

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - IZTAPALAPA  
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA**

**UN MODELO PARA EL PROPAGADOR  
POLIMÉRICO DEL CAMPO DE DIRAC LIBRE**

Tesis que presenta  
**M. en C. Ángel Alejandro García Chung**

Para obtener el grado de  
**Doctor en Ciencias (Física)**



**Asesor: Dr. Hugo Aurelio Morales Técotl**

*Jurado Calificador:*

*Presidente: Dr. Eckehard Erwin Willi Mielke*

*Secretario: Dr. Hugo Aurelio Morales Técotl*

*Vocal: Dr. Román Linares Romero*

*Vocal: Dr. Luis Fernando Urrutia Ríos*

*Vocal: Dr. José David Vergara Oliver*

México, D.F. julio 2014

---

A mi madre y a mi hermana.

## AGRADECIMIENTOS

En este momento de agradecer viene a mi mente mi familia, en particular mi madre y mi hermana adorable. También mis tíos, quienes han hecho de este proyecto mío, un proyecto de ellos. Este trabajo lleva sin lugar a dudas, la impronta de su apoyo y estímulo.

Agradezco también a Zenia Yolanda, a quien debo no poco apoyo y consagración a lo largo de estos volubles años.

Mis amigos, los de Cuba, los de México y los de otros tantos lugares, tienen también un lugar relevante en mi gratitud. Entre ellos destacan: Omar, Soler, Edgar y Cremé, que desde hace ya más de una década, forman parte del grupo de hermanos que he tenido el privilegio de encontrar y de elegir. En México, ya mi segundo hogar, David Castañeda, Ernesto (alias Anakin) Flores y Víctor Domínguez, por aceptarme como uno más. A JD y Edison, por las enseñanzas y la paciencia.

Mi gratitud profunda a la memoria del Profesor Rafael Montemayor, por su certera comprensión de lo que significa estudiar/formarse en otro país y la orientación invaluable para seguir este camino.

A mi asesor, el Dr. Hugo A. Morales Técotl, por ser un paradigma no solo como asesor y científico, sino como ser humano, y desde luego, por haber tenido la paciencia para lidiar conmigo.

Resulta difícil, cuando no imposible, señalar a todas las personas involucradas con la concreción de este trabajo. Confío en que puedan perdonar mi pésima memoria y omisión, todas aquellas personas que olvido mencionar.

A todos ustedes llegue mi más sincero agradecimiento por la buena fe, la consideración y el soporte durante estos poco más de cinco años.

## ÍNDICE

1. <i>Introducción.</i> . . . . .	1
2. <i>Campo escalar.</i> . . . . .	7
2.1 Descomposición en modos de Fourier . . . . .	7
2.2 Propagador con osciladores armónicos . . . . .	11
2.3 Oscilador armónico polimérico . . . . .	14
2.4 Propagador de campo escalar con osciladores armónicos poliméricos . . . . .	18
3. <i>Oscilador de Fermi.</i> . . . . .	25
3.1 Análisis Pseudo clásico . . . . .	25
3.2 Cuantización canónica . . . . .	29
3.3 Super álgebra de Weyl . . . . .	37
3.4 Cuantización polimérica . . . . .	43
3.4.1 Dinámica . . . . .	46
4. <i>Campo de Dirac</i> . . . . .	50
4.1 Descomposición en modos de Fourier . . . . .	50
4.1.1 Relación entre modos de Fourier y osciladores de Fermi . . . . .	56
4.2 Propagador con modos de Fourier . . . . .	60
4.3 Propagador con osciladores de Fermi . . . . .	63
4.4 Propagador con osciladores de Fermi poliméricos . . . . .	65
5. <i>Discusión y conclusiones.</i> . . . . .	68
<i>Apéndices</i> . . . . .	74
A. <i>Solución a la ecuación de Mathieu</i> . . . . .	75
B. <i>Super espacio vectorial, superdual y super espacio de Hilbert</i> . . . . .	79
B.1 Super espacio vectorial . . . . .	79

*Índice*

---

B.2 Super Dual. . . . .	81
B.3 Super Espacio de Hilbert. . . . .	83

## RESUMEN

La Gravedad Cuántica por Lazos (GCL) [1] es un esquema de cuantización de la Relatividad General para describir la geometría cuántica del espacio tiempo, que difiere sustancialmente del esquema de la Teoría Cuántica de Campos (TCC) en un espacio tiempo de fondo. Sabemos que la TCC es esencial en el estudio de la física de partículas en ausencia de gravedad, como lo muestra el Modelo Estándar de las Partículas Elementales (MEPE), pero resulta inadecuada para el caso de la gravedad. La GCL ofrece una descripción independiente del fondo en cuatro dimensiones para la gravedad y los campos del MEPE, que es no perturbativa conteniendo así con las dificultades de la cuantización perturbativa de la Relatividad General. Sin embargo, la complejidad de esta descripción ha hecho difícil obtener resultados sobre la dinámica de los campos cuantizados por lazos [2].

Para abordar algunos de los aspectos de la GCL se desarrolló la Mecánica Cuántica Polimérica (MCP) [3], que es el esquema con el cual se implementan las técnicas de cuantización por lazos en sistemas mecánicos evitando por tanto gran parte de la complejidad mencionada. La descripción de la MCP difiere notablemente de la usual que está basada en la representación de Schrödinger y la cuantización canónica y no hay una relación unitaria entre ambas [4, 5]. Este problema se resuelve entendiendo que la descripción dada por la MCP se aproxima en cierto régimen por la mecánica cuántica estándar [6].

Una extensión natural de la MCP resulta al reemplazar los modos mecánicos de un campo cuántico por la versión polimérica de los mismos. A la TCC resultante la denominamos TCC Polimérica [7] y entre sus resultados se encuentra el poder incorporar inhomogeneidades primordiales [8] en modelos cósmicos, reproducir los resultados de la TCC cuando las escalas de energías están en el régimen infrarrojo comparado con la escala de Planck [7] y la modificación de las relaciones de dispersión del campo cuántico [9].

En el caso de sistemas fermiónicos, la TCC Polimérica ha sido estudiada en el presente trabajo. Para ello estudiamos la descomposición en modos de Fourier del campo de Dirac obteniendo que cada modo está formado por cuatro osciladores de Fermi desacoplados [10], y construimos un modelo

mecánico del oscilador de Fermi pero empleando la versión fermiónica de la MCP [11]. Finalmente construimos un modelo para la versión cuántica del campo de Dirac polimérico, en particular su propagador polimérico. Este último adquiere correcciones en términos de parámetros que surgen de la naturaleza real anticonmutativa de las variables del oscilador de Fermi. Cabe mencionar que es posible que tales correcciones adquieran relevancia física cuando el campo interactúa con algún otro campo cuántico, por ejemplo, la gravedad o el electromagnetismo.

Varios de nuestros resultados fueron reportados brevemente en forma de memorias in extenso en [9]-[11] y en el artículo [12].

## 1. INTRODUCCIÓN.

En el periodo de 1924 a 1928, los físicos se enfrentaban al siguiente acertijo de la Naturaleza: Con base en el modelo atómico se sabía que el número máximo de electrones  $N_n$ , en un nivel energético caracterizado por el número cuántico principal  $n$ , estaba dado por el doble del número de estados en el orbital  $n$ , dado por  $n^2$ , es decir,

$$N_n = 2n^2. \quad (1.1)$$

El acertijo consistía simplemente en explicar el origen del factor 2 de la expresión anterior. Wolfgang Pauli propuso explicar la expresión (1.1) -la cual había sido obtenida experimentalmente-, interpretando al número máximo de estados  $N_n$  como el número de estados en el nivel  $n$ -ésimo y haciendo uso de un “misterioso” principio de exclusión, que impidiera a dos electrones ocupar el mismo estado cuántico [13]. De este modo el factor 2 es debido a “una peculiar duplicación clásicamente indescriptible” de la naturaleza del electrón. Goudsmit interpretó entonces el trabajo de W. Pauli [14] agregando números cuánticos adicionales que dan cuenta de grados de libertad extras en el electrón [15], idea que posteriormente publica con Uhlenbeck [16]. Más tarde, C.G. Darwin [17] se adhiere a esta idea y sugiere que, en efecto, el electrón posee estructura interna adicional a la descrita por sus coordenadas. Eventualmente y hasta la fecha, esta estructura interna será conocida como espín, el cual toma valores semienteros de  $\pm\hbar/2$ . Notablemente para P. A. M. Dirac la explicación anterior resultaba incompleta o arbitraria como puede notarse en la siguiente cita:

*“[...]The question remains as to why Nature should have chosen this particular model for the electron instead of being satisfied with the point particles. One would like to find some incompleteness in the previous methods of applying quantum mechanics to the point-charge electron such that, when removed, the whole of the duplexity phenomena follow without arbitrary assumptions[...].” [18].*

---

Dirac propuso modificar la ecuación relativista de Klein-Gordon sugerida en aquella época para describir al electrón, escribiendo una ecuación de primer orden en la derivada temporal. De esta manera, el espín semientero  $\hbar/2$  aparecía como un resultado inmediato y “natural”. Sorprendentemente, su modelo se ajustaba perfectamente con las mediciones experimentales [19]. A pesar de esto, la ecuación de Dirac al igual que la de Klein-Gordon, presenta soluciones de energía negativa que comprometen la estabilidad de los sistemas descritos por ellas. La explicación sugerida por Dirac a este problema se basaba en la existencia de un “mar infinito” de energías negativas o huecos, cuya existencia era tan fundamental como la de los electrones mismos. Estos “huecos” se comportaban igual que los electrones pero con carga opuesta [20] y resultaron ser los hoy conocidos como positrones. Sin embargo la teoría de Dirac no incluía la posibilidad de describir partículas sin carga eléctrica [13] como los mesones neutros los cuales eran considerados como partículas fundamentales en aquel entonces.

Al mismo tiempo el enfoque dado por Born, Heisenberg y Jordan, empieza a ganar solidez para explicar algunos decaimientos observados hasta el momento [21]. Este enfoque describe a los fotones como excitaciones del campo electromagnético cuántico formado por una torre infinita de osciladores armónicos cuánticos, cada uno de los cuales satisface relaciones de conmutación canónicas. En los años siguientes un enfoque similar se aplica a la función de onda del electrón [22] concluyendo que los electrones no pueden ser descritos como una superposición de osciladores que satisfacen relaciones de conmutación, sino de anticonmutación. Estos trabajos condujeron al llamado Teorema de espín-estadística [23] en el que se establece que las partículas con espín entero satisfacen relaciones de conmutación mientras que las de espín semientero cumplen relaciones de anticonmutación. El resultado de esta etapa, es la consolidación de este enfoque en lo que hoy llamamos Segunda Cuantización o Teoría Cuántica de Campos (TCC), por encima de la interpretación de huecos propuesta por Dirac. En la TCC las soluciones que emergen con energía negativa se asocian con las antipartículas, aún cuando éstas sean eléctricamente neutras.

El hecho de que los modos mecánicos del espinor de Dirac satisficieran relaciones de anticonmutación motivó, unas décadas más tarde, a Abdus Salam y J. Strathdee [24] a construir las supervariedades. La idea seguida por Salam y Strathdee se basaba en la pregunta de cuáles eran las estructuras geométricas con las cuales describir la mecánica clásica de sistemas físicos tales que, luego de aplicarles la metodología de la TCC, satisficieran relaciones de anticonmutación en vez de relaciones de conmutación. Uno de los problemas con estas estructuras matemáticas es que no tienen equivalente con

---

ningún sistema mecánico clásico conocido. De esta manera, la construcción se realiza con formalidad matemática, y extendiendo de la manera lo más sensata posible, los recursos ya existentes de la mecánica clásica usual. Para los matemáticos, la ruta señalada por Salam y Strathdee marcó un nuevo camino: el estudio de las super variedades [25].

La exposición dada hasta aquí permite seguir algunos de los aspectos relacionados con el surgimiento del espinor de Dirac. Este juega un papel fundamental en el Modelo Estándar de Partículas elementales (MEP). Con él se describen no sólo los electrones relativistas, sino todas aquellas partículas cuyo espín es un medio, es decir, los leptones y los quarks. Sin embargo, el éxito de la TCC se torna incompleto cuando tratamos de estudiar a nivel cuántico la interacción faltante en el MEP: la gravedad. Para aclarar este punto, demos otro detour histórico que converja a esta pregunta.

Por muchos siglos la humanidad se ha preguntado cuál es la estructura geométrica del universo en el que vivimos. En la conferencia dada por Riemann en 1856 -considerada por muchos la más importante conferencia de matemáticas de todos los tiempos- cuando optaba por una posición en la Universidad de Göttingen, éste señalaba que la estructura final de la geometría del universo, vendría de la mano de los aportes realizados por los físicos en este terreno. Riemann conjeturaba que la geometría de todo el universo podía estudiarse conociendo la geometría de las pequeñas partes en las cuales se podía dividir éste. La impresionante revelación conceptual marcó un hito que tuvo que esperar por la escuela de geómetras italianos para ser entendida por el resto de los científicos. La premisa dada por Riemann sentó, entre otras, las bases de la geometría diferencial que sirvieron posteriormente a la creación de la Teoría de la Relatividad General (TRG).

En 1916, A. Einstein [26] ofrece una extraordinaria y pionera interpretación sobre la gravitación proponiendo que la gravedad era una manifestación de la geometría del universo. Usando la hipótesis de Riemann, Einstein obtiene la ecuaciones que determinan la geometría del universo en relación con la cantidad de materia contenida en éste. Para 1920 [27], la TRG se consolidaba como otro triunfo de la mente humana en aras de entender y explicar la naturaleza, casi paralelo al triunfo de la TCC. Notablemente, la TRG nace con la formidable predicción de que el universo posee, a nivel clásico, regiones en las cuales sus características geométricas adquieren valores patológicos. Entiéndase con esto que características como la curvatura escalar o el determinante de la métrica, etc., toman valores infinitos en algunas regiones del espacio tiempo y este tipo de resultados es inconsistente con la premisa de un universo clásico suave. Este tipo de problemas no es nuevo en la física; la “catástrofe ultravioleta” dió origen a una reinter-

---

pretación de la electrodinámica que luego sentó las bases para el estudio cuántico de la materia electromagnética. En este espíritu, y confiando en el carácter fundamental de la gravitación como interacción básica, se espera que la cuantización de la gravedad responda a la interrogante sobre cómo remover las patologías de las soluciones clásicas de la geometría [28].

Actualmente existen varias propuestas en las que se ofrece un esquema sobre cómo debe ser la gravedad cuántica [29]. Una de estas propuestas es la Gravedad Cuántica por Lazos (GCL) en la que un nuevo tipo de variables se proponen como álgebra de operadores fundamentales, a saber, el álgebra de holonomías y flujos [1]. La GCL cosecha varios resultados importantes que motivan la continuidad de su estudio como lo son el obtener una cota mínima a los valores del espectro de los operadores geométricos como el área y el volumen y una expresión para la entropía de un agujero negro [30]. Adicionalmente, la GCL se ha extendido como esquema de cuantización a otros campos de materia [1], entre los que destacan los espinores de Dirac [31] mencionados en la primera parte de esta introducción. Sin embargo, la complejidad de las herramientas matemáticas involucradas ha dificultado un análisis adecuado de posibles efectos de interés [2]. Para avanzar en esta dirección es posible hacer uso de la Mecánica Cuántica Polimérica (MCP), que implementa en modelos mecánicos, i.e., sistemas con un número finito de grados de libertad, algunos de los aspectos del formalismo cuántico usado en la Gravedad Cuántica por Lazos.

La importancia de la MCP es formidable en particular en la cosmología ya que con ésta se puede reemplazar la singularidad del Big Bang por un efecto del tipo rebote cuántico. No obstante, cuando la MCP es traída a los sistemas mecánico cuánticos más comunes como lo son la partícula libre, el oscilador armónico, etc., sus características difieren de aquellas obtenidas por la cuantización canónica. Por ejemplo, uno de los aspectos relevantes de la MCP y que constituye una diferencia notable con respecto a la cuantización usual, es que la representación de los generadores de Weyl no permite recuperar la representación de Schrödinger o de Fock [3] de acuerdo a lo planteado por el Teorema de Stone-von Neumann [32]. Esto implica que las representaciones de la MCP y la cuantización usual de sistemas mecánicos no sean unitariamente equivalentes [4, 5]. Felizmente ambos esquemas pueden relacionarse a partir de un parámetro cuyo valor es posible asociar con una escala de longitud, cuando el valor de esta escala es muy pequeño [6, 33, 34]. El estudio de la cuantización por lazos en estos modelos mecánicos constituye una suerte de laboratorio teórico en el que luego, al estudiar los campos cuánticos en un esquema de lazos, se puedan distinguir qué efectos se deben al esquema de cuantización empleado y cuáles son resultados de tratar con

---

sistemas de un número infinito de grados de libertad.

Una variante para estudiar los efectos de la MCP en campos consiste en reemplazar los modos de Fourier de un campo escalar (en un fondo plano) por la versión polimérica de éstos. Al campo escalar así construido se lo denomina campo escalar polimérico [7]. El cálculo del propagador del campo escalar polimérico conduce a una modificación de éste a muy altas energías mientras que por otro lado, coincide con el propagador del campo escalar usual a bajas energías. Las posibles implicaciones de este resultado varían desde la aparición de polos taquiónicos hasta aportaciones al valor de la constante cosmológica debido a que la energía del vacío también se modifica, al igual que la relación microcausal del campo [9]. Estos resultados convierten al estudio de los campos poliméricos en una arena en la que el ingrediente de los números infinitos de grados de libertad de los campos, evade la eventual sencillez de los modelos mecánicos, sin penetrar en la complejidad de la teoría de la cuantización por lazos completa. Dicho esto, nos resulta natural pensar que dada la relevancia que poseen los espinores de Dirac en el MEP, el estudio del campo de Dirac polimérico es necesario.

El estudio del campo de Dirac polimérico plantea desde su inicio varias preguntas entre las que destacan el saber cuáles son los sistemas mecánicos con los cuáles describir los modos de Fourier del campo [10], cuál es la versión polimérica de tales sistemas [11] y cuáles son las diferencias entre el campo de Dirac polimérico con el campo de Dirac usual [12]. Naturalmente existen otras preguntas que incluyen el saber cómo incide la estructura polimérica de los modos del campo en el valor de su espín, de la causalidad, es decir, cómo se realiza la acción del grupo de Lorentz en esta cuantización del campo de Dirac y sus efectos al interaccionar con otros campos de materia. En este trabajo atenderemos las primeras preguntas dejando para trabajos subsiguientes preguntas relativas al grupo de Lorentz y demás. Con este fin, primero describimos los avances obtenidos y reportados en forma de publicaciones. Más abajo indicamos en qué capítulos de la presente tesis se incluyen estos resultados. En [10] se expone la cuantización canónica de los modos de Fourier del campo de Dirac obteniendo que el espectro de energía, así como su degeneración, son consistentes con interpretar a los modos de Fourier del campo de Dirac como un conjunto de cuatro osciladores de Fermi desacoplados. Luego esto nos conduce a estudiar la versión polimérica del oscilador de Fermi la cual exponemos en [11]. Finalmente, estudiamos en [12] la construcción del modelo del campo de Dirac polimérico, en particular su propagador.

De esta manera, el presente trabajo expone los aspectos detallados de la construcción del modelo de campo de Dirac polimérico libre en un espacio

---

tiempo plano. Para ello, hemos dedicado el capítulo 2 a exponer los aspectos principales de la construcción del campo escalar polimérico. En esencia pretendemos que este capítulo sirva de guía para el estudio de la construcción del campo de Dirac polimérico. En el capítulo 3 presentamos los aspectos principales relacionados con la cuantización usual del oscilador de Fermi y nuestra propuesta de la versión polimérica cuántica. El estudio de la descomposición en modos de Fourier del campo de Dirac, su relación explícita con los osciladores de Fermi y la construcción del campo de Dirac polimérico serán tratados en el capítulo 4. El capítulo 5 ofrecerá una discusión sobre el trabajo y las derivaciones del mismo. Esto incluye nuestras conclusiones en cuanto al alcance de los resultados y sus limitaciones.

## 2. CAMPO ESCALAR.

*“Thus, in a sense, mathematics has been most advanced by those who distinguished themselves by intuition rather than by rigorous proofs.”* **Felix Klein**

En línea con el objetivo de esta tesis, en este capítulo analizamos un campo escalar real en términos de sus modos de Fourier. Iniciamos por expresar el campo y su hamiltoniano usando estos modos. Después, calculamos el propagador del campo con base en esta descripción hamiltoniana por modos. Finalmente, una vez que se discute el oscilador armónico polimérico, el propagador del campo escalar es descrito en dos regímenes, uno a muy bajas y otra a muy altas energías en comparación con la escala asociada al parámetro de la cuantización polimérica. Elegimos esta escala como la masa de Planck en consonancia con lo realizado en [7].

### 2.1 Descomposición en modos de Fourier

Comencemos dando la acción  $S_e$  del campo escalar real [35]

$$S_e = \frac{1}{2} \int [\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - M^2 \phi^2] d^4x, \quad (2.1)$$

donde  $\phi$  es el campo escalar real,  $M$  su masa y  $\eta = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$  es la métrica de Minkowski. Luego de realizar una foliación del espacio-tiempo, la acción (2.1) se puede escribir como

$$S_e = \frac{1}{2} \int [\dot{\phi}^2 - (\nabla\phi)^2 - M^2 \phi^2] dt d^3x, \quad (2.2)$$

siendo  $\dot{\phi} = \partial_t \phi$  y donde hacemos uso de unidades tales que  $c = 1$ . A partir de (2.2), definimos el momento conjugado del campo como la cantidad

$$\pi = \frac{\partial S_e}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}. \quad (2.3)$$

## 2.1. DESCOMPOSICIÓN EN MODOS DE FOURIER

---

Luego, para construir el hamiltoniano del campo escalar real, conviene definir la densidad lagrangiana la cual, a partir de (2.2), toma la forma

$$\mathcal{L}_e = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}M^2\phi^2. \quad (2.4)$$

Entonces la densidad hamiltoniana se calcula a partir de (2.3) y (2.4) y tiene la forma

$$\mathcal{H}_e = \pi\dot{\phi} - \mathcal{L}_e = \frac{1}{2}[\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + M^2\phi^2]. \quad (2.5)$$

Finalmente, la teoría clásica hamiltoniana del campo escalar real quedará caracterizada dando los corchetes de Poisson. Éstos toman la forma

$$\{\phi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})\} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad \{\phi(t, \vec{x}), \phi(t, \vec{y})\} = \{\pi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})\} = 0, \quad (2.6)$$

donde  $\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$  es la delta de Dirac en el espacio  $\mathbb{R}^3$ . Para pasar a la descripción en osciladores armónicos, escribimos el campo y su momento canónico como un desarrollo de Fourier en una caja de volumen  $V = (2L)^3$  como

$$\phi(t, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \phi_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad \pi(t, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \pi_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad (2.7)$$

siendo  $\vec{k}$  el vector de onda con valores discretos  $\vec{k} = \frac{2\pi}{L}(n_x, n_y, n_z)$  que resultan de pedir condiciones cíclicas para el campo y su momento canónico en las fronteras de la caja. Para su uso más adelante, notamos que en unidades naturales ( $\hbar = c = 1$ ) la dimensión del campo y su momento canónico son  $L^{-1}$  y  $L^{-2}$  respectivamente, mientras que  $\phi_{\vec{k}}$  y  $\pi_{\vec{k}}$  tendrán dimensiones de  $L^{1/2}$  y  $L^{-1/2}$  respectivamente. Adicionalmente, sabemos que  $\phi$  y  $\pi$  son funciones reales, con lo cual debe cumplirse

$$\phi_{\vec{k}} = \phi_{-\vec{k}}^*, \quad \pi_{\vec{k}} = \pi_{-\vec{k}}. \quad (2.8)$$

Estas relaciones indican dos cosas. Primero, que el modo  $\vec{k}$  del campo  $\phi$  (del momento  $\pi$ ), con amplitud  $\phi_{\vec{k}}$  ( $\pi_{\vec{k}}$ ), no es independiente de la amplitud  $\phi_{-\vec{k}}$  ( $\pi_{-\vec{k}}$ ). Segundo, que las amplitudes del campo y del momento del campo son funciones evaluadas en los complejos.

La primera observación se hace evidente cuando sustituimos (2.7) en (2.6) resultando en

$$\{\phi_{\vec{k}}, \pi_{\vec{k}'}\} = \delta_{\vec{k}+\vec{k}', 0}, \quad (2.9)$$

## 2.1. DESCOMPOSICIÓN EN MODOS DE FOURIER

de la cual vemos que el momento  $\pi_{-\vec{k}}$  es el conjugado canónico a la amplitud  $\phi_{\vec{k}}$ ; lo cual confirma que los modos no son independientes en esta descripción. Esto impide tomar a cada par de variables  $(\phi_{\vec{k}}, \pi_{\vec{k}})$ , como las variables canónicas de un oscilador armónico con frecuencia

$$\omega_{\vec{k}} = \sqrt{\vec{k}^2 + M^2}, \quad (2.10)$$

para un dado vector de onda  $\vec{k}$ . Naturalmente, la segunda observación viene a reforzar esta limitación ya que las variables canónicas en el oscilador armónico, son reales. No obstante lo anterior, es posible describir al campo escalar real como una torre de osciladores armónicos. Con este fin se hace uso de la siguiente relación<sup>1</sup>

$$\phi_k = \alpha q_k + \alpha^* q_{-k}, \quad \pi_k = \beta p_k + \beta^* p_{-k}, \quad (2.11)$$

siendo  $q_k$  y  $p_k$  cantidades reales relacionadas canónicamente, es decir, que satisfacen

$$\{q_k, p_{k'}\} = \delta_{k,k'}, \quad \{q_k, q_{k'}\} = \{p_k, p_{k'}\} = 0. \quad (2.12)$$

Como veremos esto equivale a reescribir la amplitud del campo  $\phi_k$  y su momento  $\pi_k$  en términos de los grados de libertad de los osciladores armónicos descritos por  $q_{\vec{k}}$  y  $p_{\vec{k}}$ . Las condiciones (2.12) restringen la libertad de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  aunque no de forma única como veremos en seguida.

