



Casa abierta al tiempo

**Transporte de cantidad de movimiento alrededor de turbinas
eólicas en escalas múltiples**

Tesis que presenta

Catherine Teresa Paéz García

Para obtener el grado de

Doctora en Ciencias (Energía y Medio Ambiente)



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA

POSGRADO DE ENERGÍA Y MEDIO AMBIENTE

**Transporte de cantidad de movimiento alrededor de turbinas eólicas
en escalas múltiples**

TESIS

Que para obtener el grado de

DOCTORA EN CIENCIAS (ENERGÍA Y MEDIO AMBIENTE)

PRESENTA:

Catherine Teresa Paéz García

Director:

Dr. Francisco José Valdés Parada

Sinodales:

Presidente

Dr. Carlos Omar Castillo Araiza

Secretario

Dr. Juan José Ambriz García

Vocal

Dr. Carlos Gilberto Aguilar Madera

Vocal

Dr. Eliseo Hernández Martínez

Vocal

Dr. Jorge Ramírez Muñoz

Fecha y lugar de examen: Ciudad de México, 21 de Noviembre de 2019.

Agradecimientos

Agradezco al pueblo mexicano por haberme otorgado la oportunidad de estudiar el doctorado en Ciencias (Energía y Medio Ambiente) de la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa, mediante el otorgamiento de la beca No. 470858, y el convenio No. 003893 entre el Padrón Nacional de Posgrados de Calidad del CONACyT y el posgrado en Energía y Medio Ambiente.

Estuve pensando, seriamente, en incluir en los antecedentes una parte sobre la importancia del cuidado al ambiente, sobre el aprendizaje que hemos adquirido en el tema y sobre la conciencia colectiva e individual para seguir en el camino de la investigación; pero al final he decidido que no habría palabras suficientes, ni investigaciones tan reveladoras que expresen la necesidad por cuidar de nuestra Tierra. No obstante y en forma de agradecimiento, presento una lista de los activistas, investigadores, poetas, organizaciones y personas que han y siguen dando su vida para marcar una línea clara en el velar del medio ambiente.

Jesús Javier Ramos; fue un activista en contra de la extracción minera en el Estado de México.

Berta Cáceres; luchó contra la privatización de ríos y construcción de presas hidroeléctricas en tierras de pueblos originarios en Honduras.

Julio e Isidro Baldenegro; fueron padre e hijo activistas rarámuri, que se dedicaron a la preservación de bosques en la Sierra Tarahumara.

Julián Carrillo; activista rarámuri que se opuso a la explotación minera de la Sierra Tarahumara.

Samir Flores; activista que se opuso a la puesta en marcha de una central de ciclo combinado en el estado de Morelos, debido a que los gasoductos atravesaban tierras comunales de pueblos originarios.

José Luis Álvarez; defensor del santuario del mono saraguato en el estado de Tabasco, y denunció la extracción ilegal de arena y material pétreo del río Usumacinta.

Nora López; defensora de la guacamaya roja y del parque recreativo Aluxes en Chiapas, ruta que tenía el crimen organizado.

Aurora Aksnes y Greta Thunger, que son un ejemplo del espíritu joven en la lucha de los derechos de la Tierra. Y quienes desde una posición más privilegiada que desde el activismo latinoamericano pueden alzar la voz sin temor a ser silenciadas violentamente.

Activistas urbanos que desde sus nichos ayudan a la visibilización mediática de los problemas ambientales.

Francisco Toledo y Homero Aridjis, que son un ejemplo de que el activismo ambiental tiene voz en la poesía y el arte, y que el arte en nosotros radica en saber escuchar.

Los pueblos zapotecas del Istmo de Tehuantepec, que hoy en día siguen luchando por que los desarrollos eólicos y el gobierno reglamenten los convenios de consulta de los pueblos indígenas de la OIT¹; esperando que un día los desarrollos tecnológicos se adapten a las necesidades de los pueblos originarios y no al revés.

Las organizaciones que en grupos suman sus esfuerzos con el fin y la esperanza de robustecer y acompañar la demanda de justicia ambiental, como:

- Centro mexicano de derecho medioambiental.
- Centro de derechos humanos Zeferino Ladrillero.

¹Organización internacional del trabajo

- Testigo global.²
- Asociación de Profesionales del Medio Ambiente.³
- Instituto de vigilancia mundial.⁴
- Fondo de Defensa Ambiental.⁵
- Conservación de la naturaleza.⁶
- Red de acción de la selva tropical.⁷
- Fondo Mundial para la Vida Silvestre.⁸

Finalmente, deseo y agradezco de antemano, por leer esta tesis, que con mucho cariño y conciencia fue escrita para ustedes, esperando algún día encontrar mis propias palabras para expresar lo que grita la naturaleza. Y como dijo Rubén Albarrán, “si hemos fallado en proteger al planeta, al menos protejamos a quienes lo defienden”.

²Global Witness.

³Association of Environmental Professionals.

⁴Worldwatch Institute.

⁵Environmental Defense Fund.

⁶The Nature Conservancy.

⁷Rainforest Action Network.

⁸World Wildlife Fund.

Comité asesor

Director:

Francisco José Valdés Parada. Departamento de Ingeniería de Procesos e Hidráulica. División de Ciencias Básicas e Ingeniería. Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa.

El jurado designado por la
**Comisión Académica del Posgrado en Energía y Medio Ambiente y la Comisión Divisional
de Posgrado**

de la Unidad Iztapalapa, aprobó la tesis que presentó

CATHERINE TERESA PAÉZ GARCÍA

El día **21** de **noviembre** del año **2019**

Miembros del Jurado

Carlos Omar Castillo Araiza

Presidente

Juan José Ambriz García

Secretario

Carlos Gilberto Aguilar Madera


Vocal

Eliseo Hernández Martínez

Vocal

Jorge Ramírez Muñoz

Vocal



Índice general

1	Introducción	9
----------	---------------------------	----------

I

Parte Uno

2	Antecedentes	17
----------	---------------------------	-----------

2.1	Trabajos experimentales	17
------------	--------------------------------	-----------

2.1.1	Experimentos en túneles de viento	19
-------	---	----

2.1.2	Experimentos numéricos	21
-------	------------------------------	----

2.2	Modelos teóricos	23
------------	-------------------------	-----------

2.2.1	Modelos <i>a posteriori</i>	23
-------	-----------------------------------	----

2.2.2	Modelos <i>a priori</i>	24
-------	-------------------------------	----

3	Interludio conceptual	29
----------	------------------------------------	-----------

4	Objetivos	33
----------	------------------------	-----------

4.1	Objetivo general	33
------------	-------------------------	-----------

4.2	Objetivos particulares	33
------------	-------------------------------	-----------

5	Metodología	35
5.1	Objetivo 1: Modelo promedio a la escala macroscópica	36
5.2	Objetivo 2: Modelo de condición de frontera para la estela	38
5.3	Objetivo 3: Modelo promedio a la escala megascópica	40

II

Parte Dos

6	Modelo promedio a la escala macroscópica	45
6.1	Planteamiento del problema	46
6.1.1	Definición del sistema y ecuaciones gobernantes en la microescala	46
6.2	Promediado del transporte de masa	49
6.3	Promediado del transporte de cantidad de movimiento lineal	50
6.4	Promediado del transporte de energía mecánica	52
6.5	Cálculo de términos promedio	54
6.6	Funcionamiento del modelo	63
6.7	Resumen del capítulo	66
7	Condición de frontera para la estela	69
7.1	Planteamiento del problema	70
7.1.1	Definición del sistema y de los dominios de estudio	70
7.1.2	Ecuaciones gobernantes en la región Ω	70
7.1.3	Ecuaciones gobernantes en las regiones Ω_i y Ω_o	73
7.2	Solución formal del problema lineal exacto	75
7.3	Problemas de las variables de cerradura	82
7.4	Condición de frontera y su discusión	85
7.5	Resumen del capítulo	87

8	Modelo a la escala megascópica	89
8.1	Planteamiento del problema	90
8.1.1	Definición del sistema y de la región de promediado	90
8.1.2	Ecuaciones de transporte y condiciones de frontera	91
8.2	Escalamiento del transporte de masa	95
8.3	Escalamiento del transporte de cantidad de movimiento lineal	97
8.4	Escalamiento del transporte de energía mecánica	99
8.5	Modelo megascópico simplificado	101
8.6	Comparación con el modelo de Betz-Joukowsky	105
8.7	Resumen del capítulo	107

III

Parte Tres

9	Conclusiones	111
10	Apéndice A	123
10.1	Escalamiento del transporte de masa	126
10.2	Escalamiento del transporte de movimiento lineal	127
10.3	Escalamiento del transporte de energía mecánica	129
	Bibliografía	133



1. Introducción

En la última década se ha encontrado evidencia que muestra la causalidad entre el aumento del consumo energético, el desarrollo económico y el aumento en la esperanza de vida por habitante (Dhungel, 2008; O.N.U., 2009; Nieto & Robledo, 2016). Esta afirmación sugiere que las investigaciones científico-tecnológicas deben estar encaminadas hacia el desarrollo humano. Si bien, esto último se ve reflejado en todas las etapas de la industrialización (Ritchie & Roser, 2019b). También existe una relación causal entre el crecimiento económico y la degradación ambiental (Zhang & Cheng, 2009; Omri et al., 2014; Ahmed et al., 2015), así como la tasa de mortandad por generación de electricidad mediante fuentes convencionales de energía (Markandya & Wilkinson, 2007). De modo que, la búsqueda por fuentes alternativas de energía no solo obedece a un aumento en la demanda energética, sino a la búsqueda del equilibrio entre el desarrollo humano, su seguridad y el cuidado ambiental.

Datos reportados por Ritchie & Roser (2019a), muestran que entre 2007-2017 el consumo energético mundial sufrió una desaceleración que, de alguna manera, incrementó el uso de energías renovables como la solar y eólica. Estas dos fuentes de energía tuvieron un incremento en su producción de energía eléctrica entre el 20% y 40% respecto a las fuentes convencionales de energía como el carbón (2%) y el petróleo (1.5%). Aunado a este cambio global, la transición energética nacional se ha llevado a cabo mediante acuerdos y reformas constitucionales de forma paulatina (García, 2019). De estos acuerdos, se ha logrado que actualmente la instalación de energías renovables, al menos en energía hidroeléctrica y eólica, sea del 17% y 3% (del total del

consumo eléctrico), respectivamente. Además, debido al nuevo concepto de *energía limpia*, dado por la norma **DOF: Ley de la industria eléctrica (2014)**, se considera a la *cogeneración eficiente* como parte de las energías renovables. Esto último se tradujo en un incremento del 5.4% de energías limpias entre los años 2016-2017; en contraparte, las energías convencionales tuvieron un incremento de 2% (**S.E.N.E.R, 2018**). De modo que, el aumento general de las energías renovables fue del 21% para ese periodo.

Si bien, desde el marco nacional, los datos de producción eléctrica mediante energías renovables siguen siendo conservadores, se tiene la voluntad de crear, al menos, 200 nuevas centrales de energías limpias, que se traducen en una capacidad instalada de 19,500 MW de potencia (**García, 2019**). Lo anterior forma parte de la meta fijada para finales del año 2032, en donde se valora que el 30% de la producción total de electricidad sea abastecida mediante energías renovables (**S.E.N.E.R, 2018**). De hecho, se estima que la energía eólica cubra el 22% de la demanda energética total nacional; siendo así la fuente de energía renovable con más altas expectativas de crecimiento respecto a las otras (**Guzmán, 2019**).

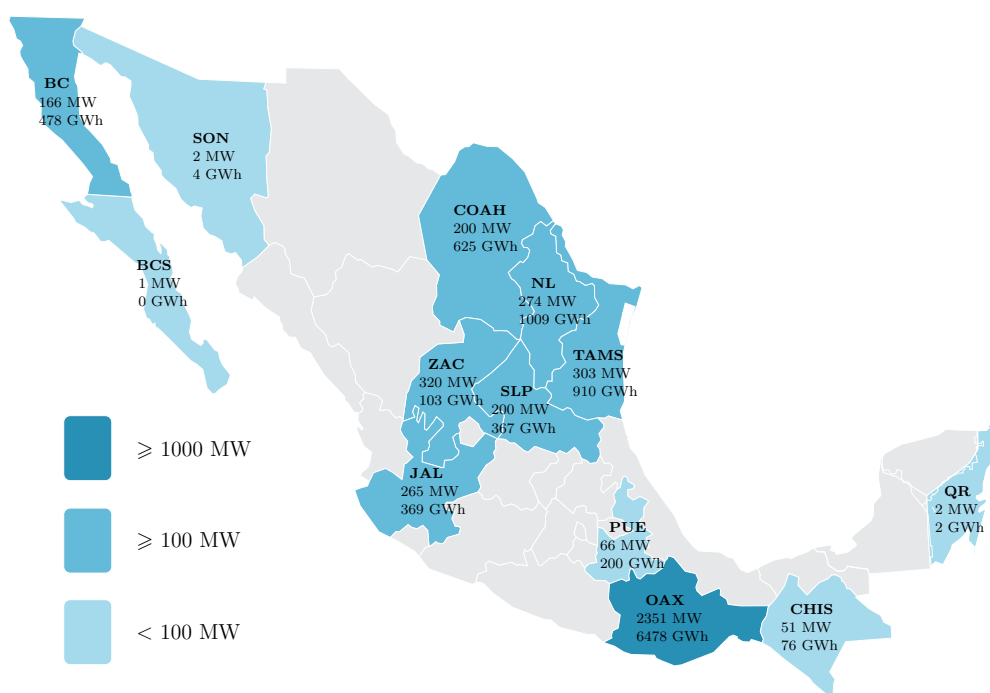


Figura 1.1: Capacidad (MW) y generación (GWh) en centrales eólicas 2017 (Adaptado de **S.E.N.E.R, 2018**).

Ante este panorama, en la figura 1.1 se muestra la capacidad y generación eólica que tienen algunos estados de la República Mexicana. Por ejemplo, se observa que en la franja noreste del país, se ha llevado a cabo una mayor inversión de energía eólica debido, en parte, a los requerimientos

de las industrias establecidas en esas zonas (Santamarta, 2015; Sánchez-Tembleque, 2019). Por el contrario, en la zona sureste del país, aún cuando el potencial eólico es mayor que en el noreste, se muestra una escasa presencia de proyectos eólicos. Esto último se debe a distintas razones, una de ellas se basa en los problemas sociales a los que se enfrentan los proyectos eólicos (Monterrosas-Mirón, 2018), como la falta de información, inclusión y/o el desplazamiento social, entre otros (Étienne von Bertrab, 2016; Toledo & Fraga, 2016). Lo anterior refleja tan solo una parte de los desafíos a los que se somete el uso de la tecnología eólica, mostrando que no es suficiente con tomar en cuenta un potencial eólico elevado (Juárez-Hernández & León, 2014). De hecho, esto último puede ayudar a la generación distribuida¹ como herramienta para descentralizar la producción energética, promoviendo la eficiencia de los procesos de producción y reduciendo sus costos (Christiaan, 2011). Resumiendo lo anterior, existen diferentes factores a tomar en cuenta para la instalación de parques eólicos:

- Considerar que el recurso eólico explotable, a gran escala, se encuentra en zonas alejadas de los nodos de producción eléctrica (Nebel & Wright, 2000).
- Tomar en cuenta las restricciones de carácter legal, de seguridad, ambientales, económicas y técnicas (Selzer, 1986; Nebel & Wright, 2000).

Claramente, esta clase de restricciones pueden variar dependiendo del sitio de instalación, de la política energética y de las reglas de la sociedad, que muchas veces son el factor que determina si un parque eólico se instala o no (CDPIM, 2013).

Además de los factores social-ambientales y por supuesto económicos (Hau, 2006; Şener et al., 2018), también existen algunos problemas teórico-tecnológicos tales como, el diseño, optimización y control de parques eólicos (Hardianto et al., 2017; Kusiak et al., 2009). Uno de los problemas recurrentes en el dimensionamiento de los parques eólicos es la caída de la velocidad del aire detrás de las turbinas y a su vez la potencia entregada por turbina eólica respecto a la estimada (Hong et al., 2014). Esto se debe, en gran medida, a la interacción entre las turbinas eólicas, mediante las *estelas* de aire que cada una de ellas produce (Lissaman, 1979). Para atender lo anterior, en algunos trabajos se han mejorado las predicciones de la potencia de salida de las turbinas eólicas, mediante el estudio casi exclusivo de la estela (Lissaman, 1979; Jensen, 1983; Katic et al., 1986; Bastankhah & Porté-Agel, 2014). Esta clase de modelos, al enfocarse en la estela, aproximan la velocidad a la salida de la turbina como una condición de frontera. La diferencia entre un modelo u otro radica en el tipo de condición de frontera que se use, ya sea un valor constante (procedente de la teoría de Betz-Joukowski) (Jensen, 1983) o funciones radiales (Bastankhah & Porté-Agel, 2014).

¹ generación de energía eléctrica en el sitio de consumo.

Las comparaciones de los modelos usando una función radial como condición de frontera, predice mejor la caída de velocidad de la estela (de datos de campo), que usando una constante o incluso funciones más sencillas (Abkar, 2018).

De lo anterior se puede deducir que, mientras más realista sea la condición de frontera, más certeros serán los resultados de los modelos para predecir la caída de la velocidad en la estela. Además, otra de las problemáticas en el desarrollo de parques eólicos se basa en la necesidad por entender los flujos de aire a la escala de campo y su interacción con la capa límite atmosférica² (Armitt & Counihan, 1967; Bosbach et al., 2009; Barthelmie et al., 2011; Toloui et al., 2014). No obstante, estos modelos enfocados a las turbinas eólicas aún están en etapa de desarrollo para cuantificar o incluso cualitativamente visualizar las estructuras de flujo turbulento a dicha escala (Barthelmie et al., 2011; Hong et al., 2014). Actualmente, existen dos puntos de vista para solucionar estos problemas: en el primero se imponen la menor cantidad de suposiciones para el desarrollo de modelos; en el segundo se desarrollan modelos simplificados permitiendo la pérdida de cierta cantidad de información. Aunque a primera vista el primer enfoque pareciera el más apropiado, resulta que su costo computacional está lejos de una aplicación práctica. En cuanto al segundo enfoque, cabe mencionar que las suposiciones impuestas no siempre son compatibles con los sistemas en los que se aplican o no son reconocidas. De lo anterior, se reconoce que el factor común es la cantidad de información contenida en los modelos contra su practicidad. De modo que, el objetivo de estudio del presente trabajo es establecer una serie de modelos bajo un enfoque de reacomodo (promediado) y filtrado sistemático (escalamiento) de información, que permitan un análisis alternativo del flujo de viento alrededor de turbinas eólicas. En aras de la claridad, enseguida se listan los tres modelos que aporta este trabajo:

- Modelo promedio a la escala macroscópica: Se basa en reacomodar la información sobre los perfiles de velocidad alrededor de una turbina eólica mediante un proceso de promediado. Con ello se busca agrupar la información de la turbina eólica en un término dentro de la ecuación diferencial de conservación de cantidad de movimiento y otro correspondiente a la ecuación de energía mecánica para así identificar los efectos de la turbina de una forma más sencilla que con la ecuación de Navier-Stokes.
- Modelo de condición de frontera de estela: Este es un modelo que coloca la información de la turbina eólica en una condición de frontera a la salida de la misma. Con este resultado se busca mejorar los modelos de estela existentes.
- Modelo promedio a la escala megascópica: Éste se caracteriza por ser un modelo algebraico

²De acuerdo con Monin (1970), la capa límite atmosférica es "la acción combinada de la fricción turbulenta y la fuerza de Coriolis cerca de la superficie del planeta"

en donde se imponen suposiciones de manera sistemática para el desarrollo de distintos modelos, todos a la misma escala. La diferencia entre cada uno de ellos se basa en la cantidad de información de las escalas anteriores requerida para cerrarlos.

En resumen, el modelo promedio a la escala macroscópica expone la necesidad y complicaciones de los perfiles de velocidad en todo el sistema y en especial en la estela de la turbina. Además, este modelo concibe a la turbina eólica y al aire circundante como un medio homogéneo, lo cual facilita la solución numérica. Por su parte, el modelo de condición de frontera de estela permite evaluar el peso que tienen cada una de las fuerzas impulsoras del flujo de viento sobre la estela. Finalmente, el modelo promedio a la escala megascópica conduce a evaluaciones prácticas de la potencia del viento tomando en cuenta las suposiciones asociadas. Además de las características mencionadas de los modelos, al final del desarrollo de cada uno de ellos, así como en las conclusiones del trabajo, se presentan sus alcances y limitaciones.

Para cerrar este capítulo se procede a listar la organización del trabajo, el cual está dividido en tres partes. En la primera parte se presentan los antecedentes en donde se abordan algunos de los trabajos más relevantes sobre la investigación en turbinas eólicas. También se presenta un interludio conceptual, los objetivos y la metodología del trabajo. En la parte dos, se desarrollan: el modelo promedio de escala macroscópica, el modelo de condición de frontera de estela y el modelo promedio a la escala megascópica. Finalmente, en la parte tres se presentan las conclusiones del trabajo y un apéndice.



Parte Uno

2	Antecedentes	17
2.1	Trabajos experimentales	
2.2	Modelos teóricos	
3	Interludio conceptual	29
4	Objetivos	33
4.1	Objetivo general	
4.2	Objetivos particulares	
5	Metodología	35
5.1	Objetivo 1: Modelo promedio a la escala macros- cópica	
5.2	Objetivo 2: Modelo de condición de frontera para la estela	
5.3	Objetivo 3: Modelo promedio a la escala megas- cópica	



2. Antecedentes

Debido a la amplia variedad de líneas de investigación alrededor de las turbinas eólicas, en este trabajo se reporta, en su mayoría, literatura enfocada en los experimentos, teoría y/o modelos de las turbinas eólicas actuales. En este sentido, se ha dividido a los experimentos en aquellos llevados a cabo mediante laboratorio, *in-situ* o escala de campo, y simulaciones numéricas; así mismo, la teoría se ha dividido en modelos *a priori*¹ y *a posteriori*² como se muestra en el esquema de la figura 2.1. Además, el esquema sirve como guía para la presentación de las siguientes subsecciones.

2.1 Trabajos experimentales

Si bien, el principio fundamental para la generación de energía eléctrica, mediante turbinas eólicas, se basa en el uso de la energía cinética del viento para transformarla en energía mecánica (Manwell et al., 2009). También es fundamental mencionar que existen dos principios por los cuales el rotor de una turbina eólica puede moverse, y es el de arrastre y sustentación. El arrastre es la fuerza que actúa sobre un objeto, en este caso sobre una pala (puede o no tener perfil aerodinámico) de turbina y se caracteriza por tener el mismo sentido de la fuerza con la que el flujo de aire choca con la pala (Gash & Twele, 2012). Mientras que, la fuerza de sustentación es la componente perpendicular resultante de la fuerza del flujo de aire sobre una pala (con perfil aerodinámico); y es consecuencia de la desigualdad de presiones entre las superficies superior e inferior de la pala.

¹son aquellos que se utilizan para el dimensionamiento de una turbina eólica o un parque eólico sin necesitar experimentos para su uso

²son modelos heurísticos que se elaboran para el control de los parques eólicos.

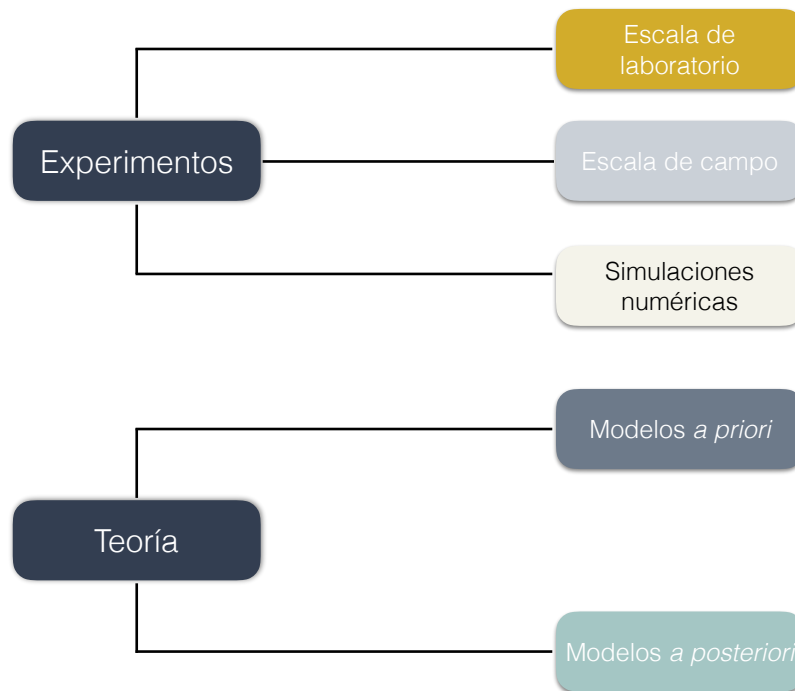


Figura 2.1: Esquema de las principales corrientes de investigación de los aerogeneradores.

De tal forma que, el rotor al ser movido solo por fuerzas de arrastre, no podrá ir más rápido que la velocidad del viento (Manwell et al., 2009). Contrario a la fuerza de sustentación, la cual puede ir en cualquier dirección respecto a cualquier cambio de la dirección del viento (Dole et al., 2017). Debido al nivel de complejidad para el manejo de estos conceptos, al menos el de sustentación, motivó a que los primeros trabajos alrededor de las turbinas eólicas comenzaran siendo de tipo experimental con la ayuda de trabajos en el área de la aeronáutica (Schubel & Crossley, 2012). Por ejemplo, en el trabajo de Earnshaw (1962) se observó que el flujo de aire que pasa axialmente sobre un ala en incidencia (un avión en vuelo), presenta tres distintos comportamientos, ya que el flujo experimenta efectos de escala a lo largo del ala debido a gradientes de velocidad. Uno de esos efectos se presentó como un *núcleo de fluido en espiral* (Hall, 1961) o también conocido como vórtice. Posteriormente, se desarrollaron experimentos en donde se probaron diferentes ángulos de ataque (el ángulo que se forma al cambiar la orientación de la cuerda de un perfil respecto al ángulo de incidencia del viento) y en los que se mostró la creación de vórtices para diferentes números de Reynolds. El trabajo evidenció los efectos de los vórtices por sobre la capa límite y cómo ésta afecta a las fuerzas de sustentación (Earnshaw & Lawford, 1966). Por su parte, los estudios en diferentes perfiles aerodinámicos en aspas de helicópteros ayudaron a una mejor comprensión de las fuerzas sobre las aspas (McCroskey et al., 1982). Debido a lo anterior, en la actualidad, las

palas de los aerogeneradores tienen diferentes secciones transversales para lograr patrones de flujo diferentes por cada sección (Tenguria et al., 2011). De hecho, la eficiencia en las turbinas eólicas se basa en lograr la mayor relación entre coeficientes de sustentación respecto a coeficientes de arrastre (Hansen, 2008). Es decir, aún en un perfil aerodinámico existen fuerzas de arrastre, que no necesariamente le suman fuerza a la pala. Mas bien, la fuerza de arrastre se manipula para que en las puntas de las palas ésta sea mayor que la de sustentación y así controlar la velocidad de las palas (de Freitas Pinto & Gonçalves, 2017).

Hasta aquí se ha mostrado el panorama de uno de los objetivos de estudio detrás del desarrollo de la energía eólica; el cual consiste en estudiar las fuerzas que actúan sobre las palas de una turbina. En adelante, esta sección estará enfocada en explicar la clasificación que se ha hecho de la literatura según la figura 2.1 a); que se centra en explicar el objetivo mencionado así como otras líneas de interés subyacentes.

2.1.1 Experimentos en túneles de viento

La necesidad por comprender los patrones de flujo alrededor de las turbinas eólicas, especialmente de aquellas que forman parte de arreglos en granjas eólicas; ha motivado la realización de experimentos en sistemas controlados como lo son los túneles de viento (Ahmadi-Baloutaki et al., 2016). De hecho, en el trabajo de McKay et al. (2012) se resalta la importancia del estudio de las interacciones aerodinámicas entre turbinas de escala comercial debido a que la interacción produce pérdidas de potencia. En el trabajo de Adaramola & Krogstad (2011), se encontró que las pérdidas de potencia de una turbina eólica dependen de la separación entre turbinas y del ángulo de inclinación de la pala. Los autores encontraron que las pérdidas de potencia están en el rango de 20 a 46% comparado con una turbina aislada. Específicamente, en el trabajo de Chamorro & Porté-Agel (2009) se encontró que la turbulencia de la estela que genera una turbina eólica se propaga corriente abajo hasta una distancia de 15 veces el diámetro del rotor.

Si bien, no es económica ni territorialmente viable dejar tal distanciamiento entre turbinas eólicas, se sabe que mientras más denso sea un fluido, tendrá mayor capacidad para ceder su energía cinética (Igra, 1981). Por tal motivo, para aumentar la densidad del aire, en algunos diseños de turbinas eólicas, la velocidad de éste se acelera (lo que se traduce en un incremento de presión y por lo tanto de densidad) justo antes de pasar por las palas de la turbina eólica. Para lograrlo, la turbina se cubre con una tobera tipo concentrador o difusor (Human, 2014). La diferencia entre una turbina que usa un concentrador respecto a una con difusor es que, en la primera el concentrador está colocado al inicio de la turbina para acelerar al flujo de aire. Mientras que, al usar un difusor, éste

se coloca al final de la turbina para crear diferencia de presiones y esto obligue al flujo a acelerarse (Gilbert & Foreman, 1983). También entre los difusores existen mejoras, como en el trabajo de Abe et al. (2005), en donde se utilizó un difusor con bridas al final de la tobera para romper la estructura de los vórtices de la estela y así, incluso, ayudar a que el flujo de aire se recupere más rápido.

Lo anterior ha motivado a crear las condiciones necesarias para aprovechar la tecnología eólica aún y cuando existen inconvenientes económicos y territoriales. En este caso, se ha demostrado que los dispositivos que podrían ser un obstáculo, en realidad ayudan a mejorar la eficiencia de la turbina. Esto último fue una de muchas piezas para modificar el paradigma de la instalación de turbinas, sólo en lugares abiertos y comenzar a pensar en la instalación en zonas urbanas. En este sentido, una de las ventajas de las turbinas eólicas urbanas por sobre las granjas eólicas es el aprovechamiento de la energía en el sitio de producción. Hasta el momento, en la investigación de Stathopoulos et al. (2018) se ha encontrado que existen tres sistemas de generación de energía eléctrica en las zonas urbanas. La primera se enfoca en la instalación de turbinas eólicas en sitios cercanos a las urbes y las otras dos están referidas a su instalación sobre los edificios. Respecto a la primera, Kastner-Klein et al. (2001) propusieron instalar turbinas entre los espacios generados por las hileras de edificios en donde caracterizaron las corrientes de aire producidas por el flujo de vehículos con y sin tráfico. A pesar de no concluir sobre la viabilidad de la instalación eólica, logran evidenciar la cantidad de problemas con los que se enfrentan al tener que validar sus experimentos con datos de campo. Además, se menciona que las discrepancias entre los datos de campo y los datos arrojados por sus experimentos, se debe a un uso inadecuado del escalamiento de la velocidad del aire. Además, reconocen que la mayor cantidad de flujo de aire se encuentra en la parte superior de los edificios, pues el aire se acelera por encima de éstos. De tal forma que, en los trabajos de Sharpe & Proven (2010); Wang et al. (2017); Müller et al. (2009); Grant et al. (2008), se investigan las formas en las que la tecnología puede ser usada en los edificios para ser tanto amigables visualmente como para reducir el ruido estructural que pueda ocasionar.

Hasta aquí, todos los experimentos mencionados necesitan de algún tipo de validación para ser confiables, ésta usualmente se basa en su comparación con perfiles de velocidad obtenidos en campo Al-Quraan et al. (2016). De aquí que, en trabajos como los de Prudden et al. (2018); Sharma et al. (2019) se desarrollaron nuevos dispositivos o metodologías que permiten la medición del viento a alturas cada vez mayores, mediante aviones no tripulados o mediante sensores láser ubicados en las turbinas eólicas. Sin embargo, aún y cuando las predicciones del viento son confiables, e incluso la validación de los experimentos es exitosa, en la práctica la potencia de las turbinas eólicas suele no ser la calculada, con errores del 10 al 20% (Barthelmie et al., 2007). Esto se debe a que los

experimentos en túneles de vientos están bajo sistemas controlados que no pueden modelar todas la interacciones que existen fuera de éstos (Manwell et al., 2009).

Existen otro tipo de pérdidas comúnmente asociadas a la caja de engranajes (Musial et al., 2007), en donde se analizan las pérdidas por fricción de los dispositivos. Tal es su importancia y complejidad que la caja de engranajes pertenece a una línea de investigación aislada de la aerodinámica. Para atender a las pérdidas por efectos de estela, se llevaron a cabo experimentos en turbinas instaladas (*in-situ*). Uno de los primeros trabajos se enfocó en caracterizar el flujo alrededor de una sola turbina que ya había sido afectada por otra (Whale et al., 1996) y compararon los resultados con experimentos en túneles de viento. Los resultados mostraron que las discrepancias entre ambos se deben a dos razones: (1) efectos de escala y (2) al serpenteo de la estela de la turbina *in-situ*. Esta última se debe a la variación de la velocidad y dirección del viento a lo largo del periodo de estudio. Además, los autores encontraron que el número de Reynolds usado en el túnel de viento es menor que el calculado en el sitio donde se instaló la turbina de alta potencia, por un factor de 1000. Toloui et al. (2014) se refirieron a esto último como un problema de escalamiento que tenía que ver con la dificultad de reproducir números de Reynolds tan altos en los túneles de viento asociándolo a la capa límite atmosférica. Tanto Toloui et al. (2014) como de Hong et al. (2014) decidieron analizar el efecto de la capa límite atmosférica en las turbinas *in-situ* usando nevadas naturales como trazadores y la técnica de velocimetría de partículas. En sus trabajos lograron cuantificar los flujos promedio y sus fluctuaciones en la capa límite atmosférica. A estos flujos se les denominó *movimiento de flujos a escalas muy grandes* [Very-large-scale motions (VLSMs)] o *modos globales* (Hutchins et al., 2012).

2.1.2 Experimentos numéricos

Dada la importancia del estudio de los flujos a gran escala y a la dificultad por llevar a cabo sus experimentos, éstos se comenzaron a realizar mediante la simulación numérica de las ecuaciones que gobiernan el transporte de masa y cantidad movimiento de un fluido. Parafraseando a Löhner (1987), existen al menos tres razones por las cuales las simulaciones numéricas son necesarias: (1) el comportamiento inherente no lineal de los fluidos; (2) La característica hiperbólica/elíptica de las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de un fluido; (3) y la necesidad por obtener estimados más precisos en el área de la aeronáutica. Por supuesto que esta última se puede aplicar a casi todas las áreas; sin embargo, muestra que para los años ochentas (Jameson, 1983), los avances de este tipo de experimentos fueron impulsados para fines aerodinámicos que eventualmente impulsaron la investigación en las turbinas eólicas. De hecho, lo anterior se ha visto

reflejado en el diseño de complejos perfiles alares (Li et al., 2016; Cohan & Arastoopour, 2016; Allet et al., 1999), en el estudio del flujo turbulento en la estela de las turbinas (Réthoré et al., 2007; Önder & Meyers, 2018), en el estudio de las turbinas mediante enfoques de optimización (Jureczko et al., 2005; Chen et al., 2014), en la ciencia de materiales (Wandji et al., 2016; Ancona & McVeigh, 2001), en las predicciones de la velocidad del viento (Peinke et al., 2007), etc. Así mismo, los avances mencionados no habrían sido posibles sin el incremento en las capacidades computacionales (Ferreira et al., 2007; Alaimo et al., 2015) y en la creación de mejores y más eficientes algoritmos de solución de ecuaciones (Lanteri & Loriot, 1996; Díaz-Casás et al., 2012; Kyriacou et al., 2012). De hecho, uno de los pilares en la investigación de las turbinas eólicas se ha basado en el método de elemento de pala (éste permite diseñar las palas de las turbinas mediante cierta información *a priori* (Glauert, 1935)), que se basa en el uso de algoritmos computacionales para resolver de manera más eficiente sus modelos de naturaleza iterativa y así optimizar el método.

También existen trabajos como el de Shen et al. (2005) en el cual se mejora el método de elemento de pala al agregar nuevos modelos de corrección por pérdidas en la punta de la pala. A pesar de que el método de elemento de pala es computacionalmente atractivo y de que se le siguen haciendo mejoras, es pertinente mencionar que éste depende de datos empíricos que son alimentados, a su vez, a simulaciones en dos dimensiones, y que esos datos se extrapolan a tres dimensiones. Además, según lo reportado por Li et al. (2012), han habido otros programas que han incluido modelos aerodinámicos en los que se desprecian los efectos viscosos para seguir siendo computacionalmente eficientes. Ahora bien, existen métodos y ecuaciones más complejas que los que se acaban de mencionar y que por lo tanto tienen un mayor costo computacional. Éstos se basan en resolver las ecuaciones de Navier-Stokes para regímenes turbulentos, en donde el término que contiene el número de Reynolds, dentro de la ecuación diferencial de transporte de cantidad de movimiento, respecto a los demás términos, es lo suficientemente grande como para volver inestables las soluciones numéricas.

Para atender a lo anterior, existen distintas propuestas como el uso de URANS (the Unsteady Reynolds Averaged Numerical Simulation), SDS (Semi-Deterministic Simulation), VLES (Very Large Eddy Simulation), CSC (Coherent Structure Capturing) y RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes Simulation) (Papadopoulos, 2013). De hecho, cierta parte de las investigaciones numéricas alrededor de las turbinas eólicas, radica en la comparación de cada una de las cerraduras para ciertos sistemas y de las ecuaciones que se acaban de mencionar (Terkel, 1983). Por ejemplo, en el trabajo de Allet et al. (1999), se desarrolló un resolvidor basado en la solución de las ecuaciones RANS en donde se mostraron las diferencias entre usar las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo laminar

y su resolvidor turbulento. En este caso, el modelo se cerró bajo el concepto de viscosidad de remolino. En el trabajo de Dose et al. (2018) se analizó la aerodinámica de una turbina eólica junto con la aeroelasticidad, mediante la solución de las ecuaciones URANS. En este trabajo, el problema se cerró mediante el modelo $\kappa - \omega - SST$. El trabajo de Baxevanou et al. (2008), propone una combinación entre la simulación numérica de las ecuaciones de Navier-Stokes (para proporcionar información sobre la aerodinámica de las palas) y dos esquemas de acoplamiento para el estudio del comportamiento aeroelástico de las palas. Además, en este trabajo se usó el modelo de cerradura $\kappa - \omega$ para altos números de Reynolds.

2.2 Modelos teóricos

Ya que en la literatura existen diversos enfoques de estudios teóricos de turbinas eólicas, para el presente trabajo, resulta conveniente agruparlos en dos categorías. Aquellos que se formulan para el diseño de las turbinas eólicas en parques eólicos (modelos *a priori*) y los que requieren información de campo para controlar el funcionamiento del parque eólico (modelos *a posteriori*). No obstante, se reconoce que algunos modelos *a priori* se pueden beneficiar de los modelos *a posteriori*.

2.2.1 Modelos *a posteriori*

En general, los modelos *a posteriori* se encargan del monitoreo de los parques eólicos así como de la predicción de la potencia a diferentes tiempos (Bao et al., 2017). Ya que, en general, las condiciones del viento son variantes, los métodos más utilizados son: predicción numérica del clima, que se basa, principalmente, en la predicción del clima a escalas planetarias (Chelton & Freilich, 2005; Landberg & Mortensen, 1993). Métodos estadísticos, los cuales usan la relación entre la velocidad predicha y la actual en el corto plazo para sintonizar los parámetros del modelo (Alexiadis et al., 1999). Métodos basados en redes neuronales artificiales, los cuales utilizan datos de la velocidad tomados en lapsos prolongados de tiempo –en comparación con los métodos estadísticos– para hallar la relación entre los datos de entrada y salida de la velocidad del viento (Li et al., 2001), (Goh et al., 2006)³. En general, este tipo de modelado se basa en algoritmos computacionales cuyos parámetros de entrada y salida varían dependiendo de la sensibilidad del modelo. Ya que la relación entre la potencia de salida de una turbina y los parámetros de entrada son no lineales, trabajos como el de Kusiak et al. (2009) usaron un único parámetro de entrada como la velocidad del viento para simplificar el modelo. En dicho trabajo se combinaron, además, varios enfoques que incluyen extracción de datos, gráficos de control, entre otros. De esta manera,

³Una explicación más amplia sobre estos métodos se discute en Potter & Negnevitsky (2006).

se caracteriza la curva de potencia⁴ para una parque eólico. Así mismo, en trabajos como el de [Pelletier et al. \(2016\)](#) los modelos se alimentaron de más de un parámetro de entrada como la velocidad del viento, densidad del aire, intensidad de la turbulencia, el corte del viento, dirección del viento, entre otros.

2.2.2 Modelos *a priori*

Por su parte, los modelos *a priori*, se toman como la base fundamental del diseño de turbinas eólicas. En general, estos modelos se clasifican en función de la cantidad de información que aportan. Por ejemplo, los más sencillos son aquellos que proporcionan estimados máximos de la potencia que una turbina puede extraer del viento. En este sentido, la teoría de [Betz \(1920\)](#) y [Joukowsky \(1920\)](#) se basó en determinar la potencia máxima extraíble del viento al considerar que la turbina eólica se puede aproximar como un *disco actuador* ([Rankine, 1865](#)). Es decir que, las palas y el aire circundante en la turbina se conciben como un medio pseudo-homogéneo. Este disco actuador tiene la propiedad de permitir el transporte de un flujo continuo de masa provocando un salto en el esfuerzo del fluido. De esta manera, se encontró que el límite máximo que una turbina puede extraer del viento es aproximadamente el 59% del total disponible. Cabe mencionar que esta teoría esta basada en el uso de la ecuación de Bernoulli ([Bird et al., 2006](#)), que es una ecuación válida a la escala de campo (o escala megascópica, para futuras referencias). De hecho, algunos autores argumentan que el análisis llevado a cabo no es suficiente para determinar un límite máximo de potencia de una turbina ([Rauh & Seelert, 1984](#); [Inglis, 1979](#); [Greet, 1980](#)). Por ejemplo, [Rauh & Seelert \(1984\)](#) argumentaron que para hablar estrictamente de un límite máximo, como el límite máximo termodinámico de la máquina de Carnot ([Manna, 2012](#)), es necesario realizar un balance de energía total y no sólo de energía mecánica. Por su parte, [Greet \(1980\)](#) sugirió que la ecuación de la cual se parte en la teoría de Betz es incorrecta y que el sistema de ecuaciones no está cerrado. A pesar de estos y otros puntos de vista en contra de la teoría, muchos modelos han tomado como referencia a la teoría de Betz ([Manwell et al., 2009](#)).

