes digitales (ver [13] y [14]), tema que se presenta en el Capítulo 6 del presente trabajo.

Volviendo al concepto de espacio métrico, recordemos que es posible medir distancias entre una gran variedad de entidades; por ello, podríamos plantearnos medir la distancia entre dos conjuntos difusos. Esta idea ha dado lugar a un amplio campo de investigación (ver [18], [19], [20], [21], [22], [23] y [24]). Para desarrollar esta línea de trabajo, se parte de un espacio métrico (X, d) , en el cual se toman los conjuntos difusos. Posteriormente, se introduce la familia $\mathcal{F}(X)$, cuyos elementos son los conjuntos difusos normales, semicontinuos superiormente y con soporte compacto. En $\mathcal{F}(X)$ es posible definir una amplia variedad de métricas; ejemplos de ello son la métrica endográfica, la métrica sendográfica, la métrica de Skorokhod y la métrica por niveles, todas ellas expuestas en parte del Capítulo 7. Tiempo después, en [25], D. Jardón, I. Sánchez y M. Sanchis extendieron estas nociones al contexto de los espacios uniformes (recordemos que los espacios uniformes contienen a los espacios métricos y, a su vez, están contenidos en los espacios topológicos). En dicho trabajo, dado un espacio uniforme $(X, \mathcal{U})$, definen uniformidades en $\mathcal{F}(X)$ relacionadas con la métrica endográfica, la métrica sendográfica, la métrica de Skorokhod y la métrica por niveles, respectivamente. El estudio detallado de estas uniformidades constituye la parte final del Capítulo 7.

Capítulo 1

Preliminares

El propósito de este capítulo es establecer bases sólidas que permitan comprender los temas que se abordarán en los capítulos posteriores. Para ello, se introducen definiciones y resultados que podrían ser redundantes para el lector familiarizado, sin embargo, son esenciales para esta tesis, pues los capítulos posteriores, de una u otra forma, acuden al contenido de este capítulo. Es importante mencionar que la mayoría de los resultados presentados en las diferentes secciones de este capítulo no se encuentran expuestos a detalle, sin embargo, se proporciona bibliografía para que el lector interesado pueda profundizar en el tema.

A lo largo de todo este trabajo, $\mathbb{I}$ denotará al intervalo $[0, 1]$ y $\mathbb{R}$ al conjunto de los números reales, ambos con la topología usual, además, usaremos el símbolo $\mathbb{N}$ para denotar a los enteros mayores o iguales que 1.

1.1. La métrica de Hausdorff

Comenzamos recordando un poco acerca de los espacios métricos

Definición 1.1.1. *Un espacio métrico (X, d) consiste de un conjunto no vacío X y una función $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, llamada métrica, que satisface las siguientes condiciones para cualesquiera $x, y, z \in X$:*

- (a) $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.
- (b) $d(x, y) = d(y, x)$.

$$(c) \ d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Sea (X, d) un espacio métrico. Para cada $x \in X$ y $r > 0$, definimos la bola abierta con centro en x y radio r como

$$B_d(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

Se sabe que la familia

$$\tau_d = \{U \subset X : \forall x \in U \text{ existe } r > 0 \text{ tal que } B_d(x, r) \subset U\}$$

es una topología en X , llamada topología inducida por la métrica d . De aquí en adelante, al hablar de conceptos topológicos en un espacio métrico, nos referiremos a la topología inducida por su métrica, a menos que se especifique lo contrario.

Definición 1.1.2. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$ un subconjunto no vacío.

- (a) A es acotado si existen $x \in X$ y $r > 0$ tales que $A \subset B(x, r)$.
- (b) A es precompacto (o completamente acotado) si para todo $\epsilon > 0$ existe un conjunto finito $I \subset A$ tal que $A \subset \bigcup_{x \in I} B(x, \epsilon)$.
- (c) A es compacto si toda cubierta abierta de A tiene una subcubierta finita.

Definición 1.1.3. Sea A un conjunto acotado en un espacio métrico (X, d) . Definimos el diámetro del conjunto A como $\text{Diam}(A) = \sup \{d(x, y) : x, y \in A\}$.

Definición 1.1.4. Diremos que espacio métrico (X, d) es separable si contiene un subconjunto denso y numerable.

Definición 1.1.5. Un espacio métrico (X, d) es completo si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Gran parte del contenido de esta tesis está relacionado con las siguientes hiperespacios. Dado un espacio topológico (X, τ) , definimos:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(X) &= \{E \subset X : E \text{ es cerrado y no vacío}\}, \\ \mathcal{K}(X) &= \{E \subset X : E \text{ es compacto y no vacío}\}. \end{aligned}$$

Para un espacio métrico (X, d) , consideramos estos hiperespacios respecto a τ_d y definimos además:

$$\mathcal{CB}(X) = \{E \subset X : E \text{ es cerrado, acotado y no vacío}\}.$$

Teorema 1.1.6. *Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $A, B \in \mathcal{CB}(X)$, definimos la distancia de Hausdorff entre A y B como*

$$d_H(A, B) = \max \{ \sup \{d(a, B) : a \in A\}, \sup \{d(b, A) : b \in B\} \},$$

donde $d(x, A) = \inf \{d(x, a) : a \in A\}$. Entonces, $(\mathcal{CB}(X), d_H)$ es un espacio métrico.

Ya que cada espacio métrico (X, d) es un espacio topológico Hausdorff, se tiene que $\mathcal{K}(X) \subset \mathcal{CB}(X)$. Entonces, podemos considerar el espacio métrico $(\mathcal{K}(X), d_H)$, el cual resulta estar estrechamente relacionado con (X, d) . Los siguientes resultados se encuentran en [5].

Teorema 1.1.7. *El espacio métrico (X, d) es acotado si y solo si $(\mathcal{K}(X), d_H)$ es acotado, además, $\text{Diam}(X) = \text{Diam}(\mathcal{K}(X))$.*

Teorema 1.1.8. *El espacio métrico (X, d) es precompacto si y solo si $(\mathcal{K}(X), d_H)$ es precompacto.*

Teorema 1.1.9. *El espacio métrico (X, d) es separable si y solo si $(\mathcal{K}(X), d_H)$ es separable.*

Teorema 1.1.10. *El espacio métrico (X, d) es completo si y solo si $(\mathcal{K}(X), d_H)$ es completo.*

Corolario 1.1.11. *El espacio métrico (X, d) es compacto si y solo si $(\mathcal{K}(X), d_H)$ es compacto.*

1.2. Conjuntos difusos y t-normas continuas

Definición 1.2.1. *Sean (X, τ) un espacio topológico, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in X$. Entonces:*

(a) f es semicontinua superiormente en x_0 si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, con $\alpha > f(x_0)$, existe un abierto $U \subset X$ que contiene a x_0 tal que $f(x) < \alpha$ para todo $x \in U$.

(b) f es semicontinua inferiormente en x_0 si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, con $\alpha < f(x_0)$, existe un abierto $U \subset X$ que contiene a x_0 tal que $f(x) > \alpha$ para todo $x \in U$.

Definición 1.2.2. Sean (X, τ) un espacio topológico y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ una sucesión.

(a) Definimos el límite superior de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ como

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{k \geq n} x_k).$$

(b) Definimos el límite inferior de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ como

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\inf_{k \geq n} x_k).$$

Teorema 1.2.3. Sean (X, d) un espacio métrico, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in X$. Entonces:

(a) f es semicontinua superiormente en x_0 si y solo si para cada sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ que converge a x_0 , se cumple $\limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq f(x_0)$.

(b) f es semicontinua inferiormente en x_0 si y solo si para cada sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ que converge a x_0 , se cumple $\liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq f(x_0)$.

Teorema 1.2.4. Sean (X, τ) un espacio topológico, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in X$. Entonces, f es continua en x_0 si y solo si es semicontinua superiormente y semicontinua inferiormente en x_0 .

Definición 1.2.5. Dado un conjunto no vacío X , llamaremos conjunto difuso en X a cualquier función $u : X \rightarrow \mathbb{I}$. Si X está equipado con una topología τ , para cada conjunto difuso u en X , definimos su soporte como

$$u_0 = \overline{\{x \in X : u(x) > 0\}},$$

y, para cada $\alpha \in (0, 1]$, definimos su α -nivel como

$$u_\alpha = \{x \in X : u(x) \geq \alpha\}.$$

Diremos que u es normal si u_1 es no vacío.

Si (X, τ) es un espacio topológico, denotamos como $\mathcal{F}(X)$ al conjunto de todos los conjuntos difusos que son normales, semicontinuos superiormente y con soporte compacto.

Definición 1.2.6. Una operación binaria $*$: $\mathbb{I} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ es llamada una *t-norma continua* si $(\mathbb{I}, *)$ es un monoide abeliano topológico con unidad 1 (es decir, la operación $*$ es continua, asociativa y conmutativa), tal que $a * b \leq c * d$ si $a \leq c$ y $b \leq d$, para cualesquiera $a, b, c, d \in \mathbb{I}$.

Ejemplo 1.2.7. Las siguientes operaciones binarias son *t-normas continuas*:

- (a) $a * b = \min \{a, b\}$,
- (b) $a * b = \max \{a + b - 1, 0\}$,
- (c) $a * b = ab$.

La *t-norma* del inciso b) se conoce como la *t-norma de Lukasiewicz*.

Demostración. a) Es claro que $*$ es asociativa y conmutativa, además, para todo $a \in \mathbb{I}$,

$$a * 1 = 1 * a = \min \{a, 1\} = a,$$

es decir, la unidad de $(\mathbb{I}, *)$ es 1. Supongamos que $a \leq c$ y $b \leq d$, con $a, b, c, d \in \mathbb{I}$, entonces,

$$a * b = \min \{a, b\} \leq a \leq c \quad \text{y} \quad a * b = \min \{a, b\} \leq b \leq d,$$

por lo tanto,

$$a * b = \min \{a, b\} \leq \min \{c, d\} = c * d.$$

Para ver que $*$ es continua notemos que $\min \{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$, por lo tanto, tomando las funciones continuas $f(a, b) = a$, $g(a, b) = b$ y $h(a, b) = |a - b|$, se tiene que $*$ es continua ya que es combinación lineal de funciones continuas.

b) La demostración de que $*$ es conmutativa y de que la unidad de $(\mathbb{I}, *)$ es 1 se siguen directas de la definición. Para probar la asociatividad de $*$, sean $a, b, c \in \mathbb{I}$, entonces,

$$(a * b) * c = \max \{(a * b) + c - 1, 0\} = \max \{\max \{a + b - 1, 0\} + c - 1, 0\}.$$

Si $a + b - 1 \leq 0$, ya que $c - 1 \leq 0$, se tiene $\max\{\max\{a + b - 1, 0\} + c - 1, 0\} = 0$, por otro lado, si $a + b - 1 \geq 0$, entonces $\max\{\max\{a + b - 1, 0\} + c - 1, 0\} = \max\{a + b - 1 + c - 1, 0\}$. Por tanto,

$$(a * b) * c = \max\{a + b - 1 + c - 1, 0\}.$$

Con un argumento similar se puede mostrar que

$$a * (b * c) = \max\{a + \max\{b + c - 1, 0\} - 1, 0\} = \max\{a + b + c - 1 - 1, 0\},$$

lo cual, por la asociatividad de la suma, termina la demostración.

Ahora, sean $a \leq c$ y $b \leq d$, con $a, b, c, d \in \mathbb{I}$. Supongamos que $a + b - 1 \geq 0$, entonces,

$$\max\{a + b - 1, 0\} = a + b - 1 \leq c + d - 1 = \max\{c + d - 1, 0\}.$$

Si $a + b - 1 < 0$, lo cual implica

$$\max\{a + b - 1, 0\} = 0 \leq \max\{c + d - 1, 0\},$$

por lo tanto, $a * b \leq c * d$. Ya que $\max\{a + b - 1, 0\} = \frac{1}{2}(a + b - 1 + |a + b - 1|)$, se sigue que $*$ es continua.

c) Es bien sabido que $(\mathbb{I}, *)$ es un monoide abeliano con unidad 1. La continuidad de $*$ se sigue del hecho de que el producto de funciones continuas es continua. $\square$

Notemos que, dada una t-norma continua $*$, se cumple que $a * b \leq a * 1 = a$ y $a * b \leq 1 * b = b$, por lo tanto, $a * b \leq \min\{a, b\}$, es decir, la t-norma continua del mínimo es la más grande de todas las t-normas continuas.

Lema 1.2.8. *Sea $*$ una t-norma continua. Entonces:*

- (a) *Para cada $r_1, r_2 \in (0, 1)$, con $r_1 > r_2$, existe $r_3 \in (0, 1)$ tal que $r_1 * r_3 > r_2$.*
- (b) *Para cada $r_4 \in (0, 1)$, existe $r_5 \in (0, 1)$ tal que $r_5 * r_5 > r_4$.*

Demostración. a) Ya que $*$ es continua, la función $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ definida como $f(r) = r_1 * r$ es continua, por lo tanto, $f^{-1}((r_2, 1])$ es abierto. Notemos que $f^{-1}((r_2, 1]) \neq \emptyset$, pues $f(1) \in (r_2, 1]$. Por lo tanto, existe $r_3 \in f^{-1}((r_2, 1])$, con $0 < r_3 < 1$, tal que

$$r_1 * r_3 > r_2.$$

b) Sea $r \in (r_4, 1)$, entonces, por el inciso anterior, existe $s \in (0, 1)$ tal que $r * s > r_4$. Tomamos $r_5 = \max\{r, s\}$, por tanto,

$$r_5 * r_5 \geq r * s > r_4.$$

□

1.3. Espacios uniformes

Los espacios uniformes serán de gran importancia a lo largo de este trabajo, sobre todo en el Capítulo 7. Esta sección está basada en el Capítulo 8 de [3], las demostraciones omitidas se pueden encontrar en dicho texto. También se puede consultar el Capítulo 6 de [4] para profundizar más en el tema.

Comencemos dando un poco de notación. Sean X un conjunto no vacío y $A, B \subset X \times X$. Definimos:

$$A^{-1} = \{(x, y) \in X \times X : (y, x) \in A\}$$

y

$$A \circ B = \{(x, y) \in X \times X : \exists z \in X \text{ tal que } (x, z) \in A \text{ y } (z, y) \in B\}.$$

Denotaremos con A^2 al conjunto $A \circ A$ y con Δ_X a la diagonal de X . Diremos que un subconjunto $A \subset X \times X$ es un entorno de la diagonal de X si $\Delta_X \subset A$ y $A = A^{-1}$. Al conjunto de todos los entornos de la diagonal de X lo denotaremos como $\mathcal{D}_X$.

Definición 1.3.1. Sea X un conjunto no vacío. Una uniformidad en X es una subfamilia $\mathcal{U}$ de $\mathcal{D}_X$ que cumple:

(U1) Para cada $U \in \mathcal{U}$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^2 \subset U$.

(U2) Si $U, V \in \mathcal{U}$, entonces $U \cap V \in \mathcal{U}$.

(U3) Si $U \in \mathcal{U}$ y $U \subset V \in \mathcal{D}_X$, entonces $V \in \mathcal{U}$.

(U4) $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = \Delta_X$.

A la pareja $(X, \mathcal{U})$ la llamaremos espacio uniforme. Decimos que una subfamilia $\mathcal{B}$ de una uniformidad $\mathcal{U}$ es una base para $\mathcal{U}$ si para cada $U \in \mathcal{U}$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset U$.

Lema 1.3.2. [3] Sean X un conjunto no vacío y $\mathcal{B}$ una familia no vacía de subconjuntos de $X \times X$. Entonces $\mathcal{B}$ es una base para alguna uniformidad $\mathcal{U}$ en X si y solo si cumple lo siguiente:

- (BU1) Para cada $A \in \mathcal{B}$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B^{-1} \subset A$.
- (BU2) Si $A \in \mathcal{B}$, entonces existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B^2 \subset A$.
- (BU3) Si $A, B \in \mathcal{B}$, entonces existe $C \in \mathcal{B}$ tal que $C \subset A \cap B$.
- (BU4) $\bigcap_{A \in \mathcal{B}} A = \Delta_X$.

Ejemplo 1.3.3. Para cada $\epsilon > 0$ definimos

$$V_\epsilon = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{I} \times \mathbb{I} : |\alpha - \beta| < \epsilon\}.$$

La familia $\{V_\epsilon : \epsilon > 0\}$ es una base para una uniformidad $\mathcal{U}_{\mathbb{I}}$ en $\mathbb{I}$.

Demostración. Por el lema anterior, basta ver los siguientes puntos.

- (BU1) Para cada $\epsilon > 0$ se tiene $V_\epsilon^{-1} = V_\epsilon$.
- (BU2) Sea $\epsilon > 0$. Tomamos $(\alpha, \beta) \in V_{\epsilon/2}^2$, entonces existe $\gamma \in \mathbb{I}$ tal que

$$|\alpha - \beta| \leq |\alpha - \gamma| + |\gamma - \beta| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Por lo tanto, $(\alpha, \beta) \in V_\epsilon$.

- (BU3) Sean $\epsilon, \delta > 0$, entonces $V_\epsilon \cap V_\delta = V_{\min\{\epsilon, \delta\}}$.

(BU4) Es claro que $(\alpha, \beta) \in \bigcap \{V_\epsilon : \epsilon > 0\}$ si y solo si $|\alpha - \beta| = 0$, lo cual es equivalente a $\alpha = \beta$. $\square$

En los espacios uniformes, tal como en el caso de los espacios topológicos y los espacios métricos, podemos definir las nociones de subespacio y de espacio producto. Dados un espacio uniforme $(X, \mathcal{U})$ y un subconjunto $(A \subset X)$, definimos

$$\mathcal{U}_A = \{(A \times A) \cap U : U \in \mathcal{U}\}.$$

Teorema 1.3.4. Sean $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme y A un subconjunto de X . Entonces, $(A, \mathcal{U}_A)$ es un espacio uniforme.

Decimos que el espacio uniforme $(A, \mathcal{U}_A)$ es un subespacio uniforme de $(X, \mathcal{U})$. Sea $\{(X_s, \mathcal{U}_s)\}_{s \in S}$ una familia de espacios uniformes, si $s_1, s_2, \dots, s_n \in S$ y, para cada $i = 1, \dots, n$, $U_i \in \mathcal{U}_{s_i}$, definimos

$$[s_1, \dots, s_n; U_1, \dots, U_n] = \left\{ (x, y) \in \left(\prod_{s \in S} X_s \right)^2 : (x_{s_i}, y_{s_i}) \in U_i \ \forall i = 1, \dots, n \right\}.$$

Teorema 1.3.5. *Sea $\{(X_s, \mathcal{U}_s)\}_{s \in S}$ una familia de espacios uniformes. Entonces, la familia*

$$\{[s_1, \dots, s_n; U_1, \dots, U_n] : s_i \in S, U_i \in \mathcal{U}_{s_i}, i = 1, \dots, n, n \in \mathbb{N}\}$$

es base para una uniformidad $\prod_{s \in S} \mathcal{U}_s$ en $\prod_{s \in S} X_s$.

El espacio uniforme $(\prod_{s \in S} X_s, \prod_{s \in S} \mathcal{U}_s)$ se llama el producto cartesiano de los espacios uniformes $\{(X_s, \mathcal{U}_s)\}_{s \in S}$.

Teorema 1.3.6. *Sean $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme y $\tau_{\mathcal{U}}$ la familia de todos los $A \subset X$, tales que para cada $x \in A$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U(x) \subset A$, donde $U(x) = \{y \in X : (x, y) \in U\}$. Entonces, $\tau_{\mathcal{U}}$ es una topología en X .*

Demostración. Se sigue directo de la definición que $\emptyset, X \in \tau_{\mathcal{U}}$ y que la unión arbitraria de elementos de $\tau_{\mathcal{U}}$ está en $\tau_{\mathcal{U}}$.

Ahora, consideremos $A_1, A_2 \in \tau_{\mathcal{U}}$ y $x \in A_1 \cap A_2$, entonces, existen $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ tales que $U_1(x) \subset A_1$ y $U_2(x) \subset A_2$. Ya que $\mathcal{U}$ es una uniformidad, se sigue que $U = U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$. Además,

$$U(x) = U_1(x) \cap U_2(x) \subset A_1 \cap A_2,$$

por lo tanto, $A_1 \cap A_2 \in \tau_{\mathcal{U}}$. □

A la topología $\tau_{\mathcal{U}}$ se le conoce como la topología inducida por la uniformidad $\mathcal{U}$. De aquí en adelante, al hablar de conceptos topológicos en un espacio uniforme, nos referiremos a la topología inducida por su uniformidad, a menos que se especifique lo contrario.

Teorema 1.3.7. *Sean $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme y A un subconjunto de X . Entonces, la topología generada por la uniformidad $\mathcal{U}_A$ en A , coincide su topología de subespacio de X , donde X es considerado con la topología $\tau_{\mathcal{U}}$.*

Teorema 1.3.8. *Sea $\{(X_s, \mathcal{U}_s)\}_{s \in S}$ una familia de espacios uniformes. Entonces, la topología inducida por la uniformidad $\prod_{s \in S} \mathcal{U}_s$ en $\prod_{s \in S} X_s$ coincide con la topología producto de los espacios topológicos $\{(X_s, \tau_{\mathcal{U}_s})\}_{s \in S}$.*

Teorema 1.3.9. *Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme. Entonces, el espacio topológico $(X, \tau_{\mathcal{U}})$ es Tychonoff.*

El Ejemplo 1.3.3 parece sugerirnos que a partir de una métrica, se puede definir una base para una uniformidad, lo cual, en efecto, es posible, pues dado un espacio métrico (X, d) , podemos definir, para cada $\epsilon > 0$,

$$U_{\epsilon} = \{(x, y) \in X \times X : d(x, y) < \epsilon\}.$$

Es fácil ver que la familia $\{U_{\epsilon} : \epsilon > 0\}$ cumple las condiciones del Lema 1.3.2, y, por lo tanto, forma una base para una uniformidad que denotaremos por $\mathcal{U}_d$.

Teorema 1.3.10. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces, la topología $\tau_{\mathcal{U}_d}$ inducida por la uniformidad $\mathcal{U}_d$ coincide con la topología τ_d inducida por la métrica d .*

Demostración. Basta notar que para cada $x \in X$ y $\epsilon > 0$, $B_d(x, \epsilon) = U_{\epsilon}(x)$. $\square$

El siguiente teorema de metrizableidad nos será de gran utilidad en el Capítulo 3.

Teorema 1.3.11. *[3] Un espacio topológico (X, τ) es metrizable si y solo si existe una uniformidad $\mathcal{U}$ en X con base numerable, tal que $\tau_{\mathcal{U}} = \tau$.*

En el caso de un espacio uniforme $(X, \mathcal{U})$, consideramos $\mathcal{C}(X)$ y $\mathcal{K}(X)$ respecto a la topología $\tau_{\mathcal{U}}$. Además, notemos que $\mathcal{K}(X) \subset \mathcal{C}(X)$ pues $(X, \tau_{\mathcal{U}})$ es Tychonoff.

Definición 1.3.12. *Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme. Para cada $U \in \mathcal{U}$ y cada $A \subset X$, definimos*

$$U(A) = \bigcup_{x \in A} U(x).$$

Ahora, para cada $U \in \mathcal{U}$, definimos

$$\mathcal{K}[U] = \{(A, B) \in \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) : B \subset U(A), A \subset U(B)\},$$

$$\mathcal{C}[U] = \{(A, B) \in \mathcal{C}(X) \times \mathcal{C}(X) : B \subset U(A), A \subset U(B)\}.$$

Los siguientes dos resultados son bastante conocidos en la teoría de uniformidades en hiperespacios, es por ello que se omitirá su demostración (ver [6]).

Teorema 1.3.13. *Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme. Entonces, $\{\mathcal{K}[U] : U \in \mathcal{U}\}$ es una base para una uniformidad $\mathcal{K}(\mathcal{U})$ en $\mathcal{K}(X)$.*

Teorema 1.3.14. *Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme. Entonces, $\{\mathcal{C}[U] : U \in \mathcal{U}\}$ es una base para una uniformidad $\mathcal{C}(\mathcal{U})$ en $\mathcal{C}(X)$.*

Definición 1.3.15. *Sea D un conjunto no vacío y $\geq$ una relación binaria en D . Diremos que D es dirigido por $\geq$ si $\geq$ es reflexiva y transitiva, con la propiedad adicional de que para cualesquiera $x, y \in D$, existe $z \in D$ tal que $z \geq x$ y $z \geq y$.*

Definición 1.3.16. *Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme.*

(a) *Una red de Cauchy en X consiste de un conjunto dirigido D y una función $f : D \rightarrow X$ tal que, para cada $U \in \mathcal{U}$, existe $N \in D$ tal que $(f(m), f(n)) \in U$ para cualesquiera $n, m \geq N$.*

(b) *Diremos que una red de Cauchy converge a $x \in X$ si para cada $U \in \mathcal{U}$ existe $N \in D$ tal que $(x, f(n)) \in U$ para todo $n \geq N$.*

(c) *Si toda red de Cauchy en X converge, diremos que el espacio uniforme $(X, \mathcal{U})$ es completo.*

En particular, a una red se le llama sucesión cuando su conjunto dirigido es $\mathbb{N}$.

Definición 1.3.17. *Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme. Diremos que X es precompacto si para cada $U \in \mathcal{U}$, existen $M_1, M_2, \dots, M_n \subset X$ tales que $M_i \times M_i \subset U$, para todo $i = 1, \dots, n$, y $X = \bigcup_{i=1}^n M_i$.*

Teorema 1.3.18. *[12] Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme, entonces, $(\mathcal{K}(X), \mathcal{K}(\mathcal{U}))$ es completo (precompacto) si y solo si $(X, \mathcal{U})$ es completo (precompacto).*

Para finalizar este capítulo, recordemos que dado un espacio topológico (X, τ) , se puede dar una topología τ_V en $\mathcal{C}(X)$ conocida como la topología de Vietoris. Una base para dicha topología es la familia de todos los conjuntos de la siguiente forma

$$\mathcal{V}(V_1, V_2, \dots, V_k) = \left\{ B \in \mathcal{C}(X) : B \subset \bigcup_{i=1}^k V_i \text{ y } B \cap V_i \neq \emptyset \text{ para } i = 1, \dots, k \right\},$$

donde $V_1, V_2, \dots, V_k$ es una sucesión finita de abiertos no vacíos de X .