Para imponer (2.9) y (2.12), se requiere  $\beta = \frac{1}{2|\alpha|} e^{ia}$ , siendo  $\alpha = |\alpha| e^{ia}$ ; quedando por fijar dos parámetros: la norma  $|\alpha|$  y la fase  $a$ . Para fijarlos, regresamos a la expresión del hamiltoniano del campo basado en (2.5), usando la descomposición de Fourier (2.7) y sustituyendo en el mismo (2.11). Usando la expresión

$$\frac{1}{V} \int_V e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}} d^3x = \delta_{\vec{k}+\vec{k}',0}, \quad (2.13)$$

obtenemos que el hamiltoniano que proviene de (2.5) toma la forma

$$\begin{aligned} H_e = \int d^3x \mathcal{H}_e = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} & \left[ \cos(2a) \frac{p_k p_{-k}}{2|\alpha|^2} + 2\omega_k^2 |\alpha|^2 \cos(2a) q_k q_{-k} + \right. \\ & \left. + \frac{(p_k^2 + p_{-k}^2)}{4|\alpha|^2} + \omega_k^2 |\alpha|^2 (q_k^2 + q_{-k}^2) \right], \end{aligned} \quad (2.14)$$

<sup>1</sup> De ahora en adelante y solo por simplicidad, reemplazaremos en la notación al vector  $\vec{k}$  por  $k$ .

## 2.1. DESCOMPOSICIÓN EN MODOS DE FOURIER

donde  $\omega_k$  es la frecuencia definida en (2.10). Para que el hamiltoniano  $H_e$  sea la suma de los hamiltonianos de osciladores armónicos para cada modo  $\vec{k}$ , pedimos que  $\cos(2a) = 0$ , con lo cual el valor de la fase quedará como  $a = \pi/4 + n\pi/2$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , y el hamiltoniano será

$$H_e = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \left[ \frac{p_k^2}{4|\alpha|^2} + \frac{p_{-k}^2}{4|\alpha|^2} + \omega_k^2 |\alpha|^2 q_k^2 + \omega_k^2 |\alpha|^2 q_{-k}^2 \right]. \quad (2.15)$$

Ahora separamos la suma de la forma

$$H_e = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \left[ \frac{p_k^2}{4|\alpha|^2} + \omega_k^2 |\alpha|^2 q_k^2 \right] + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \left[ \frac{p_{-k}^2}{4|\alpha|^2} + \omega_k^2 |\alpha|^2 q_{-k}^2 \right], \quad (2.16)$$

y siendo el índice de suma un índice mudo<sup>2</sup>, tendremos que el hamiltoniano se escribirá como

$$H_e = \sum_{\vec{k}} \left[ \frac{p_k^2}{4|\alpha|^2} + \omega_k^2 |\alpha|^2 q_k^2 \right]. \quad (2.17)$$

Vemos de la expresión anterior que si fijamos el valor del módulo de  $\alpha$ , como  $|\alpha| = 1/\sqrt{2}$ , y regresamos a hacer explícito el símbolo  $\vec{k}$  para el vector de onda  $k$  omitido por comodidad, el hamiltoniano toma la forma conocida

$$H_e = \sum_{\vec{k}} H_{\vec{k}} = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2} \left[ p_k^2 + \omega_k^2 q_k^2 \right]. \quad (2.18)$$

Este hamiltoniano coincide con nuestra interpretación de que el campo escalar real está formado por una suma infinita de osciladores armónicos, cuyas variables canónicas son el par  $(q_k, p_k)$  y la frecuencia de éstos, está dada por (2.10) para cada vector de onda  $\vec{k}$ . A partir de este resultado, la cuantización del campo escalar real puede implementarse conociendo la cuantización del oscilador armónico, es decir, el esquema de segunda cuantización.

Finalmente, reescribamos el campo  $\phi$  y su momento canónico conjugado  $\pi$  en forma manifiestamente real en términos de las variables  $(q_k, p_k)$  de los osciladores armónicos

$$\phi(t, \vec{x}) = \frac{1}{2\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \left[ (1+i)q_{\vec{k}}(t) + (1-i)q_{-\vec{k}}(t) \right] e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad (2.19)$$

$$\pi(t, \vec{x}) = \frac{1}{2\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \left[ (1+i)p_{\vec{k}}(t) + (1-i)p_{-\vec{k}}(t) \right] e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}. \quad (2.20)$$

<sup>2</sup> Nótese de (2.10) que  $\omega_{\vec{k}}$  no depende del signo del vector de onda.

## 2.2. PROPAGADOR CON OSCILADORES ARMÓNICOS

---

Ahora en estas expresiones, es obvia la naturaleza real del campo y su momento canónico conjugado  $\phi = \phi^*$  y  $\pi = \pi^*$ . Con este resultado estamos listos para calcular, en la siguiente sección, el propagador del campo escalar real en términos de las variables canónicas propuestas  $(q_k, p_k)$ .

### 2.2 Propagador con osciladores armónicos

El propagador del campo escalar real tiene la forma [36]

$$\Delta_F(x, x') = \langle 0 | \widehat{T} \widehat{\phi}(t, \vec{x}) \widehat{\phi}(t', \vec{x}') | 0 \rangle, \quad (2.21)$$

siendo  $\widehat{T}$  el operador de ordenamiento temporal. El estado de vacío  $|0\rangle$  es el producto de los vacíos para cada modo  $\vec{k}$

$$|0\rangle = \prod_{\vec{k}} |0\rangle_{\vec{k}}. \quad (2.22)$$

Cada uno de los estados  $|0\rangle_{\vec{k}}$  se relaciona con las funciones de onda del vacío del oscilador armónico cuántico  $\Psi_0(q_k)$  como

$$|0\rangle_{\vec{k}} = \int dq_{\vec{k}} \Psi_0(q_{\vec{k}}) |q_{\vec{k}}\rangle. \quad (2.23)$$

Tomemos  $t > t'$  y calculemos la función de Green resultante incorporando (2.19) con (2.21), para obtener

$$\begin{aligned} \Delta_F(x, x') &= \langle 0 | \widehat{\phi}(t, \vec{x}) \widehat{\phi}(t', \vec{x}') | 0 \rangle = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} + \vec{k}' \cdot \vec{x}')} \langle 0 | \widehat{\phi}_{\vec{k}}(t) \widehat{\phi}_{\vec{k}'}(t') | 0 \rangle \\ &= \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \frac{e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} + \vec{k}' \cdot \vec{x}')}}{4V} \left[ 2 \langle 0 | \widehat{q}_{-\vec{k}}(t) \widehat{q}_{\vec{k}'}(t') | 0 \rangle + 2 \langle 0 | \widehat{q}_{\vec{k}}(t) \widehat{q}_{-\vec{k}'}(t') | 0 \rangle + \right. \\ &\quad \left. + (1+i)^2 \langle 0 | \widehat{q}_{\vec{k}}(t) \widehat{q}_{\vec{k}'}(t') | 0 \rangle + (1-i)^2 \langle 0 | \widehat{q}_{-\vec{k}}(t) \widehat{q}_{-\vec{k}'}(t') | 0 \rangle \right]. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Ahora empleamos la representación de Heissenberg en los operadores  $\widehat{q}_{\vec{k}}$

$$\widehat{q}_{\vec{k}}(t) = e^{i\widehat{H}_{\vec{k}}t} \widehat{q}_{\vec{k}} e^{-i\widehat{H}_{\vec{k}}t}, \quad (2.25)$$

## 2.2. PROPAGADOR CON OSCILADORES ARMÓNICOS

así como (2.22) en (2.24) para llegar a

$$\begin{aligned} \Delta_F(x, x') = & \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \frac{e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} + \vec{k}' \cdot \vec{x}') + iE_{0, \vec{k}} t - iE_{0, \vec{k}'} t'}}{2V} \left[ \vec{k} \langle 0 | \hat{q}_{\vec{k}} e^{-i\hat{H}_{\vec{k}} t} e^{i\hat{H}_{-\vec{k}'} t'} \hat{q}_{-\vec{k}'} | 0 \rangle_{-\vec{k}} + \right. \\ & + \frac{(1+i)^2}{2} \vec{k} \langle 0 | \hat{q}_{\vec{k}} e^{-i\hat{H}_{\vec{k}} t} e^{i\hat{H}_{\vec{k}'} t'} \hat{q}_{\vec{k}'} | 0 \rangle_{\vec{k}'} + (1-i)^2_{-\vec{k}} \langle 0 | \hat{q}_{-\vec{k}} e^{-i\hat{H}_{-\vec{k}} t} e^{i\hat{H}_{-\vec{k}'} t'} \hat{q}_{-\vec{k}'} | 0 \rangle_{-\vec{k}'} + \\ & \left. +_{-\vec{k}} \langle 0 | \hat{q}_{-\vec{k}} e^{-i\hat{H}_{-\vec{k}} t} e^{i\hat{H}_{\vec{k}'} t'} \hat{q}_{\vec{k}'} | 0 \rangle_{\vec{k}'} \right]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

En la expresión (2.26) hemos empleado el hecho de que los autovalores de energía del oscilador armónico cuántico correspondiente al modo  $\vec{k}$ , satisfacen

$$E_{n, \vec{k}} = \omega_{\vec{k}} \left( n + \frac{1}{2} \right) = E_{n, -\vec{k}}. \quad (2.27)$$

La segunda igualdad en (2.27) es válida debido a que la frecuencia (2.10) no depende del signo del vector de onda. Ahora tomemos la primera de las amplitudes que aparece como sumando en (2.26) y estudiémosla por separado. Veremos que este cálculo facilita obtener las restantes tres amplitudes. Tenemos que

$$\begin{aligned} \vec{k} \langle 0 | \hat{q}_{\vec{k}} e^{-i\hat{H}_{\vec{k}} t} e^{i\hat{H}_{\vec{k}'} t'} \hat{q}_{\vec{k}'} | 0 \rangle_{\vec{k}'} &= \vec{k} \langle 0 | \hat{q}_{\vec{k}} e^{-i\hat{H}_{\vec{k}} t} e^{i\hat{H}_{\vec{k}'} t'} \hat{q}_{\vec{k}'} \int \Psi_{0, \vec{k}'}(q_{\vec{k}'}) dq_{\vec{k}'} | q_{\vec{k}'} \rangle \\ &= \vec{k} \langle 0 | \hat{q}_{\vec{k}} e^{-i\hat{H}_{\vec{k}} t} e^{i\hat{H}_{\vec{k}'} t'} \int \hat{q}_{\vec{k}'} \Psi_{0, \vec{k}'}(q_{\vec{k}'}) dq_{\vec{k}'} | q_{\vec{k}'} \rangle, \\ &= \vec{k} \langle 0 | \hat{q}_{\vec{k}} e^{-i\hat{H}_{\vec{k}} t} e^{i\hat{H}_{\vec{k}'} t'} \int q_{\vec{k}'} \Psi_{0, \vec{k}'}(q_{\vec{k}'}) dq_{\vec{k}'} | q_{\vec{k}'} \rangle, \end{aligned} \quad (2.28)$$

donde en la tercera igualdad hemos empleado la representación de Schrödinger del álgebra de las relaciones canónicas de conmutación, a saber que  $\hat{q}_{\vec{k}} \Psi_{\vec{k}}(q_{\vec{k}}) = q_{\vec{k}} \Psi_{\vec{k}}(q_{\vec{k}})$ . Seguidamente, las autofunciones de energía del oscilador armónico cuántico correspondientes a los autovalores  $E_0$  y  $E_1$  satisfacen  $x\Psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} \Psi_1(x)$  que en nuestra notación equivale a

$$q_{\vec{k}} \Psi_{0, \vec{k}}(q_{\vec{k}}) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \Psi_{1, \vec{k}}(q_{\vec{k}}). \quad (2.29)$$

## 2.2. PROPAGADOR CON OSCILADORES ARMÓNICOS

Sustituyendo (2.29) en (2.28) tenemos

$$\begin{aligned}
\vec{k}\langle 0|\widehat{q}_{\vec{k}}e^{-i\widehat{H}_{\vec{k}}t}e^{i\widehat{H}_{\vec{k}'}t'}\widehat{q}_{\vec{k}'}|0\rangle_{\vec{k}'} &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}'}}} \vec{k}\langle 0|\widehat{q}_{\vec{k}}e^{-i\widehat{H}_{\vec{k}}t}e^{i\widehat{H}_{\vec{k}'}t'}|1\rangle_{\vec{k}'}, \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}'}}} e^{iE_{1,\vec{k}'}t'} \vec{k}\langle 0|\widehat{q}_{\vec{k}}e^{-i\widehat{H}_{\vec{k}}t}|1\rangle_{\vec{k}'}, \\
&= \frac{\delta_{\vec{k},\vec{k}'}}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}'}}} e^{iE_{1,\vec{k}'}t'} \vec{k}\langle 0|\widehat{q}_{\vec{k}}e^{-i\widehat{H}_{\vec{k}}t}|1\rangle_{\vec{k}'}, \\
&= \frac{\delta_{\vec{k},\vec{k}'}}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}'}}} e^{iE_{1,\vec{k}'}t'-iE_{1,\vec{k}}t} \vec{k}\langle 0|\widehat{q}_{\vec{k}}|1\rangle_{\vec{k}}. \quad (2.30)
\end{aligned}$$

Ahora empleamos otra propiedad de las autofunciones de energía del oscilador armónico cuántico:  $x\Psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}\Psi_0(x) + \frac{1}{\sqrt{\hbar\omega}}\Psi_2(x)$ , que en nuestra notación quedará como

$$q_{\vec{k}}\Psi_{1,\vec{k}}(q_{\vec{k}}) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}}\Psi_{0,\vec{k}}(q_{\vec{k}}) + \frac{1}{\sqrt{\omega_{\vec{k}}}}\Psi_{2,\vec{k}}(q_{\vec{k}}). \quad (2.31)$$

La expresión (2.31) se inserta en (2.30) luego de desarrollar el estado  $|1\rangle_{\vec{k}}$  en términos de funciones de onda y después, hacemos actuar el operador  $\widehat{q}_{\vec{k}}$  sobre la autofunción  $\Psi_{1,\vec{k}}(q_{\vec{k}})$ . Esto conduce finalmente a

$$\begin{aligned}
\vec{k}\langle 0|\widehat{q}_{\vec{k}}e^{-i\widehat{H}_{\vec{k}}t}e^{i\widehat{H}_{\vec{k}'}t'}\widehat{q}_{\vec{k}'}|0\rangle_{\vec{k}'} &= \frac{\delta_{\vec{k},\vec{k}'}}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}'}}} e^{iE_{1,\vec{k}'}t'-iE_{1,\vec{k}}t} \left[ \frac{\vec{k}\langle 0|0\rangle_{\vec{k}}}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} + \frac{\vec{k}\langle 0|2\rangle_{\vec{k}}}{\sqrt{\omega_{\vec{k}}}} \right]. \\
&= \frac{\delta_{\vec{k},\vec{k}'}}{2\sqrt{\omega_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}'}}} e^{iE_{1,\vec{k}'}t'-iE_{1,\vec{k}}t}. \quad (2.32)
\end{aligned}$$

Notemos que en (2.32) la dependencia en el vector de onda está dada en tres formas: en la frecuencia  $\omega_{\vec{k}}$  del denominador, en la energía del oscilador (que es lineal en la frecuencia y aparece en el argumento de la exponencial) y en la delta de Kronecker  $\delta_{\vec{k},\vec{k}'}$ . El signo del vector de onda será relevante en el término asociado a la delta de Kronecker. Esto permite regresar a la expresión (2.26) y calcular las otras tres amplitudes a partir de la expresión anterior. Éstas tomarán las formas

$$\vec{k}\langle 0|\widehat{q}_{\vec{k}}e^{-i\widehat{H}_{\vec{k}}t}e^{i\widehat{H}_{-\vec{k}'}t'}\widehat{q}_{-\vec{k}'}|0\rangle_{-\vec{k}'} = \frac{\delta_{\vec{k},-\vec{k}'}}{2\sqrt{\omega_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}'}}} e^{iE_{1,\vec{k}'}t'-iE_{1,\vec{k}}t}, \quad (2.33)$$

$$-\vec{k}\langle 0|\widehat{q}_{-\vec{k}}e^{-i\widehat{H}_{-\vec{k}}t}e^{i\widehat{H}_{\vec{k}'}t'}\widehat{q}_{\vec{k}'}|0\rangle_{\vec{k}'} = \frac{\delta_{-\vec{k},\vec{k}'}}{2\sqrt{\omega_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}'}}} e^{iE_{1,\vec{k}'}t'-iE_{1,\vec{k}}t}, \quad (2.34)$$

$$-\vec{k}\langle 0|\widehat{q}_{-\vec{k}}e^{-i\widehat{H}_{-\vec{k}}t}e^{i\widehat{H}_{-\vec{k}'}t'}\widehat{q}_{-\vec{k}'}|0\rangle_{-\vec{k}'} = \frac{\delta_{-\vec{k},-\vec{k}'}}{2\sqrt{\omega_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}'}}} e^{iE_{1,\vec{k}'}t'-iE_{1,\vec{k}}t}. \quad (2.35)$$

### 2.3. OSCILADOR ARMÓNICO POLIMÉRICO

Ahora regresamos al cálculo del propagador sustituyendo (2.32) - (2.35) en (2.26) quedando

$$\begin{aligned}
\Delta_F(x, x') &= \frac{1}{8V} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \frac{e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} + \vec{k}' \cdot \vec{x}') - i(E_{1, \vec{k}} - E_{0, \vec{k}})t + i(E_{1, \vec{k}'} - E_{0, \vec{k}'})t'}}{\sqrt{\omega_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}'}}} \left[ (1+i)^2 \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} + \right. \\
&+ \left. 2\delta_{\vec{k}, -\vec{k}'} + 2\delta_{-\vec{k}, \vec{k}'} + (1-i)^2 \delta_{-\vec{k}, -\vec{k}'} \right], \\
&= \frac{1}{8V} \sum_{\vec{k}} \frac{e^{-i(E_{1, \vec{k}} - E_{0, \vec{k}})(t-t')}}{\omega_{\vec{k}}} \left[ 2ie^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} + \vec{x}')} + 2e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} + \right. \\
&+ \left. 2e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} - 2ie^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} + \vec{x}')} \right].
\end{aligned}$$

En la suma anterior sobre los valores de  $\vec{k}$ , el primer y el cuarto sumando se cancelan, quedando finalmente

$$\begin{aligned}
\Delta_F(x, x') &= \frac{1}{8V} \sum_{\vec{k}} \frac{e^{-i(E_{1, \vec{k}} - E_{0, \vec{k}})(t-t')}}{\omega_{\vec{k}}} \left[ 4e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \right], \\
&= \frac{1}{2V} \sum_{\vec{k}} \frac{e^{-i\omega_{\vec{k}}(t-t') + i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}}{\omega_{\vec{k}}} = \frac{1}{2V} \sum_{\vec{k}} \frac{e^{-ik \cdot (x-x')}}{k^0}, \quad (2.36)
\end{aligned}$$

que es el propagador del campo escalar real libre. Aclaremos que en (2.36) hemos realizado la sustitución del vector de onda covariante  $k^\mu = (\omega_{\vec{k}}, \vec{k})$  quedando explícita la invariancia ante transformaciones de Lorentz. En una descripción donde el volumen de la caja es infinito, la suma en (2.36) se reemplaza por una integral en el espacio de momentos  $\vec{k}$ . Para que la suma converja, la integral adquiere un factor de normalización. Éste permite escribir la integral en el espacio de momentos, en una integral sobre el 4-espacio de momentos empleando la delta de Dirac  $\delta(k^2 - m^2)$ . El resultado será que el propagador del campo escalar real es invariante ante transformaciones de Lorentz ([35], [36]).

La siguiente sección está dedicada a exponer los aspectos relevantes de la cuantización polimérica del oscilador armónico, misma que se usará posteriormente para analizar el campo escalar polimérico.

#### 2.3 Oscilador armónico polimérico

La diferencia central entre la cuantización polimérica y la de Schrödinger, reside en la elección del espacio de Hilbert [3]-[33]. En el caso de la representación de Schrödinger, el espacio de Hilbert es el de las funciones de

### 2.3. OSCILADOR ARMÓNICO POLIMÉRICO

cuadrado integrable<sup>3</sup> sobre la recta real, denotado como  $L^2(\mathbb{R}, dx)$ . En el caso de la representación polimérica, el espacio de Hilbert es el espacio de las funciones casi periódicas [37], [38] y lo denotamos como  $\mathcal{H}_{poli}$ . Un vector en este espacio, es una combinación lineal

$$\Psi(p) = \sum_{\{x_k\}} \Psi_{x_k} e^{ipx_k/\hbar}, \quad (2.37)$$

donde el conjunto de puntos  $\{x_k\}$  es una selección arbitraria (o grafo) de la recta real, tal que los coeficientes  $\Psi_{x_k} \in \mathbb{C}$  sean no nulos en un conjunto numerable de puntos  $x_k$ . Las exponenciales  $e^{ipx_k/\hbar}$  se toman como una base ortonormal en  $\mathcal{H}_{poli}$  definiendo el producto interno como

$$\langle e^{ipx} | e^{ipx'} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dp e^{-ipx/\hbar} e^{ipx'/\hbar} = \delta_{x,x'}, \quad (2.38)$$

siendo  $\delta_{x,x'}$  la delta de Kronecker generalizada al índice  $x$ , que etiqueta a los puntos del conjunto no numerable  $\mathbb{R}$ . Naturalmente, las ondas planas son normalizables bajo este producto interno (2.38).

El operador de configuración  $\hat{x}$  y el de traslación  $\hat{U}_\lambda := \widehat{e^{i\lambda p/\hbar}}$  actúan sobre la base del espacio de Hilbert polimérico como

$$\hat{x} e^{ipx_k/\hbar} = i\hbar \frac{d}{dp} e^{ipx_k/\hbar}, \quad (2.39)$$

$$\hat{U}_\lambda e^{ipx_k/\hbar} = e^{ip(x_k+\lambda)/\hbar}. \quad (2.40)$$

Nótese en (2.40) que los operadores  $\hat{U}_\lambda$  forman un grupo de Lie uniparamétrico unitario con identidad  $\hat{U}_{\lambda=0} = I$  e inverso  $\hat{U}_\lambda^{-1} = \hat{U}_\lambda^\dagger = \hat{U}_{-\lambda}$  [3]. La representación (2.39) - (2.40), satisface un conmutador dado como

$$[\hat{x}, \hat{U}_\lambda] = -\lambda \hat{U}_\lambda, \quad (2.41)$$

que resulta del corchete de Poisson  $\{x, U_\lambda\} = i(\lambda/\hbar)U_\lambda$ . Los otros conmutadores son nulos.

El operador de momento lineal  $\hat{p}$  (canónico al operador  $\hat{x}$ ) no se puede obtener en  $\mathcal{H}_{pol}$  debido a que la representación (2.40) de  $\hat{U}_\lambda$  no es débilmente continua en el parámetro  $\lambda$  como puede verse de

$$\langle e^{ipx/\hbar} | \hat{U}_\lambda e^{ipx'/\hbar} \rangle = \langle e^{ipx/\hbar} | e^{ip(x'+\lambda)/\hbar} \rangle = \delta_{x,x'+\lambda}, \quad (2.42)$$

<sup>3</sup> Con medida de Lebesgue.

### 2.3. OSCILADOR ARMÓNICO POLIMÉRICO

---

donde se ve que

$$\langle e^{ipx/\hbar} | \widehat{U}_{\lambda=0} e^{ipx/\hbar} \rangle = \delta_{x,x} = 1,$$

mientras que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \langle e^{ipx/\hbar} | \widehat{U}_{\lambda} e^{ipx/\hbar} \rangle = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \delta_{x,x+\lambda} = 0.$$

El requisito de la continuidad débil es el pilar del Teorema de Stone-von Neumann [32]. En éste Teorema se prueba que la condición necesaria para que existan los generadores infinitesimales de los subgrupos unitarios uniparamétricos, es que sus representaciones sean débilmente continuas<sup>4</sup>. Esto repercute en el hecho de que no podrán realizarse traslaciones infinitesimales con las cuales generar el grupo de los operadores  $\widehat{U}_{\lambda}$ ; en otras palabras, no existe el operador  $\widehat{p}$ .

Por otro lado, sabemos que los observables clásicos son funciones del momento lineal  $p$ , con lo cual, los operadores asociados a éstos observables dependerán del momento lineal  $\widehat{p}$  que no existe en  $\mathcal{H}_{poli}$ . Por esta razón, necesitamos definir un operador que mimifique en alguna medida las propiedades del operador de momento lineal. Quizás la definición más simple de dicho operador es

$$\widehat{k}_{\lambda} = \frac{\hbar}{2i\lambda} \left( \widehat{U}_{\lambda} - \widehat{U}_{\lambda}^{\dagger} \right). \quad (2.43)$$

En  $L^2(\mathbb{R}, dx)$  como muestra el Teorema de Stone-von Neumann, el límite  $\lambda \rightarrow 0$  en (2.43) conduce al momento usual  $-i\hbar\partial_x$ , quedando por tanto definido el cuadrado del momento  $-\hbar^2\partial_x^2$ . En el espacio de Hilbert polimérico el límite referido no existe y  $\lambda$  se considera como una escala de longitud fundamental o un parámetro de renormalización. Por esta razón, se propone que el operador hamiltoniano, correspondiente al hamiltoniano clásico del oscilador armónico  $H = p^2/2m + m\omega^2 x^2/2$ , sea entonces

$$\widehat{H} = \frac{\hbar^2}{8m\lambda^2} \left( 2 - \widehat{U}_{2\lambda} - \widehat{U}_{2\lambda}^{\dagger} \right) + \frac{m\omega^2}{2} \widehat{x}^2, \quad (2.44)$$

siendo el primer sumando de esta expresión la cantidad  $\widehat{k}_{\lambda}^2/2m$ . Cabe esperar sin embargo que la dinámica polimérica se aproxime a la de la representación de Schrödinger en un régimen adecuado [6, 34, 33, 7]. Con la representación dada en (2.39), (2.40), y con el operador hamiltoniano (2.44), la ecuación de

---

<sup>4</sup> En realidad se trata de un conjunto de Teoremas [32]. Luego de obtenerse que existen los generadores de los subgrupos, otro de los teoremas prueba que siempre existe una transformación unitaria entre el álgebra formada con los generadores infinitesimales y el álgebra dada por las relaciones de conmutación canónicas de  $\widehat{x}$  y  $\widehat{p}$ .