Con el fin de proporcionar un estimado más realista de la potencia, se reconoció la necesidad por estudiar las aspas de una turbina eólica mediante la *teoría de elemento de pala* ([Toman et al., 2019](#)). Esta teoría consistió en fraccionar la pala de una turbina eólica para determinar las fuerzas que actúan sobre ésta en su conjunto ([Glauert, 1935](#)). Ya que esta teoría fue originalmente desarrollada para el estudio de las hélices de los helicópteros, ésta no consideró el cambio del perfil alar a lo largo de una pala ni la interacción entre éstas. Dada la complejidad del estudio de los perfiles alares

⁴Una curva de potencia grafica en el eje horizontal la velocidad del viento y en el eje vertical la potencia del aerogenerador.

(Hosseini & Moetakef-Imani, 2017) y a la precisión requerida para su análisis aerodinámico (Chan et al., 2019), se comenzaron a tomar en cuenta métodos como el *B-Spline*. Éste permitió esbozar un perfil aerodinámico con curvas compuestas por puntos de control, en donde se toman en cuenta elementos como el ángulo de ataque, la cuerda, entre otros (Cohen et al., 1980). A la fecha, este método se caracteriza por ser ampliamente usado en diversos programas de software, tales como CAD-CAM⁵ (Pérez-Arribas & Trejo-Vargas, 2012).

Independientemente de los numerosos trabajos para desarrollar un perfil aerodinámico de una manera eficiente, el interés práctico está en su consecuencia última; que es determinar la potencia de la turbina eólica. Para ello, se suelen acoplar las fuerzas obtenidas del perfil alar con un balance de fuerzas del flujo de aire lejos de la turbina eólica (Ingram, 2005). De esta forma se creó *el método de elemento de pala* (Blade Element Method, BEM), el cual acopla la teoría de elemento de pala y la *teoría de conservación de cantidad de movimiento*. De hecho, esta teoría es el punto de partida para la ecuación de Bernoulli, usada en la teoría de Betz. De esta manera, se puede apreciar la convergencia de las necesidades para el cálculo de la potencia, desde lo que podría llamarse un enfoque global (como el usado para determinar la potencia máxima de una turbina) y uno preciso (enfocado en el perfil aerodinámico). Como consecuencia de esto, el BEM requiere un proceso iterativo de solución de las ecuaciones (Lanzafame & Messina, 2007).

En este sentido, el BEM toma en cuenta algunos conceptos como el *coeficiente de arrastre*, *coeficiente de sustentación* o *ángulo de ataque* para mejorar el desempeño aerodinámico (Ingram, 2005). En este sentido, algunas correcciones se basaron en considerar la interacción de las palas entre sí, al tomar en cuenta el giro del aire dentro del plano del rotor de la turbina (Vaz et al., 2011). Con respecto a la teoría de cantidad de movimiento, se modificó la ecuación de Bernoulli al agregarle términos de ganancia o pérdida de potencia (Huleihil & Mazor, 2012).

También se llevaron a cabo modelos matemáticos en los que se tomaron en cuenta los vórtices generados por la turbina (Okulov et al., 2015) o en su defecto de un disco actuador (Sørensen & Van Kuik, 2011). Esto último se llevó a cabo al considerar la *teoría de vórtices* (Goldstein, 1929), cuya finalidad es tomar en cuenta los efectos rotacionales de la turbina. Aunque esta teoría fue inicialmente llevada a cabo para turbinas con *cargas ligeras*, es decir dos palas, en trabajos posteriores se expandió la teoría para turbinas con *cargas pesadas* (Georgiou & Theodoropoulos, 2010). Esta contribución permitió predecir la máxima eficiencia de los rotores para un número arbitrario de palas (Okulov & Sørensen, 2008a,b).

En este punto es pertinente mencionar que en la práctica, el interés radica en el uso de la


⁵Computer-Aided Design and Manufacturing

información que aportan los modelos teóricos para usarlos en esquemas de optimización (Mahmud-din, 2017) cuyo objetivo es maximizar el coeficiente de potencia de la turbina de Freitas Pinto & Gonçalves (2017). En este sentido, surge una línea más de investigación basada en el uso, no sólo de algoritmos computacionales para los problemas de optimización Vucina et al. (2016), sino de simulaciones numéricas en las cuales se resuelven las ecuaciones de transporte alrededor de una turbina eólica. Más aún, ya que para el análisis de un perfil se requiere de información *a priori* de las características de la superficie aerodinámica, para una mejor obtención de la potencia de la turbina se propone llevar a cabo simulaciones numéricas en tres dimensiones para la evaluación adecuada de las características de la superficie aerodinámica (Yang et al., 2014).

De los modelos mencionados, se observa que mientras más realistas sean éstos, su solución analítica se complica y la información *a priori* para cerrar los modelos se vuelve esencial. En consecuencia, mientras mayor sea la precisión de la solución buscada (en este caso el coeficiente de potencia), más se requerirá del uso de modelos que trabajen como un conjunto. Es en este sentido que, el uso de la dinámica de fluidos computacional (Computational Fluid Dynamics, CFD), se convierte en una herramienta necesaria para complementar a los modelos teóricos (de Freitas Pinto & Gonçalves, 2017). De hecho, el avance computacional ha permitido resolver numéricamente las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento para perfiles alares en tres dimensiones (Ribeiro et al., 2012; Vucina et al., 2016). Actualmente, un punto de interés en el estudio de parques eólicos son las pérdidas de potencia (Hong et al., 2014); de hecho, se ha demostrado que las pérdidas de la potencia son de alrededor del 20% (Barthelmie et al., 2007). Estas pérdidas se deben a la interacción de las estelas de las turbinas y a la presencia de la capa límite atmosférica (Toloui et al., 2014). Para atender a este problema, se han desarrollado modelos que estudian exclusivamente la estela de una turbina para evaluar el efecto de la caída de la potencia en función de la reducción de su velocidad (Crespo et al., 1999). Cabe mencionar que en esta clase de modelos se tiene que proponer una condición de frontera de la velocidad a la salida de la turbina eólica. Por ejemplo, uno de los modelos de estela más sencillos se desarrolló por Jensen (1983) con el objetivo final de evaluar la caída de potencia para un conjunto de diez turbinas eólicas. En este caso, la velocidad que se usó a la salida de la turbina, fue la obtenida mediante la teoría de Betz, es decir dos tercios de la velocidad entrada. Por su parte, Bastankhah & Porté-Agel (2014) propusieron un modelo de estela usando una velocidad tipo gaussiana; es decir, una velocidad como función del radio de la turbina (Katic et al., 1986). De lo anterior se deduce que el desempeño de esta clase de modelos depende del tipo de condición de frontera que consideran para describir el inicio de la estela. En este aspecto, Crespo et al. (1999) hicieron un estudio comparativo entre los

tipos de modelos de estela y concluyeron que los modelos gaussianos son los más convenientes. Sin embargo, aún hay elementos por mejorar en esta teoría para que la condición de frontera contenga la información esencial del transporte de cantidad de movimiento alrededor de la turbina. Para hacer frente a este reto, una alternativa promisoría está en las teorías ya usadas exitosamente en el flujo alrededor de superficies rugosas (Pasquier et al., 2017; Bottaro, 2019) para formular la condición de frontera correspondiente. En estos trabajos se propone descomponer a un dominio Ω en dos partes (Ω_i y Ω_0), donde la información de un dominio (por ejemplo Ω_i) se lleva a la frontera que separa a Ω_i y Ω_0 . Más aún, en el trabajo de Pasquier et al. (2017) se muestra que varias de las ideas usadas en este método no solo son compatibles con las usadas en métodos de escalamiento, sino que se pueden usar para llevar a cabo de manera eficiente escalamientos posteriores.

A partir de lo expuesto, queda claro que los modelos *a priori* son esenciales para el diseño de parques eólicos. Sin embargo, en dichos modelos se pueden identificar dos extremos: los modelos a la escala megascópica (Betz) y el método de elemento de pala (BEM). Esta distinción se propone de esta manera ya que el BEM contempla modelos de cerradura que van desde modelos heurísticos hasta CFD. En medio de estos dos extremos se pueden ubicar los estudios relacionados con la estela de la turbina eólica. Este tipo de perspectiva es consistente con la organización de las aportaciones teóricas de este trabajo. Como se mencionó en la Introducción, este trabajo contempla la formulación de tres clases de modelos: 1) modelos promedio en la microescala, los cuales corresponden al extremo del BEM; 2) desarrollo de condiciones de frontera para cerrar a los modelos de estela y 3) formulación de modelos a la megaescala más generales que la teoría de Betz. En aras de la claridad, antes de presentar estos modelos es pertinente dedicar un espacio a la introducción de los conceptos y lenguaje utilizados en este trabajo.



3. Interludio conceptual

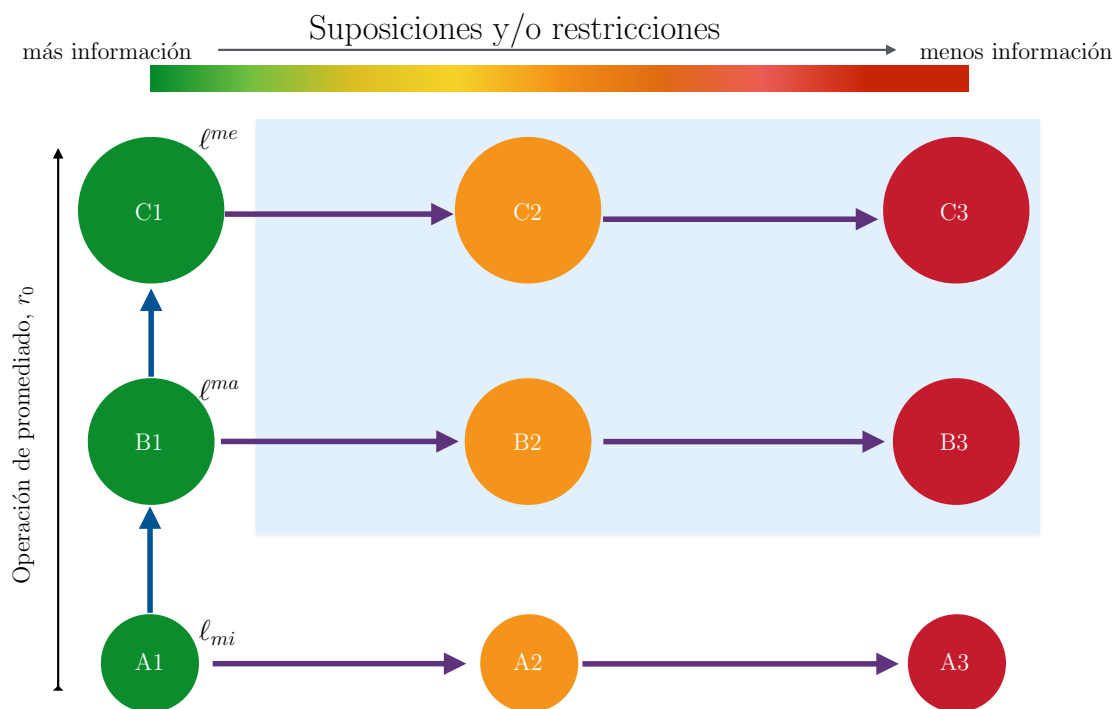
La nomenclatura utilizada en este trabajo utiliza conceptos que típicamente no se encuentran en la literatura relacionada con turbinas eólicas. Debido a ello, el objetivo de este capítulo es definir con la mayor claridad posible tales conceptos. De hecho, los fundamentos de la metodología utilizada en este trabajo se encuentran en las teorías usadas para estudiar el transporte en medios porosos (ver por ejemplo, Whitaker, 1999; Gray & Gray, 2017; Bear, 2018). En este contexto, se entiende por *microescala* al nivel de escala a partir del cual es válida la hipótesis del continuo y son por tanto aplicables las ecuaciones de la mecánica del continuo. En el otro extremo de la jerarquía de escalas se encuentra la *megaescala*, la cual corresponde con la escala de campo. En medio de estas dos escalas, se encuentra la *macroescala*, que es el nivel de escala en el cual se formulan los modelos matemáticos que buscan visualizar al medio poroso como un pseudo-continuo. De esta forma, asociando las longitudes ℓ_{mi} , ℓ^{ma} y ℓ^{me} a la microescala, macroescala y megaescala, respectivamente; se sigue la siguiente desigualdad

$$\ell_{mi} \ll \ell^{ma} \ll \ell^{me} \quad (3.1)$$

Antes de continuar, es oportuno mencionar que las definiciones presentadas arriba no son universales, incluso en la literatura de medios porosos (el lector interesado puede comparar las figuras 1.2 en los trabajos de Whitaker, 1999; Gray & Miller, 2014). Sin embargo, la utilidad de estos conceptos radica en que es posible desarrollar modelos matemáticos para sistemas heterogéneos donde el

sistema se conciba como un pseudo-continuo, siempre que exista una disparidad considerable (por ejemplo de cuatro órdenes de magnitud) entre las longitudes características asociadas con la microescala y la megaescala.

En el presente trabajo se entiende como *microescala* a la longitud en donde la velocidad y presión sufren cambios espaciales a la escala del continuo. Para tener un marco de referencia físico, esta longitud se asocia a la de la punta de las palas de una turbina eólica. La *macroescala* es la longitud en la cual se produce la estela de la turbina eólica. Por último, la *megaescala* es la longitud asociada a los cambios de velocidad y presión que ocurren más allá de la longitud de la estela (en al menos dos órdenes de magnitud).



Ai.- Modelo a la escala microscópica tipo i,

Bi.- Modelo a la escala macroscópica tipo i, donde $i=1,2,3$.

Ci.- Modelo a la escala megascópica tipo i,

Figura 3.1: Esquema que representa los tipos de modelos a la escala microscópica ℓ_{mi} , macroscópica ℓ_{ma} y megascópica ℓ_{me} . La flecha negra de la izquierda indica el sentido proceso de promediado. La flecha negra situada arriba del esquema, indica el sentido de la pérdida de información en los modelos. El recuadro azul encierra los modelos escalados. Las flechas azules y moradas muestran el camino para obtener los modelos promedio.

Otro de los conceptos que es necesario definir es el *promediado*. Ésta es una operación matemática de suavizado en el espacio y/o tiempo de una función continua por tramos. En el caso del promediado espacial en medios porosos, por lo regular se define una región tridimensional fija que

contenga a las fases involucradas (Bear, 2018). En el presente trabajo, el concepto de promediado es el mismo y por lo tanto se requieren definir regiones de promediado adecuadas tanto para la macroescala como para la megaescala. Además, es pertinente mencionar que la operación matemática de promediado no necesariamente implica una pérdida de información de la microescala (Wood, 2009). En este sentido, puede decirse que el promediado lleva a un reacomodo de información en el nivel de escala que se esté trabajando. Esta propiedad se aprovecha en este trabajo para incluir diferentes reacomodos de información en modelos macroscópicos y megascópicos como se ilustra en la figura 3.1. Lo anterior se ejemplifica al pasar del modelo A1 al modelo B1 y al modelo C1.

En contraste al promediado, el proceso de *filtrado sistemático de información* se lleva a cabo al usar *postulados de escalamiento* que reducen sistemáticamente el número de grados de libertad del modelo resultante (Wood & Valdés-Parada, 2013). Esto se ejemplifica en la figura 3.1, al pasar, por ejemplo, del modelo A1 al modelo A2, o al modelo A3. De esta manera, los modelos que han pasado por un proceso de promediado y un proceso de filtrado sistemático de información, se convierten en modelos *escalados*, como los modelos encerrados en el recuadro azul.



4. Objetivos

4.1 Objetivo general

Desarrollar modelos matemáticos para el flujo de viento alrededor de turbinas eólicas en diferentes niveles de escala conservando la información de la microescala.

4.2 Objetivos particulares

- Desarrollar modelos promedio en la macroescala para la conservación de masa, cantidad de movimiento y energía mecánica alrededor de una turbina eólica.
- Desarrollar una condición de frontera para el modelo de estela que conserve la información de la turbina eólica.
- Desarrollar modelos promedio y escalados en la megaescala para la conservación de masa, cantidad de movimiento y energía mecánica alrededor de una turbina eólica.

5. Metodología

El trabajo consiste en desarrollar tres modelos matemáticos a distintas escalas que describan el transporte de masa, cantidad de movimiento y energía mecánica alrededor de un sistema eólico predefinido. Se busca que cada uno de los tres modelos sea capaz de brindar información específica debido a que cada uno se desarrolla de manera diferente para una escala en particular. En la figura 5.1, se muestra un campo eólico periódico en la dirección x , de donde se tomó una turbina eólica para estudiarla de manera aislada.

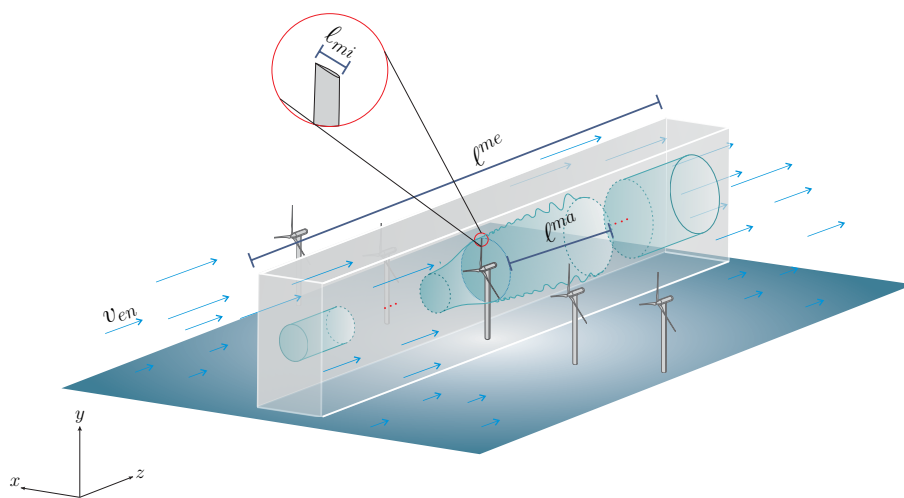


Figura 5.1: Representación de un campo eólico periódico en la dirección x . v_{en} es la velocidad no perturbada a la entrada del sistema. l_{mi} es la longitud característica a la micro escala. l_{me} es la longitud características a la mega escala. l_{ma} es la longitud característica a la macro escala.

Además, en la misma figura se muestran las longitudes características de la microescala (ℓ_{mi}), macroescala (ℓ^{ma}) y megaescala (ℓ^{me}), asociadas a longitudes de la punta de la pala, la estela de la turbina y la porción de sistema que contiene a la turbina, respectivamente. Ya que los modelos están relacionados directamente con cada uno de los objetivos, la metodología se divide según cada uno de ellos.

5.1 Objetivo 1: Modelo promedio a la escala macroscópica

Para llevar a cabo este modelo, se propone partir de las ecuaciones a la escala microscópica, ℓ_{mi} , que gobiernan el transporte de masa, cantidad de movimiento lineal y energía mecánica, alrededor de una turbina eólica. Posteriormente, se define un operador de promediado en el espacio para la velocidad y la presión, el cual se aplica a las ecuaciones diferenciales para el transporte antes mencionadas. Lo anterior se puede apreciar de una forma general en el esquema dado en la figura 5.2.

Para llevar a cabo el intercambio de integración espacial y diferenciación en el tiempo y en el espacio, se utilizan el *teorema general del transporte* y el *teorema de promediado espacial* (Whitaker, 1968), respectivamente. Lo anterior genera ecuaciones diferenciales en función de variables promedio de la presión y velocidad con términos que son resultado del proceso de promediado (términos promedio). Estos términos están en función de cantidades puntuales, por lo que los modelos resultantes no están cerrados. Para atender a esto, se propone cerrar el modelo a partir de la solución de las ecuaciones de transporte a la escala microscópica.

Cálculo de los términos promedio

Uno de los intereses en este primer modelo, es ser capaces de calcular los términos que resultan del proceso de promediado. En este caso, se busca agrupar todos los términos en uno solo (para el transporte de cantidad de movimiento y energía mecánica), para hacer el cálculo de éste lo más sencillo posible, y para asociarle un sentido físico más natural. Se propone que los términos promedio relacionen los efectos que tiene la turbina eólica sobre su medio. En este sentido, se hace uso de una región de promediado, la cual puede pensarse como un instrumento de medición que puede capturar dichos efectos. Una forma de lograr lo anterior, es mediante la solución del modelo a la escala microscópica. Al ser este un problema altamente turbulento, se propone resolver la versión promediada en el tiempo de las ecuaciones de transporte. Una de las propuestas para resolver numéricamente estas ecuaciones es mediante el modelo SST¹ con el resolvidor de elemento finito

¹Menter's Shear Stress Transport, por sus siglas en inglés.

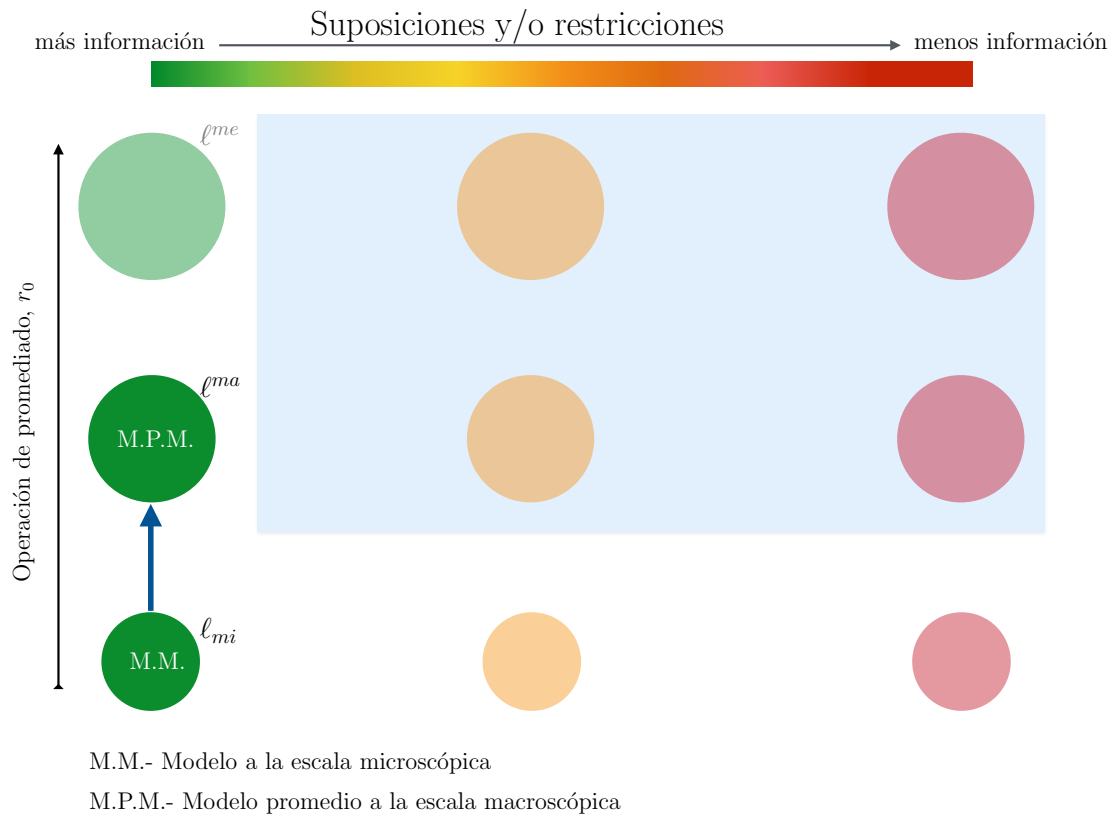


Figura 5.2: Esquema para representar, en general, la obtención del modelo promedio a la escala macroscópica (flecha azul). La flecha negra de la izquierda indica el sentido en el proceso de promediado. La flecha negra situada arriba del esquema, indica el sentido de la pérdida de información en los modelos. Los diferentes tamaños de los círculos representan los diferentes tamaños de las regiones de promediado. l_{mi} representa la escala microscópica; l_{ma} representa la escala macroscópica; l_{me} representa la escala megascópica.

Comsol Multiphysics 5.3. Además, como primera aproximación para hallar las dimensiones de la región de promediado, se propone partir de la información obtenida en el trabajo de maestría (Paéz-García, 2015). En donde se busca que el tamaño de la región de promediado contenga, al menos a la capa límite originada por la turbina eólica. En la figura 5.3 se muestran dos ejemplos de lo antes mencionado, con secciones transversales de cuadrado y elipse², aunque en el análisis se buscan otras alternativas que resulten adecuadas. Además, se explora el efecto que tienen el giro de la turbina en función del tsr (*tip-speed ratio*) y el número de Reynolds sobre las predicciones de los términos promedio.

²En el trabajo de maestría se mostró que la sección transversal de la región de promediado de una elipse representa adecuadamente los cambios de los coeficientes promedio de los modelos reportados en dicho trabajo

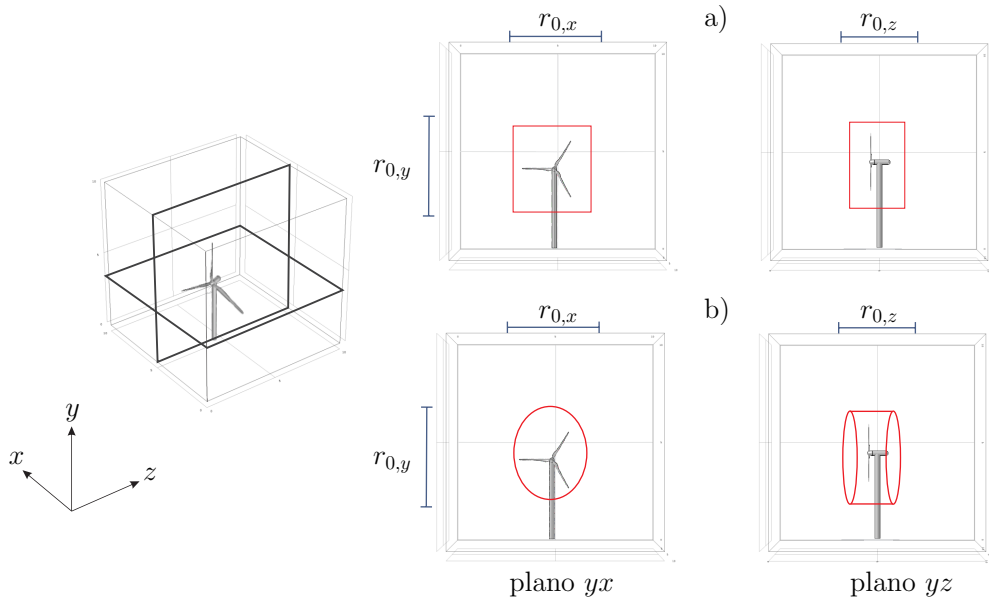


Figura 5.3: Ejemplos de las dimensiones de la región de promediado. a) para una sección transversal de cuadrado y b) elipse.

Funcionamiento del modelo

Esta última parte consiste en ilustrar el funcionamiento del modelo para, al menos, la situación más extrema que marque el análisis de los perfiles de velocidad a la escala microscópica. No obstante, se explora una versión simplificada del modelo promedio macroscópico (esto es, un modelo escalado macroscópico) al no considerar todos los cambios transversales de los términos promedio en el sistema. Esto último deja como grado de libertad a los cambios en la dirección axial, los cuales se ajustan mediante funciones *ad hoc*. Más aún, la solución numérica del modelo promedio se lleva a cabo usando SST. Como parámetro de comparación entre las predicciones del modelo promedio y el modelo a la escala microscópica se elige a la velocidad promedio.

5.2 Objetivo 2: Modelo de condición de frontera para la estela

El objetivo de este modelo es desarrollar una condición de frontera a la salida de la turbina eólica que conserve la información de ésta, a partir de un modelo a la escala microscópica. La naturaleza de este modelo se puede observar en la figura 5.4, en donde se busca partir de información a la escala microscópica para llevarla a la frontera adoptando algunas suposiciones pero sin cambiar de escala. Para comenzar, se propone dividir el sistema en dos partes; la primera (región Ω_i) contiene a la turbina eólica y se caracteriza por no tener perturbados, en su mayoría, los perfiles de velocidad. La segunda parte del sistema (región Ω_o) es aquella situada después de la turbina eólica, en la cual se contiene tanto a la estela de la turbina como al flujo parcialmente no perturbado. Dado el

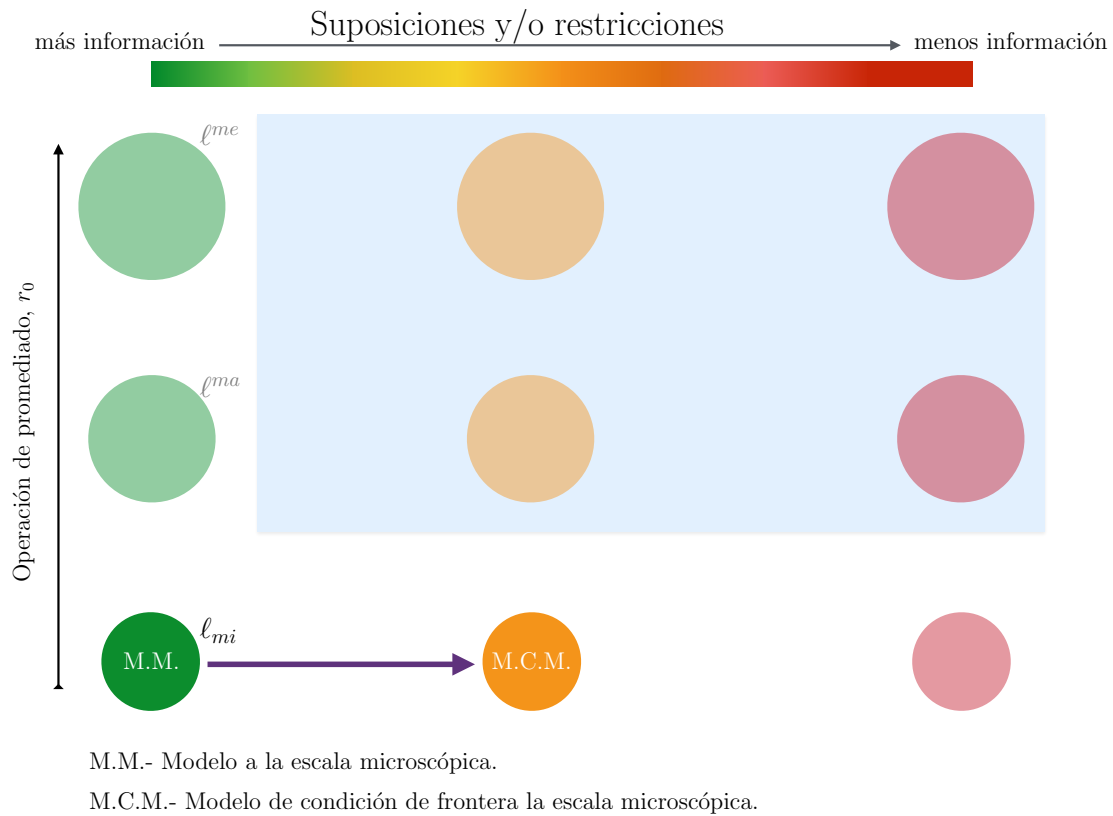


Figura 5.4: Esquema para representar, en general, la obtención del modelo para la obtención de la condición de frontera (flecha morada). La flecha negra de la izquierda indica el sentido en el proceso de promediado. La flecha negra situada arriba del esquema, indica el sentido de la pérdida de información en los modelos. Los diferentes tamaños de los círculos representan los diferentes tamaños de las regiones de promediado. ℓ_{mi} representa la escala microscópica; ℓ^{ma} representa la escala macroscópica; ℓ^{me} representa la escala megascópica.

interés por generar una condición de frontera a la salida de la turbina, es necesario aclarar que el análisis se enfocará en la región Ω_i . Primero, se definen los problemas de valor a la frontera a la escala microscópica para las dos regiones del sistema, con el fin de mostrar el acoplamiento entre éstas. Segundo, se propone la versión lineal exacta del problema de valor a la frontera en la región Ω_i , para posteriormente obtener su solución formal mediante formulaciones integrales basadas en funciones de Green. La versión lineal exacta consiste en utilizar la velocidad del fluido definida en todo el sistema en el término de transporte inercial. La solución formal se expresa en términos de variables de cerradura cuyos problemas de valor a la frontera se deducen no solo para completar el planteamiento del modelo, sino también para estimar sus órdenes de magnitud. Hasta este punto, usando la condición de frontera de acoplamiento entre las regiones, se genera una condición de frontera sin simplificaciones. Tercero, tomando en cuenta los estimados de órdenes de magnitud de las variables de cerradura se simplifica la condición de frontera. Cabe notar que las

formas completa y simplificada de la condición de frontera pertenecen a la zona perturbada justo detrás de la turbina eólica. En el resto de la frontera entre las regiones se impone que la velocidad corresponde a la velocidad de entrada. En este sentido, la condición de frontera completa es una función por secciones.

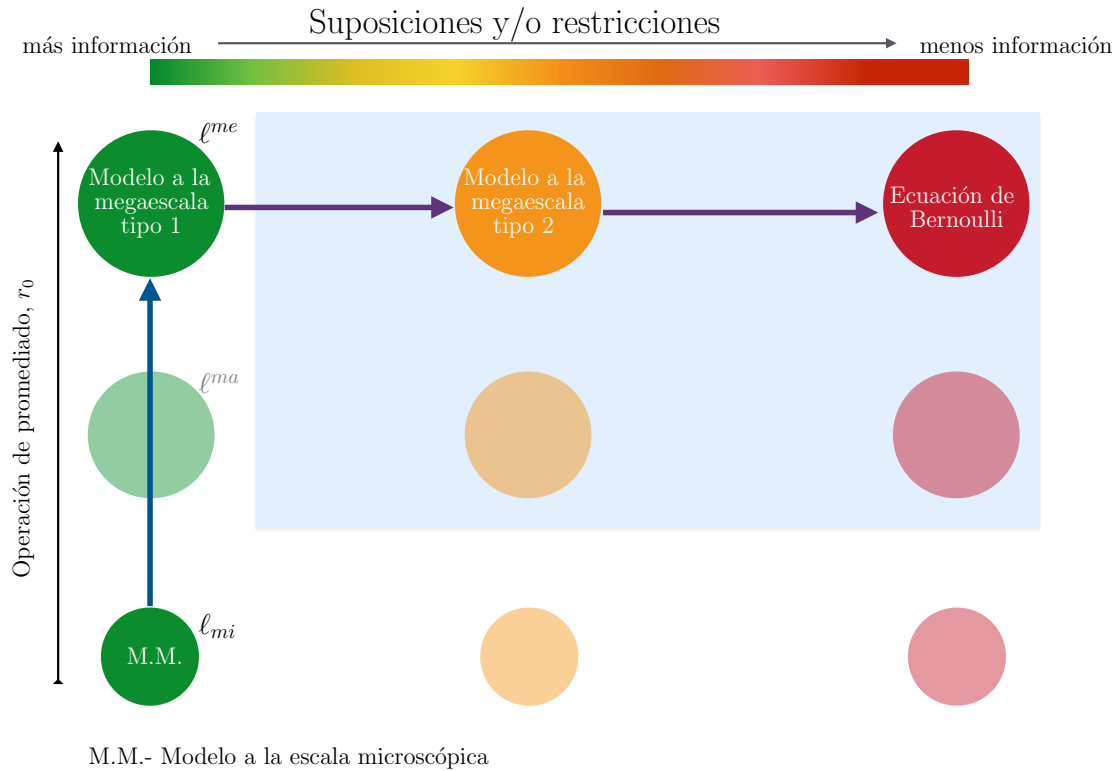


Figura 5.5: Esquema para representar, en general, la obtención del modelo promedio a la escala megascópica (flecha azul). La flecha negra de la izquierda indica el sentido en el proceso de promediado. La flecha negra situada arriba del esquema, indica el sentido de la pérdida de información en los modelos. Las flechas moradas y el recuadro azul muestran los modelos promedios megascópicos. Los diferentes tamaños de los círculos representan los diferentes tamaños de las regiones de promediado. ℓ_{mi} representa la escala microscópica; ℓ_{ma} representa la escala macroscópica; ℓ_{me} representa la escala megascópica.

5.3 Objetivo 3: Modelo promedio a la escala megascópica

Para el desarrollo de este modelo, se define al sistema con una turbina eólica en donde sus aspas son concebidas como un *pseudo-disco actuador*. Es decir, que se hará distinción entre el espacio ocupado por el aire y por las palas; contrario a la definición de un *disco actuador*, en donde el aire y las palas forman un pseudo-continuo. Posteriormente y contrario al modelo promedio macroscópico, se elige *a priori* la forma y tamaño de la región de promediado. Esto es, la región

de promediado abarca todo el largo del sistema e incluso podría abarcar su ancho y alto, con la única restricción que la sección transversal debe ser variable de la entrada a la salida. Como recurso ilustrativo, en la figura 5.5 se muestra la ruta general para la obtención de los modelos a nivel de escala megascópica.

Partiendo de lo anterior se promedian las ecuaciones de transporte de la escala microscópica a la escala megascópica. Esto lleva a generar modelos a la megaescala que tienen términos promedio que requieren cerradura. A diferencia del modelo promedio macroscópico, estos términos promedio no varían con la posición, lo cual a primera vista producen un modelo más sencillo. No obstante, es posible proponer simplificaciones para reducir el modelo y en este sentido se buscan obtener dos tipos de modelos: el primero es un modelo simplificado que aún requiere cerradura; el segundo es un modelo tipo Bernoulli. Posteriormente, se busca comparar los modelos obtenidos con la teoría de Betz-Joukowski.



Parte Dos

6	Modelo promedio a la escala macroscópica	45
6.1	Planteamiento del problema	
6.2	Promediado del transporte de masa	
6.3	Promediado del transporte de cantidad de movimiento lineal	
6.4	Promediado del transporte de energía mecánica	
6.5	Cálculo de términos promedio	
6.6	Funcionamiento del modelo	
6.7	Resumen del capítulo	
7	Condición de frontera para la estela .	69
7.1	Planteamiento del problema	
7.2	Solución formal del problema lineal exacto	
7.3	Problemas de las variables de cerradura	
7.4	Condición de frontera y su discusión	
7.5	Resumen del capítulo	
8	Modelo a la escala megascópica ...	89
8.1	Planteamiento del problema	
8.2	Escalamiento del transporte de masa	
8.3	Escalamiento del transporte de cantidad de movimiento lineal	
8.4	Escalamiento del transporte de energía mecánica	
8.5	Modelo megascópico simplificado	
8.6	Comparación con el modelo de Betz-Joukowski	
8.7	Resumen del capítulo	



6. Modelo promedio a la escala macroscópica

Actualmente, una buena parte de la investigación en turbinas y parques eólicos se lleva a cabo mediante simulaciones numéricas del transporte de masa y cantidad de movimiento, lo cual resulta costoso en cuanto a tiempo y recursos de cómputo (ver por ejemplo, [Löhner, 1987](#); [Alaimo et al., 2015](#); [Dose et al., 2018](#)). Para atender este problema, el objetivo de este capítulo es reacomodar la información de la turbina eólica en la ecuación de transporte de cantidad de movimiento a través de un proceso de promediado. En específico, se busca que dicha información sea contenida en un nuevo término promedio. Esta idea se exploró en el trabajo de [Paéz-García \(2015\)](#), en donde la información de la turbina eólica (concebida como un cilindro rotatorio) fue contenida en dos coeficientes promedio. Estos coeficientes se definieron como tensores de segundo y cuarto orden, que contenían los esfuerzos viscosos e inerciales, respectivamente. Aunque en este trabajo previo se mostró que los coeficientes promedio pueden capturar las perturbaciones producidas por la turbina eólica hasta en un 90%, el modelo adolece al menos de tres limitaciones: 1) La geometría real de las palas no fue considerada, 2) Debido al orden de los tensores, es necesario predecir 9 y 81 componentes, de las cuales se debe evaluar la importancia de cada una y 3) El modelo está sujeto a restricciones de escala y suposiciones.

Debido a lo anterior, el modelo que se desarrolla en este capítulo utiliza una geometría real de las palas de la turbina eólica y agrupa su información en un término vectorial promedio que sólo tiene tres componentes en la ecuación promedio de cantidad de movimiento y un término escala en la ecuación promedio de energía mecánica. Además, se busca que el modelo contenga

la menor cantidad de suposiciones. Para cumplir estas metas, el capítulo está organizado como sigue: primeramente se presenta el planteamiento del problema, que consiste en la definición del sistema y el planteamiento de las ecuaciones de transporte a la escala microscópica. Posteriormente se procede con el promediado de las ecuaciones de conservación de masa, cantidad de movimiento lineal y energía mecánica. Más adelante, se dedica una sección al análisis del cálculo de los términos promedio para dar lugar a un ejemplo de aplicación del funcionamiento del modelo. Por último, se presenta un resumen del capítulo.

6.1 Planteamiento del problema

6.1.1 Definición del sistema y ecuaciones gobernantes en la microescala

En la figura 6.1 se muestra un esquema del sistema que contiene una turbina eólica, en donde se hace especial énfasis en sus superficies. Dicho sistema representa una porción de un campo eólico cuya configuración es periódica a lo largo del eje x (ver figura 5.1). Antes de presentar las ecuaciones gobernantes en la microescala, es conveniente listar las siguientes suposiciones iniciales a la cuales éstas estarán sujetas:

Suposición 6.1.1 — Condiciones de flujo.

1. Flujo en estado estacionario.
2. Flujo incompresible.
3. Flujo newtoniano.
4. Los cambios espaciales de la viscosidad se consideran despreciables.