Teorema 1.3.19. [6] Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme. Entonces, la topología $\tau_{\mathcal{K}(\mathcal{U})}$ inducida por la uniformidad $\mathcal{K}(\mathcal{U})$ en $\mathcal{K}(X)$, coincide con la topología de Vietoris inducida por $\tau_{\mathcal{U}}$ en $\mathcal{K}(X)$.

Capítulo 2

Espacios métricos difusos

En la literatura existen diferentes definiciones de espacio métrico difuso. En esta tesis se utilizará la definición introducida por A. George y P. Veeramani en [7]. A continuación, presentamos algunas propiedades básicas de los espacios métricos difusos así como algunos ejemplos.

Definición 2.0.1 (George-Veeramani, 1994). *Un espacio métrico difuso, en el sentido de George y Veeramani, es una terna ordenada $(X, M, *)$, donde X es un conjunto no vacío, $*$ es una t -norma continua y M es un conjunto difuso en $X \times X \times (0, \infty)$ que satisface las siguientes condiciones, para cada $x, y, z \in X$, $s, t > 0$:*

(MD1) $M(x, y, t) > 0$;

(MD2) $M(x, y, t) = 1$ para todo $t > 0$ si y solo si $x = y$;

(MD3) $M(x, y, t) = M(y, x, t)$;

(MD4) $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$;

(MD5) $M(x, y, -) : (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ es continua.

*Si $(X, M, *)$ es un espacio métrico difuso, diremos que $(M, *)$ es una métrica difusa en X .*

Lema 2.0.2. *Sea $*$: $\mathbb{I} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ una t -norma continua tal que $a, b \neq 0$ implica $a * b \neq 0$. Si $(M_1, *)$ y $(M_2, *)$ son métricas difusas en un conjunto X , definimos*

$$M(x, y, t) = M_1(x, y, t) * M_2(x, y, t).$$

Entonces, $(M, *)$ es una métrica difusa en X .

Demostración. Ya que $0 < M_1(x, y, t), M_2(x, y, t) \leq 1$, entonces, por las propiedades de $*$,

$$0 < M_1(x, y, t) * M_2(x, y, t) \leq 1,$$

es decir, $0 < M(x, y, t) \leq 1$. Por lo tanto, M es un conjunto difuso en X .

(MD1) Se sigue del argumento anterior.

(MD2) Sea $t_0 > 0$, vamos a probar que $M_1(x, y, t_0) \neq 1$ y $M_2(x, y, t_0) \neq 1$ implica que $M_1(x, y, t_0) * M_2(x, y, t_0) \neq 1$. Sin pérdida de generalidad, digamos $M_1(x, y, t_0) \leq M_2(x, y, t_0) < 1$, entonces, por las propiedades de $*$,

$$M_1(x, y, t_0) * M_2(x, y, t_0) \leq M_2(x, y, t_0) * 1 = M_2(x, y, t_0) < 1.$$

Tomando la forma contrapositiva de lo que acabamos de mostrar, se tiene que $M_1(x, y, t_0), M_2(x, y, t_0) = 1$, implica $M_1(x, y, t_0) = 1$ o $M_2(x, y, t_0) = 1$. Así, ya que t_0 fue arbitrario, $x = y$.

Por otro lado, si $x = y$, entonces $M_1(x, y, t), M_2(x, y, t) = 1$ para todo $t > 0$, es decir, $M(x, y, t) = M_1(x, y, t) * M_2(x, y, t) = 1 * 1 = 1$.

(MD3) $M(x, y, t) = M_1(x, y, t) * M_2(x, y, t) = M_1(y, x, t) * M_2(y, x, t)$.

(MD4) Por las propiedades de $*$, se tiene

$$\begin{aligned} M(x, y, t) * M(y, z, s) &= [M_1(x, y, t) * M_2(x, y, t)] * [M_1(y, z, s) * M_2(y, z, s)] \\ &= [M_1(x, y, t) * M_1(y, z, s)] * [M_2(x, y, t) * M_2(y, z, s)] \\ &\leq M_1(x, z, t + s) * M_2(x, z, t + s) \\ &= M(x, z, t + s). \end{aligned}$$

(MD5) Vamos a verificar que $M(x, y, -) : (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ es continua en cada uno de sus puntos. Sean $t_0 > 0$ y $W \subset [0, 1]$ una vecindad abierta de $M(x, y, t_0)$, es decir, $M_1(x, y, t_0) * M_2(x, y, t_0) \in W$. Dado que $*$ es continua, existen abiertos $V_1, V_2 \subset [0, 1]$ tales que $M_1(x, y, t_0) \in V_1$, $M_2(x, y, t_0) \in V_2$ y

$$V_1 * V_2 \subset W.$$

Ahora, por la continuidad de M_1 y M_2 , existen abiertos $U_1, U_2 \subset (0, \infty)$ que contienen a t_0 , tales que $M_1(x, y, U_1) \subset V_1$ y $M_2(x, y, U_2) \subset V_2$. Tomamos la

vecindad abierta $U = U_1 \cap U_2$ de t_0 , y claramente

$$M(x, y, U) = M_1(x, y, U) * M_2(x, y, U) \subset V_1 * V_2 \subset W.$$

Por lo tanto, M es continua en t_0 . $\square$

Lema 2.0.3. *La función $M(x, y, -) : (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ es no decreciente para todo $x, y \in X$.*

Demostración. Sean $t, s \in (0, \infty)$, con $0 < t < s$. Supongamos que

$$M(x, y, t) > M(x, y, s),$$

entonces,

$$M(x, y, t) * M(y, y, s - t) \leq M(x, y, s) < M(x, y, t).$$

Pero $M(y, y, s - t) = 1$, por lo tanto,

$$M(x, y, t) = M(x, y, t) * M(y, y, s - t) < M(x, y, t),$$

lo cual es una contradicción. $\square$

Lema 2.0.4. *Sea $(X, M, *)$ un espacio métrico difuso. Entonces, para cada $x, y \in X$, $t > 0$ y $r \in (0, 1)$, tales que $M(x, y, t) > 1 - r$, existe $t_0 \in (0, t)$ tal que $M(x, y, t_0) > 1 - r$.*

Demostración. Sean $x, y \in X$, $t > 0$ y $r \in (0, 1)$ tales que $M(x, y, t) > 1 - r$. Notemos que $(1 - r, 1]$ es un abierto que contiene a $M(x, y, t)$, entonces, dado que $M(x, y, -)$ es continua, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$M(x, y, (0, t + \epsilon)) \subset (1 - r, 1].$$

Por lo tanto, tomando $t_0 \in (0, t)$, se obtiene el resultado. $\square$

Ejemplo 2.0.5. *Sea $X = \mathbb{R}$, definimos $a * b = ab$ (el producto usual de números reales) y*

$$M(x, y, t) = \exp\left(-\frac{|x - y|}{t}\right),$$

*para cada $x, y \in X$, $t \in (0, \infty)$. Entonces, $(X, M, *)$ es un espacio métrico difuso.*

Demostración. Observemos que, efectivamente, M es un conjunto difuso en $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0, \infty)$, pues, para todo $x, y \in \mathbb{R}$ y $t \in (0, \infty)$, se tiene $\exp\left(\frac{|x-y|}{t}\right) \geq 1$, por tanto $\exp\left(-\frac{|x-y|}{t}\right) \in (0, 1]$

(MD1) Se tiene de la observación anterior.

(MD2) $M(x, y, t) = 1$ si y solo si $\exp\left(-\frac{|x-y|}{t}\right) = 1$, lo cual es equivalente a $\frac{|x-y|}{t} = 0$, es decir, $x = y$.

(MD3) Se sigue del hecho $|x - y| = |y - x|$.

(MD4) Sabemos que $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$, además, $\frac{t+s}{s} > 1$ y $\frac{t+s}{t} > 1$, entonces,

$$|x - z| \leq \frac{t+s}{t}|x - y| + \frac{t+s}{s}|y - z|,$$

es decir,

$$\frac{|x - z|}{t+s} \leq \frac{|x - y|}{t} + \frac{|y - z|}{s}.$$

Por lo tanto,

$$\exp\left(\frac{|x - z|}{t+s}\right) \leq \exp\left(\frac{|x - y|}{t}\right) \exp\left(\frac{|y - z|}{s}\right)$$

y así

$$\begin{aligned} M(x, y, t)M(y, z, s) &= \exp\left(-\frac{|x - y|}{t}\right) \exp\left(-\frac{|y - z|}{s}\right) \\ &\leq \exp\left(-\frac{|x - z|}{t+s}\right) = M(x, z, t+s). \end{aligned}$$

(MD5) $M(x, y, -) : (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ es continua pues la podemos ver como composición de funciones continuas. $\square$

Ejemplo 2.0.6. Sea (X, d) un espacio métrico y $a * b = ab$. Dados $k, n, m \in \mathbb{R}^+$, para cada $x, y \in X$, $t > 0$, definimos

$$M(x, y, t) = \frac{kt^n}{kt^n + md(x, y)},$$

Entonces, $(X, M, *)$ es un espacio métrico difuso.

Demostración. Notemos que $kt^n + md(x, y) \geq kt^n > 0$, entonces,

$$1 \geq \frac{kt^n}{kt^n + md(x, y)} > 0,$$

por lo tanto, M es un conjunto difuso en $X \times X \times (0, \infty)$.

(MD1) Ya probamos que $M(x, y, t) > 0$.

(MD2) $M(x, y, t) = 1$ si y solo si $kt^n = kt^n + md(x, y)$, lo cual es equivalente a $d(x, y) = 0$, es decir, $x = y$.

(MD3) Se sigue de que $d(x, y) = d(y, x)$.

(MD4) Se tiene $\frac{(t+s)^n}{s^n} > 1$, $\frac{(t+s)^n}{t^n} > 1$ y $\frac{m(t+s)^n d(x, y) d(y, z)}{kt^n s^n} \geq 0$, entonces, usando la desigualdad triangular de d ,

$$d(x, z) \leq \frac{(t+s)^n}{t^n} d(x, y) + \frac{(t+s)^n}{s^n} d(y, z) + \frac{m(t+s)^n}{kt^n s^n} d(x, y) d(y, z),$$

multiplicando por $k^2 t^n s^n m$ y sumando $k^3 t^n s^n (t+s)^n$, obtenemos

$$\begin{aligned} k^3 t^n s^n (t+s)^n + k^2 t^n s^n m d(x, z) &\leq k^2 (t+s)^n s^n m d(x, y) + k^2 (t+s)^n t^n m d(y, z) \\ &\quad + k(t+s)^n m^2 d(x, y) d(y, z) + k^3 t^n s^n (t+s)^n. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$k^2 t^n s^n [k(t+s)^n + md(x, z)] \leq k(t+s)^n (kt^n + md(x, y))(ks^n + md(y, z))$$

y así,

$$\frac{kt^n}{kt^n + md(x, y)} \cdot \frac{ks^n}{ks^n + md(y, z)} \leq \frac{k(t+s)^n}{k(t+s)^n + md(x, z)}.$$

(MD5) Es claro que $M(x, y, -) : (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ es continua, pues $f(t) = kt^n$ y $g(t) = kt^n + md(x, y)$ son continuas y $g(t) \neq 0$, por tanto, f/g también es continua. $\square$

Para el caso $k = m = n = 1$, la métrica difusa $M_d(x, y, t) = \frac{t}{t+d(x, y)}$ recibe el nombre de *métrica difusa estándar asociada a d* .

Los siguientes ejemplos muestran que existen métricas difusas que no están definidas a partir de una métrica clásica.

Ejemplo 2.0.7. Sean X un conjunto no vacío, $f : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función inyectiva y $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, \infty)$ una función creciente y continua. Para $\alpha, \beta > 0$, definimos M como sigue

$$M(x, y, t) = \left(\frac{(\min \{f(x), f(y)\})^\alpha + g(t)}{(\max \{f(x), f(y)\})^\alpha + g(t)} \right)^\beta.$$

Entonces, $(M, \cdot)$ es una métrica difusa en X .

Demostración. Es claro que

$$0 < (\min \{f(x), f(y)\})^\alpha + g(t) \leq (\max \{f(x), f(y)\})^\alpha + g(t),$$

por tanto, M es un conjunto difuso en $X \times X \times (0, \infty)$.

(MD1) Ya probamos que $M(x, y, t) > 0$.

(MD2) $M(x, y, t) = 1$ si y solo si $(\min \{f(x), f(y)\})^\alpha = (\max \{f(x), f(y)\})^\alpha$, ya que $f(x), f(y) > 0$, entonces, $\min \{f(x), f(y)\} = \max \{f(x), f(y)\}$, es decir, $f(x) = f(y)$ - Usando la inyectividad de f se tiene $x = y$.

(MD3) Se sigue de la definición.

(MD4) Supongamos que $f(x) \leq f(z)$, entonces,

$$\begin{aligned} M(x, z, t + s) &= \left(\frac{f(x)^\alpha + g(t + s)}{f(z)^\alpha + g(t + s)} \right)^\beta \\ &= \left(\frac{f(x)^\alpha + g(t + s)}{f(y)^\alpha + g(t + s)} \right)^\beta \cdot \left(\frac{f(y)^\alpha + g(t + s)}{f(z)^\alpha + g(t + s)} \right)^\beta. \end{aligned}$$

Consideremos los siguientes casos:

Caso 1: $f(x) \leq f(y) \leq f(z)$.

Dado que g es creciente y que $f(y)^\alpha - f(x)^\alpha \geq 0$, se tiene

$$(f(y)^\alpha - f(x)^\alpha)g(t + s) \geq (f(y)^\alpha - f(x)^\alpha)g(t).$$

Sumando $f(x)^\alpha f(y)^\alpha + g(t)g(t + s)$ en ambos lados, reagrupando los términos y factorizando, obtenemos

$$(f(x)^\alpha + g(t))(f(y)^\alpha + g(t + s)) \leq (f(y)^\alpha + g(t))(f(x)^\alpha + g(t + s)).$$

Por lo tanto,

$$\frac{f(x)^\alpha + g(t)}{f(y)^\alpha + g(t)} \leq \frac{f(x)^\alpha + g(t + s)}{f(y)^\alpha + g(t + s)}. \quad (2.1)$$

De forma similar se prueba que

$$\frac{f(y)^\alpha + g(t)}{f(z)^\alpha + g(t)} \leq \frac{f(y)^\alpha + g(t + s)}{f(z)^\alpha + g(t + s)}. \quad (2.2)$$

De las desigualdades 2.1 y 2.2, se obtiene

$$\begin{aligned} M(x, z, t + s) &= \left(\frac{f(x)^\alpha + g(t + s)}{f(y)^\alpha + g(t + s)} \right)^\beta \cdot \left(\frac{f(y)^\alpha + g(t + s)}{f(z)^\alpha + g(t + s)} \right)^\beta \\ &\geq \left(\frac{f(x)^\alpha + g(t)}{f(y)^\alpha + g(t)} \right)^\beta \cdot \left(\frac{f(y)^\alpha + g(t)}{f(z)^\alpha + g(t)} \right)^\beta \\ &= M(x, y, t) \cdot M(y, z, s). \end{aligned}$$

Caso 2: $f(y) \leq f(x) \leq f(z)$.

Con un procedimiento análogo al decrito en el caso 1, obtenemos

$$\frac{f(y)^\alpha + g(t)}{f(z)^\alpha + g(t)} \leq \frac{f(y)^\alpha + g(t + s)}{f(z)^\alpha + g(t + s)}. \quad (2.3)$$

Ya que $f(y) \leq f(x)$, entonces, $f(y)^{2\alpha} \leq f(x)^{2\alpha}$, además, $f(x)^\alpha - f(y)^\alpha \geq 0$ y $g(t + s) > g(t) \geq 0$. Por lo tanto,

$$f(x)^{2\alpha} + (f(x)^\alpha - f(y)^\alpha)g(t + s) \geq f(y)^{2\alpha} + (f(y)^\alpha - f(x)^\alpha)g(t).$$

Sumando $g(t)g(t + s)$ en ambos lados, reagrupando los términos y factorizando

$$(f(x)^\alpha + g(t))(f(x)^\alpha + g(t + s)) \geq (f(y)^\alpha + g(t))(f(y)^\alpha + g(t + s)),$$

es decir,

$$\frac{f(y)^\alpha + g(t)}{f(x)^\alpha + g(t)} \leq \frac{f(x)^\alpha + g(t + s)}{f(y)^\alpha + g(t + s)}. \quad (2.4)$$

Usando las desigualdades 2.3 y 2.4, obtenemos

$$\begin{aligned} M(x, z, t + s) &= \left(\frac{f(x)^\alpha + g(t + s)}{f(y)^\alpha + g(t + s)} \right)^\beta \cdot \left(\frac{f(y)^\alpha + g(t + s)}{f(z)^\alpha + g(t + s)} \right)^\beta \\ &\geq \left(\frac{f(y)^\alpha + g(t)}{f(x)^\alpha + g(t)} \right)^\beta \cdot \left(\frac{f(y)^\alpha + g(t)}{f(z)^\alpha + g(t)} \right)^\beta \\ &= M(x, y, t) \cdot M(y, z, s). \end{aligned}$$

Caso 3: $f(x) \leq f(z) \leq f(y)$.

De forma similar al caso 1,

$$\frac{f(x)^\alpha + g(t)}{f(y)^\alpha + g(t)} \leq \frac{f(x)^\alpha + g(t + s)}{f(y)^\alpha + g(t + s)}.$$

Y, de forma similar al caso 2,

$$\frac{f(z)^\alpha + g(t)}{f(y)^\alpha + g(t)} \leq \frac{f(y)^\alpha + g(t+s)}{f(z)^\alpha + g(t+s)}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} M(x, z, t+s) &= \left(\frac{f(x)^\alpha + g(t+s)}{f(y)^\alpha + g(t+s)} \right)^\beta \cdot \left(\frac{f(y)^\alpha + g(t+s)}{f(z)^\alpha + g(t+s)} \right)^\beta \\ &\geq \left(\frac{f(y)^\alpha + g(t)}{f(x)^\alpha + g(t)} \right)^\beta \cdot \left(\frac{f(z)^\alpha + g(t)}{f(y)^\alpha + g(t)} \right)^\beta \\ &= M(x, y, t) \cdot M(y, z, s). \end{aligned}$$

Finalmente, los casos cuando $f(x) > f(z)$ son análogos a los 3 casos expuestos.

(MD5) La continuidad de $M(x, y, -) : (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ se sigue de la continuidad de la función g .

□

Ejemplo 2.0.8. Sean X el intervalo cerrado $[a, b]$ y $K > |a| > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos la función $M_n : X^n \times X^n \times (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ como

$$M_n(x, y, t) = \prod_{i=1}^n \frac{\min\{x_i, y_i\} + K}{\max\{x_i, y_i\} + K},$$

donde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ y $t > 0$. Entonces, $(M_n, \cdot)$ es una métrica difusa en X^n .

Demostración. Ya que $K > |a| > 0$, para todo $i = 1, \dots, n$, $\min\{x_i, y_i\} + K > 0$ y $\max\{x_i, y_i\} + K > 0$. Además,

$$\min\{x_i, y_i\} + K \leq \max\{x_i, y_i\} + K,$$

por tanto, M_n es un conjunto difuso en $X^n \times X^n \times (0, \infty)$.

(MD1) Ya probamos que $M_n(x, y, t) > 0$.

(MD2) Claramente $x = y$ implica

$$M_n(x, y, t) = \prod_{i=1}^n \frac{\min\{x_i, y_i\} + K}{\max\{x_i, y_i\} + K} = \prod_{i=1}^n 1 = 1.$$

Para probar la otra implicación utilizaremos inducción. El caso $n = 1$ es evidente. Entonces supongamos que se cumple para $n - 1$ y probemoslo para n . Para ello, basta seguir el mismo razonamiento que se utilizó en (MD2) del lema 2.0.2 para concluir que

$$\frac{\min \{x_n, y_n\} + K}{\max \{x_n, y_n\} + K} = 1$$

y

$$\prod_{i=1}^{n-1} \frac{\min \{x_i, y_i\} + K}{\max \{x_i, y_i\} + K} = 1,$$

lo cual, por hipótesis de inducción implica $\frac{\min \{x_i, y_i\} + K}{\max \{x_i, y_i\} + K} = 1$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$, es decir, $x = y$.

(MD3) Se sigue de la definición.

(MD4) Vamos a probar esta propiedad por inducción. Para el caso $n = 1$ basta hacer un procedimiento análogo al descrito en la propiedad (MD4) del ejemplo 2.0.7. Entonces, supongamos que se cumple para $n - 1$ y probemoslo para n . Por hipótesis de inducción

$$\prod_{i=1}^{n-1} \frac{\min \{x_i, z_i\} + K}{\max \{x_i, z_i\} + K} \geq \prod_{i=1}^{n-1} \frac{\min \{x_i, y_i\} + K}{\max \{x_i, y_i\} + K} \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \frac{\min \{y_i, z_i\} + K}{\max \{y_i, z_i\} + K},$$

además, ya que el caso para una sola variable también se cumple,

$$\frac{\min \{x_n, z_n\} + K}{\max \{x_n, z_n\} + K} \geq \frac{\min \{x_n, y_n\} + K}{\max \{x_n, y_n\} + K} \cdot \frac{\min \{y_n, z_n\} + K}{\max \{y_n, z_n\} + K}.$$

Por lo tanto, combinando las desigualdades anteriores

$$\begin{aligned} M_n(x, z, t + s) &= \prod_{i=1}^{n-1} \frac{\min \{x_i, z_i\} + K}{\max \{x_i, z_i\} + K} \cdot \frac{\min \{x_n, z_n\} + K}{\max \{x_n, z_n\} + K} \\ &\geq \prod_{i=1}^{n-1} \frac{\min \{x_i, y_i\} + K}{\max \{x_i, y_i\} + K} \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \frac{\min \{y_i, z_i\} + K}{\max \{y_i, z_i\} + K} \\ &= M_n(x, y, t) \cdot M_n(y, z, s). \end{aligned}$$

(MD5) la función $M_n(x, y, -) : (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ es constante y por lo tanto continua. $\square$

Capítulo 3

Topología de los espacios métricos difusos

Este capítulo está basado en [7], [8], [9] y [10]. Veremos cómo un espacio métrico difuso también puede ser estudiado como un espacio topológico, además, se trasladan algunos conceptos y resultados propios de la teoría de espacios métricos a la teoría de espacios métricos difusos.

3.1. Topología inducida por una métrica difusa

Definición 3.1.1. Sea $(X, M, *)$ un espacio métrico difuso. Definimos la bola abierta $B_M(x, r, t)$ con centro en $x \in X$ y radio $r \in (0, 1)$, $t > 0$ como

$$B_M(x, r, t) = \{y \in X : M(x, y, t) > 1 - r\}.$$

Teorema 3.1.2. Sea $(X, M, *)$ un espacio métrico difuso. Definimos

$$\tau_M = \{A \subset X : \forall x \in A, \text{ existen } t > 0 \text{ y } r \in (0, 1) \text{ tales que } B_M(x, r, t) \subset A\}.$$

Entonces, τ_M es una topología en X .

Demostración. Se sigue directo de la definición que $\emptyset, X \in \tau_M$. Sean $A, B \in \tau$ y $x \in A \cap B$, entonces, existen $t_1, t_2 > 0$ y $r_1, r_2 \in (0, 1)$, tales que $B_M(x, r_1, t_1) \subset A$

y $B_M(x, r_2, t_2) \subset B$. Tomamos $t = \min\{t_1, t_2\}$ y $r = \min\{r_1, r_2\}$, entonces, para cada $y \in B_M(x, r, t)$, usando que la función $M(x, y, -)$ es no decreciente, se tiene

$$M(x, y, t_1) \geq M(x, y, t) > 1 - r > 1 - r_1$$

y

$$M(x, y, t_2) \geq M(x, y, t) > 1 - r > 1 - r_2.$$

Por lo tanto, $y \in B_M(x, r_1, t_2) \subset A$ y $y \in B_M(x, r_2, t_2)$, es decir,

$$B_M(x, r, t) \subset A \cap B.$$

Finalmente, sea $\mathcal{A} \subset \tau_M$, tomamos $x \in \bigcup \mathcal{A}$, entonces, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A$. Por lo tanto, existen $t > 0$ y $r \in (0, 1)$ tales que

$$B_M(x, t, r) \subset A \subset \bigcup \mathcal{A},$$

es decir, $\bigcup \mathcal{A}$ está en τ_M . □

A la topología τ_M se le conoce como la topología inducida por la métrica difusa $(M, *)$.