### 2.3. OSCILADOR ARMÓNICO POLIMÉRICO

---

autovalores de energía  $\widehat{H}\Psi = E\Psi$  toma la forma

$$\frac{\hbar^2}{4ml^2} [1 - \cos(2lp/\hbar)] \Psi - \frac{1}{2}m\omega^2\hbar^2 \frac{\partial^2\Psi}{\partial p^2} = E\Psi, \quad (2.45)$$

donde hemos escrito  $\lambda = l$  para denotar que la escala ha sido fijada. Esta ecuación se puede reescribir en forma de una ecuación de Mathieu definiendo

$$u := \frac{lp}{\hbar} + \frac{\pi}{2}, \quad (2.46)$$

$$g := \frac{m\omega l^2}{\hbar}, \quad (2.47)$$

$$\alpha := \frac{2E}{\hbar\omega g} - \frac{1}{2}g^{-2}, \quad (2.48)$$

con lo cual la ecuación (2.45) adopta la forma estándar de la ecuación de Mathieu

$$\Psi''(u) + \left[ \alpha - \frac{\cos(2u)}{2g^2} \right] \Psi(u) = 0. \quad (2.49)$$

En el apéndice A se muestra un resumen de la solución a esta ecuación, tomando la definición (A.2) como alternativa para que coincida con aquella en [39]. El estudio detallado puede encontrarse precisamente en [39]. Las soluciones son las funciones  $se_n(u)$  y  $ce_n(u)$ , que son los senos y cosenos elípticos respectivamente [39]. Tomemos entonces las funciones normalizadas

$$\Psi_{2n}(u) = \pi^{-1/2} ce_n \left( \frac{1}{4g^2}, u \right), \quad (2.50)$$

$$\Psi_{2n+1}(u) = \pi^{-1/2} se_n \left( \frac{1}{4g^2}, u \right), \quad (2.51)$$

donde se ha hecho explícito que tomamos (A.2), como parámetro. Nótese que los subíndices  $2n$  y  $2n + 1$  en las autofunciones, numeran los niveles de energía correspondientes, e.g.,  $\Psi_0(u)$ ,  $\Psi_1(u)$ ,  $\Psi_2(u)$ ,  $\dots$ . Y el espectro de energía, para pequeños y grandes valores de  $l$  está dado como (ver Apéndice A)

$$E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega - \frac{[(2n+1)^2 + 1]}{16} m\omega^2 l^2 + O(l^4), \quad (2.52)$$

$$E_n = \frac{n^2}{2} m\omega^2 l^2 + O(l^{-1}). \quad (2.53)$$

La fórmula (2.52) muestra que el espectro del oscilador armónico se recupera cuando  $m\omega^2 l^2 \ll 1$ . Podemos deducir que este régimen de valores

## 2.4. PROPAGADOR DE CAMPO ESCALAR CON OSCILADORES ARMÓNICOS POLIMÉRICOS

---

se puede lograr por ejemplo si la amplitud propia del sistema  $l_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$  es mucho mayor que la escala  $l$ . En el caso contrario, cuando  $l_0 \ll l$  entonces el espectro se aleja por entero de la descripción usual dando lugar a (2.53), que corresponde a un rotor cuántico.

El poder vincular la frecuencia de estos osciladores con el vector de onda  $\vec{k}$  del campo escalar real en su descomposición en modos de Fourier, permite estudiar los efectos de la representación polimérica en el propagador del campo escalar real. Veamos esto en la siguiente sección.

### 2.4 Propagador de campo escalar con osciladores armónicos poliméricos

En esta sección estudiaremos los efectos en el propagador del campo escalar real que resultan de reemplazar el oscilador armónico cuántico, en representación de Schrödinger, por su equivalente en la representación polimérica. Al modelo de campo cuántico resultante lo llamaremos campo escalar real polimérico.

En la sección anterior vimos que elegir  $\mathcal{H}_{poli}$  como el espacio de Hilbert donde representar el álgebra de operadores cuánticos, conduce a una representación que no es débilmente continua y por tanto, no podemos recuperar el operador  $\hat{p}$ . Esto incide en que el hamiltoniano deberá escribirse en términos del generador de Weyl  $\hat{U}_\lambda$ , donde  $\lambda$  será un parámetro cuyo valor será fijado al estudiar la dinámica. Cuando pasamos precisamente a estudiar la dinámica, cambiamos la notación de este parámetro a  $l$  para hacer explícito este paso.

Vimos finalmente que el espectro de energía del oscilador armónico cuántico polimérico, se modifica considerablemente en regímenes en los que  $l$  es mucho mayor que la longitud de onda propia del sistema  $l_0$  (2.53); mientras que se recupera en el régimen opuesto (2.52).

Ahora queremos reemplazar los osciladores cuánticos que emergen de la descripción en modos de Fourier del campo escalar real, por la versión polimérica de éstos. Para ello, tomemos entonces a  $\mathcal{H}_{poli}$  como el espacio de Hilbert para representar los operadores correspondientes a las variables  $\hat{q}_{\vec{k}}$  y  $\hat{U}_{\lambda, \vec{k}}$  para cada modo  $\vec{k}$ . Notemos que al hacer la correspondencia  $U_{\lambda, \vec{k}} \leftrightarrow e^{i\lambda p_{\vec{k}}}$ , entre el generador de Weyl y el momento canónico  $p_{\vec{k}}$ , obtenemos que  $\lambda$  y en consecuencia  $l$ , tendrá dimensiones de  $L^{1/2}$ .

De (2.18) podemos ver que los osciladores con los cuales describimos los modos mecánicos tienen masa  $m = 1$ . Luego, usamos la definición (2.47) dada a la variable  $g$  para expresarla en términos de la frecuencia de los

## 2.4. PROPAGADOR DE CAMPO ESCALAR CON OSCILADORES ARMÓNICOS POLIMÉRICOS

---

osciladores al hacer la identificación

$$g = \omega_{\vec{k}} l_\star^2 = l_\star^2 \sqrt{\vec{k}^2 + M^2} = \frac{\sqrt{\vec{k}^2 + M^2}}{M_\star}, \quad (2.54)$$

donde  $l_\star$  indica que el valor del parámetro  $\lambda$  ha sido fijado<sup>5</sup> y hemos definido la masa  $M_\star = l_\star^{-2}$ , la cual convenientemente, codificará la arbitrariedad del parámetro polimérico  $l_\star$ . Claramente, si  $g \ll 1$  entonces  $|\vec{k}| \ll M_\star$  siendo éste el régimen infrarrojo del campo. Si por el contrario,  $g \gg 1$ , entonces estamos en el régimen ultravioleta con  $|\vec{k}| \gg M_\star$ .

Cabe resaltar que esta identificación de ambos regímenes (infrarrojo y ultravioleta), se debe esencialmente a la presencia del término “cinético”  $\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial p^2}\right)$  en el hamiltoniano cuántico de la representación de momentos. Este término tiene como coeficiente el parámetro  $l$  en la construcción de la dinámica polimérica dada en la sección anterior, y conduce a definir (2.47), que luego implica (2.54) al pasar a los modos del campo escalar real.

Ahora, antes de pasar a estudiar los efectos de este reemplazo en el propagador, modifiquemos la notación con el fin de hacerla homogénea a lo largo del presente trabajo. Así, estaremos definiendo cantidades con las cuales estudiar las modificaciones buscadas y tales que tengan un equivalente en el sistema fermiónico de los siguientes capítulos. Para hacer esto recordemos que en (2.32), la delta de Kronecker era la única parte que dependía del signo vector de onda. Tomando esto en cuenta, denotamos a la parte que no depende de la delta de Kronecker como  $D_{\vec{k}}(t - t')$  de forma que

$$D_{\vec{k}}(t - t') := \langle 0 | \hat{q}_{\vec{k}}(t) \hat{q}_{\vec{k}}(t') | 0 \rangle, \quad (2.55)$$

con lo cual tendremos

$$\langle 0 | \hat{q}_{\vec{k}}(t) \hat{q}_{\vec{k}'}(t') | 0 \rangle = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} D_{\vec{k}}(t - t'), \quad (2.56)$$

$$\langle 0 | \hat{q}_{\vec{k}}(t) \hat{q}_{-\vec{k}'}(t') | 0 \rangle = \delta_{\vec{k}, -\vec{k}'} D_{\vec{k}}(t - t'), \quad (2.57)$$

$$\langle 0 | \hat{q}_{-\vec{k}}(t) \hat{q}_{\vec{k}'}(t') | 0 \rangle = \delta_{-\vec{k}, \vec{k}'} D_{\vec{k}}(t - t'), \quad (2.58)$$

$$\langle 0 | \hat{q}_{-\vec{k}}(t) \hat{q}_{-\vec{k}'}(t') | 0 \rangle = \delta_{-\vec{k}, -\vec{k}'} D_{\vec{k}}(t - t'). \quad (2.59)$$

Sustituyendo las expresiones (2.56) - (2.59) en (2.24), tendremos que el propagador puede escribirse como

$$\Delta_F(x, x') = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} D_{\vec{k}}(t - t'). \quad (2.60)$$

---

<sup>5</sup> La estrella es para distinguirla del caso mecánico.

## 2.4. PROPAGADOR DE CAMPO ESCALAR CON OSCILADORES ARMÓNICOS POLIMÉRICOS

---

De esta manera la expresión (2.60) nos permite dirigir nuestra atención a un único oscilador armónico polimérico: el asociado al modo  $\vec{k}$  y cuyo espacio de Hilbert polimérico denotaremos como  $\mathcal{H}_{poli}^{\vec{k}}$ . También es evidente de (2.60) que cualquier modificación al propagador será resultado de modificaciones a la amplitud  $D_{\vec{k}}(t-t')$ .

Antes de seguir, aclaremos a qué corresponde el estado de vacío  $|0\rangle$ , dado en (2.55) para el caso del oscilador armónico polimérico. Recordemos que el espectro de energía o los autovalores característicos del hamiltoniano polimérico (2.44), forman un conjunto ordenado y acotado por debajo [39]. Esto permite construir el vacío de Fock en (2.55), como

$$|0^{(p)}\rangle = \prod_{\vec{k}} |0^{(p)}\rangle_{\vec{k}}, \quad (2.61)$$

donde  $|0^{(p)}\rangle_{\vec{k}}$  es el estado que corresponde al mínimo de energía del oscilador polimérico para el vector de onda  $\vec{k}$ . La etiqueta  $(p)$ , es para distinguirlo del vacío (2.22) definido en el caso de la representación de Schrödinger.

Regresemos entonces a la expresión (2.55) y escribamos los operadores en el esquema de Schrödinger con lo cual tenemos

$$D_{\vec{k}}^{(p)}(t-t') = {}_{\vec{k}}\langle 0^{(p)} | e^{i\hat{H}_{\vec{k}}^{(p)}t} \hat{q}_{\vec{k}} e^{-i\hat{H}_{\vec{k}}^{(p)}t} e^{i\hat{H}_{\vec{k}}^{(p)}t'} \hat{q}_{\vec{k}} e^{-i\hat{H}_{\vec{k}}^{(p)}t'} | 0^{(p)} \rangle_{\vec{k}}, \quad (2.62)$$

siendo  $\hat{H}_{\vec{k}}^{(p)}$  el hamiltoniano polimérico. Como hemos realizado nuevas definiciones en esta sección, conviene reescribir por comodidad la forma resultante del hamiltoniano que será

$$\hat{H}_{\vec{k}}^{(p)} = \frac{1}{8l_{\star}^2} \left[ 2 - \hat{U}_{2l_{\star}, \vec{k}} - \hat{U}_{-2l_{\star}, \vec{k}} \right] + \frac{1}{2} \omega_{\vec{k}}^2 \hat{q}_{\vec{k}}^2. \quad (2.63)$$

Al resolver en (2.62), de forma análoga a la ruta dada en la sección (2.2), tendremos

$$\begin{aligned} & {}_{\vec{k}}\langle 0^{(p)} | e^{i\hat{H}_{\vec{k}}^{(p)}t} \hat{q}_{\vec{k}} e^{-i\hat{H}_{\vec{k}}^{(p)}t} e^{i\hat{H}_{\vec{k}}^{(p)}t'} \hat{q}_{\vec{k}} e^{-i\hat{H}_{\vec{k}}^{(p)}t'} | 0^{(p)} \rangle_{\vec{k}} \\ &= e^{iE_{0,\vec{k}}^{(p)}(t-t')} {}_{\vec{k}}\langle 0^{(p)} | \hat{q}_{\vec{k}} e^{-i\hat{H}_{\vec{k}}^{(p)}t} e^{i\hat{H}_{\vec{k}}^{(p)}t'} \hat{q}_{\vec{k}} | 0^{(p)} \rangle_{\vec{k}}, \end{aligned} \quad (2.64)$$

donde  $E_{0,\vec{k}}^{(p)}$  es, como hemos dicho, el mínimo autovalor de energía correspondiente al oscilador polimérico del modo  $\vec{k}$ . Luego, el estado  $\hat{q}_{\vec{k}} | 0^{(p)} \rangle_{\vec{k}}$ , que también pertenece a  $\mathcal{H}_{poli}^{\vec{k}}$ , será una combinación lineal de las autofunciones de energía, es decir, que satisface la relación

$$\hat{q}_{\vec{k}} | 0^{(p)} \rangle_{\vec{k}} = \sum_n c_n^{(p)} | n^{(p)} \rangle_{\vec{k}}. \quad (2.65)$$

## 2.4. PROPAGADOR DE CAMPO ESCALAR CON OSCILADORES ARMÓNICOS POLIMÉRICOS

---

El coeficiente  $c_n^{(p)}$  resulta entonces de proyectar el estado  $n$ -ésimo  $\langle n^{(p)}|$ , sobre el estado  $\widehat{q}_{\vec{k}}|0^{(p)}\rangle_{\vec{k}}$ . De esta forma tendremos que  $c_n^{(p)}$  es un coeficiente complejo dado como

$$c_n^{(p)} = {}_{\vec{k}}\langle n^{(p)}|\widehat{q}_{\vec{k}}|0^{(p)}\rangle_{\vec{k}} = i \int_0^{2\pi} \Psi_{n,\vec{k}}^*(u) \partial_u \Psi_{0,\vec{k}}(u) du. \quad (2.66)$$

Es adecuado tener la forma del coeficiente  $c_n$  que resulta para la representación de Schrödinger y así compararlo con  $c_n^{(p)}$ . Para hacerlo, tomamos la propiedad (2.29) y calculamos  $c_n$ , resultando que éste toma la forma:  $c_n = \delta_{n,1}/\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}$ . Comparando  $c_n^{(p)}$  y  $c_n$ , vemos que la primera diferencia notable entre el campo escalar real cuántico “estándar” y su versión polimérica, radica en que la proyección  $c_n$  es no nula solo si  $n = 1$ , mientras que en el caso polimérico, la proyección tiene, en principio, contribuciones de todos los autoestados.

Continuemos entonces pasando a insertar (2.65) en (2.64) para luego, empleando la propiedad  ${}_{\vec{k}}\langle n^{(p)}|m^{(p)}\rangle_{\vec{k}}$  de las autofunciones poliméricas, obtener la expresión

$$D_{\vec{k}}^{(p)}(t-t') = \sum_n |c_n^{(p)}|^2 e^{-i(E_{n,\vec{k}}^{(p)} - E_{0,\vec{k}}^{(p)})(t-t')}. \quad (2.67)$$

Análogo a lo que hicimos para  $c_n^{(p)}$ , la expresión (2.67) conducirá al propagador usual solo en el caso de que se cumpla (2.29), es decir, tomar  $c_n = \delta_{n,1}/\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}$  y además, pidiendo que la diferencia entre las energías sea  $E_{1,\vec{k}} - E_{0,\vec{k}} = \omega_{\vec{k}}$ . Con estos valores obtendremos el  $D_{\vec{k}}(t-t')$  usual que denotamos como  $D_{\vec{k}}^0(t-t')$  para distinguirlo de la versión polimérica. Realcquemos que tomará la forma

$$D_{\vec{k}}^0(t-t') = \frac{1}{2\omega_{\vec{k}}} e^{-i\omega_{\vec{k}}(t-t')}. \quad (2.68)$$

Llegado a este punto, es claro que las cantidades que compararemos para estudiar la diferencia entre la representación polimérica y la estándar de los modos del campo serán precisamente  $D_{\vec{k}}^{(p)}(t-t')$  y  $D_{\vec{k}}^0(t-t')$ . Dicho esto, veremos particularmente cómo (2.67) se alejará de (2.68) debido a que tanto  $c_n^{(p)}$  como  $E_{n,\vec{k}}^{(p)}$  son funciones del parámetro de escala  $g$  dado en (2.54). Para hacer mucho más clara la comparación, escribimos la exponencial en (2.67) como

$$e^{-i(E_{n,\vec{k}}^{(p)} - E_{0,\vec{k}}^{(p)})(t-t')} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{2i(E_{n,\vec{k}}^{(p)} - E_{0,\vec{k}}^{(p)})}{(E_{n,\vec{k}}^{(p)} - E_{0,\vec{k}}^{(p)})^2 - \omega^2 - i\epsilon} e^{-i\omega(t-t')}, \quad (2.69)$$

## 2.4. PROPAGADOR DE CAMPO ESCALAR CON OSCILADORES ARMÓNICOS POLIMÉRICOS

---

y luego realizamos la transformada de Fourier de (2.67) obteniendo

$$D_p = \sum_n \frac{-2i\Delta E_n^{(p)} |c_n^{(p)}|^2}{p^2 + |\vec{k}|^2 - (\Delta E_n^{(p)})^2 - i\epsilon}, \quad (2.70)$$

siendo  $p^2 = \omega^2 - |\vec{k}|^2 = M^2$  y  $\Delta E_n^{(p)} = E_{n,\vec{k}}^{(p)} - E_{0,\vec{k}}^{(p)}$ . La amplitud estándar (2.68) en esta notación tendrá la forma

$$D_p^0 = -\frac{i}{p^2 - M^2 - i\epsilon}. \quad (2.71)$$

En la suma (2.70) los coeficientes  $c_n^{(p)}$  no nulos serán aquellos que tienen subíndice  $n = 4m + 3$ , con  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Esto se debe a que en el coeficiente  $c_n^{(p)}$  dado en la expresión (2.66) depende de la derivada de  $\Psi_0(u)$  la cual es una función par de período  $\pi$ . Por esta razón, su derivada será una función impar de período  $\pi$  (ver (A.18)). De esta manera, las funciones  $\Psi_n(u)$  para las cuales (2.66) no se anula serán las impares de período  $\pi$ , p. ej.,  $se_3(u), se_7(u), \dots, se_{4m+3}(u), \dots$ .

Ahora tomemos el límite infrarrojo  $g \ll 1$  para el cual los desarrollos adecuados de las funciones de Mathieu y de los autovalores [7] con  $n \geq 0$  conducen a

$$\Delta E_n = \omega_{\vec{k}} \left[ 1 - \frac{1}{2}g + \mathcal{O}(g^2) \right], \quad (2.72)$$

$$c_3 = -\frac{i}{\sqrt{2}\omega_{\vec{k}}} \left[ 1 - \frac{3}{4}g + \mathcal{O}(g^2) \right], \quad (2.73)$$

$$c_{4n+3}/c_3 = \mathcal{O}(g^n), \quad \text{para } n > 0. \quad (2.74)$$

Sustituyendo las relaciones anteriores en (2.70) y quedándonos al orden lineal tendremos que la amplitud  $D_p$  toma la forma

$$D_p \cong \frac{-i(1 - 2g)}{p^2 - M^2 + g\omega_{\vec{k}}^2 + i\epsilon} + \mathcal{O}(g^2). \quad (2.75)$$

Esta expresión (2.75) es la modificación en el régimen infrarrojo del propagador del campo escalar polimérico. Destaquemos tres observaciones de este resultado. Primero, que se recupera (2.71) al tomar  $g = 0$ , lo cual ofrece concordancia en cuanto a interpretar la escala  $M_\star$  como proveniente de un régimen fundamental, p. ej., la escala de Planck. Segundo, la expresión (2.75) tiene un polo en  $p^2 = M^2 - g(|\vec{k}|^2 + M^2)$ . Si la masa del

## 2.4. PROPAGADOR DE CAMPO ESCALAR CON OSCILADORES ARMÓNICOS POLIMÉRICOS

---

campo escalar es nula  $M = 0$ , entonces la relación anterior sugiere que dicho polo corresponde a un taquión o dicho de otro modo, que el tetramomento  $p$  del campo tendría masa imaginaria<sup>6</sup>. Tercero, que este polo modifica la frecuencia como

$$\omega^2 = \left[ 1 - \frac{\sqrt{|\vec{k}|^2 + M^2}}{M_\star} \right] \left( |\vec{k}|^2 + M^2 \right), \quad (2.76)$$

lo cual viola explícitamente la simetría de Lorentz. De la misma manera que se señala en [7], este polo taquiónico no implica que la frecuencia sea compleja para valores reales de  $|\vec{k}|$  como sucede en el caso de teorías taquiónicas invariantes de Lorentz [40].

En el caso ultravioleta donde  $g \gg 1$ , tenemos que se satisfacen las siguientes relaciones

$$\Delta E_{4n+3} = \omega_{\vec{k}} \left[ 2(n+1)^2 g + \mathcal{O}(g^2) \right], \quad (2.77)$$

$$c_3 = i \sqrt{\frac{g}{2\omega_{\vec{k}}}} \left[ \frac{1}{4g^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{g^6}\right) \right], \quad (2.78)$$

$$c_{4n+3}/c_3 = \mathcal{O}\left(\frac{1}{g^{2n}}\right), \quad \text{para } n > 0. \quad (2.79)$$

De esta última relación vemos que los coeficientes mayores que  $c_3$  están suprimidos por el orden  $\frac{1}{g^{2n}}$ . Tomamos entonces esta contribución y la insertamos en (2.70) obteniendo

$$D_p = \frac{\frac{i}{8g^2}}{p^2 - 4g^2\omega_{\vec{k}}^2 + |\vec{k}|^2 - i\epsilon} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{g^6}\right). \quad (2.80)$$

Las observaciones en este régimen son entonces las siguientes. Primero, el propagador se aparta notablemente del propagador estándar adquiriendo correcciones cuadráticas en  $g$ . Segundo, el polo que emerge en (2.80) - y a diferencia del polo en el límite infrarrojo-, no es taquiónico ya que el momento es  $p^2 = (4g^2 - 1)|\vec{k}|^2 > 0$ . Tercero, la relación de dispersión en este caso toma la forma

$$\omega^2 = 4 \left( |\vec{k}|^2 + M^2 \right)^2 / M_\star^2, \quad (2.81)$$

la cual también viola la simetría de Lorentz explícitamente.

---

<sup>6</sup> Esto sucederá en general para valores de  $\vec{k}$  en los cuales la cantidad  $g(|\vec{k}|^2 + M^2) > M^2$ .

## 2.4. PROPAGADOR DE CAMPO ESCALAR CON OSCILADORES ARMÓNICOS POLIMÉRICOS

---

Por último cabe señalar que esta relación de dispersión se asemeja notablemente a las que aparecen en teorías con derivadas superiores. Sin embargo, el numerador en la amplitud (2.80) contiene el término  $1/g^2$  que no aparece en el límite infrarrojo. Resultado que no aparece en las teorías lineales con derivadas de orden superior.

Estos son los resultados principales que surgen del cálculo del propagador del campo escalar real polimérico. Pasemos ahora a estudiar su equivalente fermiónico. Sin embargo, primero debemos detenernos en el análisis del modelo mecánico con el cual se caracteriza al campo de Dirac. Adelantamos que se trata de cuatro osciladores de Fermi desacoplados; afirmación que será probada en el **Capítulo 4**. Por lo tanto, el siguiente capítulo estará dedicado a estudiar el oscilador de Fermi y nuestro modelo de oscilador de Fermi polimérico.

### 3. OSCILADOR DE FERMI.

*“There are two possible outcomes: if the result confirms the hypothesis, then you’ve made a measurement. If the result is contrary to the hypothesis, then you’ve made a discovery.”*  
**Enrico Fermi**

Como mostraremos más adelante, cada modo mecánico del campo de Dirac corresponde a cuatro osciladores de Fermi desacoplados. En el siguiente capítulo se presentará la transformación que realiza dicha correspondencia. Esto conduce entonces a que el modelo mecánico que debemos considerar para estudiar la teoría cuántica polimérica del campo de Dirac, consiste en reemplazar los cuatro osciladores de Fermi por una versión polimérica de los mismos en lugar de los modos de Fourier del campo de Dirac. Para llevar a cabo este procedimiento y obtener los efectos de dicha modificación en el propagador del campo de Dirac, daremos en este capítulo los aspectos principales del modelo de oscilador de Fermi y de nuestra propuesta de versión polimérica.