De hecho, estas suposiciones son el punto de partida para los tres modelos desarrollados en este trabajo. Por lo tanto, las ecuaciones diferenciales que gobiernan el transporte de masa, cantidad de movimiento lineal y energía mecánica son las siguientes:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (6.1a)$$

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (6.1b)$$

$$\frac{\rho}{2} \nabla \cdot (\mathbf{v}^2 \mathbf{v}) = -\nabla \cdot (p \mathbf{v}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + \frac{\mu}{2} \nabla^2 v^2 - \mu \nabla \mathbf{v}^T : \nabla \mathbf{v} \quad (6.1c)$$

Donde ρ y μ son la densidad y viscosidad del aire, respectivamente. Dirigiendo la atención a las condiciones de frontera del sistema, se considera que a la entrada de éste la velocidad es conocida y es v_{en} . Esto se debe a que la turbina eólica está lo suficientemente lejos de la entrada como para suponer que la velocidad es unidireccional y paralela al eje de rotación de la turbina. De hecho,

ésto último también ocurre a la salida del sistema; donde además, la proyección normal del tensor total de esfuerzos es igual a la presión atmosférica. Es decir:

en \mathcal{A}_{en}

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{en} \quad (6.2a)$$

en \mathcal{A}_s

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{0} \quad (6.2b)$$

El tensor total de esfuerzos se define como $\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$, donde $\boldsymbol{\tau}$ es el tensor de esfuerzos viscosos. Además, el hecho de que su proyección normal esté igualada a cero se debe a que en este trabajo se usa la presión relativa.

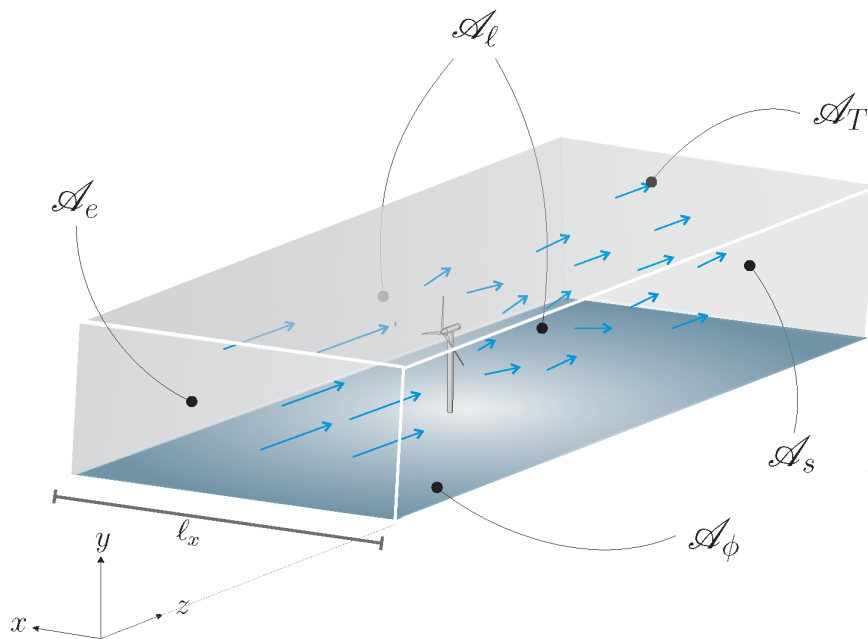


Figura 6.1: Esquema que representa las superficies del sistema. \mathcal{A}_l son las superficies laterales; \mathcal{A}_T es la superficie superior del sistema; y \mathcal{A}_B representa el piso.

Respecto a la frontera superior del sistema, se considera que está lo suficientemente lejos de las perturbaciones de la turbina eólica, por lo que los esfuerzos viscosos son despreciables con respecto a los de presión. Además, se considera que la componente normal de la velocidad es nula. Lo anterior se expresa como:

en \mathcal{A}_T

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} \quad (6.3)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (6.4)$$

Dada la naturaleza periódica del sistema en el eje x , en las superficies laterales del sistema, se supone periodicidad de la velocidad y la presión, es decir:

en \mathcal{A}_ℓ

$$\psi(0) = \psi(\ell_x); \quad \psi = p, \mathbf{v} \quad (6.5)$$

en donde ℓ_x denota la longitud del sistema en la dirección x . En las partes fijas del sistema, como el piso, el poste y la góndola de la turbina, se considera la condición de no deslizamiento:

en \mathcal{A}_ϕ

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (6.6)$$

Por último, en las superficies móviles del sistema se considera que la presión experimenta valores máximos y mínimos y que la velocidad de rotación es conocida,

en \mathcal{A}_M

$$\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{v} = v_M \quad (6.7)$$

$$p = p_M \quad (6.8)$$

donde $\boldsymbol{\zeta}$ es el vector unitario tangencial a la superficie \mathcal{A}_M . Además, dado que no hay transferencia de masa entre el viento y la turbina eólica, la componente normal del vector de velocidad en la superficie \mathcal{A}_M es cero. Esto es, en \mathcal{A}_M

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (6.9)$$

Para cerrar con esta sección, en el siguiente cuadro se lista un segundo conjunto de suposiciones a las cuales están sujetas las condiciones de frontera

Suposición 6.1.2 — Suposiciones en las condiciones de frontera.

1. El sistema es periódico en el eje x .

2. Los flujos de entrada y salida son unidireccionales y están alineados con el eje z .
3. La velocidad en la superficie de entrada es constante.
4. Los esfuerzos viscosos son despreciables respecto a los esfuerzos de presión en la superficie superior \mathcal{A}_T .

6.2 Promediado del transporte de masa

Para comenzar el desarrollo del modelo macroscópico, es necesario definir una región de promediado \mathcal{V} (de volumen V) cuyo centroide (que se localiza con el vector de posición \mathbf{x}) se puede ubicar en cualquier punto del sistema. En términos de \mathcal{V} , puede definirse el siguiente operador de *promediado superficial* para una función ψ definida por tramos en la fase fluida,

$$\langle \psi \rangle_{\mathbf{x}} = \frac{1}{V} \int_{\mathbf{y} \in \mathcal{V}_\beta(\mathbf{x})} \psi|_{\mathbf{r}} dV(\mathbf{y}) \quad (6.10)$$

donde \mathcal{V}_β es el dominio ocupado por el aire en la región \mathcal{V} . Además, el vector de posición \mathbf{r} se utiliza para localizar puntos de la fase fluida desde un sistema coordenado fijo. El vector de posición \mathbf{y} localiza puntos de la fase fluida respecto al centroide \mathbf{x} . De esta forma, las cantidades promedio sólo dependen de la posición del centroide. Además, es posible definir el operador de promediado intrínseco como

$$\langle \psi \rangle_{\mathbf{x}}^\beta = \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathbf{y} \in \mathcal{V}_\beta(\mathbf{x})} \psi|_{\mathbf{r}} dV(\mathbf{y}) \quad (6.11)$$

Ambos operadores de promediado están acoplados mediante la relación de Dupuit-Forchheimer:

$$\langle \psi \rangle_{\mathbf{x}} = \varepsilon_\beta \langle \psi \rangle_{\mathbf{x}}^\beta \quad (6.12)$$

donde la fracción volumétrica de la fase- β contenida en el volumen de promediado se denota como ε_β y su definición es la siguiente:

$$\varepsilon_\beta = \frac{V_\beta}{V} \quad (6.13)$$

La elección de un operador de promediado u otro se basa en el sentido físico de las cantidades promedio. Por ejemplo, en el estudio de flujo en medios porosos, se requiere que la presión macroscópica se exprese como un promedio intrínseco, contrario a la velocidad macroscópica, la cual se expresa como un promedio superficial (Whitaker, 1999).

En esta sección, el interés está en el desarrollo de un modelo promedio de conservación de masa. Para ello, se comienzan los desarrollos con la aplicación del operador de promediado superficial a la ecuación de continuidad (ecuación 6.1a); el resultado es

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle|_{\mathbf{x}} = 0 \quad (6.14)$$

Para intercambiar diferenciación e integración espacial, se hace uso del teorema del promediado espacial (Howes & Whitaker, 1985)

$$\langle \nabla \psi \rangle|_{\mathbf{x}} = \nabla \langle \psi \rangle|_{\mathbf{x}} + \frac{1}{V} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}(\mathbf{x}\mathbf{e})} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \psi dA \quad (6.15)$$

en donde $\mathbf{n}_{\beta\sigma}$ es el vector normal en la superficie de la turbina eólica (σ). Cabe aclarar que el último término de la ecuación anterior solamente es distinto de cero cuando la región de promediado contiene a la turbina eólica; esto es, cuando $\mathbf{x} = \mathbf{x}\mathbf{e}$. Al aplicar el teorema a la ecuación (6.14), se obtiene

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v} \rangle^{\beta}|_{\mathbf{x}} = -\nabla \ln \varepsilon_{\beta} \cdot \langle \mathbf{v} \rangle^{\beta}|_{\mathbf{x}} \quad (6.16)$$

en donde se ha usado la expresión de Dupuit-Forchheimer y se consideró que no hay transporte de masa entre el viento y la turbina eólica (ver ecuación 6.9).

6.3 Promediado del transporte de cantidad de movimiento lineal

Dirigiendo la atención a la ecuación de transporte de cantidad de movimiento lineal dada por la ecuación (6.1b) y aplicándole el operador de promediado superficial (ver ecuación 6.10), se obtiene

$$\rho \langle \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \rangle|_{\mathbf{x}} = -\langle \nabla p \rangle|_{\mathbf{x}} + \rho \mathbf{g} \varepsilon_{\beta} + \mu \langle \nabla^2 \mathbf{v} \rangle|_{\mathbf{x}} \quad (6.17)$$

En la ecuación anterior se ha considerado que la viscosidad y densidad son constantes dentro del promedio. Ya que se busca no imponer más suposiciones o restricciones, sólo se aplica el teorema del promediado a los términos que no requieran de suposiciones posteriores para ser simplificados. Tal es el caso de los esfuerzos superficiales normales, a los cuales, aplicándoles el teorema del

promediado da lo siguiente:

$$-\langle \nabla p \rangle_{\mathbf{x}} = -\varepsilon_{\beta} \nabla \langle p \rangle^{\beta} \Big|_{\mathbf{x}} - \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}(\mathbf{x}\mathbf{e})} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \left(p - \langle p \rangle^{\beta} \Big|_{\mathbf{x}} \right) dA \quad (6.18)$$

en donde se ha usado la relación entre promedio superficial e intrínseco dada por la ecuación (6.12), y la siguiente identidad

$$\nabla \varepsilon_{\beta} = -\frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} dA \quad (6.19)$$

Sustituyendo la ecuación (6.18) en la ecuación (6.17), se obtiene la siguiente expresión

$$\rho \varepsilon_{\beta} \langle \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \rangle^{\beta} \Big|_{\mathbf{x}} = -\varepsilon_{\beta} \nabla \langle p \rangle^{\beta} \Big|_{\mathbf{x}} + \rho \mathbf{g} \varepsilon_{\beta} + \mu \varepsilon_{\beta} \langle \nabla^2 \mathbf{v} \rangle^{\beta} \Big|_{\mathbf{x}} - \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \left(p - \langle p \rangle^{\beta} \Big|_{\mathbf{x}} \right) dA \quad (6.20)$$

donde además se usó la relación de Dupuit-Forchheimer en los términos inercial y viscoso. En este punto, se busca que las variables de la ecuación de transporte de cantidad de movimiento lineal estén expresadas en términos de cantidades promedio, y que todas las variables no conocidas se agrupen en un término. Por lo que, tras dividir la ecuación (6.20) entre ε_{β} resulta la siguiente expresión:

$$\rho \langle \mathbf{v} \rangle^{\beta} \Big|_{\mathbf{x}} \cdot \nabla \langle \mathbf{v} \rangle^{\beta} \Big|_{\mathbf{x}} = -\nabla \langle p \rangle^{\beta} \Big|_{\mathbf{x}} + \rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \langle \mathbf{v} \rangle^{\beta} \Big|_{\mathbf{x}} + \mathbf{f} \quad (6.21)$$

donde el vector \mathbf{f} representa las contribuciones debidas a las heterogeneidades del sistema y está definido como

$$\begin{aligned} \mathbf{f} = & -\frac{1}{V_{\beta}} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \left(p - \langle p \rangle^{\beta} \Big|_{\mathbf{x}} \right) dA + \mu \left(\langle \nabla^2 \mathbf{v} \rangle^{\beta} \Big|_{\mathbf{x}} - \nabla^2 \langle \mathbf{v} \rangle^{\beta} \Big|_{\mathbf{x}} \right) \\ & - \rho \left(\langle \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \rangle^{\beta} \Big|_{\mathbf{x}} - \langle \mathbf{v} \rangle^{\beta} \Big|_{\mathbf{x}} \cdot \nabla \langle \mathbf{v} \rangle^{\beta} \Big|_{\mathbf{x}} \right) \end{aligned} \quad (6.22)$$

Como puede notarse, la ecuación macroscópica (6.21) tiene la forma de su contraparte microscópica más el término \mathbf{f} resultante del proceso de promediado. Lo cual representa una diferencia

significativa respecto al modelo desarrollado previamente (Paéz-García, 2015),

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\rho \varepsilon_{\beta}^{-1} \left(\nabla \cdot \left(\varepsilon_{\beta} \langle \mathbf{v} \rangle^{\beta} \Big|_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{J} \cdot \langle \mathbf{v} \rangle^{\beta} \Big|_{\mathbf{x}} \right) \right)}_{\text{esfuerzos inerciales}} &= \underbrace{-\nabla \langle p \rangle^{\beta} \Big|_{\mathbf{x}}}_{\text{esfuerzos superficiales}} + \underbrace{\rho \mathbf{g}}_{\text{esfuerzos volumétricos}} \quad (6.23) \\
 + \underbrace{\mu \nabla^2 \langle \mathbf{v} \rangle^{\beta} \Big|_{\mathbf{x}}}_{\text{1er corrección de Brinkman}} &+ \underbrace{\mu \varepsilon_{\beta}^{-1} \nabla \cdot \left(\nabla \varepsilon_{\beta} \langle \mathbf{v} \rangle^{\beta} \Big|_{\mathbf{x}} \right)}_{\text{2da corrección de Brinkman}} - \underbrace{\varepsilon_{\beta} \mu \mathbf{H}^{-1} \cdot \langle \mathbf{v} \rangle^{\beta} \Big|_{\mathbf{x}}}_{\text{Darcy-Forchheimer}}
 \end{aligned}$$

donde el significado físico de cada término se escribe de forma explícita. Además, la ecuación anterior está escrita en términos de los coeficientes promedio \mathbf{H} y \mathbf{J} , los cuales son tensores de segundo y cuarto orden, respectivamente. Al comparar las ecuaciones (6.23) y (6.21), es claramente más sencillo el modelo desarrollado en este trabajo. Sin embargo, desde un punto de vista matemático se observa que la ecuación (6.21) es no-homogénea debido al término \mathbf{f} , siempre que sus valores se obtengan de experimentos numéricos o físicos. En contraste, la ecuación (6.23) es homogénea a pesar de incluir términos adicionales a la versión microscópica resultantes del proceso de promediado. Desde un punto de vista numérico, es de esperar que el término no homogéneo de la ecuación (6.21) pueda llevar a soluciones inestables o puede incluso no ser posible encontrar una solución numérica si los términos que brindan estabilidad a la solución no son capaces de compensar la magnitud de la fuente.

6.4 Promediado del transporte de energía mecánica

Partiendo de la revisión bibliográfica presentada en el capítulo 2, se sigue que los estudios actuales del transporte de cantidad de movimiento lineal en turbinas eólicas, no necesariamente sugiere que se estudie también el transporte de energía mecánica. La razón es porque en estos trabajos sólo es necesario contar con un balance de fuerzas alrededor de la turbina. Más aún, en caso de requerir calcular la potencia, ésta puede obtenerse del producto de la velocidad microscópica con la ecuación de movimiento microscópica. Sin embargo, en las secciones anteriores de este capítulo se desarrollaron las versiones macroscópicas de las ecuaciones de transporte de masa y cantidad de movimiento. Por lo cual, el cálculo de la potencia no necesariamente es el producto de la velocidad macroscópica con la ecuación (6.21) como lo mostraron Paéz-García et al. (2017) en general en procesos de escalamiento.

Con base en lo anterior y análogo a las secciones anteriores, se procede a promediar la ecuación de energía mecánica de la escala microscópica. Para ello, se aplica el operador de promediado

superficial definido en la ecuación (6.10) a la ecuación (6.1c), para obtener la siguiente expresión:

$$\frac{\rho}{2} \langle \nabla \cdot (v^2 \mathbf{v}) \rangle|_x = - \langle \nabla \cdot (p\mathbf{v}) \rangle|_x + \frac{\mu}{2} \langle \nabla^2 v^2 \rangle|_x - \mu \langle \nabla \mathbf{v}^T : \nabla \mathbf{v} \rangle|_x \quad (6.24)$$

A diferencia de las ecuaciones de transporte anteriores, en ésta no se usa el teorema el promediado, ya que no representa alguna ganancia algebraica para la obtención del término promedio. En su lugar se procede a arreglar todos los términos para que la forma final de la ecuación promedio de energía mecánica quede de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \left(\rho \langle \mathbf{v} \rangle^\beta|_x \cdot \nabla \langle \mathbf{v} \rangle^\beta|_x \right) \cdot \langle \mathbf{v} \rangle^\beta|_x = - \left(\nabla \langle p \rangle^\beta|_x \right) \cdot \langle \mathbf{v} \rangle^\beta|_x + \rho \mathbf{g} \cdot \langle \mathbf{v} \rangle^\beta|_x \\ & + \left(\mu \nabla^2 \langle \mathbf{v} \rangle^\beta|_x \right) \cdot \langle \mathbf{v} \rangle^\beta|_x - \mu \left(\nabla \langle \mathbf{v} \rangle^\beta|_x \right)^T : \nabla \langle \mathbf{v} \rangle^\beta|_x + m \end{aligned} \quad (6.25)$$

Como se puede notar, la ecuación anterior tiene la forma de la ecuación (6.21) multiplicada por el vector $\langle \mathbf{v} \rangle^\beta|_x$ más un término extra m y el término de disipación viscosa. El nuevo término m está definido como sigue

$$\begin{aligned} m = & - \frac{\rho}{2} \langle \nabla \cdot (v^2 \mathbf{v}) \rangle^\beta|_x + \left(\rho \langle \mathbf{v} \rangle^\beta|_x \cdot \nabla \langle \mathbf{v} \rangle^\beta|_x \right) \cdot \langle \mathbf{v} \rangle^\beta|_x - \langle \nabla \cdot (p\mathbf{v}) \rangle^\beta|_x + \left(\nabla \langle p \rangle^\beta|_x \right) \cdot \langle \mathbf{v} \rangle^\beta|_x \\ & + \frac{\mu}{2} \langle \nabla^2 v^2 \rangle^\beta|_x - \left(\mu \nabla^2 \langle \mathbf{v} \rangle^\beta|_x \right) \cdot \langle \mathbf{v} \rangle^\beta|_x - \mu \langle (\nabla \mathbf{v})^T : \nabla \mathbf{v} \rangle^\beta|_x + \mu \left(\nabla \langle \mathbf{v} \rangle^\beta|_x \right)^T : \nabla \langle \mathbf{v} \rangle^\beta|_x \end{aligned} \quad (6.26)$$

Cabe mencionar que la información requerida para calcular al término m puede venir de los cálculos realizados para \mathbf{f} . En otras palabras, si se cuenta con información microscópica de la presión y velocidad, es posible cerrar a los modelos macroscópicos de cantidad de movimiento lineal y energía mecánica. Más aún, al sustituir la ecuación (6.21) en la ecuación (6.25), resulta la siguiente expresión para el término m

$$m = \mu \left(\nabla \langle \mathbf{v} \rangle^\beta|_x \right)^T : \nabla \langle \mathbf{v} \rangle^\beta|_x + \mathbf{f} \cdot \langle \mathbf{v} \rangle^\beta|_x \quad (6.27)$$

donde es claro que una vez obtenido el vector \mathbf{f} , se puede calcular al término m con el conocimiento de la velocidad promedio y la disipación viscosa.

Es pertinente mencionar que la ecuación (6.25) permite calcular la potencia del viento antes, durante y después de la turbina eólica. Para los dominios antes y después de la turbina eólica, la pérdida de potencia del viento es la ganancia en potencia de éste. No obstante, en la superficie de las palas de la turbina eólica se supone continuidad de esfuerzos, de tal forma que la potencia de la

turbina eólica se puede calcular como la potencia del viento. Dicho de otra forma, la ganancia o pérdida de potencia de la turbina eólica está influenciada por la ganancia o pérdida de potencia del viento en el sistema.

En resumen, los modelos resultantes para el transporte de cantidad de movimiento lineal y energía mecánica, contienen términos promedio que potencialmente pueden guardar la información de los efectos producidos por la turbina eólica. Esto último se analiza en la siguiente sección.

6.5 Cálculo de términos promedio

En esta sección se predicen los términos promedio \mathbf{f} y m a partir de información proveniente de simulaciones numéricas a la escala microscópica. Como primera aproximación, se propone que las dimensiones del sistema donde se lleven a cabo las simulaciones sean las obtenidas en el trabajo previo de maestría (Paéz-García, 2015), para el cual se llevó a cabo un análisis detallado de éstas. Es decir, se busca que las dimensiones del sistema sean tales que, se llegue a un punto en el que los perfiles de velocidad ya no se vean afectados al incrementar el tamaño del sistema. Con base en lo anterior, se encontró que las dimensiones del sistema son $l_z = 60l_R$, $l_y = 10l_R$ y $l_x = 10l_R$, donde l_R es la longitud de la pala de la turbina eólica.

Con el fin de aportar resultados generales, se elige resolver la forma adimensional de las ecuaciones de transporte de masa y cantidad de movimiento. Para ello, se proponen las siguientes definiciones adimensionales

$$\mathcal{P}^* = \frac{l_R \mathcal{P}}{\mu v_{en}}; \quad v^* = \frac{v}{v_{en}}; \quad Re = \frac{\rho l_R v_{en}}{\mu}; \quad \nabla^* = l_R \nabla \quad (6.28)$$

En donde se tomó como referencia a la velocidad de entrada, v_e y la longitud de una pala, l_R . Además, en la primera ecuación se usó la siguiente definición de la presión dinámica,

$$\nabla \mathcal{P} = \nabla p - \rho \mathbf{g} \quad (6.29)$$

De esta forma, el modelo adimensional a la escala microscópica es

$$\nabla^* \cdot \mathbf{v}^* = 0 \quad (6.30a)$$

$$Re \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* = -\nabla^* \mathcal{P}^* + \nabla^{*2} \mathbf{v}^* \quad (6.30b)$$

$$\nabla \cdot (v^{*2} \mathbf{v}^*) = -\nabla^* \cdot (\mathcal{P}^* \mathbf{v}^*) + \nabla^{*2} v^{*2} - \nabla^* \mathbf{v}^{*T} : \nabla^* \mathbf{v}^* \quad (6.30c)$$

Tabla 6.1: Valores de tip-speed-ratio (tsr) y números de Reynolds (Re), para determinados valores de velocidades de entrada.

	velocidad de entrada, m/s			
	10-12	11-12	3	14
tsr	3-9♣	4-8♣	26.52♦	5.6♦
Re	10^5	10^6	10^6	10^7

- ♠ Valores correspondientes a una velocidad angular de 25-1500 rpm y un radio de 1.2-25 m.
- ♣ Valores correspondientes a una velocidad angular de 56-300 rpm y un radio de 5-13 m.
- ♦ Valores correspondientes a una velocidad angular de 19 rpm y un radio de 40 m.

El cual está sujeto a las siguientes condiciones de frontera:

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v}_{en}^* \quad \text{en } \mathcal{A}_{en} \quad (6.30d)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}^* = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathcal{A}_s \quad (6.30e)$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}^* = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathcal{A}_T \quad (6.30f)$$

$$\psi(0) = \psi(\ell_x); \quad \boldsymbol{\psi} = \mathcal{P}^*, \mathbf{v}^* \quad \text{en } \mathcal{A}_\ell \quad (6.30g)$$

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathcal{A}_\phi \quad (6.30h)$$

$$\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{v}^* = v_M^* \quad \text{en } \mathcal{A}_M \quad (6.30i)$$

En la última ecuación, se muestra que la velocidad de giro adimensional de la turbina eólica (v_M^*) corresponde al *tip-speed-ratio* (tsr), es decir, es igual a la relación entre la velocidad de giro de la turbina eólica y la velocidad de entrada al sistema. En aras de la claridad, en la tabla 6.1 se muestran los valores asignados al tsr y al número de Reynolds, los cuales están en función de la velocidad de entrada al sistema, la velocidad y el radio de giro de la turbina eólica. Cabe mencionar que los datos proporcionados en la tabla 6.1 se obtuvieron del análisis de *micro turbinas* y las *Dutch Windmill* con un $tsr=[3-9]$ y un número de Reynolds de $Re=10^5$ (Gipe, 2016). Además, se incluyen las *turbinas residenciales* con un $tsr=[4-8]$ y número de Reynolds de $Re=10^6$ y una turbina típica de alta potencia, según lo reportado por Manwell et al. (2009).

El modelo adimensional descrito arriba, así como el modelo promedio deducido en este capítulo son aplicables para cualquier valor del número de Reynolds. No obstante, en este trabajo se resolvieron numéricamente las versiones promediadas en el tiempo de las ecuaciones mencionadas (enfoque RANS) utilizando el software comercial de elemento finito Comsol Multiphysics 5.3. Entre las diferentes alternativas de RANS disponibles en Comsol, se encontró adecuado usar el

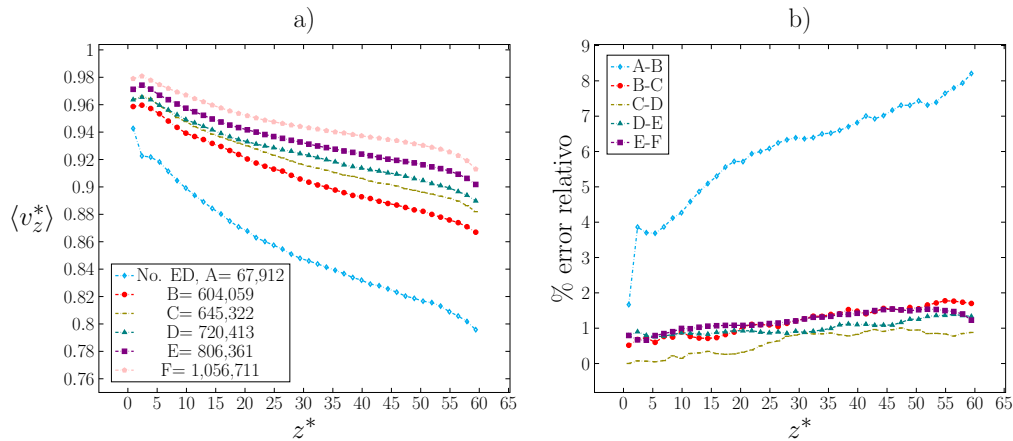


Figura 6.2: a) Cambios espaciales del promedio de la componente z de la velocidad en la dirección z . Cada curva representa el número de elementos de dominio (No. ED) a lo largo del sistema de estudio. b) Porcentaje de error relativo entre las diferentes mallas. Lo anterior se llevó a cabo para un número de Reynolds de 10^6 y un tsr de 5.

método SST, cuya ventaja sobre otras opciones es que utiliza los modelos de $\kappa - \varepsilon$ y de $\kappa - \omega$ dentro y fuera de las capas límite generadas por los obstáculos. Además, para simular el movimiento en estado estable de la turbina eólica se utilizó la paquetería de maquinaria rotatoria incluida en el software. Esta paquetería se basa en la rotación de coordenadas y en la imposición de un falso estado transitorio que, a grandes rasgos, simula el efecto de giro de una turbina. Lo anterior se puede lograr con la rutina de rotor congelado en la paquetería de maquinaria rotatoria. Por lo anterior, todos los resultados que se muestran en los párrafos siguientes corresponden a condiciones de estado estacionario; con ello se escogió el resolvidor PARDISO. Más aún, al llevar a cabo las soluciones numéricas, se realizaron análisis de convergencia de malla para garantizar la independencia de las soluciones con este parámetro numérico. La malla consistió en una combinación de arreglos estructurados y no estructurados con forma de tetraedros. El criterio utilizado para incrementar el número de elementos consistió en refinar la malla, antes, durante y después de la turbina eólica; prestando especial atención en el refinado alrededor de las puntas de la palas. En la figura 6.2 se presentan los cambios espaciales de la componente z de la velocidad del aire para distintos números de elementos de dominio en el sistema de interés (para una condiciones de flujo específicas), así como los porcentajes de error relativo correspondientes. Como puede apreciarse, sólo para la malla A (con el menor número de elementos de dominio), el porcentaje de error relativo supera el 5%. De modo que, cualquier malla superior a 604 mil elementos puede ser usada. Se verificó que para otras condiciones de flujo, esta convergencia se mantiene.

Antes de presentar las predicciones para los términos \mathbf{f} y m , es pertinente conocer el efecto

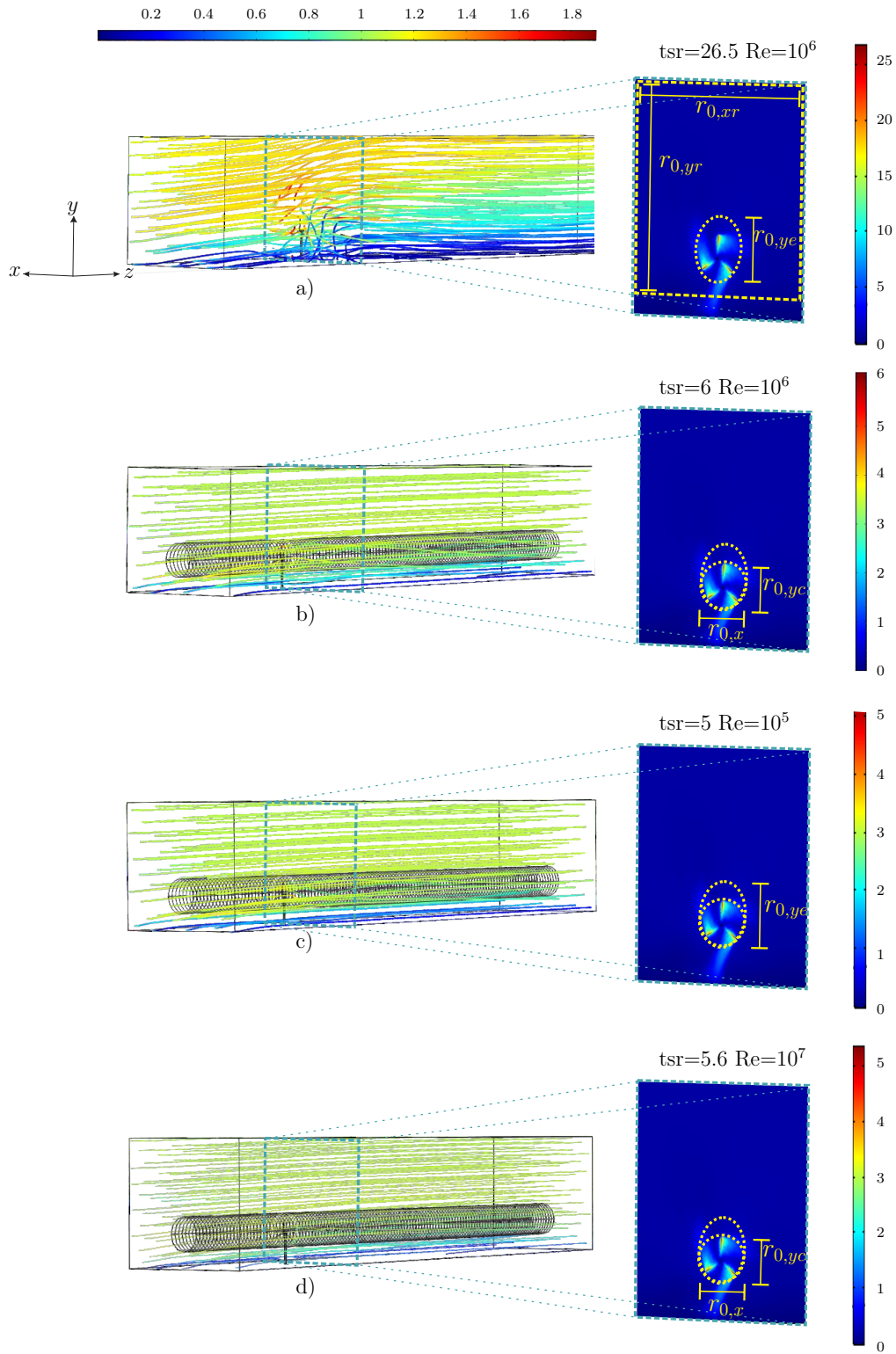


Figura 6.3: Tubos de corriente de la velocidad del aire y corte en la sección transversal del sistema que incluye a la turbina eólica. a) $tsr=26.5$, $Re = 10^6$, $r_{0,ye} = 1.35$, $r_{0,yr} = 8.85$ y $r_{0,xr} = 10$; b) $tsr=6$, $Re = 10^6$, $r_{0,ye} = 1.15$, $r_{0,x} = 1.15$, c) $tsr=5$, $Re = 10^5$, $r_{0,ye} = 1.35$ y d) $tsr=5.6$, $Re = 10^7$, $r_{0,ye} = 1.15$

que tienen el tsr y el número de Reynolds sobre los tubos de corriente de velocidad del viento. En este sentido, en la figura 6.3 se muestran cuatro ejemplos del campo de velocidad para números de Reynolds que van desde 10^5 hasta 10^7 considerando valores de tsr de 5, 5.2, 6 y 26.52. En la figura 6.3a), el tsr es el más alto de todos (para $Re = 10^6$) lo cual se traduce en una clara perturbación de los tubos de corriente detrás de la turbina. El giro simulado de la turbina eólica puede apreciarse en los cortes transversales del sistema, en donde la velocidad máxima del viento se localiza en las puntas de las palas. No obstante, en los tubos de corriente de la figura 6.3a) se puede apreciar la aceleración de la velocidad por encima de la turbina, lo cual contrasta con los otros perfiles. Además, al llevar a cabo un análisis previo cualitativo en función de las capas límite para cada combinación de tsr y Re , se eligieron las regiones de promediado que se dibujan en cada corte de la figura 6.3. En este sentido, se propusieron regiones de promediado de sección transversal como elipses, círculos y rectángulos. Los dos primeros tipos de regiones contienen a las capas límite para todos los valores de tsr , excepto el más alto. Para este último, se eligió una región de sección transversal rectangular. Además, para este caso, también se usó una región de sección elipsoidal para completar los casos de comparación. Estos resultados sirven para apreciar el efecto que tiene la combinación del número de Reynolds y el tsr sobre los perfiles de velocidad alrededor de la turbina eólica.

Dirigiendo la atención a la predicción de los términos \mathbf{f} y m , a partir de las ecuaciones (6.22) y (6.27), se deduce que la información de la velocidad y la presión obtenida de las simulaciones numéricas discutidas arriba puede sustituirse en los operadores de promediado volumétrico y de superficie para calcular los valores de estos términos. De lo anterior se deduce la necesidad por considerar diferentes tamaños y formas de la región de promediado como se discutió arriba. De esta forma, para un tipo de sección transversal, el único grado de libertad remanente para la región de promediado es su altura en la dirección z , la cual se varió desde $4\ell_R$ hasta $14\ell_R$. Cabe mencionar que los centroides de las regiones de promediado están ubicados a lo largo de una línea paralela al eje z que pasa por el centro geométrico de giro de la turbina eólica.

En las figuras 6.4, 6.5, 6.6 y 6.7 se presentan los cambios espaciales de las tres componentes del término \mathbf{f} , el cual se define en forma adimensional como

$$\mathbf{f}^* = \frac{\mathbf{f}\ell_R^2}{\mu v_{en}} \quad (6.31)$$

En aras de la claridad, en seguida se listan las observaciones respecto al comportamiento de las componentes x , y y z de \mathbf{f}^* :

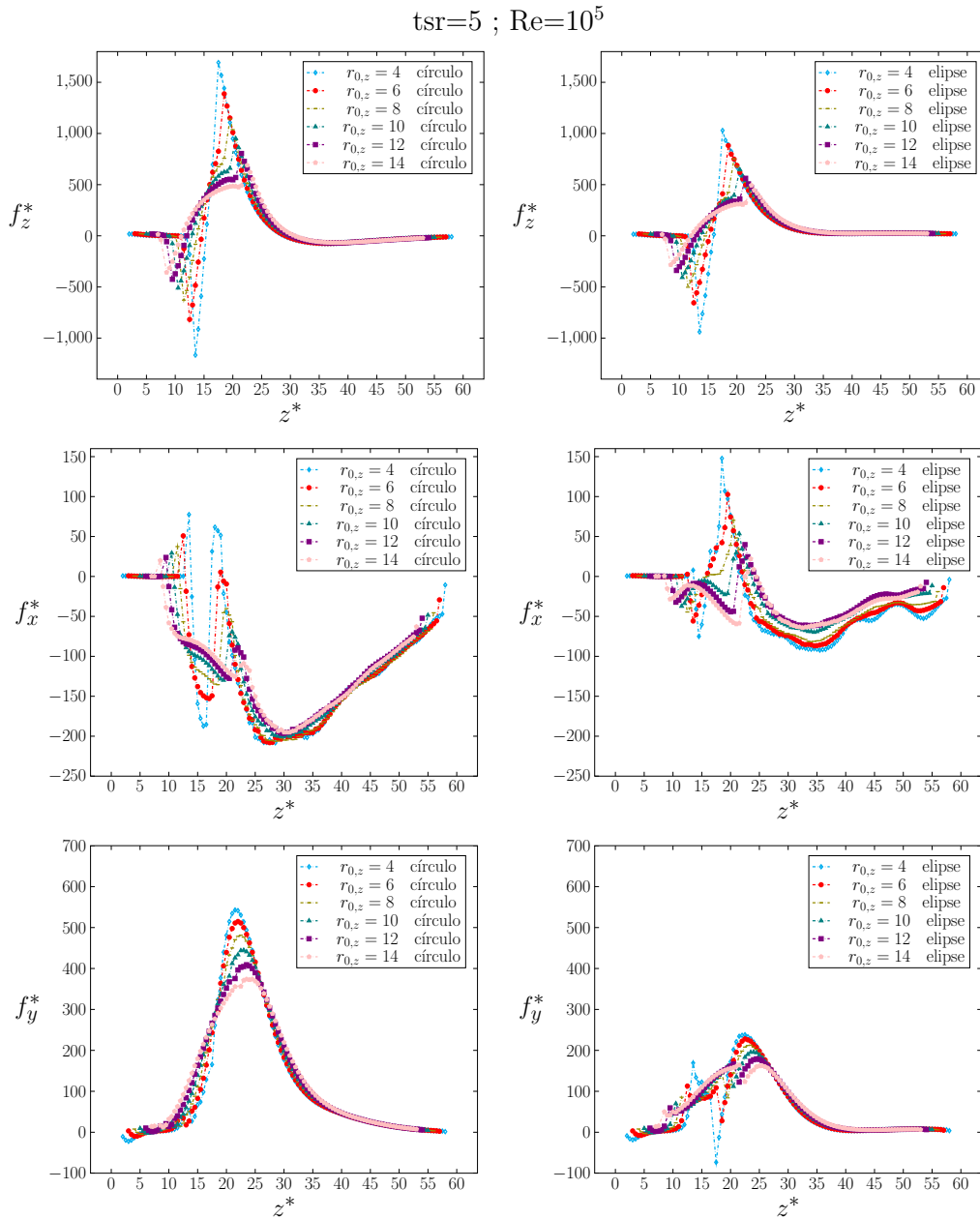


Figura 6.4: Cambios espaciales de las componentes del término promedio \mathbf{f} a lo largo del sistema para valores de tsr igual a 5 y Reynolds de 10^5 , considerando regiones de promediado de diferentes largos y secciones transversales circulares y elipsoidales.

- Para posiciones del centroide ubicadas antes y después de la turbina eólica, se observa que los resultados son convergentes para distintos tamaños de regiones de promediado, excepto para la componente x correspondiente a un tsr de 26.5. Lo cual contrasta con los resultados obtenidos cuando la región de promediado contiene a la turbina eólica. De esta manera, no se puede concluir que exista una región de promediado representativa en todo el sistema. De hecho, [Bear \(2018\)](#) define a una región representativa como un dominio que lleva a resultados

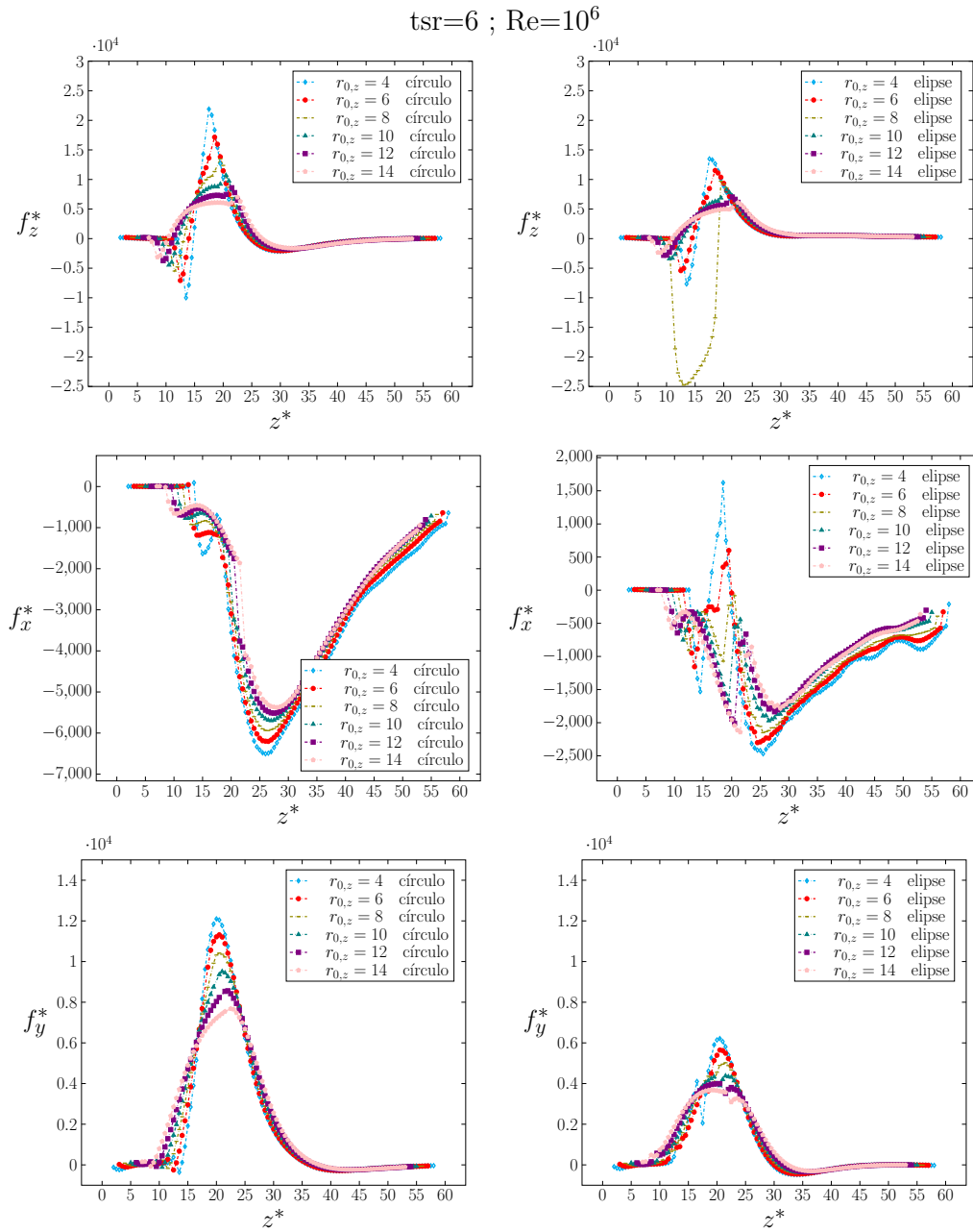


Figura 6.5: Cambios espaciales de las componentes del término promedio \mathbf{f} a lo largo del sistema para valores de tsr igual a 6 y Reynolds de 10^6 , considerando regiones de promediado de diferentes largos y secciones transversales circulares y elipsoidales.

promedio insensibles a cambios en el tamaño de la región.