Teorema 3.1.3. *Sea $(X, M, *)$ un espacio métrico difuso. Entonces, para cada $x \in X$, $r \in (0, 1)$ y $t > 0$, la bola abierta $B_M(x, r, t)$ es un conjunto abierto.*

Demostración. Sean $x \in X$, $r \in (0, 1)$ y $t > 0$, tomamos $y \in B_M(x, r, t)$, es decir,

$$M(x, y, t) > 1 - r.$$

Entonces, por el lema 2.0.4, existe $t_0 \in (0, t)$ tal que $M(x, y, t_0) > 1 - r$, además, podemos encontrar un $s \in (0, 1)$ tal que

$$M(x, y, t_0) > 1 - s > 1 - r.$$

Por el inciso (a) del lema 1.2.8, existe $r_1 \in (0, 1)$ tal que

$$r_1 * M(x, y, t_0) \geq 1 - s.$$

Consideremos la bola abierta $B_M(y, 1 - r_1, t - t_0)$. Sea $z \in B_M(y, 1 - r_1, t - t_0)$, entonces,

$$M(x, z, t) \geq M(x, y, t_0) * M(y, z, t - t_0) \geq M(x, y, t_0) * r_1 \geq 1 - s > 1 - r,$$

por lo tanto, $z \in B_M(x, r, t)$, lo cual termina la demostración. $\square$

Teorema 3.1.4. *Sea $(X, M, *)$ un espacio métrico difuso. Entonces, para cada $x \in X$, la familia $\{B_M(x, 1/n, 1/n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una base local de x en (X, τ_M) .*

Demostración. Del teorema anterior se tiene que cada bola abierta es un conjunto abierto, además, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$M(x, x, 1/n) = 1 > 1 - \frac{1}{n},$$

es decir, $x \in B_M(x, 1/n, 1/n)$. Ahora, sea V un abierto en (X, τ_M) tal que $x \in V$, entonces, existen $r \in (0, 1)$ y $t > 0$ tales que $B_M(x, r, t) \subset V$. Tomamos $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$1/n_1 \in (0, r) \quad \text{y} \quad 1/n_2 \in (0, t),$$

definimos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Sea $y \in B_M(x, 1/n_0, 1/n_0)$, es decir, $M(x, y, 1/n_0) > 1 - 1/n_0$, entonces, usando que M es no decreciente, se tiene

$$M(x, y, t) \geq M(x, y, 1/n_0) > 1 - 1/n_0 > 1 - r,$$

por lo tanto, $y \in B_M(x, r, t)$. Así,

$$B_M(x, 1/n_0, 1/n_0) \subset B_M(x, r, t) \subset V,$$

lo cual termina la demostración. $\square$

Corolario 3.1.5. *Sea $(X, M, *)$ un espacio métrico difuso. Entonces, el espacio topológico (X, τ_M) es primero numerable.*

Demostración. Por el teorema anterior, para cada $x \in X$, la familia

$$\{B_M(x, 1/n, 1/n) : n \in \mathbb{N}\}$$

es una base local de x en (X, τ_M) , además, es claro que dicha familia es numerable. Por lo tanto, (X, τ_M) es primero numerable. $\square$

En el ejemplo 2.0.6 vimos que dado un espacio métrico (X, d) siempre podemos definir un espacio métrico difuso $(X, M_d, \cdot)$, donde $M_d : X \times X \times (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ es la métrica difusa estandar asociada a d , definida como

$$M_d(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}.$$

Teorema 3.1.6. *Sean (X, d) un espacio métrico y M_d la métrica difusa estandar asociada a d . Entonces, la topología generada por d , coincide con la topología generada por M_d .*

Demostración. Sean $x \in X$ y $\epsilon > 0$, consideremos la bola abierta $B_d(x, \epsilon)$. Notemos que para $t = 1$ y $r = \frac{\epsilon}{1+\epsilon}$, se tiene $B_{M_d}(x, r, t) \subset B_d(x, \epsilon)$, pues si $y \in B_{M_d}(x, r, t)$, entonces,

$$M_d(x, y, t) = \frac{1}{1 + d(x, y)} > 1 - \frac{\epsilon}{1 + \epsilon} = \frac{1}{1 + \epsilon},$$

es decir, $d(x, y) < \epsilon$.

Ahora, sea $t > 0$ y $r \in (0, 1)$, consideramos la bola abierta $B_{M_d}(x, r, t)$. Notemos que para $\epsilon = \frac{tr}{1-r}$, se tiene $B_d(x, \epsilon) \subset B_{M_d}(x, r, t)$, pues si $y \in B_d(x, \epsilon)$, entonces,

$$t + d(x, y) < t + \frac{tr}{1-r} = \frac{t}{1-r},$$

es decir,

$$M_d(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)} > 1 - r,$$

por lo tanto, $y \in B_{M_d}(x, r, t)$. □

3.2. Axiomas de separación en (X, τ_M)

Teorema 3.2.1. *Sea $(X, M, *)$ un espacio métrico difuso. Entonces, el espacio topológico (X, τ_M) es Hausdorff.*

Demostración. Tomamos $x, y \in X$, con $x \neq y$, entonces, para $t > 0$,

$$0 < M(x, y, t) < 1.$$

Podemos tomar r_0 tal que $M(x, y, t) < r_0 < 1$, por lo tanto, usando el inciso (b) del Lema 1.2.8, existe r_1 tal que $r_1 * r_1 \geq r_0$. Supongamos que existe algún $z \in B_M(x, 1 - r_1, t/2) \cap B_M(y, 1 - r_1, t/2)$, entonces,

$$M(x, y, t) \geq M(x, z, t/2) * M(z, y, t/2) > r_1 * r_1 \geq r_0 > M(x, y, t),$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto,

$$B_M(x, 1 - r_1, t/2) \cap B_M(y, 1 - r_1, t/2) = \emptyset,$$

así, $(X, M, *)$ es Hausdorff. □

Teorema 3.2.2. *Sea $(X, M, *)$ un espacio métrico difuso. Entonces, (X, τ_M) es metrizable.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$U_n = \{(x, y) \in X \times X : M(x, y, 1/n) > 1 - 1/n\}.$$

Probemos que $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ cumple las condiciones del lema 1.3.2.

(BU1) Dado que $M(x, y, 1/n) = M(y, x, 1/n)$, entonces, para cada U_n ,

$$U_n = U_n^{-1}.$$

(BU2) Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces, por el inciso b) del Lema 1.2.8, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > 2n$ y

$$(1 - 1/m) * (1 - 1/m) > 1 - 1/n. \quad (3.1)$$

Para $(x, y), (y, z) \in U_m$, usando que M es no decreciente, se tiene,

$$M(x, z, 1/n) \geq M(x, z, 2/m) \geq M(x, y, 1/m) * M(y, z, 1/m), \quad (3.2)$$

por lo tanto, combinando las ecuaciones 3.1 y 3.2,

$$M(x, z, 1/n) \geq (1 - 1/m) * (1 - 1/m) > 1 - 1/n,$$

es decir, $(x, z) \in U_n$. Así, hemos probado que $U_m^2 \subset U_n$.

(BU3) Sean $n, m \in \mathbb{N}$, digamos que $n \leq m$, entonces, para $(x, y) \in U_m$,

$$M(x, y, 1/n) \geq M(x, y, 1/m) > 1 - 1/m > 1 - 1/n,$$

es decir, $U_m \subset U_n$. Por lo tanto, $U_n \cap U_m = U_m$, lo cual prueba este punto.

(BU4) Sea $(x, y) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Fijemos $t > 0$ y probemos que $M(x, y, t) = 1$, para ello, primero notemos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $1/m < t$, entonces,

$$M(x, y, t) \geq M(x, y, 1/m).$$

Supongamos que $M(x, y, 1/m) < 1$, esto implica que existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $1/r < 1 - M(x, y, 1/m)$ y $1/r < 1/m$. Por lo tanto, ya que $(x, y) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ (en particular, $(x, y) \in U_r$),

$$1 - 1/r > M(x, y, 1/m) \geq M(x, y, 1/r) > 1 - 1/r,$$

lo cual es una contradicción. Así, $M(x, y, t) \geq M(x, y, 1/m) = 1$, es decir,

$$M(x, y, t) = 1.$$

Como $t > 0$ fue tomado arbitrariamente, concluimos que $x = y$. Además, es claro que para cada $x \in X$, $M(x, x, 1/n) = 1 > 1 - 1/n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, es decir, $(x, x) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Con esto concluimos que $\Delta_X = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$.

Entonces, por el Lema 1.3.2, $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base para alguna uniformidad $\mathcal{U}_M$ en X . Ahora, veamos que $\tau_M = \tau_{\mathcal{U}_M}$. Para ello, sean $A \in \tau_M$ y $x \in A$, entonces, por el Teorema 3.1.4, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_M(x, 1/n, 1/n) \subset A$, pero

$$B_M(x, 1/n, 1/n) = U_n[x],$$

por lo tanto, $A \in \tau_{\mathcal{U}_M}$. Por otro lado, si $A \in \tau_{\mathcal{U}_M}$, entonces, para cada $x \in A$, existe $U \in \mathcal{U}_M$ tal que $U[x] \subset A$, pero recordemos que $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base para $\mathcal{U}_M$, entonces, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$B_M(x, 1/n, 1/n) = U_n[x] \subset U[x] \subset A,$$

es decir, $A \in \tau_M$. Finalmente, por el Teorema 1.3.11, se concluye que (X, τ_M) es metrizable. $\square$

Observemos que el teorema anterior nos muestra como cada métrica difusa $(M, *)$ induce una uniformidad $\mathcal{U}_M$, la cual se llama la uniformidad inducida por la métrica difusa $(M, *)$.

3.3. Completez, precompacidad y compacidad

Definición 3.3.1. Sea $(X, M, *)$ un espacio métrico difuso.

(a) Diremos que una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ es de Cauchy si para cada $\epsilon \in (0, 1)$ y $t > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$M(x_n, x_m, t) > 1 - \epsilon$$

para todo $n, m \geq n_0$.

(b) Diremos que $(X, M, *)$ es completo si cada sucesión de Cauchy converge con respecto a la topología τ_M .

Teorema 3.3.2. [9] Sea $(X, M, *)$ un espacio métrico difuso. Entonces:

(a) Una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ es de Cauchy en $(X, M, *)$ si y solo si es una sucesión de Cauchy en el espacio uniforme $(X, \mathcal{U}_M)$.

(b) $(X, M, *)$ es completo si y solo si el espacio uniforme $(X, \mathcal{U}_M)$ es completo.

Definición 3.3.3. Un espacio métrico difuso $(X, M, *)$ es precompacto si para cada $\epsilon \in (0, 1)$ y $t > 0$, existe un subconjunto finito $A \subset X$ tal que $X = \bigcup_{a \in A} B_M(a, \epsilon, t)$.

Teorema 3.3.4. Un espacio métrico difuso es precompacto si y solo si cada sucesión tiene una subsucesión de Cauchy.

Demostración. Supongamos que $(X, M, *)$ es un espacio métrico difuso precompacto, entonces para cada $m \in \mathbb{N}$, existe un conjunto finito $A_m \subset X$ tal que

$$X = \bigcup_{a \in A_m} B_M(a, 1/m, 1/m).$$

Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X . Tomemos $m = 1$, entonces, ya que A_1 es finito, debe existir $a_1 \in A_1$ tal que hay infinitos elementos de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $B_M(a_1, 1, 1)$, es decir, existe una subsucesión $\{x_{1(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_{1(n)} \in B_M(a_1, 1, 1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De forma similar, para $m = 2$, existen $a_2 \in A_2$ y una subsucesión $\{x_{2(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $\{x_{1(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_{2(n)} \in B_M(a_2, 1/2, 1/2)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Continuando con este razonamiento, para cada $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, existen $a_m \in A_m$ y

una subsucesión $\{x_{m(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $\{x_{(m-1)(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_{m(n)} \in B_M(a_m, 1/m, 1/m)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, consideremos la sucesión $\{x_{n(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, la cual, claramente, es una subsucesión de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, entonces, basta probar que es de Cauchy. Para ello, sean $r \in (0, 1)$ y $t > 0$, usando el inciso (b) del Lema 1.2.8, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2/n_0 < t$ y

$$(1 - 1/n_0) * (1 - 1/n_0) > 1 - r. \quad (3.3)$$

Por la construcción de la sucesión $\{x_{n(n)}\}$, se tiene, para todo $m \geq n_0$, $x_{m(m)} \in B_M(a_{n_0}, 1/n_0, 1/n_0)$, entonces, combinando esto con la ecuación 3.3, se tiene que, para todo $k, l \geq n_0$,

$$\begin{aligned} M(x_{k(k)}, x_{l(l)}, t) &\geq M(x_{k(k)}, x_{l(l)}, 2/n_0) \\ &\geq M(x_{k(k)}, a_{n_0}, 1/n_0) * M(a_{n_0}, x_{l(l)}, 1/n_0) \\ &> 1 - r. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la sucesión $\{x_{n(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en $(X, M, *)$.

Para probar la otra implicación, supongamos que $(X, M, *)$ no es un espacio métrico difuso precompacto, entonces existen $r \in (0, 1)$ y $t > 0$ tales que para cada subconjunto finito $A \subset X$, $X \neq \bigcup_{a \in A} B_M(a, r, t)$. Por tanto, si fijamos $x_1 \in X$, debe existir $x_2 \in X \setminus B_M(x_1, r, t)$, más aún, debe existir $x_3 \in X \setminus \bigcup_{i=1}^2 B_M(x_i, r, t)$. Si continuamos con este razonamiento, podemos formar la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$x_{n+1} \in X \setminus \bigcup_{i=1}^n B_M(x_i, r, t).$$

Si fijamos $n_0 \in \mathbb{N}$, por la construcción de la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, se tiene que para cada $l, k \geq n_0$, digamos $l \geq k$,

$$x_l \in X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^k B_M(x_i, r, t) \cup \bigcup_{i=k+1}^{l-1} B_M(x_i, r, t) \right),$$

es decir,

$$M(x_l, x_k, t) < 1 - r,$$

lo cual implica que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no puede tener una subsucesión de Cauchy. Por tanto, $(X, M, *)$ es precompacto. $\square$

Corolario 3.3.5. *Sea $(X, M, *)$ un espacio métrico difuso. Entonces, $(X, M, *)$ es precompacto si y solo si $(X, \mathcal{U}_M)$ es precompacto.*

Demostración. Supongamos que $(X, M, *)$ es precompacto. Sea $U_n \in \mathcal{U}_M$, donde $U_n = \{(x, y) \in X \times X : M(x, y, 1/n) > 1 - 1/n\}$. Por el inciso (b) del Lema 1.2.8, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > 2n$ y $(1 - 1/m) * (1 - 1/m) > 1 - 1/n$. Ya que $(X, M, *)$ es precompacto, existe un subconjunto finito $A \subset X$ tal que

$$X = \bigcup_{a \in A} B_M(a, 1/m, 1/m).$$

Notemos que para cada $a \in A$, si $(x, y) \in B_M(a, 1/m, 1/m) \times B_M(a, 1/m, 1/m)$, entonces,

$$\begin{aligned} M(x, y, 1/n) &\geq M(x, y, 2/m) \\ &\geq M(x, a, 1/m) * M(a, y, 1/m) \\ &\geq (1 - 1/m) * (1 - 1/m) \\ &> 1 - 1/n, \end{aligned}$$

es decir, $(x, y) \in U_n$. Por tanto, $B_M(a, 1/m, 1/m) \times B_M(a, 1/m, 1/m) \subset U_n$, con lo cual, $(X, \mathcal{U}_M)$ es precompacto.

Por otro lado, si suponemos que $(X, \mathcal{U}_M)$ es precompacto, entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $k_n \in \mathbb{N}$ y $M_1^n, M_2^n, \dots, M_{k_n}^n \subset X$ tales que $M_i^n \times M_i^n \subset U_n$, para todo $i = 1, 2, \dots, k_n$, y $X = \bigcup_{i=1}^{k_n} M_i^n$. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X . De forma similar al teorema anterior, notemos que para $m = 1$, existen $i_1 \in \{1, 2, \dots, k_1\}$ y una subsucesión $\{x_{1(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_{1(n)} \in M_{i_1}^1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Más aún, para cada $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, existen $i_m \in \{1, 2, \dots, k_m\}$ y una subsucesión $\{x_{m(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $\{x_{(m-1)(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_{m(n)} \in M_{i_m}^m$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Consideremos la sucesión $\{x_{n(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ y probemos que es de Cauchy. Sean $r \in (0, 1)$ y $t > 0$, entonces, usando el Lema 1.2.8, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2/n_0 < t$ y $(1 - 1/n_0) * (1 - 1/n_0) > 1 - r$. Por la construcción de la sucesión $\{x_{n(n)}\}$, se tiene, para todo $m \geq n_0$, $x_{m(n)} \in M_{i_m}^{n_0}$, lo cual implica que $M(x_{m(n)}, z, 1/n_0) > 1 - 1/n_0$ para cualquier $z \in M_{i_m}^{n_0}$, pues $M_{i_m}^{n_0} \times M_{i_m}^{n_0} \subset U_{n_0}$. Por lo tanto, para todo $k, l \geq n_0$

y un $z \in M_{i_{n_0}}^{n_0}$, se tiene

$$\begin{aligned} M(x_{k(k)}, x_{l(l)}, t) &\geq M(x_{k(k)}, x_{l(l)}, 2/n_0) \\ &\geq M(x_{k(k)}, z, 1/n_0) * M(z, x_{l(l)}, 1/n_0) \\ &> 1 - r. \end{aligned}$$

Así, cualquier sucesión en $(X, M, *)$ tiene una subsucesión de Cauchy, por tanto $(X, M, *)$ es precompacto. $\square$

Lema 3.3.6. *Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en un espacio métrico difuso $(X, M, *)$. Si $x \in X$ es un punto de acumulación de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, entonces, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x .*

Demostración. Ya que x es punto de acumulación de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, existe una subsucesión $\{x_{k(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a x . Para probar que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x , sean $r \in (0, 1)$ y $t > 0$, entonces, por el lema 1.2.8, existe $s > 0$ tal que $(1 - s) * (1 - s) > 1 - r$. Por la convergencia de $\{x_{k(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq n_0$, $x_{k(n)} \in B_M(x, s, t/2)$, es decir,

$$M(x, x_{k(n)}, t/2) > 1 - s.$$

Por otro lado, ya que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy, existe $n_1 \geq k(n_0)$ tal que, para todo $n, m \geq n_1$, $M(x_n, x_m, t/2) > 1 - s$. Por lo tanto, para cada $n \geq n_1$, ya que $n_1 \geq k(n_0) \geq n_0$,

$$\begin{aligned} M(x, x_n, t) &\geq M(x, x_{k(n)}, t/2) * M(x_{k(n)}, x_n, t/2) \\ &\geq (1 - s) * (1 - s) \\ &> 1 - r, \end{aligned}$$

es decir, $x_n \in B_M(x, r, t)$ para todo $n \geq n_1$, lo cual implica que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x . $\square$

Definición 3.3.7. *Un espacio métrico difuso $(X, M, *)$ es compacto si (X, τ_M) es un espacio topológico compacto.*

Teorema 3.3.8. *Un espacio métrico difuso es compacto si y solo si es precompacto y completo.*

Demostración. Sea $(X, M, *)$ un espacio métrico difuso compacto. Entonces, para cada $t > 0$ y $r \in (0, 1)$, la cubierta abierta $\{B_M(x, r, t)\}$ tiene una subcubierta finita, lo cual, claramente, implica que $(X, M, *)$ es precompacto.

Ahora, sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $(X, M, *)$. Ya que $(X, M, *)$ es compacto, la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene un punto de acumulación $x \in X$. Entonces, por el Lema 3.3.6, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x , lo cual implica que $(X, M, *)$ es completo.

Por otro lado, supongamos que $(X, M, *)$ es precompacto y completo. Para probar que $(X, M, *)$ es compacto, recordemos que en espacios métricos la compacidad es equivalente a la compacidad secuencial, entonces basta probar que (X, τ_M) es secuencialmente compacto, pues, por el Teorema 3.2.2, (X, τ_M) es metrizable. Para ello, sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X , entonces, por el Teorema 3.3.4, la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $\{x_{k(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy. Ya que $(X, M, *)$ es completo, la sucesión $\{x_{k(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge respecto a la topología τ_M , por lo tanto, (X, τ_M) es secuencialmente compacto, lo cual termina la demostración. $\square$

3.4. Completación métrica difusa

Es un hecho conocido que todo espacio métrico tiene una única completación salvo isometrías. En esta sección vamos a trasladar estos conceptos a la teoría de espacios métricos difusos y veremos que dicho resultado no se cumple en este contexto.

Definición 3.4.1. Sean $(X, M, *)$ y $(Y, N, \star)$ espacios métricos difusos.

(a) Diremos que una función $f : X \rightarrow Y$ es una isometría si para cada $x, y \in X$ y $t > 0$, $M(x, y, t) = N(f(x), f(y), t)$.

(b) Diremos que $(X, M, *)$ y $(Y, N, \star)$ son isométricos si existe una isometría $f : X \rightarrow Y$ tal que $f(X) = Y$.

Teorema 3.4.2. Sean $(X, M, *)$ y $(Y, N, \star)$ espacios métricos difusos y $f : X \rightarrow Y$ una isometría. Entonces, f es inyectiva

Demostración. Supongamos que existen $x, y \in X$ tales que $x \neq y$ y $f(x) = f(y)$,

entonces, existe $t > 0$ tal que

$$M(x, y, t) < 1 \quad \text{y} \quad N(f(x), f(y), t) = 1.$$

Pero, f es isometría, por tanto,

$$1 > M(x, y, t) = N(f(x), f(y), t) = 1,$$

lo cual es una contradicción. Así, f es inyectiva. □

Teorema 3.4.3. *Sean $(X, M, *)$ y $(Y, N, \star)$ espacios métricos difusos y $f : X \rightarrow Y$ una isometría tal que $f(X) = Y$. Entonces, f es una función abierta y continua, es decir, f es un homeomorfismo.*

Demostración. Sea U abierto en Y . Tomamos $x \in f^{-1}(U)$, es decir, $f(x) \in U$, por lo tanto, existen $r \in (0, 1)$ y $t > 0$ tales que

$$B_N(f(x), r, t) \subset U.$$

Notemos que $B_M(x, r, t) \subset f^{-1}(U)$, pues, si $z \in B_M(x, r, t)$,

$$N(f(x), f(z), t) = M(x, z, t) > 1 - r,$$

es decir,

$$f(z) \in B_N(f(x), r, t) \subset U,$$

por tanto, $z \in f^{-1}(U)$. Así, $f^{-1}(U)$ es abierto en X , con lo cual f es continua.

Para probar que f es abierta, basta tomar un abierto $V \subset X$ y probar que $f(V)$ es abierto en Y . Entonces, sea $y \in f(V)$, es decir, existe $x \in V$, tal que $f(x) = y$. Ya que V es abierto en X , existen $r \in (0, 1)$ y $t > 0$ tales que

$$B_M(x, r, t) \subset V.$$

Si $z \in B_N(y, r, t)$, usando que $f(X) = Y$, se tiene

$$M(x, f^{-1}(z), t) = N(y, z, t) > 1 - r,$$

es decir,

$$f^{-1}(z) \in B_M(x, r, t) \subset V,$$

por tanto, $z \in f(V)$. Con esto se tiene $B_N(y, r, t) \subset f(V)$, con lo cual, f es abierta. □

Definición 3.4.4. Sea $(X, M, *)$ un espacio métrico difuso. Una completación métrica difusa de $(X, M, *)$ es un espacio métrico difuso completo $(Y, N, \star)$ tal que $(X, M, *)$ es isométrico a un subespacio denso de Y .

Ahora veremos que no todos los espacios métricos difusos admiten una completación métrica difusa. El siguiente lema nos será de utilidad para dar un ejemplo de un espacio métrico difuso que no admite una completación métrica difusa.

Lema 3.4.5. Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$. Entonces,

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{\min\{n, m\}} - \frac{1}{\max\{n, m\}}.$$

Demostración. Consideremos el siguiente conjunto

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N} \setminus \{n\}, \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{\min\{n, m\}} - \frac{1}{\max\{n, m\}} \right\},$$

es suficiente probar por inducción que $A = \mathbb{N}$. Para probar que $1 \in A$, notemos que cualquier natural m distinto de 1, es mayor o igual que 2, es decir, $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{2}$, por lo tanto,

$$1 - \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{m} = \frac{1}{\min\{1, m\}} - \frac{1}{\max\{1, m\}},$$

lo cual prueba que $1 \in A$. Ahora, supongamos que $n \in A$ y probemos que $n+1 \in A$. Sea m un natural distinto de $n+1$, entonces, se tienen los siguientes 2 casos.

Caso 1: $m > n+1$.

Entonces, $m \geq n+2$, es decir, $\frac{1}{n+2} \geq \frac{1}{m}$. Por lo tanto,

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)+1} \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m} = \frac{1}{\min\{n+1, m\}} - \frac{1}{\max\{n+1, m\}}.$$

Caso 2: $m < n+1$.

Entonces, $m < n$ o $m = n$. Para el caso $m < n$, ya que $n \in A$, se tiene

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{\min\{n, m\}} - \frac{1}{\max\{n, m\}}. \quad (3.4)$$

Notemos que $(n+1)(n+2) \leq n(n+1)$, entonces,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)+1} &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &\leq \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Además, $\max\{n, m\} = n < n + 1 = \max\{n + 1, m\}$ y $\min\{n, m\} = m = \min\{n + 1, m\}$, por tanto,

$$\frac{1}{\min\{n, m\}} - \frac{1}{\max\{n, m\}} \leq \frac{1}{\min\{n + 1, m\}} - \frac{1}{\max\{n + 1, m\}}. \quad (3.6)$$

Así, usando 3.4, 3.5 y 3.6, obtenemos

$$\frac{1}{n + 1} - \frac{1}{(n + 1) + 1} \leq \frac{1}{\min\{n + 1, m\}} - \frac{1}{\max\{n + 1, m\}}.$$

Por otro lado, si $m = n$, entonces, de 3.5, se tiene

$$\frac{1}{n + 1} - \frac{1}{(n + 1) + 1} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n + 1} = \frac{1}{\min\{n + 1, m\}} - \frac{1}{\max\{n + 1, m\}},$$

lo cual termina la demostración. $\square$

Ejemplo 3.4.6. Sea $*$: $\mathbb{I} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ la t -norma continua definida para todo $a, b \in \mathbb{I}$ como

$$a * b = \max\{0, a + b - 1\}.$$

Consideremos dos sucesiones de puntos distintos $(x_n)_{n=3}^\infty, (y_n)_{n=3}^\infty$ tales que $A \cap B = \emptyset$, donde, $A = \{x_n : n \geq 3\}$ y $B = \{y_n : n \geq 3\}$. Tomamos $X = A \cup B$ y definimos M en $X \times X \times (0, \infty)$ como sigue:

$$(1) \quad M(x_n, x_m, t) = M(y_n, y_m, t) = 1 - \left(\frac{1}{\min\{n, m\}} - \frac{1}{\max\{n, m\}} \right),$$

$$(2) \quad M(x_n, y_m, t) = M(y_m, x_n, t) = \frac{1}{n} + \frac{1}{m},$$

para todo $n, m \geq 3$. Entonces, el espacio métrico difuso $(X, M, *)$ no admite una completación métrica difusa.