#### 3.1 Análisis Pseudo clásico

Escribamos la acción del oscilador de Fermi [41] como sigue

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad (3.1)$$

siendo  $L$  la lagrangiana del sistema que tiene la forma

$$L = \frac{i}{2}(\delta_{jk}x^j\dot{x}^k + \omega\epsilon_{jk}x^jx^k), \quad (3.2)$$

donde las variables  $x^j \in \mathbb{R}_a$ ,  $j = 1, 2$ , son cantidades reales anticonmutativas y  $\omega \in \mathbb{R}$  es la frecuencia del oscilador. Las ecuaciones de movimiento se obtienen de realizar la variación de la acción (3.1), con condiciones de frontera generales dadas por las relaciones  $\delta_{jk}x^j\delta x^k|_{t_1} = \delta_{jk}x^j\delta x^k|_{t_2}$ . De esta manera,

### 3.1. ANÁLISIS PSEUDO CLÁSICO

---

obtenemos

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial^L}{\partial \dot{x}^j} L \right) = \frac{\partial^L}{\partial x^j} L \quad (3.3)$$

$$-\frac{i}{2} \delta_{jk} \dot{x}^k = \frac{i}{2} \delta_{jk} \dot{x}^k + i\omega \epsilon_{jk} x^k \quad (3.4)$$

$$\Rightarrow \dot{x}^j = -\omega \delta^{jk} \epsilon_{kl} x^l. \quad (3.5)$$

Aquí  $\frac{\partial^L}{\partial x^j}$  y  $\frac{\partial^L}{\partial \dot{x}^j}$  son las derivadas de Grassmann parciales por la izquierda respecto de las variables  $x^j$ ,  $\dot{x}^j$ . Las definiciones de estas derivadas parciales se pueden encontrar en [41, 42] y se apartan de la construcción de diferenciación para variables usuales conmutativas. Las aceleraciones no emergen directamente de las ecuaciones de movimiento (3.5) debido a que la acción (3.1) es un polinomio de primer orden en las velocidades. Sin embargo éstas se pueden obtener combinando las derivadas temporales en las ecuaciones de movimiento llevando a

$$\ddot{x}^j + \omega^2 x^j = 0. \quad (3.6)$$

La ecuación (3.6) por su similitud con la ecuación del oscilador armónico, motiva el nombre del sistema que estamos empleando, i.e. oscilador de Fermi. Procedemos ahora a implementar el formalismo hamiltoniano definiendo los momentos canónicos como

$$p_j := \frac{\partial^L}{\partial \dot{x}^j} L = -\frac{i}{2} \delta_{jk} x^k. \quad (3.7)$$

La expresión del momento canónico (3.7) indica que las velocidades y los momentos canónicos no están relacionados por transformaciones de Legendre. En este caso, para tratar a este tipo de sistemas, se aplica el formalismo de Dirac [43], pero extendido a sistemas cuyas variables son no conmutativas [42, 44].

De la expresión del momento canónico (3.7) identificamos las constricciones del sistema como

$$\phi_j = p_j + \frac{i}{2} \delta_{jk} x^k \approx 0, \quad (3.8)$$

donde hemos usado la igualdad débil  $\approx$  de Dirac en (3.8) para caracterizar la superficie de restricción en el espacio de fase [42].

Luego adoptamos Corchetes de Poisson Generalizados (CPG) definidos en [42], los cuales son similares a los empleados en sistemas bosónicos pero

### 3.1. ANÁLISIS PSEUDO CLÁSICO

---

incorporan la paridad de las variables tipo Grassmann <sup>1</sup>, es decir,

$$\{F, G\}_{CPG} := (-1)^{\epsilon_F} \left[ \frac{\partial^L F}{\partial x^j} \frac{\partial^L G}{\partial p_j} + \frac{\partial^L F}{\partial p_j} \frac{\partial^L G}{\partial x^j} \right], \quad (3.9)$$

donde  $F, G$  son funciones superanalíticas arbitrarias, es decir, grosso modo, son la generalización a variables de Grassmann de las funciones diferenciables [41]. Para las variables canónicas tenemos entonces

$$\{x^j, p_k\}_{CPG} = -\delta_k^j \quad (3.10)$$

$$\{x^j, x^k\}_{CPG} = 0, \quad (3.11)$$

$$\{p_j, p_k\}_{CPG} = 0. \quad (3.12)$$

Las propiedades de los CPG se pueden encontrar en [42], aquí daremos algunas que serán empleadas posteriormente.

$$\{F, G\}_{CPG} = -(-1)^{\epsilon_F \epsilon_G} \{G, F\}_{CPG}, \quad (3.13)$$

$$\{F, G_1 G_2\}_{CPG} = \{F, G_1\}_{CPG} G_2 + (-1)^{\epsilon_F \epsilon_{G_1}} G_1 \{F, G_2\}_{CPG}, \quad (3.14)$$

$$\{F, G\}_{CPG}^* = -\{G^*, F^*\}_{CPG}. \quad (3.15)$$

El asterisco  $*$  en (3.15) denota la conjugación compleja extendida a las variables de Grassmann [41]. En caso de que alguna de las funciones superanalíticas no tenga paridad definida, la acción de las propiedades anteriores se extienden a éstas por linealidad ya que cualquier superfunción superanalítica puede ser expresada como la suma de dos superfunciones con paridades definidas, una siendo par y la otra siendo impar [41].

El siguiente paso en el formalismo de Dirac conduce a determinar la naturaleza de las constricciones. Esto es, saber si son de primera o de segunda clase. La forma de hacer esto es calculando la matriz de las constricciones  $\{\phi_j, \phi_k\}_{CPG}$  empleando las expresiones (3.10)-(3.12). En el caso del oscilador de Fermi, las constricciones (3.8) son de segunda clase ya que su matriz de constricciones toma la forma

$$C_{jk} = \{\phi_j, \phi_k\}_{CPG} = -i\delta_{jk}, \quad (3.16)$$

la cual no es proporcional a ninguna de las constricciones [43, 44]. Luego, al saber que tratamos con un sistema de constricciones de segunda clase,

---

<sup>1</sup> El espacio de fase del oscilador de Fermi no contiene un sector conmutativo. Una variable de Grassmann  $A$  que conmuta con cualquier otra se dice par ( $\epsilon_A = 0$ ) mientras que una variable de Grassmann  $B$  que anticonmuta con alguna otra se dice que es impar ( $\epsilon_B = 1$ ).

### 3.1. ANÁLISIS PSEUDO CLÁSICO

---

el siguiente paso es determinar los corchetes de Dirac (CD) [44]. Para ello, calculamos la inversa de la matriz de constricciones

$$C^{-1} = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Los corchetes de Dirac permiten describir la dinámica adecuada de un sistema que posee constricciones de segunda clase, de forma consistente con el formalismo de Lagrange. Éstos están definidos como

$$\{\cdot, \cdot\}_D = \{\cdot, \cdot\}_{CPG} - \{\cdot, \phi_j\}_{CPG} (C^{-1})_{jk} \{\phi_k, \cdot\}_{CPG}. \quad (3.18)$$

Los CD satisfacen las mismas propiedades que los CPG [42] dadas en (3.13, 3.14, 3.15). Para las variables canónicas, los CD toman la forma

$$\{x^j, x^k\}_D = -i\delta^{jk}, \quad (3.19)$$

$$\{x^j, p_k\}_D = -\frac{1}{2}\delta_k^j, \quad (3.20)$$

$$\{p_j, p_k\}_D = \frac{i}{4}\delta_{jk}. \quad (3.21)$$

Llegado a este punto debemos elegir coordenadas para el espacio de fase reducido. Proponemos tomar como variables en este espacio las coordenadas  $x^1$  y  $x^2$ . Notemos que al tomar las constricciones fuertemente iguales a cero y reemplazar el momento canónico en las expresiones (3.20), (3.21) se obtiene la relación (3.19). Ahora con las variables del espacio de fase y las constricciones fuertemente iguales a cero, pasamos a obtener el hamiltoniano físico  $H_f$ , el cual se obtiene de la lagrangiana como

$$H_f = (\dot{x}^j p_j - L)|_{\phi=0} = -\frac{i}{2}\omega\epsilon_{jk}x^j x^k. \quad (3.22)$$

En la construcción del hamiltoniano, usaremos adicionalmente los dos primeros pasos del criterio de Weyl. Éste juega un papel importante en la cuantización y será comentado en la siguiente sección. A este nivel, consiste simplemente en tomar cada observable fermiónico y realizar un desarrollo en las variables fermiónicas del espacio de fase (espacio de fase reducido en nuestro caso) y luego escribir los coeficientes del desarrollo como objetos antisimétricos. Por esta razón, definimos en (3.22) el arreglo totalmente antisimétrico  $\epsilon$ .

Las ecuaciones de movimiento para una superfunción  $F$ , en términos de los Corchetes de Dirac, toman la forma

$$\frac{d}{dt}F = \{F, H_f\}_D. \quad (3.23)$$

### 3.2. CUANTIZACIÓN CANÓNICA

---

Para las variables del espacio de fase reducido, tendremos

$$\dot{x}^j = \{x^j, H_f\}_D = -\omega \delta^{jk} \epsilon_{km} x^m, \quad (3.24)$$

las cuales coinciden con las obtenidas por el método lagrangiano (3.5). Acotemos que se han empleado las propiedades de los CD dadas en (3.13), (3.14) para los Corchetes de Poisson Generalizados.

Con lo expuesto hasta este punto, hemos dado los aspectos principales de la teoría pseudo clásica hamiltoniana del oscilador de Fermi. Pasemos entonces a la siguiente sección, la cual está dedicada a la cuantización del oscilador de Fermi.

#### 3.2 Cuantización canónica

En esta sección expondremos los principales aspectos en la cuantización del oscilador de Fermi. La representación de Schrödinger será usada en la construcción del análogo de la representación del álgebra de Weyl para el oscilador de Fermi en la siguiente sección. Los detalles del super espacio de Hilbert se pueden encontrar en el Apéndice B así como aquellos relacionados con la estructura del super espacio vectorial formado por funciones super analíticas y su dual.

Sigamos entonces el esquema de cuantización usual que consiste en promover las funciones en  $\mathbb{R}_a^2$  a operadores abstractos, i. e.,  $f \mapsto \hat{f}$ . Pediremos adicionalmente que la paridad de las funciones se preserve bajo esta correspondencia con los operadores. Estos operadores forman un álgebra cuántica con multiplicación definida por conmutadores cuánticos los cuales heredan las propiedades de los CPG. La noción de generalización es en el sentido de que hereda las propiedades de los CPG haciendo  $\{\cdot, \cdot\}_{GPB} \rightarrow i\hbar[\cdot, \cdot]$ . De este modo las Relaciones Canónicas de Anticonmutación (RCA) resultan de

$$[\hat{x}^j, \hat{x}^k]_+ = \hbar \delta^{jk} \hat{1}, \quad (3.25)$$

donde el subíndice + significa que se tiene un anticommutator. El álgebra (3.25) se denomina Álgebra de Clifford cuando empleamos el campo de los números complejos para la multiplicación por escalar. Nos referiremos a (3.25) como Álgebra de Clifford o simplemente RCA indistintamente por razones que veremos más adelante. En el caso en el que la multiplicación por un escalar se reemplace por la multiplicación por supernúmeros llamaremos a (3.25) Super Álgebra de Clifford.

El operador hamiltoniano correspondiente a (3.22) es

$$\hat{H}_f = -\frac{i}{2} \omega \epsilon_{jk} \hat{x}^j \hat{x}^k. \quad (3.26)$$

### 3.2. CUANTIZACIÓN CANÓNICA

---

La relación entre las funciones clásicas y sus operadores abstractos asociados es claramente ambigua [45]. Puede verse que dos operadores distintos pueden resultar de una misma función clásica. Para contender con esto empleamos como mencionamos casi al final de la sección anterior, el criterio o regla de correspondencia de Weyl [45]. Esta regla consiste en los siguientes tres pasos, primero se realiza un desarrollo de la función clásica en potencias de las variables de Grassmann del espacio de fase. Luego los coeficientes en el desarrollo se escriben en forma totalmente antisimétrica para luego en el tercer paso, promover las variables a operadores abstractos. Los hamiltonianos (3.22) y (3.26) son un ejemplo directo de la aplicación de esta regla.

Ahora procedemos a representar las RCA en un super espacio de Hilbert. En el caso bosónico la representación se realiza en un espacio de Hilbert  $L^2(\mathbb{R}, dx)$  el cual toma al espacio de configuración  $\mathbb{R}$ , como el espacio sobre el cual se definen las funciones de cuadrado integrable. En el caso fermiónico haremos lo análogo: tomaremos el espacio  $\mathcal{H}$  de funciones de “cuadrado integrable” de una variable real anticonmutativa. Claramente podemos preguntarnos por qué elegir una sola variable real anticonmutativa en vez de dos. La razón es que de acuerdo al conteo de grados de libertad, el oscilador de Fermi tiene un espacio de fase reducido de dimensión dos de Grassmann o bien  $\mathbb{R}_a^2$ . Como es en este espacio donde estamos caracterizando completa y adecuadamente la dinámica, concluimos que el espacio de configuración adecuado debe tener la mitad de grados de libertad, correspondiendo a una copia de  $\mathbb{R}_a$ .

Un breve comentario sobre la integrabilidad en variables de Grassmann. La noción de integrabilidad de las funciones con variable anticonmutativa es “algo bizarra” según las palabras del propio Bryce DeWitt [41]. La razón es que en la integración fermiónica, el símbolo de la integral denota en todo caso ciertas propiedades algebraicas en lugar de una integración estándar en  $\mathbb{R}$ , ya sea de Riemann o de Lebesgue. Por ejemplo, las propiedades más notables son

$$\int dx x = 1, \quad \int dx = 0, \quad (3.27)$$

donde las variables  $x$  y  $dx$  son cantidades que pertenecen a  $\mathbb{R}_a$ . La forma en la que se define  $dx$  es un tanto elaborada y no entraremos en estos detalles ya que pueden abordarse en [41].

Otra propiedad interesante de esta integración es

$$\int f(x+a) dx = \int f(x) dx, \quad (3.28)$$

donde  $f : \mathbb{R}_a \rightarrow \Lambda_\infty; x \mapsto f(x)$  es una función super analítica [41, 42].

### 3.2. CUANTIZACIÓN CANÓNICA

---

La propiedad (3.28) se asemeja a la propiedad de invariancia translacional de la medida de Lebesgue del caso bosónico. Sin embargo, tal similitud es solo formal ya que  $dx$  no es estrictamente una medida. Análogo al caso bosónico, tomaremos entonces el espacio  $\mathcal{F}$  de las funciones super analíticas para construir el super espacio de Hilbert. Las funciones super analíticas [41, 42] admiten una estructura de super espacio vectorial que detallamos en el Apéndice B. Esta estructura de super espacio vectorial se emplea para construir el super espacio vectorial dual de  $\mathcal{F}$ , también detallado en el Apéndice B. Es importante destacar que en nuestro caso, tomar la multiplicación por escalar dada solo por los números complejos ordinarios, en vez de tomar los super números, conduce esencialmente a un espacio vectorial en vez de un super espacio vectorial. Esto a su vez repercute en que el super espacio de Hilbert será básicamente un espacio de Hilbert de dimensión finita. Sin embargo nos vemos forzados a tomar la multiplicación por super números ya que ésta es imprescindible para la representación de la versión fermiónica del álgebra de Weyl como veremos más adelante.

Una propiedad importante de las funciones  $\Psi \in \mathcal{F}$  es que siempre admiten un desarrollo en términos de la variable real anticonmutativa  $x$  como

$$\Psi(x) = \Psi_0 + x\Psi_1, \quad (3.29)$$

donde  $\Psi_0 := \Psi|_{x=0}$  y  $\Psi_1 := \frac{d^L}{dx}\Psi|_{x=0}$  y  $\frac{d^L}{dx}$  es la derivada de Grassmann por la izquierda.

En la mayoría de los casos este super espacio vectorial se estudia en su versión matricial que consiste en escribir los super vectores como arreglos  $2 \times 1$  cuyas componentes son las cantidades  $\Psi_0$  y  $\Psi_1$ . Tal notación facilita considerablemente los cálculos en particular cuando se describe el super espacio de Hilbert resultante que es esencialmente el super espacio de Fock. Sin embargo esta notación se aleja de la analogía que perseguimos con el sistema bosónico basado en una representación del tipo de Schrödinger (hamiltoniana). Es por esto que en nuestro trabajo insistimos en la descripción dada por las funciones super analíticas aunque en las instancias de la cuantización estándar parezca excesivo. Para dejar en claro este punto, recordemos que tanto la cuantización por lazos como su versión polimérica, emplean una representación del tipo Schrödinger para las variables de holonomías y flujos.

A partir del super espacio vectorial  $\mathcal{F}$  construimos el super espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  (ver Apéndice B) como el par

$$\mathcal{H} = (\mathcal{F}, \langle \cdot, \cdot \rangle), \quad (3.30)$$

siendo  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  una versión generalizada de producto interno [41]. En  $\mathcal{H}$ ,

### 3.2. CUANTIZACIÓN CANÓNICA

---

una representación de las RCA (3.25) toma la forma

$$\hat{x}^1 \Psi = \frac{\sqrt{2\hbar}}{2} \left[ x\Psi + \frac{d^L}{dx} \Psi \right], \quad (3.31)$$

$$\hat{x}^2 \Psi = \frac{\sqrt{2\hbar}}{2i} \left[ x\Psi - \frac{d^L}{dx} \Psi \right], \quad (3.32)$$

donde  $\Psi \in \mathcal{H}$ . Nótese que esta representación implica que los  $\hat{x}^j$  son operadores lineales en  $\mathcal{H}$ , acorde con los requisitos dados en [41]. Llamamos a (3.31, 3.32) representación de Schrödinger ya que al tomar esta representación para las variables de los modos de Fourier del campo de Dirac, entonces el campo y su conjugado de Dirac estarán representados por multiplicación y derivación de Grassmann respectivamente [46]. Esto es así porque para el oscilador de Fermi y a diferencia de su compañero bosónico, las variables del espacio de fase (reducido) no admiten una representación cuántica en la que éstos sean diagonales, es decir, que estén representados como operadores de multiplicación y derivación en el super espacio de Hilbert<sup>2</sup>.

Luego la ecuación estacionaria de Schrödinger se plantea como

$$\hat{H}_f \Psi(x) = E\Psi(x), \quad (3.33)$$

y se resuelve insertando (3.31 - 3.32) en  $\hat{H}_f$ , convirtiendo la ecuación de autovalores en un sistema algebraico de la forma

$$-\left(\frac{1}{2}\hbar\omega + E\right)\Psi_0 + \left(\frac{1}{2}\hbar\omega - E\right)x\Psi_1 = 0. \quad (3.34)$$

Este sistema se resuelve pidiendo que el autovalor  $E$  no dependa de la coordenada  $x$  y tampoco de los coeficientes del autovector. Esto implica que el factor entre paréntesis en el segundo sumando en (3.34) debe anularse lo cual nos conduce al primer autovalor  $E_1 = +\frac{1}{2}\hbar\omega$ . Al mismo tiempo, debemos anular el sumando restante lo cual significa que el coeficiente  $\Psi_0$  del autovector asociado a este autovalor de energía debe ser nulo, de modo que el autovector resultante será de la forma  $\Psi_1(x) = x\lambda_1$ . Si normalizamos este autovector en el producto interno de  $\mathcal{H}$  entonces tomará la forma  $\Psi_1(x) = x$ . Luego, el otro autovalor se obtiene de pedir que  $\Psi_0 \neq 0$  lo cual nos conduce a tomar como autovalor  $E_0 = -\frac{1}{2}\hbar\omega$ . Esto a su vez nos obliga a tomar  $\Psi_1 = 0$

---

<sup>2</sup> Esto no depende de si tomamos el campo  $\mathbb{C}$  o el anillo  $\Lambda_\infty$  para definir la multiplicación por escalar en el espacio de Hilbert, de igual modo no existirá representación diagonal de los operadores asociados a las variables del espacio de fase reducido.

### 3.2. CUANTIZACIÓN CANÓNICA

---

para anular el sumando restante. Así el autovector correspondiente a este autovalor toma la forma  $\Psi_0(x) = \lambda_0$ , el cual normalizado será  $\Psi_0(x) = 1$ .

Destaquemos dos aspectos importantes de este resultado. El primero es ver que una combinación lineal de los autoestados normalizados  $\Psi_0(x)$  y  $\Psi_1(x)$  y con coeficientes  $\Psi_0, \Psi_1$  conduce a un super vector arbitrario  $\Psi(x) = \Psi_0(x)\Psi_0 + \Psi_1(x)\Psi_1 = \Psi_0 + x\Psi_1$ . De esta manera, los autovectores del hamiltoniano  $\widehat{H}_f$  forman una base completa de  $\mathcal{H}$ . El segundo aspecto es que los autovalores  $\pm \frac{1}{2}\hbar\omega$  son los únicos que emergen de resolver el problema (3.34) y ninguno de ellos tiene contribución de alma. Debido a ésto y a que sus autovectores respectivos forman una base completa, entonces en términos de las definiciones de Bryce [41], el hamiltoniano  $\widehat{H}_f$  es el operador asociado a un observable físico, concretamente, la energía.

Veamos ahora la construcción y caracterización de la representación de Fock a partir de la representación de Schrödinger. Primero escribamos las RCA en el esquema de Heisenberg en el que los operadores son funciones del tiempo  $t$ . La evolución de los operadores puede ser obtenida a partir de la ecuación de Schrödinger como

$$i\hbar \frac{d}{dt} \widehat{x}^j(t) = \left[ \widehat{x}^j(t), \widehat{H}_f \right]_- . \quad (3.35)$$

Note que la paridad del hamiltoniano  $\widehat{H}_f$  incide en que el conmutador generalizado (que emerge del CPG) del hamiltoniano con cualquier otro operador sea simplemente un conmutador, lo cual se desprende de la propiedad (3.13) del Corchete de Poisson Generalizado. Desarrollando la ecuación (3.35) obtenemos una expresión de la forma

$$\frac{d}{dt} \widehat{x}^j = -\omega \delta^{jk} \epsilon_{kl} \widehat{x}^l, \quad (3.36)$$

que coincide con la versión clásica y cuya solución es

$$\widehat{x}^j(t) = \widehat{a} r^j e^{-i\omega t} + \widehat{a}^\dagger r^{j*} e^{i\omega t}. \quad (3.37)$$

Los coeficientes  $r^j$  son dos números complejos ordinarios ya que a este nivel, tratamos con las RCA como álgebras y no como super álgebras. El símbolo  $\dagger$ , indica que el operador  $\widehat{a}^\dagger$  es el adjunto del operador  $\widehat{a}$  en el producto interno de  $\mathcal{H}$ . Ahora tomemos la condición  $t = 0$  e insertémosla en (3.37) de modo que fijando los coeficientes con valores  $r^1 = \frac{\sqrt{2\hbar}}{2}$  y  $r^2 = i\frac{\sqrt{2\hbar}}{2}$ , el anticonmutador de los operadores  $\widehat{a}$  y  $\widehat{a}^\dagger$  satisface

$$[\widehat{a}, \widehat{a}]_+ = [\widehat{a}^\dagger, \widehat{a}^\dagger]_+ = 0, \quad [\widehat{a}, \widehat{a}^\dagger]_+ = 1, \quad (3.38)$$

### 3.2. CUANTIZACIÓN CANÓNICA

es decir, son los operadores de creación y aniquilación. Aquí haremos una breve pausa para explicar algunos aspectos importantes. En la literatura, el álgebra formada con (3.38) es la nombrada álgebra de las relaciones canónicas de anticonmutación, mientras que la formada por (3.25) es la llamada álgebra de Clifford. De acuerdo a [47], 1) todas las representaciones de las (3.38) en espacios de Hilbert de la misma dimensión finita son isomorfas y 2) si la representación se realiza en un espacio de Hilbert de dimensión par o éste tiene dimensión infinita, entonces siempre se podrá encontrar un isomorfismo entre las (3.38) con las (3.25) similar al dado en (3.37) a  $t = 0$ . Por esta razón en la mayoría de los textos no realizamos distinción alguna entre un álgebra y la otra. Claramente, el tomar super números modifica la estructura del álgebra convirtiéndola en super álgebra. Esto indica que el criterio dado por [47] no es necesariamente aplicable y por lo tanto, la super álgebra formada por los operadores  $\hat{a}$  y  $\hat{a}^\dagger$  no es necesariamente isomorfa a la formada por  $\hat{x}^j$ . No contamos con una demostración de esta última afirmación, y por ello la tomaremos como una conjetura formal y admisible.

El super espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_f$  para la representación de Fock puede ser brevemente definido<sup>3</sup> como formado por los super vectores abstractos

$$|\varphi\rangle = |0\rangle\varphi_0 + |1\rangle\varphi_1, \quad (3.39)$$

en el cual  $\varphi_0, \varphi_1 \in \Lambda_\infty$  y la multiplicación derecha e izquierda por super números  $z \in \Lambda_\infty$  con los vectores de la base  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$  son la misma. El espacio dual es análogo a  $\langle\varphi| = \varphi_0^*\langle 0| + \varphi_1^*\langle 1|$  donde  $*$  es el conjugado complejo en  $\Lambda_\infty$ . Los operadores  $\hat{a}$  y  $\hat{a}^\dagger$  se representan entonces en  $\mathcal{H}_f$  de la forma

$$\hat{a}|0\rangle = 0, \quad \hat{a}|1\rangle = |0\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|0\rangle = |1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|1\rangle = 0, \quad (3.40)$$

lo cual confirma que son los operadores de creación y aniquilación del oscilador de Fermi. En términos de las (3.38), los operadores de creación y aniquilación se pueden representar en  $\mathcal{H}$  como

$$\hat{a}\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} (\hat{x}^1 - i\hat{x}^2) \Psi(x) = \frac{d^L}{dx} \Psi(x), \quad (3.41)$$

$$\hat{a}^\dagger\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} (\hat{x}^1 + i\hat{x}^2) \Psi(x) = x\Psi(x), \quad (3.42)$$

por lo tanto  $\hat{a}$  y  $\hat{a}^\dagger$  son operadores diagonales en  $\mathcal{H}$  cuando se implementan (3.31) y (3.32). Este resultado nos da la pista para construir el análogo a la representación de momentos en un super espacio de Hilbert. De forma similar

<sup>3</sup> Una derivación precisa se encuentra en [41]

### 3.2. CUANTIZACIÓN CANÓNICA

---

al caso bosónico, realizamos una transformada de Fourier de las funciones super analíticas definidas en  $\mathcal{H}$

$$\tilde{\Psi}(k) := \int dx e^{xk} \Psi(x), \quad \Psi(x) = \int dk e^{-xk} \tilde{\Psi}(k), \quad (3.43)$$

donde  $k, dk \in \mathbb{R}_a$  y las  $\tilde{\Psi}(k)$  son nuevamente funciones super analíticas. Éstas forman un super espacio de Hilbert

$$\tilde{\mathcal{H}} = \{\tilde{\Psi} : \mathbb{R}_a \rightarrow \Lambda_\infty; k \mapsto \tilde{\Psi}(k) \mid \tilde{\Psi}(k) \text{ super analíticas}\}. \quad (3.44)$$

Es fácil verificar que en  $\tilde{\mathcal{H}}$  los operadores de creación y aniquilación se representan como

$$\hat{a}\tilde{\Psi}(k) = k\tilde{\Psi}(k), \quad (3.45)$$

$$\hat{a}^\dagger\tilde{\Psi}(k) = \frac{d^L}{dk}\tilde{\Psi}(k). \quad (3.46)$$

Continuemos ahora con el análisis de la representación de Fock dando los aspectos relativos a la dinámica. El hamiltoniano toma la forma

$$\hat{H}_f = -\frac{i}{2}\omega\epsilon_{jk}\hat{x}^j\hat{x}^k = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} - \frac{1}{2}\right). \quad (3.47)$$

La ecuación (3.47) junto con (3.40) conduce a un espectro idéntico al obtenido en la representación de Schrödinger  $E_n = \hbar\omega(n - \frac{1}{2})$ , con  $n = 0, 1$ . Los autoestados están relacionados de una forma similar al caso bosónico  $|0\rangle \rightarrow \Psi_{e_0}(x)$  y  $|1\rangle \rightarrow \Psi_{e_1}(x)$  haciendo uso de la integral de Berezin

$$|n\rangle := \int |x\rangle dx \Psi_n(x), \quad (3.48)$$

aquí  $|x\rangle$  mimifica la base de coordenadas de variables reales anticonmutativas en la notación de kets. Además tenemos  $\langle x|x'\rangle := \delta(x - x')$ , donde  $\delta(x - x') = x - x'$  es la distribución delta de Dirac en el espacio  $\mathbb{R}_a$ [41]. Como mencionamos anteriormente, las propiedades de la integral de Berezin nos da

$$\langle x|n\rangle = \Psi_n(x), \quad (3.49)$$

lo cual es similar al caso bosónico.