- Se observa que los rangos de valores de las componentes del término \mathbf{f} se incrementan de manera proporcional al número de Reynolds cuando se usa el mismo tipo de sección transversal.
- Al comparar las mediciones efectuadas con una región de sección transversal circular con las correspondientes a una sección elíptica (para $tsr=5$, $Re = 10^5$; $tsr=6$ y $Re=10^6$ y $tsr=5.2$ y Re

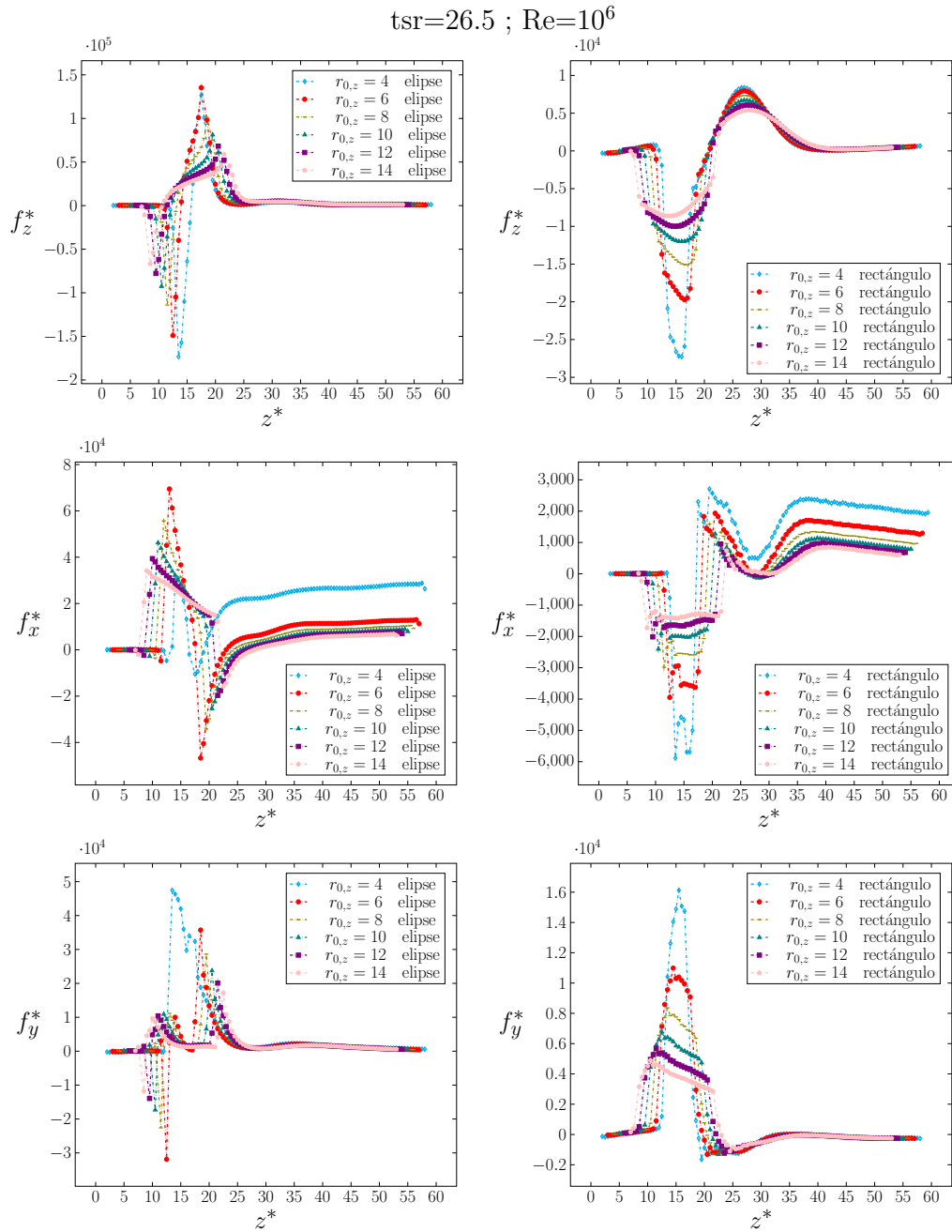


Figura 6.6: Cambios espaciales de las componentes del término promedio \mathbf{f} a lo largo del sistema para valores de tsr igual a 26.5 y Reynolds de 10^6 , considerando regiones de promediado de diferentes largos y de sección transversal elipsoidal y rectangular.

$=10^7$), se observa que los valores de las componentes del vector \mathbf{f} disminuyen en magnitud. Esto se debe a que una sección elipsoidal contiene tanto a la capa límite de la turbina eólica como al flujo no perturbado y esto se traduce en un suavizado de los resultados. Estos comentarios se pueden extender a los resultados para $tsr = 26.5$ y $Re = 10^6$.

- En general, para tsr de 5 y 6 con números de Reynolds 10^5 y 10^6 , respectivamente, las

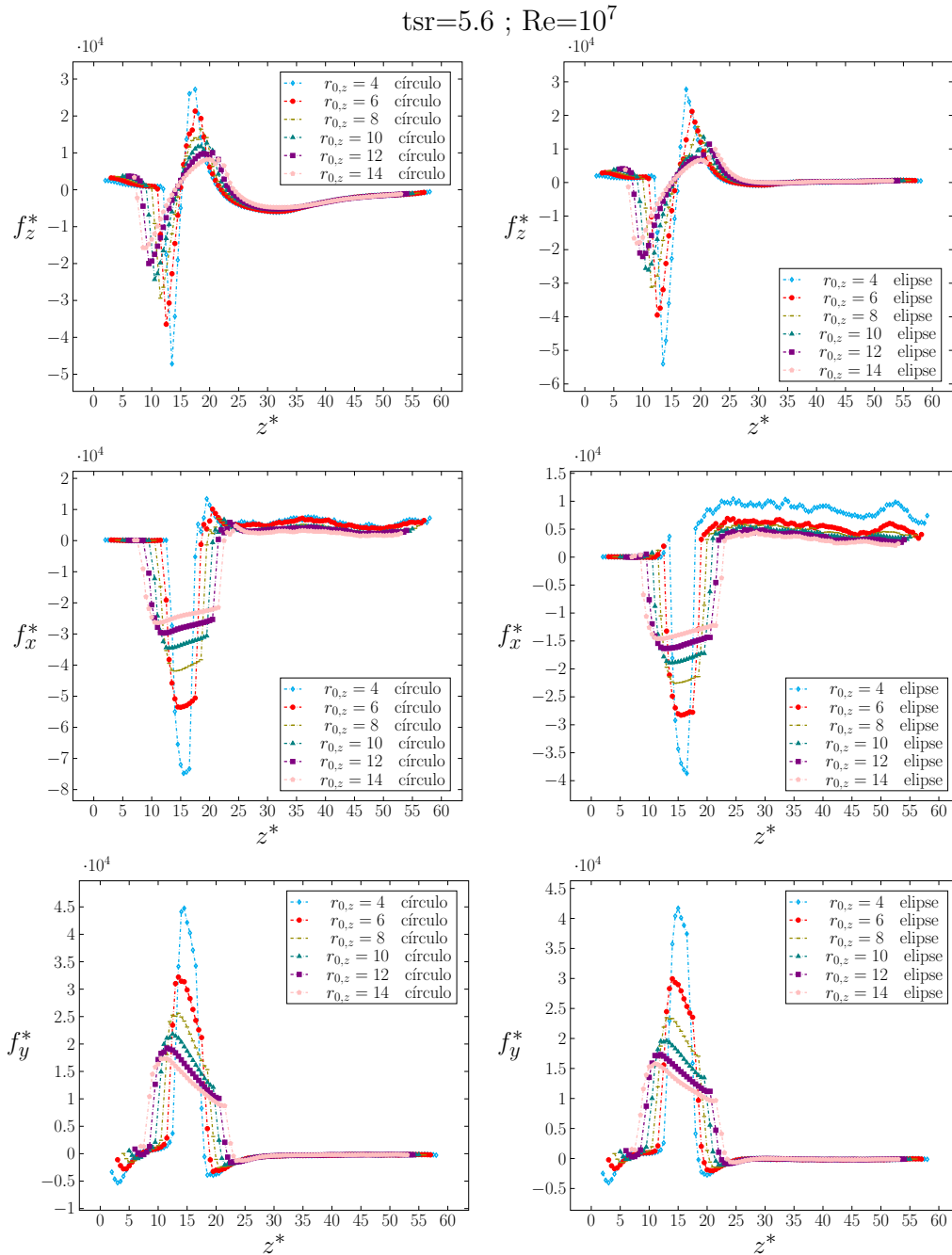


Figura 6.7: Cambios espaciales de las componentes del término promedio \mathbf{f} a lo largo del sistema para valores de tsr igual a 5.6 y Reynolds de 10^7 , considerando regiones de promediado de diferentes largos y de sección transversal circular y elipsoidal.

componentes y y z del término \mathbf{f}^* son mayores que su componente x . Contrario a lo observado para el número de Reynolds 10^7 y para 10^6 con un $tsr = 26.5$ donde las componentes x y y pueden llegar a ser del mismo orden de magnitud.

- De lo anterior se sugiere que las componentes del vector \mathbf{f}^* son capaces de capturar las perturbaciones inducidas por la turbina eólica siendo sensibles a los cambios de tsr , el

número de Reynolds y la geometría de la región de promediado.

Para finalizar esta sección, en la figura 6.8 se presentan las mediciones de los perfiles del término m que se encuentra en el modelo macroscópico de energía mecánica. Los resultados se presentan en términos de su forma adimensional definida como

$$m^* = \frac{m \ell_R^2}{\mu v_{en}^2} \quad (6.32)$$

Al igual que lo reportado para el análisis del vector \mathbf{f} , en la figura 6.8 se reportan los valores de m^* correspondientes a distintas regiones de promediado sujetos a los mismos cambios de tsr y Re . Al analizar los resultados se observa que el comportamiento de m^* corresponde al mostrado para la componente f_z^* en las figuras 6.4-6.7. Esto se explica a partir de la ecuación (6.27), la cual en su forma adimensional es

$$m^* = \left(\nabla^* \langle \mathbf{v}^* \rangle^\beta \right)^T : \nabla^* \langle \mathbf{v}^* \rangle^\beta + \mathbf{f}^* \cdot \langle \mathbf{v}^* \rangle^\beta \quad (6.33)$$

Ya que para los casos estudiados, $\| \langle \mathbf{v}^* \rangle^\beta \| = \mathbf{O}(1)$, los resultados muestran que

$$\left(\nabla^* \langle \mathbf{v}^* \rangle^\beta \right)^T : \nabla^* \langle \mathbf{v}^* \rangle^\beta \ll \mathbf{f}^* \cdot \langle \mathbf{v}^* \rangle^\beta \quad (6.34)$$

Es decir, que las contribuciones por la disipación viscosa son despreciables para los casos analizados aquí. Lo anterior motiva a concluir que es razonable calcular la potencia del viento alrededor de una turbina eólica simplemente llevando a cabo el producto escalar de los vectores \mathbf{f} y $\langle \mathbf{v}^* \rangle^\beta$. Por esta razón, en la siguiente sección la atención se enfoca en el análisis del funcionamiento del modelo promedio macroscópico de cantidad de movimiento lineal sin reparo en el análisis de la ecuación macroscópica de energía mecánica. Cabe aclarar que el único caso en el que se observó que lo anterior no se cumple del todo corresponde a un $tsr=26.5$ y $Re = 10^6$, en donde las considerables contribuciones por el giro de la turbina aumentan la disipación viscosa. Sin embargo, los resultados no se modifican en órdenes de magnitud.

6.6 Funcionamiento del modelo

En esta sección se ilustra el funcionamiento del modelo desarrollado para el transporte de cantidad de movimiento. Cabe aclarar que el uso de este modelo requiere del cálculo de las componentes del vector \mathbf{f} en todas las posiciones del sistema; especialmente en aquellas zonas que se ven perturbadas por la turbina eólica. En este sentido, la ilustración del funcionamiento del

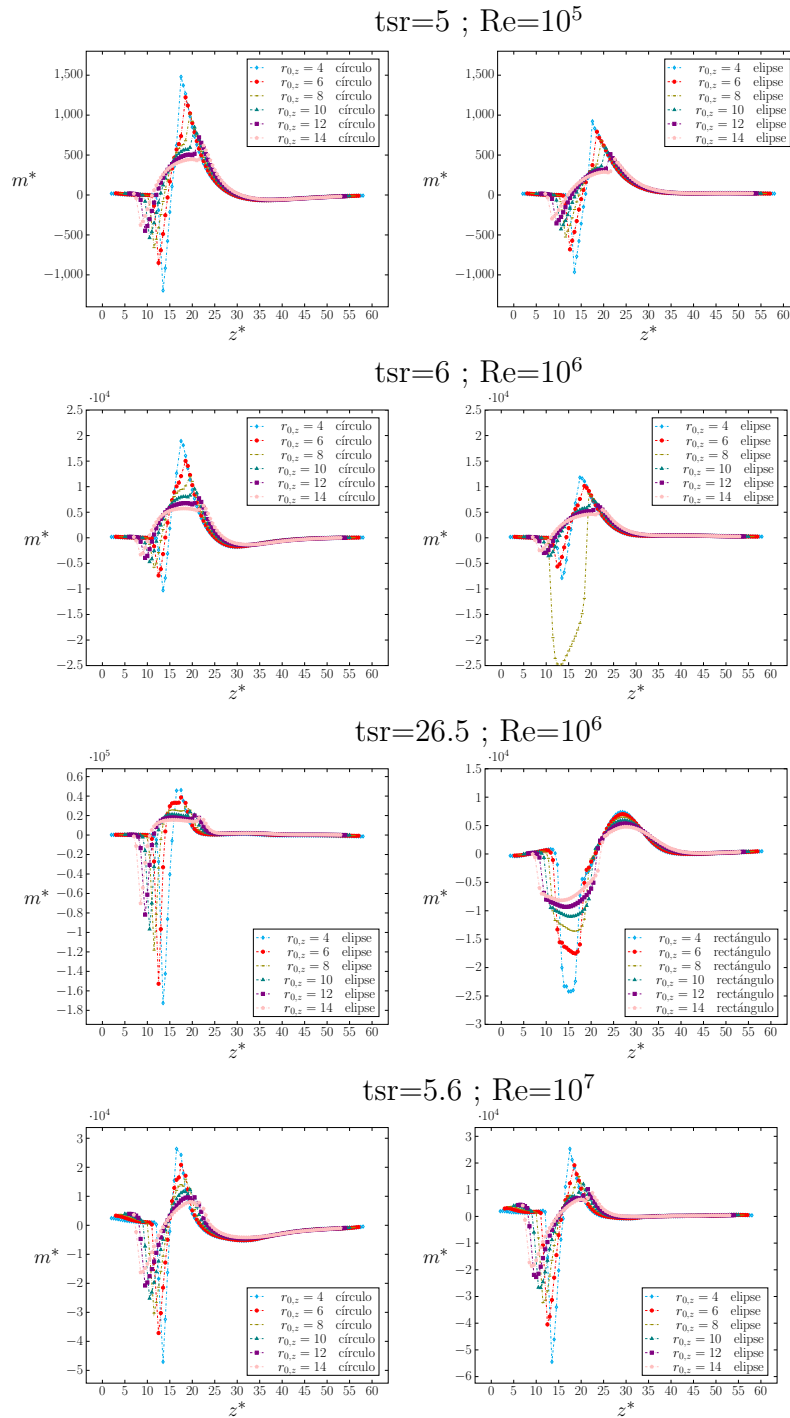


Figura 6.8: Cambios espaciales del término promedio m a lo largo del sistema para diferentes valores de tsr y números de Reynolds, considerando regiones de promediado de diferentes largos y de sección transversal.

modelo se lleva a cabo para el valor máximo de tsr considerado en la sección anterior, como un caso extremo. Como se muestra en la figura 6.3a), para estas condiciones de operación, la influencia de la turbina abarca casi toda la sección transversal del sistema después de la turbina eólica, lo

que motiva a usar la región de sección transversal de forma rectangular ilustrada. Sin embargo, tal elección está en contradicción con las restricciones de escala impuestas en el desarrollo del modelo. No obstante, aún si se usa una región de este tipo que aporte resultados aceptables, es razonable suponer que regiones más pequeñas para tsr más pequeños puedan usarse con confianza. En este sentido, la hipótesis que se propone para este ejemplo ilustrativo es la siguiente: los valores del vector \mathbf{f} resultantes de usar una región de promediado de sección transversal del sistema son representativos de aquellos que se obtendrían al tomar regiones mas pequeñas en todas las posiciones del sistema. Bajo estas condiciones, el dominio de solución del modelo macroscópico sigue siendo tridimensional, aunque no se incluye a la turbina eólica. La desventaja por hacer esta simplificación es que se esperan errores en el modelo macroscópico comparándolo con simulaciones numéricas a la escala microscópica.

Con base en lo anterior, se propone que la sección transversal de la región de promediado sea un rectángulo de dimensiones $10\ell_R \times 8.85\ell_R$, mientras que el largo del prisma se fijó en $6\ell_R$. Para estas dimensiones de la región de promediado, pueden ignorarse los cambios espaciales de la fracción volumétrica ε_β y por tanto los resultados correspondientes a los promedios superficiales son idénticos a los correspondientes a un promedio intrínseco.

De esta forma, los valores de las componentes del vector \mathbf{f} corresponden a las presentadas en la figura 6.6 con sección transversal rectangular. Si bien estos resultados pueden ingresarse de forma discreta al software Comsol Multiphysics, para este análisis se prefirió utilizar una función por secciones para describir las diferentes porciones del comportamiento de los perfiles de las componentes del vector \mathbf{f} . En este sentido, las funciones que se escogieron fueron polinomios de quinto orden. Esta elección no se basó sólo en el elevado valor del coeficiente de correlación (cercano a la unidad), sino a su facilidad de discretización por el software.

En la figura 6.9, se muestra la comparación entre el modelo desarrollado y la solución de las ecuaciones de transporte a la escala microscópica. Los perfiles se presentan sólo para la componente z del vector de velocidad, ya que las otras componentes son al menos dos órdenes de magnitud inferiores. Además, se incluye el cálculo del porcentaje de error relativo entre el modelo macroscópico y el promedio de la velocidad a la escala microscópica. Los valores de error relativo están, en general, por debajo del 10% y se observa que los valores máximos se encuentran después de la turbina eólica. Este comportamiento es de esperarse con base en la hipótesis propuesta para este ejemplo. Por último, cabe mencionar que el análisis presentado aquí puede extenderse para otras formas y tamaños de la región de promediado y condiciones de flujo y operación de la turbina. Sin embargo, este tipo de análisis supera los objetivos del presente trabajo.

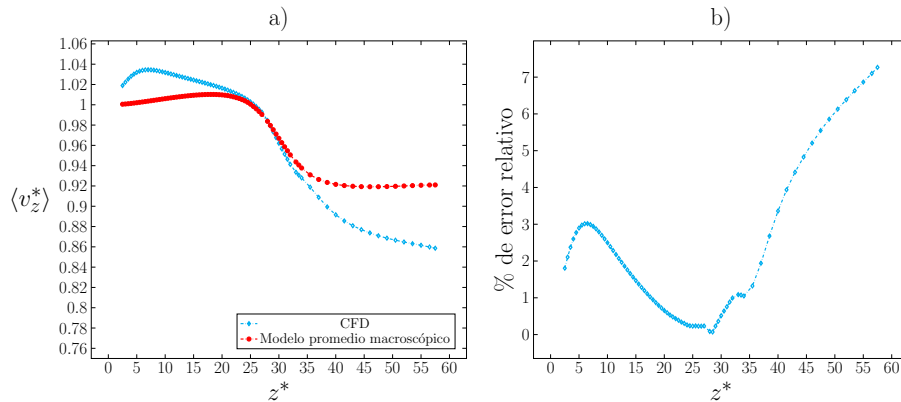


Figura 6.9: Comparación de la velocidad promedio adimensional entre el modelo promedio macroscópico y su contraparte a la escala microscópica, para: a) una región de promediado con prisma como sección transversal; c) una elipse como sección transversal. Las dimensiones de la región de promediado son $r_{0,z} = 5$. b) y d) Porcentajes de error relativo entre el modelo tipo uno y su contraparte microscópica. Los resultados corresponden a $tsr=26.5$ y $Re=10^6$.

6.7 Resumen del capítulo

En este capítulo se desarrollaron modelos promedio macroscópicos por la conservación de masa, cantidad de movimiento y energía mecánica, imponiendo la menor cantidad de suposiciones con el fin de no inducir un escalamiento. De esta forma, fue posible reacomodar la información de los efectos de la turbina eólica en términos promedio en las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento y de energía mecánica.

Para obtener los valores de los términos promedio, se llevaron a cabo simulaciones numéricas a la escala microscópica para distintas condiciones de flujo y de operación de la turbina. Se exploró además el uso de esta información en regiones de promediado de distintas formas y tamaños. Se encontró que una sección transversal elíptica tiende a suavizar los efectos de la turbina. Además, se encontró que el tsr y Re tienen una relación directa para definir el comportamiento de las componentes del vector \mathbf{f} . Además, se encontró que los efectos de la disipación viscosa son despreciables respecto al producto de \mathbf{f} con la velocidad promedio. Esto último lleva a concluir que la potencia del viento alrededor de la turbina puede calcularse a partir de la ecuación promedio macroscópica de cantidad de movimiento.

Finalmente, se ilustró el funcionamiento del modelo macroscópico de cantidad de movimiento para una condición de operación y flujo particular. La comparación con simulaciones numéricas en la escala microscópica mostró un porcentaje de error relativo inferior al 10%. En general, esto último es aceptable; sin embargo, se observó que los valores máximos del error se ubicaron cuando el flujo de aire pasa la turbina eólica. De hecho, es razonable pensar que si se busca disminuir

el error en esta zona, los errores se incrementen en otros sitios como se muestra en el trabajo de Paéz-García (2015). Esto último se debe a la suposición de, sólo calcular los cambios espaciales del término f en una sola tira de centroides a lo largo del sistema y también cabe la posibilidad de que al usar una geometría que cambia con la posición mejoren las predicciones. A pesar de lo anterior, es posible concluir que, del trabajo presentado aquí que es posible reacomodar la información de la turbina en la ecuación de conservación de cantidad de movimiento con la ganancia de no requerir incluir a la turbina en el dominio de solución del modelo, lo cual se traduce en un ahorro en el tiempo de cómputo. De lo anterior y tomando en cuenta las necesidades actuales en el estudio de turbinas eólicas, en el siguiente capítulo los esfuerzos se centran en desarrollar modelos para una mejor predicción de la estela.



7. Condición de frontera para la estela

En la actualidad existen numerosas vertientes en el estudio teórico de turbinas eólicas (ver Capítulo 2), entre las cuales se encuentran aquellas enfocadas en el estudio (analítico y numérico) de la mecánica del viento en la zona ubicada después de la turbina eólica, es decir, la *estela*. En este tipo de estudios se busca proporcionar información acerca de la potencia del viento. Esta información es de utilidad para determinar la configuración óptima de las turbinas eólicas en los parques eólicos (Ahmadi-Baloutaki et al., 2016). Debido a que estos modelos se enfocan en la estela, normalmente la fuente que mueve al problema de valor a la frontera, es la velocidad del viento a la salida de la turbina. Esto último suele representarse, en general, como una constante obtenida de la teoría de Betz-Joukowski; o bien como funciones (Gaussianas, escalonadas, polinomiales, etc.) de la posición radial respecto al eje de la turbina (Lissaman, 1979; Jensen, 1983; Katic et al., 1986; Whale et al., 1996; Segalini & Alfredsson, 2013; Bastankhah & Porté-Agel, 2014).

Debido a que la elección de la función de la velocidad del viento determina el desempeño de los modelos matemáticos en la zona de la estela, es crucial contar con una condición de frontera que sea lo más realista posible (Ainslie, 1988). Esto último constituye el objetivo de este capítulo, el cual está organizado de la siguiente forma. En la sección 7.1 se presenta el planteamiento del problema en donde se define el sistema y se plantean las ecuaciones gobernantes y sus condiciones de frontera para las distintas regiones. En la sección 7.2 se presenta la solución formal del problema lineal exacto mediante funciones de Green. En la sección 7.3 se desarrollan los problemas de cerradura asociados a las variables contenidas en la solución del problema lineal exacto. Finalmente

en las secciones 7.4 y 7.5 se presenta una discusión sobre la condición de frontera desarrollada y un resumen del capítulo, respectivamente.

7.1 Planteamiento del problema

7.1.1 Definición del sistema y de los dominios de estudio

En la figura 7.1 se muestra el sistema que consiste en una turbina eólica y su estela resultante. Al dominio ocupado por el aire en este sistema se le denota como región Ω . Sin embargo, para cumplir el objetivo de este capítulo, es conveniente dividir al sistema en dos regiones, como se muestra en la figura 7.2. La región que contiene a la turbina eólica se denota como región Ω_i y se caracteriza por tener, en su mayoría, líneas de corriente del viento no perturbadas por los efectos de la turbina. La región que no contiene a la turbina eólica se denota como región Ω_o y se caracteriza por considerar los efectos de la turbina eólica, es decir la estela. A continuación se presentan las ecuaciones de transporte de masa y cantidad de movimiento lineal en Ω_i y Ω_o .

7.1.2 Ecuaciones gobernantes en la región Ω

Con base en las suposiciones listadas en el cuadro 6.1.1, las ecuaciones diferenciales que gobiernan la transferencia total de masa y la cantidad de movimiento lineal en la región Ω son

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (7.1a)$$

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (7.1b)$$

Note que en las ecuaciones anteriores no se incluye la ecuación de energía mecánica ya que, en este estudio, no se lleva a cabo un proceso de promediado. Lo anterior se traduce en que, para calcular la potencia del viento en cualquier punto de Ω , basta con tomar el producto punto de la ecuación (7.1b) con el vector de velocidad \mathbf{v} . No obstante, lo anterior escapa de los objetivos de este capítulo. A continuación se dirige la atención a las condiciones de frontera correspondientes. En la superficie de entrada, la velocidad se considera conocida, constante y unidireccional respecto al eje z y además se supone que la presión de entrada, p_{en} , es conocida; mientras que en la superficie de salida la proyección normal del tensor total de esfuerzos es igual a la presión atmosférica. Lo anterior se expresa como

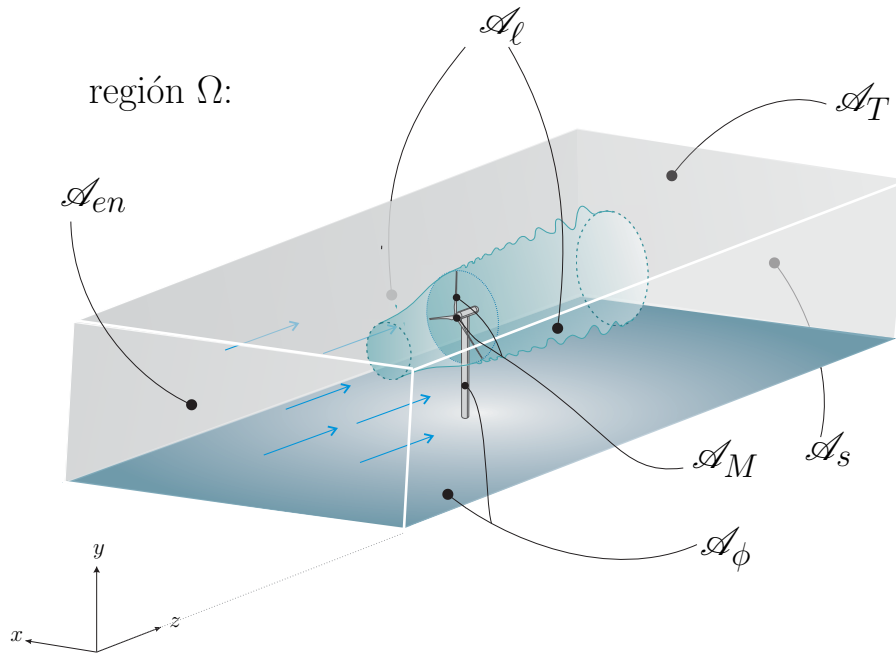


Figura 7.1: Esquema que representa la región Ω y sus superficies de entrada \mathcal{A}_{en} , salida \mathcal{A}_s , laterales \mathcal{A}_l , superior \mathcal{A}_T , fijas \mathcal{A}_ϕ y móviles \mathcal{A}_M .

en \mathcal{A}_{en}

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{en} \quad (7.1c)$$

$$p = p_{en} \quad (7.1d)$$

en \mathcal{A}_s

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{0} \quad (7.1e)$$

En este momento, vale la pena recordar que en este trabajo la presión que se maneja es la presión relativa, por lo que es congruente que el lado derecho de la ecuación (7.1e) esté igualado a cero.

En la superficie superior se supone que los esfuerzos viscosos son despreciables respecto a los esfuerzos de presión (la cual corresponde a la presión atmosférica); esto es razonable si el sistema es lo suficientemente alto. Además, en esta superficie, se supone que la velocidad que la componente normal de la velocidad es nula. De lo anterior, las condiciones de frontera en esta superficie son

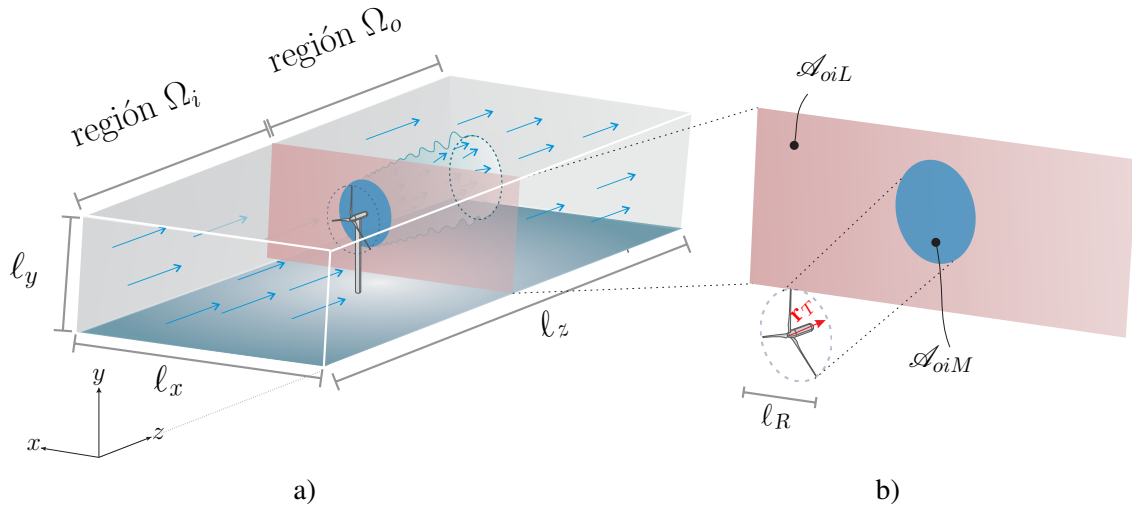


Figura 7.2: a) Esquema del sistema dividido en las regiones Ω_i y Ω_o . b) Proyección del radio de giro de la turbina eólica (\mathcal{A}_{oiM}) sobre la superficie divisoria \mathcal{A}_{oiL} .

en \mathcal{A}_T

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} \quad (7.1f)$$

$$p = 0 \quad (7.1g)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (7.1h)$$

Debido a que el sistema es periódico en el eje- x , es razonable imponer condiciones de periodicidad de la velocidad y la presión en las superficies laterales, esto es

en \mathcal{A}_l

$$\boldsymbol{\psi}(0) = \boldsymbol{\psi}(l_x); \quad \boldsymbol{\psi} = p, \mathbf{v} \quad (7.1i)$$

En las superficies fijas del sistema, esto es, en la góndola, el poste y el suelo, se impone la condición de no deslizamiento, por lo que

en \mathcal{A}_ϕ

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (7.1j)$$

Por último, en las superficies móviles de la región Ω , es decir en las palas y en el rotor de la turbina eólica, se consideran conocidas la velocidad de rotación y la presión, es decir,

en \mathcal{A}_M

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_M \quad (7.1k)$$

$$p = p_M \quad (7.1l)$$

En la ecuación (7.1k), \mathbf{v}_M es la velocidad lineal de giro, la cual puede expresarse en términos del vector de velocidad angular \mathbf{v}_ω y \mathbf{r}_T , el cual es un vector de posición respecto a un punto cualquiera del eje de rotación:

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_\omega \times \mathbf{r}_T \quad (7.2)$$

En los desarrollos que siguen \mathbf{v}_ω se considera un vector constante y puede representarse como:

$$\mathbf{v}_\omega = \lambda_\omega v_\omega \quad (7.3)$$

En este resultado, λ_ω es el vector unitario en la dirección del vector \mathbf{v}_ω , mientras que $v_\omega = \|\mathbf{v}_\omega\|$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación (7.2) se obtiene que

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{r}_M v_\omega \quad (7.4)$$

donde $\mathbf{r}_M = \lambda_\omega \times \mathbf{r}_T$. La expresión dada en la ecuación (7.4) es de utilidad más adelante.

Antes de continuar con la descripción de los problemas de valor a la frontera en las regiones Ω_i y Ω_o , es conveniente listar las suposiciones hechas hasta el momento.

Suposición 7.1.1 — Suposiciones de la región Ω .

1. El sistema es periódico en el eje x .
2. Los flujos de entrada y salida son unidireccionales y están alineados con el eje z .
3. La velocidad en la superficie de entrada es constante.
4. Los esfuerzos viscosos son despreciables respecto a los esfuerzos de presión en la superficie superior \mathcal{A}_T .

7.1.3 Ecuaciones gobernantes en las regiones Ω_i y Ω_o

Como se muestra en la figura 7.2, la región Ω se divide en las regiones Ω_i y Ω_o , las cuales comparten la superficie \mathcal{A}_{oi} . Dado que esta superficie no es una superficie física, es razonable imponer condiciones de continuidad de la velocidad, los esfuerzos inerciales, la presión y el

esfuerzo viscoso en dicha frontera. Cabe notar que la superficie \mathcal{A}_{oi} está dividida en dos porciones, \mathcal{A}_{oiL} y \mathcal{A}_{oiM} , asociadas al flujo no perturbado lejos de la turbina eólica y a la estela de la turbina, respectivamente. Además, en la misma figura se muestran las superficies del sistema así como sus longitudes características. Como puede notarse, la superficie \mathcal{A}_{oiM} se aproxima a la superficie de giro de la turbina eólica. Las condiciones de frontera de continuidad mencionadas anteriormente son válidas en las superficies \mathcal{A}_{oiL} y \mathcal{A}_{oiM} ; sin embargo, en la frontera \mathcal{A}_{oiL} , los esfuerzos inerciales, de presión y viscosos son conocidos e iguales a los de la superficie de entrada del sistema. Más aún, en la frontera \mathcal{A}_{oiL} se impone que la velocidad es la velocidad de entrada de la región Ω . Cabe mencionar que el resto de las condiciones de frontera y ecuaciones diferenciales para las regiones Ω_i y Ω_o son compatibles con las descritas previamente para la región Ω . De esta manera, los problemas de valor a la frontera para las regiones Ω_i y Ω_o son,

En la región Ω_i

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_i = 0 \quad (7.5a)$$

$$\rho \mathbf{v}_i \cdot \nabla \mathbf{v}_i = -\nabla p_i + \mu \nabla^2 \mathbf{v}_i \quad (7.5b)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_{en}, \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{en}, \quad p_i = p_{en} \quad (7.5c)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_{li}, \quad \psi(0) = \psi(\ell_x); \quad \psi = p_i, \mathbf{v}_i \quad (7.5d)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_{Ti}; \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{0}; \quad p_i = 0; \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_i = 0 \quad (7.5e)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_{\phi i}; \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \quad (7.5f)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_M; \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_M, \quad p_i = p_M \quad (7.5g)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_{oiL}; \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_{en} \mathbf{v}_{en}, \quad p_i = p_{en}; \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{0} \quad (7.5h)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_{oiM}; \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_o \mathbf{v}_o, \quad p_i = p_o; \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_o \quad (7.5i)$$

En la región Ω_o

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_o = 0 \quad (7.6a)$$

$$\rho \mathbf{v}_o \cdot \nabla \mathbf{v}_o = -\nabla p_o + \mu \nabla^2 \mathbf{v}_o \quad (7.6b)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_{oiL}; \quad \mathbf{v}_o = \mathbf{v}_{en} \quad (7.6c)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_{oiM}; \quad \mathbf{v}_o = \mathbf{v}_i \quad (7.6d)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_{lo}, \quad \psi(0) = \psi(\ell_x); \quad \psi = p_o, \mathbf{v}_o \quad (7.6e)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_{T_o}; \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_o = \mathbf{0}; \quad p_o = 0; \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_o = 0 \quad (7.6f)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_{\phi_o}; \quad \mathbf{v}_o = \mathbf{0} \quad (7.6g)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_s, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_o = \mathbf{0} \quad (7.6h)$$

En las ecuaciones anteriores se usaron los subíndices i y o en las variables y superficies para identificar las regiones. Además, no se hizo distinción entre la densidad y viscosidad entre las dos regiones ya que se trata del mismo fluido.

Como puede notarse, los problemas definidos en las regiones Ω_i y Ω_o están acoplados mediante las condiciones de frontera dadas en las ecuaciones (7.5i) y (7.6d). En el dominio Ω_i , se impusieron condiciones de continuidad de los esfuerzos (inerciales, de presión y viscosos) en las superficies \mathcal{A}_{oiL} y \mathcal{A}_{oiM} , mientras que en el dominio Ω_o se impusieron condiciones de continuidad de la velocidad. Esta elección de las condiciones de frontera en cada dominio fue arbitraria y, si se cambiara el orden, el resultado final no se vería afectado. El objetivo de este capítulo es conseguir que el problema de valor a la frontera definido en la región Ω_o no dependa de \mathbf{v}_i , por lo que, en adelante, el análisis se centra en la región Ω_i . En los siguientes párrafos, se procede a resolver formalmente el problema en la región Ω_i , para después analizar las diferentes contribuciones de la solución y finalmente sustituir la solución resultante en la ecuación (7.6d). De esta manera, se obtiene una versión del problema en Ω_o que sea independiente de \mathbf{v}_i .

7.2 Solución formal del problema lineal exacto

En su forma actual, el problema definido en las ecuaciones (7.5) es no lineal y, por lo tanto no es posible desarrollar una solución formal del mismo. Esto lleva a tratar con una forma lineal del problema. A diferencia de otras alternativas de linealización que involucran suposiciones, en este trabajo, el problema se linealiza al sustituir la velocidad convectiva en la ecuación (7.5b) por la velocidad \mathbf{v} definida en la región Ω . De esta forma, la versión lineal exacta de esta ecuación es

$$\frac{\rho}{\mu} \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}_i = -\frac{1}{\mu} \nabla p_i + \nabla^2 \mathbf{v}_i \quad (7.7)$$

La cual está acoplada a la ecuación de continuidad (7.5a) y está sujeta a las condiciones de frontera dadas en las ecuaciones (7.5c)-(7.5i). Además, la ecuación anterior se dividió entre la viscosidad del aire por conveniencia para los desarrollos que se presentan más adelante. Este problema tiene

las siguientes fuentes: la velocidad de entrada, \mathbf{v}_{en} , la velocidad de rotación, \mathbf{v}_{rot} , así como las contribuciones inerciales, de presión y de esfuerzos viscosos en las superficies \mathcal{A}_{oiM} y \mathcal{A}_{oiL} . Para resolver formalmente este problema, una opción es usar formulaciones integrales basadas en funciones de Green como lo sugieren Wood & Valdés-Parada (2013). Por lo tanto, el siguiente paso en el análisis consiste en formular el problema adjunto de valor a la frontera para las funciones de Green asociadas (Haberman, 2012),

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = \mathbf{0} \quad (7.8a)$$

$$-\frac{\rho}{\mu} \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{G} = -\frac{1}{\mu} \nabla \mathbf{g} + \nabla^2 \mathbf{G} + \mathbf{l} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (7.8b)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_{en}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad (7.8c)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_{li}, \quad \psi(0) = \psi(\ell_x); \quad \psi = \mathbf{g}, \mathbf{G} \quad (7.8d)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_{Ti}; \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_G = \mathbf{0}; \quad \mathbf{g} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{0} \quad (7.8e)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_{\phi i}; \quad \mathbf{G} = \mathbf{0} \quad (7.8f)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_M; \quad \mathbf{G} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad (7.8g)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_{oiM} \text{ y } \mathcal{A}_{oiL}; \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \mathbf{G} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{g} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_G = \mathbf{0} \quad (7.8h)$$

donde \mathbf{G} y \mathbf{g} son las funciones de Green correspondientes a la velocidad y la presión, respectivamente. Como puede notarse, el problema anterior sólo contiene una fuente, la cual se localiza en el lado derecho de la ecuación (7.8b), en donde $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ es la función delta de Dirac concentrada en \mathbf{r}_0 ¹.