Demostración. Comencemos mostrando que, efectivamente, $(X, M, *)$ es un espacio métrico difuso. Primero, observemos que M está bien definida, pues $A \cap B = \emptyset$. Además, para todo $n, m \geq 3$,

$$0 < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < 1$$

y, dado que $0 \leq \frac{1}{\min\{n, m\}} - \frac{1}{\max\{n, m\}} < 1$,

$$0 < 1 - \left(\frac{1}{\min\{n, m\}} - \frac{1}{\max\{n, m\}} \right) \leq 1.$$

Por tanto, M , efectivamente, es un conjunto difuso en $X \times X \times (0, \infty)$.

Ahora, vamos a mostrar que $(M, *)$ es una métrica difusa en X .

(MD1) Se sigue del argumento anterior.

(MD2) Sean $x, y \in X$, supongamos que $M(x, y, t) = 1$ para todo $t > 0$. La expresión (2) no puede valer 1, entonces, necesariamente se tiene que $x, y \in A$ o $x, y \in B$; sin pérdida de generalidad, supongamos que $x, y \in A$. Por tanto, existen $n, m \geq 3$ tales que $x = x_n$ y $y = x_m$, entonces, $M(x_n, x_m, t) = 1$, es decir, $\frac{1}{\min\{n, m\}} = \frac{1}{\max\{n, m\}}$, lo cual implica $n = m$. Así, obtenemos que $x = x_n = x_m = y$.

Si ahora suponemos que $x = y$, entonces, dado que $A \cap B = \emptyset$, $x, y \in A$ o $x, y \in B$, nuevamente, sin pérdida de generalidad, digamos $x, y \in A$, es decir, existe $n \geq 3$ tal que $x_n = x = y$. Sea $t > 0$, entonces,

$$M(x, y, t) = M(x_n, x_n, t) = 1 - \frac{1}{\min\{n, n\}} + \frac{1}{\max\{n, n\}} = 1.$$

(MD3) Se sigue de la definición de M .

(MD4) Sean $x, y, z \in X$ y $s, t > 0$. Notemos que para probar

$$M(x, z, t) * M(z, y, s) \leq M(x, y, t + s),$$

debemos probar 8 diferentes casos, dependiendo de si los elementos pertenecen a A o B . Antes de probar cada caso, observemos que si $M(x, z, t) * M(z, y, s) = 0$, entonces no hay nada que probar, pues $M(x, y, t + s)$ siempre es mayor que cero. Por lo tanto, vamos a suponer que $M(x, z, t) * M(z, y, s) \neq 0$. Sean n, m y k los índices con los que aparecen x, y y z , respectivamente, en cualquiera de las sucesiones $(x_n)_{n=3}^\infty$ o $(y_n)_{n=3}^\infty$. Ahora, consideremos los siguientes casos:

Caso 1: $x, y, z \in A$.

Entonces,

$$M(x, z, t) * M(z, y, s) = 1 - \frac{1}{\min\{n, k\}} + \frac{1}{\max\{n, k\}} - \frac{1}{\min\{k, m\}} + \frac{1}{\max\{k, m\}}.$$

Supongamos que $n \leq m$. Es claro que $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\min\{n, k\}}$ y $\frac{1}{\max\{k, m\}} \leq \frac{1}{m}$, entonces,

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \leq \frac{1}{\min\{n, k\}} - \frac{1}{\max\{k, m\}}. \quad (3.7)$$

Además, de la suposición de que $n \leq m$, se tiene $\max\{n, k\} \geq \min\{k, m\}$, es decir, $\frac{1}{\min\{n, k\}} - \frac{1}{\max\{k, m\}} \geq 0$. Por lo tanto, usando la ecuación 3.7, obtenemos

$$-1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \leq -1 + \frac{1}{\min\{n, k\}} - \frac{1}{\max\{k, m\}} + \frac{1}{\min\{n, k\}} - \frac{1}{\max\{k, m\}},$$

es decir,

$$\begin{aligned} M(x, z, t) * M(z, y, s) &= 1 - \frac{1}{\min\{n, k\}} + \frac{1}{\max\{n, k\}} - \frac{1}{\min\{k, m\}} + \frac{1}{\max\{k, m\}} \\ &\leq 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \\ &= M(x, y, t + s). \end{aligned}$$

De forma similar se muestra la desigualdad cuando $m \leq n$.

Caso 2: $x, y, z \in B$.

Este caso es análogo al anterior.

Caso 3: $x, y \in A$ y $z \in B$.

Entonces,

$$\begin{aligned} M(x, z, t) * M(z, y, s) &= \frac{1}{n} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \frac{1}{m} - 1 \\ &= \frac{1}{n} + \frac{2}{k} + \frac{1}{m} - 1. \end{aligned}$$

Supongamos que $n \leq m$, entonces, $M(x, y, t + s) = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$. Ya que $k, n \geq 3$, entonces, $\frac{1}{n} + \frac{1}{k} + \frac{1}{n} + \frac{1}{k} \leq 1 + 1$, esto implica

$$\frac{1}{n} + \frac{2}{k} - 1 \leq 1 - \frac{1}{n}, \quad (3.8)$$

y, sumando $\frac{1}{m}$ en ambos lados de la ecuación 3.8 obtenemos

$$\begin{aligned} M(x, z, t) * M(z, y, s) &= \frac{1}{n} + \frac{2}{k} + \frac{1}{m} - 1 \\ &\leq 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \\ &= M(x, y, t + s). \end{aligned}$$

El caso para $m \leq n$ se demuestra de forma similar.

Caso 4: $x, y \in B$ y $z \in A$.

Este caso es análogo al anterior.

Caso 5: $x \in A$ y $y, z \in B$.

En este caso,

$$\begin{aligned} M(x, z, t) * M(z, y, s) &= \frac{1}{n} + \frac{1}{k} + 1 - \frac{1}{\min\{k, m\}} + \frac{1}{\max\{k, m\}} - 1 \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{k} - \frac{1}{\min\{k, m\}} + \frac{1}{\max\{k, m\}}. \end{aligned}$$

Si $k \leq m$, entonces,

$$\begin{aligned} M(x, z, t) * M(z, y, s) &= \frac{1}{n} + \frac{1}{k} - \frac{1}{\min\{k, m\}} + \frac{1}{\max\{k, m\}} \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k} + \frac{1}{m} \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \\ &= M(x, y, t + s). \end{aligned}$$

Si $m \leq k$, entonces, $\frac{2}{k} \leq \frac{2}{m}$, es decir, $\frac{1}{k} + \frac{1}{k} - \frac{1}{m} \leq \frac{1}{m}$, por tanto,

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k} - \frac{1}{m} \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n}.$$

Así,

$$\begin{aligned} M(x, z, t) * M(z, y, s) &= \frac{1}{n} + \frac{1}{k} - \frac{1}{\min\{k, m\}} + \frac{1}{\max\{k, m\}} \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{k} - \frac{1}{m} + \frac{1}{k} \\ &\leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \\ &= M(x, y, t + s). \end{aligned}$$

Los 3 casos restantes, son análogos al caso anterior. Con esto, podemos concluir que $M(x, z, t) * M(z, y, s) \leq M(x, y, t + s)$ para todos $x, y, z \in X$ y $s, t > 0$.

(MD5) Para $x, y \in X$ fijos, la función $M(x, y, -) : (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ es constante y, por lo tanto, continua. Así, concluimos que $(X, M, *)$ es un espacio métrico difuso.

Lo siguiente que vamos a hacer es mostrar que $(X, M, *)$ no es completo. Para ello, consideremos la sucesión $(x_n)_{n=3}^{\infty}$ y veamos que es una sucesión de Cauchy en

$(X, M, *)$. Tomemos $\epsilon \in (0, 1)$ y $t > 0$. Ya que la sucesión $(\frac{1}{n})_{n=3}^{\infty}$ es de Cauchy en el espacio métrico $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, existe un natural $N \geq 3$ tal que, para todo $n, m \geq N$,

$$|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| < \epsilon.$$

Tomemos $n, m \geq N$, si $m \geq n$, entonces,

$$M(x_n, x_m, t) = 1 - \left(\frac{1}{\min\{n, m\}} - \frac{1}{\max\{n, m\}} \right) = 1 - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) > 1 - \epsilon.$$

De forma similar, si $n \geq m$,

$$M(x_n, x_m, t) = 1 - \left(\frac{1}{\min\{m, n\}} - \frac{1}{\max\{m, n\}} \right) = 1 - \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right) > 1 - \epsilon.$$

Por lo tanto, $(x_n)_{n=3}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio métrico difuso $(X, M, *)$. De forma análoga se tiene que la sucesión $(y_n)_{n=3}^{\infty}$ también es de Cauchy en $(X, M, *)$.

Por otro lado, recordemos que X tiene la topología τ_M , sin embargo, dicha topología resulta ser la topología discreta. Para demostrar parte de esta afirmación, sean $n \geq 3$ y $t > 0$, vamos a mostrar que

$$B_M(x_n, 1/n(n+1), t) = \{x_n\}.$$

Probar la igualdad anterior, es equivalente a probar que para todo $z \in X$, con $z \neq x_n$, se tiene

$$M(x_n, z, t) \leq 1 - \frac{1}{n(n+1)}.$$

Entonces, sea $z \in X$, $z \neq x_n$, se tienen los siguientes casos.

Caso 1: $z \in A$.

Entonces, existe $m \geq 3$, con $m \neq n$, tal que $z = x_m$. Usando el Lema 3.4.5, obtenemos

$$\begin{aligned} M(x_n, x_m, t) &= 1 - \left(\frac{1}{\min\{n, m\}} - \frac{1}{\max\{n, m\}} \right) \\ &\leq 1 - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

Caso 2: $z \in B$.

Entonces, existe $m \geq 3$ tal que $z = y_m$. Dado que $\frac{1}{n}, \frac{1}{m} \leq \frac{1}{3}$ y $\frac{1}{n+1} > 0$, se tiene

$$\begin{aligned} M(x_n, y_m, t) &= \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \\ &\leq 1 - \frac{1}{n} \\ &\leq 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

Con esto hemos demostrado que $B_M(x_n, 1/n(n+1), t) = \{x_n\}$. De forma similar se puede demostrar $B_M(y_n, 1/n(n+1), t) = \{y_n\}$, lo cual completa la prueba de que τ_M , efectivamente, es la topología discreta en X . Entonces, las sucesiones $(x_n)_{n=3}^\infty$ y $(y_n)_{n=3}^\infty$ no convergen en (X, τ_M) , lo cual implica que este espacio métrico difuso no es completo.

Finalmente, supongamos que $(X, M, *)$ admite una completación métrica difusa $(\widetilde{X}, \widetilde{M}, \widetilde{*})$. Entonces, X es isométrico, con una isometría i , a un subespacio denso de $\widetilde{X}$. Ya que $(x_n)_{n=3}^\infty$ y $(y_n)_{n=3}^\infty$ son sucesiones de Cauchy en $(X, M, *)$, entonces, $(i(x_n))_{n=3}^\infty$ y $(i(y_n))_{n=3}^\infty$ son sucesiones de Cauchy en el espacio métrico completo $(\widetilde{X}, \widetilde{M}, \widetilde{*})$, por lo tanto, son convergentes, digamos que convergen a $\tilde{x}$ y $\tilde{y}$, respectivamente. Fijemos un $t > 0$ y sea $\widetilde{M}(\tilde{x}, \tilde{y}, t) = r$; ya que $\widetilde{M}$ es métrica difusa, $0 < r \leq 1$. Sabemos que $(i(x_n))_{n=3}^\infty$ converge a $\tilde{x}$, por lo tanto, para cada $k \geq 3$, existe $m_k \geq 3$ tal que $i(x_n) \in B_{\widetilde{M}}(\tilde{x}, 1/k, t)$ para todo $n \geq m_k$, es decir,

$$\widetilde{M}(\tilde{x}, i(x_n), t) > 1 - 1/k,$$

para todo $n \geq m_k$. De forma similar, para cada $k \geq 3$, existe $l_k \geq 3$ tal que

$$\widetilde{M}(\tilde{y}, i(y_n), t) > 1 - 1/k$$

para todo $n \geq l_k$. Entonces, en particular, para $k \geq 3$, podemos encontrar un $n_k \geq k$ tal que

$$\widetilde{M}(\tilde{x}, i(x_{n_k}), t) > 1 - 1/k \quad \text{y} \quad \widetilde{M}(\tilde{y}, i(y_{n_k}), t) > 1 - 1/k. \quad (3.9)$$

Por la definición de M ,

$$\widetilde{M}(i(x_{n_k}), i(y_{n_k}), 3t) = M(x_{n_k}, y_{n_k}, 3t) = \frac{2}{n_k}. \quad (3.10)$$

Por la propiedad (MD4) de la métrica difusa $\widetilde{M}$,

$$\widetilde{M}(i(x_{n_k}), \tilde{x}, t) \tilde{*} \widetilde{M}(\tilde{x}, \tilde{y}, t) \tilde{*} \widetilde{M}(\tilde{y}, i(y_{n_k}), t) \leq \widetilde{M}(i(x_{n_k}), i(y_{n_k}), 3t),$$

por tanto, utilizando 3.9 y 3.10, se obtiene

$$(1 - 1/k) \tilde{*} r \tilde{*} (1 - 1/k) \leq \frac{2}{n_k}$$

para cada $k \geq 3$. Recordemos que $\tilde{*}$ es continua, entonces, tomando en ambos lados el límite cuando $k \rightarrow \infty$ obtenemos

$$1 \tilde{*} r \tilde{*} 1 \leq 0,$$

es decir, $r \leq 0$, lo cual es una contradicción, pues sabíamos $0 < r \leq 1$. Así, concluimos que $(X, M, *)$ no tiene una completación métrica difusa. $\square$

Capítulo 4

La métrica difusa de Hausdorff

En el Capítulo 1 vimos que dado un espacio métrico (X, d) , se puede definir la métrica de Hausdorff d_H en $\mathcal{K}(X)$. De acuerdo con [11], es posible definir una versión difusa de la métrica de Hausdorff, el objetivo de este capítulo es estudiar dicha versión y probar detalladamente que, efectivamente, es una métrica difusa.

Comencemos recordando que, dados dos espacios topológicos Hausdorff X, Y , una función $f : X \rightarrow Y$ es secuencialmente continua en $x \in X$ si para cualquier sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, se tiene $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$. El siguiente teorema es bien conocido, por lo cual se omite su demostración.

Teorema 4.0.1. *Sean X un espacio Hausdorff primero numerable y Y un espacio topológico Hausdorff. Entonces, una función $f : X \rightarrow Y$ es continua en un punto $x \in X$ si y solo si es secuencialmente continua en x .*

Teorema 4.0.2. *Sea $(X, M, *)$ un espacio métrico difuso. Entonces, M es una función continua en $X \times X \times (0, \infty)$*

Demostración. Estamos tomando al espacio X con la topología generada por M y al espacio $X \times X \times (0, \infty)$ con la topología producto, entonces, usando el Corolario 3.1.5 y el Teorema 3.2.1, el espacio $X \times X \times (0, \infty)$ es Hausdorff primero numerable. Por tanto, basta probar que M es secuencialmente continua en cada punto de su dominio.

Sean $x, y \in X$, $t > 0$ y $\{(x'_n, y'_n, t'_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X \times X \times (0, \infty)$ una sucesión que converge a (x, y, t) . Dado que $\{M(x'_n, y'_n, t'_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $(0, 1]$, entonces,

existe una subsucesión $\{(x_n, y_n, t_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $\{(x'_n, y'_n, t'_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ con la propiedad de que $\{M(x_n, y_n, t_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a algún punto en $\mathbb{I}$. Ya que $\{(x_n, y_n, t_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a (x, y, t) , en particular, $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a t , por tanto, para $\delta \in (0, t/2)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|t - t_n| < \delta$ para todo $n \geq n_0$. Por las propiedades de M se tiene

$$\begin{aligned} M(x_n, y_n, t - \delta) &\geq M(x_n, y, t - 3\delta/2) * M(y, y_n, \delta/2) \\ &\geq M(x_n, x, \delta/2) * M(x, y, t - 2\delta) * M(y, y_n, \delta/2), \end{aligned}$$

pero $t - \delta < t_n$ y, por el Lema 2.0.3, $M(x_n, y_n, -) : (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ es no decreciente, por lo tanto,

$$\begin{aligned} M(x_n, y_n, t_n) &\geq M(x_n, y_n, t - \delta) \\ &\geq M(x_n, x, \delta/2) * M(x, y, t - 2\delta) * M(y, y_n, \delta/2). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Ahora, usando que $t_n + \delta < t + 2\delta$ y, nuevamente, el lema 2.0.3, se tiene

$$\begin{aligned} M(x, y, t + 2\delta) &\geq M(x, y, t_n + \delta) \\ &\geq M(x, x_n, \delta/2) * M(x_n, y_n, t_n) * M(y_n, y, \delta/2). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Recordemos que $\{(x_n, y_n, t_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a (x, y, t) , entonces, en particular, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x y $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a y . Por lo tanto, para cualesquiera $\epsilon \in (0, 1)$ y $s > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B_M(x, \epsilon, s)$ para todo $n \geq n_0$, entonces,

$$M(x, x_n, s) > 1 - \epsilon$$

es decir, $-\epsilon < M(x, x_n, s) - 1$, además, ya que el codominio de M es el intervalo $(0, 1]$, se tiene $M(x, x_n, s) - 1 \leq 0 < \epsilon$. Por tanto, $|M(x, x_n, s) - 1| < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$, es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(x, x_n, s) = \lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, x, s) = 1.$$

De forma análoga, podemos obtener

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(y, y_n, s) = \lim_{n \rightarrow \infty} M(y_n, y, s) = 1.$$

Ahora, usando lo anterior y que $*$ es continua, tomamos el límite cuando $n \rightarrow \infty$

en las desigualdades 4.1 y 4.2 para obtener

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, y_n, t_n) &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} (M(x_n, x, \delta/2) * M(x, y, t - 2\delta) * M(y, y_n, \delta/2)) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, x, \delta/2) * M(x, y, t - 2\delta) * \lim_{n \rightarrow \infty} M(y, y_n, \delta/2) \\
&= 1 * M(x, y, t - 2\delta) * 1 \\
&= M(x, y, t - 2\delta)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
M(x, y, t + 2\delta) &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} (M(x, x_n, \delta/2) * M(x_n, y_n, t_n) * M(y_n, y, \delta/2)) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} M(x, x_n, \delta/2) * \lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, y_n, t_n) * \lim_{n \rightarrow \infty} M(y_n, y, \delta/2) \\
&= 1 * \lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, y_n, t_n) * 1 \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, y_n, t_n).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $M(x, y, t + 2\delta) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, y_n, t_n) \geq M(x, y, t - 2\delta)$, pero, recordemos que la función $M(x, y, -)$ es continua, por tanto, haciendo $\delta \rightarrow 0$, se obtiene $\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, y_n, t_n) = M(x, y, t)$. Finalmente, supongamos que la sucesión $\{M(x'_n, y'_n, t'_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ no converge a $M(x, y, t)$, entonces, existen $\epsilon > 0$ y una subsucesión $\{M(x'_{n_k}, y'_{n_k}, t'_{n_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{M(x'_n, y'_n, t'_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tales que

$$|M(x'_{n_k}, y'_{n_k}, t'_{n_k}) - M(x, y, t)| \geq \epsilon \quad (4.3)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Ya que la sucesión $\{M(x'_{n_k}, y'_{n_k}, t'_{n_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$ sigue estando en $[0, 1]$, entonces tiene una subsucesión convergente en la cual podemos repetir el argumento que aplicamos anteriormente para llegar a que converge a $M(x, y, t)$ lo cual contradice la ecuación 4.3. Por tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} M(x'_n, y'_n, t'_n) = M(x, y, t)$. $\square$

Sean $(X, M, *)$ un espacio métrico difuso, B un subconjunto no vacío de X , $a \in X$ y $t > 0$. Por las propiedades de M , el conjunto $\{M(a, b, t) : b \in B\}$ está acotado superiormente por 1, entonces, $\sup \{M(a, b, t) : b \in B\}$ existe, por lo tanto, podemos definir $M(a, B, t) = \sup \{M(a, b, t) : b \in B\}$. Además, $\mathcal{K}(X)$ (respectivamente, $\mathcal{C}(X)$) denota el hiperespacio de todos los subconjuntos compactos no vacíos (respectivamente, cerrados no vacíos) de (X, τ_M) .

Lema 4.0.3. *Sea $(X, M, *)$ un espacio métrico difuso. Entonces, para cada $a \in X$, $B \in \mathcal{K}(X)$ y $t > 0$, existe $b_0 \in B$ tal que $M(a, B, t) = M(a, b_0, t)$.*

Demostración. Sean $a \in X$, $B \in \mathcal{K}(X)$ y $t > 0$. Por el Teorema 4.0.2, la función $y \rightarrow M(a, y, t)$ es continua, entonces, dado que B es compacto, se sigue que alcanza su máximo en B . Por tanto, existe $b_0 \in B$ tal que $\sup_{b \in B} M(a, b, t) = M(a, b_0, t)$, es decir, $M(a, B, t) = M(a, b_0, t)$. $\square$

Lema 4.0.4. *Sea $(X, M, *)$ un espacio métrico difuso. Entonces, para cada $a \in X$ y $B \in \mathcal{K}(X)$, la función $t \mapsto M(a, B, t)$ es continua en $(0, \infty)$.*

Demostración. Por el teorema 1.2.4, basta mostrar que dicha función es semicontinua inferiormente y semicontinua superiormente en cada punto de su dominio. Sea $t > 0$, para probar la semicontinuidad inferior en t , sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $M(a, B, t) > \alpha$. Ya que $M(a, B, t) = \sup_{b \in B} M(a, b, t)$, entonces, existe $b_0 \in B$ tal que $M(a, b_0, t) > \alpha$. Pero, recordemos que para cada $b \in B$, la función $t \mapsto M(a, b, t)$ es continua (en particular es semicontinua inferiormente), por lo tanto, existe una vecindad U de t tal que, para cada $u \in U$,

$$\alpha < M(a, b_0, u) \leq M(a, B, u),$$

así, la función $t \mapsto M(a, B, t)$ es semicontinua inferiormente en $(0, \infty)$.

Por otro lado, para probar la semicontinuidad superior en t utilizaremos la caracterización dada en el Teorema 1.2.3. Tomamos $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, \infty)$ una sucesión que converge a t . Por el Lema 4.0.3 se tiene que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $b_n \in B$ tal que

$$M(a, B, t_n) = M(a, b_n, t_n).$$

Además, ya que B es compacto en el espacio metrizable (X, τ_M) , existen una subsucesión $\{b_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y un punto $b_0 \in B$ tales que b_{n_k} converge a b_0 en (X, τ_M) . Entonces, usando el Teorema 4.0.2

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M(a, B, t_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} M(a, b_{n_k}, t_{n_k}) = M(a, b_0, t),$$

es decir, la sucesión $\{M(a, B, t_{n_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge, por lo tanto,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} M(a, B, t_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} M(a, B, t_{n_k}) = M(a, b_0, t) \leq M(a, B, t).$$

Así, $\limsup_{k \rightarrow \infty} M(a, B, t_{n_k}) \leq M(a, B, t)$, entonces, por el Teorema 1.2.3, la función $t \mapsto M(a, B, t)$ es semicontinua superiormente en t . $\square$

Lema 4.0.5. *Sea $(X, M, *)$ un espacio métrico difuso. Entonces, para cada $B \subset X$ no vacío, $A \in \mathcal{K}(X)$ y $t > 0$, existe $a_0 \in A$ tal que $\inf_{a \in A} M(a, B, t) = M(a_0, B, t)$.*

Demostración. Sea $\alpha = \inf_{a \in A} M(a, B, t)$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $a_n \in A$ tal que

$$\alpha + 1/n > M(a_n, B, t),$$

es decir, existe una sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ tal que $\alpha + 1/n > M(a_n, B, t)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, además, dado que A es compacto, existe una subsucesión $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y un punto $a_0 \in A$ tal que $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge a a_0 en (X, τ_M) . Sea $b \in B$ arbitrario, para cada $k \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\alpha + 1/n_k > M(a_{n_k}, b, t),$$

entonces, tomando el límite cuando $k \rightarrow \infty$,

$$\alpha \geq \lim_{k \rightarrow \infty} M(a_{n_k}, b, t).$$

Pero, por el teorema 4.0.2, $\lim_{k \rightarrow \infty} M(a_{n_k}, b, t) = M(a_0, b, t)$, es decir, $\alpha \geq M(a_0, b, t)$. Por lo tanto,

$$\alpha \geq M(a_0, B, t),$$

pero α no puede ser mayor que $M(a_0, B, t)$, pues $\alpha = \inf_{a \in A} M(a, B, t)$, es decir, $\alpha = M(a_0, B, t)$. $\square$

Corolario 4.0.6. *Sean $(X, M, *)$ un espacio métrico difuso, $A, B \in \mathcal{K}(X)$ y $t > 0$. Entonces, existen $a_0 \in A$ y $b_0 \in B$ tales que $\inf_{a \in A} M(a, B, t) = M(a_0, b_0, t)$.*

Demostración. Por el lema 4.0.5, existe $a_0 \in A$ tal que $\inf_{a \in A} M(a, B, t) = M(a_0, B, t)$, y, por el lema 4.0.3, existe $b_0 \in B$ tal que $M(a_0, B, t) = M(a_0, b_0, t)$. Por lo tanto, $\inf_{a \in A} M(a, B, t) = M(a_0, b_0, t)$. $\square$

Teorema 4.0.7. *Sea $(X, M, *)$ un espacio métrico difuso. Entonces, para cada $A, B \in \mathcal{K}(X)$, la función $t \mapsto \inf_{a \in A} M(a, B, t)$ es continua en $(0, \infty)$.*

Demostración. Nuevamente, mostraremos que la función es semicontinua superiormente y semicontinua inferiormente en cada punto de su dominio. Sea $t > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\inf_{a \in A} M(a, B, t) < \alpha$. Entonces, existe $a_0 \in A$ tal que $M(a_0, B, t) < \alpha$, pero, por el lema 4.0.4, para cada $a \in A$, la función $t \mapsto M(a, B, t)$ es continua (en particular semicontinua superiormente), por lo tanto, existe una vecindad U de t tal que, para cada $u \in U$,

$$\alpha > M(a_0, B, u) \geq \inf_{a \in A} M(a, B, u),$$

así, la función $t \mapsto \inf_{a \in A} M(a, B, t)$ es semicontinua superiormente en $(0, \infty)$.