Un resultado importante de esta descripción es el del cálculo de las funciones de correlación, en particular las de uno y dos puntos. Estas funciones de correlación jugarán un papel importante en el cálculo del propagador del campo de Dirac descrito en osciladores de Fermi.

### 3.2. CUANTIZACIÓN CANÓNICA

---

Para determinar las funciones de correlación primero es necesario exponer las siguientes propiedades de los autoestados de energía del oscilador de Fermi.

Las autofunciones normalizadas toman la forma  $\Psi_{e_0}(x) = 1$  y  $\Psi_{e_1}(x) = x$  respectivamente. Además

$$\hat{x}_1 \Psi_{e_0}(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Psi_{e_1}(x), \quad \hat{x}_2 \Psi_{e_0}(x) = \frac{\sqrt{2}}{2i} \Psi_{e_1}(x), \quad (3.50)$$

$$\hat{x}_1 \Psi_{e_1}(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Psi_{e_0}(x), \quad \hat{x}_2 \Psi_{e_1}(x) = \frac{i\sqrt{2}}{2} \Psi_{e_1}(x). \quad (3.51)$$

De modo que ahora podemos calcular las funciones de correlación de un punto digamos para  $\hat{x}_1$ , dando

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{x}_1 | 0 \rangle &= \langle 0 | \hat{x}_1 \int dx \Psi_{e_0}(x) | x \rangle = \langle 0 | \int dx \hat{x}_1 \Psi_{e_0}(x) | x \rangle \\ &= \langle 0 | \int dx \frac{\sqrt{2}}{2} \Psi_{e_1}(x) | x \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} \langle 0 | 1 \rangle = 0. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Análogamente, la función de correlación correspondiente a  $\hat{x}_2$  se obtiene como

$$\langle 0 | \hat{x}_2 | 0 \rangle = 0. \quad (3.53)$$

Otras funciones de correlación útiles son aquellas que son bilineales en los operadores fundamentales. Un cálculo similar al anterior nos conduce a

$$\langle 0 | \hat{x}_1 \hat{x}_1 | 0 \rangle = \langle 0 | (\hat{x}_1)^2 | 0 \rangle = \langle 0 | \frac{1}{2} | 0 \rangle = \frac{1}{2}, \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{x}_1 \hat{x}_2 | 0 \rangle &= \langle 0 | \hat{x}_1 \hat{x}_2 \int dx \Psi_{e_0}(x) | x \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2i} \langle 0 | \hat{x}_1 \int dx \Psi_{e_1}(x) | x \rangle \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2i} \langle 0 | \int dx \frac{\sqrt{2}}{2} \Psi_{e_0}(x) | x \rangle = \frac{1}{2i} \langle 0 | 0 \rangle = \frac{1}{2i}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\langle 0 | \hat{x}_2 \hat{x}_1 | 0 \rangle = \langle 0 | -\hat{x}_1 \hat{x}_2 | 0 \rangle = -\frac{1}{2i}, \quad (3.56)$$

$$\langle 0 | \hat{x}_2 \hat{x}_2 | 0 \rangle = \langle 0 | (\hat{x}_2)^2 | 0 \rangle = \langle 0 | \frac{1}{2} | 0 \rangle = \frac{1}{2}. \quad (3.57)$$

Con estos resultados, tenemos bajo control las funciones de correlación que emplearemos en el cálculo del propagador del campo de Dirac y además, hemos mostrado una similitud bastante notable entre la representación de Fock y la de Schrödinger del oscilador de Fermi con su contraparte bosónica.

En la siguiente sección estudiaremos el análogo al álgebra de Weyl para el primero siguiendo pasos similares a aquellos dados para el caso bosónico.

### 3.3 Super álgebra de Weyl

Ilustremos ahora el camino heurístico seguido por nosotros para construir una versión fermiónica del álgebra de Weyl. Decimos que es heurístico por dos razones; la primera es porque el sistema fermiónico, a diferencia del sistema bosónico, no tiene problemas de acotamiento de los operadores fundamentales y por lo tanto, no existe una necesidad primordial para construir el álgebra de Weyl fermiónica [47]. La segunda razón, es porque una construcción rigurosa del álgebra de Weyl fermiónica resultará de implementar el esquema de cuantización algebraica, en particular la construcción GNS, y en este trabajo hemos seguido la ruta ofrecida en [3] que, aplicada al oscilador de Fermi consiste en los siguientes pasos

1. Construir el operador exponencial  $\widehat{W}(\vec{u}) := e^{i(u^1\hat{x}^1+u^2\hat{x}^2)}$  con parámetros  $u^j \in \mathbb{R}_a$ ,  $j = 1, 2$ .
2. Desarrollar en serie la expresión  $e^{i(u^1\hat{x}^1+u^2\hat{x}^2)}\Psi(x)$ , siendo  $\Psi(x) \in \mathcal{H}$ , y determinar la representación de  $\widehat{W}(\vec{u})$  sobre  $\mathcal{H}$  a partir de la representación de  $\hat{x}^1$  y  $\hat{x}^2$  sobre este mismo super espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ .
3. Luego definir la multiplicación del álgebra de Weyl fermiónica a partir de la composición con operador  $\widehat{W}(\vec{v})$ , es decir, definir 
$$\left[\widehat{W}(\vec{v}) \cdot \widehat{W}(\vec{u})\right] \Psi(x) := \widehat{W}(\vec{v}) \left[\widehat{W}(\vec{u})\Psi(x)\right].$$
4. La involución del álgebra la obtenemos extendiendo la involución definida sobre  $\mathcal{H}$ .
5. Para pasar a la mecánica polimérica fermiónica modificamos el super espacio de Hilbert cambiando la delta de Dirac del producto interno por una delta de Kronecker.
6. Representar  $\widehat{W}(\vec{u})$  en el nuevo super espacio de Hilbert y verificar que no puede obtenerse alguno de los operadores  $\hat{x}^j$ ,  $j = 1, 2$ . De esta manera, habremos construido una representación singular que llamaremos representación polimérica.
7. Luego, proponer un operador que mimifique en cierto sentido, las propiedades dinámicas del sistema y estudie su problema de autovalores.

Pasemos entonces al primer paso definiendo las exponenciales

$$\widehat{W}(\vec{u}) = \widehat{W}(u^1, u^2) := e^{i(u^1\hat{x}^1+u^2\hat{x}^2)}, \quad (3.58)$$

### 3.3. SUPER ÁLGEBRA DE WEYL

---

que serán consideradas como los generadores del álgebra de Weyl. En esta expresión,  $u^j$ ,  $j = 1, 2$  son cantidades reales anticonmutativas. El operador definido en (3.58) emplea parámetros reales anticonmutativos porque éstos parámetros emergen del espacio de fase de la teoría clásica [6] y en nuestro caso, el espacio de fase es precisamente  $\mathbb{R}_a^2$ .

Una representación de  $\widehat{W}$  en  $\mathcal{H}$  puede obtenerse usando (3.31)-(3.32) como mencionamos en el paso 2

$$\begin{aligned} \widehat{W}(u^1, u^2)\Psi(x) &= \left[ \left(1 + \frac{i\hbar}{2}u^1u^2\right)\Psi_0 + \frac{\sqrt{2\hbar}}{2}(iu^1 - u^2)\Psi_1 \right] + \\ &+ x \left[ \left(1 - \frac{i\hbar}{2}u^1u^2\right)\Psi_1 + \frac{\sqrt{2\hbar}}{2}(iu^1 + u^2)\Psi_0 \right], \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$= e^{\frac{i\hbar}{2}u^1u^2} \cdot e^{\frac{\sqrt{2\hbar}}{2}x(iu^1+u^2)} \cdot \Psi\left(x + \frac{\sqrt{2\hbar}(iu^1 - u^2)}{2}\right). \quad (3.60)$$

La expresión (3.60) puede ser entendida como la forma en la que los operadores  $\widehat{W}$  actúan en  $\mathcal{H}$ , i. e. una multiplicación por una fase y traslación similar al caso bosónico, y no solo como una expresión simplificada de (3.59). De este modo (3.60) sugiere que el operador  $\widehat{W}$  no es cerrado en  $\mathcal{H}$  porque el argumento de la traslación en la función super analítica  $x + \frac{\sqrt{2\hbar}}{2}(iu^1 - u^2)$  no es una cantidad real. Naturalmente podríamos estar tentados a desechar la relación (3.60) y quedarnos con (3.59) pero la notación dada en (3.59) es poco amistosa con la construcción polimérica ya que presupone que se está tomando un espacio de funciones super analíticas. Para pasar a una representación singular conviene una notación como la de (3.60) pero que esté bien comportada en  $\mathcal{H}$ . Veremos más adelante la solución dada a esta dificultad.

Definimos la multiplicación por super números del álgebra cuyos generadores están dados por (3.59) de la forma

$$(z \cdot \widehat{W}(\vec{u}))\Psi(x) := z \cdot (\widehat{W}(\vec{u})\Psi)(x), \quad (3.61)$$

$$(\widehat{W}(\vec{u}) \cdot z)\Psi(x) := \widehat{W}(\vec{u})(z \cdot \Psi)(x). \quad (3.62)$$

La suma puede ser extendida de forma natural y una multiplicación entre generadores, que constituye el tercer paso, se introduce usando la ecuación (3.59). Ésta toma la forma

$$\widehat{W}(\vec{u})\widehat{W}(\vec{v}) = e^{\frac{i\hbar}{2}(u^1v^1+u^2v^2)}\widehat{W}(\vec{u} + \vec{v}). \quad (3.63)$$

### 3.3. SUPER ÁLGEBRA DE WEYL

---

Notemos en (3.63) la fase formada con las etiquetas  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  lo cual es un resultado similar al caso bosónico.

Con todos estos resultados, podemos definir la super álgebra de Weyl como el conjunto de elementos formados con las sumas finitas de las multiplicaciones finitas de los generadores de Weyl y super números. Un elemento arbitrario  $\widehat{A}$  tendrá la forma

$$\widehat{A} = z_0 + z_1 \widehat{W}(\vec{u}_1) z_2 + z_3 \widehat{W}(\vec{u}_2) z_4 + z_5 \widehat{W}(\vec{u}_3) z_6 + z_7 \widehat{W}(\vec{u}_4) z_8 + z_9 \widehat{W}(\vec{u}_5) z_{10} + \dots \quad (3.64)$$

De la expresión (3.59) podemos recuperar la representación (3.31) - (3.32) como

$$\widehat{x}^1 \Psi(x) = \frac{1}{i} \left( \frac{\partial}{\partial u^1} \right) \cdot \widehat{W}(\vec{u}) \Psi(x)|_{\vec{u}=0}, \quad (3.65)$$

$$\widehat{x}^2 \Psi(x) = \frac{1}{i} \left( \frac{\partial}{\partial u^2} \right) \cdot \widehat{W}(\vec{u}) \Psi(x)|_{\vec{u}=0}, \quad (3.66)$$

donde los operadores  $\frac{\partial}{\partial u^1}$  y  $\frac{\partial}{\partial u^2}$  son tratados como super números actuando en el argumento  $x$ . Con estas relaciones, uno puede asegurar que todos los subconjuntos de la super álgebra de Weyl formados con super números sin alma, serán isomorfos al subconjunto de la super álgebra generada con las (3.38) y formado con super números sin alma.

Ahora calculamos la acción de los generadores de la super álgebra de Weyl en un estado ket empleando la expresión (3.59) tomando la forma

$$\widehat{W}(u^1, u^2)|x\rangle = |x + \frac{\sqrt{2\hbar}}{2}(iu^1 + u^2)\rangle e^{-\frac{\sqrt{2\hbar}}{2}x(iu^1 - u^2)} \cdot e^{\frac{i\hbar}{2}u^1 u^2}. \quad (3.67)$$

Es clara la relación con la notación dada en (3.60) y por supuesto, el problema de que los operadores representados como en (3.60) se salen del super espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  sigue presente. Este resultado nos invita a concluir que la relación (3.60) es acertada y que en efecto, el generador  $\widehat{W}$  tiene una representación que no es cerrada en  $\mathcal{H}$ . Antes de pasar a dar la solución, daremos una explicación más nítida al problema para lo cual escribimos el argumento de  $\widehat{W}$  en términos de los operadores de creación y aniquilación

$$i(u^1 \widehat{x}^1 + u^2 \widehat{x}^2) = \frac{\sqrt{2\hbar}}{2} (iu^1 - u^2) \widehat{a} + \frac{\sqrt{2\hbar}}{2} (iu^1 + u^2) \widehat{a}^\dagger, \quad (3.68)$$

y notemos que los coeficientes en (3.68) son aquellos que aparecen en la fase y en el coeficiente de traslación en (3.60) y (3.67). Luego, recordemos que en el caso bosónico, cuando los operadores de Weyl son construidos a partir de

### 3.3. SUPER ÁLGEBRA DE WEYL

---

los operadores de posición y momento, sus coeficientes implican por ejemplo en la representación de posición, una fase y el desplazamiento respectivo de los estados kets de posición. De este modo, la interpretación que damos a los coeficientes  $iu^1 \pm u^2$  es similar: corresponden a fase y desplazamientos asociadas a los operadores de creación y aniquilación.

Dicho esto, una solución natural sería pasar a un super espacio de Hilbert basado en funciones super analíticas con argumento complejo anticonmutativo en vez de un argumento real anti conmutativo y con esto el desplazamiento por una cantidad compleja anticonmutativa estaría bien definido. En este caso solo podemos conjeturar que este nuevo super espacio de Hilbert permita una interpretación de la representación de las RCA en términos de funciones holomórficas. Desafortunadamente, esto requerirá modificar la representación de las RCA y nos apartaría de nuestro propósito de seguir una ruta lo más similar posible a la construcción dada en [3] para el caso bosónico. La solución que daremos entonces consiste en suponer que la definición que dimos al generador de Weyl en (3.58) es inadecuada, pero sin embargo nos sirve para elegir la correcta. Ésta, la correcta, resulta de tomar una redefinición del generador  $\widehat{W}$  reemplazando  $u^1 \rightarrow -iu^1$ . Escribamos la expresión (3.58) con esta modificación y veamos cómo se modifican las construcciones dadas anteriormente con el nuevo generador

$$\widehat{\mathcal{W}}(u^1, u^2) := \widehat{W}(-iu^1, u^2) = e^{-(u^1 \widehat{x}^1 + iu^2 \widehat{x}^2)}. \quad (3.69)$$

Este es un generador diferente y por lo tanto dará lugar a una super álgebra diferente. Su representación ahora pasa a ser

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{W}}(u^1, u^2)\Psi(x) &= \left[ \left(1 + \frac{\hbar}{2}u^1u^2\right) \Psi_0 + \frac{\sqrt{2\hbar}}{2}(u^1 - u^2) \Psi_1 \right] + \\ &+ x \left[ \left(1 - \frac{\hbar}{2}u^1u^2\right) \Psi_1 + \frac{\sqrt{2\hbar}}{2}(u^1 + u^2) \Psi_0 \right], \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$= e^{\frac{\hbar}{2}u^1u^2} \cdot e^{\frac{\sqrt{2\hbar}}{2}x(u^1+u^2)} \cdot \Psi\left(x + \frac{\sqrt{2\hbar}}{2}(u^1 - u^2)\right), \quad (3.71)$$

y su multiplicación como super álgebra toma la forma

$$\widehat{\mathcal{W}}(u^1, u^2)\widehat{\mathcal{W}}(v^1, v^2) = e^{-\frac{\hbar}{4}(u^1v^1 - u^2v^2)}\widehat{\mathcal{W}}(u^1 + v^1, u^2 + v^2), \quad (3.72)$$

siendo  $u^j, v^j, j = 1, 2$  super números reales anticonmutativos. La representación de las RCA puede recuperarse usando (3.65) y (3.66) al reemplazar en ellas  $u^1 \rightarrow -iu^1$ .

### 3.3. SUPER ÁLGEBRA DE WEYL

---

Finalmente, la acción en un estado ket está ahora bien definida y toma la forma

$$\widehat{\mathcal{W}}(u^1, u^2)|x\rangle = |x + \frac{\sqrt{2\hbar}}{2}(u^1 + u^2)\rangle e^{-\frac{\sqrt{2\hbar}}{2}x(u^1 - u^2)} \cdot e^{\frac{\hbar}{2}u^1 u^2}, \quad (3.73)$$

con lo cual tomaremos a los operadores  $\widehat{\mathcal{W}}(u^1, u^2)$  como los generadores de la super álgebra de Weyl. A partir de éstos podemos construir la versión fermiónica de los grupos unitarios uniparamétricos y de esta manera, el paralelismo con el caso bosónico será más nítido.

Definamos entonces los super números

$$\xi^1 = \frac{\sqrt{2\hbar}}{2}(u^1 + u^2), \quad (3.74)$$

$$\xi^2 = \frac{\sqrt{2\hbar}}{2}(u^1 - u^2), \quad (3.75)$$

los cuales están relacionados con la traslación y la fase multiplicativa en (3.73). Con éstos la expresión (3.73) toma la forma

$$\widehat{\mathcal{W}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\xi^1 + \xi^2), \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\xi^1 - \xi^2)\right)|x\rangle = |x + \xi^1\rangle e^{-x\xi^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\xi^1\xi^2}, \quad (3.76)$$

y los elementos de matriz toman la forma

$$\langle x'|\widehat{\mathcal{W}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\xi^1 + \xi^2), \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\xi^1 - \xi^2)\right)|x\rangle = \delta(x', x + \xi^1)e^{-x\xi^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\xi^1\xi^2}. \quad (3.77)$$

Luego, debemos recordar que en  $\mathcal{H}$ , la función delta de Dirac es una función super analítica  $\delta(x, x') := x - x'$  [41], por lo tanto (3.77) es una función super analítica en los parámetros  $\xi^1$  y  $\xi^2$ . Este hecho es el que nos permite recuperar las RCA a partir de la ‘diferenciación’ por variables reales anticonmutativas y será, como veremos en la siguiente sección, el aspecto que tendremos en cuenta para construir la representación polimérica.

La multiplicación (3.73) escrita en términos de los nuevos parámetros definidos en (3.74, 3.75), toma la forma

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{W}}\left(\frac{\xi^1 + \xi^2}{\sqrt{2\hbar}}, \frac{\xi^1 - \xi^2}{\sqrt{2\hbar}}\right) \widehat{\mathcal{W}}\left(\frac{\xi'^1 + \xi'^2}{\sqrt{2\hbar}}, \frac{\xi'^1 - \xi'^2}{\sqrt{2\hbar}}\right) = \\ = e^{\frac{1}{2}(\xi^1\xi'^2 + \xi^2\xi'^1)} \widehat{\mathcal{W}}\left(\frac{\xi^1 + \xi^2 + \xi'^1 + \xi'^2}{\sqrt{2\hbar}}, \frac{\xi^1 - \xi^2 + \xi'^1 - \xi'^2}{\sqrt{2\hbar}}\right), \end{aligned}$$

donde es inmediato ver que los elementos de la super álgebra de la forma  $\widehat{\mathcal{W}}\left(\frac{\xi^2}{\sqrt{2\hbar}}, -\frac{\xi^2}{\sqrt{2\hbar}}\right) =: \widehat{\mathcal{V}}(\xi^2)$ , con  $\xi^1 = 0$  y aquellos de la forma  $\widehat{\mathcal{W}}\left(\frac{\xi^1}{\sqrt{2\hbar}}, \frac{\xi^1}{\sqrt{2\hbar}}\right) =:$

### 3.3. SUPER ÁLGEBRA DE WEYL

---

$\widehat{\mathcal{U}}(\xi^1)$ , con  $\xi^2 = 0$ , definen dos grupos uniparamétricos con multiplicación de grupo en términos de la multiplicación del álgebra como

$$\widehat{\mathcal{U}}(\xi^1)\widehat{\mathcal{U}}(\xi'^1) = \widehat{\mathcal{U}}(\xi^1 + \xi'^1), \quad (3.78)$$

$$\widehat{\mathcal{V}}(\xi^2)\widehat{\mathcal{V}}(\xi'^2) = \widehat{\mathcal{V}}(\xi^2 + \xi'^2), \quad (3.79)$$

mientras que la multiplicación entre los elementos de ambos grupos es

$$\widehat{\mathcal{U}}(\xi^1)\widehat{\mathcal{V}}(\xi^2) = e^{\xi^1\xi^2}\widehat{\mathcal{V}}(\xi^2)\widehat{\mathcal{U}}(\xi^1). \quad (3.80)$$

Vemos entonces que la representación de estos elementos  $\widehat{\mathcal{U}}(\xi^1)$ ,  $\widehat{\mathcal{V}}(\xi^2)$  en un estado abstracto ket  $|x\rangle$  será de la forma

$$\widehat{\mathcal{U}}(\xi^1)|x\rangle = |x + \xi^1\rangle, \quad (3.81)$$

$$\widehat{\mathcal{V}}(\xi^2)|x\rangle = |x\rangle e^{-x\xi^2}, \quad (3.82)$$

haciendo evidente que  $\widehat{\mathcal{U}}$  y  $\widehat{\mathcal{V}}$  realizan traslaciones y multiplicaciones por fases en  $\mathbb{R}_a$ . Unido a esto, de (3.70) podemos recuperar las RCA realizando

$$\left. \frac{d\widehat{\mathcal{U}}(\xi^1)\Psi(x)}{d\xi^1} \right|_{\xi=0} = x\Psi_0 = \widehat{a}^\dagger\Psi(x), \quad (3.83)$$

$$\left. \frac{d\widehat{\mathcal{V}}(\xi^2)\Psi(x)}{d\xi^2} \right|_{\xi=0} = \Psi_1 = \widehat{a}\Psi(x). \quad (3.84)$$

De esta manera, este resultado nos permite considerar que los generadores de estos grupos pueden ser asociados a los operadores de creación y aniquilación de las RCA. Este hecho contrasta con la versión análoga de sistemas bosónicos, cuyos generadores están relacionados con las variables fundamentales del espacio de fase, es decir, la posición y el momento canónico.

Hasta este punto, hemos aclarado algunos aspectos relacionados con la naturaleza de los parámetros involucrados en la construcción de la super álgebra de Weyl fermiónica. Para pasar a la construcción polimérica, recordemos que la matriz  $\langle x|\widehat{\mathcal{W}}(u^1, u^2)|x'\rangle$ , es una función super analítica en los parámetros  $u^1$  y  $u^2$ . Este hecho nos permite recuperar las RCA realizando la diferenciación super analítica por la izquierda sobre el elemento de matriz. Este criterio lo emplearemos para construir la versión polimérica fermiónica, imponiendo que el super espacio de Hilbert (polimérico) sea aquel en el que la diferenciación super analítica no esté definida. De esta manera, no podremos recuperar las RCA a partir de la super álgebra de Weyl fermiónica.

En este sentido, notemos que en el caso bosónico, el espacio de Hilbert polimérico admite una representación singular del álgebra de Weyl y que la

### 3.4. CUANTIZACIÓN POLIMÉRICA

naturaleza singular de la representación de coordenadas de los generadores de Weyl, está relacionada con la topología discreta del espacio de configuración, i. e., una medida contable en el espacio de Hilbert polimérico. Este comportamiento de la representación emerge entonces de la estructura del producto interno del espacio de Hilbert polimérico de coordenadas que emplea una función delta de Kronecker:  $\langle x_j | x_k \rangle = \delta_{x_j, x_k}$ . En la siguiente sección, veremos que en el caso fermiónico, usaremos un criterio similar para construir el super espacio de Hilbert polimérico fermiónico.