Con el fin de encontrar la solución formal del problema, se multiplica a la ecuación de continuidad (7.5a) por la función de Green \mathbf{g} dividida entre la viscosidad y a la ecuación resultante se le suma el producto punto de \mathbf{G}^T por la ecuación de conservación de cantidad de movimiento (7.7). El resultado puede expresarse como sigue

$$\mathbf{0} = \frac{\mathbf{g}}{\mu} (\nabla \cdot \mathbf{v}_i) + \mathbf{G}^T \cdot \left(-\frac{\rho}{\mu} \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}_i - \frac{1}{\mu} \nabla p_i + \nabla^2 \mathbf{v}_i \right) \quad (7.9)$$

¹Los vectores de posición \mathbf{r} y \mathbf{r}_0 tienen el mismo dominio y localizan puntos en la fase fluida en la región Ω_i respecto a un sistema coordenado fijo y arbitrario.

Integrando la ecuación anterior en la región Ω_i da lugar a

$$\mathbf{0} = \underbrace{\frac{1}{\mu} \int_{\Omega_i} \mathbf{g}(\nabla \cdot \mathbf{v}_i) dV}_{T1} - \underbrace{\frac{\rho}{\mu} \int_{\Omega_i} \mathbf{G}^T \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}_i) dV}_{T2} - \underbrace{\frac{1}{\mu} \int_{\Omega_i} \mathbf{G}^T \cdot \nabla p_i dV}_{T3} + \underbrace{\int_{\Omega_i} \mathbf{G}^T \cdot \nabla^2 \mathbf{v}_i dV}_{T4} \quad (7.10)$$

En donde $T1$ representa la conservación del transporte de masa y puede descomponerse en

$$T1 = \frac{1}{\mu} \int_{\Omega_i} \nabla \cdot (\mathbf{v}_i \mathbf{g}) dV - \frac{1}{\mu} \int_{\Omega_i} \mathbf{v}_i \cdot \nabla \mathbf{g} dV \quad (7.11)$$

Aplicando el teorema de la divergencia al primer término y tomando en cuenta las condiciones de frontera para \mathbf{v} y \mathbf{g} , se obtiene el siguiente resultado

$$\begin{aligned} T1 = & \frac{1}{\mu} \int_{\mathcal{A}_{en}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}_i \mathbf{g})}_{\mathbf{g}=\mathbf{0}} dA + \frac{1}{\mu} \int_{\mathcal{A}_{\ell_i}(x=0)} \underbrace{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}_i \mathbf{g})}_{-\mathbf{v}_\ell \mathbf{g}} dA + \frac{1}{\mu} \int_{\mathcal{A}_{\ell_i}(x=\ell_x)} \underbrace{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}_i \mathbf{g})}_{\mathbf{v}_\ell \mathbf{g}} dA + \frac{1}{\mu} \int_{\mathcal{A}_{Ti}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}_i \mathbf{g})}_{\mathbf{g}=\mathbf{0}} dA \\ & + \frac{1}{\mu} \int_{\mathcal{A}_{\phi_i}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}_i \mathbf{g})}_{\mathbf{v}=\mathbf{0}} dA + \frac{1}{\mu} \int_{\mathcal{A}_M} \underbrace{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}_i \mathbf{g})}_{\mathbf{g}=\mathbf{0}} dA + \frac{1}{\mu} \int_{\mathcal{A}_{oi}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}_i \mathbf{g})}_{\mathbf{g}=\mathbf{0}} dA - \frac{1}{\mu} \int_{\Omega_i} \mathbf{v}_i \cdot \nabla \mathbf{g} dV \end{aligned} \quad (7.12)$$

Dado que la integral en las superficies \mathcal{A}_{oiL} y \mathcal{A}_{oiM} es cero, por conveniencia se introdujo la definición $\mathcal{A}_{oi} = \mathcal{A}_{oiL} + \mathcal{A}_{oiM}$. Dirigiendo la atención a $T2$ en la ecuación (7.10), el cual representa a los esfuerzos inerciales, se puede descomponer en los siguientes tres términos

$$T2 = -\frac{\rho}{\mu} \int_{\Omega_i} \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{G}) dV + \frac{\rho}{\mu} \int_{\Omega_i} \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{v})}_{0} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{G} dV + \frac{\rho}{\mu} \int_{\Omega_i} [\mathbf{v}_i \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{G})] dV \quad (7.13)$$

donde se tomó en cuenta la naturaleza solenoidal del vector \mathbf{v} . Aplicando el teorema de la divergencia al primer término de la ecuación anterior y tomando en cuenta las condiciones de frontera, se obtiene

$$\begin{aligned} T2 = & -\frac{\rho}{\mu} \int_{\mathcal{A}_{en}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{G})}_{\mathbf{G}=\mathbf{0}} dA - \frac{\rho}{\mu} \int_{\mathcal{A}_{\ell_i}(x=0)} \underbrace{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{G})}_{-\mathbf{v}_\ell \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{G}} dA - \frac{\rho}{\mu} \int_{\mathcal{A}_{\ell_i}(x=\ell_x)} \underbrace{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{G})}_{\mathbf{v}_\ell \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{G}} dA \\ & - \frac{\rho}{\mu} \int_{\mathcal{A}_{Ti}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{G})}_{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}=\mathbf{0}} dA - \frac{\rho}{\mu} \int_{\mathcal{A}_{\phi_i}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{G})}_{\mathbf{v}=\mathbf{0}} dA - \frac{\rho}{\mu} \int_{\mathcal{A}_M} \underbrace{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{G})}_{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}=\mathbf{0}} dA - \frac{\rho}{\mu} \int_{\mathcal{A}_{oiM}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{G})}_{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v}_o \cdot \mathbf{G})} dA \\ & - \frac{\rho}{\mu} \int_{\mathcal{A}_{oiL}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{G})}_{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}_{en} \mathbf{v}_{en} \cdot \mathbf{G})} dA + \frac{\rho}{\mu} \int_{\Omega_i} [\mathbf{v}_i \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{G})] dV \end{aligned} \quad (7.14)$$

Como puede notarse, las contribuciones remanentes se deben a las contribuciones inerciales en la frontera \mathcal{A}_{oi} y a la integral volumétrica en Ω_i .

Por su parte, $T3$ se expresa como

$$T3 = \int_{\Omega_i} -p_i \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{G})}_0 dV + \int_{\Omega_i} \nabla \cdot (p_i \mathbf{G}) dV \quad (7.15)$$

donde se tomó en cuenta la naturaleza solenoidal del tensor \mathbf{G} . Usando el teorema de la divergencia en el segundo término, se tiene que

$$\begin{aligned} T3 = & \int_{\mathcal{A}_{en}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot (p_i \mathbf{G})}_{\mathbf{G}=0} dA + \int_{\mathcal{A}_{\ell_i}(x=0)} \underbrace{\mathbf{n} \cdot (p_i \mathbf{G})}_{\mathbf{n} \cdot (p_i \mathbf{G})} dA + \int_{\mathcal{A}_{\ell_i}(x=\ell_x)} \underbrace{\mathbf{n} \cdot (p_i \mathbf{G})}_{\mathbf{n} \cdot (p_i \mathbf{G})} dA \\ & + \int_{\mathcal{A}_{T_i}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot (p_i \mathbf{G})}_{\mathbf{n} \cdot \mathbf{G}=0} dA + \int_{\mathcal{A}_{\phi_i}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot (p_i \mathbf{G})}_{\mathbf{G}=0} dA + \int_{\mathcal{A}_M} \underbrace{\mathbf{n} \cdot (p_i \mathbf{G})}_{\mathbf{n} \cdot \mathbf{G}=0} dA \\ & + \int_{\mathcal{A}_{oiM}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot (p_i \mathbf{G})}_{\mathbf{n} \cdot (p_o \mathbf{G})} dA + \int_{\mathcal{A}_{oiL}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot (p_i \mathbf{G})}_{\mathbf{n} \cdot (p_{en} \mathbf{G})} dA \end{aligned} \quad (7.16)$$

En este caso las contribuciones corresponden a los términos asociados con la presión en la superficie \mathcal{A}_{oi} . Por último, $T4$ puede descomponerse de la siguiente forma

$$T4 = \int_{\Omega_i} \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{G} - \nabla \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{v}_i) dV + \int_{\Omega_i} \mathbf{v}_i \cdot \nabla^2 \mathbf{G} dV \quad (7.17)$$

El resultado de aplicar el teorema de la divergencia al primer término de la ecuación anterior, y tomando en cuenta las condiciones de frontera correspondientes, se obtiene

$$\begin{aligned} T4 = & \int_{\mathcal{A}_e} \mathbf{n} \cdot \left(\underbrace{\nabla \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{G}}_{\mathbf{G}=0} - \underbrace{\nabla \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{v}_i}_{\nabla \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{v}_{en}} \right) dA + \int_{\mathcal{A}_{\ell_i}(x=0)} \underbrace{\mathbf{n} \cdot (\nabla \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{G} - \nabla \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{v}_i)}_{\mathbf{n} \cdot (\nabla \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{G} - \nabla \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{v}_i)} dA \\ & + \int_{\mathcal{A}_{\ell_i}(x=\ell_x)} \underbrace{\mathbf{n} \cdot (\nabla \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{G} - \nabla \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{v}_i)}_{\mathbf{n} \cdot (\nabla \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{G} - \nabla \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{v}_i)} dA + \int_{\mathcal{A}_{T_i}} \mathbf{n} \cdot \left(\underbrace{\nabla \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{G}}_{\nabla \mathbf{v}_i=0} - \underbrace{\nabla \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{v}_i}_{\nabla \mathbf{G}^T=0} \right) dA \\ & + \int_{\mathcal{A}_{\phi_i}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot (\nabla \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{G} - \nabla \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{v}_i)}_{\mathbf{G}=0, \mathbf{v}_i=0} dA + \int_{\mathcal{A}_M} \mathbf{n} \cdot \left(\underbrace{\nabla \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{G}}_{\mathbf{G}=0} - \underbrace{\nabla \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{v}_i}_{\nabla \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{v}_M} \right) dA \end{aligned}$$

$$+ \int_{\mathcal{A}_{oiM}} \mathbf{n} \cdot \left(\underbrace{\nabla \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{G}}_{\nabla \mathbf{v}_o \cdot \mathbf{G}} - \underbrace{\nabla \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{v}_i}_{\nabla \mathbf{G}^T = 0} \right) dA + \int_{\mathcal{A}_{oiL}} \mathbf{n} \cdot \left(\underbrace{\nabla \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{G}}_{\nabla \mathbf{v}_{en} = 0} - \underbrace{\nabla \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{v}_i}_{\nabla \mathbf{G}^T = 0} \right) dA + \int_{\Omega_i} \mathbf{v}_i \cdot \nabla^2 \mathbf{G} dV \quad (7.18)$$

De esta última ecuación las integrales que permanecen están referidas a las contribuciones por las superficies \mathcal{A}_{en} , \mathcal{A}_M , \mathcal{A}_{oiM} y Ω_i . Finalmente, sustituyendo los resultados de T1-T4 en la ecuación (7.10) se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} \mathbf{v}_i \cdot \left[\frac{\rho}{\mu} (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{G}) - \frac{1}{\mu} \nabla \mathbf{g} + \nabla^2 \mathbf{G} \right] dV &= \left(\int_{\mathcal{A}_{en}} \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{G}^T dA \right) \cdot \mathbf{v}_{en} \\ + \left[\int_{\mathcal{A}_M} \mathbf{n} \cdot (\nabla \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{r}_M) dA \right] v_\omega &+ \int_{\mathcal{A}_{oiM}} \mathbf{n} \cdot \left(\frac{\rho}{\mu} \mathbf{v} \mathbf{v}_o + \frac{1}{\mu} p_o \mathbf{l} - \nabla \mathbf{v}_o \right) \cdot \mathbf{G} dA \\ &+ \mathbf{n} \cdot \left(\frac{\rho}{\mu} \mathbf{v}_{en} \mathbf{v}_{en} + \frac{1}{\mu} p_{en} \mathbf{l} \right) \cdot \left(\int_{\mathcal{A}_{oiL}} \mathbf{G} dA \right) \end{aligned} \quad (7.19)$$

Note que en la ecuación (7.19) se supuso que la velocidad en la superficie de entrada es constante y que en la superficie \mathcal{A}_{oiL} , los esfuerzos (inerciales y de presión) son constantes; así mismo, el vector \mathbf{n} es constante en dicha superficie ya que éste está referido a la dirección del viento \mathbf{e}_z . Además, respecto a la frontera \mathcal{A}_M , se usó la relación dada en la ecuación (7.4).

En el lado derecho de la ecuación (7.19), se puede apreciar que los términos asociados a las superficies \mathcal{A}_{en} , \mathcal{A}_M y \mathcal{A}_{oiL} tienen en común que las respectivas fuentes han sido aisladas de las integrales en cada superficie. No obstante, este no es el caso en la fuente en el término de la integral en \mathcal{A}_{oiM} . Por lo que se lleva a cabo una expansión en series de Taylor de la fuente en \mathcal{A}_{oiM} de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho}{\mu} \mathbf{v} \mathbf{v}_o + \frac{1}{\mu} p_o \mathbf{l} - \nabla \mathbf{v}_o \right) \Big|_{\mathcal{A}_{oiM}} (\mathbf{r}) &= \left(\frac{\rho}{\mu} \mathbf{v} \mathbf{v}_o + \frac{1}{\mu} p_o \mathbf{l} - \nabla \mathbf{v}_o \right) \Big|_{\mathcal{A}_{oiM}} (\mathbf{x}) \\ &+ (\mathbf{r} - \mathbf{x}) \cdot \nabla \left(\frac{\rho}{\mu} \mathbf{v} \mathbf{v}_o + \frac{1}{\mu} p_o \mathbf{l} - \nabla \mathbf{v}_o \right) \Big|_{\mathcal{A}_{oiM}} (\mathbf{x}) + \dots \end{aligned} \quad (7.20)$$

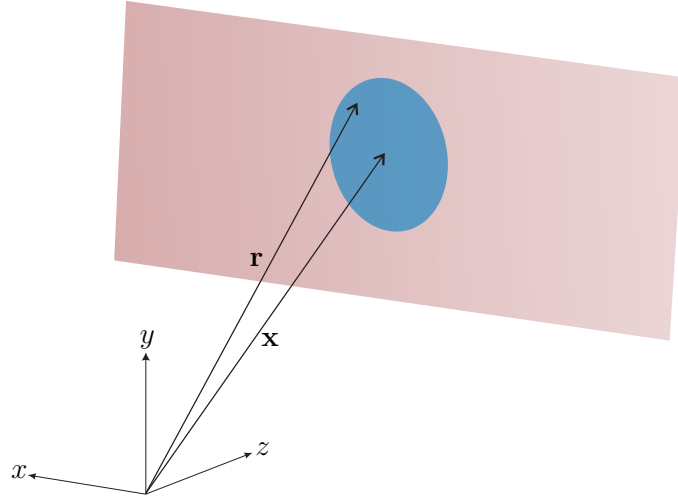


Figura 7.3: Vectores de posición \mathbf{x} y \mathbf{r} que localizan el centroide y cualquier punto en \mathcal{A}_{oiM} , respectivamente.

Como se muestra en la figura 7.3, el vector \mathbf{r} localiza cualquier punto en la superficie \mathcal{A}_{oiM} , además el vector \mathbf{x} localiza el centroide de dicha superficie. Para poder avanzar, es conveniente llevar a cabo un análisis de órdenes de magnitud del lado derecho de la ecuación (7.20) como sigue

$$\left(\frac{\rho}{\mu} \mathbf{v} \mathbf{v}_o + \frac{1}{\mu} p_o \mathbf{I} - \nabla \mathbf{v}_o \right) \Big|_{\mathcal{A}_{oiM}} (\mathbf{x}) = \mathbf{O} \left(\frac{\rho}{\mu} \mathbf{v} \mathbf{v}_o + \frac{1}{\mu} p_o \mathbf{I} - \nabla \mathbf{v}_o \right) \quad (7.21a)$$

$$(\mathbf{r} - \mathbf{x}) \cdot \nabla \left(\frac{\rho}{\mu} \mathbf{v} \mathbf{v}_o + \frac{1}{\mu} p_o \mathbf{I} - \nabla \mathbf{v}_o \right) \Big|_{\mathcal{A}_{oiM}} (\mathbf{x}) = \mathbf{O} \left[\frac{\ell_R}{\ell_z} \left(\frac{\rho}{\mu} \mathbf{v} \mathbf{v}_o + \frac{1}{\mu} p_o \mathbf{I} - \nabla \mathbf{v}_o \right) \right] \quad (7.21b)$$

en donde sólo se incluyen los estimados de los primeros dos términos de la serie, ya que el orden de magnitud del resto de la serie es, a lo más, del mismo orden de magnitud que el segundo término. En el estimado presentado en la ecuación (7.21b), se supuso que los cambios característicos de los vectores de posición \mathbf{r} y \mathbf{x} ocurren en una longitud ℓ_R , que normalmente está asociada al radio de giro de una turbina eólica (ver figura 7.2). Además se supuso que la longitud característica de los cambios espaciales de los esfuerzos (inerciales, de presión y viscosos) es ℓ_z , la cual define el tamaño del sistema en la dirección z . Dadas las características del sistema, se sabe que la longitud ℓ_z es mucho mayor que la longitud ℓ_R , de modo que la serie dada en la ecuación (7.20) puede truncarse a partir del segundo término, dando lugar a lo siguiente

$$\left(\frac{\rho}{\mu} \mathbf{v} \mathbf{v}_o + \frac{1}{\mu} p_o \mathbf{I} - \nabla \mathbf{v}_o \right) \Big|_{\mathcal{A}_{oiM}} (\mathbf{r}) = \left(\frac{\rho}{\mu} \mathbf{v} \mathbf{v}_o + \frac{1}{\mu} p_o \mathbf{I} - \nabla \mathbf{v}_o \right) \Big|_{\mathcal{A}_{oiM}} (\mathbf{x}) \quad (7.22)$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (7.19) y usando la ecuación (7.8b), el término entre corchetes en la integral en el lado izquierdo de la ecuación (7.19) es igual a $-\mathbf{I} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$, por lo

tanto, el resultado es el siguiente

$$\begin{aligned}
-\mathbf{v}_i = & \underbrace{\left(\int_{\mathcal{A}_e} \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{G}^T dA \right) \cdot \mathbf{v}_{en}}_{\text{contribución de la velocidad de entrada}} + \underbrace{\left[\int_{\mathcal{A}_M} \mathbf{n} \cdot (\nabla \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{r}_M) dA \right]}_{\text{contribución de la velocidad de giro de la turbina eólica}} v_\omega \\
& + \underbrace{\left(\int_{\mathcal{A}_{oiM}} \mathbf{G}^T dA \right) \cdot \left[\mathbf{n} \cdot \left(\frac{\rho}{\mu} \mathbf{v} \mathbf{v}_o + \frac{1}{\mu} p_o \mathbf{I} - \nabla \mathbf{v}_o \right) \right]_{\mathcal{A}_{oiM}} (\mathbf{x})}_{\text{contribución de los esfuerzos en } \mathcal{A}_{oiM}} \\
& + \underbrace{\left(\int_{\mathcal{A}_{oiL}} \mathbf{G}^T dA \right) \cdot \left[\mathbf{n} \cdot \left(\frac{\rho}{\mu} \mathbf{v}_{en} \mathbf{v}_{en} + \frac{1}{\mu} p_{en} \mathbf{I} \right) \right]}_{\text{contribución de los esfuerzos en } \mathcal{A}_{oiL}} \quad (7.23)
\end{aligned}$$

Para presentar esta última ecuación de una manera más compacta, se proponen las siguientes definiciones de variables de cerradura

$$-\mathbf{A} = \int_{\mathcal{A}_e} \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{G}^T dA \quad (7.24a)$$

$$-\mathbf{b} = \int_{\mathcal{A}_M} \mathbf{n} \cdot (\nabla \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{r}_M) dA \quad (7.24b)$$

$$-\mathbf{C} = \frac{1}{\mu} \int_{\mathcal{A}_{oiM}} \mathbf{G}^T dA \quad (7.24c)$$

$$-\mathbf{D} = \frac{1}{\mu} \int_{\mathcal{A}_{oiL}} \mathbf{G}^T dA \quad (7.24d)$$

De tal forma que la ecuación (7.23) se puede escribir como

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_{en} + \mathbf{b} v_\omega + \mathbf{C} \cdot \left[\mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}_o + p_o \mathbf{I} - \mu \nabla \mathbf{v}_o) \right]_{\mathcal{A}_{oiM}} (\mathbf{r}) + \mathbf{D} \cdot \left[\mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{v}_{en} \mathbf{v}_{en} + p_{en} \mathbf{I}) \right] \quad (7.25)$$

en donde se tomó en cuenta la expresión dada por la ecuación (7.22), con la cual se tiene que los esfuerzos evaluados en el centroide de \mathcal{A}_{oiM} son iguales a los evaluados en cada punto de dicha superficie. Sustituyendo esta expresión en la ecuación diferencial del problema lineal exacto (7.7), se obtiene, después de algunos pasos algebraicos, la siguiente expresión para la presión en la región Ω_i

$$p_i = \mu \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}_{en} + \mu \mathbf{b} v_\omega + \mu \mathbf{c} \cdot \left[\mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}_o + p_o \mathbf{I} - \mu \nabla \mathbf{v}_o) \right]_{\mathcal{A}_{oiM}} (\mathbf{r}) + \mu \mathbf{d} \cdot \left[\mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{v}_{en} \mathbf{v}_{en} + p_{en} \mathbf{I}) \right] \quad (7.26)$$

Con estas dos últimas ecuaciones se ha cumplido el objetivo de la sección, ya que se han obtenido soluciones formales para la velocidad y la presión en la región Ω_i . Antes de sustituir la ecuación (7.25) en la condición de frontera (7.6d) para así cerrar el modelo en Ω_o , es pertinente antes analizar las contribuciones de cada uno de los términos de la ecuación (7.25). Esto último se lleva a cabo en la siguiente sección.

7.3 Problemas de las variables de cerradura

Las ecuaciones (7.25) y (7.26) de la sección anterior están escritas en términos de variables de cerradura cuyo valor proviene de la solución del problema de las funciones de Green, dado en las ecuaciones (7.8). No obstante, la solución de este problema se dificulta debido a que la ecuación diferencial (7.8b) presenta una discontinuidad ya que contiene el término de la delta de Dirac. Esto último motiva a encontrar una manera alternativa para hallar la información de las variables de cerradura. De esta forma, la solución dada en las ecuaciones (7.25) y (7.26) se sustituye en el problema lineal exacto para generar distintos problemas de valor a la frontera para cada variable de cerradura. Con estos problemas a la mano es posible estimar la importancia de cada término de la ecuación (7.25). Los detalles de estos desarrollos se presentan a continuación.

Sustituyendo las ecuaciones (7.25) y (7.26) en el problema lineal exacto, se obtienen los siguientes problemas de cerradura

Problema de cerradura para \mathbf{A}

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (7.27a)$$

$$\frac{\rho}{\mu} \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{A} = -\nabla \mathbf{a} + \nabla^2 \mathbf{A} \quad (7.27b)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_{en}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{l} \quad (7.27c)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_{li}, \quad \psi(0) = \psi(\ell_x); \quad \psi = \mathbf{a}, \mathbf{A} \quad (7.27d)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_{Ti}; \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_A = \mathbf{0}; \quad \mathbf{a} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (7.27e)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_{\phi i}; \quad \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (7.27f)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_M; \quad \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (7.27g)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_{oiL}; \quad \mathbf{n} \cdot \left(\frac{\rho}{\mu} \mathbf{v} \mathbf{A} + \mathbf{l} \mathbf{a} - \frac{1}{\mu} \boldsymbol{\tau}_A \right) = \mathbf{0} \quad (7.27h)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_{oiM}; \quad \mathbf{n} \cdot \left(\frac{\rho}{\mu} \mathbf{v} \mathbf{A} + \mathbf{l} \mathbf{a} - \frac{1}{\mu} \boldsymbol{\tau}_A \right) = \mathbf{0} \quad (7.27i)$$

Problema de cerradura para \mathbf{b}

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (7.28a)$$

$$\frac{\rho}{\mu} \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{b} = -\nabla b + \nabla^2 \mathbf{b} \quad (7.28b)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_{en}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (7.28c)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_{li}, \quad \psi(0) = \psi(\ell_x); \quad \psi = b, \mathbf{b} \quad (7.28d)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_{Ti}; \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_b = \mathbf{0}; \quad b = 0; \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (7.28e)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_{\phi i}; \quad \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (7.28f)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_M; \quad \mathbf{b} = \mathbf{r}_M \quad (7.28g)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_{oiL}; \quad \mathbf{n} \cdot \left(\frac{\rho}{\mu} \mathbf{v} \mathbf{b} + \mathbf{l} b - \frac{1}{\mu} \boldsymbol{\tau}_b \right) = \mathbf{0} \quad (7.28h)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_{oiM}; \quad \mathbf{n} \cdot \left(\frac{\rho}{\mu} \mathbf{v} \mathbf{b} + \mathbf{l} b - \frac{1}{\mu} \boldsymbol{\tau}_b \right) = \mathbf{0} \quad (7.28i)$$

Problema de cerradura para \mathbf{C}

$$\nabla \cdot \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (7.29a)$$

$$\frac{\rho}{\mu} \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{C} = -\nabla \mathbf{c} + \nabla^2 \mathbf{C} \quad (7.29b)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_{en}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (7.29c)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_{li}, \quad \psi(0) = \psi(\ell_x); \quad \psi = \mathbf{c}, \mathbf{C} \quad (7.29d)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_{Ti}; \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_C = \mathbf{0}; \quad \mathbf{c} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (7.29e)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_{\phi i}; \quad \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (7.29f)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_M; \quad \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (7.29g)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_{oiL}; \quad \mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{C} + \mu \mathbf{l} \mathbf{c} - \boldsymbol{\tau}_C) = \mathbf{0} \quad (7.29h)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_{oiM}; \quad \mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{C} + \mu \mathbf{l} \mathbf{c} - \boldsymbol{\tau}_C) = \mathbf{l} \quad (7.29i)$$

Problema de cerradura para \mathbf{D}

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \mathbf{0} \quad (7.30a)$$

$$\frac{\rho}{\mu} \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{D} = -\nabla \mathbf{d} + \nabla^2 \mathbf{D} \quad (7.30b)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_{en}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{0} \quad (7.30c)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_{li}, \quad \psi(0) = \psi(\ell_x); \quad \psi = \mathbf{d}, \mathbf{D} \quad (7.30d)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_{Ti}; \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_D = \mathbf{0}; \quad \mathbf{d} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{0} \quad (7.30e)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_{\phi i}; \quad \mathbf{D} = \mathbf{0} \quad (7.30f)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_M; \quad \mathbf{D} = \mathbf{0} \quad (7.30g)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_{oiL}; \quad \mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{D} + \mu \mathbf{l} \mathbf{d} - \boldsymbol{\tau}_D) = \mathbf{l} \quad (7.30h)$$

$$\text{en } \mathcal{A}_{oiM}; \quad \mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{D} + \mu \mathbf{l} \mathbf{d} - \boldsymbol{\tau}_D) = \mathbf{0} \quad (7.30i)$$

Con el fin de hallar la importancia de la contribución de cada una de las variables de cerradura, en seguida se presentan los resultados de haber hecho un análisis de orden de magnitud a cada uno de los problemas anteriores,

$$\mathbf{A} = \mathbf{O}(1) \quad (7.31a)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{O}(\ell_R) \quad (7.31b)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{O}\left(\frac{\ell_R}{\mu(1+Re_C)}\right); \quad Re_C = \frac{\rho \|\mathbf{v}\| \ell_R}{\mu} \quad (7.31c)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{O}\left(\frac{\ell_y}{\mu(1+Re_C)}\right); \quad Re_D = \frac{\rho \|\mathbf{v}\| \ell_y}{\mu} \quad (7.31d)$$

Usando las expresiones dadas en la ecuación (7.25), resulta que cuando las condiciones de flujo son tales que se cumplen las siguientes desigualdades

$$v_{en} \ll \left(\frac{\ell_R}{\mu(1+Re_C)}\right) \mathbf{O}[\mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}_o + p_o \mathbf{l} - \mu \nabla \mathbf{v}_o)] \quad (7.32a)$$

$$\ell_M v_\omega \ll \left(\frac{\ell_R}{\mu(1+Re_C)}\right) \mathbf{O}[\mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}_o + p_o \mathbf{l} - \mu \nabla \mathbf{v}_o)] \quad (7.32b)$$

$$\left(\frac{\ell_y}{\mu(1+Re_C)}\right) \mathbf{O}[\mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{v}_{en} \mathbf{v}_{en} + p_{en} \mathbf{l})] \ll \left(\frac{\ell_R}{\mu(1+Re_C)}\right) \mathbf{O}[\mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}_o + p_o \mathbf{l} - \mu \nabla \mathbf{v}_o)] \quad (7.32c)$$

la ecuación (7.25) se reduce a

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{C} \cdot [\mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}_o + p_o \mathbf{I} - \mu \nabla \mathbf{v}_o)|_{\mathcal{A}_{oiM}}(\mathbf{r})] \quad (7.33)$$

Esta última ecuación conserva una única fuente cuyo sentido físico está asociado con los esfuerzos (inerciales, de presión y viscosos) que ocurren en la frontera entre los dominios Ω_i y Ω_o , es decir en \mathcal{A}_{oiM} . Además, ésta depende del vector \mathbf{r} que mapea cada una de las partículas de fluido en la superficie \mathcal{A}_{oiM} . Finalmente, al sustituir la ecuación de arriba en la ecuación (7.6d) del problema de valor a la frontera para Ω_o , se obtiene que dicho problema ya no está acoplado con el problema de Ω_i , con lo cual se cumple el objetivo de este capítulo.

7.4 Condición de frontera y su discusión

De los desarrollos llevados a cabo en las secciones anteriores, se obtuvo la ecuación (7.33) para la velocidad en el dominio Ω_i , es decir el dominio que contiene a la turbina eólica. Cabe mencionar que entre los dominios Ω_i y Ω_o la superficie divisoria \mathcal{A}_{oi} se compone de dos zonas, \mathcal{A}_{oiL} y \mathcal{A}_{oiM} . En \mathcal{A}_{oiL} , la velocidad es conocida y es igual a la velocidad de entrada, mientras que la velocidad en la zona \mathcal{A}_{oiM} toma la siguiente forma:

en \mathcal{A}_{oiM}

$$\mathbf{v}_o = \mathbf{C} \cdot [\mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}_o + p_o \mathbf{I} - \mu \nabla \mathbf{v}_o)|_{\mathcal{A}_{oiM}}(\mathbf{r})] \quad (7.34)$$

a pesar de que los términos asociados a las fuentes de la velocidad de entrada (\mathbf{v}_{en}) y la velocidad de giro (v_ω) de la turbina no forman explícitamente parte de la condición de frontera (debido al análisis de órdenes de magnitud realizado); también es cierto que estas contribuciones se encuentran de manera implícita en el término del esfuerzo inercial y en el problema de cerradura de la variable \mathbf{C} . Más aún, las irregularidades del suelo están siendo consideradas en la velocidad \mathbf{v} de los esfuerzos inerciales y en la variable de cerradura \mathbf{C} . En resumen, la condición de frontera (7.34) no solo se mantiene la información de la turbina eólica y la velocidad de entrada del viento, sino también de las irregularidades del suelo.

Sobre esto último, vale la pena discutir más sobre el papel y la importancia que tiene la velocidad \mathbf{v} en la condición de frontera. A estas alturas del análisis se estableció que la solución de la velocidad \mathbf{v} es conocida, y que debido a ello se pudo proponer el problema lineal exacto. Ahora bien, la solución de la velocidad \mathbf{v} se puede obtener de, al menos, dos formas. La primera, se basa en obtener datos experimentales de la velocidad en Ω_i . La segunda forma consiste en resolver

numéricamente el problema de valor a la frontera que es válido en todo el dominio Ω , es decir el problema dado en las ecuaciones (7.1). Si bien, al resolver numéricamente dichas ecuaciones se puede obtener el valor de la velocidad \mathbf{v}_o en la superficie \mathcal{A}_{oiM} . También, es bien sabido que los datos numéricos en la frontera, no necesariamente se traducen en un entendimiento físico de la condición de frontera, como lo argumenta Ainslie (1988). En otras palabras, la pertinencia de tener una ecuación con sentido físico no solo cumple con un interés académico sobre el entendimiento del transporte de esta superficie, sino que además aumenta su sentido práctico. De este modo, en la práctica el obtener la velocidad \mathbf{v} de forma experimental *in-situ* o numérica, puede resultar costoso o inadecuado. Lo anterior motiva a ponderar el uso de otras alternativas razonables al uso de \mathbf{v} .

Respecto a esto último, otra alternativa se basa en proponer aproximaciones al campo de la velocidad \mathbf{v} en Ω_i . Por ejemplo, \mathbf{v} puede aproximarse como la velocidad de entrada en Ω_i considerando un salto en la punta de las palas, o bien usando aproximaciones tipo Oseen. Cabe agregar que este tipo de aproximaciones tendrían un impacto sobre el término inercial en el problema de la variable de cerradura \mathbf{C} y en los esfuerzos inerciales de la condición de frontera (7.34). Aunque estas aproximaciones podrían llevar a predicciones inadecuadas de la variable de cerradura, debe recordarse que el interés está en predecir los campos de \mathbf{C} sólo en la superficie \mathcal{A}_{oiM} . Lo anterior sugiere pensar que si se utilizan aproximaciones sencillas para el vector \mathbf{v} , éstas puedan no impactar demasiado en la precisión de la condición de frontera resultante. Este tipo de análisis es interesante y será el objeto de estudios posteriores a los presentados en este trabajo.

Hasta este punto se ha discutido sobre la condición de frontera en su forma más compacta ((7.34)), No obstante, pueden existir casos en los que esta ecuación no sea adecuada. Para atender este tipo de situaciones, la metodología descrita en este capítulo no necesariamente tiene que ser descartada. Más bien, en estas situaciones es pertinente revisar las suposiciones hechas en los análisis de órdenes de magnitud para reincorporar términos de la ecuación (7.25) en la condición de frontera. Ya que ésta última está menos restringida que la condición dada en la ecuación (7.34).

El análisis presentado en este capítulo tiene dos niveles de simplificación, el primero corresponde a suponer que los esfuerzos en la frontera \mathcal{A}_{oiM} pueden aproximarse a su valor evaluado en este centroide de esta superficie. El segundo nivel de simplificación corresponde al análisis de órdenes de magnitud presentado en el análisis de arriba. Por lo que para situaciones en las que no sea razonable truncar la serie de Taylor que se usó para aproximar los esfuerzos e el centroide de \mathcal{A}_{oiM} , es necesario reconsiderar a la ecuación (7.19), lo que llevaría a un modelo cerrado en Ω_o , aunque dicho modelo sería no local y requeriría de la solución del problema de las funciones de Green. La solución de dicho problema y de modelos no-locales es posible actualmente, aunque

es probablemente la forma de modelado más compleja para atender este tipo de situaciones. Las discusiones de los párrafos anteriores muestran la versatilidad que tiene la metodología de modelado presentada en este capítulo ya que tiene la posibilidad de mejorar en caso de ser necesario.

7.5 Resumen del capítulo

En este capítulo se desarrolló una condición de frontera para la superficie \mathcal{A}_{oiM} . La obtención de esta condición de frontera se llevó a cabo partiendo de las ecuaciones que gobiernan el transporte de masa y cantidad de movimiento lineal a la escala microscópica en un dominio generalizado, nombrado Ω . Ya que el interés se centra en un modelo matemático para la estela que deja una turbina eólica, se consideró conveniente dividir al dominio Ω en dos regiones Ω_i y Ω_o . El criterio para esta división se basó en el hecho de que la mayoría de las líneas de corriente de la velocidad del viento no se ven perturbadas antes de impactar a la turbina eólica. Mientras que después de la turbina se observan perfiles claramente perturbados.

Posteriormente, el análisis se enfocó en la obtención de la solución formal del problema de valor a la frontera en la región Ω_i , para lo cual se propuso su versión lineal exacta. Con esto último se hizo la suposición de que una de las velocidades de la parte inercial de la ecuación diferencial de cantidad de movimiento, es conocida y se obtiene de simulaciones numéricas en la región Ω . Gracias a esto último y a que los problemas de valor a la frontera en Ω_i y Ω_o están acoplados mediante la continuidad de la velocidad, fue que se obtuvo la condición de frontera en la superficie \mathcal{A}_M . De hecho, se obtuvieron dos versiones de la condición de frontera, una generalizada, y la otra resultado de análisis de órdenes de magnitud. Esta última indica que los esfuerzos relacionados con los esfuerzos inerciales, de presión y viscosos en la frontera \mathcal{A}_{oiM} son más importantes, en al menos dos órdenes de magnitud, respecto a los términos asociados con la velocidad de rotación de la turbina eólica y la velocidad de entrada del sistema.

La condición de frontera propuesta en este capítulo requiere de la solución de solo un problema de cerradura para poderse utilizar. Dicho problema requiere información acerca de la velocidad del fluido; sin embargo, existe la posibilidad de que dicha información pueda aproximarse. De ser este el caso, la cerradura de la condición de frontera se vería simplificada, lo cual favorece su uso práctico. Más aún, se discutió acerca de la versatilidad que tiene la metodología usada en este capítulo, ya que permite la mejora de los modelos de condición de frontera a utilizar cuando no se verifiquen las suposiciones que se impusieron en el análisis.

A manera de cierre de este capítulo, es pertinente mencionar que hasta este punto se han desarrollado dos modelos que describen el transporte alrededor de una turbina eólica. Una de las

diferencias entre ambos modelos es la cantidad de información que cada uno de ellos contiene de la escala microscópica. Si bien, el modelo promedio a la escala macroscópica puede ser usado en todo el sistema, el segundo modelo puede ser solo utilizado para mejorar los modelos de la estela de la turbina. Ya se ha discutido la pertinencia de este último modelo; no obstante, cabe recalcar que las suposiciones y/o restricciones que dieron lugar al modelo son la clave para el uso de éste en dominios específicos. Además, la versión simplificada del segundo modelo facilita su uso. Lo anterior da pie a la siguiente sección, en la cual se busca responder a la siguiente pregunta: ¿cuál es la máxima cantidad de información que se puede perder de la microescala para que el modelo resultante siga siendo útil? La respuesta a esta pregunta aportará el último elemento para tener una jerarquía de modelos matemáticos para describir el transporte alrededor de turbinas eólicas y cumplir así con el objetivo de este trabajo.



8. Modelo a la escala megascópica

La necesidad práctica por el uso de modelos cada vez más sencillos, ha sido la motivación para el desarrollo de modelos de naturaleza megascópica, es decir, por ejemplo a la escala de un parque eólico. Una de las ventajas más claras de esta clase de modelos es su sencillez matemática y su naturaleza intuitiva para un uso adecuado respecto a los tiempos de respuesta requeridos. Uno de los ejemplos más comunes que representan a esta clase de modelos es la teoría de Betz-Joukowski, con la cual se obtiene el límite máximo de potencia que una turbina eólica puede extraer del viento. Es más, ha sido tal el uso de esta teoría que ha sufrido adecuaciones específicas según las necesidades requeridas (esto último se discute en la sección de Antecedentes 2.1). Independientemente del estilo de cada una de las teorías o modelos resultantes, en la práctica también se requiere certidumbre sobre los alcances y limitaciones de los modelos proporcionados. De modo que, en este capítulo se desarrolla un modelo megascópico partiendo de las ecuaciones de conservación de masa, cantidad de movimiento lineal y energía mecánica válidas a la micro escala. En una primera etapa, se presentan los desarrollos de los modelos adoptando la menor cantidad de suposiciones. Como una segunda etapa se busca simplificar a los modelos bajo suposiciones compatibles con las aplicaciones prácticas de parques eólicos.