Para mostrar que $t \mapsto \inf_{a \in A} M(a, B, t)$ es semicontinua inferiormente, sean $t > 0$ y $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión que converge a t . Usando el lema 4.0.5 se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $a_n \in A$ tal que $M(a_n, B, t_n) = \inf_{a \in A} M(a, B, t_n)$. Ya que A es compacto, existe una subsucesión $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y un punto $a_0 \in A$ tal que $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge a a_0 en (X, τ_M) . Por el Lema 4.0.3, existe $b_0 \in B$ tal que $M(a_0, b_0, t) = M(a_0, B, t)$, y, usando el Teorema 4.0.2, se tiene,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M(a_{n_k}, b_0, t_{n_k}) = M(a_0, b_0, t).$$

Por lo tanto, dado $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $k \geq k_0$,

$$M(a_0, b_0, t) < \epsilon + M(a_{n_k}, b_0, t_{n_k}).$$

Así, para todo $k \geq k_0$,

$$\begin{aligned} \inf_{a \in A} M(a, B, t) &\leq M(a_0, B, t) = M(a_0, b_0, t) < \epsilon + M(a_{n_k}, B, t_{n_k}) \\ &= \epsilon + \inf_{a \in A} M(a, B, t_{n_k}). \end{aligned}$$

De lo anterior se sigue que para cada $m \geq k_0$,

$$\inf_{a \in A} M(a, B, t) - \epsilon \leq \inf \left\{ \inf_{a \in A} M(a, B, t_{n_k}) : k \geq m \right\},$$

lo cual implica,

$$\begin{aligned} \inf_{a \in A} M(a, B, t) - \epsilon &\leq \sup_m \inf \left\{ \inf_{a \in A} M(a, B, t_{n_k}) : k \geq m \right\} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{a \in A} (\inf_{a \in A} M(a, B, t_{n_k})). \end{aligned}$$

Finalmente, haciendo $\epsilon \rightarrow 0$, se concluye que la función $t \mapsto \inf_{a \in A} M(a, B, t)$ es semicontinua inferiormente en $(0, \infty)$. $\square$

Teorema 4.0.8. *Sea $(X, M, *)$ un espacio métrico difuso. Entonces, para cada $A, B \in \mathcal{K}(X)$, la función $t \mapsto \inf_{b \in B} M(A, b, t)$ es continua en $(0, \infty)$.*

Demostración. La demostración es análoga al teorema anterior. $\square$

Definición 4.0.9. *Sea $(X, M, *)$ un espacio métrico difuso. Definimos la función H_M como*

$$H_M(A, B, t) = \min \left\{ \inf_{a \in A} M(a, B, t), \inf_{b \in B} M(A, b, t) \right\},$$

para todo $A, B \in \mathcal{K}(X)$ y $t > 0$.

Lema 4.0.10. *Sea $(X, M, *)$ un espacio métrico difuso, Entonces, para cada $a \in X$, $C \subset X$ no vacío, $B \in \mathcal{K}(X)$ y $t, s > 0$, se cumple*

$$M(a, C, t + s) \geq M(a, B, t) * M(b_a, C, s),$$

donde $b_a \in B$ satisface $M(a, B, t) = M(a, b_a, t)$.

Demostración. Notemos que, por el Lema 4.0.3, el punto $b_a \in B$, efectivamente, existe. Ahora, para cada $c \in C$, tenemos

$$M(a, C, t + s) \geq M(a, c, t + s) \geq M(a, b_a, t) * M(b_a, c, s),$$

entonces, nuevamente por el Lema 4.0.3, $M(a, C, t + s) \geq M(a, b_a, t) * M(b_a, C, s)$. $\square$

Teorema 4.0.11. *Sea $(X, M, *)$ un espacio métrico difuso. Entonces, $(\mathcal{K}(X), H_M, *)$ es un espacio métrico difuso.*

Demostración. Sean $A, B, C \in \mathcal{K}(X)$ y $s, t > 0$.

(MD1) Por el Lema 4.0.5, existen $a_0 \in A$ y $b_0 \in B$ tales que

$$\inf_{a \in A} M(a, B, t) = M(a_0, B, t) \quad \text{y} \quad \inf_{b \in B} M(A, b, t) = M(A, b_0, t).$$

Ya que, para todo $b \in B$, $M(a_0, b, t) > 0$, y, para todo $a \in A$, $M(a, b_0, t) > 0$, se tiene $H_M(A, B, t) = \min \{M(a_0, B, t), M(A, b_0, t)\} > 0$.

(MD2) $H_M(A, B, t) = 1$ si y solo si para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$,

$$M(a, B, t) = M(A, b, t) = 1.$$

Usando el Lema 4.0.5, se tiene que para cada $a \in A$ y $b \in B$, existen $b_0 \in B$ y $a_0 \in A$ tales que $M(a, b_0, t) = 1$ y $M(a_0, b, t) = 1$, es decir $a = b_0 \in B$ y $b = a_0 \in A$. Por lo tanto, $H_M(A, B, t) = 1$ si y solo si $A \subset B$ y $B \subset A$.

(MD3) Lo siguiente prueba la simetría de $H_M(A, B, t)$.

$$\begin{aligned} H_M(A, B, t) &= \min \left\{ \inf_{a \in A} M(a, B, t), \inf_{b \in B} M(A, b, t) \right\} \\ &= \min \left\{ \inf_{b \in B} M(b, A, t), \inf_{a \in A} M(B, a, t) \right\} = H_M(B, A, t). \end{aligned}$$

(MD4) Por el Lema 4.0.10 y la continuidad de $*$,

$$\inf_{a \in A} M(a, C, t + s) \geq \inf_{a \in A} M(a, B, t) * \inf_{a \in A} M(b_a, C, s),$$

donde $b_a \in B$ satisface $M(a, B, t) = M(a, b_a, t)$. Dado que $\{b_a : a \in A\} \subset B$, entonces $\inf_{a \in A} M(b_a, C, s) \geq \inf_{b \in B} M(b, C, s)$, por lo tanto,

$$\inf_{a \in A} M(a, C, t + s) \geq \inf_{a \in A} M(a, B, t) * \inf_{b \in B} M(b, C, s). \quad (4.4)$$

De forma similar,

$$\inf_{c \in C} M(A, c, t + s) \geq \inf_{b \in B} M(A, b, t) * \inf_{c \in C} M(B, c, s). \quad (4.5)$$

Supongamos que $H_M(A, C, t + s) = \inf_{a \in A} M(a, C, t + s)$. Usando la ecuación 4.4, que $H_M(A, B, t) \leq \inf_{a \in A} M(a, B, t)$ y que $H_M(B, C, s) \leq \inf_{b \in B} M(b, C, s)$, se tiene

$$H_M(A, C, t + s) \geq \inf_{a \in A} M(a, B, t) * \inf_{b \in B} M(b, C, s) \geq H_M(A, B, t) * H_M(B, C, s).$$

Por otro lado, si $H_M(A, C, t + s) = \inf_{c \in C} M(A, c, t + s)$, podemos usar la ecuación 4.5, que $H_M(A, B, t) \leq \inf_{b \in B} M(A, b, t)$ y que $H_M(B, C, s) \leq \inf_{c \in C} M(B, c, s)$ para concluir

$$H_M(A, C, t + s) \geq \inf_{b \in B} M(A, b, t) * \inf_{c \in C} M(B, c, s) \geq H_M(A, B, t) * H_M(B, C, s).$$

En cualquier caso, se tiene

$$H_M(A, C, t + s) \geq H_M(A, B, t) * H_M(B, C, s).$$

(MD5) Del Teorema 4.0.7 se tiene que las funciones $t \mapsto \inf_{a \in A} M(a, B, t)$ y $t \mapsto \inf_{b \in B} M(A, b, t)$ son continuas en $(0, \infty)$, además, sabemos que el mínimo de dos funciones continuas es una función continua. Por lo tanto, la función $t \mapsto H_M(A, B, t)$ es continua. $\square$

Capítulo 5

Propiedades de la métrica difusa de Hausdorff

El objetivo de este capítulo es mostrar que, tal como en el caso de los espacios métricos, los espacios métricos difusos $(X, M, *)$ y $(\mathcal{K}(X), H_M, *)$ tienen propiedades en común.

Recordemos que dado un espacio métrico (X, d) , se define la métrica de Hausdorff $d_H : \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) \rightarrow [0, \infty)$ como

$$d_H(A, B) = \max \{ \sup \{ d(a, B) : a \in A \}, \sup \{ d(b, A) : b \in B \} \},$$

donde $d(x, A) = \inf \{ d(x, a) : a \in A \}$.

Teorema 5.0.1. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces, la métrica difusa de Hausdorff $(H_{M_d}, \cdot)$ asociada a la métrica difusa estándar $(M_d, \cdot)$ coincide con la métrica difusa estándar $(M_{d_H}, \cdot)$ asociada a la métrica de Hausdorff d_H .*

Demostración. Sean $A, B \in \mathcal{K}(X)$ y $t > 0$. Recordemos que para todo $b \in B$ y $a \in A$,

$$M_d(a, b, t) = \frac{t}{t + d(a, b)},$$

entonces,

$$\sup_{b \in B} M_d(a, b, t) = \frac{t}{t + \inf_{b \in B} d(a, b)},$$

es decir, $M_d(a, B, t) = \frac{t}{t+d(a, B)}$, similarmente, $M_d(A, b, t) = \frac{t}{t+d(A, b)}$. Por tanto, de las igualdades anteriores, se obtiene

$$\inf_{a \in A} M_d(a, B, t) = \frac{t}{t + \sup_{a \in A} d(a, B)},$$

$$\inf_{b \in B} M_d(A, b, t) = \frac{t}{t + \sup_{b \in B} d(A, b)}.$$

Así, $H_{M_d}(A, B, t) = M_{d_H}(A, B, t)$, pues, si $H_{M_d}(A, B, t) = \inf_{a \in A} M_d(a, B, t)$,

$$\frac{t}{t + \sup_{a \in A} d(a, B)} \leq \frac{t}{t + \sup_{b \in B} d(A, b)},$$

entonces, $\sup_{b \in B} d(A, b) \leq \sup_{a \in A} d(a, B)$, por lo tanto,

$$M_{d_H}(A, B, t) = \frac{t}{t + \sup_{a \in A} d(a, B)} = \inf_{a \in A} M_d(a, B, t) = H_{M_d}(A, B, t).$$

De forma similar se tiene el caso cuando $H_{M_d}(A, B, t) = \inf_{b \in B} M_d(A, b, t)$. $\square$

Teorema 5.0.2. *Sea $(X, M, *)$ un espacio métrico difuso. Entonces, la uniformidad $\mathcal{K}(\mathcal{U}_M)$ asociada a la uniformidad $\mathcal{U}_M$ coincide con la uniformidad $\mathcal{U}_{H_M}$ inducida por la métrica difusa de Hausdorff.*

Demostración. Sea $U \in \mathcal{U}_{H_M}$, entonces, existe un elemento básico de $\mathcal{U}_{H_M}$ contenido en U , es decir, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$U_{H_M, n} = \{(A, B) \in \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) : H_M(A, B, 1/n) > 1 - 1/n\} \subset U,$$

Por tanto, U será elemento de $\mathcal{K}(\mathcal{U}_M)$ si $U_{H_M, n}$ contiene un elemento básico de $\mathcal{K}(\mathcal{U}_M)$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, definimos

$$U_m = \{(x, y) \in X \times X : M(x, y, 1/m) > 1 - 1/m\},$$

los cuales, por el Teorema 3.2.2, sabemos que son una base de $\mathcal{U}_M$. Entonces, para cada $m \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{K}[U_m] = \{(A, B) \in \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) : B \subset U_m(A), A \subset U_m(B)\},$$

es un elemento básico de $\mathcal{K}(\mathcal{U}_M)$. Veamos que $\mathcal{K}[U_{n+1}] \subset U_{H_M, n}$, para ello, sea $(A, B) \in \mathcal{K}[U_{n+1}]$, entonces, para cada $b \in B$ y cada $a \in A$, existen $a_b \in A$ y $b_a \in B$ tales que

$$M\left(a, b_a, \frac{1}{n+1}\right) > 1 - \frac{1}{n+1} \quad \text{y} \quad M\left(a_b, b, \frac{1}{n+1}\right) > 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Por lo tanto,

$$M\left(a, B, \frac{1}{n+1}\right) = \sup_{b \in B} M\left(a, b, \frac{1}{n+1}\right) \geq 1 - \frac{1}{n+1}$$

y

$$M\left(A, b, \frac{1}{n+1}\right) = \sup_{a \in A} M\left(a, b, \frac{1}{n+1}\right) \geq 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Ya que las desigualdades se cumplen para cualesquiera elementos de A y B , se tiene

$$\inf_{a \in A} M\left(a, B, \frac{1}{n+1}\right) \geq 1 - \frac{1}{n+1} > 1 - \frac{1}{n}$$

e

$$\inf_{b \in B} M\left(A, b, \frac{1}{n+1}\right) \geq 1 - \frac{1}{n+1} > 1 - \frac{1}{n},$$

por tanto, $H_M(A, B, 1/n) > 1 - 1/n$, es decir, $(A, B) \in U_{H_M, n}$, lo cual prueba que $\mathcal{U}_{H_M} \subset \mathcal{K}(\mathcal{U}_M)$.

De forma similar, para cada $m \in \mathbb{N}$, se puede mostrar $U_{H_M, m} \subset \mathcal{K}[U_m]$. Entonces, para $U \in \mathcal{K}(\mathcal{U}_M)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{K}[U_n] \subset U$, pero, $U_{H_M, n} \subset \mathcal{K}[U_n]$, es decir, $U_{H_M, n} \subset U$, lo cual implica $U \in \mathcal{U}_{H_M}$, y, por lo tanto, $\mathcal{K}(\mathcal{U}_M) \subset \mathcal{U}_{H_M}$. $\square$

Teorema 5.0.3. *Sea $(X, M, *)$ un espacio métrico difuso. Entonces $(\mathcal{K}(X), H_M, *)$ es completo si y solo si $(X, M, *)$ es completo.*

Demostración. Usando el Teorema 3.3.2 se tiene que $(\mathcal{K}(X), H_M, *)$ es completo si y solo si $(\mathcal{K}(X), \mathcal{U}_{H_M})$ es completo. Pero, por el Teorema 5.0.2, $\mathcal{K}(\mathcal{U}_M) = \mathcal{U}_{H_M}$, entonces, usando el Teorema 1.3.18, $(\mathcal{K}(X), \mathcal{U}_{H_M})$ es completo si y solo si $(X, \mathcal{U}_M)$ lo es. Finalmente, usando nuevamente el Teorema 3.3.2, se obtiene el resultado. $\square$

Teorema 5.0.4. *Sea $(X, M, *)$ un espacio métrico difuso. Entonces $(\mathcal{K}(X), H_M, *)$ es precompacto si y solo si $(X, M, *)$ es precompacto.*

Demostración. Por el Corolario 3.3.5, $(\mathcal{K}(X), H_M, *)$ es precompacto si y solo si $(\mathcal{K}(X), \mathcal{U}_{H_M})$ es precompacto. Además, nuevamente aplicando el Teorema 5.0.2 y el Teorema 1.3.18, se obtiene que $(\mathcal{K}(X), \mathcal{U}_{H_M})$ es precompacto si y solo si $(X, \mathcal{U}_M)$ lo es. Así, aplicando de nuevo el Corolario 3.3.5 se obtiene el resultado. $\square$

Teorema 5.0.5. *Sea $(X, M, *)$ un espacio métrico difuso. Entonces $(\mathcal{K}(X), H_M, *)$ es compacto si y solo si $(X, M, *)$ es compacto.*

Demostración. Se sigue de los teoremas 3.3.8, 5.0.3 y 5.0.4. $\square$

Lema 5.0.6. *Sea X un subconjunto denso de un espacio métrico difuso $(Y, N, \star)$. Entonces, $\mathcal{K}(X)$ es denso en $(\mathcal{K}(Y), H_N, \star)$.*

Demostración. Sean $A \in \mathcal{K}(Y)$, $\epsilon \in (0, 1)$ y $t > 0$. Ya que los subconjuntos finitos son compactos, basta mostrar que existe un subconjunto finito $F \subset X$ tal que $F \in B_{H_N}(A, \epsilon, t)$. Sea $\delta \in (0, \epsilon)$. Por el Lema 1.2.8, existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que

$$1 - \epsilon < (1 - \delta) \star \alpha.$$

Dado que A es compacto en Y , existe un subconjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset A$ tal que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n B_N(a_i, 1 - \alpha, t/2).$$

Como X es denso en Y , para cada $i = 1, \dots, n$, podemos tomar $x_i \in X \cap B_N(a_i, \delta, t/2)$, es decir,

$$N(a_i, x_i, t/2) > 1 - \delta. \quad (5.1)$$

Sea $F = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, el cual, claramente es finito, entonces, solo falta mostrar que $F \in B_{H_N}(A, \epsilon, t)$. Para ello, notemos que para cada $i = 1, 2, \dots, n$, por la definición de $N(A, x_i, t)$ y el Lema 2.0.3, se tiene

$$N(A, x_i, t) \geq N(a_i, x_i, t) \geq N(a_i, x_i, t/2),$$

por tanto, usando la ecuación 5.1

$$N(A, x_i, t) > 1 - \delta,$$

esto implica que

$$\inf_{x \in F} N(A, x, t) \geq 1 - \delta > 1 - \epsilon.$$

Por otro lado, para cada $a \in A$, existe $i_a \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $a \in B_N(a_{i_a}, 1 - \alpha, t/2)$, es decir, $N(a_{i_a}, a, t/2) > \alpha$. Entonces, por las propiedades de N y $\star$, se tiene

$$N(a, F, t) \geq N(a, x_{i_a}, t) \geq N(a, a_{i_a}, t/2) \star N(a_{i_a}, x_{i_a}, t/2) \geq \alpha \star (1 - \delta),$$

por lo tanto,

$$\inf_{a \in A} N(a, F, t) \geq \alpha \star (1 - \delta) > 1 - \epsilon.$$

Así, $H_N(A, F, t) > 1 - \epsilon$ con lo que concluimos $F \in B_{H_N}(A, \epsilon, t)$. $\square$

Teorema 5.0.7. *Sea $(X, M, \star)$ un espacio métrico difuso. Entonces, $(\mathcal{K}(X), H_M, \star)$ tiene una completación métrica difusa si y solo si $(X, M, \star)$ tiene una completación métrica difusa.*

Demostración. Supongamos que $(X, M, \star)$ tiene una completación métrica difusa $(\widetilde{X}, \widetilde{M}, \star)$, entonces, existe una isometría $f : X \rightarrow \widetilde{X}$ tal que $f(X)$ es denso en $\widetilde{X}$. Por el Lema 5.0.6, $\mathcal{K}(f(X))$ es denso en $(\mathcal{K}(\widetilde{X}), H_{\widetilde{M}}, \star)$, y, por el Teorema 5.0.3, $(\mathcal{K}(\widetilde{X}), H_{\widetilde{M}}, \star)$ es completo. Ahora, para cada $A \in \mathcal{K}(X)$, definimos

$$h(A) = f(A).$$

Vamos a probar que $h(\mathcal{K}(X)) = \mathcal{K}(f(X))$. Para ello, sea $A \in \mathcal{K}(X)$, claramente $h(A) \subset f(X)$, para ver que $h(A)$ es compacto, sea γ una cubierta de $h(A)$ con abiertos de $f(X)$. Entonces, por el Teorema 3.4.3 $\beta = \{f^{-1}(U) : U \in \gamma\}$ es una cubierta abierta de A . Ya que A es compacto, existen $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$, tales que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(U_i),$$

lo cual, implica que

$$f(A) \subset \bigcup_{i=1}^n U_i,$$

y así, $h(A) \in \mathcal{K}(f(X))$.

Por otro lado si $B \in \mathcal{K}(f(X))$, entonces, $f^{-1}(B) \subset X$; veamos que $f^{-1}(B)$ es compacto. Sea γ una cubierta de $f^{-1}(B)$ con abiertos de X , entonces, usando nuevamente el Teorema 3.4.3, se tiene que $\beta = \{f(U) : U \in \gamma\}$ es una cubierta abierta de B . Como B es compacto, existen $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$, tales que

$$B \subset \bigcup_{i=1}^n f(U_i),$$

lo cual implica

$$f^{-1}(B) \subset \bigcup_{i=1}^n U_i,$$

y así, $f^{-1}(B) \in \mathcal{K}(X)$. Por tanto, $B = h(f^{-1}(B)) \in h(\mathcal{K}(X))$. Hasta el momento sabemos que $h : \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(\widetilde{X})$ es una función tal que $h(\mathcal{K}(X)) = \mathcal{K}(f(X))$, entonces, basta probar que h es una isometría. Sean $A, B \in \mathcal{K}(X)$ y $t > 0$, notemos que para cada $a \in A$ fijo,

$$\sup \{M(a, b, t) : b \in B\} = \sup \{\widetilde{M}(f(a), f(b), t) : f(b) \in h(B)\},$$

y, para cada $b \in B$ fijo,

$$\sup \{M(a, b, t) : a \in A\} = \sup \{\widetilde{M}(f(a), f(b), t) : f(a) \in h(A)\}.$$

Por lo tanto, $M(a, B, t) = \widetilde{M}(f(a), h(B), t)$ y $M(A, b, t) = \widetilde{M}(h(A), f(b), t)$. Esto implica

$$\inf \{M(a, B, t) : a \in A\} = \inf \{\widetilde{M}(f(a), h(B), t) : f(a) \in h(A)\}$$

e

$$\inf \{M(A, b, t) : b \in B\} = \inf \{\widetilde{M}(h(A), f(b), t) : f(b) \in h(B)\}.$$

Con esto podemos concluir $H_M(A, B, t) = H_{\widetilde{M}}(h(A), h(B), t)$, es decir, $h : \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(\widetilde{X})$ es una isometría. Así $(\mathcal{K}(\widetilde{X}), H_{\widetilde{M}}, \star)$ es una completación métrica difusa de $(\mathcal{K}(X), H_M, \star)$.

Ahora, supongamos que $(\mathcal{K}(X), H_M, \star)$ tiene una completación difusa, entonces, existe una isometría $f : (\mathcal{K}(X), H_M, \star) \rightarrow (\widetilde{\mathcal{K}(X)}, \widetilde{H}_M, \star)$ tal que $f(\mathcal{K}(X))$ es denso en $\widetilde{\mathcal{K}(X)}$. Notemos que para cada $x \in X$, $\{x\} \in \mathcal{K}(X)$, además, para todo $x, y \in X$ y $t > 0$,

$$\begin{aligned} H_M(\{x\}, \{y\}, t) &= \min \left\{ \inf_{z \in \{x\}} M(z, \{y\}, t), \inf_{w \in \{y\}} M(\{x\}, w, t) \right\} \\ &= \min \{M(x, \{y\}, t), M(\{x\}, y, t)\} \\ &= \min \{M(x, y, t), M(x, y, t)\} \\ &= M(x, y, t). \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos definir $f_X : X \rightarrow \widetilde{\mathcal{K}(X)}$ como $f_X(x) = f(\{x\})$, la cual resulta ser una isometría entre los espacios métricos difusos $(X, M, \star)$ y $(f_X(X), \widetilde{H}_M, \star)$,

pues, para $x, y \in X$ y $t > 0$,

$$\begin{aligned} M(x, y, t) &= H_M(\{x\}, \{y\}, t) \\ &= \widetilde{H}_M(f(\{x\}), f(\{y\}), t) \\ &= \widetilde{H}_M(f_X(x), f_X(y), t). \end{aligned}$$

Finalmente, recordemos que cada subespacio es denso en su cerradura, por lo tanto,

$$(cl_{\tau_{\widetilde{H}_M}}(f_X(X)), \widetilde{H}_M, \star)$$

es una completación métrica difusa de $(X, M, \star)$. $\square$

Definición 5.0.8. Sea $(X, M, \star)$ un espacio métrico difuso. Diremos que $A \subset X$ es F -acotado si existen $t > 0$ y $\epsilon \in (0, 1)$ tales que $M(x, y, t) > 1 - \epsilon$ para todo $x, y \in A$.

Es natural preguntarse si la métrica difusa de Hausdorff definida anteriormente resulta ser una métrica difusa cuando se considera el conjunto de los subconjuntos no vacíos, cerrados y F -acotados de un espacio métrico difuso. La respuesta a dicha pregunta resulta ser negativa, para mostrarlo se tiene el siguiente ejemplo, el cual es una pequeña modificación del Ejemplo 3.4.6, gran parte de su demostración es igual a la demostración de dicho ejemplo.

Ejemplo 5.0.9. Sea $\star : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ la t -norma continua definida para todo $a, b \in \mathbb{I}$ como

$$a \star b = \max\{0, a + b - 1\}.$$

Consideremos dos sucesiones de puntos distintos $(x_n)_{n=2}^\infty, (y_n)_{n=2}^\infty$ tales que $A \cap B = \emptyset$, donde, $A = \{x_n : n \geq 2\}$ y $B = \{y_n : n \geq 2\}$. Tomamos $X = A \cup B$ y definimos M en $X \times X \times (0, \infty)$ como:

$$\begin{aligned} (1) \quad M(x_n, x_m, t) &= M(y_n, y_m, t) = 1 - \left(\frac{1}{\min\{n, m\}} - \frac{1}{\max\{n, m\}} \right), \\ (2) \quad M(x_n, y_m, t) &= M(y_m, x_n, t) = \min\left\{ \frac{1}{n}, \frac{1}{m} \right\}, \end{aligned}$$

para todo $n, m \geq 2$. Entonces, $(X, M, \star)$ es un espacio métrico difuso y $(H_M, \star)$ no es una métrica difusa en el conjunto de los subconjuntos no vacíos, cerrados y F -acotados.