#### 3.4 Cuantización polimérica

Tomemos un conjunto  $\mathcal{N} = \{x_j\}$ , con  $j = 1 \dots N$ , de  $N$  super números  $x_j \in \mathbb{R}_a$ . Tomemos las combinaciones lineales de objetos abstractos  $|x_j \rangle$ , de la forma

$$|\Psi\rangle = \sum_j^N |x_j\rangle \Psi_{x_j}, \quad (3.85)$$

donde los coeficientes  $\Psi_{x_j}$  son super números  $\Psi_{x_j} \in \Lambda_\infty$  arbitrarios. Sea  $\mathcal{F}_p$  el espacio de todas estas combinaciones lineales, con conjuntos  $\mathcal{N}$  y coeficientes  $\Psi_{x_j}$  arbitrarios. Tomemos dos elementos de  $|\Phi\rangle, |\Psi\rangle \in \mathcal{F}_p$ , donde  $|\Phi\rangle = \sum_j^M |x_j\rangle \Phi_{x_j}$  y  $|\Psi\rangle$  está dado como en (3.85). Definamos la aplicación binaria  $+$ :  $\mathcal{F}_p \times \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{F}_p$ ;  $(|\Phi\rangle, |\Psi\rangle) \mapsto |\Phi\rangle + |\Psi\rangle$ , llamada suma, tal que

$$\sum_j^N |x_j\rangle \Psi_{x_j} + \sum_j^M |x_j\rangle \Phi_{x_j} := \sum_j^{N \cup M} |x_j\rangle \Psi'_{x_j}, \quad (3.86)$$

donde  $N \cup M$  indica el número total de elementos del conjunto unión  $\mathcal{N} \cup \mathcal{M}$  y los coeficientes  $\Psi'_{x_j}$  se determinan a partir de los coeficientes de  $|\Phi\rangle$  y  $|\Psi\rangle$  como

$$\Psi'_{x_j} := \begin{cases} \Psi_{x_j} + \Phi_{x_j}, & \text{si } x_j \in \mathcal{N} \cap \mathcal{M}, \\ \Psi_{x_j}, & \text{si } x_j \in (\mathcal{N} \cup \mathcal{M}) \setminus \mathcal{N}, \\ \Phi_{x_j}, & \text{si } x_j \in (\mathcal{N} \cup \mathcal{M}) \setminus \mathcal{M}. \end{cases} \quad (3.87)$$

Posteriormente, definimos las aplicaciones: multiplicación izquierda  $\cdot_L$  y multiplicación derecha  $\cdot_R$  como

$$\cdot_L : \Lambda_\infty \times \mathcal{F}_p; (z, |\Psi\rangle) \mapsto z \cdot_L |\Psi\rangle := \sum_j |x_j\rangle z \Psi_j, \quad (3.88)$$

$$\cdot_R : \Lambda_\infty \times \mathcal{F}_p; (z, |\Psi\rangle) \mapsto z \cdot_R |\Psi\rangle := \sum_j |x_j\rangle \Psi_j z, \quad (3.89)$$

### 3.4. CUANTIZACIÓN POLIMÉRICA

---

con lo cual hemos equipado a  $\mathcal{F}_p$  con una estructura de super espacio vectorial. Los super espacios de Hilbert no tienen producto interno aunque si poseen una aplicación biyectiva entre el super espacio vectorial y su dual que hace las veces de producto interno [41]. Con nuestra construcción, el dual se obtiene de manera formal como los objetos

$$\langle \Psi | = \sum_j^N \Psi_{x_j} \langle x_j |, \quad (3.90)$$

siendo la suma y las multiplicaciones naturalmente extendidas a partir de la suma y las multiplicaciones definidas sobre  $\mathcal{F}_p$ . Con esto, la aplicación biyectiva que usaremos para construir el super espacio de Hilbert es de la forma

$$\langle x | x' \rangle = \delta_{x,x'}, \quad (3.91)$$

donde  $\delta_{x,x'}$  es una delta de Kronecker con argumentos reales anticonmutativos. Sea entonces  $\mathcal{H}_p$  el super espacio de Hilbert (polimérico) formado con  $\mathcal{F}_p$  unido a la suma, las multiplicaciones y la biyección definidas anteriormente, es decir,  $\mathcal{H}_p = (\mathcal{F}_p, +, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \langle, \rangle)$ . Ahora pasemos a implementar una representación de (3.69) en  $\mathcal{H}_p$ , similar a la dada en (3.73) para la cuantización estándar quedando en este caso como

$$\widehat{\mathcal{W}}(u^1, u^2) | x_j \rangle = | x_j + \frac{\sqrt{2\hbar}}{2}(u^1 + u^2) \rangle e^{-\frac{\sqrt{2\hbar}}{2}x_j(u^1 - u^2)} \cdot e^{\frac{\hbar}{2}u^1 u^2}. \quad (3.92)$$

Los elementos de matriz obtenidos con (3.92) son de la forma

$$\begin{aligned} \langle x_j | \widehat{\mathcal{W}}(u^1, u^2) | x_k \rangle &= \langle x_j | x_k + \frac{\sqrt{2\hbar}}{2}(u^1 + u^2) \rangle e^{-\frac{\sqrt{2\hbar}}{2}x_k(u^1 - u^2)} \cdot e^{\frac{\hbar}{2}u^1 u^2} \\ &= \delta_{x_j, x_k + \frac{\sqrt{2\hbar}}{2}(u^1 + u^2)} e^{-\frac{\sqrt{2\hbar}}{2}x_k(u^1 - u^2)} \cdot e^{\frac{\hbar}{2}u^1 u^2}, \end{aligned} \quad (3.93)$$

los cuales no son super analíticos y por lo tanto, no podemos diferenciarlos para obtener las RAC. En otras palabras, la representación de la super álgebra de Weyl en este super espacio de Hilbert no permite recuperar el álgebra generada por  $\widehat{x}^1, \widehat{x}^2$ . Debido a que esto es un hecho distintivo en la construcción polimérica bosónica, lo empleamos en el caso fermiónico como la característica para considerar al espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_p$  y la representación (3.92) como la versión fermiónica de la mecánica cuántica polimérica.

Antes de pasar al análisis de la dinámica polimérica, es importante conocer las propiedades de la transformada de Fourier sobre el super espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_p$ . Esto será útil para resolver la ecuación en diferencias que

### 3.4. CUANTIZACIÓN POLIMÉRICA

---

emerge en la ecuación de autovalores estudiada en la siguiente sección y que es análoga a la ecuación que emerge en la dinámica polimérica del oscilador armónico bosónico.

Definamos una transformación de Fourier formal en este super espacio vectorial como

$$\langle k|x \rangle = e^{-kx}, \quad (3.94)$$

que es análoga a la empleada en (3.43) pero en este caso,  $x \in \mathbb{R}_a$  con topología discreta mientras que  $k \in \mathbb{R}_a$  con la topología estándar. En caso de la cuantización estándar, (3.43) permite definir el análogo de la representación de momentos. En el caso polimérico, (3.94) no asocia a los estados poliméricos un elemento del dual ya que deja de ser un isomorfismo y por lo tanto, no conduce a la representación de momentos. Sin embargo, a los nuevos estados los llamaremos formalmente estados de momento solo por comodidad. Debido a que el nuevo parámetro  $k$  es ‘continuo’ en  $\mathbb{R}_a$ , el nuevo super espacio de Hilbert es super analítico si definimos que (3.94) actuando sobre (3.85) conduce al super vector

$$\tilde{\Psi}(k) = \langle k|\Psi \rangle = \tilde{\Psi}_0 + k\tilde{\Psi}_1, \quad (3.95)$$

siendo los coeficientes de la forma

$$\tilde{\Psi}_0 = \sum_{x_j}^N \Psi_{x_j}, \quad \tilde{\Psi}_1 = - \sum_{x_j}^N x_j \Psi_{x_j}. \quad (3.96)$$

La ecuación (3.95) define un super vector del super espacio de Hilbert que denotamos como  $\tilde{\mathcal{H}}_p$ . En el caso de la construcción bosónica el análogo a  $\tilde{\mathcal{H}}_p$ , que resulta de la transformada de Fourier, es el formado por el completamiento de Cauchy de las funciones casi periódicas. El equivalente a las funciones casi periódicas en el caso fermiónico no se define via la transformación (3.94) ya que las combinaciones

$$\tilde{\Psi}(k) = \sum_j e^{-kx_j} \Psi_{x_j}, \quad (3.97)$$

conducen a funciones que tienen un período bien definido el cual puede ser calculado contando el número de puntos  $N$  en (3.85). Si  $N$  es par y  $N \bmod 4 = 0$ , entonces el período  $t = \tau \prod_j^N x_j$  donde  $\tau \in \mathbb{R}_a$  es un super número arbitrario o si  $N$  es par pero  $N \bmod 4 = 2$ , entonces  $t = i\tau \prod_j^N x_j$ . En el caso de un número impar de puntos, cuando  $N \bmod 4 = 3$  entonces  $t = \prod_j^N x_j$  y por último, si  $N \bmod 4 = 1$ , entonces  $t = i\tau \prod_j x_j$ . Con este

### 3.4. CUANTIZACIÓN POLIMÉRICA

---

resultado es claro que la transformación (3.94) no conduce al análogo fermiónico de las funciones casi periódicas del sistema bosónico. Por último notemos que  $\tilde{\mathcal{H}}_p$  tiene super dimensión 2, mientras que el super espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_p$ , formado con los kets  $|x_j\rangle$  donde  $x_j \in \mathbb{R}_a$  no tiene dimensión definida, en particular, será infinita.

Una consecuencia importante que resulta de la transformación de Fourier empleada y la super analiticidad de los estados en  $\tilde{\mathcal{H}}_p$ , es que la proyección de los operadores  $\hat{x}^j$  estará bien definida. Esto se obtiene a partir de calcular la acción de los operadores de Weyl en  $\tilde{\mathcal{H}}_p$  los cuales resultan estar representados analíticamente en términos de los parámetros  $u^1, u^2$ . Esto permite por lo tanto obtener la acción de  $\hat{x}^1$  y  $\hat{x}^2$  por derivación super analítica justo como en la representación estándar. Este resultado es importante en el cálculo del propagador del campo de Dirac.

Pasemos entonces en la siguiente sección a analizar la dinámica del oscilador de Fermi descrita en este super espacio de Hilbert polimérico.

#### 3.4.1 Dinámica

Para estudiar la dinámica del oscilador de Fermi en  $\mathcal{H}_p$  necesitamos definir un operador hamiltoniano en términos de los generadores de Weyl, ya que los operadores  $\hat{x}^j$  no están definidos en  $\mathcal{H}_p$ . En el caso bosónico [3], el operador que se propone es tal que en cierto límite, conduce al operador hamiltoniano usual del oscilador armónico. Esto nos conduce a la primera dificultad en el caso fermiónico ya que las variables impares reales (o las variables de Grassmann en general [41]), no admiten procesos de límite en el sentido del análisis funcional estándar. La topología del super espacio real impar no permite implementar nociones como las del completamiento de Cauchy, razón por la cual requerimos de otra estrategia.

Tomemos entonces el operador

$$\hat{H}_p(u^1, u^2) := \frac{\hbar\omega}{2} \left[ 2 - \widehat{\mathcal{W}}(u^1, u^2) - \widehat{\mathcal{W}}(-u^1, -u^2) \right]. \quad (3.98)$$

Si este operador se representa en el super espacio de Hilbert estándar  $\mathcal{H}$ , con los generadores de Weyl dados como (3.73), entonces éste satisface la ecuación de autovalores

$$\hat{H}_p(u^1, u^2)\Psi(x) = \hbar u^1 u^2 E \Psi(x), \quad (3.99)$$

donde la  $\hbar$  se introduce porque  $u^j$  tiene dimensiones de  $\hbar^{-1/2}$ . Combinando (3.98) y (3.99) la ecuación estándar de Schrödinger puede ser obtenida como

$$\frac{1}{\hbar} \frac{d^L}{du^2} \frac{d^L}{du^1} \hat{H}_p(u^1, u^2)\Psi(x) = E\Psi(x), \quad (3.100)$$

### 3.4. CUANTIZACIÓN POLIMÉRICA

es decir, el operador  $\widehat{H}_p$  representado en  $\mathcal{H}$  conduce a la ecuación de autovalores del oscilador de Fermi. Este es entonces el criterio empleado para construir el operador hamiltoniano en el sistema fermiónico polimérico.

Tomemos ahora el super espacio de Hilbert polimérico  $\mathcal{H}_p$ , el operador  $\widehat{H}_p$ , la representación (3.92) para los generadores de la super álgebra de Weyl y estudiemos la ecuación (3.99).

La delta de Kronecker relacionada con la aplicación biyectiva en  $\mathcal{H}_p$  no nos permite tomar (3.100) como la ecuación de autovalores, porque la derivada por la izquierda no está definida en  $\mathcal{H}_p$ , por esta razón tomamos (3.99) en lugar de (3.100).

Tomemos entonces un estado polimérico arbitrario junto con (3.73) para escribir la ecuación (3.99) la cual conduce, análogamente al caso bosónico, a una ecuación en diferencias de la forma

$$\begin{aligned} e^{-\sqrt{\frac{\hbar}{2}}x(u^1-u^2)} \Psi_{x-\sqrt{\frac{\hbar}{2}}(u^1+u^2)} + e^{\sqrt{\frac{\hbar}{2}}x(u^1-u^2)} \Psi_{x+\sqrt{\frac{\hbar}{2}}(u^1+u^2)} = \\ = 2 \left( 1 - \frac{u^1 u^2 E}{\omega} \right) e^{\frac{\hbar}{2}u^1 u^2} \Psi_x. \end{aligned} \quad (3.101)$$

La forma de esta ecuación implica que las soluciones pueden escribirse como

$$|\Psi_{x_0}\rangle = \sum_m |x_0 + m\sqrt{\frac{\hbar}{2}}(u^1 + u^2)\rangle \Psi_{x_0}^{(m)} \in \mathcal{G}_{x_0}, \quad (3.102)$$

donde  $\mathcal{G}_{x_0}$  puede pensarse como una especie de red Grassmanniana regular formada por super números reales anticonmutativos de la forma  $x_0 + m\sqrt{\frac{\hbar}{2}}(u^1 + u^2)$  para un dado punto  $x_0 \in \mathbb{R}_a$  y  $m \in \mathbb{Z}$ .

Estrictamente hablando, el conjunto real impar se divide en subconjuntos etiquetados por  $x_0$  tales que cada elemento del subconjunto pueda ser obtenido como una suma  $x_0 + m\sqrt{\frac{\hbar}{2}}(u^1 + u^2)$ . Esta construcción implica un orden parcial en cada subconjunto con lo cual emerge la noción de red. Proponemos entonces que el super espacio de Hilbert polimérico completo (dinámico) puede ser descompuesto en una suma directa de los super espacios de Hilbert poliméricos de cada red sobre  $x_0$

$$\mathcal{H}_p = \oplus_{x_0} \mathcal{H}_p^{(x_0)}, \quad (3.103)$$

análogo a la construcción realizada en el caso bosónico del oscilador armónico polimérico.

### 3.4. CUANTIZACIÓN POLIMÉRICA

---

Escribamos (3.101) tomando (3.74) y (3.75) por simplicidad. Esto nos deja con la relación de recurrencia

$$e^{-(x_0+m\xi^1)\xi^2}\Psi_{x_0}^{(m-1)} + e^{(x_0+m\xi^1)\xi^2}\Psi_{x_0}^{(m+1)} = 2e^{\left(\frac{E}{\hbar\omega}-\frac{1}{2}\right)\xi^1\xi^2}\Psi_{x_0}^{(m)}. \quad (3.104)$$

Ahora tomamos  $x_0 = 0$  en (3.104) y aplicamos la transformada de Fourier (3.94) quedando la ecuación algebraica

$$0 = \left[ \frac{\hbar\omega}{2} - E \right] u^1 u^2 \tilde{\Psi}_0 - \left[ \frac{\hbar\omega}{2} + E \right] u^1 u^2 \tilde{\Psi}_1 k. \quad (3.105)$$

Notemos que (3.105) involucra el prefactor  $u^1 u^2$  en su lado derecho y que éste no puede desecharse debido a su carácter Grassmanniano. La solución al problema de autovalores (3.105) ha sido dada en [11]. Los correspondientes autovalores son entonces

$$\begin{aligned} E_- &= -\frac{\hbar\omega}{2} + \alpha u^1 + \beta u^2 + \gamma u^1 u^2, \\ E_+ &= +\frac{\hbar\omega}{2} + \tilde{\alpha} u^1 + \tilde{\beta} u^2 + \tilde{\gamma} u^1 u^2, \end{aligned} \quad (3.106)$$

donde  $\alpha, \beta, \dots, \tilde{\gamma} \in \Lambda_\infty$ , son coeficientes cuyos valores deben ser obtenidos por medio de alguna condición física.

Cabe destacar que el cuerpo de estos autovalores coincide con el espectro de energía del oscilador de Fermi estándar, y que es notable que contenga contribuciones tipo alma [41]. Este resultado se aparta de la línea común desarrollada para el tratamiento de modelos físicos en el super espacio [41] ya que los autovalores de operadores físicos no deben tener alma por definición. A pesar de esto consideramos relevante explorar las consecuencias de nuestra propuesta para investigar como se modifica el propagador de campo de Dirac justificándonos en el hecho de que eventualmente el cuerpo del campo de Dirac polimérico puede coincidir con el estándar, quedando entonces por estudiar las modificaciones poliméricas. Esto se estudiará en el siguiente capítulo.

Adicionalmente, es importante señalar que el espectro (3.106) tiene forma de desarrollo en serie de  $u^1, u^2$  lo cual es análogo al caso del oscilador armónico polimérico el cual contiene modificaciones en potencias de los parámetros de la red [3, 7]. Esta similitud puede sugerir que el desarrollo en serie obtenido es precisamente una característica de los sistema poliméricos en términos de los parámetros de la red.

La expresión de los autoestados en el espacio de momentos es de la forma

$$\langle k|- \rangle := \Psi^{(-)}(k) = 1 + k u^1 u^2 C, \quad \langle k|+ \rangle := \Psi^{(+)}(k) = u^1 u^2 C^* + k, \quad (3.107)$$

### 3.4. CUANTIZACIÓN POLIMÉRICA

---

donde  $C \in \Lambda_\infty$ , es otro coeficiente cuyo valor deberá fijarse empleando criterios físicos. Estos autoestados forman una base ortonormal en  $\tilde{\mathcal{H}}_p$ .

En el siguiente capítulo, reemplazaremos los operadores y estados asociados a la cuantización usual de los osciladores de Fermi que constituyen los modos del campo de Dirac, por la versión polimérica de éstos. El campo de Dirac resultante lo denominamos campo de Dirac polimérico. Finalmente, calcularemos el propagador de este campo de Dirac polimérico en un espacio tiempo plano para lo cual será necesario conocer algunas de las funciones de correlación del sistema mecánico polimérico fermiónico. En particular las amplitudes  ${}_{PF}\langle 0|\hat{x}_a^j(t)\hat{x}_b^k(t')|0\rangle_{PF}$ , siendo  $|0\rangle_{PF} = \otimes_{j=1}^4 |-\rangle_j$  donde  $j$  etiqueta cada uno de los osciladores de Fermi que describen el modo  $\vec{k}$  del campo de Dirac.

En este punto, pediremos que  $E_-, E_+$  sean cantidades reales conmutativas lo cual limita los parámetros  $\alpha, \beta, \dots, \tilde{\gamma}$ . Las funciones de correlación de uno y dos puntos correspondientes son

$$\langle -|\hat{x}^1(t)|-\rangle = \frac{\sqrt{2}u^1u^2(C - C^*)}{2}, \quad \langle -|\hat{x}^2(t)|-\rangle = \frac{\sqrt{2}iu^1u^2(C + C^*)}{2}, \quad (3.108)$$

$$\langle -|\hat{x}^1(t)\hat{x}^1(t')|-\rangle = \frac{e^{i(E_- - E_+)\Delta t}}{2}, \quad \langle -|\hat{x}^1(t)\hat{x}^2(t')|-\rangle = \frac{e^{i(E_- - E_+)\Delta t}}{2i}, \quad (3.109)$$

$$\langle -|\hat{x}^2(t)\hat{x}^1(t')|-\rangle = \frac{e^{i(E_- - E_+)\Delta t}}{-2i}, \quad \langle -|\hat{x}^2(t)\hat{x}^2(t')|-\rangle = \frac{e^{i(E_- - E_+)\Delta t}}{2}. \quad (3.110)$$

Notemos que a diferencia de las amplitudes similares calculadas en la cuantización estándar, las funciones de correlación dadas en (3.108) son no nulas y que en (3.109, 3.110) la exponencial recibe contribuciones de alma. Estas diferencias en las amplitudes del modelo mecánico polimérico fermiónico con respecto a sus similares en la cuantización estándar incidirán en el cálculo del propagador del campo de Dirac al reemplazar los osciladores de Fermi por la versión polimérica de éstos.

Para estudiar esto, pasemos al siguiente capítulo donde trataremos la cuantización polimérica del campo de Dirac.

## 4. CAMPO DE DIRAC

*“If you are receptive and humble,  
mathematics will lead you by the hand.”*  
**P. A. M. Dirac**

En este capítulo describimos el modelo polimérico del campo de Dirac usado para calcular el correspondiente propagador. Este contiene el propagador usual pero además otras contribuciones propiamente poliméricas.

Esencialmente el modelo consiste en reemplazar la torre infinita de osciladores de Fermi que conforman al campo de Dirac en espacio tiempo plano por su correspondiente versión polimérica.

El capítulo aporta los pasos necesarios para ir desde los modos de Fourier del campo de Dirac a los osciladores de Fermi, hasta llegar a los osciladores de Fermi poliméricos insertados en los modos del campo y sus efectos en el propagador del mismo.

### 4.1 Descomposición en modos de Fourier

Para el análisis del campo de Dirac polimérico seguimos una ruta similar a la empleada para el campo escalar real. Comencemos con la descripción canónica del campo de Dirac dando la acción real de éste como

$$S_{\Psi} = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left[ \frac{i}{2} \bar{\Psi} \gamma^{\mu} (\partial_{\mu} \Psi) - \frac{i}{2} (\partial_{\mu} \bar{\Psi}) \gamma^{\mu} \Psi - M \bar{\Psi} \Psi \right], \quad (4.1)$$

donde  $\Psi$  es el campo de Dirac y  $\bar{\Psi} = \Psi^{\dagger} \gamma^0$  es su conjugado de Dirac.  $\gamma^{\mu}$  son las matrices de Dirac que satisfacen  $\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2\eta^{\mu\nu} 1_{4 \times 4}$  y  $M$  es la masa del campo.

Para realizar el análisis hamiltoniano de (4.1) se aplica el método de Dirac para teorías con constricciones [44]. El resultado final de este análisis conduce a considerar a  $\Psi$  y  $\Psi^{\dagger}$  como las variables básicas para la descripción hamiltoniana del campo. El único corchete de Dirac no nulo es

$$\{\Psi_a(t, \vec{x}), \Psi^{\dagger}_b(t, \vec{y})\}_D = \frac{\eta^{00}}{i} \delta_{ab} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (4.2)$$

#### 4.1. DESCOMPOSICIÓN EN MODOS DE FOURIER

el cual reemplaza al corchete de Poisson usual. En esta expresión  $\Psi_a$  con  $a = 1, \dots, 4$ , son las componentes del espinor y por lo tanto (4.2) involucra cuatro pares canónicos. El hamiltoniano correspondiente a (4.1) toma la forma

$$H_\Psi = \int d^3\vec{x} \left[ -\frac{i}{2}\bar{\Psi}\gamma^j(\partial_j\Psi) + \frac{i}{2}(\partial_j\bar{\Psi})\gamma^j\Psi + M\bar{\Psi}\Psi \right]. \quad (4.3)$$

Ahora que tenemos bajo control los aspectos principales de la teoría clásica del campo de Dirac, estamos listos para proceder a la cuantización. Recordemos que la cuantización canónica de campos fermiónicos requiere no solo de promover los observables de Dirac a operadores sino además el emplear anticonmutadores en lugar de conmutadores. Los corchetes de Dirac (4.2) pueden entonces escribirse a nivel cuántico como

$$\left[ \widehat{\Psi}_a(t, \vec{x}), \widehat{\Psi}_b^\dagger(t, \vec{y}) \right]_+ = \eta^{00}\delta_{ab}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (4.4)$$

El próximo paso consiste en el análisis de los modos de Fourier del campo de Dirac. Para ello, descomponemos el campo de Dirac y su conjugado de Dirac en modos de Fourier usando como espacio una caja de volumen  $V$ . Esto conduce a las relaciones

$$\widehat{\Psi}_a(t, \vec{x}) = \frac{\sum_{\vec{k}} (\widehat{\Psi}_{a,\vec{k}}^{(R)}(t) + i\widehat{\Psi}_{a,\vec{k}}^{(I)}(t)) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{2V}}, \quad \widehat{\Psi}_a^\dagger(t, \vec{x}) = \frac{\sum_{\vec{k}} (\widehat{\Psi}_{a,\vec{k}}^{(R)}(t) - i\widehat{\Psi}_{a,\vec{k}}^{(I)}(t)) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{2V}}. \quad (4.5)$$

donde  $\widehat{\Psi}_{a,\vec{k}}^{(R)}(t)$  y  $\widehat{\Psi}_{a,\vec{k}}^{(I)}(t)$  son operadores autoadjuntos asociados a la parte real e imaginaria del modo  $\vec{k}$  en la componente  $a$  del espinor de Dirac. Combinando (4.4) y (4.5) vemos que el álgebra de los modos resulta ser

$$\left[ \widehat{\Psi}_{a,\vec{k}}^{(A)}(t), \widehat{\Psi}_{b,\vec{k}'}^{(B)}(t) \right]_+ = \eta^{00}\delta^{(A)(B)}\delta_{ab}\delta_{\vec{k},\vec{k}'}, \quad (4.6)$$

donde  $(A)$  y  $(B)$  pueden tomar los valores  $(R)$  o  $(I)$  correspondientes a las partes real o imaginaria de los modos del espinor. Notablemente, la presencia de  $\delta^{(A)(B)}$  en el lado derecho de (4.6) sugiere considerar a las partes real e imaginarias como las variables básicas para describir a un oscilador de Fermi y entonces al campo de Dirac como una torre infinita de cuatro osciladores de Fermi. Más adelante probaremos este punto el cual se verá reforzado por indicios adicionales.

Vimos en el capítulo anterior que el oscilador de Fermi se describe con variables de Grassmann reales anticonmutativas. Esto implicaba tomar una variable real de Grassmann para describir el espacio de configuración del

#### 4.1. DESCOMPOSICIÓN EN MODOS DE FOURIER

super espacio de Hilbert en el que se realizaba la representación estándar. Motivados por esto y debido a la posibilidad de describir el sistema con cuatro osciladores de Fermi, tomaremos cuatro variables de configuración canónicas reales anticonmutativas para los modos del campo de Dirac las cuales denotaremos como  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  y  $\theta_4$ . Luego definiremos un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_{MD}$  [46] en el que sus elementos serán desarrollados como

$$\Phi(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = x_0 + \sum_{a=1}^4 x_a \theta_a + \sum_{a \langle b}^4 x_{ab} \theta_a \theta_b + \sum_{a \langle b \langle c}^4 x_{abc} \theta_a \theta_b \theta_c + x_{1234} \theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4, \quad (4.7)$$

con todos los coeficientes  $x$  perteneciendo a los números complejos ordinarios. La suma en este espacio es la extensión natural de los números complejos en los coeficientes. La multiplicación escalar empleada será la de los números complejos y de este modo tendremos un espacio vectorial complejo de dimensión 16.