El capítulo está organizado de la siguiente manera. En la sección 8.1 se muestra el planteamiento del problema en donde se define el sistema, la región de promediado, así como las ecuaciones de transporte y condiciones de frontera. En las secciones 8.2, 8.3 y 8.4 se lleva a cabo el escalamiento del transporte de masa, cantidad de movimiento lineal y energía mecánica, respectivamente. En la

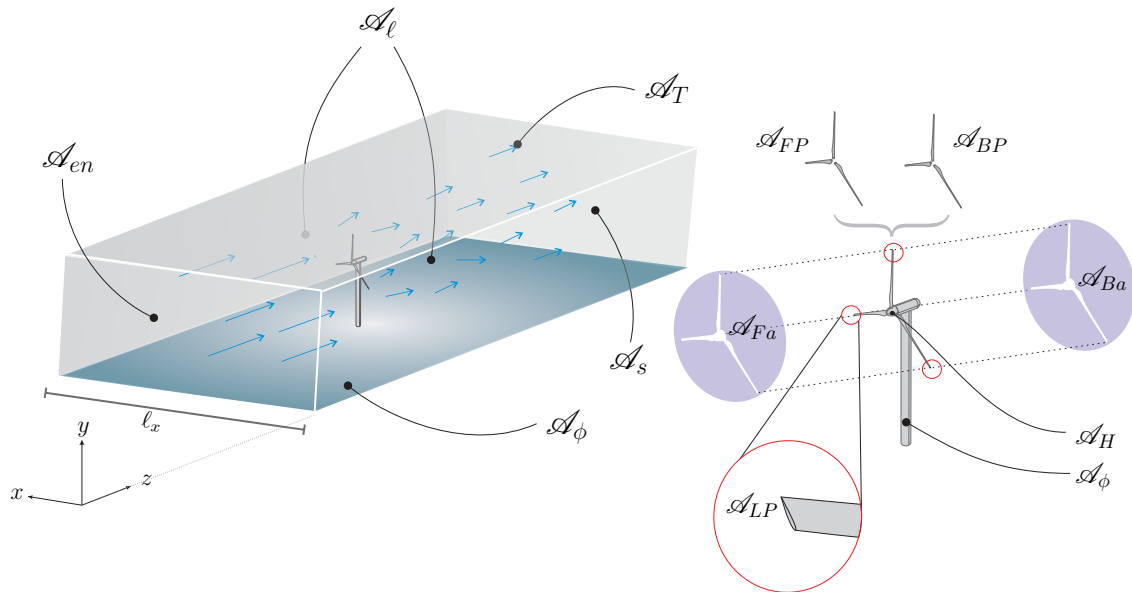


Figura 8.1: Esquema que representa las superficies del sistema en: entrada, A_e ; salida, A_s ; laterales, A_l ; superior, A_T ; fijas, A_ϕ ; el rotor, A_H . El disco morado representa el pseudo-disco actuador compuesto por las superficies del frente para el aire y las palas: A_{Fa} y A_{FP} , respectivamente. Las partes traseras del pseudo-disco actuador para el aire y las palas son: A_{Ba} y A_{BP} , respectivamente. Las superficies laterales de las palas se representan como A_{LP} .

sección 8.5 se presentan los modelos simplificados a la escala megascópica. En la sección 8.6 se comparan los modelos megascópicos con el modelo de Betz-Joukowsky. Finalmente, en la sección 8.7 se presentan un resumen del capítulo.

8.1 Planteamiento del problema

8.1.1 Definición del sistema y de la región de promediado

En la figura 8.1 se muestra un esquema del sistema a estudiar, identificando cada una de las fronteras que lo componen. Este sistema corresponde a una porción de un campo eólico periódico en la dirección x . Para el desarrollo del modelo megascópico, no se considerarán las ecuaciones de la mecánica de sólidos, por lo que las partes fijas y móviles de la turbina eólica se analizarán como superficies. Además, también se considerará como superficie al aire que se encuentra en el plano de giro de la turbina como lo ilustra el disco color morado en la misma figura 8.1. En adelante, se denotará a esta superficie de aire junto con las palas como un *pseudo-disco actuador*.

Para desarrollar el modelo megascópico es necesario definir una región de promediado. Al igual que en los análisis anteriores, la forma y tamaño de dicha región se debe escoger acorde a los intereses de modelado. En este sentido, la elección de la forma y tamaño de la región de promediado deberían corresponder a las del sistema. No obstante, al tomar esta elección la consecuencia es que

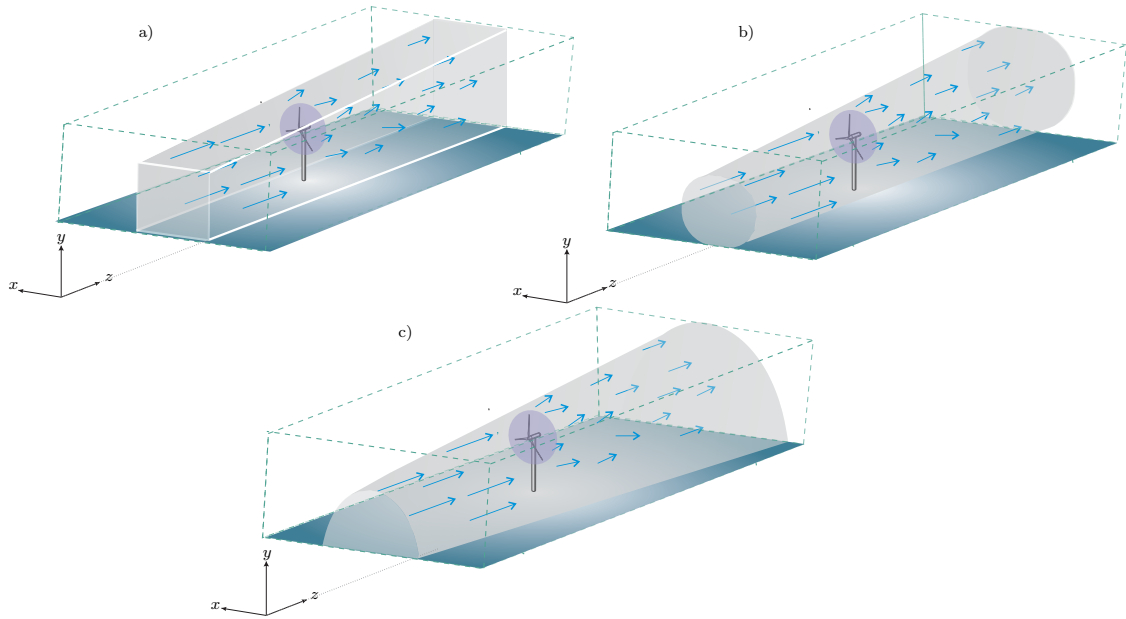


Figura 8.2: Esquema que representa tres distintos tamaños de regiones de promediado dentro del sistema. El disco morado representa el pseudo-disco actuador.

tanto los esfuerzos inerciales, así como la energía cinética megascópica en las superficies de entrada y salida se cancelarían. Dado que se tiene interés en capturar estas contribuciones, las superficies de entrada y salida de la región de promediado no deben ser iguales entre sí. En este sentido, se puede considerar una amplia variedad de regiones de promediado, de las cuales en la figura 8.2 se presentan tres posibilidades. En este momento es conveniente mencionar que para el desarrollo de los modelos megascópicos es necesario contar con las condiciones de frontera en cada una de las superficies de la región de promediado. Por ello, la región de promediado a usar será aquella que involucre el menor número de suposiciones adicionales para el planteamiento de sus condiciones de frontera; es decir, aquella cuya forma involucre la menor cantidad de diferencias entre la región de promediado y el sistema. Con base en lo anterior, se eligió la región de promediado dibujada del inciso a) de la figura 8.2 cuyas condiciones de frontera son las del sistema.

8.1.2 Ecuaciones de transporte y condiciones de frontera

El desarrollo del modelo a la escala megascópica, ℓ^{me} , parte de las ecuaciones de transporte a la escala microscópica, ℓ_{mi} . El primer conjunto de suposiciones proviene del recuadro (6.1.1), llevando a las siguientes ecuaciones de transporte para masa, cantidad de movimiento lineal y

energía mecánica:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (8.1a)$$

$$\rho \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v}) = \nabla \cdot \mathbf{T} \quad (8.1b)$$

$$\frac{\rho}{2} \nabla \cdot (v^2 \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{T}^T : \nabla \mathbf{v} \quad (8.1c)$$

donde ρ y \mathbf{v} representan la densidad y la velocidad del aire, respectivamente. En la figura 8.1, se muestran las superficies del pseudo-disco actuador que son, las frontales y traseras que incluyen al aire y a las palas (\mathcal{A}_{Fi} y \mathcal{A}_{Bi} , $i = P, a$) así como la superficie lateral de las palas, \mathcal{A}_{LP} .

Ya que la turbina eólica está lo suficientemente lejos de la entrada, \mathcal{A}_{en} , y salida, \mathcal{A}_s , se supone que los esfuerzos viscosos son despreciables respecto a los esfuerzos de presión. Además, se supone que la presión de entrada, p_{en} , se recupera en la superficie de salida y que la presión es constante en dichas fronteras. De esta forma, las condiciones de frontera en las superficies de entrada y salida son:

en \mathcal{A}_{en}

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} \quad (8.2a)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_z = p_{en} \quad (8.2b)$$

$$\mathbf{v} = v_{en} \mathbf{e}_z \quad (8.2c)$$

en \mathcal{A}_s

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} \quad (8.3a)$$

$$-\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_z = p_{en} \quad (8.3b)$$

$$\mathbf{v} = v_s \mathbf{e}_z \quad (8.3c)$$

De aquí en adelante, el vector \mathbf{n} representa el vector normal unitario dirigido desde la fase gas (aire) hacia la superficie en donde se aplique la condición de frontera. Además, la velocidad en la superficie de entrada se representa como v_{en} , mientras que en la superficie de salida, la velocidad es v_s .

Respecto a las superficies fijas del sistema, \mathcal{A}_ϕ , éstas se consideran como el piso, la góndola y el poste de la turbina. En todas ellas no hay transferencia de masa y el aire no desliza sobre ellas, dando lugar a la ecuación (8.4b). Ya que cada frontera fija se encuentra en un plano diferente, por

el momento solo se denota al tensor total de esfuerzos como \mathbf{T}_ϕ , de esta forma las condiciones de frontera en las superficies fijas son:

en \mathcal{A}_ϕ

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_\phi \quad (8.4a)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (8.4b)$$

En las fronteras laterales, \mathcal{A}_ℓ , se supone que los esfuerzos viscosos son despreciables con respecto a los esfuerzos de presión. Además, dada la naturaleza del sistema, se supone que el campo de la velocidad y presión son periódicos en la dirección x .

en \mathcal{A}_ℓ

$$\psi(0) = \psi(\ell_x); \quad \psi = p, \mathbf{v} \quad (8.5a)$$

En la frontera superior del sistema se supone que la componente normal de la velocidad es despreciable respecto a las laterales, así como los esfuerzos viscosos respecto a los esfuerzos de presión. De hecho, esto último es razonable cuando la superficie superior está suficientemente lejos de la estela de la turbina eólica (Paéz-García, 2015). Más aún, lo anterior conduce a que la componente z de la proyección normal de los esfuerzos sean cero; de esta forma las condiciones de frontera en la superficie superior son:

en \mathcal{A}_T

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_z = 0 \quad (8.6a)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (8.6b)$$

Respecto a las partes móviles del sistema, éstas se han considerado como el pseudo-disco actuador y el rotor. Dirigiendo la atención a este último, dado que no hay transporte de masa a través de él y denotando al tensor total de esfuerzos como \mathbf{T}_H , da lugar a las siguientes condiciones de frontera:

en $\mathcal{A}_{M,H}$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_H \quad (8.7a)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (8.7b)$$

Por su parte, las condiciones de frontera asociadas al pseudo-disco actuador corresponden a un

salto en el esfuerzo total, el cual es máximo en las superficies frontales y mínimo en las superficies laterales como se ha demostrado para un disco actuador clásico (Paéz-García & Valdés-Parada, 2019). Más aún, en ambas caras del pseudo-disco actuador, los esfuerzos (máximo o mínimo) no son iguales en las superficies sólidas que en las superficies fluidas, lo cual difiere del concepto clásico de disco actuador (Froude, 1920). Además, no hay transferencia de masa entre el aire y las partes sólidas del pseudo-disco actuador; no obstante, se impone continuidad de la velocidad en las partes fluidas ya que se conserva la masa y la proyección normal del vector velocidad corresponde a la velocidad de giro, v_ω . De esta forma, las condiciones de frontera en las superficies frontal y trasera del pseudo-disco actuador (tanto para las palas como para el aire) son

en \mathcal{A}_{FP} (*superficie frontal de las palas*)

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_z = T_{\text{máx}P} \quad (8.8a)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (8.8b)$$

en \mathcal{A}_{Fa} (*superficie frontal del aire en el disco*)

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_z = T_{\text{máx}a} \quad (8.9a)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = v_\omega \quad (8.9b)$$

en \mathcal{A}_{BP} (*superficie trasera de las palas*)

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_z = -T_{\text{mín}P} \quad (8.10a)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (8.10b)$$

en \mathcal{A}_{Ba} (*superficie trasera del aire en el disco*)

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_z = -T_{\text{mín}a} \quad (8.11a)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = -v_\omega \quad (8.11b)$$

En las ecuaciones anteriores se usaron los subíndices p y a para denotar las superficies del pseudo-disco actuador ocupadas por las palas y el aire, respectivamente. En el análisis que se presenta más adelante se toma en cuenta que los esfuerzos máximo y mínimo son también del mismo orden de magnitud.

Por último, en las superficies laterales de las palas no hay transferencia de masa y se denotará

al tensor total de esfuerzos como \mathbf{T}_L , lo que da lugar a las siguientes condiciones de frontera en \mathcal{A}_{LP}

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_L \quad (8.12a)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (8.12b)$$

Hasta este punto se han descrito todas las condiciones de frontera de la región de promediado en donde además, se han adoptado un segundo conjunto de suposiciones. En aras de la claridad, en el siguiente cuadro se lista este segundo conjunto de suposiciones:

Suposición 8.1.1 — Conjunto de suposiciones asociadas al modelado en la escala megascópica.

- El sistema es periódico en el eje x
- Los flujos de entrada y salida son unidireccionales y están alineados con el eje z .
- Los esfuerzos viscosos son despreciables respecto a los esfuerzos de presión en \mathcal{A}_{en} , \mathcal{A}_s , \mathcal{A}_T y \mathcal{A}_l .
- La presión en las superficies \mathcal{A}_{en} y \mathcal{A}_s es la misma y es constante.
- Los valores máximo y mínimo de la componente zz del tensor total de esfuerzos se suponen del mismo orden de magnitud tanto para el aire como para las palas en el pseudo-disco actuador.

8.2 Escalamiento del transporte de masa

Para comenzar el proceso de escalamiento, se define un operador de promediado para cualquier cantidad continua por tramos ψ , de la siguiente forma:

$$\langle \psi \rangle^\beta = \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{V}_\beta} \psi \, dV \quad (8.13)$$

donde \mathcal{V}_β representa el dominio ocupado por el aire en el dominio de promediado \mathcal{V} . V_β es el volumen correspondiente a la región \mathcal{V}_β . Además, enseguida se define el siguiente operador de promediado aplicable a cualquier superficie:

$$\langle \psi \rangle_j = \frac{1}{A_j} \int_{\mathcal{A}_j} \psi \, dA \quad (8.14)$$

en donde $A_j = \int_{\mathcal{A}_j} dA$ es el área de la superficie \mathcal{A}_j ($j = \text{entrada(en)}, \text{salida(s)}, \text{laterales}(\ell), \dots$). Aplicando el operador de promediado de la ecuación (8.13) a la ecuación (8.1a), se obtiene:

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle^\beta = \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{V}_\beta} \nabla \cdot \mathbf{v} dV = 0 \quad (8.15)$$

O, después de aplicar el teorema de la divergencia,

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{en}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}_{-v_{en}} dA + \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_s} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}_{v_s} dA + \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\ell(0)}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}_{-v_\ell} dA + \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\ell(x)}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}_{v_\ell} dA \\ + \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_\phi} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}_0 dA + \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_T} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}_0 dA + \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_M} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dA = 0 \end{aligned} \quad (8.16)$$

en donde se han tomado en cuenta las condiciones de frontera para cada uno de los términos excepto en el último, el cual puede descomponerse de acuerdo con la siguiente expresión

$$\mathcal{A}_M = \mathcal{A}_H + \mathcal{A}_{FP} + \mathcal{A}_{Fa} + \mathcal{A}_{BP} + \mathcal{A}_{Ba} + \mathcal{A}_{LP} \quad (8.17)$$

Tomando en cuenta que no hay transferencia de masa entre el aire y las superficies sólidas, se tiene que

$$\frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_M} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dA = \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{Fa}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}_{v_\omega} dA + \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{Ba}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}_{-v_\omega} dA = 0 \quad (8.18)$$

Por lo que puede descartarse el último término en la ecuación (8.16).

En este punto, es imperativo mencionar las diferencias entre el uso de los teoremas de promediado y de la divergencia. Como se puede apreciar, en la ecuación (8.16), se hizo uso del teorema de la divergencia y no del teorema del promediado debido al tamaño de la región de promediado \mathcal{V} . El uso del teorema del promediado requiere que la región de promediado pueda trazar una trayectoria a lo largo del sistema, en donde la pendiente en cada punto de la trayectoria esté definida y sea continua (Howes & Whitaker, 1985). De ahí que el tamaño de la región de promediado debe ser más grande que un punto y más pequeño que el sistema; contrario a la región de promediado que se usa en este análisis.

Regresando la atención a la ecuación (8.16), y multiplicándola por ρV_β , se obtiene:

$$\rho \langle v_{en} \rangle_{A_{en}} A_{en} = \rho \langle v_s \rangle_{A_s} A_s = \dot{m} \quad (8.19)$$

en donde además se usó la definición de promediado dada por la ecuación (8.14). Finalmente, el resultado en la ecuación (8.19) establece que el flujo de masa que entra al dominio de promediado es igual al flujo de masa a la salida. Cabe mencionar que el llegar a este resultado no requirió imponer ninguna suposición adicional a las adoptadas en el planteamiento del modelo microscópico.

8.3 Escalamiento del transporte de cantidad de movimiento lineal

El siguiente paso en el análisis está enfocado al escalamiento de la ecuación de transporte de cantidad de movimiento lineal dada en la ecuación (8.1b). Ya que las superficies de entrada y salida del sistema están alineadas con el eje de rotación, es decir el eje z , se procede a tomar la proyección de la ecuación (8.1b) con el vector unitario \mathbf{e}_z ; seguido de la aplicación del operador de promediado definido en la ecuación (8.13), dando lugar a:

$$\frac{\rho}{V_\beta} \int_{\mathcal{V}_\beta} \nabla \cdot (\mathbf{v}v_z) dV = \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{V}_\beta} \nabla \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_z dV \quad (8.20)$$

Aplicando el teorema de la divergencia en ambos lados de la ecuación de arriba y multiplicando el resultado por V_β , se obtiene:

$$\begin{aligned} & \rho \int_{\mathcal{A}_{en}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}v_{en}}_{-v_{en}^2} dA + \rho \int_{\mathcal{A}_s} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}v_s}_{v_s^2} dA + \rho \int_{\mathcal{A}_{\ell(0)}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}v_z}_{-v_\ell v_z} dA + \rho \int_{\mathcal{A}_{\ell(x)}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}v_z}_{v_\ell v_z} dA + \rho \int_{\mathcal{A}_\phi} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}v_z}_0 dA \\ & + \rho \int_{\mathcal{A}_M} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}v_z}_0 dA + \rho \int_{\mathcal{A}_T} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}v_z}_0 dA = \int_{\mathcal{A}_{en}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_z}_{p_{en}} dA + \int_{\mathcal{A}_s} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_z}_{-p_{en}} dA + \int_{\mathcal{A}_{\ell(0)}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_z}_0 dA \\ & + \int_{\mathcal{A}_{\ell(x)}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_z}_0 dA + \int_{\mathcal{A}_\phi} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_z}_{T_{\phi,nz}} dA + \int_{\mathcal{A}_M} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_z}_0 dA + \int_{\mathcal{A}_T} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_z}_0 dA \quad (8.21) \end{aligned}$$

en donde las condiciones a la frontera en cada superficie fueron tomadas en cuenta y sustituidas en cada integral, excepto en las superficies móviles. Ya que el sistema es periódico en la dirección x , la tercera y cuarta integral (asociadas a las superficies laterales \mathcal{A}_ℓ) del lado izquierdo de la ecuación de arriba se cancelan entre sí. Sin embargo, del lado derecho de la igualdad, las integrales en las superficies laterales \mathcal{A}_ℓ , son cero debido a que los esfuerzos viscosos son despreciables respecto a los esfuerzos de presión y los vectores unitarios \mathbf{n} y \mathbf{e}_z son ortogonales y la misma situación ocurre en la superficie \mathcal{A}_T .

Dirigiendo la atención a las integrales que involucran superficies móviles, se tienen las siguientes descomposiciones, tomando en cuenta a la ecuación (8.17) y a las condiciones de frontera correspondientes

$$\begin{aligned} \rho \int_{\mathcal{A}_M} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} v_z dA &= \rho \int_{\mathcal{A}_{FP}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} v_z}_0 dA + \rho \int_{\mathcal{A}_{BP}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} v_z}_0 dA + \rho \int_{\mathcal{A}_{LP}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} v_z}_0 dA + \rho \int_{\mathcal{A}_H} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} v_z}_0 dA \\ &\quad + \rho \int_{\mathcal{A}_{Fa}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} v_z}_{v_\omega^2} dA + \rho \int_{\mathcal{A}_{Ba}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} v_z}_{-v_\omega^2} dA = 0 \quad (8.22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{A}_M} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_z dA &= \int_{\mathcal{A}_{Fa}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_z}_{T_{\text{máx}a}} dA + \int_{\mathcal{A}_{Ba}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_z}_{-T_{\text{mín}a}} dA + \int_{\mathcal{A}_{FP}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_z}_{T_{\text{máx}P}} dA + \int_{\mathcal{A}_{BP}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_z}_{-T_{\text{mín}P}} dA \\ &\quad + \int_{\mathcal{A}_{LP}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_z}_{T_{L,nz}} dA + \int_{\mathcal{A}_H} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_z}_{T_{H,nz}} dA \quad (8.23) \end{aligned}$$

Tomando en cuenta estos resultados en la ecuación (8.21) y usando la definición del promediado dada por la ecuación (8.14), se obtiene:

$$-\rho \langle v_{en}^2 \rangle_{A_{en}} A_{en} + \rho \langle v_s^2 \rangle_{A_s} A_s = p_{en} (A_{en} - A_s) - F_\phi - F - F_{LH} \quad (8.24)$$

donde se usaron las siguientes definiciones

$$F_\phi = - \int_{\mathcal{A}_\phi} T_{\phi,nz} dA \quad (8.25a)$$

$$F = - \int_{\mathcal{A}_{Fa}} (T_{\text{máx}a} - T_{\text{mín}a}) dA - \int_{\mathcal{A}_{FP}} (T_{\text{máx}P} - T_{\text{mín}P}) dA \quad (8.25b)$$

$$F_{LH} = - \int_{\mathcal{A}_{LP}} T_{L,nz} dA - \int_{\mathcal{A}_H} T_{H,nz} dA \quad (8.25c)$$

las cuales sirven para diferenciar las fuerzas relacionadas con las superficies fijas y móviles. Respecto a las últimas, se hizo una distinción entre aquellas en las que se da el salto en el esfuerzo y el resto. Antes de continuar es pertinente mencionar que el término asociado a las superficies fijas F_ϕ es sensible a cambios en la orografía del suelo así como de la geometría del poste y la góndola. Por su parte, el término F captura información acerca de la influencia de la geometría de las palas.

La ecuación (8.24) constituye un modelo megascópico de cantidad de movimiento lineal y, a diferencia de la ecuación (8.19) para masa, no se encuentra cerrada pues requiere información de la microescala. Dicha información puede obtenerse de simulaciones numéricas directas o bien de datos experimentales en campo. Sin embargo, cabe mencionar que la ecuación (8.24) no tiene

suposiciones añadidas más allá de las listadas en los cuadros 6.1.1 y 8.1.1. Para cerrar la discusión de este modelo, es conveniente rearrreglar la ecuación (8.24) en la siguiente forma

$$\rho \langle v_{en}^2 \rangle_{A_{en}} A_{en} + p_{en} A_{en} = \rho \langle v_s^2 \rangle_{A_s} A_s + p_{en} A_s + F_\phi + F + F_{LH} \quad (8.26)$$

De esta manera la ecuación anterior es a simple vista un balance de fuerzas a la escala megascópica, en donde se puede apreciar que las fuerzas impulsoras (inercial y de presión) dan por resultado a las fuerzas de inercia y de presión a la salida de la región de promediado junto con las fuerzas que experimentan las superficies fijas y las superficies móviles.

8.4 Escalamiento del transporte de energía mecánica

El último elemento del análisis consiste en el escalamiento de la ecuación de la energía mecánica. Dirigiendo la atención a la ecuación (8.1c), y aplicando el operador de promediado volumétrico dado por la ecuación (8.13), se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{\rho}{2V_\beta} \int_{\mathcal{V}_\beta} \nabla \cdot (v^2 \mathbf{v}) dV = \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{V}_\beta} \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) dV - \langle \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} \rangle^\beta \quad (8.27)$$

en donde el último término del lado derecho de la igualdad se obtiene al suponer que el flujo es incompresible (del primer conjunto de suposiciones dado por el cuadro (6.1.1)) y por lo tanto $\mathbf{T} : \nabla \mathbf{v} = \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}$. Aplicando el teorema de la divergencia a la ecuación anterior, y tomando en cuenta las correspondientes condiciones de frontera, se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{\rho}{2V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{en}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot (v_{en}^2 \mathbf{v})}_{-v_{en}^3} dA + \frac{\rho}{2V_\beta} \int_{\mathcal{A}_s} \underbrace{\mathbf{n} \cdot (v_s^2 \mathbf{v})}_{v_s^3} dA + \frac{\rho}{2V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\ell(0)}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot (v^2 \mathbf{v})}_{-v^2 v_\ell} dA + \frac{\rho}{2V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\ell(\ell_x)}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot (v^2 \mathbf{v})}_{v^2 v_\ell} dA \\ & + \frac{\rho}{2V_\beta} \int_{\mathcal{A}_\phi} \underbrace{\mathbf{n} \cdot (v^2 \mathbf{v})}_0 dA + \frac{\rho}{2V_\beta} \int_{\mathcal{A}_M} \mathbf{n} \cdot (v^2 \mathbf{v}) dA + \frac{\rho}{2V_\beta} \int_{\mathcal{A}_T} \underbrace{\mathbf{n} \cdot (v^2 \mathbf{v})}_0 dA = \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{en}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}}_{p_{en} v_{en}} dA \\ & + \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_s} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}}_{-p_{en} v_s} dA + \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\ell(0)}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}}_{p_\ell v_\ell} dA + \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\ell(\ell_x)}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}}_{-p_\ell v_\ell} dA + \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_\phi} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}}_0 dA \\ & + \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_T} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}}_0 dA + \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_M} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} dA - \langle \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} \rangle^\beta \quad (8.28) \end{aligned}$$

En la ecuación (8.28), las integrales asociadas a las superficies laterales \mathcal{A}_ℓ se cancelan entre sí por dos razones: debido a que los esfuerzos viscosos son despreciables respecto a los de presión y

a la naturaleza periódica del sistema. Así mismo, las integrales asociadas a la superficie superior de la región de promediado, del lado izquierdo de la ecuación, es nula ya que no escapa masa a través de ésta en dirección normal al flujo de entrada y además los esfuerzos viscosos se suponen despreciables respecto a los esfuerzos de presión. Más aún, los primeros dos términos del lado derecho de la ecuación se cancelan entre sí debido a que la presión p_{en} se supuso constante en ambas superficies y se tomó en cuenta la ecuación de conservación de masa megascópica dada en la ecuación (8.19). Respecto a los términos asociados a las partes móviles de la turbina eólica, éstos se descomponen mediante la relación dada en la ecuación (8.17), por lo que se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{2V_\beta} \int_{\mathcal{A}_M} \mathbf{n} \cdot (v^2 \mathbf{v}) dA &= \frac{\rho}{2V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{FP}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot (v^2 \mathbf{v})}_0 dA + \frac{\rho}{2V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{BP}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot (v^2 \mathbf{v})}_0 dA + \frac{\rho}{2V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{LP}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot (v^2 \mathbf{v})}_0 dA \\ &+ \frac{\rho}{2V_\beta} \int_{\mathcal{A}_H} \underbrace{\mathbf{n} \cdot (v^2 \mathbf{v})}_0 dA + \frac{\rho}{2V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{Fa}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot (v^2 \mathbf{v})}_{v^2 v_\omega} dA + \frac{\rho}{2V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{Ba}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot (v^2 \mathbf{v})}_{-v^2 v_\omega} dA = 0 \quad (8.29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_M} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} dA &= \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{FP}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}}_{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_{\text{máx}P} \cdot \mathbf{v}} dA + \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{BP}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}}_{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_{\text{mín}P} \cdot \mathbf{v}} dA + \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{LP}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}}_{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_L \cdot \mathbf{v}} dA + \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_H} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}}_{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_H \cdot \mathbf{v}} dA \\ &+ \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{Fa}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}}_{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_{\text{máx}a} \cdot \mathbf{v}} dA + \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{Ba}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}}_{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_{\text{mín}a} \cdot \mathbf{v}} dA \quad (8.30) \end{aligned}$$

Tomando en cuenta lo anterior, la ecuación (8.28) se reduce a

$$\frac{\rho}{2} \langle v_{en}^3 \rangle_{A_{en}} A_{en} - \frac{\rho}{2} \langle v_s^3 \rangle_{A_s} A_s = P + P_{LH} + V_\beta \langle \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} \rangle^\beta \quad (8.31)$$

Donde se definieron los siguientes términos de potencia

$$P = -A_{FP} \langle \langle \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_{\text{máx}P} \cdot \mathbf{v} \rangle_{A_{FP}} \rangle + \langle \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_{\text{mín}P} \cdot \mathbf{v} \rangle_{A_{BP}} - A_{Fa} \langle \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_{\text{máx}a} \cdot \mathbf{v} \rangle_{A_{Fa}} \rangle + \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_{\text{mín}a} \cdot \mathbf{v} \rangle_{A_{Ba}} \quad (8.32a)$$

$$P_{LH} = -A_{LP} \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_L \cdot \mathbf{v} \rangle_{A_{LP}} - A_H \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_H \cdot \mathbf{v} \rangle_{A_H} \quad (8.32b)$$

La potencia, P , se refiere a la potencia del pseudo-disco actuador en donde los primeros dos términos de la ecuación (8.32a) solo hacen mención a la potencia por efectos viscosos. Esto último se debe a que no hay transferencia de masa en las palas, por lo que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}$ es nulo. Mientras que P_{LH} agrupa la potencia asociada a las superficies laterales de la palas y al rotor. Al igual que en

el modelo megascópico de cantidad de movimiento lineal, la ecuación (8.31) no está cerrada ya que requiere información proveniente de la microescala, la cual se puede adquirir de simulaciones numéricas directas o bien de datos experimentales a escala de campo. Cabe notar que la ecuación (8.31) no contiene la potencia asociada a las superficies fijas en la región de promediado a diferencia de la ecuación megascópica de cantidad de movimiento lineal. Además, la ecuación (8.31) expresa que la potencia del viento a la entrada de la región de promediado es igual a la potencia del viento a la salida junto con la potencia cedida a las partes fijas y móviles de la turbina eólica; así como las pérdidas por la disipación viscosa.

Hasta este punto del análisis, se han desarrollado ecuaciones megascópicas del transporte de masa (8.19), cantidad de movimiento (8.24) y energía mecánica (8.31), sin imponer más suposiciones de las reportadas previamente en los cuadros 6.1.1 y 8.1.1. Estas ecuaciones constituyen una primera versión del modelo megascópico el cual no se encuentra cerrado en las ecuaciones de cantidad de movimiento y energía mecánica. En los siguientes párrafos se impondrán de manera sistemática algunas suposiciones razonables con el fin de simplificar a las últimas dos ecuaciones de este modelo.

8.5 Modelo megascópico simplificado

Con el fin de simplificar las ecuaciones megascópicas de cantidad de movimiento y de energía mecánica, se analizan los términos asociados a las velocidades de entrada y salida de la región de promediado así como la importancia de los términos de fuerza y potencia en estas ecuaciones. Referente a las velocidades de entrada y salida, es pertinente notar que se encuentran expresadas como promedios de velocidades no lineales en ambas ecuaciones, siendo que lo más conveniente es que sean las velocidades promedio las que se encuentren elevadas a potencias no lineales. Para atender esta situación, es conveniente que éstas se expresen las velocidades en términos de sus promedios y sus correspondientes desviaciones espaciales, esto es

$$v_{en} = \langle v_{en} \rangle_{A_{en}} + \tilde{v}_{en}; \quad v_s = \langle v_s \rangle_{A_s} + \tilde{v}_s \quad (8.33)$$

Promediado en la superficie de entrada a la primera de las ecuaciones anteriores se obtiene

$$\langle v_{en} \rangle_{A_{en}} = \langle \langle v_{en} \rangle_{A_{en}} \rangle_{A_{en}} + \langle \tilde{v}_{en} \rangle_{A_{en}} \quad (8.34)$$

Sin embargo, para el tipo de región de promediado que se está utilizando es razonable considerar que $\langle \langle v_{en} \rangle_{A_{en}} \rangle_{A_{en}} = \langle v_{en} \rangle_{A_{en}}$. Tomando en cuenta lo anterior, la ecuación (8.34) lleva a

$$\langle \tilde{v}_{en} \rangle_{A_{en}} = 0 \quad (8.35)$$

y un resultado análogo se obtiene al promediar v_s en la superficie de salida.

En este momento es conveniente dirigir la atención a los términos inerciales de la ecuación megascópica de cantidad de movimiento lineal (ecuación 8.24), los cuales contienen promedios de la velocidad al cuadrado. Tomando en cuenta la descomposición dada en la ecuación (8.33), se tiene que el promedio del cuadrado de la velocidad de entrada está dado por

$$\langle v_{en}^2 \rangle_{A_{en}} = \langle v_{en} \rangle_{A_{en}}^2 + 2 \langle v_{en} \rangle_{A_{en}} \langle \tilde{v}_{en} \rangle_{A_{en}} + \langle \tilde{v}_{en}^2 \rangle_{A_{en}} \quad (8.36)$$

Este resultado puede simplificarse tomando en cuenta a la ecuación (8.35), para dar lugar a

$$\langle v_{en}^2 \rangle_{A_{en}} = \langle v_{en} \rangle_{A_{en}}^2 \quad (8.37)$$

donde se impuso la siguiente suposición,

$$\langle \tilde{v}_{en}^2 \rangle_{A_{en}} \ll \langle v_{en} \rangle_{A_{en}}^2 \quad (8.38)$$

Por su parte, el lado izquierdo de la ecuación megascópica de energía mecánica está en términos del promedio del cubo de las velocidades de entrada y salida. Por lo que, realizando un análisis similar al anterior para el promedio del cubo de la velocidad de entrada se obtiene

$$\langle v_{en}^3 \rangle_{A_{en}} = \langle v_{en} \rangle_{A_{en}}^3 + 3 \langle v_{en} \rangle_{A_{en}}^2 \langle \tilde{v}_{en} \rangle_{A_{en}} + 3 \langle v_{en} \rangle_{A_{en}} \langle \tilde{v}_{en}^2 \rangle_{A_{en}} + \langle \tilde{v}_{en}^3 \rangle_{A_{en}} \quad (8.39)$$

La cual puede simplificarse tomando en cuenta los resultados en la ecuación (8.35) y la desigualdad (8.38), para dar lugar a

$$\langle v_{en}^3 \rangle_{A_{en}} = \langle v_{en} \rangle_{A_{en}}^3 \quad (8.40)$$

en donde se impuso además la siguiente suposición

$$\langle \tilde{v}_{en}^3 \rangle_{A_{en}} \ll \langle v_{en} \rangle_{A_{en}}^3 \quad (8.41)$$

Los resultados dados en las ecuaciones (8.37) y (8.40) son extensivos a la superficie de salida. Bajo estas condiciones, las ecuaciones megascópicas de cantidad de movimiento y de energía mecánica pueden escribirse como sigue

$$\underbrace{\dot{m}(\langle v_{en} \rangle_{A_{en}} - \langle v_s \rangle_{A_s})}_{\mathcal{O}(\dot{m}\langle v_{en} \rangle_{A_{en}})} = - \underbrace{p_{en}(A_{en} - A_s)}_{\mathcal{O}(p_{en}A_s)} + \underbrace{F_\phi}_{\mathcal{O}(p_{en}A_\phi + \mu v_{ref}A_\phi / \ell_v)} + \underbrace{F}_{\mathcal{O}(A_D T_{m\acute{a}x})} + \underbrace{F_{LH}}_{\mathcal{O}(T_{L,nz}A_{LP} + T_{H,nz}A_H)} \quad (8.42)$$

$$\underbrace{\frac{\dot{m}}{2}(\langle v_{en} \rangle_{A_{en}}^2 - \langle v_s \rangle_{A_s}^2)}_{\mathcal{O}(\dot{m}\langle v_{en} \rangle_{A_{en}}^2)} = \underbrace{P}_{\mathcal{O}(T_{m\acute{a}x}A_D v_D)} + \underbrace{P_{LH}}_{\mathcal{O}(A_{LP}T_{LV_L} + A_H T_{HV_H})} + \underbrace{V_\beta \langle \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} \rangle^\beta}_{\mathcal{O}(V_\beta \tau_{m\acute{a}x} v_{ref} / \ell_v)} \quad (8.43)$$

donde se incluyó el estimado de orden de magnitud de cada término. En las expresiones anteriores se usó A_D para denotar el área del pseudo-disco actuador; además, v_{ref} y ℓ_v representan la velocidad característica y la longitud característica asociada al gradiente de la velocidad. Por último v_D representa el orden de magnitud de la velocidad máxima en el pseudo-disco actuador. Con esto a la mano, se pueden proponer las siguientes suposiciones

$$T_{L,nz}A_{LP} + T_{H,nz}A_H \ll A_D T_{m\acute{a}x} \quad (8.44a)$$

$$p_{en}A_s \ll A_D T_{m\acute{a}x} \quad (8.44b)$$

$$A_{LP}T_{LV_L} + A_H T_{HV_H} \ll T_{m\acute{a}x}A_D v_D \quad (8.44c)$$

De esta forma, las ecuaciones (8.42) y (8.43) se reducen a

$$\dot{m}(\langle v_{en} \rangle_{A_{en}} - \langle v_s \rangle_{A_s}) = F_\phi + F_P + F_a \quad (8.45)$$

$$\frac{\dot{m}}{2}(\langle v_{en} \rangle_{A_{en}}^2 - \langle v_s \rangle_{A_s}^2) = P + V_\beta \langle \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} \rangle^\beta \quad (8.46)$$

Las ecuaciones anteriores ya no contienen información acerca del rotor así como de las superficies laterales de las palas, ni de la fuerza de presión entre la entrada y la salida de la región de promediado. Además, en la ecuación (8.45), se descompuso a la fuerza F en sus contribuciones debidas a las palas (F_P) y al aire (F_a) en el pseudo-disco actuador, lo cual es consistente con la definición de F dada en la ecuación (8.25b).

En este momento vale la pena explorar la posibilidad de relacionar la potencia del pseudo-disco actuador, P con su fuerza, F . Para ello, es conveniente dirigir la atención a la ecuación (8.32a) y suponer que la componente z del vector velocidad es la componente más importante (es decir

$\mathbf{v} = v_\omega \mathbf{e}_z$) en todas las integrales que se encuentran del lado derecho. Bajo estas condiciones, la velocidad evaluada en las superficies \mathcal{A}_{FP} y \mathcal{A}_{BP} es nula y por tanto, P puede expresarse como

$$P = -A_{Fa} (\langle T_{\text{máx}a} v_\omega \rangle_{A_{Fa}} - \langle T_{\text{mín}a} v_\omega \rangle_{A_{Ba}}) \quad (8.47)$$

Para expresar la ecuación anterior en términos de variables promedio, se descomponen a los diversos esfuerzos en sus respectivos promedios y desviaciones, dando lugar a

$$P = -A_{Fa} (\langle T_{\text{máx}a} \rangle_{A_{Fa}} \langle v_\omega \rangle_{A_{Fa}} - \langle T_{\text{mín}a} \rangle_{A_{Ba}} \langle v_\omega \rangle_{A_{Ba}}) - A_{Fa} (\langle \tilde{T}_{\text{máx}a} v_\omega \rangle_{A_{Fa}} - \langle \tilde{T}_{\text{mín}a} v_\omega \rangle_{A_{Ba}}) \quad (8.48)$$

Para simplificar esta ecuación, se imponen las siguientes suposiciones

$$\langle \tilde{T}_{\text{máx}a} v_\omega \rangle_{A_{Fa}} \ll \langle T_{\text{máx}a} \rangle_{A_{Fa}} \langle v_\omega \rangle_{A_{Fa}} \quad (8.49a)$$

$$\langle \tilde{T}_{\text{mín}a} v_\omega \rangle_{A_{Ba}} \ll \langle T_{\text{mín}a} \rangle_{A_{Ba}} \langle v_\omega \rangle_{A_{Ba}} \quad (8.49b)$$

Bajo estas condiciones, la ecuación (8.48) se reduce a

$$P = F_a \langle v_\omega \rangle_{A_{Fa}} \quad (8.50)$$

Para avanzar en los desarrollos, se impone la condición de equilibrio local mecánico para los promedios de la velocidad (Whitaker, 1991; Quintard & Whitaker, 1995)

$$\langle v_\omega \rangle_{A_{FP}} \approx \langle v_\omega \rangle_{A_{Fa}} = \langle v_\omega \rangle \quad (8.51)$$

De esta forma, la ecuación (8.50) se reduce a

$$P = \underbrace{[\dot{m} (\langle v_{en} \rangle_{A_{en}} - \langle v_s \rangle_{A_s}) - F_\phi - F_P]}_{F_a} \langle v_\omega \rangle \quad (8.52)$$

donde se sustituyó el valor de F_a proveniente de la ecuación (8.45). De tal forma que la ecuación (8.52) representa la potencia dentro de la región de promediado. En dicha expresión se manifiesta tanto la fuerza del aire en las entradas y salidas como en el piso y en las palas de la turbina, con estos últimos dos términos la ecuación de la potencia es una ecuación no cerrada. Además, de esta última ecuación es notorio que la potencia de la turbina eólica es la fuerza del aire multiplicada por la velocidad; sin embargo, esto último en general no es cierto. Resulta que la ecuación (8.52) es

la consecuencia de la imposición de una serie de suposiciones, que de no usarlas se obtiene que la potencia megascópica es más allá que solo la fuerza multiplicada por la velocidad. Lo anterior puede encontrarse a detalle en el trabajo llevado a cabo por Paéz-García et al. (2017).

Sustituyendo la ecuación (8.52), en la ecuación (8.46) se llega a la siguiente expresión para la velocidad de giro

$$\langle v\omega \rangle = \frac{\dot{m} (\langle v_{en} \rangle_{A_{en}}^2 - \langle v_s \rangle_{A_s}^2) - V_\beta \langle \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} \rangle^\beta}{[\dot{m} (\langle v_{en} \rangle_{A_{en}} - \langle v_s \rangle_{A_s}) - F_\phi - F_P]} \quad (8.53)$$

Esta expresión relaciona a la velocidad promedio de giro de la turbina eólica (o bien el promedio de la velocidad del aire en el pseudo-disco actuador) con las velocidades de entrada y salida de la región de promediado, así como la disipación viscosa y las fuerzas asociadas con las partes fijas del sistema y la fuerza que se ejerce sobre las palas. Esta última no está presente en los desarrollos usuales que involucran un disco actuador, ya que no se distingue entre el aire y las palas en ese concepto. Más aún, en los estudios de turbomaquinaria clásicos, no se incorporan aspectos como la orografía o la disipación viscosa. En ese caso, es claro que la ecuación anterior lleva a la conclusión de que la velocidad promedio de giro es igual a la media aritmética de las velocidades de entrada y salida en la región de promediado. A este resultado se le conoce como *teorema de Froude* y es un caso particular de la ecuación (8.53).