Demostración. Tomando en cuenta la demostración del Ejemplo 3.4.6, para ver que M es un conjunto difuso en X , basta notar que para todo $n, m \geq 2$, $0 < \min\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right\} < 1$. Por tanto, M , efectivamente, es un conjunto difuso en $X \times X \times (0, \infty)$.

Ahora, vamos a mostrar que $(M, *)$ es una métrica difusa en X . La demostración de los puntos (MD1), (MD2), (MD3) y (MD5), es completamente análoga a la del Ejemplo 3.4.6, entonces, basta mostrar únicamente el punto (MD4). Para ello, sean $x, y, z \in X$ y $s, t > 0$, consideremos a n, m y k como los índices con los que aparecen x, y y z , respectivamente, en cualquiera de las sucesiones $(x_n)_{n=3}^\infty$ o $(y_n)_{n=3}^\infty$. Vamos a mostrar que

$$M(x, z, t) * M(z, y, s) \leq M(x, y, t + s),$$

entonces, consideramos los siguientes casos dependiendo de si los elementos pertenecen a A o B . Nuevamente, antes de probar cada caso, observemos que cuando $M(x, z, t) * M(z, y, s) = 0$ no hay nada que probar, pues $M(x, y, t + s)$ siempre es mayor que cero. Por tanto, vamos a suponer que $M(x, z, t) * M(z, y, s) \neq 0$.

Caso 1: $x, y, z \in A$.

Es análogo al Ejemplo 3.4.6.

Caso 2: $x, y, z \in B$.

Este caso es análogo al caso anterior.

Caso 3: $x, y \in A$ y $z \in B$.

Entonces,

$$M(x, z, t) * M(z, y, s) = \min\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{k}\right\} + \min\left\{\frac{1}{k}, \frac{1}{m}\right\} - 1.$$

Ya que $n, m, k \geq 2$, se tiene

$$\min\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{k}\right\} + \min\left\{\frac{1}{k}, \frac{1}{m}\right\} + \frac{1}{\min\{n, m\}} \leq \frac{3}{2} < 2 + \frac{1}{\max\{n, m\}}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} M(x, z, t) * M(z, y, s) &= \min\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{k}\right\} + \min\left\{\frac{1}{k}, \frac{1}{m}\right\} - 1 \\ &< 1 - \frac{1}{\min\{n, m\}} + \frac{1}{\max\{n, m\}} \\ &= M(x, y, t + s). \end{aligned}$$

Caso 4: $x, y \in B$ y $z \in A$.

Este caso es análogo al anterior.

Caso 5: $x \in A$ y $y, z \in B$.

Entonces

$$\begin{aligned} M(x, z, t) * M(z, y, s) &= \min \left\{ \frac{1}{n}, \frac{1}{k} \right\} + 1 - \frac{1}{\min \{k, m\}} + \frac{1}{\max \{k, m\}} - 1 \\ &= \min \left\{ \frac{1}{n}, \frac{1}{k} \right\} - \frac{1}{\min \{k, m\}} + \frac{1}{\max \{k, m\}}. \end{aligned}$$

Si $k \leq m$ y $n \leq k$, entonces,

$$\begin{aligned} M(x, z, t) * M(z, y, s) &= \min \left\{ \frac{1}{n}, \frac{1}{k} \right\} - \frac{1}{\min \{k, m\}} + \frac{1}{\max \{k, m\}} \\ &= \frac{1}{k} - \frac{1}{k} + \frac{1}{m} \\ &= \min \left\{ \frac{1}{n}, \frac{1}{m} \right\} \\ &= M(x, y, t + s). \end{aligned}$$

Si $k \leq m$ y $k \leq n$, entonces,

$$\begin{aligned} M(x, z, t) * M(z, y, s) &= \min \left\{ \frac{1}{n}, \frac{1}{k} \right\} - \frac{1}{\min \{k, m\}} + \frac{1}{\max \{k, m\}} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{k} + \frac{1}{m} \\ &\leq \min \left\{ \frac{1}{n}, \frac{1}{m} \right\} \\ &= M(x, y, t + s). \end{aligned}$$

Por otro lado, si $m \leq k$, entonces, $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{m}$, esto implica $\min \left\{ \frac{1}{n}, \frac{1}{k} \right\} \leq \min \left\{ \frac{1}{n}, \frac{1}{m} \right\}$, además, $\frac{1}{k} - \frac{1}{m} \leq 0$. Por tanto,

$$\begin{aligned} M(x, z, t) * M(z, y, s) &= \min \left\{ \frac{1}{n}, \frac{1}{k} \right\} - \frac{1}{\min \{k, m\}} + \frac{1}{\max \{k, m\}} \\ &= \min \left\{ \frac{1}{n}, \frac{1}{k} \right\} - \frac{1}{m} + \frac{1}{k} \\ &\leq \min \left\{ \frac{1}{n}, \frac{1}{m} \right\} \\ &= M(x, y, t + s). \end{aligned}$$

Los 3 casos restantes, son análogos al caso anterior. Con esto podemos concluir que

$$M(x, z, t) * M(z, y, s) \leq M(x, y, t + s)$$

para todos $x, y, z \in X$ y $s, t > 0$.

Así, concluimos que $(X, M, *)$ es un espacio métrico difuso.

Recordemos que X tiene la topología τ_M , sin embargo, dicha topología resulta ser, nuevamente, la topología discreta. Para demostrar esta afirmación, sea $n \geq 2$ y $t > 0$, vamos a comenzar probando que

$$B_M(x_n, 1/n(n+1), t) = \{x_n\}.$$

Entonces, sea $z \in X$, $z \neq x_n$, se tienen los siguientes casos.

Caso 1: $z \in A$.

Entonces, existe $m \geq 2$, con $m \neq n$, tal que $z = x_m$. Usando el Lema 3.4.5, obtenemos

$$\begin{aligned} M(x_n, x_m, t) &= 1 - \left(\frac{1}{\min\{n, m\}} - \frac{1}{\max\{n, m\}} \right) \\ &\leq 1 - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

Caso 2: $z \in B$.

Entonces, existe $m \geq 2$ tal que $z = y_m$. Dado que $\frac{1}{n}, \frac{1}{m} \leq \frac{1}{2}$ y $\frac{1}{n+1} > 0$, se tiene

$$\begin{aligned} M(x_n, y_m, t) &= \min\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right\} \\ &\leq 1 - \frac{1}{n} \\ &\leq 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

Con esto hemos demostrado que $B_M(x_n, 1/n(n+1), t) = \{x_n\}$. De forma similar se puede demostrar que $B_M(y_n, 1/n(n+1), t) = \{y_n\}$, por tanto, τ_M , efectivamente,

es la topología discreta en X . Esto implica que tanto A como B son cerrados en X . Además, para cada $t > 0$ y $n, m \geq 2$, se tiene

$$\begin{aligned} M(x_n, x_m, t) &= 1 - \left(\frac{1}{\min\{n, m\}} - \frac{1}{\max\{n, m\}} \right) \\ &> 1 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

y, de forma similar, $M(y_n, y_m, t) > \frac{1}{2}$. Por lo tanto, A y B son F -acotados. Sin embargo, notemos que para cada $n \geq 2$ y $t > 0$,

$$M(x_n, B, t) = \sup \left\{ \min \left\{ \frac{1}{n}, \frac{1}{m} \right\} : m \geq 3 \right\} = \sup \left\{ \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \dots \right\} = \frac{1}{n},$$

y, de forma similar, $M(A, y_n, t) = \frac{1}{n}$, por lo tanto,

$$\inf_{a \in A} M(a, B, t) = \inf_{b \in B} M(A, b, t) = 0,$$

es decir, $H_M(A, B, t) = 0$, lo cual no podría pasar si $(H_M, *)$ fuera una métrica difusa.

□

Capítulo 6

Filtrado de imágenes usando métricas difusas

En este capítulo se presenta una aplicación de las métricas difusas al filtrado de imágenes. Cabe señalar que el enfoque de este capítulo se centra principalmente en los aspectos matemáticos y solo se dan los aspectos computacionales esenciales para la aplicación. No obstante, se proporcionan referencias (ver [13], [14], [15] y [16]) para el lector interesado en profundizar en el tema.

6.1. Píxeles y el sistema RGB

En una imagen digital la representación de los datos visuales se realiza mediante una estructura discreta compuesta por elementos denominados píxeles (picture elements). Cada píxel constituye la unidad mínima de información de una imagen digital y corresponde a un punto de una cuadrícula bidimensional. Su valor numérico determina la información visual asociada a ese punto, como la intensidad luminosa o el color, dependiendo del tipo de imagen considerada.

En las imágenes en escala de grises (comunmente llamadas imágenes en blanco y negro), cada píxel almacena un único valor de intensidad, generalmente en el rango de 0 a 255 cuando se utiliza una profundidad de 8 bits. En este contexto, el valor 0 representa el color negro, 255 el blanco, y los valores intermedios describen

diferentes niveles de gris.

Por otro lado, en las imágenes a color, cada píxel está conformado por un conjunto de valores que representan las intensidades de los canales cromáticos. Uno de los modelos más empleados para esta representación es el sistema RGB (Red, Green, Blue), basado en la síntesis aditiva del color. Este modelo se fundamenta en el principio de que cualquier color puede obtenerse combinando distintas intensidades de luz roja, verde y azul. Cada píxel puede, por tanto, representarse mediante un vector tridimensional

$$(R, G, B),$$

donde R , G y B indican las intensidades de los componentes rojo, verde y azul, respectivamente.

Cuando se trabaja con imágenes de 8 bits por canal, cada componente puede adoptar valores enteros en el rango de 0 a 255. De esta manera, el color negro corresponde a $(0, 0, 0)$, el blanco a $(255, 255, 255)$, y las distintas combinaciones intermedias producen una amplia gama de colores (hasta $256^3 = 16,777,216$ tonalidades posibles). Este modelo se utiliza principalmente en dispositivos que emiten luz, como monitores, televisores, proyectores y cámaras digitales, lo que lo convierte en el estándar para la representación de imágenes digitales.

Se dice que una imagen es multicanal cuando cada píxel está representado por un vector en $\mathbb{R}^k$, en lugar de un valor escalar. En particular, una imagen RGB corresponde al caso $k = 3$.

6.2. Filtro de Mediana Vectorial

En el procesamiento digital de imágenes es frecuente que las imágenes adquiridas presenten alteraciones debidas a errores de transmisión, fallos en sensores o interferencias externas. Estas perturbaciones, conocidas en general como ruido, pueden alterar significativamente la información visual y dificultar tareas posteriores como segmentación, detección de bordes o análisis de características. Por ello, resulta necesario aplicar técnicas que permitan reducir estas perturbaciones sin destruir la estructura esencial de la imagen.

Un filtro es un procedimiento que transforma una imagen en otra modificando los valores de sus píxeles de acuerdo con cierta regla. En muchos casos, el nuevo valor de un píxel se determina a partir de los valores de los píxeles vecinos. Cuando esta transformación se define mediante combinaciones lineales de los valores en una vecindad, se habla de filtros lineales. Un ejemplo clásico es el filtro promedio, que reemplaza cada píxel por el promedio de los valores en su entorno.

Sin embargo, los filtros lineales no siempre son adecuados, especialmente cuando la imagen está afectada por ruido impulsivo. Este tipo de ruido se caracteriza por alterar de manera abrupta y aislada ciertos píxeles, asignándoles valores significativamente distintos a los de su entorno (por ejemplo, puntos blancos o negros aislados en la imagen). En estos casos, el promedio puede verse fuertemente influenciado por valores extremos, produciendo un efecto de desenfoque y pérdida de bordes.

Para tratar este problema, se emplea el filtro de mediana, que en el caso escalar (imágenes en escala de grises) reemplaza el valor de un píxel por la mediana de los valores contenidos en una ventana local, es decir, en una pequeña región rectangular centrada en dicho píxel (por ejemplo, de tamaño 3×3 o 5×5).

Cuando se trabaja con imágenes multicanal, como las imágenes en color representadas en el espacio RGB, cada píxel está descrito por un vector y no por un valor escalar. En este contexto, el Filtro de Mediana Vectorial (Vector Median Filter, VMF) surge como una generalización natural del filtro de mediana al caso vectorial. En lugar de promediar componentes o aplicar la mediana de manera independiente a cada canal, el VMF selecciona, dentro de la ventana local, el vector que resulta más representativo con respecto a los demás según un criterio basado en distancias. De esta manera, el VMF permite reducir eficazmente el ruido impulsivo preservando mejor los bordes y las estructuras relevantes de la imagen.

Matemáticamente una imagen digital se representa como una función $F : \Omega \rightarrow [0, 255]^3$, donde Ω es un subconjunto finito de $\mathbb{Z}^k$ que representa las coordenadas de los píxeles de la imagen. Para procesar cada píxel de la imagen, consideraremos los píxeles dentro de una vecindad cuadrada $\mathbf{W} \subset \Omega$ de tamaño $n \times n$ centrada en

él, donde $n > 1$ es un número impar. Para cada $q_i \in \mathbf{W}$, $i = 1, 2, \dots, n^2$, el vector

$$F(q_i) = (F(q_i)_1, F(q_i)_2, F(q_i)_2)$$

es su vector de color asociado. El proceso de filtrado comienza calculando para cada $q_i \in \mathbf{W}$, el escalar

$$S_i = \sum_{j=1}^{n^2} d(F(q_i), F(q_j)),$$

donde d es una métrica (usualmente se utilizan las métricas L_1 o L_2). Posteriormente, el filtro va a reemplazar el vector que esta en el centro de $\mathbf{W}$ por el vector

$$q^* = q_k,$$

donde k es tal que

$$S_k = \min \{S_i : i = 1, 2, \dots, n^2\}.$$

Desde un punto de vista intuitivo, el VMF elige el color que está más cerca, en promedio, de los colores que lo rodean, eliminando valores atípicos (ruido) sin generar colores artificiales. Esta característica lo hace particularmente efectivo para imágenes afectadas por ruido impulsivo.

6.3. Versión difusa del VMF

En el filtro VMF la distancia entre los vectores de color se evalúa de forma determinista. Sin embargo, en muchos contextos del procesamiento de imágenes los datos presentan incertidumbre, ambigüedad o gradualidad en la similitud cromática, es por ello que las métricas clásicas pueden resultar limitadas. Con el fin de modelar de manera más flexible las relaciones de cercanía entre los píxeles, se a propuesto reemplazar la métrica clásica del VMF por una métrica difusa.

Usando la misma notación que en el VMF clásico, para cada par de píxeles $q_i, q_j \in \mathbf{W}$, vamos a definir una métrica difusa que nos mida el grado de cercanía entre sus vectores de color de la siguiente forma

$$R(q_i, q_j, t) = \prod_{l=1}^3 \frac{\min \{F(q_i)_l, F(q_j)_l\} + K}{\max \{F(q_i)_l, F(q_j)_l\} + K},$$

donde $t > 0$. Para ver que R es, efectivamente, una métrica difusa, basta recordar el Ejemplo 2.0.8. Investigaciones previas (ver [13] y [14]) sugieren que el valor óptimo del parámetro K depende de la imagen a procesar y de la densidad del ruido en ella. Sin embargo, concluyeron que para imágenes en el sistema RGB, son apropiados valores de K en el intervalo $[512, 2048]$. En este caso se tomó $K = 1024$ por ser una operación hexadecimal computacionalmente simple.

Por otro lado, cada pixel q_i en la imagen tiene asociadas sus coordenadas (q_i^1, q_i^2) en el espacio. Entonces, para cada par de píxeles, podemos medir su cercanía vistos como puntos en el espacio. Para ello utilizamos la siguiente métrica difusa

$$M(q_i, q_j, t) = \frac{t}{t + \|(q_i^1, q_i^2) - (q_j^1, q_j^2)\|},$$

donde $t > 0$ y $\|\cdot\|$ es la distancia euclidiana en $\mathbb{R}^2$. Por el Ejemplo 2.0.6 se tiene que M es, efectivamente, una métrica difusa. Finalmente, utilizando el Lema 2.0.2 podemos definir la siguiente métrica difusa

$$C(q_i, q_j, t) = R(q_i, q_j, t)M(q_i, q_j, t).$$

De esta forma hemos obtenido una métrica difusa que mide la distancia entre píxeles considerando tanto sus componentes de color como su posición en el espacio.

A continuación, de forma análoga al VMF, para cada $q_i \in \mathbf{W}$, $i = 1, 2, \dots, n^2$, y $t > 0$, calculamos

$$S_i = \sum_{j=1, j \neq i}^{n^2} C(q_i, q_j, t).$$

El filtro va a reemplazar el vector que está en el centro de $\mathbf{W}$ por el vector

$$q^* = q_k,$$

donde k es tal que

$$S_k = \max \{S_i : i = 1, 2, \dots, n^2\}.$$

Notese que en comparación al VMF, en este caso, se escogió el máximo de los S_i , esto debido a la propiedad (MD2) de las métricas difusas. Obsérvese que, como en el caso del VMF, la salida del filtro siempre es uno de los vectores de la ventana de filtrado, por tanto, el filtro no genera nuevos vectores de color, es

decir, no se introducen colores que no estuvieran previamente presentes en dicha ventana. Además, en el procedimiento anterior, el parámetro t permite ajustar la importancia del criterio espacial para el cálculo de la distancia. Valores altos de t reducen la sensibilidad de la métrica difusa C a los cambios de la métrica difusa M , aumentando así la capacidad de reducción de ruido del filtro pero sacrifica la conservación de los detalles de la imagen. Por otro lado, valores bajos de t implican mayor importancia del criterio espacial, lo cual ayuda a una mejor conservación de la imagen original. En [14] se presenta un estudio comparativo de imágenes filtradas mediante el filtro VMF y el filtro recién expuesto. En dicho estudio se analizan las diferencias visuales entre las imágenes procesadas por ambos filtros, así como la capacidad de cada uno para preservar los detalles y reducir el ruido.

Capítulo 7

Conjuntos difusos en espacios uniformes

Dado un espacio topológico (X, τ) , definimos el conjunto $\mathcal{F}(X)$ como el conjunto de todos los conjuntos difusos en X que son normales, semicontinuos superiormente y tienen soporte compacto. Cuando el espacio topológico (X, τ_d) es inducido por un espacio métrico (X, d) , el conjunto $\mathcal{F}(X)$ puede ser dotado de varias métricas definidas a partir de la métrica d . Entre dichas métricas se encuentran la métrica por niveles, la métrica de Skorokhod, la métrica endográfica y la métrica sendográfica.

7.1. La uniformidad de Skorokhod y la uniformidad por niveles

En esta sección comenzaremos recordando brevemente la métrica de Skorokhod y la métrica por niveles definidas en el conjunto $\mathcal{F}(X)$, el lector interesado puede consultar [17], [18], [19], [20] y [24] para profundizar más en el tema. El objetivo de este capítulo es generalizar las nociones de dichas métricas al contexto de los espacios uniformes.

Comencemos notando que si $u \in \mathcal{F}(X)$, entonces, para cada $\alpha \in \mathbb{I}$, u_α es compacto, pues u_0 es compacto y, si $\alpha \in (0, 1]$, entonces u_α es cerrado (pues u

es semicontinua superiormente) y está contenido en el compacto u_0 . Además, ya que u es normal, cada u_α es no vacío. La demostración del siguiente teorema la podemos encontrar en [21].

Teorema 7.1.1. *Sean (X, τ) un espacio Hausdorff y $u \in \mathcal{F}(X)$. Definimos la función $L : \mathbb{I} \rightarrow (\mathcal{K}(X), \tau_V)$ (donde τ_V es la topología de Vietoris asociada a la topología τ) como $L(\alpha) = u_\alpha$ para todo $\alpha \in \mathbb{I}$. Entonces, se cumple lo siguiente:*

- (a) L es continua por la izquierda en $(0, 1]$.
- (b) $\lim_{\lambda \rightarrow \alpha^+} L(\lambda) = \overline{\bigcup_{\beta > \alpha} u_\beta}$ y $\lim_{\lambda \rightarrow \alpha^+} L(\lambda) \subset u_\alpha$ para cada $\alpha \in [0, 1)$.
- (c) L es continua por la derecha en 0.

Recíprocamente, si $\{u_\alpha : \alpha \in \mathbb{I}\} \subset \mathcal{K}(X)$ es una familia decreciente que satisface los incisos anteriores, entonces, existe un único $w \in \mathcal{F}(X)$ tal que $w_\alpha = u_\alpha$ para cada $\alpha \in \mathbb{I}$.

En el Capítulo 1 vimos que dado un espacio métrico (X, d) , podemos definir la métrica de Hausdorff d_H en el hiperespacio $\mathcal{K}(X)$. Entonces, la métrica por niveles $d_\infty : \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ es definida como

$$d_\infty(u, v) = \sup \{d_H(u_\alpha, v_\alpha) : \alpha \in \mathbb{I}\}$$

para cada $u, v \in \mathcal{F}(X)$ (ver [17]).

A partir de la métrica d_∞ , vamos a definir la métrica de Skorokhod en $\mathcal{F}(X)$. Sea $\mathbb{T}$ la familia de todos los homeomorfismos de $\mathbb{I}$ en sí mismo que son estrictamente crecientes. Para cada $t \in \mathbb{T}$ definimos

$$\|t\| = \sup \{|t(\alpha) - \alpha| : \alpha \in \mathbb{I}\}.$$

Afirmación. Si $t \in \mathbb{T}$ y $u \in \mathcal{F}(X)$, entonces $t \circ u \in \mathcal{F}(X)$.

Para ver qué $t \circ u$ es semicontinua superiormente, tomamos $x_0 \in X$ y $\alpha \in \mathbb{I}$ tal que $(t \circ u)(x_0) < \alpha$. Ya que t es biyectiva y estrictamente creciente, se tiene $u(x_0) < t^{-1}(\alpha)$, por tanto, por la semicontinuidad superior de u , existe una vecindad abierta U de x_0 tal que

$$u(x) < t^{-1}(\alpha)$$

para todo $x \in U$, lo cual implica

$$(t \circ u)(x) < \alpha$$

para todo $x \in U$, es decir, $t \circ u$ es semicontinua superiormente. Para mostrar que $t \circ u$ es normal, basta notar que $t(1) = 1$, entonces, para cada $x \in u_1$,

$$(t \circ u)(x) \geq t(1) = 1,$$

es decir, $(t \circ u)_1$ es no vacío. Finalmente, notemos que $t \circ u$ tiene soporte compacto, pues $t(0) = 0$, por lo tanto, si $x \in X$ es tal que $(t \circ u)(x) > 0$, se tendría $u(x) > 0$, es decir,

$$(t \circ u)_0 \subset u_0$$

y dado que u_0 es compacto y $(t \circ u)_0$ es cerrado, se tiene que $(t \circ u)_0$ es compacto.

Escribiremos tu en lugar de $t \circ u$ para simplificar la notación. Para todo $u, v \in \mathcal{F}(X)$, definimos la métrica de Skorokhod (ver [18]) como

$$d_0(u, v) = \inf \{ \epsilon : \exists t \in \mathbb{T} \text{ tal que } ||t|| \leq \epsilon \text{ y } d_\infty(u, tv) \leq \epsilon \}.$$

Notemos que si $u, v \in \mathcal{F}(X)$, entonces

$$d_0(u, v) \leq d_\infty(u, v),$$

pues para $\epsilon = d_\infty(u, v)$, basta tomar a t como la función identidad. Esto implica que $\tau_{d_0} \subset \tau_{d_\infty}$.

Ahora, lo que vamos a hacer es dar uniformidades que estén estrechamente relacionadas con las métricas d_0 y d_∞ . Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme, para cada $U \in \mathcal{U}$ y $\epsilon > 0$, definimos el conjunto

$$G[U, \epsilon] = \left\{ (u, v) \in (\mathcal{F}(X))^2 : \exists t \in \mathbb{T} \text{ tal que } ||t|| < \epsilon \text{ y } (u_\alpha, v_{t(\alpha)}) \in \mathcal{K}[U], \forall \alpha \in \mathbb{I} \right\},$$

donde $\mathcal{K}[U] = \{(A, B) \in \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) : A \subset U(B), B \subset U(A)\}$.

Teorema 7.1.2. *Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme. Entonces, $\{G[U, \epsilon] : U \in \mathcal{U}, \epsilon > 0\}$ es una base para una uniformidad en $\mathcal{F}(X)$.*

Demostración. Vamos a probar las condiciones del Lema 1.3.2.

(BU1) Sean $U \in \mathcal{U}$ y $\epsilon > 0$. Vamos a probar que $G[U, \epsilon] = (G[U, \epsilon])^{-1}$, para ello, tomamos $(u, v) \in (G[U, \epsilon])^{-1}$, entonces, existe $t \in \mathbb{T}$ con $||t|| < \epsilon$ tal que, para cada $\alpha \in \mathbb{I}$,

$$\text{i) } v_\alpha \subset U(u_{t(\alpha)}).$$

$$\text{ii) } u_{t(\alpha)} \subset U(v_\alpha).$$

Sean $\beta \in \mathbb{I}$ y $x \in u_\beta$, ya que t es biyectiva, podemos tomar $t^{-1}(\beta)$. Entonces, por ii), existe $y \in v_{t^{-1}(\beta)}$ tal que $(y, x) \in U$, es decir,

$$u_\beta \subset U(v_{t^{-1}(\beta)}).$$

Si ahora tomamos $x \in v_{t^{-1}(\beta)}$, entonces, por i), existe $y \in u_\beta$ tal que $(y, x) \in U$. Por tanto,

$$v_{t^{-1}(\beta)} \subset U(u_\beta).$$

Así, $(u_\beta, v_{t^{-1}(\beta)}) \in \mathcal{K}[U]$ para todo $\beta \in \mathbb{I}$, además, $\|t^{-1}\| = \|t\| < \epsilon$, lo cual implica que $(u, v) \in G[U, \epsilon]$. La demostración de la otra contención es análoga.

(BU2) Tomamos $U \in \mathcal{U}$ y $\epsilon > 0$. Ya que $\mathcal{U}$ es una uniformidad, existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $W^2 \subset U$.

Afirmación. $(G[W, \epsilon/2])^2 \subset G[W^2, \epsilon]$.