Luego, consideramos la aplicación de involución  $*$  de tal manera que ésta sea consistente con la propiedad real anticonmutativa de las variables de Grassmann. Por ejemplo, tomemos un vector  $\psi(\theta) = \psi_0 + \psi_4 \theta_1 \theta_2$ , entonces su involución será  $\psi^* = (\psi_0)^* + (\psi_4)^* (\theta_1 \theta_2)^* = \overline{\psi_4} \theta_3 \theta_4 + \overline{\psi_0} \theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4$  donde  $\overline{(\cdot)}$  es justo la conjugación compleja. De este modo, el producto interno para  $\mathcal{H}_{MD}$  toma la forma [46]

$$\langle F_1 | F_2 \rangle := \int dV_\theta F_1^* \cdot F_2, \quad (4.8)$$

siendo  $dV_\theta := d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 d\theta_4$  una medida Grassmanniana formal que satisface  $\int dV_\theta := 0$ ,  $\int dV_\theta \theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4 := 1$ . Esto permite definir una norma que es expresada en términos de los módulos de los coeficientes. En el ejemplo de arriba, la norma del estado empleado es  $\|\psi\| = \sqrt{|\psi_0|^2 + |\psi_4|^2}$ . Pese a lo sofisticada que pueda parecer la involución, ésta ha sido construida de esta manera para ser consistente con el producto interno anterior (4.8) [46].

Ahora procedemos a establecer una representación de los operadores mecánico cuánticos asociados a las partes real e imaginaria de los modos del campo en este espacio de Hilbert. Consideremos

$$\widehat{\Psi}_a^{(R)} = A\theta_a + \frac{1}{2A}\partial_a^L, \quad \widehat{\Psi}_a^{(I)} = (-1)^s i \left[ A\theta_a - \frac{1}{2A}\partial_a^L \right], \quad (4.9)$$

siendo  $\partial_a^L = \frac{\partial^L}{\partial \theta_a}$  la derivada de Grassmann por la izquierda mientras que  $A$  es un coeficiente complejo que se fija usando el carácter autoadjunto de los operadores asociados a  $\Psi^{R,I}$  y  $s = 0, 1$  es un parámetro de fase. Las

#### 4.1. DESCOMPOSICIÓN EN MODOS DE FOURIER

---

expresiones de la representación del campo de Dirac y su complejo conjugado serán entonces de la forma

$$\begin{aligned}\widehat{\Psi}_a &= \widehat{\Psi}_a^{(R)} + i\widehat{\Psi}_a^{(I)} \\ &= A[1 - (-1)^s]\theta_a + \frac{1}{2A}[1 + (-1)^s]\partial_a^L = \begin{cases} \widehat{\Psi}_a^{(s=0)} = \frac{\partial_a^L}{A} \\ \widehat{\Psi}_a^{(s=1)} = 2A\theta_a \end{cases} \quad (4.10)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\Psi}_a^\dagger &= \widehat{\Psi}_a^{(R)} - i\widehat{\Psi}_a^{(I)} \\ &= A[1 + (-1)^s]\theta_a + \frac{1}{2A}[1 - (-1)^s]\partial_a^L = \begin{cases} \widehat{\Psi}_a^{\dagger(s=0)} = 2A\theta_a \\ \widehat{\Psi}_a^{\dagger(s=1)} = \frac{\partial_a^L}{A} \end{cases} \quad (4.11)\end{aligned}$$

Ahora vemos claramente que  $s = 0, 1$ , codifica la elección de representar el modo del campo ya sea derivativamente o por multiplicación. También es claro que cualquier operador bilineal en los campos, por ejemplo el hamiltoniano o el propagador, es independiente del valor de  $A$ . Dicho esto tomaremos  $s = 0$  y el parámetro  $A$ , aunque puede dejarse arbitrario, lo tomaremos igual a  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

La representación del hamiltoniano usando (4.10) y (4.11) es

$$\widehat{H}_\Psi = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} (\widehat{\Psi}_{a,\vec{k}}^{(R)} - i\widehat{\Psi}_{a,\vec{k}}^{(I)}) H_{ab}(\vec{k}) (\widehat{\Psi}_{b,\vec{k}}^{(R)} + i\widehat{\Psi}_{b,\vec{k}}^{(I)}) = \sum_{\vec{k}} H_{ab}(\vec{k}) \theta_a \partial_b^L, \quad (4.12)$$

siendo  $H_{ab}(\vec{k})$  la matriz dada como

$$H_{ab}(\vec{k}) := (\gamma^0 \gamma^j k_j + M \gamma^0)_{ab}. \quad (4.13)$$

Como nuestro propósito es obtener el propagador del campo de Dirac en términos de los modos de Fourier para luego reemplazarlos por su versión polimérica, es evidente que necesitamos resolver el problema de autovalores para (4.12) el cual escribimos como

$$H_{ab}(\vec{k}) \theta_a \partial_b^L \Psi(\vec{\theta}) = E_{\vec{k}} \Psi(\vec{\theta}). \quad (4.14)$$

Tal problema de autovalores es un cálculo largo pero directo de álgebra lineal. Se inserta (4.7) en (4.14) para entonces identificar las potencias independientes de números anticonmutativos de Grassmann. Esto produce un sistema de 16 ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes complejos y estructura de bloques. La solución a este sistema conduce a que los autovalores de energía son

$$E_{\vec{k}} = \{-2\omega_{\vec{k}}, -\omega_{\vec{k}}, 0, \omega_{\vec{k}}, 2\omega_{\vec{k}}\}, \quad \omega_{\vec{k}}^2 = \vec{k}^2 + M^2. \quad (4.15)$$

#### 4.1. DESCOMPOSICIÓN EN MODOS DE FOURIER

Los autovalores  $\pm 2\omega_{\vec{k}}$  no son degenerados mientras que  $\pm\omega_{\vec{k}}$  y  $E_{\vec{k}} = 0$  lo son cuatro y seis veces respectivamente. Tales degeneraciones pueden escribirse como  $\{0, 4, 6, 4, 0\}$  si mantenemos el orden como en (4.15). Estas degeneraciones pueden interpretarse como sigue. Tomemos un sistema mecánico cuántico de dos niveles de energía dados como  $e_0 = -\omega_{\vec{k}}/2$  y  $e_1 = +\omega_{\vec{k}}/2$  y definamos un sistema compuesto de cuatro de estos sistemas mecánicos. El sistema compuesto tendrá energías dadas por (4.15). Más aún, la degeneración de cada nivel de energía del sistema compuesto estará dada precisamente por  $\binom{4}{n}$  donde  $n = 0, \dots, 4$  representa el número de subsistemas en el nivel de excitación con energía  $e_1$ . Esto induce la idea que hemos mencionado de que cada modo del campo de Dirac corresponde a cuatro sistemas fermiónicos de dos niveles que identificaremos con osciladores de Fermi [41].

Regresemos entonces a la descripción en modos de Fourier y recordemos que para determinar el propagador necesitaremos algunos de los autoestados de (4.14). Consideremos primeramente el menor autovalor de energía  $E_{0,\vec{k}} = -2\omega_{\vec{k}}$ . Este autovalor es no degenerado y por lo tanto tiene asociada una sola autofunción la cual se obtiene usando (4.14) con  $E_{\vec{k}} = E_{0,\vec{k}}$ . Denotemos esta autofunción como  $\Psi_0^{(\vec{k})}(\theta)$  la cual toma la forma (normalizada)

$$\begin{aligned} \Psi_0^{(\vec{k})}(\theta) &= \frac{M}{2\omega_{\vec{k}}} \theta_1 \theta_2 - \frac{k_x - ik_y}{2\omega_{\vec{k}}} \theta_1 \theta_3 + \frac{k_z - \omega_{\vec{k}}}{2\omega_{\vec{k}}} \theta_1 \theta_4 + \frac{k_z + \omega_{\vec{k}}}{2\omega_{\vec{k}}} \theta_2 \theta_3 + \\ &+ \frac{k_x + ik_y}{2\omega_{\vec{k}}} \theta_2 \theta_4 + \frac{M}{2\omega_{\vec{k}}} \theta_3 \theta_4. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Obviamente el autovector correspondiente a  $E_{4,\vec{k}} = +2\omega_{\vec{k}}$  puede obtenerse de (4.16) al hacer  $\omega_{\vec{k}} \rightarrow -\omega_{\vec{k}}$ . Con esto se obtiene entonces

$$\begin{aligned} \Psi_4^{(\vec{k})}(\theta) &= -\frac{M}{2\omega_{\vec{k}}} \theta_1 \theta_2 + \frac{k_x - ik_y}{2\omega_{\vec{k}}} \theta_1 \theta_3 - \frac{k_z + \omega_{\vec{k}}}{2\omega_{\vec{k}}} \theta_1 \theta_4 - \frac{k_z - \omega_{\vec{k}}}{2\omega_{\vec{k}}} \theta_2 \theta_3 + \\ &- \frac{k_x + ik_y}{2\omega_{\vec{k}}} \theta_2 \theta_4 - \frac{M}{2\omega_{\vec{k}}} \theta_3 \theta_4. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Procedamos con el autovalor  $E_{1,\vec{k}} = -\omega_{\vec{k}}$  y recordemos que éste es cuatro veces degenerado con lo cual su autoespacio será de dimensión cuatro. Haciendo  $E_{\vec{k}} = E_{1,\vec{k}}$  en (4.14) y adoptando una base normalizada (no la ortogonalización) tenemos que

$$\Psi_{1,1}^{(\vec{k})}(\theta) = -\frac{k^-}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}k_3^+}} \theta_1 + \frac{k_3^+}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}k_3^+}} \theta_2 - \frac{M}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}k_3^+}} \theta_4, \quad (4.18)$$

#### 4.1. DESCOMPOSICIÓN EN MODOS DE FOURIER

---

$$\Psi_{1,2}^{(\vec{k})}(\theta) = -\frac{M}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}^+k_3^+}}\theta_1 + \frac{k_3^+}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}^+k_3^+}}\theta_3 + \frac{k^+}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}^+k_3^+}}\theta_4, \quad (4.19)$$

$$\Psi_{1,3}^{(\vec{k})}(\theta) = \frac{k^-}{\sqrt{-2\omega_{\vec{k}}^-k_3^-}}\theta_1\theta_2\theta_3 - \frac{k_3^-}{\sqrt{-2\omega_{\vec{k}}^-k_3^-}}\theta_1\theta_2\theta_4 + \frac{M}{\sqrt{-2\omega_{\vec{k}}^-k_3^-}}\theta_2\theta_3\theta_4, \quad (4.20)$$

$$\Psi_{1,4}^{(\vec{k})}(\theta) = \frac{M}{\sqrt{-2\omega_{\vec{k}}^-k_3^-}}\theta_1\theta_2\theta_3 - \frac{k_3^-}{\sqrt{-2\omega_{\vec{k}}^-k_3^-}}\theta_1\theta_3\theta_4 - \frac{k^+}{\sqrt{-2\omega_{\vec{k}}^-k_3^-}}\theta_2\theta_3\theta_4. \quad (4.21)$$

En estas relaciones definimos  $k^\pm := k_x \pm ik_y$  y  $k_3^\pm := k_z \pm \omega_{\vec{k}}$ . El primer subíndice en estos estados indica el nivel de energía  $E_{1,\vec{k}}$ , mientras que el segundo etiqueta los elementos de la base del autoespacio degenerado.

Ahora pasemos al caso del autovalor  $E_{2,\vec{k}} = 0$  para el cual la ecuación (4.14) conduce a los siguientes elementos de la base

$$\Psi_{2,1}^{(\vec{k})}(\theta) = 1, \quad (4.22)$$

$$\Psi_{2,2}^{(\vec{k})}(\theta) = \theta_1\theta_2 - \theta_3\theta_4, \quad (4.23)$$

$$\Psi_{2,3}^{(\vec{k})}(\theta) = \theta_1\theta_3 + \frac{k_x + ik_y}{M}\theta_3\theta_4, \quad (4.24)$$

$$\Psi_{2,4}^{(\vec{k})}(\theta) = \theta_2\theta_4 - \frac{k_x - ik_y}{M}, \quad (4.25)$$

$$\Psi_{2,5}^{(\vec{k})}(\theta) = \theta_1\theta_2\theta_3\theta_4, \quad (4.26)$$

$$\Psi_{2,6}^{(\vec{k})}(\theta) = \theta_1\theta_4 + \theta_2\theta_3 - \frac{2k_z}{M}\theta_3\theta_4. \quad (4.27)$$

Por último tenemos que las autofunciones correspondientes al autovalor  $E_{3,\vec{k}} = +\omega_{\vec{k}}$  se obtienen de (4.18)-(4.21) al hacer la sustitución  $\omega_{\vec{k}}^- \rightarrow -\omega_{\vec{k}}^-$ , con la adecuada interpretación de los subíndices

$$\Psi_{3,1}^{(\vec{k})}(\theta) = \frac{k^-}{\sqrt{-2\omega_{\vec{k}}^-k_3^-}}\theta_1 - \frac{k_3^-}{\sqrt{-2\omega_{\vec{k}}^-k_3^-}}\theta_2 + \frac{M}{\sqrt{-2\omega_{\vec{k}}^-k_3^-}}\theta_4, \quad (4.28)$$

$$\Psi_{3,2}^{(\vec{k})}(\theta) = \frac{M}{\sqrt{-2\omega_{\vec{k}}^-k_3^-}}\theta_1 - \frac{k_3^-}{\sqrt{-2\omega_{\vec{k}}^-k_3^-}}\theta_3 - \frac{k^+}{\sqrt{-2\omega_{\vec{k}}^-k_3^-}}\theta_4, \quad (4.29)$$

$$\Psi_{3,3}^{(\vec{k})}(\theta) = -\frac{k^-}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}^+k_3^+}}\theta_1\theta_2\theta_3 + \frac{k_3^+}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}^+k_3^+}}\theta_1\theta_2\theta_4 - \frac{M}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}^+k_3^+}}\theta_2\theta_3\theta_4, \quad (4.30)$$

$$\Psi_{3,4}^{(\vec{k})}(\theta) = -\frac{M}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}k_3^+}}\theta_1\theta_2\theta_3 + \frac{k_3^+}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}k_3^+}}\theta_1\theta_3\theta_4 + \frac{k^+}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}k_3^+}}\theta_2\theta_3\theta_4. \quad (4.31)$$

Recordemos que no adoptamos una base ortonormal en los autoespacios degenerados y que ello puede realizarse empleando el método usual de Gramm-Schmidt. No hemos hecho esto debido a que no es relevante para nuestro cálculo del propagador del campo de Dirac como veremos más adelante.

Pasemos ahora a demostrar explícitamente que cada modo de Fourier del campo de Dirac corresponde a cuatro osciladores de Fermi.

#### 4.1.1 Relación entre modos de Fourier y osciladores de Fermi

Recordemos que el hamiltoniano para un oscilador de Fermi de frecuencia  $\omega_{\vec{k}}$  (ver el Capítulo 3) es

$$\hat{H}_F = \frac{1}{2}\omega_{\vec{k}}\mathbf{X}^\dagger\sigma_2\mathbf{X}, \quad (4.32)$$

siendo  $\sigma_2$  la segunda matriz de Pauli y donde definimos el arreglo  $\mathbf{X}$  como

$$\mathbf{X} := \begin{pmatrix} \hat{x}_{(1)} \\ \hat{x}_{(2)} \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

en el que  $\hat{x}_{(1)}$ ,  $\hat{x}_{(2)}$  denotan los operadores relacionados con las variables fundamentales del oscilador de Fermi en cuestión. Con esta notación, cuatro osciladores de Fermi no interactuantes, denotados como  $\mathbf{X}_i, i = 1, \dots, 4$ , pueden relacionarse con el siguiente hamiltoniano

$$\begin{aligned} \hat{H}_{4F} &= \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1^\dagger & \mathbf{X}_2^\dagger & \mathbf{X}_3^\dagger & \mathbf{X}_4^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\omega_{\vec{k}}\sigma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\omega_{\vec{k}}\sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\omega_{\vec{k}}\sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\omega_{\vec{k}}\sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_3 \\ \mathbf{X}_4 \end{pmatrix} \\ &=: \vec{\mathbf{X}}^\dagger h' \vec{\mathbf{X}}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

siendo  $h'$  un arreglo de  $8 \times 8$  definido en la expresión. El punto es entonces establecer la relación entre el hamiltoniano de un dado modo  $\vec{k}$  en (4.12) con el hamiltoniano de cuatro osciladores de Fermi desacoplados dado en (4.34). Para hacer esto es razonable reescribir (4.12) en la siguiente forma

$$\hat{H}_\Psi = \sum_k \hat{H}_k, \quad (4.35)$$

#### 4.1. DESCOMPOSICIÓN EN MODOS DE FOURIER

donde

$$\widehat{H}_{\vec{k}} = \begin{pmatrix} \widehat{\Psi}^{(R)\dagger} & \widehat{\Psi}^{(I)\dagger} \end{pmatrix} h \begin{pmatrix} \widehat{\Psi}^{(R)} \\ \widehat{\Psi}^{(I)} \end{pmatrix}, \quad (4.36)$$

con  $h$  un arreglo de  $8 \times 8$  que toma la forma

$$h = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}H^A(\vec{k}) & \frac{i}{2}H^S(\vec{k}) \\ -\frac{i}{2}H^S(\vec{k}) & \frac{1}{2}H^A(\vec{k}) \end{pmatrix}, \quad (4.37)$$

y  $H^S(\vec{k})$ ,  $H^A(\vec{k})$  son matrices simétricas y antisimétricas obtenidas de la matriz  $H(\vec{k})$  de la ecuación (4.13). Ahora proponemos la transformación de la forma

$$\begin{pmatrix} \widehat{V}\widehat{\Psi}^{(R)}\widehat{V}^{-1} \\ \widehat{V}\widehat{\Psi}^{(I)}\widehat{V}^{-1} \end{pmatrix} =: U\vec{X}, \quad (4.38)$$

tal que  $\widehat{V}$ ,  $\widehat{V}^{-1}$  actúa sobre los espacios de Hilbert y  $U$  sobre las componentes del arreglo  $\vec{X}$ . En efecto, esta transformación traduce la acción de los grados de libertad en modos de Fourier a los grados de libertad en osciladores de Fermi. Esto se hace evidente en particular al tomar un modo  $\vec{k}$  y notar que el correspondiente operador hamiltoniano adquiere la siguiente forma

$$\begin{aligned} \widehat{H}_{\vec{k}} &= \begin{pmatrix} \widehat{\Psi}^{(R)T} & \widehat{\Psi}^{(I)T} \end{pmatrix} h \begin{pmatrix} \widehat{\Psi}^{(R)} \\ \widehat{\Psi}^{(I)} \end{pmatrix}, \\ &= \widehat{V}^{-1} \begin{pmatrix} \widehat{V}\widehat{\Psi}^{(R)}\widehat{V}^{-1} \\ \widehat{V}\widehat{\Psi}^{(I)}\widehat{V}^{-1} \end{pmatrix}^T \widehat{V} h \widehat{V}^{-1} \begin{pmatrix} \widehat{V}\widehat{\Psi}^{(R)}\widehat{V}^{-1} \\ \widehat{V}\widehat{\Psi}^{(I)}\widehat{V}^{-1} \end{pmatrix} \widehat{V}, \\ &= \widehat{V}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \end{pmatrix}^T U^T h U \begin{pmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \end{pmatrix} \widehat{V}, \end{aligned} \quad (4.39)$$

donde en la última igualdad hicimos uso de (4.38). Ahora pedimos que se satisfaga

$$h' = U^T h U. \quad (4.40)$$

Es importante señalar que al emplear las relaciones de anticonmutación (4.4) para ambos grados de libertad,  $\widehat{\Psi}^{(R),(I)}$  y  $\tilde{X}_{1,2}$ , la forma de la matriz  $U$  en (4.38) será restringida a la de una matriz ortogonal:  $U^T U = U U^T = \mathbf{1}_{8 \times 8}$ . Finalmente tenemos entonces para el hamiltoniano

$$H_{\vec{k}} = \widehat{V}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{X}_1^T & \tilde{X}_2^T \end{pmatrix} h' \begin{pmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \end{pmatrix} \widehat{V} = \widehat{V}^{-1} \widehat{H}_{4F} \widehat{V}, \quad (4.41)$$

#### 4.1. DESCOMPOSICIÓN EN MODOS DE FOURIER

---

donde  $\widehat{H}_{4F}$  está dado por (4.34). Para obtener la forma explícita de la matriz  $U$  podemos resolver directamente (4.40), sin embargo, simplificaremos los cálculos notando que las formas diagonales de  $h$  y  $h'$  coinciden. Luego empleamos las transformaciones que realizan esta diagonalización y que denotamos como  $U_h$  y  $U_{h'}$  respectivamente, como sigue

$$U^{-1}(U_h U_h^{-1})h(U_h U_h^{-1})U = (U_{h'} U_{h'}^{-1})h'(U_{h'} U_{h'}^{-1}) \quad (4.42)$$

$$U^{-1}U_h \text{diag}(h) U_h^{-1}U = U_{h'} \text{diag}(h') U_{h'}^{-1}, \quad (4.43)$$

y luego, definiendo la matriz  $U_x = U_h^{-1}U U_{h'}$  combinamos los términos en (4.43) para obtener la siguiente condición sobre  $U_x$

$$[U_x, \text{diag}(h)] = 0. \quad (4.44)$$

Entonces la transformación unitaria  $U$  que relaciona los osciladores de Fermi con la descripción en modos de Fourier del campo de Dirac puede ser expresada como

$$U = U_h U_x U_{h'}^{-1}, \quad (4.45)$$

y la matriz unitaria  $U_x$  estará restringida por la condición (4.44) con lo cual tomará una forma general dada como

$$U_x = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}, \quad (4.46)$$

donde  $u$  y  $v$  son dos matrices unitarias de  $4 \times 4$ . Para realizar (4.40) insertamos

$$U_x = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}, \quad u = 1_{4 \times 4}, \quad v = \frac{2\omega}{(\omega^2 - k_y^2)} \begin{pmatrix} \omega 1_{2 \times 2} + k_y \sigma^2 & 0 \\ 0 & \omega 1_{2 \times 2} - k_y \sigma^2 \end{pmatrix}. \quad (4.47)$$

De esta manera podemos resolver (4.45) para  $U$ , la cual podemos manejar mejor en forma de bloques como

$$U = \begin{pmatrix} u^{(1)} & u^{(2)} \\ u^{(3)} & u^{(4)} \end{pmatrix}, \quad (4.48)$$

y cada bloque  $4 \times 4$  tiene la siguiente forma

#### 4.1. DESCOMPOSICIÓN EN MODOS DE FOURIER

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{2(ik_x k_y + \omega k_z) - k_z}{k_y^2 - \omega^2} - \frac{k_z}{\omega} & \frac{ik_z + 2k_x k_y - 2i\omega k_z}{\omega^2 - k_y^2} & \frac{2ik_y k_z - 2\omega k_x - k_x}{\omega^2 - k_y^2} & i \left( \frac{k_x}{\omega} + \frac{2ik_y k_z - 2\omega k_x}{\omega^2 - k_y^2} \right) \\ \frac{2ik_y k_z - 2\omega k_x - k_x}{\omega^2 - k_y^2} - \frac{k_x}{\omega} & i \left( \frac{k_x}{\omega} + \frac{2ik_y k_z - 2\omega k_x}{\omega^2 - k_y^2} \right) & \frac{k_z + 2ik_x k_y + 2\omega k_z}{\omega^2 - k_y^2} & \frac{2(k_x k_y - i\omega k_z) - iz}{k_y^2 - \omega^2} - \frac{iz}{\omega} \\ M \left( -1 - \frac{2\omega^2}{\omega^2 - k_y^2} \right) & iM \left( 1 - \frac{2\omega^2}{\omega^2 - k_y^2} \right) & \frac{iMk_y}{\sqrt{2}(\omega^2 - k_y^2)} & \frac{Mk_y}{\sqrt{2}(k_y^2 - \omega^2)} \\ \frac{iMk_y}{\sqrt{2}(k_y^2 - \omega^2)} & \frac{Mk_y}{\sqrt{2}(\omega^2 - k_y^2)} & M \left( -1 - \frac{2\omega^2}{\omega^2 - k_y^2} \right) & iM \left( 1 - \frac{2\omega^2}{\omega^2 - k_y^2} \right) \end{pmatrix}, \quad (4.49)$$

$$u^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{M \left( -1 - \frac{2\omega^2}{\omega^2 - k_y^2} \right)}{2\sqrt{2}\omega} & \frac{iM \left( 1 - \frac{2\omega^2}{\omega^2 - k_y^2} \right)}{2\sqrt{2}\omega} & \frac{iMk_y}{\sqrt{2}(k_y^2 - \omega^2)} & \frac{Mk_y}{\sqrt{2}(\omega^2 - k_y^2)} \\ \frac{iMk_y}{\sqrt{2}(\omega^2 - k_y^2)} & \frac{Mk_y}{\sqrt{2}(k_y^2 - \omega^2)} & M \left( -1 - \frac{2\omega^2}{\omega^2 - k_y^2} \right) & iM \left( 1 - \frac{2\omega^2}{\omega^2 - k_y^2} \right) \\ \frac{k_z + 2(\omega k_z - ik_x k_y)}{\omega^2 - k_y^2} & \frac{2k_x k_y + 2i\omega k_z - ik_z}{\omega^2 - k_y^2} - \frac{ik_z}{\omega} & \frac{k_x + 2\omega k_x + 2ik_y k_z}{\omega^2 - k_y^2} & i \left( \frac{k_x}{\omega} - \frac{2(\omega k_x + ik_y k_z)}{\omega^2 - k_y^2} \right) \\ \frac{k_x + 2\omega k_x + 2ik_y k_z}{\omega^2 - k_y^2} & i \left( \frac{k_x}{\omega} - \frac{2(\omega k_x + ik_y k_z)}{\omega^2 - k_y^2} \right) & \frac{2ik_x k_y - 2\omega k_z - k_z}{\omega^2 - k_y^2} & \frac{ik_z + 2(k_x k_y + i\omega k_z)}{k_y^2 - \omega^2} - \frac{ik_z}{\omega} \end{pmatrix}, \quad (4.50)$$

$$u^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{-i}{2\sqrt{2}} & \frac{3}{2\sqrt{2}} & \frac{k_y}{2\sqrt{2}\omega} & -\frac{ik_y}{2\sqrt{2}\omega} \\ -\frac{k_y}{2\sqrt{2}\omega} & \frac{ik_y}{2\sqrt{2}\omega} & \frac{-i}{2\sqrt{2}} & \frac{3}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.51)$$

$$u^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-i}{2\sqrt{2}} & \frac{3}{2\sqrt{2}} & -\frac{k_y}{2\sqrt{2}\omega} & \frac{ik_y}{2\sqrt{2}\omega} \\ \frac{k_y}{2\sqrt{2}\omega} & -\frac{ik_y}{2\sqrt{2}\omega} & \frac{-i}{2\sqrt{2}} & \frac{3}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (4.52)$$

La transformación  $U$ , unida a las relaciones (4.38)-(4.40) provee una relación entre cada modo de Fourier del campo de Dirac con cuatro osciladores de Fermi. Un ejemplo explícito de esta transformación está dado por (4.48) unido a la expresión para sus bloques  $4 \times 4$  dados en (4.49 - 4.52).