8.6 Comparación con el modelo de Betz-Joukowski

Las versiones completa y simplificada de los modelos megascópicos tienen en común la necesidad de contar con información proveniente de la microescala. De esta forma, la diferencia entre ambos modelos radica en la cantidad de información de la microescala que contienen. De hecho, esta necesidad por información de la microescala está presente en varios modelos actualmente utilizados para estudiar turbinas eólicas. Por ejemplo, el método de elemento de pala requiere conocer las características geométricas de la pala *a priori* (Ingram, 2005) y los métodos que se basan en éste y en otros como los que usan la hipótesis de disco actuador, necesitan información no solo teórica, sino numérica (o experimental) para poder aplicarse. De lo anterior, es claro que entre las diferencias entre estos modelos y los desarrollados en este trabajo está en la cantidad de información que requieren, además de la formulación matemática involucrada.

En este momento es importante recordar que muchos de los métodos mencionados arriba tienen su origen en la teoría de Betz-Joukowski, o bien necesitan de algunos resultados de dicha teoría para funcionar (Li et al., 2001), (Goh et al., 2006) Kusiak et al. (2009) (Cohen et al., 1980) (Ingram,

2005). En el caso de los modelos megascópicos simplificados que se desarrollaron en este capítulo,

$$\dot{m}(\langle v_{en} \rangle_{A_{en}} - \langle v_s \rangle_{A_s}) = F_\phi + F_P + F_a \quad (8.54a)$$

$$\frac{\dot{m}}{2} (\langle v_{en} \rangle_{A_{en}}^2 - \langle v_s \rangle_{A_s}^2) = P + V_\beta \langle \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} \rangle^\beta \quad (8.54b)$$

éstos pueden reducirse a las ecuaciones propuestas por Betz-Joukowsky para casos en los que las siguientes suposiciones sean aplicables

$$F_\phi + F_P \ll \dot{m}(\langle v_{en} \rangle_{A_{en}} - \langle v_s \rangle_{A_s}) \quad (8.55a)$$

$$V_\beta \langle \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} \rangle^\beta \ll \frac{\dot{m}}{2} (\langle v_{en} \rangle_{A_{en}}^2 - \langle v_s \rangle_{A_s}^2) \quad (8.55b)$$

De esta forma, la ecuación (8.54a) se reduce a la ecuación (20) de Betz (1927), mientras que la ecuación (8.54b) se simplifica a la ecuación (18) del mismo trabajo. Al combinar estas ecuaciones resultantes, se obtienen las siguientes expresiones para la potencia y la velocidad de giro del disco actuador,

$$P_{BJ} = [\dot{m}(\langle v_{en} \rangle_{A_{en}} - \langle v_s \rangle_{A_s})] \langle v_\omega \rangle \quad (8.56a)$$

$$\langle v_\omega \rangle_{BJ} = \frac{\langle v_{en} \rangle_{A_{en}} + \langle v_s \rangle_{A_s}}{2} \quad (8.56b)$$

Con el fin de ejemplificar y obtener más información sobre las suposiciones (8.38), (8.41), (8.44), (8.49) y (8.55), se llevaron a cabo simulaciones numéricas para un número de Reynolds de 10^7 y un *tip-speed ratio* de 6. Se encontró que todas las suposiciones se satisfacen con al menos dos órdenes de magnitud de diferencia. Además, la suposición (8.44) b) se cumple siempre y cuando la diferencia entre las áreas entre la entrada y la salida sea suficientemente pequeña; de modo que, esta suposición funge como una guía para determinar las dimensiones de la región de promediado, al menos para este modelo.

Aunque las suposiciones, para llegar a las expresiones propuestas en la teoría de BJ, (8.56), se cumplen cabalmente; también se llevó a cabo, por otro lado, un proceso de escalamiento para llegar a las ecuaciones (8.56) bajo las mismas premisas de la teoría de Betz-Joukowsky, como son: que la forma de la región de promediado debe corresponder a la descrita por las líneas de corriente, que se utilice la hipótesis de *disco actuador clásico*, entre otras. Este análisis se encuentra disponible en el Apéndice A (el cual corresponde al reciente trabajo de Paéz-García & Valdés-Parada (2019)).

Al comparar las suposiciones del cuadro 10.3.1 mostrado en el Apéndice A con las utilizadas

para llegar a las ecuaciones (8.56), puede notarse que sólo las primeras cuatro son novedosas ya que son consecuencia de la forma de la región de promediado. Estas suposiciones se evaluaron en el trabajo de Paéz-García & Valdés-Parada (2019) para un número de Reynolds de 10^7 y un *tip-speed ratio*. En dicho trabajo se mostró que las desigualdades del punto número cuatro del cuadro 10.3.1 (transporte de masa en laterales), así como la segunda desigualdad del punto número 6 (transporte de movimiento en laterales) son las más difíciles de satisfacer (sus diferencias son de un orden de magnitud), en el trabajo se encontró que esto puede deberse a los efectos de la estela que permiten que parte de la masa escape de las superficies laterales del dominio de promediado. Las demás restricciones son las más fáciles de satisfacer ya que se encontró una diferencia de al menos tres órdenes de magnitud.

8.7 Resumen del capítulo

En este capítulo se desarrollaron modelos a la escala megascópica a partir de las ecuaciones que gobiernan el transporte (de masa, cantidad de movimiento lineal y energía mecánica) a la escala microscópica. Una de las ventajas de la metodología usada es la capacidad de identificar con claridad cada una de las suposiciones que sean necesarias para el desarrollo de los modelos. De esta forma, se obtuvieron dos versiones de los modelos megascópicos: la primera sólo contiene las suposiciones adoptadas en el planteamiento del problema en la escala microscópica; la segunda versión involucra las suposiciones que se listan en el siguiente cuadro

Suposición 8.7.1 — Suposiciones del modelo megascópico simplificado.

1. Las velocidades en las superficies de entrada y salida deben satisfacer las siguientes restricciones

$$\langle \tilde{v}_{en}^2 \rangle_{A_{en}} \ll \langle v_{en} \rangle_{A_{en}}^2; \quad \langle \tilde{v}_{en}^3 \rangle_{A_{en}} \ll \langle v_{en} \rangle_{A_{en}}^3$$

$$\langle \tilde{v}_s^2 \rangle_{A_s} \ll \langle v_s \rangle_{A_s}^2; \quad \langle \tilde{v}_s^3 \rangle_{A_s} \ll \langle v_s \rangle_{A_s}^3$$

2. La fuerza del pseudo-disco actuador debe ser mucho mayor que la que experimentan las superficies laterales de las palas y el rotor; así como la fuerza de presión en las entradas y salidas de la región de promediado

$$T_{L,nz}A_{LP} + T_{H,nz}A_H \ll A_D T_{\text{máx}}$$

$$p_{en}A_s \ll A_D T_{\text{máx}}$$

3. La potencia del pseudo-disco actuador debe ser mucho mayor que la potencia en las superficies laterales de las palas y el rotor, esto es

$$A_{LP}T_L v_L + A_H T_H v_H \ll T_{\text{máx}} A_D v_\omega$$

4. Los promedios de los esfuerzos en las diversas superficies del pseudo-disco actuador deben satisfacer las siguientes restricciones

$$\langle \tilde{T}_{\text{máx}} v_\omega \rangle_{A_{Fa}} \ll \langle T_{\text{máx}} \rangle_{A_{Fa}} \langle v_\omega \rangle_{A_{Fa}}$$

$$\langle \tilde{T}_{\text{mín}} v_\omega \rangle_{A_{Ba}} \ll \langle T_{\text{mín}} \rangle_{A_{Ba}} \langle v_\omega \rangle_{A_{Ba}}$$

Para utilizar en la práctica los modelos deducidos se requiere cierta información en la escala microscópica. De hecho, se llevó a cabo una comparación entre los modelos simplificados a la megaescala y la teoría de Betz-Joukowsky, notando que para llegar al último es necesario añadir suposiciones. Al hacer la comparación de los modelos, se encontró que ambos comparten casi las mismas suposiciones, excepto que la teoría de Betz-Joukowsky requiere además que: 1) La forma de la región de promediado debe corresponder a la descrita por las líneas de corriente; 2) Se utiliza la hipótesis de disco actuador clásico; 3) Las velocidades de entrada y salida son constantes y 4) La velocidad de entrada debe ser mucho mayor que el promedio de la velocidad lateral multiplicada por una razón de aspecto.

Por último, haciendo referencia a los modelos desarrollados en las tres diferentes escalas, se concluye que los modelos deducidos en la escala megascópica aportan información global respecto a la fuerza y potencia del viento en el sistema. En contraparte, los modelos promedio macroscópico y de la condición de frontera para la estela, aportan información sobre la velocidad, la presión y la potencia en cada punto del sistema. De esta forma, la elección del tipo de modelo a utilizar va acorde las necesidades y disponibilidad de información.



Parte Tres

9	Conclusiones	111
10	Apéndice A	123
10.1	Escalamiento del transporte de masa	
10.2	Escalamiento del transporte de movimiento lineal	
10.3	Escalamiento del transporte de energía mecánica	
	Bibliografía	133



9. Conclusiones

En este trabajo se elaboraron tres modelos de transporte de cantidad de movimiento y, en su caso, de energía mecánica alrededor de turbinas eólicas en tres diferentes niveles de escala. Cada uno de estos modelos atiende necesidades específicas actuales en el estudio de turbinas eólicas. El primer modelo reacomodó la información de la turbina en términos fuente en las ecuaciones promedio macroscópicas de transporte de tal forma que no es necesario contar con la geometría de la turbina eólica al momento de resolver las ecuaciones. El segundo modelo consistió en reacomodar la información de la turbina en una condición de frontera, la cual es necesaria para el estudio de modelos de estela ya existentes. El tercer modelo se basó en el estudio de una turbina eólica a la escala megascópica aportando dos niveles de simplificación de ecuaciones: el primer nivel no requirió imponer suposiciones adicionales a las de la definición del sistema; mientras que para el segundo nivel se requirió imponer sistemáticamente algunas suposiciones razonables con el fin de obtener un modelo simplificado. Dada la complejidad del primer modelo, éste requiere información de la microescala para su cerradura; mientras que este no es el caso en el modelo del segundo nivel. En seguida se abordan las conclusiones de forma detallada para cada uno de los modelos desarrollados.

Respecto al modelo promedio a la escala macroscópica, se concluye que los términos promedio f y m capturan la influencia de la turbina eólica sobre la fuerza y potencia del viento, respectivamente. La magnitud de los perfiles de estos términos promedio es sensible a la forma y tamaño de la región de promediado, vista esta última como un instrumento de medición. Además, se concluye que

los términos promedio son sensibles a las condiciones de flujo y operación de la turbina, es decir, a los valores del número de Reynolds y al *tip-speed ratio*. Específicamente, para el término m , se concluye que los efectos de la disipación viscosa son despreciables respecto a la contribución debida a la fuerza de la turbina eólica multiplicada por la velocidad promedio del viento. Para las condiciones estudiadas, basta con usar la ecuación de transporte de cantidad de movimiento para calcular tanto la fuerza como la potencia macroscópica del viento. Además en el ejemplo del funcionamiento del modelo se encontró que éste reproduce los perfiles de velocidad resultantes de simulaciones a la escala microscópica con un 90% de precisión, donde los mayores errores se encontraron después de la turbina. Esto quiere decir que es posible aproximar las variaciones espaciales del término f en el plano perpendicular al flujo por un valor promedio en el centroide de dicho plano con un 90% de confianza.

Dirigiendo la atención al modelo de la condición de frontera para la estela, se concluye que no todas las fuentes que mueven al problema son necesariamente importantes. En específico, se encontró que la contribución de los esfuerzos a la salida de la turbina predominan sobre aquellas provenientes de la velocidad de entrada, la velocidad de giro de la turbina y los esfuerzos en las superficies laterales. Sin embargo, estos efectos si están considerados de manera implícita, en la condición de frontera final a través de la variable de cerradura. La metodología utilizada es lo suficientemente versátil que permite corregir a la condición de frontera si es que las suposiciones impuestas llegaran a fallar.

Por su parte, del modelo a la escala megascópica se concluye que es posible conservar toda la información de la microescala sin la necesidad de usar la hipótesis clásica de disco actuador. Esto fue posible gracias a la propuesta de un pseudo disco actuador que conserva la geometría real de las palas. Sin embargo, este modelo requiere de información a la escala microscópica para estar cerrado. Además, se presentó el resultado de imponer algunas suposiciones consistentes con la operación práctica de turbinas eólicas que llevan a un modelo que considera tanto las aportaciones de la disipación viscosa como de la topografía. Cuando estas contribuciones no son relevantes y se justifique el uso de la hipótesis de disco actuador, se recupera la teoría de Betz-Joukowski y el teorema de Froude.

Como un primer diagnóstico hacia el estudio de turbinas eólicas, se propone partir del uso de la versión escalada del tercer modelo. En este sentido, el modelo proporciona una primera aproximación de la potencia disponible del viento. En contraste, si se requiere obtener la potencia del viento en puntos discretos de un sistema eólico, se recomienda usar el modelo promedio macroscópico. Aquí cabe recordar que en el ejemplo de aplicación simplificado para la cerradura

del modelo se encontró que su desempeño no es óptimo después de la turbina eólica. Si esta zona del sistema resulta ser prioritaria, se recomienda usar el modelo de condición de frontera para el estudio de la estela o una mejor cerradura en el modelo promedio macroscópico.

Por último, a manera de prospectiva se listan las siguientes actividades para trabajos futuros:

1. Estudiar los cambios espaciales de las componentes del vector \mathbf{f} a lo largo del plano perpendicular al flujo para diferentes posiciones axiales.
2. Llevar a cabo las soluciones de los problemas de cerradura asociados al modelo de condición de frontera para la estela con el fin de verificar las suposiciones impuestas.
3. Explorar la pertinencia de aproximaciones, por ejemplo tipo Oseen, de la velocidad para la solución de los problemas de cerradura del modelo de condición de frontera para la estela.
4. Llevar a cabo simulaciones numéricas a escala microscópica para mostrar la pertinencia de las suposiciones hechas en el modelo simplificado en la megaescala.
5. Analizar la influencia del ángulo de incidencia del viento, la orografía y la geometría de la turbina en el desempeño de los tres modelos desarrollados aquí.

El viento ululaba entre las ramas de los árboles, y ya se sabe que en el mundo no hay música más dulce que la del viento sonando en las copas de los pinos al atardecer.

– *Lucy Montgomery*



Nomenclatura

Superficies, regiones y volúmenes

$\mathcal{A}_{\ell i}$ superficies laterales del sistema en la región Ω_i

$\mathcal{A}_{\ell o}$ superficies laterales del sistema en la región Ω_o

\mathcal{A}_{ℓ} superficies laterales del sistema

$\mathcal{A}_{\phi i}$ superficies fijas del sistema en la región Ω_i

$\mathcal{A}_{\phi o}$ superficies fijas del sistema en la región Ω_o

\mathcal{A}_{ϕ} superficies fijas del sistema

\mathcal{A}_{Ba} superficie trasera del aire circundante en el plano de la turbina eólica

\mathcal{A}_{BP} superficie trasera de las palas

\mathcal{A}_{en} superficie de entrada del sistema

\mathcal{A}_{Fa} superficie frontal del aire circundante en el plano de la turbina eólica

\mathcal{A}_{FP} superficie frontal de las palas

\mathcal{A}_H superficie del rotor

\mathcal{A}_{LP} superficie lateral de las palas

\mathcal{A}_M	superficies móviles del sistema
\mathcal{A}_{oiL}	superficie divisoria de flujo libre entre las regiones Ω_i y Ω_o
\mathcal{A}_{oiM}	superficie divisoria que contiene en su mayoría la proyección del radio de giro de la turbina, entre las regiones Ω_i y Ω_o
\mathcal{A}_s	superficie de salida del sistema
\mathcal{A}_{Ti}	superficie superior del sistema en la región Ω_i
\mathcal{A}_{To}	superficie superior del sistema en la región Ω_o
\mathcal{A}_T	superficie superior del sistema
\mathcal{V}	región de promediado
\mathcal{V}_β	región de la fase β (aire)
Ω_i	región que se caracteriza por contener el flujo de aire, en su mayoría, no perturbado, y que contiene a la turbina eólica.
Ω_o	región que se caracteriza por contener el flujo de aire, en su mayoría, perturbado
A_D	área del pseudo-disco actuador, m^2
$A_{\beta\sigma}$	área de la superficie sólida, m^2
V_β	volumen de la fase β , m^3

Vectores, tensores y variables de cerradura

A	tensor de segundo de la variable de cerradura asociada a la contribución de la velocidad de entrada
C	tensor de segundo orden de la variable de cerradura asociada a la contribución de los esfuerzos en \mathcal{A}_{oiM} , kg/s
D	tensor de segundo orden de la variable de cerradura asociada a la contribución de los esfuerzos en \mathcal{A}_{oiL} , kg/s
G	tensor de segundo orden asociado a la función de Green correspondiente a la velocidad, $1/m$

\mathbf{G}^T	transpuesta del tensor de segundo orden asociado a la función de Green correspondiente a la velocidad, 1/m
\mathbf{I}	tensor identidad
\mathbf{T}	tensor total de esfuerzos, Pa
\mathbf{T}^*	tensor total de esfuerzos, adimensional
\mathbf{T}_q	tensor total de esfuerzos en las superficies q donde $q = \phi, H, L$, para las superficies fijas, el rotor H , y las laterales de las palas, Pa
$\mathbf{T}_{\text{máx}h}$	tensor total de esfuerzos en h donde $h = P, a$, para las palas y aire frontal del pseudo-disco actuador, respectivamente, Pa
$\mathbf{T}_{\text{mín}h}$	tensor total de esfuerzos en h donde $h = P, a$, para las palas y aire detrás en el pseudo-disco actuador, respectivamente, Pa
b	variable de cerradura asociada a la contribución de la velocidad de giro de la turbina eólica, s^2/kg
λ_ω	vector unitario en la dirección del vector de velocidad angular
\mathbf{a}	vector de la variable de cerradura asociada a la contribución de la velocidad de entrada, s/m
\mathbf{b}	vector de la variable de cerradura asociada a la contribución de la velocidad de giro de la turbina eólica
\mathbf{c}	vector de la variable de cerradura asociada a la contribución de los esfuerzos en \mathcal{A}_{oiM} , $1/(\text{Pa}^2 \cdot \text{s})$
\mathbf{d}	vector de la variable de cerradura asociada a la contribución de los esfuerzos en \mathcal{A}_{oiL} , $1/(\text{Pa}^2 \cdot \text{s})$
\mathbf{f}	vector denotado como término promedio de la ecuación promedio macroscópica del transporte de cantidad de movimiento lineal, Pa/m
\mathbf{g}	vector asociado a la función de Green correspondiente a la presión, $\text{Pa} \cdot \text{s}/\text{m}^2$
\mathbf{n}	vector unitario normal a las superficies del sistema
$\mathbf{n}_{\beta\sigma}$	vector normal unitario desde la fase fluida (aire) hacia la fase sólida (turbina eólica)

\mathbf{r}	vector que localiza cualquier punto en la superficie \mathcal{A}_{oiM}
\mathbf{r}_M	vector de posición resultado del producto cruz entre λ_ω y \mathbf{r}_T , m
\mathbf{r}_T	vector de posición respecto a un punto cualquiera del eje de rotación, m
\mathbf{v}	vector velocidad, m/s
\mathbf{v}^T	transpuesta del vector velocidad, m/s
\mathbf{v}_ω	vector de velocidad angular, 1/s
\mathbf{v}_k	vector velocidad en las regiones Ω_k en donde $k = i, o$, m/s
\mathbf{v}_{en}	vector velocidad a la entrada del sistema, m/s
\mathbf{x}_e	vector denotado como el centro de la región de promediado cuando ésta contiene a la turbina eólica
\mathbf{x}	vector que localiza el centro en la superficie \mathcal{A}_{oiM}
\mathbf{y}	vector de posición que localiza puntos de la fase fluida respecto al centroide
$\boldsymbol{\tau}$	tensor de esfuerzos viscosos, Pa
$\boldsymbol{\tau}^*$	tensor de esfuerzos viscosos, adimensional
$\boldsymbol{\tau}_G$	tensor de esfuerzos viscosos en términos de las funciones de Green, Pa·s/m ²
$\boldsymbol{\tau}_k$	tensor de esfuerzos viscosos en las regiones Ω_k del sistema, en donde $k = i, o$, Pa
$\boldsymbol{\zeta}$	vector unitario tangencial a la superficie \mathcal{A}_M
$\boldsymbol{\zeta}$	vector unitario tangencial a las superficies del sistema

Letras griegas

β	aire en el sistema denotado como la fase fluida
$\boldsymbol{\zeta}$	vector unitario tangencial a la superficie
\mathcal{P}	presión dinámica del aire, Pa
\mathcal{P}^*	presión dinámica del aire, adimensional
\mathcal{V}	región de promediado

\mathcal{V}_β	región de promediado que contiene la fase aire
μ	viscosidad del aire, Pa·s
ρ	densidad del aire, kg/m ³
σ	turbina eólica denotada como la fase sólida
ε_β	fracción volumétrica de la fase- β

Longitudes


ℓ_x	longitud del sistema en la dirección x , adimensional
ℓ_y	longitud del sistema en la dirección y , adimensional
ℓ_z	longitud del sistema en la dirección z , adimensional
$r_{0,xr}$	longitud de la región de promediado en forma de rectángulo en la dirección x , adimensional
$r_{0,x}$	longitud de la región de promediado en forma de círculo o elipse en la dirección x , adimensional
$r_{0,yc}$	longitud de la región de promediado en forma de círculo en la dirección y , adimensional
$r_{0,ye}$	longitud de la región de promediado en forma de elipse en la dirección y , adimensional
$r_{0,yr}$	longitud de la región de promediado en forma de rectángulo en la dirección y , adimensional
ℓ_R	longitud del radio de giro de la turbina eólica, m
ℓ_v	longitud característica asociada al gradiente de velocidad, m

Operadores y escalares

\dot{m}	flujo másico, kg/m ²
$\langle \cdot \rangle$	operador superficial de un promediado en superficie
$\langle \cdot \rangle$	operador superficial de un promediado en volumen
$\langle \cdot \rangle^\beta$	operador intrínseco de un promediado en volumen
$\tilde{\tau}_{\text{máx}h}$	desviaciones del tensor de esfuerzos viscosos en h donde $h = P, a$, para las palas y aire frontal en el pseudo-disco actuador, respectivamente, Pa

$\tilde{\tau}_{\min h}$	desviaciones del tensor de esfuerzos viscosos en h donde $h = P, a$, para las palas y aire detrás en el pseudo-disco actuador, respectivamente, Pa
$\tilde{T}_{\max h}$	componente \mathbf{ne}_z de las desviaciones del tensor total de esfuerzos en h donde $h = P, a$, para las palas y aire frontal respectivamente, Pa
$\tilde{T}_{\min h}$	componente \mathbf{ne}_z de las desviaciones del tensor total de esfuerzos en h donde $h = P, a$, para las palas y aire trasera respectivamente, Pa
\tilde{v}_L	desviaciones de la velocidad en las superficies L , donde $L = en, s$, a la entrada y salida del sistema, m/s
F	fuerza sobre el pseudo-disco actuador, N
F_ϕ	fuerza sobre las superficies fijas, N
F_a	fuerza sobre el aire en el pseudo-disco actuador, N
F_p	fuerza sobre el la palas en el pseudo-disco actuador, N
F_{LH}	fuerza sobre las laterales de las palas y el rotor, N
m	término promedio en la ecuación promedio megascópica de transporte de energía mecánica, Pa/s
P	potencia sobre el pseudo-disco actuador, N m/s
p	presión del aire en las superficies L , donde $L = en, \ell$, a la entrada y laterales del sistema, Pa
p_k	presión del aire en las regiones Ω_k del sistema, en donde $k = i, o$, Pa
P_{LH}	potencia sobre las laterales de las palas y el rotor, N m/s
p_L	presión del aire ala entrada del sistema, Pa
p_M	presión del aire en la superficie de la turbina eólica, Pa
$T_{\max h}$	componente \mathbf{ne}_z del tensor total de esfuerzos en h donde $h = P, a$, para las palas y aire frontal respectivamente, Pa
$T_{\min h}$	componente \mathbf{ne}_z del tensor total de esfuerzos en h donde $h = P, a$, para las palas y aire trasera respectivamente, Pa
v^*	velocidad del aire, adimensional

v_{en}^*	velocidad del aire en la superficie de entrada, adimensional
v_L	velocidad del aire en las superficies L , en donde $L = en, s, \ell$ para la entrada, salida y laterales, respectivamente, m/s
v_L	velocidad en las superficies L , donde $L = en, s, \ell$, a la entrada, salida y laterales del sistema, m/s
v_ω	velocidad del aire angular sobre la superficie de la turbina eólica, 1/s
v_{ref}	velocidad de referencia, m/s
$\tau_{máxh}$	tensor de esfuerzos viscosos en h donde $h = P, a$, para las palas y aire frontal en el pseudo-disco actuador, respectivamente, Pa
$\tau_{mính}$	tensor de esfuerzos viscosos en h donde $h = P, a$, para las palas y aire detrás en el pseudo-disco actuador, respectivamente, Pa
f_t	componentes del término promedio \mathbf{f} donde $t = x, x, z$, Pa/m
v_D	representa el orden de magnitud de la velocidad máxima en el pseudo-disco actuador, m^3
v_M	velocidad tangencial de giro de la turbina eólica, m/s
tsr	tip-speed-ratio, relación entre la velocidad de entrada al sistema y la velocidad de giro en la punta de la pala de la turbina eólica



10. Apéndice A

El objetivo de este capítulo consiste en el desarrollo de un modelo a la escala megascópica, ℓ^{me} , a partir de las ecuaciones de transporte a la escala microscópica, ℓ_{mi} ; usando un disco actuador y una forma de región de promediado basada en un tubo de líneas de corriente (ver figura A.1). Para comenzar se considera que el flujo es incompresible y en estado estacionario, dando lugar a las siguientes ecuaciones de transporte de masa (A-1a), cantidad de movimiento lineal (A-1b) y energía mecánica (A-1c) a la escala microscópica, ℓ_{mi} .

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{A-1a})$$

$$\rho \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v}) = \nabla \cdot \mathbf{T} \quad (\text{A-1b})$$

$$\frac{\rho}{2} \nabla \cdot (v^2 \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{T}^T : \nabla \mathbf{v} \quad (\text{A-1c})$$

donde ρ and \mathbf{v} representan la densidad y la velocidad del aire, respectivamente. En la entrada y salida del sistema se asume que el flujo de aire es unidireccional, la presión es constante y que no existen esfuerzos viscosos. en \mathcal{A}_{en}

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} \quad (\text{A-2a})$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_z = p_{en} \quad (\text{A-2b})$$

$$\mathbf{v} = v_{en} \mathbf{e}_z \quad (\text{A-2c})$$

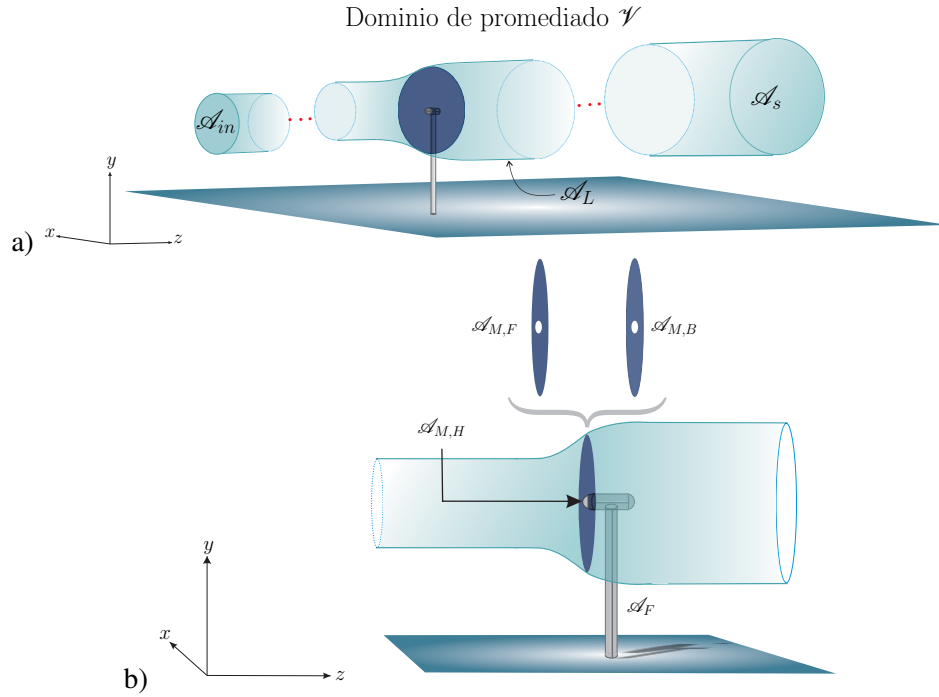


Figura A.1: Esquemas de a) el sistema que incluye el dominio de promediado, las superficies de entradas, salidas y laterales b) el disco actuador que muestra sus superficies delantera y trasera.

en \mathcal{A}_{out} En este caso, el vector \mathbf{n} representa el vector normal unitario desde la fase gas (aire) hacia la superficie en donde se aplique la condición de frontera. Respecto a las superficies fijas de sistema, se considera lo siguiente: en \mathcal{A}_ϕ

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_\phi \quad (\text{A-3a})$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (\text{A-3b})$$

En donde se aplica la condición de no deslizamiento, y se considera que el tensor total de esfuerzos tiene un valor \mathbf{T}_ϕ . En las condiciones de frontera laterales, se considera que los esfuerzos viscosos son despreciables con respecto a la presión. Además, se considera que la velocidad en la laterales es v_L , que en general no es constante. en \mathcal{A}_L

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} \quad (\text{A-4a})$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = -\mathbf{n} p_L \quad (\text{A-4b})$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = v_L \quad (\text{A-4c})$$

Se considera que las partes movibles del sistema son el disco actuador y el rotor. Con respecto a este último, se considera que no hay transporte de masa a través y que el tensor total de esfuerzos

tiende a \mathbf{T}_H

en $\mathcal{A}_{M,H}$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_H \quad (\text{A-5a})$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{A-5b})$$

Por último, las condiciones de frontera del disco actuador tienen un tratamiento diferente a las otras. Para empezar, el disco actuador es un recurso matemático para representar a las aspas de la turbina eólica y al aire circundante, como un pseudo-continuo. Además, el disco actuador se concibe como una región en dos dimensiones, por lo que tiene una superficie delantera, $A_{M,F}$, y una superficie trasera $A_{M,B}$ (ver figura A.1 b)). Debido a lo anterior, fue posible desarrollar la condición de frontera en la superficie del disco actuador, bajo las ideas de las condiciones de salto para flujo multifásico. Es decir, en la frontera del disco actuador se encontró que el esfuerzo total es máximo porque la presión alcanza su valor máximo. Contrario a la superficie $A_{M,B}$, en donde el esfuerzo total es mínimo, ya que la presión sufre un salto. Sin embargo, se asume que los valores máximos y mínimos son del mismo orden de magnitud. Además, la componente normal de la velocidad en las superficies $A_{M,F}$ y $A_{M,B}$, también es del mismo orden de magnitud. en $\mathcal{A}_{M,F}$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_z = T_{\text{máx},nz} \quad (\text{A-6a})$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = v_{\omega,z} \quad (\text{A-6b})$$

en $\mathcal{A}_{M,B}$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_z = -T_{\text{mín},nz} \quad (\text{A-7a})$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = -v_{\omega,z} \quad (\text{A-7b})$$

Hasta este punto se han descrito todas las condiciones de frontera del sistema en donde además, se han impuesto algunas otras suposiciones. Esto último se considera como un segundo set de suposiciones.

10.1 Escalamiento del transporte de masa

Para comenzar el proceso de escalamiento, se define un operador de promediado para cualquier cantidad, ψ

$$\langle \psi \rangle^\beta = \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{V}_\beta} \psi dV \quad (\text{A-8})$$

donde \mathcal{V}_β representa el dominio ocupado por el aire en el dominio de promediado \mathcal{V} . V_β es el volumen correspondiente \mathcal{V}_β . Además, un varias partes del desarrollo se será necesario usar un operador superficial de promediado

$$\langle \psi \rangle_j = \frac{1}{A_j} \int_{\mathcal{A}_j} \psi dA \quad (\text{A-9})$$

en donde $A_j = \int_{\mathcal{A}_j} dA$ es el área de la superficie \mathcal{A}_j ($j = \text{entrada}(e), \text{salida}(s), \text{laterales}(\ell), \dots$). Aplicando el operador de promediado a la ecuación (A-1a), se obtiene:

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle^\beta = \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{V}_\beta} \nabla \cdot \mathbf{v} dV = 0 \quad (\text{A-10})$$

O, después de aplicar el teorema de la divergencia,

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_e} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}_{-v_{en}} dA + \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{out}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}_{v_s} dA + \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_L} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}_{v_L} dA + \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_\phi} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}_0 dA \\ + \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{M,H}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}_0 dA + \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{M,F}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}_{v_{\omega,z}} dA + \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{M,B}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}_{-v_{\omega,z}} dA = 0 \end{aligned} \quad (\text{A-11})$$

en donde se han tomado en cuenta las condiciones de frontera par cada uno de los términos. Llevando a ca simplificaciones y multiplicando por ρV_β , se obtiene:

$$\rho v_{en} A_{en} = \rho v_2 A_s + \rho \langle v_L \rangle_{A_L} A_L \quad (\text{A-12})$$

Este resultado establece que el flujo de masa que entra al dominio de promediado puede escaparse por las fronteras laterales y por la salida. Esta ecuación, puede simplificarse bajo la siguiente restricción de escala

$$\langle v_L \rangle_{A_L} \frac{A_L}{A_e} \ll v_{en} \quad (\text{A-13})$$

Esta restricción se cumple siempre y cuando la magnitud de la componente normal del vector de velocidad sea varios órdenes de magnitud más pequeña que la velocidad de entrada v_{en} . De esta manera, la masa de aire solo abandonará el sistema al pasar por la superficie de salida A_s , La versión final de la ecuación de transporte de masa a escala mega escala es

$$\rho v_{en} A_{en} = \rho v_2 A_s = \dot{m} \quad (\text{A-14})$$

10.2 Escalamiento del transporte de movimiento lineal

Es pertinente mencionar que, las superficies de entrada y salida del sistema, así como del disco actuador, están alienadas con el eje de rotación, es decir el eje z . Esto motiva a tomar la proyección de la ecuación (A-1b) con el vector \mathbf{e}_z , seguido de la aplicación del operador de promediado

$$\frac{\rho}{V_\beta} \int_{\gamma_\beta} \nabla \cdot (\mathbf{v}v_z) dV = \frac{1}{V_\beta} \int_{\gamma_\beta} \nabla \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_z dV \quad (\text{A-15})$$

Aplicando el teorema de la divergencia en ambos lados de la ecuación de arriba y multiplicando por V_β

$$\begin{aligned} & \rho \int_{\mathcal{A}_{en}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}v_{en}}_{-v_{en}^2} dA + \rho \int_{\mathcal{A}_s} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}v_2}_{v_2^2} dA + \rho \int_{\mathcal{A}_L} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}v_z}_{v_L v_z} dA + \rho \int_{\mathcal{A}_{M,H}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}v_z}_0 dA + \rho \int_{\mathcal{A}_{M,F}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}v_{\omega,z}}_{v_{\omega,z}^2} dA \\ & + \rho \int_{\mathcal{A}_{M,B}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}v_{\omega,z}}_{-v_{\omega,z}^2} dA = \int_{\mathcal{A}_e} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_z}_{p_{en}} dA + \int_{\mathcal{A}_{out}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_z}_{-p_{en}} dA + \int_{\mathcal{A}_L} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_z}_{-p_L \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z} dA \\ & + \int_{\mathcal{A}_\phi} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_z}_{T_{\phi,nz}} dA + \int_{\mathcal{A}_{M,H}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_z}_{T_{H,nz}} dA + \int_{\mathcal{A}_{M,F}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_z}_{T_{\text{máx},nz}} dA + \int_{\mathcal{A}_{M,B}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_z}_{-T_{\text{mín},nz}} dA \quad (\text{A-16}) \end{aligned}$$

donde las condiciones a la frontera en cada superficie fueron tomadas en cuenta y sustituidas en cada integral. Tomando la definición del promediado superficial dada por la ecuación (A-9) y que v_{en} , v_s y p_{en} no varían con la posición, se obtiene

$$\begin{aligned} -\rho v_{en}^2 A_{en} + \rho v_s^2 A_s + \rho \langle v_L v_z \rangle_{\mathcal{A}_L} A_L &= p_{en} (A_{en} - A_{out}) - \langle p_L \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z \rangle_{\mathcal{A}_L} A_L + \langle T_{\phi,nz} \rangle_{\mathcal{A}_\phi} A_\phi \\ &+ \langle T_{H,nz} \rangle_{\mathcal{A}_{M,H}} A_{M,H} + \langle T_{\text{máx},nz} \rangle_{\mathcal{A}_{M,F}} A_{M,F} - \langle T_{\text{mín},nz} \rangle_{\mathcal{A}_{M,B}} A_{M,B} \quad (\text{A-17}) \end{aligned}$$

Con el objetivo de simplificar este resultado, se llevan a cabo las siguientes restricciones:

$$\langle v_\ell v_z \rangle_{A_\ell} \frac{A_\ell}{A_e} \ll v_{en}^2 \quad (\text{A-18a})$$

$$\langle T_{\phi,nz} \rangle_{A_\phi} A_\psi \ll \mathbf{O} \left(\langle T_{\text{máx},nz} \rangle_{A_{M,F}} - \langle T_{\text{mín},nz} \rangle_{A_{M,B}} \right) A_M \quad (\text{A-18b})$$

$$\langle T_{H,nz} \rangle_{A_{M,H}} A_{M,H} \ll \mathbf{O} \left(\langle T_{\text{máx},nz} \rangle_{A_{M,F}} - \langle T_{\text{mín},nz} \rangle_{A_{M,B}} \right) A_M \quad (\text{A-18c})$$

$$p_{en} (A_{en} - A_{out}) \ll \mathbf{O} \left(\langle T_{\text{máx},nz} \rangle_{A_{M,F}} - \langle T_{\text{mín},nz} \rangle_{A_{M,B}} \right) A_M \quad (\text{A-18d})$$

$$\langle p_L \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z \rangle_{A_L} A_L \ll \mathbf{O} \left(\langle T_{\text{máx},nz} \rangle_{A_{M,F}} - \langle T_{\text{mín},nz} \rangle_{A_{M,B}} \right) A_M \quad (\text{A-18e})$$

La primera restricción es compatible con la de la ecuación (A-13) y debe considerarse como una restricción para la velocidad de entrada. Las dos siguientes restricciones requieren que la fuerza experimentada por el disco actuador sea mucho mayor que la fuerza ejercida por el viento sobre las partes fijas de la turbina y el rotor. Finalmente, las últimas dos restricciones requieren que la fuerza alrededor del disco del actuador sea mucho mayor que la diferencia de fuerzas entre la entrada y la salida, así como la fuerza sobre la superficie lateral. Ciertamente, las superficies de entrada y salida no pueden ser iguales porque, de la ecuación (A-14), esto llevaría a la conclusión de que las velocidades de entrada y salida son iguales. Por lo tanto, la restricción dada en (A-18d) debe considerarse como una guía sobre las secciones transversales del dominio de promediado. Estas restricciones parecen razonables, ya que se espera que los valores máximos de la presión tengan lugar cerca del disco del actuador.

Un punto de vista alternativo requiere de considerar que el tamaño de la región de promediado es tal que los efectos de la capa límite son capturados. Por lo tanto, la presión del fluido en las superficies laterales pueden ser aproximadas a p_{en} y por lo tanto, la componente normal de la velocidad en las superficies laterales se puede despreciar con respecto a v_{en} . Bajo estas condiciones, las restricciones (A-18d) y (A-18e) no son necesarias ya que las superficies del dominio de promediado forman una superficie cerrada, como lo explica [van Kuik \(2018\)](#). Además, las restricciones (A-13) y (A-18a) automáticamente se satisfacen. Bajo estas condiciones, la ecuación (A-17) se reduce a

$$- \left(\langle T_{\text{máx},nz} \rangle_{A_{M,F}} - \langle T_{\text{mín},nz} \rangle_{A_{M,B}} \right) A_M = \dot{m} (v_{en} - v_s) \quad (\text{A-19})$$

Aquí además, se ha usado la definición del flujo de masa dado por la ecuación (A-14).