Sea $(u, v) \in (G[W, \epsilon/2])^2$, entonces, existe $w \in \mathcal{F}(X)$ tal que $(u, w) \in G[W, \epsilon/2]$ y $(w, v) \in G[W, \epsilon/2]$, es decir, existen $t_1, t_2 \in \mathbb{T}$ tales que $\|t_i\| < \epsilon/2$, $i = 1, 2$ y, para cada $\alpha \in \mathbb{I}$,

$$\text{i) } u_\alpha \subset W(w_{t_1(\alpha)}).$$

$$\text{ii) } w_{t_1(\alpha)} \subset W(u_\alpha).$$

$$\text{iii) } w_\alpha \subset W(v_{t_2(\alpha)}).$$

$$\text{iv) } v_{t_2(\alpha)} \subset W(w_\alpha).$$

Por otro lado, por la desigualdad del triángulo, para cada $\alpha \in \mathbb{I}$ se tiene

$$|t_2(t_1(\alpha)) - \alpha| \leq |t_2(t_1(\alpha)) - t_1(\alpha)| + |t_1(\alpha) - \alpha|,$$

pero, $\|t_i\| < \epsilon/2$, $i = 1, 2$, por lo tanto, de la ecuación anterior se sigue que

$$|t_1(t_2(\alpha)) - \alpha| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Ya que cualquier función continua definida en un compacto alcanza su máximo y su mínimo, se tiene $\|t_1 \circ t_2\| < \epsilon$.

Sea $\beta \in \mathbb{I}$, tomamos $x \in v_{t_2(t_1(\beta))}$, entonces, por iv), existe $y \in w_{t_1(\beta)}$ tal que $(y, x) \in W$, además, por ii), existe $z \in u_\beta$ tal que $(z, y) \in W$. Por tanto,

$(z, x) \in W^2$, es decir,

$$v_{t_2(t_1(\beta))} \subset W^2(u_\beta).$$

De forma similar, si tomamos $x \in u_\beta$, entonces, por i), existe $y \in w_{t_1(\beta)}$ tal que $(y, x) \in W$, y, por iii), existe $z \in v_{t_2(t_1(\beta))}$ tal que $(z, y) \in W$, por tanto, $(z, x) \in W^2$, es decir,

$$u_\beta \subset W^2(v_{t_2(t_1(\beta))}).$$

Con esto, hemos demostrado que $(u_\beta, v_{t_2(t_1(\beta))}) \in \mathcal{K}[W^2]$, por lo tanto, $(u, v) \in G[W^2, \epsilon]$ lo cual prueba la afirmación.

Finalmente, probemos que $G[W^2, \epsilon] \subset G[U, \epsilon]$. Sea $(u, v) \in G[W^2, \epsilon]$, entonces, existe $t \in \mathbb{T}$, con $\|t\| < \epsilon$, tal que, para cada $\alpha \in \mathbb{I}$, $(u_\alpha, v_{t(\alpha)}) \in \mathcal{K}[W^2]$. Ya que $W^2 \subset U$, se tiene

$$u_\alpha \subset W^2[v_{t(\alpha)}] \subset U[v_{t(\alpha)}]$$

y

$$v_{t(\alpha)} \subset W^2[u_\alpha] \subset U[u_\alpha],$$

lo cual implica que $(u, v) \in G[U, \epsilon]$. Así, $(G[W, \epsilon/2])^2 \subset G[W^2, \epsilon] \subset G[U, \epsilon]$.

(BU3) Sean $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ y $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$. Definimos $\epsilon = \min \{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ y $U = U_1 \cap U_2$. Vamos a mostrar que $G[U, \epsilon] \subset G[U_1, \epsilon_1] \cap G[U_2, \epsilon_2]$. Sea $(u, v) \in G[U, \epsilon]$, entonces, existe $t \in \mathbb{T}$, con $\|t\| < \epsilon$, tal que $(u_\alpha, v_{t(\alpha)}) \in \mathcal{K}[U]$ para cada $\alpha \in \mathbb{I}$. Por la elección de ϵ , $\|t\| < \epsilon_i$, $i = 1, 2$. Además, ya que $U \subset U_i$, se tiene

$$\mathcal{K}[U] \subset \mathcal{K}[U_i],$$

es decir,

$$(u_\alpha, v_{t(\alpha)}) \in \mathcal{K}[U_i],$$

para cada $\alpha \in \mathbb{I}$. Por tanto, $(u, v) \in G[U_1, \epsilon_1] \cap G[U_2, \epsilon_2]$.

(BU4) Sean $U \in \mathcal{U}$ y $\epsilon > 0$. Para ver que $(u, u) \in G[U, \epsilon]$, tomamos t como la función identidad, entonces, para cada $\alpha \in \mathbb{I}$, se tiene $(u_\alpha, u_\alpha) \in \mathcal{K}[U]$, pues para cada $x \in u_\alpha$, se tiene $(x, x) \in U$. Por tanto,

$$\Delta_{\mathcal{F}(X)} \subset G[U, \epsilon].$$

Ahora, tomemos $(u, v) \in \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X)$ tal que

$$(u, v) \in \bigcap \{G[U, \epsilon] : U \in \mathcal{U} \text{ y } \epsilon > 0\}. \quad (7.1)$$

Afirmación. Si $W \in \mathcal{U}$, entonces, para cada $\beta \in \mathbb{I}$, $(u_\beta, v_\beta) \in \mathcal{K}[W]$.

Para mostrar la afirmación, sea $W \in \mathcal{U}$, entonces, existe $V \in \mathcal{U}$ simétrico, tal que $V \subset V^2 \subset W$. Por la ecuación 7.1, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos tomar $t_n \in \mathbb{T}$ tal que $\|t_n\| = \|t_n^{-1}\| < 1/n$ y

$$(u_\alpha, v_{t_n(\alpha)}) \in \mathcal{K}[V] \quad (7.2)$$

para cada $\alpha \in \mathbb{I}$. Ya que $t(0) = 0$ y $t(1) = 1$ para cualquier $t \in \mathbb{T}$, se tiene

$$(u_0, v_0) \in \mathcal{K}[V] \subset \mathcal{K}[W]$$

y

$$(u_1, v_1) \in \mathcal{K}[V] \subset \mathcal{K}[W].$$

Ahora, tomemos $\alpha_0 \in (0, 1)$ y consideremos los siguientes casos.

Caso 1. El conjunto $S = \{n \in \mathbb{N} : t_n(\alpha_0) > \alpha_0\}$ es infinito.

En este caso, tomamos $m \in S$ y $x \in u_{\alpha_0}$. Por la ecuación 7.2, existe $y \in v_{t_m(\alpha_0)}$ tal que $(y, x) \in V$. Pero,

$$v(y) \geq t_m(\alpha_0) > \alpha_0,$$

es decir, $y \in v_{\alpha_0}$, por tanto,

$$u_{\alpha_0} \subset V(v_{\alpha_0}) \subset W(v_{\alpha_0}).$$

Por otro lado, para probar que $v_{\alpha_0} \subset W(u_{\alpha_0})$, comencemos notemos que, para cada $n \in S$, $\alpha_0 > t_n^{-1}(\alpha_0)$ y $\|t_n^{-1}\| = \|t_n\| < 1/n$, por lo tanto,

$$1/n \geq \alpha_0 - t_n^{-1}(\alpha_0) > 0.$$

Por recursión, construimos la siguiente sucesión. Sea $x_1 = t_{m_1}^{-1}(\alpha_0)$, donde $m_1 = \min S$. Supongamos que ya tenemos definido el término x_i , entonces, ya que S es infinito, el conjunto

$$S_{i+1} = \{n \in S : 1/n < \alpha_0 - x_i\}$$

es infinito, tomamos $m_{i+1} = \min S_{i+1}$ y definimos $x_{i+1} = t_{m_{i+1}}^{-1}(\alpha_0)$.

Notemos que

$$\alpha_0 - x_{i+1} \leq 1/m_{i+1} < \alpha_0 - x_i,$$

por lo tanto,

$$x_i < x_{i+1},$$

es decir, la sucesión $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es creciente y está acotada por α_0 , más aun, podemos probar que converge a α_0 . Para ello, sea $\epsilon > 0$ tomamos $p \in \mathbb{N}$ tal que $1/p < \epsilon$, entonces, ya que la sucesión $\{m_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es creciente, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $p < m_k$, es decir, $1/m_k < 1/p$. Por tanto,

$$\alpha_0 - \epsilon < \alpha_0 - 1/p < \alpha_0 - 1/m_k \leq x_k,$$

esto implica que $x_k \in (\alpha_0 - \epsilon, \alpha_0 + \epsilon)$, lo cual basta para probar la convergencia.

Ahora, por la ecuación 7.2 y por la definición de la sucesión $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene $v_{\alpha_0} \subset V(u_{x_n})$, es decir,

$$v_{\alpha_0} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V(u_{x_n}). \quad (7.3)$$

Sea $x \in v_{\alpha_0}$, entonces, por 7.3, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $y_n \in u_{x_n}$ tal que

$$(y_n, x) \in V. \quad (7.4)$$

Ya que la sucesión $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es creciente, se tiene que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in u_{x_1}$ el cual es compacto, por tanto, existe $y \in u_{x_1}$ que es punto de acumulación de la sucesión $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces, ya que $V(y)$ es una vecindad de y , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y_{n_0} \in V(y)$, es decir,

$$(y, y_{n_0}) \in V. \quad (7.5)$$

Por lo tanto, de 7.4 y 7.5 se tiene $(y, x) \in V^2 \subset W$. Ahora, vamos a mostrar que $y \in u_{\alpha_0}$, para ello, supongamos que $u(y) < \alpha_0$, entonces, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $u(y) < x_m < \alpha_0$, es decir, $y \notin u_{x_m}$. Dado que los compactos son cerrados, existe una vecindad O de y tal que $O \cap u_{x_m} = \emptyset$, además, ya que para todo $n \geq m$, $u_{x_n} \subset u_{x_m}$, se sigue que O solo intersecta en una cantidad finita de puntos al conjunto $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$, lo cual contradice el hecho de que y es

punto de acumulación de $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$. Así, $y \in u_{\alpha_0}$, por lo tanto, $x \in W(u_\alpha)$, es decir, $v_{\alpha_0} \subset W(u_\alpha)$.

Caso 2. El conjunto $S' = \{n \in \mathbb{N} : t_n(\alpha_0) < \alpha_0\}$ es infinito.

Tomamos $m \in S'$ y $x \in v_{\alpha_0}$. Por la ecuación 7.2, existe $y \in u_{t_m^{-1}(\alpha_0)}$ tal que $(y, x) \in V$. Pero,

$$u(y) \geq t_m^{-1}(\alpha_0) > \alpha_0,$$

es decir, $y \in u_{\alpha_0}$, por tanto,

$$v_{\alpha_0} \subset V(u_{\alpha_0}) \subset W(u_{\alpha_0}).$$

Para probar que $u_{\alpha_0} \subset W(v_{\alpha_0})$ primero encontramos (con un procedimiento análogo al caso anterior) una subsucesión de $\{t_n(\alpha_0) : n \in S'\}$ que sea creciente y converja a α_0 , para despues aplicar un argumento similar al del caso 1.

Caso 3. Los conjuntos S y S' son finitos.

Si S y S' son finitos, debe existir $N \in \mathbb{N}$ tal que $t_n(\alpha_0) = \alpha_0$ para cada $n \geq N$. Por lo tanto, nuevamente usando la ecuación 7.2,

$$(u_{\alpha_0}, v_{\alpha_0}) = (u_{\alpha_0}, v_{t_N(\alpha_0)}) \in \mathcal{K}[V] \subset \mathcal{K}[W].$$

Esto último termina la prueba de la afirmación.

Ahora, por el Teorema 1.3.13, la familia $\{\mathcal{K}[U] : U \in \mathcal{U}\}$ es base para una uniformidad en $\mathcal{K}(X)$, por lo tanto, $\Delta_{\mathcal{K}(X)} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{K}[U]$, entonces, usando la afirmación 1, se tiene que para cada $\beta \in \mathbb{I}$, $u_\beta = v_\beta$. Por tanto, $u = v$, es decir, $(u, v) \in \Delta_{\mathcal{F}(X)}$. $\square$

La unifomidad definida en la proposición anterior se denota como $\mathcal{U}_0$ y recibe el nombre de la uniformidad de Skorokhod.

Sean $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme y $U \in \mathcal{U}$, definimos el conjunto

$$F[U] = \{(u, v) \in \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) : (u_\alpha, v_\alpha) \in \mathcal{K}[U], \forall \alpha \in \mathbb{I}\}.$$

Teorema 7.1.3. Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme. Entonces, $\{F[U] : U \in \mathcal{U}\}$ es una base para una uniformidad en $\mathcal{F}(X)$.

Demostración. Nuevamente, vamos a demostrar las condiciones del Lema 1.3.2.

(BU1) Sea $U \in \mathcal{U}$. Es fácil ver que $F[U] = (F[U])^{-1}$, pues $\mathcal{K}[U] = (\mathcal{K}[U])^{-1}$.

(BU2) Tomamos $U \in \mathcal{U}$, ya que $\mathcal{U}$ es una uniformidad, existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $W^2 \subset U$.

Afirmación. $(F[W])^2 \subset F[W^2]$.

Sea $(u, v) \in (F[W])^2$, entonces, existe $w \in \mathcal{F}(X)$ tal que $(u, w) \in F[W]$ y $(w, v) \in F[W]$, es decir, para cada $\alpha \in \mathbb{I}$,

- i) $u_\alpha \subset W(w_\alpha)$,
- ii) $w_\alpha \subset W(u_\alpha)$,
- iii) $w_\alpha \subset W(v_\alpha)$,
- iv) $v_\alpha \subset W(w_\alpha)$.

Sea $\beta \in \mathbb{I}$, entonces, usando iv) y ii), se tiene que $v_\beta \subset W^2(u_\beta)$, y, usando i) y iii), se tiene que $u_\beta \subset W^2(v_\beta)$. Con esto, hemos demostrado que $(u_\beta, v_\beta) \in \mathcal{K}[W^2]$, por lo tanto, $(u, v) \in F[W^2]$. Es claro que $F[W^2] \subset F[U]$, pues $W^2 \subset U$, lo cual termina la demostración de este punto.

(BU3) Sean $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ y $U = U_1 \cap U_2$. Entonces, de forma análoga al (BU3) del teorema anterior, se tiene $F[U] \subset F[U_1] \cap F[U_2]$.

(BU4) Sea $U \in \mathcal{U}$. Ya que $\Delta_X \subset U$, se tiene que para cada $\alpha \in \mathbb{I}$, $(u_\alpha, u_\alpha) \in \mathcal{K}[U]$, por tanto, $\Delta_{\mathcal{F}(X)} \subset F[U]$.

Ahora, sea $(u, v) \in \bigcap \{F[U] : U \in \mathcal{U}\}$. Entonces, para cada $U \in \mathcal{U}$ y cada $\beta \in \mathbb{I}$,

$$(u_\beta, v_\beta) \in \mathcal{K}[U].$$

Ya que $\Delta_{\mathcal{K}(X)} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{K}[U]$, entonces, para cada $\beta \in \mathbb{I}$, $u_\beta = v_\beta$, por lo tanto, $u = v$. □

A la uniformidad definida en la proposición anterior la denotaremos como $\mathcal{U}_\infty$ y la llamaremos la uniformidad por niveles. Para finalizar esta sección, veremos que las uniformidades que acabamos de definir están estrechamente relacionadas con las métricas que vimos al comienzo de la sección.

Definición 7.1.4. Sean $(X, \mathcal{U})$ y $(X, \mathcal{V})$ espacios uniformes. Diremos que la uniformidad $\mathcal{U}$ es más fina que la uniformidad $\mathcal{V}$ si $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$.

Teorema 7.1.5. *Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme. Entonces, la uniformidad $\mathcal{U}_\infty$ es más fina que la uniformidad $\mathcal{U}_0$, y, por tanto, la topología generada por $\mathcal{U}_\infty$ es más fina que la topología generada por $\mathcal{U}_0$.*

Demostración. Sea $U \in \mathcal{U}$ y $\epsilon > 0$, basta mostrar que $F[U] \subset G[U, \epsilon]$. Sea $(u, v) \in F[U]$, entonces, si tomamos a $t \in \mathbb{T}$ como la función identidad, se tendría que para cada $\alpha \in \mathbb{I}$,

$$(u_\alpha, v_{t(\alpha)}) = (u_\alpha, v_\alpha) \in \mathcal{K}[U].$$

Por tanto, ya que $\|t\| = 0 < \epsilon$, $(u, v) \in G[U, \epsilon]$. Así, hemos mostrado que $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_\infty$, lo cual implica que la topología generada por $\mathcal{U}_\infty$ es más fina que la generada por $\mathcal{U}_0$. $\square$

Recordemos que en $\mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X)$ se definen la métrica por niveles d_∞ y la métrica de Skorokhod d_0 como

$$d_\infty(u, v) = \sup \{d_H(u_\alpha, v_\alpha) : \alpha \in \mathbb{I}\}$$

y

$$d_0(u, v) = \inf \{ \epsilon : \exists t \in \mathbb{T} \text{ tal que } \|t\| \leq \epsilon \text{ y } d_\infty(u, tv) \leq \epsilon \},$$

respectivamente.

Teorema 7.1.6. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces, las uniformidades $\mathcal{U}_{d_0}$ y $(\mathcal{U}_d)_0$, definidas en $\mathcal{F}(X)$, coinciden.*

Demostración. En la Sección 1.3 vimos que la uniformidad $\mathcal{U}_{d_0}$ tiene como base a la familia $\{W_\delta : \delta > 0\}$, donde $W_\delta = \{(u, v) \in \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) : d_0(u, v) < \delta\}$. Para ver que $\mathcal{U}_{d_0} \subset (\mathcal{U}_d)_0$, fijemos $\delta > 0$ y $\epsilon \in (0, \delta)$; vamos a mostrar que $G[U_\epsilon, \epsilon] \subset W_\delta$. Tomamos $(u, v) \in G[U_\epsilon, \epsilon]$, entonces, existe $t \in \mathbb{T}$, con $\|t\| < \epsilon$, tal que $(u_\alpha, v_{t(\alpha)}) \in \mathcal{K}[U_\epsilon]$ para cada $\alpha \in \mathbb{I}$. Ahora, fijemos un $\alpha_0 \in \mathbb{I}$, y, notemos que

$$v_{t(\alpha_0)} = (t^{-1}v)_{\alpha_0}, \tag{7.6}$$

pues $x \in v_{t(\alpha_0)}$ si y solo si $v(x) \geq t(\alpha_0)$, lo cual es equivalente a $(t^{-1}v)(x) \geq \alpha_0$, pues t^{-1} es estrictamente creciente, y, esto a su vez es equivalente a que

$x \in (t^{-1}v)_{\alpha_0}$. Entonces, por la ecuación 7.6 y, ya que $u_{\alpha_0} \subset U_\epsilon(v_{t(\alpha_0)})$, se tiene que para cada $x \in u_{\alpha_0}$, existe $y \in (t^{-1}v)_{\alpha_0}$ tal que $(y, x) \in U_\epsilon$, es decir, $d(x, y) < \epsilon$. Por lo tanto, $d(x, (t^{-1}v)_{\alpha_0}) < \epsilon$ para cada $x \in u_{\alpha_0}$. Ya que cada función continua definida en un compacto alcanza su máximo y su mínimo, se tiene que $\sup \{d(x, (t^{-1}v)_{\alpha_0}) : x \in u_{\alpha_0}\} < \epsilon$. De forma análoga se tiene $\sup \{d(x, u_{\alpha_0}) : x \in (t^{-1}v)_{\alpha_0}\} < \epsilon$, por lo tanto,

$$d_H(u_{\alpha_0}, (t^{-1}v)_{\alpha_0}) < \epsilon. \quad (7.7)$$

Como α_0 fue tomado arbitrariamente, se tiene $d_\infty(u, t^{-1}v) \leq \epsilon$. Entonces, notando que $\|t^{-1}\| = \|t\| < \epsilon$, podemos concluir $d_0(u, v) \leq \epsilon < \delta$, es decir, $(u, v) \in W_\delta$.

Por otro lado, para probar que $(\mathcal{U}_d)_0 \subset \mathcal{U}_{d_0}$, sean $U_{\epsilon_1} \in \mathcal{U}_d$, $\epsilon_2 > 0$ y $\epsilon = \min \{\epsilon_1, \epsilon_2\}$. Entonces, si $(u, v) \in W_\epsilon$, se tiene $d_0(u, v) < \epsilon$, es decir, existe $\delta < \epsilon$ tal que existe $t \in \mathbb{T}$, con $\|t\| \leq \delta < \epsilon < \epsilon_2$, y $d_\infty(u, tv) \leq \delta < \epsilon$. Por lo tanto, para cada $\beta \in \mathbb{I}$,

$$d_H(u_\beta, v_{t^{-1}(\beta)}) = d_H(u_\beta, (tv)_\beta) < \epsilon. \quad (7.8)$$

Ahora, vamos a mostrar que $(u, v) \in G[U_{\epsilon_1}, \epsilon_2]$. Sean $\alpha_0 \in \mathbb{I}$ y $x \in u_{\alpha_0}$, entonces, por la ecuación 7.8 y la definición de la métrica de Hausdorff, debe existir un $z \in v_{t^{-1}(\alpha_0)}$ tal que $d(x, z) < \epsilon \leq \epsilon_1$. Por lo tanto, $x \in U_{\epsilon_1}(z) \subset U_{\epsilon_1}(v_{t^{-1}(\alpha_0)})$, es decir,

$$u_{\alpha_0} \subset U_{\epsilon_1}(v_{t^{-1}(\alpha_0)}).$$

La prueba de que $v_{t^{-1}(\alpha_0)} \subset U_{\epsilon_1}(u_{\alpha_0})$ es análoga. Así, $(u_{\alpha_0}, v_{t^{-1}(\alpha_0)}) \in \mathcal{K}[U_{\epsilon_1}]$, ya que α_0 fue tomado arbitrariamente y que $\|t^{-1}\| < \epsilon < \epsilon_2$, concluimos que $(u, v) \in G[U_{\epsilon_1}, \epsilon_2]$. Así, $\mathcal{U}_{d_0} = (\mathcal{U}_d)_0$. $\square$

Teorema 7.1.7. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces, la uniformidad $\mathcal{U}_{d_\infty}$ coincide con la uniformidad $(\mathcal{U}_d)_\infty$.*

Demostración. $\{W_\delta : \delta > 0\}$, con $W_\delta = \{(u, v) \in \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) : d_\infty(u, v) < \delta\}$ es una base para la uniformidad $\mathcal{U}_{d_\infty}$. Para ver que $\mathcal{U}_{d_\infty} \subset (\mathcal{U}_d)_\infty$, fijemos $\delta > 0$ y $\epsilon \in (0, \delta)$, vamos a mostrar que $F[U_\epsilon] \subset W_\delta$. Tomamos $(u, v) \in F[U_\epsilon]$, entonces, $(u_\alpha, v_\alpha) \in \mathcal{K}[U_\epsilon]$ para cada $\alpha \in \mathbb{I}$. Ahora, fijemos un $\alpha_0 \in \mathbb{I}$, entonces, de forma análoga a la demostración del teorema anterior, se tiene $\sup \{d(x, v_{\alpha_0}) : x \in u_{\alpha_0}\} <$

ϵ y $\sup \{d(x, u_{\alpha_0}) : x \in v_{\alpha_0}\} < \epsilon$. Por lo tanto, $d_H(u_\alpha, v_\alpha) < \epsilon$ para cada $\alpha \in \mathbb{I}$, lo cual implica $d_\infty(u, v) \leq \epsilon < \delta$, es decir, $(u, v) \in W_\delta$.

Para probar la otra implicación, sean $\epsilon > 0$ y $(u, v) \in W_\epsilon$, es decir, $d_H(u_\beta, v_\beta) < \epsilon$. Vamos a mostrar que $(u, v) \in F[U_\epsilon]$, para ello, sean $\alpha_0 \in \mathbb{I}$ y $x \in u_{\alpha_0}$, entonces, por la definición de la métrica de Hausdorff, debe existir un $z \in v_{\alpha_0}$ tal que $d(x, z) < \epsilon$. Por lo tanto, $x \in U_\epsilon(z) \subset U_\epsilon(v_{\alpha_0})$, es decir, $u_{\alpha_0} \subset U_\epsilon(v_{\alpha_0})$. La prueba de que $v_{\alpha_0} \subset U(u_{\alpha_0})$ es análoga. Así, $(u_\alpha, v_\alpha) \in \mathcal{K}[U_\epsilon]$ para cada $\alpha \in \mathbb{I}$, con lo cual concluimos que $(u, v) \in F[U_\epsilon]$. Así, $\mathcal{U}_{d_\infty} = (\mathcal{U}_d)_\infty$. $\square$

Corolario 7.1.8. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces, las topologías τ_{d_∞} y τ_{d_0} coinciden con las topologías inducidas por $(\mathcal{U}_d)_\infty$ y $(\mathcal{U}_d)_0$, respectivamente.*

Demostración. Por los dos teoremas anteriores, $\mathcal{U}_{d_0} = (\mathcal{U}_d)_0$ y $\mathcal{U}_{d_\infty} = (\mathcal{U}_d)_\infty$. Además, por el teorema 1.3.10, $\tau_{d_0} = \tau_{\mathcal{U}_{d_0}}$ y $\tau_{d_\infty} = \tau_{\mathcal{U}_{d_\infty}}$, por lo tanto, $\tau_{d_0} = \tau_{(\mathcal{U}_d)_0}$ y $\tau_{d_\infty} = \tau_{(\mathcal{U}_d)_\infty}$. $\square$

7.2. La uniformidad endográfica y la uniformidad sendográfica

En esta sección comenzaremos hablando brevemente de la métrica endográfica y la métrica sendográfica definidas en el conjunto $\mathcal{F}(X)$, el lector interesado puede consultar [22], [23] y [24] para profundizar más en el tema. Posteriormente, tal como en la sección anterior, vamos a trasladar las nociones de dichas métricas al contexto de los espacios uniformes.

Sea (X, τ) un espacio topológico. Vamos a denotar con $\mathcal{F}^*(X)$ a la familia de conjuntos difusos u en (X, τ) que satisfacen las siguientes condiciones:

- i) u es semicontinua superiormente.
- ii) $u_\alpha \in \mathcal{K}(X)$ para todo $\alpha \in (0, 1]$.
- iii) $u_0 = \overline{\bigcup \{u_\alpha : \alpha \in (0, 1]\}}$.

Al comienzo de la Sección 7.1, vimos que si $u \in \mathcal{F}(X)$, entonces, para todo $\alpha \in \mathbb{I}$, $u_\alpha \in \mathcal{K}(X)$. Por tanto, $\mathcal{F}(X) \subset \mathcal{F}^*(X)$. Para cada $u \in \mathcal{F}^*(X)$, definimos la

endográfica de u como

$$end(u) = \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{I} : u(x) \geq \alpha\},$$

además, si $u \in \mathcal{F}(X)$, definimos la sendográfica de u como

$$send(u) = end(u) \cap (u_0 \times \mathbb{I}).$$

Teorema 7.2.1. *Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme. Entonces, para cada $u \in \mathcal{F}^*(X)$, $end(u) \in \mathcal{C}(X \times \mathbb{I})$. Además, si $u \in \mathcal{F}(X)$, entonces, $send(u) \in \mathcal{K}(X \times \mathbb{I})$.*

Demostración. Primero notemos que para cada $u \in \mathcal{F}^*(X)$, $end(u) \neq \emptyset$, pues para cada $x \in X$, $(x, 0) \in end(u)$. Ahora, veamos que $(X \times \mathbb{I}) \setminus end(u)$ es abierto en $X \times \mathbb{I}$ (considerado con la topología producto). Sea $(x_0, \beta_0) \in (X \times \mathbb{I}) \setminus end(u)$, entonces, $u(x_0) < \beta_0$. Tomamos $\delta \in (u(x_0), \beta_0)$. Ya que u es semicontinua superiormente, existe un abierto $U_0 \subset X$ tal que $x_0 \in U_0$ y $u(x) < \delta$ para todo $x \in U_0$. Notemos que

$$U_0 \times (\delta, 1] \subset (X \times \mathbb{I}) \setminus end(u),$$

pues si $(x, \beta) \in U_0 \times (\delta, 1]$, entonces, $u(x) < \delta < \beta$. Por tanto, $(X \times \mathbb{I}) \setminus end(u)$ es abierto en $X \times \mathbb{I}$, lo cual prueba que $end(u) \in \mathcal{C}(X \times \mathbb{I})$.

Por otro lado, si $u \in \mathcal{F}(X)$, entonces $u_0 \times \mathbb{I}$ es compacto, por lo tanto, $send(u)$ es compacto por ser un subconjunto cerrado de un compacto. Para probar que $send(u)$ es no vacío, recordemos que u_1 es no vacío, es decir, existe $x \in X$ tal que $u(x) \geq 1$, por lo tanto, $(x, 1) \in send(u)$. $\square$

Sea (X, d) un espacio métrico. Definimos la métrica $\bar{d}$ en $X \times \mathbb{I}$ como

$$\bar{d}((x, a), (y, b)) = \max \{d(x, y), |a - b|\}. \quad (7.9)$$

De acuerdo con [5], dado un espacio métrico (X, d) , es posible definir la métrica de Hausdorff en el conjunto de los subconjuntos no vacíos, cerrados y acotados de X (en particular, en los subconjuntos compactos no vacíos de X). Entonces, podemos definir la métrica sendográfica d_S en $\mathcal{F}(X)$ como sigue

$$d_S(u, v) = \bar{d}_H(send(u), send(v)),$$

donde, $\bar{d}_H$ es la métrica de Hausdorff.

Observación. El teorema anterior no nos asegura que $\text{end}(u)$ y $\text{end}(v)$ sean acotados. De acuerdo con [5], si alguno de ellos fuera no acotado, $\bar{d}_H(\text{end}(u), \text{end}(v))$ podría ser infinito. Sin embargo observemos que, para $x \in X \setminus (u_0 \cup v_0)$, $u(x) = v(x) = 0$, entonces

$$(x, 0) \in \text{end}(u) \cap \text{end}(v).$$

Esto nos dice que $\text{end}(v)$ y $\text{end}(u)$ difieren en subconjuntos cerrados $(u_0 \cup v_0) \times \mathbb{I}$ (los cuales son compactos pues u y v tienen soporte compacto), es decir,

$$\bar{d}_H(\text{end}(u), \text{end}(v)) \leq \bar{d}_H(\text{end}(u) \cap ((u_0 \cup v_0) \times \mathbb{I}), \text{end}(v) \cap ((u_0 \cup v_0) \times \mathbb{I})) < \infty,$$

por lo tanto, $\bar{d}_H(\text{end}(u), \text{end}(v))$ está bien definida. Definimos la métrica endográfica d_E en $\mathcal{F}(X)$ como

$$d_E(u, v) = \bar{d}_H(\text{end}(u), \text{end}(v)).$$

A continuación, vamos a definir uniformidades que estén relacionados a las métricas d_E y d_S , respectivamente. Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme y $\mathcal{U}_{\mathbb{I}}$ la uniformidad definida en el Ejemplo 1.3.3 (cuya base es $\{V_\epsilon : \epsilon > 0\}$). Dado $U \in \mathcal{U}$ y $\epsilon > 0$, definimos

$$E[U, \epsilon] = \{(u, v) \in \mathcal{F}^*(X) \times \mathcal{F}^*(X) : (\text{end}(u), \text{end}(v)) \in \mathcal{C}[U \times V_\epsilon]\},$$

donde $U \times V_\epsilon = \{((x, \alpha), (y, \beta)) \in (X \times \mathbb{I})^2 : (x, y) \in U \text{ y } (\alpha, \beta) \in V_\epsilon\}$.

Teorema 7.2.2. *Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme. Entonces, $\{E[U, \epsilon] : U \in \mathcal{U}, \epsilon > 0\}$ es una base para una uniformidad $\mathcal{U}_E$ en $\mathcal{F}^*(X)$.*

Demostración. Por el Teorema 1.3.8, la familia $\{U \times V_\epsilon : U \in \mathcal{U}, \epsilon > 0\}$, es una base para la uniformidad $\mathcal{U} \times \mathcal{U}_{\mathbb{I}}$ en $X \times \mathbb{I}$, además, por el Teorema 1.3.14, la familia $\{\mathcal{C}[U \times V_\epsilon] : U \in \mathcal{U}, \epsilon > 0\}$ es una base para la uniformidad $\mathcal{C}(\mathcal{U} \times \mathcal{U}_{\mathbb{I}})$ en $\mathcal{C}(X \times \mathbb{I})$. Con esto en mente, vamos a probar que la familia $\{E[U, \epsilon] : U \in \mathcal{U}, \epsilon > 0\}$ cumple las condiciones del Lema 1.3.2.

(BU1) Sean $U \in \mathcal{U}$ y $\epsilon > 0$, entonces, existen $W \in \mathcal{U}$ y $\delta > 0$ tales que $(\mathcal{C}[W \times V_\delta])^{-1} \subset \mathcal{C}[U \times V_\epsilon]$. Es facil ver que $(E[W, \delta])^{-1} \subset E[U, \epsilon]$.

(BU2) Sean $U \in \mathcal{U}$ y $\epsilon > 0$, entonces, existen $W \in \mathcal{U}$ y $\delta > 0$ tales que

$$(\mathcal{C}[W \times V_\delta])^2 \subset \mathcal{C}[U \times V_\epsilon].$$

Tomamos $(u, v) \in (E[W, \delta])^2$, entonces, existe $w \in \mathcal{F}^*(X)$ tal que $(u, w), (w, v) \in E[W, \delta]$, es decir

$$(end(u), end(w)), (end(w), end(v)) \in \mathcal{C}[W \times V_\delta].$$

Por tanto, $(end(u), end(v)) \in (\mathcal{C}[W \times V_\delta])^2 \subset \mathcal{C}[U \times V_\epsilon]$, con lo cual concluimos que $(u, v) \in E[U, \epsilon]$.

(BU3) Tomamos $U, W \in \mathcal{U}$, $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$. Entonces, existen $O \in \mathcal{U}$ y $\gamma > 0$ tales que $\mathcal{C}[O \times V_\gamma] \subset \mathcal{C}[U \times V_\epsilon] \cap \mathcal{C}[W \times V_\delta]$. Si $(u, v) \in E[O, \gamma]$, se tiene

$$(end(u), end(v)) \in \mathcal{C}[O \times V_\gamma] \subset \mathcal{C}[U \times V_\epsilon] \cap \mathcal{C}[W \times V_\delta],$$

es decir, $(end(u), end(v)) \in \mathcal{C}[U \times V_\epsilon]$ y $(end(u), end(v)) \in \mathcal{C}[W \times V_\delta]$. Por tanto, $(end(u), end(v)) \in E[U, \epsilon] \cap E[W, \delta]$.

(BU4) Para cualesquiera $U \in \mathcal{U}$, $\epsilon > 0$ y $u \in \mathcal{F}^*(X)$, se tiene $(end(u), end(u)) \in \mathcal{C}[U \times V_\epsilon]$. Sea $(u, v) \in \bigcap \{E[U, \epsilon] : U \in \mathcal{U}, \epsilon > 0\}$. Entonces

$$(end(u), end(v)) \in \bigcap \{\mathcal{C}[U \times V_\epsilon] : U \in \mathcal{U}, \epsilon > 0\},$$

esto implica $end(u) = end(v)$. Para probar la igualdad de u y v , sea $x \in X$, entonces, por definición de la endográfica, $(x, u(x)) \in end(u) = end(v)$ y $(x, v(x)) \in end(v) = end(u)$, es decir, $v(x) \geq u(x)$ y $u(x) \geq v(x)$, por lo tanto, $u(x) = v(x)$. Así concluimos que $u = v$. $\square$

A la uniformidad $\mathcal{U}_E$ la llamaremos la uniformidad endográfica. Dado que $\mathcal{F}(X) \subset \mathcal{F}^*(X)$, también se tiene el espacio uniforme $(\mathcal{F}(X), \mathcal{U}_E)$.

Por otro lado, para cada $U \in \mathcal{U}$ y $\epsilon > 0$, definimos

$$S[U, \epsilon] = \{(u, v) \in \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) : (send(u), send(v)) \in \mathcal{K}[U \times V_\epsilon]\}.$$

Teorema 7.2.3. *Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme. Entonces, $\{S[U, \epsilon] : U \in \mathcal{U}, \epsilon > 0\}$ es una base para una uniformidad $\mathcal{U}_S$ en $\mathcal{F}(X)$.*

Demostración. La demostración es análoga a la del Teorema 7.2.2, utilizando el Teorema 1.3.13 en lugar del Teorema 1.3.14. $\square$

La uniformidad $\mathcal{U}_S$ es llamada la uniformidad sendográfica.

Teorema 7.2.4. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces, $\mathcal{U}_{d_E} = (\mathcal{U}_d)_E$ y $\mathcal{U}_{d_S} = (\mathcal{U}_d)_S$.*

Demostración. Para ver que $\mathcal{U}_{d_E} \subset (\mathcal{U}_d)_E$, basta probar que para $\epsilon > 0$, $E[U_\epsilon, \epsilon] \subset W_\epsilon$, donde $U_\epsilon = \{(x, y) \in X^2 : d(x, y) < \epsilon\}$ y $W_\epsilon = \{(u, v) \in (\mathcal{F}(X))^2 : d_E(u, v) < \epsilon\}$. Tomamos $(u, v) \in E[U_\epsilon, \epsilon]$, entonces,

$$\text{i) } \text{end}(u) \subset (U_\epsilon \times V_\epsilon)(\text{end}(v)).$$

$$\text{ii) } \text{end}(v) \subset (U_\epsilon \times V_\epsilon)(\text{end}(u)).$$

Por i), para cada $(x, \alpha) \in \text{end}(u)$, existe $(y, \beta) \in \text{end}(v)$ tal que $(y, x) \in U_\epsilon$ y $(\beta, \alpha) \in V_\epsilon$, es decir, $d(x, y) < \epsilon$ y $|\beta - \alpha| < \epsilon$. Por lo tanto, $\bar{d}((x, \alpha), (y, \beta)) < \epsilon$, lo cual implica $\bar{d}((x, \alpha), \text{end}(v)) < \epsilon$ para cada $(x, \alpha) \in \text{end}(u)$. Por la observación que se dio al definir la métrica endográfica y dado que cualquier función continua definida en un compacto alcanza su máximo y su mínimo, se tiene que $\sup \{\bar{d}((x, \alpha), \text{end}(v)) : (x, \alpha) \in \text{end}(u)\} < \epsilon$. Análogamente se muestra $\sup \{\bar{d}((x, \alpha), \text{end}(u)) : (x, \alpha) \in \text{end}(v)\} < \epsilon$, por lo tanto,

$$\bar{d}_H(\text{end}(u), \text{end}(v)) < \epsilon,$$

es decir, $(u, v) \in W_\epsilon$. Así, $E[U_\epsilon, \epsilon] \subset W_\epsilon$.

Ahora, para ver que $(\mathcal{U}_d)_E \subset \mathcal{U}_{d_E}$, tomemos $U_{\epsilon_1} \in \mathcal{U}_d$, $\epsilon_2 > 0$ y $\epsilon = \min \{\epsilon_1, \epsilon_2\}$. Vamos a probar que $W_\epsilon \subset E[U_{\epsilon_1}, \epsilon_2]$, para ello, sea $(u, v) \in W_\epsilon$, es decir,

$$d_E(u, v) = \bar{d}_H(\text{end}(u), \text{end}(v)) < \epsilon. \quad (7.10)$$

Si $(x, \alpha) \in \text{end}(u)$, entonces, por 7.10, existe $(y, \beta) \in \text{end}(v)$ tal que

$$\bar{d}((x, \alpha), (y, \beta)) < \epsilon,$$

lo cual, por la definición de $\bar{d}$, implica $d(x, y) < \epsilon \leq \epsilon_1$ y $|\alpha - \beta| < \epsilon \leq \epsilon_2$. Por tanto, $(y, x) \in U_{\epsilon_1}$ y $(\beta, \alpha) \in V_{\epsilon_2}$, es decir $(x, \alpha) \in (U_{\epsilon_1} \times V_{\epsilon_2})(\text{end}(v))$. Con esto, hemos probado que $\text{end}(u) \subset (U_{\epsilon_1} \times V_{\epsilon_2})(\text{end}(v))$. Haciendo un razonamiento

análogo, se puede probar $end(v) \subset (U_{\epsilon_1} \times V_{\epsilon_2})(end(u))$, por lo tanto, concluimos que $(u, v) \in E[U_{\epsilon_1}, \epsilon_2]$. Así, $(\mathcal{U}_d)_E \subset \mathcal{U}_{d_E}$.

La prueba de que $\mathcal{U}_{d_S} = (\mathcal{U}_d)_S$ es completamente análoga a la que acabamos de realizar. $\square$

Teorema 7.2.5. *Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme. Entonces, $\mathcal{U}_E \subset \mathcal{U}_S \subset \mathcal{U}_0$, donde $\mathcal{U}_E$ es considerada en $\mathcal{F}(X)$.*

Demostración. Comencemos mostrando que $\mathcal{U}_S \subset \mathcal{U}_0$, para ello, basta mostrar que dados $U \in \mathcal{U}$ y $\epsilon > 0$, $G[U, \epsilon] \subset S[U, \epsilon]$. Tomamos $(u, v) \in G[U, \epsilon]$, entonces, existe $t \in \mathbb{T}$ tal que $\|t\| < \epsilon$ y, para cada $\alpha \in \mathbb{I}$,

$$\text{i) } u_\alpha \subset U(v_{t(\alpha)}).$$

$$\text{ii) } v_{t(\alpha)} \subset U(u_\alpha).$$

Sea $(x, \beta) \in send(u)$, entonces, $x \in u_\beta$, por tanto, usando i), existe $y \in v_{t(\beta)}$ tal que $(y, x) \in U$. Pero, notemos que $(y, t(\beta)) \in send(v)$ y además $(t(\beta), \beta) \in V_\epsilon$ (pues $\|t\| < \epsilon$). Por lo tanto, $(x, \beta) \in (U \times V_\epsilon)(send(v))$, lo cual implica

$$send(u) \subset (U \times V_\epsilon)(send(v)). \quad (7.11)$$

Si ahora tomamos $(x, \beta) \in send(v)$, entonces, por ii), existe $y \in u_{t^{-1}(\beta)}$ tal que $(y, x) \in U$. Pero, ya que $\|t^{-1}\| < \epsilon$, se tiene $(t^{-1}(\beta), \beta) \in V_\epsilon$, lo cual implica, $(x, \beta) \in (U \times V_\epsilon)(send(u))$, es decir,

$$send(v) \subset (U \times V_\epsilon)(send(u)). \quad (7.12)$$

De las ecuaciones 7.11 y 7.12 se tiene $(send(u), send(v)) \in \mathcal{K}[U \times V_\epsilon]$, por tanto, $(u, v) \in S[U, \epsilon]$.

Ahora, para mostrar que $\mathcal{U}_E \subset \mathcal{U}_S$, tomamos $U \in \mathcal{U}$, $\epsilon > 0$ y $(u, v) \in S[U, \epsilon]$, es decir, $send(u) \subset (U \times V_\epsilon)(send(v))$ y $send(v) \subset (U \times V_\epsilon)(send(u))$. Entonces, por definición de la sendográfica,

$$end(u) \cap (u_0 \times \mathbb{I}) \subset (U \times V_\epsilon)(end(v) \cap (v_0 \times \mathbb{I})) \subset (U \times V_\epsilon)(end(v)).$$

Sea $(x, \alpha) \in end(u) \cap ((X \times \mathbb{I}) \setminus (u_0 \times \mathbb{I}))$, ya que x no está en el soporte de u , se tiene $u(x) = 0$, lo cual implica $\alpha = 0$. Dado que $v(x) \geq 0$, entonces, $(x, 0) \in end(v)$,

además, $(x, x) \in U$ y $(0, 0) \in V_\epsilon$, por tanto, $(x, \alpha) \in (U \times V_\epsilon)(\text{end}(v))$, es decir,

$$\text{end}(u) \subset (U \times V_\epsilon)(\text{end}(v)).$$

Análogamente, podemos mostrar

$$\text{end}(v) \subset U(\text{end}(u)).$$

Así, $S[U, \epsilon] \subset E[U, \epsilon]$, lo cual termina la demostración. $\square$

Como consecuencia del teorema anterior, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 7.2.6. *Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio uniforme. Denotamos como τ_E , τ_S y τ_0 a las topologías en $\mathcal{F}(X)$ inducidas por las uniformidades $\mathcal{U}_E$, $\mathcal{U}_S$ y $\mathcal{U}_0$, respectivamente. Entonces $\tau_E \subset \tau_S \subset \tau_0$.*

El siguiente corolario es consecuencia del Corolario 7.2.6 y los teoremas 1.3.10 y 7.2.4.

Corolario 7.2.7. *[19] Sea (X, d) un espacio métrico. Denotamos como τ_E , τ_S y τ_0 a las topologías en $\mathcal{F}(X)$ inducidas por la métrica endográfica d_E , la métrica sendográfica d_S y la métrica de Skorokhod d_0 , respectivamente. Entonces, $\tau_E \subset \tau_S \subset \tau_0$.*

Conclusión

El desarrollo presentado en esta tesis ofrece una visión amplia de las métricas difusas, así como de su relación con los espacios métricos, topológicos y uniformes. A lo largo de los diferentes capítulos se estableció una conexión entre las nociones clásicas de la teoría de espacios métricos y las generalizaciones difusas, mostrando cómo estas últimas enriquecen el análisis matemático de fenómenos donde interviene la incertidumbre.

En primer lugar, se estableció una base conceptual sólida mediante la revisión de la métrica de Hausdorff, las t -normas continuas, los conjuntos difusos y la teoría de espacios uniformes, herramientas esenciales para los resultados posteriores.

Posteriormente, se introdujeron los espacios métricos difusos en el sentido de George y Veeramani, una estructura que asigna al espacio una “métrica” capaz de describir niveles graduales de cercanía entre puntos. En este mismo capítulo se analizaron sus propiedades fundamentales y se presentaron ejemplos que ilustran la amplia variedad de espacios métricos difusos que pueden construirse.

El análisis topológico de los espacios métricos difusos constituye una parte fundamental de esta tesis. Se demostró que dichos espacios siempre inducen una topología metrizable. Asimismo, se trasladaron conceptos como completez, pre-compacidad y completación al contexto difuso, mostrando que, aunque algunas propiedades se conservan, aparecen fenómenos nuevos. Un ejemplo particularmente notable es la existencia de un espacio métricos difusos que no admite una completación en el sentido difuso, en contraste con el caso clásico donde todo espacio métrico posee una completación única salvo isometría.

Los capítulos centrales estuvieron dedicados al estudio de la métrica difusa de

Hausdorff, definida en el hiperespacio de subconjuntos compactos. Se probó que esta función, efectivamente, satisface los axiomas de métrica difusa. Además, se analizaron propiedades que paralelamente reflejan las de la métrica de Hausdorff tradicional y se establecieron comparaciones explícitas entre ambas versiones.

Una contribución importante de este trabajo es la transición hacia el ámbito aplicado mediante el diseño de una versión difusa del Filtro de Mediana Vectorial (VMF) para imágenes a color. Mediante la combinación de similitud cromática y espacial, la métrica difusa construida permite obtener un filtro con mejor adaptabilidad frente al ruido impulsivo multicanal preservando la estructura visual. Se analizó además el papel del parámetro t , que regula la sensibilidad espacial del filtro, permitiendo un ajuste fino entre reducción de ruido y conservación de detalles.

Finalmente, se estudiaron uniformidades definidas sobre el hiperespacio $\mathcal{F}(X)$, generalizando así las nociones de la métrica endográfica, sendográfica, la métrica por niveles y la métrica de Skorokhod al contexto de espacios uniformes. Se presentaron resultados que establecen relaciones entre estas uniformidades y permiten comparar las topologías que inducen.

En conjunto, esta tesis muestra cómo la noción de conjunto difuso no solo generalizan conceptos convencionales, sino que también abren nuevas líneas de investigación, tanto teóricas como aplicadas. Por un lado, se obtienen espacios con propiedades topológicas ricas y, en algunos casos, inesperadas; por el otro, se desarrollan herramientas útiles para problemas reales, como el tratamiento digital de imágenes.

Bibliografía

- [1] L. A. Zadeh. Fuzzy Sets, Information and Control 8, 1965.
- [2] I. Kramosil, J. Michalek, Fuzzy metric and statistical metric spaces, Kybernetika 11, (1975), 326–334.
- [3] R. Engelking, General Topology, PWN-Polish Science Publishers, Warsaw, 1977.
- [4] J.L. Kelley, General Topology, Van Nostrand, 1955.
- [5] F. Barragán, A. Romero, S.S. Perales y V.M. Grijalva, Breve introducción a la métrica de Hausdorff, Capítulo 3 en Topología y sus aplicaciones III. Textos Científicos, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2014.
- [6] E. Michael, Topologies on spaces of subsets, Transactions of the American Mathematical Society 71(1), (1951), 152-182.
- [7] A. George, P. Veeramani, On some results in fuzzy metric spaces, Fuzzy Sets and Systems 64,(1994), 395–399.
- [8] V. Gregori, S. Romaguera, Some properties of fuzzy metric spaces, Fuzzy Sets and Systems 115, (2000), 485–489.
- [9] S. Romaguera, M. Sanchis, On fuzzy metric groups, Fuzzy Sets and Systems 124, (2001), 109–115.
- [10] V. Gregori, S. Romaguera, On completion of fuzzy metric spaces, Fuzzy Sets and Systems 130, (2002), 399–404.

- [11] J. Rodríguez-López, S. Romaguera Hausdorff fuzzy metric on compact sets, *Fuzzs and Systems* 147, (2004), 273 – 283.
- [12] K. Morita, Completion of hyperspaces of compact subsets and topological completion of open-closed maps, *Gen. Topology Appl.* 4, (1974), 217–233.
- [13] S. Morillas, V. Gregori, G. Peris-Fajarnés, P. Latorre, A new vector median filter based on fuzzy metrics, *Lecture Notes in Computer Science* 3656, (2005), 81–90.
- [14] V. Gregori, S. Morillas, A. Sapena, Examples of fuzzy metrics and applications, *Fuzzy Sets and Systems* 170, (2011), 95–111.
- [15] J. Astola, P. Haavisto, Y. Neuvo, Vector median filters, *Proceedings of the IEEE* 78, (1990), 678–689.
- [16] K. N. Plataniotis, A. N. Venetsanopoulos, *Color Image Processing and Applications*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [17] M. L. Puri, D. A. Ralescu, Fuzzy Random Variables, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 114, (1986), 409-422.
- [18] S. Y. Joo, Y. K. Kim, The Skorokhod topology on space of fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems* 111, (2000), 497-501.
- [19] H. Huang, Some properties of Skorokhod metric on fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems* 437, (2022), 35-52.
- [20] D. Qiu, S. Dong, Supremum metric on the space of fuzzy sets and common fixed point theorems for fuzzy mappings, *Information Sciences* 178(18), (2008), 3595-3604.
- [21] D. Jardón, I. Sánchez, M. Sanchis, Some questions about Zadeh’s extension on metric spaces, *Fuzzy Sets and Systems* 379, (2020), 115-124.
- [22] H. Huan, Characterizations of endograph metric and Γ -convergence on fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems* 350, (2018), 55-84.

- [23] L. Zhang, The topological structure of fuzzy sets with sendograph metric, *Topology and its Applications* 160(13), (2013), 1501-1506.
- [24] J. Kupka, On fuzzifications of discrete dynamical systems, *Information Sciences* 181, (2011), 2858-2872.
- [25] D. Jardón, I. Sánchez, M. Sanchis, Fuzzy sets on uniform spaces, *Iranian Journal of Fuzzy Systems* 20, 2023, 123-135.