10.3 Escalamiento del transporte de energía mecánica

Dirigiendo la atención a la ecuación (A-1c), y aplicando el operador de promediado, se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{\rho}{2V_\beta} \int_{\mathcal{V}_\beta} \nabla \cdot (v^2 \mathbf{v}) dV = \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{V}_\beta} \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) dV - \langle \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} \rangle^\beta \quad (\text{A-20})$$

Aplicando el teorema de la divergencia, y tomando en cuenta las correspondientes condiciones de frontera, se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{\rho}{2V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{in}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot (v_{en}^2 \mathbf{v})}_{-v_{en}^3} dA + \frac{\rho}{2V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{out}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot (v_s^2 \mathbf{v})}_{v_s^3} dA + \frac{\rho}{2V_\beta} \int_{\mathcal{A}_L} \underbrace{\mathbf{n} \cdot (v^2 \mathbf{v})}_{v^2 v_L} dA + \frac{\rho}{2V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{M,F}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot (v^2 \mathbf{v})}_{v^2 v_{\omega,z}} dA \\ & + \frac{\rho}{2V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{M,B}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot (v^2 \mathbf{v})}_{-v^2 v_{\omega,z}} dA = \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{in}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}}_{Pen v_{en}} dA + \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{out}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}}_{-Pen v_s} dA + \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_L} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}}_{-PL v_L} dA \\ & + \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{M,H}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}}_{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_H \cdot \mathbf{v}} dA + \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{M,F}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}}_{T_{\text{máx},nz} v_{\omega,z}} dA + \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{A}_{M,B}} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}}_{-T_{\text{mín},nz} v_{\omega,z}} dA - \langle \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} \rangle^\beta \quad (\text{A-21}) \end{aligned}$$

en donde las contribuciones inerciales por parte de las partes fijas y del rotor son cero. En las últimas dos integrales del lado derecho de la ecuación, se asume que la velocidad es $\mathbf{v} = v_{\omega,z} \mathbf{e}_z$ en la entrada ($\mathcal{A}_{M,F}$) y salida ($\mathcal{A}_{M,B}$) del disco actuador. Por lo tanto, los últimos dos términos se cancelan entre si. Finalmente, usando la ecuación a la escala megascópica del transporte de masa dada por la ecuación (A-14) se deduce que, los primeros dos términos de el lado derecho de la ecuación (A-21) se cancelan entre si. De esta forma, la ecuación (A-21) se reduce a

$$\begin{aligned} -\frac{\dot{m}}{2V_\beta} (v_{en}^2 - v_s^2) + \frac{\rho A_L}{2V_\beta} \langle v^2 v_L \rangle_{A_L} = -\frac{A_L}{V_\beta} \langle p_L v_L \rangle_{A_L} + \frac{A_M}{V_\beta} (\langle T_{\text{máx},nz} v_{\omega,z} \rangle_{A_{M,F}} - \langle T_{\text{mín},nz} v_{\omega,z} \rangle_{A_{M,B}}) \\ + \frac{A_{M,H}}{V_\beta} \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_H \cdot \mathbf{v} \rangle_{A_{M,H}} - \langle \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} \rangle^\beta \quad (\text{A-22}) \end{aligned}$$

Por supuesto que este resultado puede simplificarse al imponer las siguiente restricciones:

$$\langle v^2 v_L \rangle_{A_L} \frac{A_L}{A_{in}} \ll v_{en}^3 \quad (\text{A-23a})$$

$$A_{M,H} \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_H \cdot \mathbf{v} \rangle_{A_{M,H}} \ll A_M \mathbf{O} (\langle T_{\text{máx},nz} v_{\omega,z} \rangle_{A_{M,F}} - \langle T_{\text{mín},nz} v_{\omega,z} \rangle_{A_{M,B}}) \quad (\text{A-23b})$$

$$A_L \langle p_L v_L \rangle_{A_L} \ll A_M \mathbf{O} (\langle T_{\text{máx},nz} v_{\omega,z} \rangle_{A_{M,F}} - \langle T_{\text{mín},nz} v_{\omega,z} \rangle_{A_{M,B}}) \quad (\text{A-23c})$$

$$V_\beta \langle \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} \rangle^\beta \ll A_M \mathbf{O} (\langle T_{\text{máx},nz} v_{\omega,z} \rangle_{A_{M,F}} - \langle T_{\text{mín},nz} v_{\omega,z} \rangle_{A_{M,B}}) \quad (\text{A-23d})$$

La primer restricción es compatible con las restricciones asociadas con la entrada y salida del sistema, dadas por las ecuaciones (A-13) y (A-18a). La segunda restricción puede ser simplificada con el entendido de que la masa de aire no se transporta a través del rotor de la turbina, es decir

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_H \cdot \mathbf{v} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_H \cdot \mathbf{v} \quad (\text{A-24})$$

Por lo tanto, solo las contribuciones viscosas deben ser consideradas del lado izquierdo de la ecuación (A-23b). Lo que se traduce en que este término es despreciable en comparación con la potencia total alrededor del disco actuador. La tercer restricción de escala puede ser fácilmente satisfecha si el tamaño de la región de promediado captura la capa límite. Cuando este es el caso, v_L es prácticamente cero y ayuda a que las restricciones (A-23a) y (A-23c) puedan ser satisfechas. La cuarta restricción se basa en asumir que la disipación viscosa a la entrada del dominio de promediado es despreciable respecto a la potencia total del disco actuador. Ya que la disipación viscosa está promediada sobre \mathcal{V}_β y no solo alrededor del disco actuador, la restricción (A-23d) puede ser fácilmente satisfecha.

En este punto, vale la pena argumentar sobre la necesidad del concepto de disco actuador en los desarrollos. Para ello, es pertinente suponer, que en lugar de considerar un disco de actuador, se considera la geometría real de las cuchillas. Repitiendo el análisis para el desarrollo de las versiones megascópicas de las ecuaciones de masa y de momento lineal, resulta que este cambio en la geometría no se traduce en una modificación de los modelos finales. Sin embargo, en el desarrollo de la ecuación de energía mecánica megascópica, hay una diferencia crucial y se debe a que: dado que las cuchillas son impermeables al transporte de masa, entonces no hay contribución de la presión sobre $\mathcal{A}_{M,F}$ y $\mathcal{A}_{M,B}$. Por lo tanto, solo queda la contribución viscosa, lo que lleva a las simplificaciones (A-23) no se puedan obtener. Esta es una diferencia significativa con respecto a la teoría de Betz, donde el término principal es la presión alrededor de la turbina eólica y los efectos viscosos no se tienen en cuenta en el análisis. En otras palabras, sin el concepto de disco actuador, los desarrollos proporcionados hasta este punto, no se obtendrían y por lo tanto no se llegaría al teorema de Froude.

Regresando la atención a la ecuación (A-22), y basado en las simplificaciones dadas por la ecuación (A-23), resulta lo siguiente

$$A_M \left(-\langle T_{\text{máx},nz} v_{\omega,z} \rangle_{A_{M,F}} + \langle T_{\text{mín},nz} v_{\omega,z} \rangle_{A_{M,B}} \right) = \frac{\dot{m}}{2} (v_{en}^2 - v_s^2) \quad (\text{A-25})$$

Con el fin de expresar este resultado en términos de la velocidad de un disco actuador, es conveniente descomponer el esfuerzo en las superficies delantera y trasera en promedio y desviaciones:

$$T_{\text{máx},nz} = \langle T_{\text{máx},nz} \rangle_{A_{M,F}} + \tilde{T}_{\text{máx},nz} \quad (\text{A-26a})$$

$$T_{\text{mín},nz} = \langle T_{\text{mín},nz} \rangle_{A_{M,B}} + \tilde{T}_{\text{mín},nz} \quad (\text{A-26b})$$

Por lo tanto, la ecuación (A-25) se traduce en

$$\begin{aligned} \langle v_z \rangle_M A_M \left(-\langle T_{\text{máx},nz} \rangle_{A_{M,F}} + \langle T_{\text{mín},nz} \rangle_{A_{M,B}} \right) \\ + A_M \left(-\langle \tilde{T}_{\text{máx},nz} v_{\omega,z} \rangle_{A_{M,F}} + \langle \tilde{T}_{\text{mín},nz} v_{\omega,z} \rangle_{A_{M,B}} \right) = \frac{\dot{m}}{2} (v_{en}^2 - v_s^2) \end{aligned} \quad (\text{A-27})$$

aquí $\langle v_z \rangle_M \equiv \langle v_{\omega,z} \rangle_{A_{M,F}} = \langle v_{\omega,z} \rangle_{A_{M,B}}$. La ecuación (A-27) se puede simplificar bajo las siguientes restricciones

$$\frac{\langle \tilde{T}_{\text{máx},nz} v_{\omega,z} \rangle_{A_{M,F}}}{\langle v_z \rangle_M} \ll \mathbf{O} \left(\langle T_{\text{máx},nz} \rangle_{A_{M,F}} \right) \quad (\text{A-28a})$$

$$\frac{\langle \tilde{T}_{\text{mín},nz} v_{\omega,z} \rangle_{A_{M,B}}}{\langle v_z \rangle_M} \ll \mathbf{O} \left(\langle T_{\text{mín},nz} \rangle_{A_{M,B}} \right) \quad (\text{A-28b})$$

De esta forma, la ecuación (A-27) se reduce a

$$\langle v_z \rangle_M A_M \left(-\langle T_{\text{máx},nz} \rangle_{A_{M,F}} + \langle T_{\text{mín},nz} \rangle_{A_{M,B}} \right) = \frac{\dot{m}}{2} (v_{en}^2 - v_s^2) \quad (\text{A-29})$$

La restricción dada por (A-28) se satisface cuando se puede asumir que el tensor total de esfuerzos es uniforme en las superficies delantera y trasera del disco del actuador. Además, si la contribución de la tensión viscosa no se tiene en cuenta en el disco del actuador, esta restricción se traduce en suponer que, hay un salto de presión uniforme a través del disco del actuador, lo que es coherente con la teoría de Froude. Como punto final en el análisis, se sustituye la versión megascópica del transporte de movimiento lineal (A-19), en la ecuación de arriba, y se obtiene la expresión para el promedio de la velocidad de un disco actuador, $\langle v_z \rangle_M$, como:

$$\langle v_z \rangle_M = \frac{v_{en} + v_s}{2} \quad (\text{A-30})$$

la cual corresponde al teorema de Froude. En este punto, vale la pena señalar que si ambos lados de la ecuación de momento megascópica (A-19) se multiplican por $\langle v_z \rangle_M$, la ecuación resultante corresponde a la ecuación de energía mecánica (A-29). Esta correspondencia es la consecuencia

de las restricciones adoptadas en la derivación de los modelos a la mega escala. Para tener más claridad sobre este punto, es necesario centrar la atención a las ecuaciones (A-17) y (A-22), que son las versiones promedio del momento lineal y las ecuaciones de energía mecánica antes de adoptar las restricciones dadas en (A-18) y (A-23). Si la ecuación (A-17) se multiplica por $\langle v_z \rangle_M$, el resultado no corresponde a las encontradas en el desarrollo del modelo tipo uno de este trabajo. Finalmente y a manera de resumen, en el siguiente cuadro se muestran las restricciones a las que se llegaron a lo largo de este apéndice: por lo que en seguida solo se listan las suposiciones correspondientes

Suposición 10.3.1 — Suposiciones de la teoría de Betz-Joukowsky.

1. La forma de la región de promediado corresponde a la figura A.1a.
2. Se considera un disco actuador clásico, el cual no tiene espesor.
3. Las velocidades en las superficies de entrada y salida son constantes.
4. La velocidad de entrada debe satisfacer la siguiente restricción respecto a la velocidad en las superficies laterales de la región de promediado

$$\langle v_L \rangle_{A_L} \frac{A_L}{A_{en}} \ll v_{en}; \quad \langle v_\ell v_z \rangle_{A_\ell} \frac{A_\ell}{A_{en}} \ll v_{en}^2; \quad \langle v^2 v_L \rangle_{A_L} \frac{A_L}{A_{en}} \ll v_{en}^3$$

5. El orden de magnitud del salto en la fuerza alrededor del disco actuador debe ser mucho mayor que la fuerza en las superficies fijas, el rotor, la fuerza de presión en las entradas y salidas y en las superficies laterales; esto es,

$$\begin{aligned} \langle T_{\phi, nz} \rangle_{A_\phi} A_\psi &\ll \mathbf{O} \left(\langle T_{\text{máx}, nz} \rangle_{A_{M,F}} - \langle T_{\text{mín}, nz} \rangle_{A_{M,B}} \right) A_M \\ \langle T_{H, nz} \rangle_{A_{M,H}} A_{M,H} &\ll \mathbf{O} \left(\langle T_{\text{máx}, nz} \rangle_{A_{M,F}} - \langle T_{\text{mín}, nz} \rangle_{A_{M,B}} \right) A_M \\ p_{en} (A_{en} - A_s) &\ll \mathbf{O} \left(\langle T_{\text{máx}, nz} \rangle_{A_{M,F}} - \langle T_{\text{mín}, nz} \rangle_{A_{M,B}} \right) A_M \\ \langle p_L \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z \rangle_{A_L} A_L &\ll \mathbf{O} \left(\langle T_{\text{máx}, nz} \rangle_{A_{M,F}} - \langle T_{\text{mín}, nz} \rangle_{A_{M,B}} \right) A_M \end{aligned}$$

6. La potencia alrededor del disco actuador debe ser mucho mayor que la potencia del rotor, la potencia en las superficies laterales y la disipación viscosa;

$$\begin{aligned} A_{M,H} \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_H \cdot \mathbf{v} \rangle_{A_{M,H}} &\ll A_M \mathbf{O} \left(\langle T_{\text{máx}, nz} v_{\omega, z} \rangle_{A_{M,F}} - \langle T_{\text{mín}, nz} v_{\omega, z} \rangle_{A_{M,B}} \right) \\ A_L \langle p_L v_L \rangle_{A_L} &\ll A_M \mathbf{O} \left(\langle T_{\text{máx}, nz} v_{\omega, z} \rangle_{A_{M,F}} - \langle T_{\text{mín}, nz} v_{\omega, z} \rangle_{A_{M,B}} \right) \\ V_\beta \langle \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} \rangle^\beta &\ll A_M \mathbf{O} \left(\langle T_{\text{máx}, nz} v_{\omega, z} \rangle_{A_{M,F}} - \langle T_{\text{mín}, nz} v_{\omega, z} \rangle_{A_{M,B}} \right) \end{aligned}$$

7. Los promedios de los esfuerzos totales alrededor del disco actuador satisfacen las siguientes restricciones

$$\frac{\langle \tilde{T}_{\text{máx},nz} v_{\omega,z} \rangle_{A_{M,F}}}{\langle v_z \rangle_M} \ll \mathbf{O}(\langle T_{\text{máx},nz} \rangle_{A_{M,F}})$$
$$\frac{\langle \tilde{T}_{\text{mín},nz} v_{\omega,z} \rangle_{A_{M,B}}}{\langle v_z \rangle_M} \ll \mathbf{O}(\langle T_{\text{mín},nz} \rangle_{A_{M,B}})$$



Bibliografía

- Abe, K., Nishida, M., Sakurai, A., Ohya, Y., Kihara, H., Wada, E., & Sato, K. (2005). Experimental and numerical investigations of flow fields behind a small wind turbine with a flanged diffuser. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 93, 951–970.
- Abkar, M. (2018). Theoretical modeling of vertical-axis wind turbine wakes. *Energies*, 12, 10.
- Adaramola, M., & Krogstad, P.-Å. (2011). Experimental investigation of wake effects on wind turbine performance. *Renewable Energy*, 36, 2078–2086.
- Ahmadi-Baloutaki, M., Carriveau, R., & Ting, D. S.-K. (2016). A wind tunnel study on the aerodynamic interaction of vertical axis wind turbines in array configurations. *Renewable Energy*, 96, 904–913.
- Ahmed, K., Shahbaz, M., Qasim, A., & Long, W. (2015). The linkages between deforestation, energy and growth for environmental degradation in pakistan. *Ecological Indicators*, 49, 95–103.
- Ainslie, J. (1988). Calculating the flowfield in the wake of wind turbines. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 27, 213–224.
- Al-Quraan, A., Stathopoulos, T., & Pillay, P. (2016). Comparison of wind tunnel and on site measurements for urban wind energy estimation of potential yield. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 158, 1–10.

- Alaimo, A., Esposito, A., Messineo, A., Orlando, C., & Tumino, D. (2015). 3d CFD analysis of a vertical axis wind turbine. *Energies*, 8, 3013–3033.
- Alexiadis, M., Dokopoulos, P., & Sahsamanoglou, H. (1999). Wind speed and power forecasting based on spatial correlation models. *IEEE Trans. Energy Convers.*, 14, 836–842.
- Allet, A., Hallé, S., & Paraschivoiu, I. (1999). Numerical simulation of dynamic stall around an airfoil in darrieus motion. *Journal of Solar Energy Engineering*, 121, 69.
- Ancona, D., & McVeigh, J. (2001). *Wind Turbine - Materials and Manufacturing Fact Sheet*. Princeton Energy Resources International.
- Armitt, J., & Counihan, J. (1967). The simulation of the atmospheric boundary layer in a wind tunnel. *Atmospheric Environment*, 2, pendiente.
- Bao, Y., Pan, D., Wang, X., Liao, L., & Yang, Q. (2017). Least-square b-spline approximation based wind turbine power curve modeling. In *2017 Chinese Automation Congress (CAC)*. IEEE.
- Barthelmie, R., Frandsen, S., Rathmann, O., Hansen, K., Politis, E., Prospathopoulos, J., Schepers, J., Rados, K., Cabezon, D., Schlez, W., Neubert, A., & Heath, M. (2011). *Flow and wakes in large wind farms: Final report for UpWind WP8*. Technical Report R-1765 National Laboratory for Sustainable Energy Dinamarca.
- Barthelmie, R. J., Frandsen, S. T., Nielsen, M. N., Pryor, S. C., Rethore, P.-E., & Jørgensen, H. E. (2007). Modelling and measurements of power losses and turbulence intensity in wind turbine wakes at middelgrunden offshore wind farm. *Wind Energy*, 10, 517–528.
- Bastankhah, M., & Porté-Agel, F. (2014). A new analytical model for wind-turbine wakes. *Renewable Energy*, 70, 116–123.
- Baxevanou, C. A., Chaviaropoulos, P. K., Voutsinas, S. G., & Vlachos, N. S. (2008). Evaluation study of a navier–stokes CFD aeroelastic model of wind turbine airfoils in classical flutter. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 96, 1425–1443.
- Bear, J. (2018). *Modeling Phenomena of Flow and Transport in Porous Media*. Springer International Publishing.
- Étienne von Bertrab (2016). *Energía eólica: la lucha por el viento en México*.
- Betz, A. (1920). Das Maximum der theoretisch möglichen Ausnutzung des Windes durch Windmotoren. *Zeitschrift für das gesamte Turbinenwesen*, 26, 307–309.

- Betz, A. (1927). Die windmühlen im lichte neuerer forschung. *Die Naturwissenschaften*, 15, 905–914.
- Bird, R., Stewart, W., & Lightfoot, E. (2006). *Transport Phenomena*. (segunda ed.). EUA: Wiley.
- Bosbach, J., Kuhn, M., & Wagner, C. (2009). Large scale particle image velocimetry with helium filled soap bubbles. *Experiments in Fluids*, 46, 539–547.
- Bottaro, A. (2019). Flow over natural or engineered surfaces: an adjoint homogenization perspective. *Journal of Fluid Mechanics*, 877.
- CDPIM (2013). *La energía eólica en México: Una perspectiva social sobre el valor de la tierra*. Secretaría de gobernación.
- Chamorro, L. P., & Porté-Agel, F. (2009). A wind-tunnel investigation of wind-turbine wakes: Boundary-layer turbulence effects. *Boundary-Layer Meteorology*, 132, 129–149.
- Chan, C. H. L., Wang, Q., Holden, R., Huang, S., & Zhao, W. (2019). Optimal number of control points for fitting b-splines in wind turbine blade measurement. *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, 20, 1507–1517.
- Chelton, D., & Freilich, M. (2005). Scatterometer-Based Assessment of 10-m Wind Analyses from the Operational ECMWF and NCEP Numerical Weather Prediction Models. *American Meteorological Society*, (pp. 409–429).
- Chen, K., Song, M., & Zhang, X. (2014). The iteration method for tower height matching in wind farm design. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 132, 37–48.
- Christiaan (2011). Perspectives for distributed generation with renewable energy in Latin America and the Caribbean: Analysis of case studies for Jamaica, Barbados, Mexico, and Chile.
- Cohan, A. C., & Arastoopour, H. (2016). Numerical simulation and analysis of the effect of rain and surface property on wind-turbine airfoil performance. *International Journal of Multiphase Flow*, 81, 46–53.
- Cohen, E., Lyche, T., & Riesenfeld, R. (1980). Discrete B-splines and subdivision techniques in computer-aided geometric design and computer graphics. *Computer Graphics and Image Processing*, 14, 87–111.
- Crespo, A., Hernández, J., & Frandsen, S. (1999). Survey of modelling methods for wind turbine wakes and wind farms. *Wind Energy*, 2, 1–24.

- Dhungel, K. R. (2008). A causal relationship between energy consumption and economic growth in nepal. *Asia-Pacific Development Journal*, 15, 137–150.
- Díaz-Casás, V., Becerra, J.-A., Lopez-Peña, F., & Duro, R. J. (2012). Wind turbine design through evolutionary algorithms based on surrogate CFD methods. *Optimization and Engineering*, 14, 305–329.
- DOF: Ley de la industria eléctrica (2014). 11/08/2014.
- Dole, C. E., Lewis, J. E., Badick, J. R., & Johnson, B. A. (2017). *Flight Theory and Aerodynamics: A Practical Guide for Operational Safety, 2nd Edition*. Wiley-Interscience.
- Dose, B., Rahimi, H., Herráez, I., Stoevesandt, B., & Peinke, J. (2018). Fluid-structure coupled computations of the NREL 5 mw wind turbine by means of CFD. *Renewable Energy*, 129, 591–605.
- Earnshaw, P. (1962). *An Experimental Investigation of the Structure of a Leading-Edge Vortex*. Technical Report 3281 Ministry of Aviation: Aeronautical Research Reports and Memoranda Londres.
- Earnshaw, P., & Lawford, J. (1966). *Low-Speed Wind-Tunnel Experiments on a Series of Sharp-Edged Delta Wings*. Technical Report 3424 Ministry of Aviation: Aeronautical Research Reports and Memoranda Londres.
- Ferreira, C. S., van Bussel, G., & Kuik, G. V. (2007). 2d CFD simulation of dynamic stall on a vertical axis wind turbine: Verification and validation with PIV measurements. In *45th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- de Freitas Pinto, R. L. U., & Gonçalves, B. P. F. (2017). A revised theoretical analysis of aerodynamic optimization of horizontal-axis wind turbines based on BEM theory. *Renewable Energy*, 105, 625–636.
- Froude, W. (1920). *On the elementary relation between pitch, slip, and propulsion efficiency*. Technical Report National Advisory Committee for Aeronautics.
- García, K. (2019). Energía renovable se impulsará con inclusión social: Sener. *El economista*, .
- Gash, R., & Twele, J. (2012). *Wind Power Plants: Fundamentals, Design and Construction*. (segunda ed.). Berlin: Springer.

- Georgiou, D. P., & Theodoropoulos, N. G. (2010). A momentum explanation for the unsatisfactory betz model prediction in highly loaded wind turbines. *Wind Energy*, *14*, 653–660.
- Gilbert, B. L., & Foreman, K. M. (1983). Experiments with a diffuser-augmented model wind turbine. *Journal of Energy Resources Technology*, *105*, 46.
- Gipe, P. (2016). *Wind Energy for the Rest of Us: A Comprehensive Guide to Wind Power and How to Use It*. WIND WORKS.
- Glauert, H. (1935). Airplane propellers. chapter XI, Aerodynamic Theory. Berlin: Springer Verlag.
- Goh, S., Chen, M., Popović, D., Aihara, K., Obradovic, D., & Mandic, D. (2006). Complex-valued forecasting of wind profile. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, *31*, 1733–1750.
- Goldstein, S. (1929). On the vortex theory of screw propellers. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, *123*, 440–465.
- Grant, A., Johnstone, C., & Kelly, N. (2008). Urban wind energy conversion: The potential of ducted turbines. *Renewable Energy*, *33*, 1157–1163.
- Gray, W., & Gray, G. (2017). *Introduction to Environmental Modeling*. Cambridge University Press.
- Gray, W. G., & Miller, C. T. (2014). *Introduction to the Thermodynamically Constrained Averaging Theory for Porous Medium Systems*. Springer International Publishing.
- Greet, R. J. (1980). Maximum windmill efficiency. *Journal of Applied Physics*, *51*, 4680–4681.
- Guzmán, R. (Ed.) (2019). *México Energy Review 2019*. Mexico Business Publishing.
- Haberman, R. (2012). *Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems (Featured Titles for Partial Differential Equations)*. (5th ed.). Pearson.
- Hall, M. G. (1961). A theory for the core of a leading-edge vortex. *Journal of Fluid Mechanics*, *11*, 209–228.
- Hansen, M. O. L. (2008). *Aerodynamics of Wind Turbines*. Earthscan Publications Ltd.
- Hardianto, T., Supeno, B., Saleh, A., Setiawan, D. K., Gunawan, & Indra, S. (2017). Potential of wind energy and design configuration of wind farm on puger beach at jember indonesia. *Energy Procedia*, *143*, 579–584.

- Hau, E. (2006). *Wind Turbines: Fundamentals, Technologies, Application, Economics*. (segunda ed.). Alemania: Springer.
- Hong, J., Toloui, M., Chamorro, L., Guala, M., Howard, K., Riley, S., Tucker, J., & Sotiropoulos, F. (2014). Natural Snowfall Reveals Large-Scale Flow Structures in the Wake of a 2.5-mw Wind Turbine. *Nature Communications*, 5, 431–444.
- Hosseini, S. F., & Moetakef-Imani, B. (2017). Improved b-spline skinning approach for design of hawt blade mold surfaces. *Journal of Mechanics*, 33, 427–433.
- Howes, F. A., & Whitaker, S. (1985). The spatial averaging theorem revisited. *Chemical Engineering Science*, 40, 1387–1392.
- Huleihil, M., & Mazor, G. (2012). *Wind Turbine Power: The Betz Limit and Beyond*. INTECH.
- Human, J. (2014). Design of a shrouded wind turbine for low wind speeds.
- Hutchins, N., Chauhan, K., Marusic, I., Monty, J., & Klewicki, J. (2012). Towards reconciling the large-scale structure of turbulent boundary layers in the atmosphere and laboratory. *Boundary-Layer Meteorology*, 145, 273–306.
- Igra, O. (1981). Research and development for shrouded wind turbines. *Energy Conversion and Management*, 21, 13–48.
- Inglis, D. R. (1979). A windmill's theoretical maximum extraction of power from the wind. *American Journal of Physics*, 47, 416–420.
- Ingram, G. (2005). Wind turbine blade analysis using the blade element momentum method. version 1.0. (pp. 1–21). School of Engineering, Durham University.
- Jameson, A. (1983). The evolution of computational methods in aerodynamics. *Journal of Applied Mechanics*, 50, 1052.
- Jensen, N. (1983). *A note on wind generator interaction*. resreport R-2411 Risø National Laboratory. Dinamarca.
- Joukowsky, N. (1920). Windmill of the nej type.
- Juárez-Hernández, S., & León, G. (2014). Energía eólica en el istmo de tehuantepec: desarrollo, actores y oposición social. *Problemas del Desarrollo*, 45, 139–162.

- Jureczko, M., Pawlak, M., & Mezyk, A. (2005). Optimisation of wind turbine blades. *Journal of Materials Processing Technology*, 167, 463–471.
- Kastner-Klein, P., Fedorovich, E., & Rotach, M. (2001). A wind tunnel study of organised and turbulent air motions in urban street canyons. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 89, 849–861.
- Katic, L., Højstrup, J., & Jensen, N. (1986). A simple model for cluster efficiency. In *EWEC* (pp. 407–410).
- van Kuik, G. (2018). *The fluid dynamic basis for actuator disc and rotor theories*. IOS PRESS.
- Kusiak, A., Zheng, H., & Song, Z. (2009). Models for monitoring wind farm power. *Renewable Energy*, 34, 583–590.
- Kyriacou, S. A., Weissenberger, S., & Giannakoglou, K. C. (2012). Design of a matrix hydraulic turbine using a metamodel-assisted evolutionary algorithm with PCA-driven evolution operators. *International Journal of Mathematical Modelling and Numerical Optimisation*, 3, 45.
- Landberg, L., & Mortensen, N. (1993). A Comparison of Physical and Statistical Methods for Estimating the Wind Resource at a Site. (pp. 119–125.). Proc. 15 BWEA.
- Lanteri, S., & Lorient, M. (1996). Large-scale solutions of three-dimensional compressible flows using the parallel n3s-muscl solver. *Concurrency: Practice and Experience*, 8, 769–798.
- Lanzafame, R., & Messina, M. (2007). Fluid dynamics wind turbine design: Critical analysis, optimization and application of BEM theory. *Renewable Energy*, 32, 2291–2305.
- Li, Q., Maeda, T., Kamada, Y., Murata, J., Kawabata, T., Shimizu, K., Ogasawara, T., Nakai, A., & Kasuya, T. (2016). Wind tunnel and numerical study of a straight-bladed vertical axis wind turbine in three-dimensional analysis (part i: For predicting aerodynamic loads and performance). *Energy*, 106, 443–452.
- Li, S., Wunsch, D., O’Hair, E., & Giesselmann, M. (2001). Using neural networks to estimate wind turbine power generation. *IEEE Trans. Energy Convers.*, 16, 276–282.
- Li, Y., Paik, K.-J., Xing, T., & Carrica, P. M. (2012). Dynamic overset CFD simulations of wind turbine aerodynamics. *Renewable Energy*, 37, 285–298.
- Lissaman, P. B. S. (1979). Energy effectiveness of arbitrary arrays of wind turbines. *Journal of Energy*, 3, 323–328.

- Löhner, R. (1987). Finite elements in CFD: What lies ahead. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24, 1741–1756.
- Mahmuddin, F. (2017). Rotor blade performance analysis with blade element momentum theory. *Energy Procedia*, 105, 1123–1129.
- Manna, A. (2012). *Heat and Thermodynamics*. PEARSON.
- Manwell, J., Mcgowan, J., & Rogers, A. (2009). *Wind Energy Explained: Theory, Design and Application*. (segunda ed.). Great Britain: Wiley.
- Markandya, A., & Wilkinson, P. (2007). Electricity generation and health. *The Lancet*, 370, 979–990.
- McCroskey, W., McAlister, K., Carr, L., & Pucci, S. (1982). *An Experimental Study of Dynamic Stall on Advanced Airfoil Sections Volume I. Summary of the Experiment*. Memorandum Técnico 84245. U.S.A.: National Aeronautics and Space Administration.
- McKay, P., Carriveau, R., & Ting, D. (2012). Wake impacts on downstream wind turbine performance and yaw alignment. *Wind Energy*, 16, 221–234.
- Monin, A. S. (1970). The atmospheric boundary layer. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2, 225–250.
- Monterrosas-Mirón, M. (2018). La energía eólica en Oaxaca: Injusticia social y ambiental.
- Musial, W., Butterfield, S., & McNiff, B. (2007). Improving wind turbine gearbox reliability. In *Conference Paper NREL/CP-500-41548*.
- Müller, G., Jentsch, M. F., & Stoddart, E. (2009). Vertical axis resistance type wind turbines for use in buildings. *Renewable Energy*, 34, 1407–1412.
- Nebel, B., & Wright, R. (2000). Environmental Science. chapter Renewable Energy. NJ: Prentice Hall. (Séptima ed.).
- Nieto, C. A. B., & Robledo, J. C. (2016). Relación a largo plazo entre consumo de energía y PIB en América Latina: Una evaluación empírica con datos panel. *Ecos de Economía*, 16, 73–89.
- Okulov, V. L., & Sørensen, J. N. (2008a). An ideal wind turbine with a finite number of blades. *Doklady Physics*, 53, 337–342.

- Okulov, V. L., & Sørensen, J. N. (2008b). Refined betz limit for rotors with a finite number of blades. *Wind Energy*, *11*, 415–426.
- Okulov, V. L., Sørensen, J. N., & Wood, D. H. (2015). The rotor theories by professor joukowsky: Vortex theories. *Progress in Aerospace Sciences*, *73*, 19–46.
- Omri, A., Nguyen, D. K., & Rault, C. (2014). Causal interactions between CO2 emissions, FDI, and economic growth: Evidence from dynamic simultaneous-equation models. *Economic Modelling*, *42*, 382–389.
- O.N.U. (2009). Consumo de energía y esperanza de vida en américa latina y el caribe, 2009.
- Papadopoulos, P. K. (2013). *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows. An Introduction*.
- Pasquier, S., Quintard, M., & Davit, Y. (2017). Modeling flow in porous media with rough surfaces: Effective slip boundary conditions and application to structured packings. *Chemical Engineering Science*, *165*, 131–146.
- Paéz-García, C., & Valdés-Parada, F. (2019). An upscaling approach for the betz-joukowsky theory. *Revista Mexicana de Ingeniería Química*, *18*, 681–699.
- Paéz-García, C. T. (2015). *Modelo de medio efectivo para la transferencia de cantidad de movimiento en aerogeneradores*. Master's thesis Universidad Autónoma Metropolitana.
- Paéz-García, C. T., Valdés-Parada, F. J., & Lasseux, D. (2017). Macroscopic momentum and mechanical energy equations for incompressible single-phase flow in porous media. *Physical Review E*, *95*.
- Peinke, J., Schaumann, P., & Barth, S. (Eds.) (2007). *Wind Energy: Proceedings of the Euromech Colloquium*. Berlin: Springer.
- Pelletier, F., Masson, C., & Tahan, A. (2016). Wind turbine power curve modelling using artificial neural network. *Renewable Energy*, *89*, 207–214.
- Pérez-Arribas, F., & Trejo-Vargas, I. (2012). Computer-aided design of horizontal axis turbine blades. *Renewable Energy*, *44*, 252–260.
- Potter, C., & Negnevitsky, M. (2006). Very Short-Term Wind Forecasting for Tasmanian Power Generation. *IEEE Transactions on Power Systems*, *21*, 965–972.

- Prudden, S., Fisher, A., Marino, M., Mohamed, A., Watkins, S., & Wild, G. (2018). Measuring wind with small unmanned aircraft systems. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 176, 197–210.
- Quintard, M., & Whitaker, S. (1995). Local thermal equilibrium for transient heat conduction: theory and comparison with numerical experiments. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 38, 2779–2796.
- Rankine, W. M. (1865). On the mechanical principles of the action of propellers. In *Sixth Session of the Institution of Naval Architects*.
- Rauh, A., & Seelert, W. (1984). The Betz Optimum Efficiency for Windmills. *Applied Energy*, 17, 15–23.
- Réthoré, P.-E., Bechmann, A., Sørensen, N. N., Frandsen, S. T., Mann, J., Jørgensen, H. E., Rathmann, O., & Larsen, S. E. (2007). A CFD model of the wake of an offshore wind farm: using a prescribed wake inflow. *Journal of Physics: Conference Series*, 75, 012047.
- Ribeiro, A., Awruch, A., & Gomes, H. (2012). An airfoil optimization technique for wind turbines. *Applied Mathematical Modelling*, 36, 4898–4907.
- Ritchie, H., & Roser, M. (2019a). Energy production and changing energy sources. *Our World in Data*, .
- Ritchie, H., & Roser, M. (2019b). Fossil fuels. *Our World in Data*, .
<https://ourworldindata.org/fossil-fuels>.
- Santamarta, J. (Ed.) (2015). *Eólica en México: Acciona instalará parques eólicos en el norte*. REV.
- Schubel, P. J., & Crossley, R. J. (2012). Wind turbine blade design. *Energies*, 5, 3425–3449.
- Segalini, A., & Alfredsson, P. H. (2013). A simplified vortex model of propeller and wind-turbine wakes. *Journal of Fluid Mechanics*, 725, 91–116.
- Selzer, H. (Ed.) (1986). *Wind Energy: Potential of Wind Energy in the European Community. An Assessment Study* volume 2 of *G: Solar Energy R& D in the European Community*. U.S.A.: Kluwer Academic Publishers.
- S.E.N.E.R (2018). Programa de desarrollo del sistema eléctrico nacional 2018-2032.

- Şener, Ş. E. C., Sharp, J. L., & Anctil, A. (2018). Factors impacting diverging paths of renewable energy: A review. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, *81*, 2335–2342.
- Sharma, P. K., Warudkar, V., & Ahmed, S. (2019). Application of lidar and measure correlate predict method in offshore wind resource assessments. *Journal of Cleaner Production*, *215*, 534–543.
- Sharpe, T., & Proven, G. (2010). Crossflex: Concept and early development of a true building integrated wind turbine. *Energy and Buildings*, *42*, 2365–2375.
- Shen, W. Z., Mikkelsen, R., Sørensen, J. N., & Bak, C. (2005). Tip loss corrections for wind turbine computations. *Wind Energy*, *8*, 457–475.
- Sørensen, J., & Van Kuik, G. (2011). General momentum theory for wind turbines at low tip speed ratios. *Wind Energy*, *14*, 821–839.
- Stathopoulos, T., Alrawashdeh, H., Al-Quraan, A., Blocken, B., Dilimulati, A., Paraschivoiu, M., & Pilay, P. (2018). Urban wind energy: Some views on potential and challenges. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, *179*, 146–157.
- Sánchez-Tembleque, A. (2019). The competitiveness of wind power guarantees its growth in Mexico.
- Tenguria, N., Mittal, N., & Ahmed, S. (2011). Modal analysis for blade of horizontal axis wind turbine. *Asian Journal of Scientific Research*, *4*, 326–334.
- Toledo, E. Z., & Fraga, J. (2016). La política eólica mexicana: Controversias sociales y ambientales debido a su implantación territorial. estudios de caso en Oaxaca y Yucatán. *Revista Trace*, (p. 65).
- Toloui, M., Riley, S., Hong, J., Howard, K., Chamorro, L., Guala, M., & Guala, J. (2014). Measurement of atmospheric boundary layer based on super-large-scale particle image velocimetry using natural snowfall. *Experiments in Fluids*, *55*, pendiente.
- Toman, U. T., Hassan, A.-K. S., Owis, F. M., & Mohamed, A. S. (2019). Blade shape optimization of an aircraft propeller using space mapping surrogates. *Advances in Mechanical Engineering*, *11*, 168781401986507.
- Turkel, E. (1983). Progress in computational physics. *Computers & Fluids*, *11*, 121–144.
- Vaz, J. R. P., Pinho, J. T., & Mesquita, A. L. A. (2011). An extension of BEM method applied to horizontal-axis wind turbine design. *Renewable Energy*, *36*, 1734–1740.

- Vucina, D., Marinić-Kragić, I., & Milas, Z. (2016). Numerical models for robust shape optimization of wind turbine blades. *Renewable Energy*, *87*, 849–862.
- Wandji, W. N., Natarajan, A., & Dimitrov, N. (2016). Development and design of a semi-floater substructure for multi-megawatt wind turbines at 50 + m water depths. *Ocean Engineering*, *125*, 226–237.
- Wang, B., Cot, L. D., Adolphe, L., Geoffroy, S., & Sun, S. (2017). Cross indicator analysis between wind energy potential and urban morphology. *Renewable Energy*, *113*, 989–1006.
- Whale, J., Papadopoulos, K. H., Anderson, C. G., Helmis, C. G., & Skyner, D. J. (1996). A study of the near wake structure of a wind turbine comparing measurements from laboratory and full-scale experiments. *Solar Energy*, *56*, 621–633.
- Whitaker, S. (1968). Introduction to fluid mechanics. chapter The Transport Theorem. Florida: Prentice Hall.
- Whitaker, S. (1991). Improved constraints for the principle of local thermal equilibrium. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, *30*, 983–997.
- Whitaker, S. (1999). *The Method of Volume Averaging*. Kluwer Academic Publishers.
- Wood, B. (2009). The role of scaling laws in upscaling. *Advances in Water Resources*, *32*, 723–736.
- Wood, B. D., & Valdés-Parada, F. J. (2013). Volume averaging: Local and nonlocal closures using a Green's function approach. *Advances in Water Resources*, *51*, 139–167.
- Yang, H., Shen, W., Xu, H., Hong, Z., & Liu, C. (2014). Prediction of the wind turbine performance by using BEM with airfoil data extracted from CFD. *Renewable Energy*, *70*, 107–115.
- Zhang, X.-P., & Cheng, X.-M. (2009). Energy consumption, carbon emissions, and economic growth in china. *Ecological Economics*, *68*, 2706–2712.
- Önder, A., & Meyers, J. (2018). On the interaction of very-large-scale motions in a neutral atmospheric boundary layer with a row of wind turbines. *Journal of Fluid Mechanics*, *841*, 1040–1072.



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE DISERTACIÓN PÚBLICA

No. 00004

Matrícula: 2131800490

Transporte de cantidad de movimiento alrededor de turbinas eólicas en escalas múltiples.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 11:00 horas del día 21 del mes de noviembre del año 2019 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

- DR. CARLOS OMAR CASTILLO ARAIZA
- DR. JORGE RAMIREZ MUÑOZ
- DR. CARLOS GILBERTO AGUILAR MADERA
- DR. ELISEO HERNANDEZ MARTINEZ
- DR. JUAN JOSE AMBRIZ GARCIA



Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron a la presentación de la Disertación Pública cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

DOCTORA EN CIENCIAS (ENERGIA Y MEDIO AMBIENTE)

DE: CATHERINE TERESA PAEZ GARCIA

y de acuerdo con el artículo 78 fracción IV del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

CATHERINE TERESA PAEZ GARCIA
ALUMNA

APROBAR

REVISÓ

MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó a la interesada el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA

PRESIDENTE

DR. CARLOS OMAR CASTILLO ARAIZA

VOCAL

DR. JORGE RAMIREZ MUÑOZ

VOCAL

DR. CARLOS GILBERTO AGUILAR MADERA

VOCAL

DR. ELISEO HERNANDEZ MARTINEZ

SECRETARIO

DR. JUAN JOSE AMBRIZ GARCIA

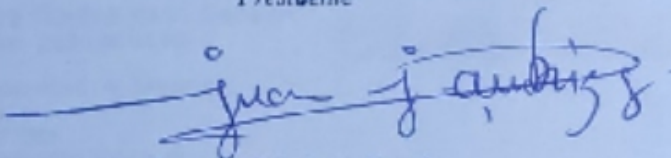
El jurado designado por la
Comisión Académica del Posgrado en Energía y Medio Ambiente y la Comisión Divisional
de Posgrado

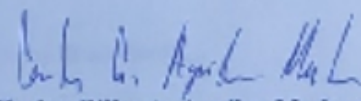
de la Unidad Iztapalapa, aprobó la tesis que presentó
CATHERINE TERESA PAÉZ GARCÍA

El día 21 de noviembre del año 2019

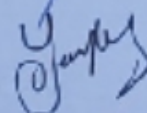
Miembros del Jurado


Carlos Omar Castillo Araiza
Presidente


Juan José Ambríz García
Secretario


Carlos Gilberto Aguilar Madera
Vocal


Eliseo Hernández Martínez
Vocal


Jorge Ramírez Muñoz
Vocal