Ahora regresamos a estudiar el propagador del campo de Dirac en la descripción de los modos de Fourier.

### 4.2 Propagador con modos de Fourier

El análisis del propagador del campo de Dirac presentado aquí seguirá la estrategia seguida para el campo escalar real dada en el capítulo anterior. Comencemos dando la expresión para el propagador del campo de Dirac

$$S(x, x') := \langle 0|T [\widehat{\Psi}(x)\widehat{\Psi}(x')] |0\rangle = \begin{cases} \langle 0|\widehat{\Psi}(x)\widehat{\Psi}(x')|0\rangle, & \text{para } x^0 > x'^0, \\ -\langle 0|\widehat{\Psi}(x')\widehat{\Psi}(x)|0\rangle, & \text{para } x^0 < x'^0, \end{cases} \quad (4.53)$$

donde  $T$  es el operador de ordenamiento temporal. El estado de vacío se define de acuerdo a la descomposición en modos desarrollada en la sección anterior, es decir

$$|0\rangle := \prod_{\vec{k}} |0(\vec{k})\rangle, \quad (4.54)$$

$$|0(\vec{k})\rangle = \int dV_{\theta} \Psi_0^{(\vec{k})}(\theta) |\theta\rangle \quad (4.55)$$

con  $|\theta\rangle := |\theta_1\rangle \otimes |\theta_2\rangle \otimes |\theta_3\rangle \otimes |\theta_4\rangle$  y  $\Psi_0^{(\vec{k})}(\theta)$  dado por (4.16) con energía  $E_{0,\vec{k}} = -2\omega_{\vec{k}}$ . A primera vista puede ser preocupante considerar tal estado de vacío debido a la torre infinita de contribuciones de energía negativa. Afortunadamente en este caso esto es una dificultad aparente ya que al igual que en el tratamiento usual es posible redefinir consistentemente la energía del nivel cero y la positividad del espectro del hamiltoniano queda asegurada.

Tomemos entonces  $x^0 > x'^0$  de aquí en adelante con lo cual el propagador (4.53) queda

$$\begin{aligned} S(x, x') &= \langle 0|\widehat{\Psi}(x)\widehat{\Psi}^\dagger(x')|0\rangle\gamma^0 \\ &= \frac{1}{2V} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \vec{k}'\cdot\vec{x}')} \langle 0| \left[ \widehat{\Psi}_{\vec{k}}^{(R)}(t) + i\widehat{\Psi}_{\vec{k}}^{(I)}(t) \right] \left[ \widehat{\Psi}_{\vec{k}'}^{(R)T}(t') - i\widehat{\Psi}_{\vec{k}'}^{(I)T}(t') \right] |0\rangle\gamma^0 \\ &= \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \frac{e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \vec{k}'\cdot\vec{x}')}}{2V} \langle 0| e^{i\widehat{H}_{\vec{k}}t} \left( \widehat{\Psi}_{\vec{k}}^{(R)} + i\widehat{\Psi}_{\vec{k}}^{(I)} \right) e^{-i\widehat{H}_{\vec{k}}t} e^{i\widehat{H}_{\vec{k}'}t'} \left( \widehat{\Psi}_{\vec{k}'}^{(R)T} + \right. \\ &\quad \left. - i\widehat{\Psi}_{\vec{k}'}^{(I)T} \right) e^{-i\widehat{H}_{\vec{k}'}t'} |0\rangle\gamma^0, \end{aligned} \quad (4.56)$$

habiendo usado en la segunda línea la descomposición en modos del campo de Dirac (4.5) y en la tercera se ha escrito la evolución temporal en el esquema de Heisenberg para los operadores correspondientes. El superíndice  $T$  se emplea para denotar la transposición de los espinores. Similarmente al caso

## 4.2. PROPAGADOR CON MODOS DE FOURIER

del campo escalar real, calculamos la acción del último factor en (4.56) y hacemos uso del vacío en términos de los modos (4.54) para llegar a

$$e^{-i\hat{H}_{\vec{k}}t}|0\rangle_{\vec{k}'} = \delta_{\vec{k},\vec{k}'} e^{-i\hat{H}_{\vec{k}}t}|0\rangle_{\vec{k}'} = \delta_{\vec{k},\vec{k}'} e^{-iE_{0,\vec{k}}t}|0(\vec{k})\rangle_{\vec{k}'}. \quad (4.57)$$

Usando (4.57) en (4.56) tenemos

$$S(x, x') = \sum_{\vec{k}} \frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}') + iE_{0,\vec{k}}(t-t')}}{2V} {}_{\vec{k}}\langle 0 | \left( \hat{\Psi}_{\vec{k}}^{(R)} + i\hat{\Psi}_{\vec{k}}^{(I)} \right) e^{-i\hat{H}_{\vec{k}}t} e^{i\hat{H}_{\vec{k}}t'} \left( \hat{\Psi}_{\vec{k}}^{(R)T} + i\hat{\Psi}_{\vec{k}}^{(I)T} \right) |0\rangle_{\vec{k}} \gamma^0. \quad (4.58)$$

En este punto usamos (4.10) y (4.11) para expresar los modos del campo de Dirac y su conjugado en el espacio de Grassmann. De esta manera obtenemos

$$S(x, x') = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}') + iE_{0,\vec{k}}(t-t')} {}_{\vec{k}}\langle 0 | \vec{\partial}_{\theta_{\vec{k}}}^L e^{-i\hat{H}_{\vec{k}}t} e^{i\hat{H}_{\vec{k}}t'} \vec{\theta}_{\vec{k}}^T |0\rangle_{\vec{k}} \gamma^0. \quad (4.59)$$

Note que  $\vec{\theta}_{\vec{k}}^T$  y  $\vec{\partial}_{\theta_{\vec{k}}}^L$  deben considerarse como un arreglo de  $4 \times 1$  y entendidos como los operadores de Grassmann asociados al modo  $\vec{k}$ . Calculemos primeramente el factor  $\vec{\theta}_{\vec{k}}^T |0\rangle_{\vec{k}}$ . Para este propósito notemos de (4.16) que  $|0\rangle_{\vec{k}}$  contiene solo términos cuadráticos en las variables de Grassmann  $\theta$  y por lo tanto la acción de  $\vec{\theta}_{\vec{k}}^T$  en éste conducirá a un estado que contiene solamente términos cúbicos. Este término cúbico será expresado como una combinación de autoestados y solamente los cuatro autoestados  $\Psi_{1,3}^{\vec{k}}(\theta)$ ,  $\Psi_{1,4}^{\vec{k}}(\theta)$ ,  $\Psi_{3,3}^{\vec{k}}(\theta)$  y  $\Psi_{3,4}^{\vec{k}}(\theta)$ , contienen términos cúbicos en  $\theta$  (ver (4.18)-(4.31)). Podemos por lo tanto escribir

$$\vec{\theta}_{\vec{k}}^T |0\rangle_{\vec{k}} = \vec{A}^T |1, 3\rangle_{\vec{k}} + \vec{B}^T |1, 4\rangle_{\vec{k}} + \vec{C}^T |3, 3\rangle_{\vec{k}} + \vec{D}^T |3, 4\rangle_{\vec{k}}, \quad (4.60)$$

con  $\vec{A}, \dots, \vec{D}$ , siendo arreglos de  $4 \times 1$  que pueden determinarse usando el producto interno. Sin embargo nos abstenemos de calcular el valor de estos cuatro arreglos de coeficientes debido a que solo algunos de ellos serán necesarios para el cálculo del propagador. Más adelante determinaremos cuales son los requeridos y entonces procederemos a calcularlos. Insertamos ahora (4.60) en (4.59) y luego consideramos los operadores de evolución temporal obteniendo

$$S(x, x') = \sum_{\vec{k}} \frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}') + iE_{0,\vec{k}}(t-t')}}{V} {}_{\vec{k}}\langle 0 | \vec{\partial}_{\theta(\vec{k})}^L \left[ (\vec{A}^T |1, 3\rangle_{\vec{k}} + \vec{B}^T |1, 4\rangle_{\vec{k}}) e^{-iE_{1,\vec{k}}(t-t')} + (\vec{C}^T |3, 3\rangle_{\vec{k}} + \vec{D}^T |3, 4\rangle_{\vec{k}}) e^{-iE_{3,\vec{k}}(t-t')} \right] \gamma^0. \quad (4.61)$$

## 4.2. PROPAGADOR CON MODOS DE FOURIER

El siguiente paso consiste en considerar en (4.61) la acción de  $\vec{\partial}_{\theta(\vec{k})}^L$  sobre los autoestados  $|1, 3\rangle_{\vec{k}}$ ,  $|1, 4\rangle_{\vec{k}}$ ,  $|3, 3\rangle_{\vec{k}}$  y  $|3, 4\rangle_{\vec{k}}$  los cuales están expresados en términos de potencias de las variables de Grassmann. En lugar de hacer esto, calculamos directamente las amplitudes de los estados mencionados, con el vacío del modo, las cuales toman el valor

$$\vec{k}\langle 0|\vec{\partial}_{\theta(\vec{k})}^L|1, 3\rangle_{\vec{k}}\vec{A}^T = \begin{pmatrix} \frac{A_1(k_x - ik_y)}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}^2 - 2\omega_{\vec{k}}k_z}} & \frac{A_2(k_x - ik_y)}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}^2 - 2\omega_{\vec{k}}k_z}} & \frac{A_3(k_x - ik_y)}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}^2 - 2\omega_{\vec{k}}k_z}} & \frac{A_4(k_x - ik_y)}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}^2 - 2\omega_{\vec{k}}k_z}} \\ \frac{A_1(k_z - \omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}^2 - 2\omega_{\vec{k}}k_z}} & \frac{A_2(k_z - \omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}^2 - 2\omega_{\vec{k}}k_z}} & \frac{A_3(k_z - \omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}^2 - 2\omega_{\vec{k}}k_z}} & \frac{A_4(k_z - \omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}^2 - 2\omega_{\vec{k}}k_z}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{A_1 M}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}^2 - 2\omega_{\vec{k}}k_z}} & \frac{A_2 M}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}^2 - 2\omega_{\vec{k}}k_z}} & \frac{A_3 M}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}^2 - 2\omega_{\vec{k}}k_z}} & \frac{A_4 M}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}^2 - 2\omega_{\vec{k}}k_z}} \end{pmatrix}, \quad (4.62)$$

$$\vec{k}\langle 0|\vec{\partial}_{\theta(\vec{k})}^L|1, 4\rangle_{\vec{k}}\vec{B}^T = \begin{pmatrix} \frac{B_1 M}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}^2 - 2\omega_{\vec{k}}k_z}} & \frac{B_2 M}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}^2 - 2\omega_{\vec{k}}k_z}} & \frac{B_3 M}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}^2 - 2\omega_{\vec{k}}k_z}} & \frac{B_4 M}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}^2 - 2\omega_{\vec{k}}k_z}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-B_1(k_z - \omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}^2 - 2\omega_{\vec{k}}k_z}} & \frac{-B_2(k_z - \omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}^2 - 2\omega_{\vec{k}}k_z}} & \frac{-B_3(k_z - \omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}^2 - 2\omega_{\vec{k}}k_z}} & \frac{-B_4(k_z - \omega_{\vec{k}})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}^2 - 2\omega_{\vec{k}}k_z}} \\ \frac{-B_1(k_x + ik_y)}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}^2 - 2\omega_{\vec{k}}k_z}} & \frac{-B_2(k_x + ik_y)}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}^2 - 2\omega_{\vec{k}}k_z}} & \frac{-B_3(k_x + ik_y)}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}^2 - 2\omega_{\vec{k}}k_z}} & \frac{-B_4(k_x + ik_y)}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}^2 - 2\omega_{\vec{k}}k_z}} \end{pmatrix}, \quad (4.63)$$

$$\vec{k}\langle 0|\vec{\partial}_{\theta(\vec{k})}^L|3, 3\rangle_{\vec{k}}\vec{C}^T = \vec{k}\langle 0|\vec{\partial}_{\theta(\vec{k})}^L|3, 4\rangle_{\vec{k}}\vec{D}^T = 0. \quad (4.64)$$

Vemos entonces que los valores de las amplitudes que contienen  $\vec{C}$ ,  $\vec{D}$  se anulan, con lo cual el cálculo de estos coeficientes no es requerido. Adicionalmente la anulación de tales amplitudes es necesaria ya que de lo contrario producirían una violación de la simetría de Lorentz, debido a que en las exponenciales temporales aparecerían términos como  $E_{3,\vec{k}} - E_{0,\vec{k}} = 3\omega_{\vec{k}}$  en lugar del valor usual de  $\omega_{\vec{k}}$ . Puede verse que solamente  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  requieren ser determinadas (son no nulas) y éstas toman los valores

$$\vec{A}^T = \frac{\vec{k}\langle 1, 3|\vec{\theta}_{\vec{k}}^T|0\rangle_{\vec{k}}}{\vec{k}\langle 1, 3|1, 3\rangle_{\vec{k}}}, \quad (4.65)$$

$$= \left( \frac{k_x + ik_y}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}^2 - 2\omega_{\vec{k}}k_z}}, \frac{\sqrt{\omega_{\vec{k}} - k_z}}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}}, 0, \frac{M}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}^2 - 2\omega_{\vec{k}}k_z}} \right), \quad (4.66)$$

$$\vec{B}^T = \frac{\vec{k} \langle 1, 4 | \vec{\theta}_{\vec{k}}^T | 0 \rangle_{\vec{k}}}{\vec{k} \langle 1, 4 | 1, 4 \rangle_{\vec{k}}} \quad (4.67)$$

$$= \left( \frac{M}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}^2 - 2\omega_{\vec{k}}k_z}}, 0, \frac{\sqrt{\omega_{\vec{k}} - k_z}}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}}, -\frac{k_x - ik_y}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}^2 - 2\omega_{\vec{k}}k_z}} \right). \quad (4.68)$$

Finalmente, al sustituir estos valores en (4.61) tenemos

$$\begin{aligned} S(x, x') &= \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \vec{k} \cdot \vec{x}')} e^{-i(E_{1, \vec{k}} - E_{0, \vec{k}})(t - t')} \frac{1}{2\omega_{\vec{k}}} \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} M & 0 & (k_z + \omega_{\vec{k}}) & (k_x - ik_y) \\ 0 & M & (k_x + ik_y) & (\omega_{\vec{k}} - k_z) \\ (\omega_{\vec{k}} - k_z) & (-k_x + ik_y) & M & 0 \\ -(k_x + ik_y) & (k_z - \omega_{\vec{k}}) & 0 & M \end{pmatrix}, \\ &= \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \vec{k} \cdot \vec{x}')} e^{-i\omega_{\vec{k}}(t - t')} \frac{1}{2\omega_{\vec{k}}} \left( \gamma^0 \omega_{\vec{k}} - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} + M \right), \\ &= \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} e^{-ik \cdot (x - x')} \frac{(\not{k} + M)}{2k^0}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Este es precisamente el propagador del campo de Dirac libre en un volumen finito  $V$  [35]. Este cálculo nos permite adquirir certeza en la validez del método de la descripción en modos, ya que conduce a un resultado conocido obtenido por una vía distinta que la empleada en términos de los operadores de creación y aniquilación. El siguiente paso, es realizar el mismo cálculo pero empleando la descripción en términos de los cuatro osciladores de Fermi por modo del campo de Dirac. Esto ofrecerá la expresión adecuada para reemplazar la versión polimérica de los osciladores de Fermi de forma análoga al cálculo del propagador del campo escalar real polimérico.

### 4.3 Propagador con osciladores de Fermi

Ahora mostraremos cómo obtener el propagador del campo de Dirac libre a partir de una torre de osciladores de Fermi. Comencemos con la expresión del propagador definida en (4.53) y reescribámosla como

$$S(x, x') = \frac{1}{2V} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \Delta \vec{x}} D_{\vec{k}}(t, t') \gamma^0, \quad (4.70)$$

### 4.3. PROPAGADOR CON OSCILADORES DE FERMI

donde hemos definido la amplitud  $D_{\vec{k}}(t, t')$  como

$$D_{\vec{k}}(t, t') := {}_{\vec{k}}\langle 0 | \left( \widehat{\Psi}_{\vec{k}}^{(R)}(t) + i\widehat{\Psi}_{\vec{k}}^{(I)}(t) \right) \left( \widehat{\Psi}_{\vec{k}}^{(R)T}(t') + i\widehat{\Psi}_{\vec{k}}^{(I)T}(t') \right) | 0 \rangle_{\vec{k}}. \quad (4.71)$$

Ahora tomamos (4.38) y (4.48) y las insertamos en (4.71), unido a la relación entre los vacíos en modos de Fourier y aquellos en osciladores de Fermi,  $\widehat{V}|0\rangle_{\vec{k}} = |0\rangle_F$  para obtener

$$\begin{aligned} D_{\vec{k}}(t, t') &= ({}_{\vec{k}}\langle 0 | \widehat{V}^{-1}) \left[ (u^{(1)} + iu^{(3)})\tilde{X}_1(t) + (u^{(2)} + iu^{(4)})\tilde{X}_2(t) \right] \times \\ &\quad \times \left[ \tilde{X}_1^T(t')(u^{(1)} - iu^{(3)})^T + \tilde{X}_2^T(t')(u^{(2)} - iu^{(4)})^T \right] (\widehat{V}|0\rangle_{\vec{k}}) \\ &= (u^{(1)} + iu^{(3)})_F \langle 0 | \tilde{X}_1(t) \tilde{X}_1^T(t') | 0 \rangle_F (u^{(1)} - iu^{(3)})^T + \\ &\quad + (u^{(2)} + iu^{(4)})_F \langle 0 | \tilde{X}_2(t) \tilde{X}_1^T(t') | 0 \rangle_F (u^{(1)} - iu^{(3)})^T + \\ &\quad + (u^{(1)} + iu^{(3)})_F \langle 0 | \tilde{X}_1(t) \tilde{X}_2^T(t') | 0 \rangle_F (u^{(2)} - iu^{(4)})^T + \\ &\quad + (u^{(2)} + iu^{(4)})_F \langle 0 | \tilde{X}_2(t) \tilde{X}_2^T(t') | 0 \rangle_F (u^{(2)} - iu^{(4)})^T. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Es claro entonces que todo lo que necesitamos para calcular el propagador son las funciones de correlación de uno y dos puntos de cada oscilador de Fermi como habíamos mencionado. Estas funciones de correlación fueron dadas en el capítulo anterior. Escribamos por separado los valores de las amplitudes dadas en (4.72) luego de insertar las expresiones de las funciones de correlación

$$\begin{aligned} {}_F\langle 0 | \tilde{X}_1(t) \tilde{X}_1^T(t') | 0 \rangle_F &= {}_F\langle 0 | \tilde{X}_2(t) \tilde{X}_2^T(t') | 0 \rangle_F \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{2 \times 2} + \sigma_2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{2 \times 2} + \sigma_2 \end{pmatrix} e^{-i\omega(t-t')}, \\ {}_F\langle 0 | \tilde{X}_1(t) \tilde{X}_2^T(t') | 0 \rangle_F &= {}_F\langle 0 | \tilde{X}_2(t) \tilde{X}_1^T(t') | 0 \rangle_F = 0. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Luego regresamos a  $D_{\vec{k}}(t, t')$  e insertamos las relaciones (4.73) así como (4.49) a través de (4.52) en (4.72). Esto nos da como resultado final la expresión

$$D_{\vec{k}}(t, t') = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} \omega + k_z & k_x - ik_y & M & 0 \\ k_x + ik_y & \omega - k_z & 0 & M \\ M & 0 & \omega - k_z & -(k_x - ik_y) \\ 0 & M & -(k_x + ik_y) & \omega + k_z \end{pmatrix} e^{-i\omega(t-t')}. \quad (4.74)$$

Esta es justo la matriz requerida para obtener el propagador usual del campo de Dirac lo cual puede deducirse de comparar (4.74) luego de multiplicarla por la matriz  $\gamma^0$  en la primera igualdad de (4.69).

#### 4.4. PROPAGADOR CON OSCILADORES DE FERMI POLIMÉRICOS

Este resultado nos permite tomar a (4.74) como la expresión que emplearemos para comparar la construcción polimérica la cual será discutida en la siguiente sección.

##### 4.4 Propagador con osciladores de Fermi poliméricos

En esta sección consideraremos a (4.70) como el punto de partida para definir el propagador del campo de Dirac polimérico al reemplazar en (4.72) la versión polimérica de las amplitudes de los osciladores de Fermi denotadas como  ${}_F\langle 0|\hat{x}_a^j(t)\hat{x}_b^k(t')|0\rangle_F$ , donde los índices  $j, k = 1, 2, 3, 4$  se refieren a cada uno de los osciladores de Fermi, mientras que los índices  $a, b = 1, 2$  etiquetan sus componentes, es decir sus operadores fundamentales, por la versión polimérica de éstas  ${}_{PF}\langle 0|\tilde{x}_a^j(t)\tilde{x}_b^k(t')|0\rangle_{PF}$ . Estas amplitudes ya fueron calculadas en el capítulo anterior en la sección polimérica. Tomemos sus valores y sustituyámoslos en las amplitudes del campo de Dirac. Esto nos conduce a las siguientes expresiones

$${}_{PF}\langle -|\tilde{X}_1(t)\tilde{X}_1^T(t')|-\rangle_{PF} = (M + Nf_1 + Pf_2)e^{-i\omega\Delta t} \quad (4.75)$$

$${}_{PF}\langle -|\tilde{X}_2(t)\tilde{X}_2^T(t')|-\rangle_{PF} = (M + Nf_3 + Pf_4)e^{-i\omega\Delta t} \quad (4.76)$$

donde  $M$ ,  $N$  y  $P$  son las matrices

$$M := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1_{2\times 2} + \sigma_2 & 0 \\ 0 & 1_{2\times 2} + \sigma_2 \end{pmatrix}, \quad (4.77)$$

$$N := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1_{2\times 2} + \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.78)$$

$$P := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_{2\times 2} + \sigma_2 \end{pmatrix}, \quad (4.79)$$

mientras que las funciones  $f_i$ , con  $i = 1, 2, 3, 4$  están definidas como

$$f_i := \Delta\alpha_i u_i^1 + \Delta\beta_i u_i^2 + (\Delta\gamma_i - \Delta\alpha_i \Delta\beta_i) u_i^1 u_i^2, \quad (4.80)$$

y en éstas, las cantidades  $\Delta\alpha_i$ ,  $\Delta\beta_i$  y  $\Delta\gamma_i$  se definen como las diferencias

$$\Delta\alpha_i := \tilde{\alpha}_i - \alpha_i, \quad \Delta\beta_i := \tilde{\beta}_i - \beta_i, \quad \Delta\gamma_i := \tilde{\gamma}_i - \gamma_i. \quad (4.81)$$

Las otras amplitudes relevantes en el cálculo resultan ser nulas, es decir,

$${}_{PF}\langle -|\tilde{X}_1(t)\tilde{X}_2^T(t')|-\rangle_{PF} = {}_{PF}\langle -|\tilde{X}_2(t)\tilde{X}_1^T(t')|-\rangle_{PF} = 0. \quad (4.82)$$

#### 4.4. PROPAGADOR CON OSCILADORES DE FERMI POLIMÉRICOS

Reemplazamos estos resultados en (4.72) para obtener finalmente

$$D_k^P(t, t') = D_k^-(t, t') + \sum_{j=1}^4 A_j f_j e^{-i\omega\Delta t}, \quad (4.83)$$

en el cual las matrices  $A_i$  toman la siguiente forma explícita

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{(\omega+k_z)(\omega^2+k_z\omega+ik_y(k_x+ik_y))}{2(\omega^3-\omega k_y^2)} & \frac{(\omega+k_z)(\omega k_x-ik_y k_z)}{2(\omega^3-\omega k_y^2)} & \frac{M(\omega+k_z)}{2(\omega^2-k_y^2)} & \frac{iMk_y(\omega+k_z)}{2(\omega^3-\omega k_y^2)} \\ \frac{(k_x+ik_y)(\omega^2+k_z\omega+ik_y(k_x+ik_y))}{2(\omega^3-\omega k_y^2)} & \frac{(\omega+ik_y)(\omega k_x-ik_y k_z)}{2(\omega^3-\omega k_y^2)} & \frac{M(k_x+ik_y)}{2(\omega^2-k_y^2)} & -\frac{Mk_y(k_y-ik_x)}{2(\omega^3-\omega k_y^2)} \\ \frac{M(\omega^2+k_z\omega+ik_y(k_x+ik_y))}{2(\omega^3-\omega k_y^2)} & \frac{M\omega k_x-iMk_y k_z}{2\omega^3-2\omega k_y^2} & \frac{M^2}{2\omega^2-2k_y^2} & \frac{iM^2 k_y}{2\omega^3-2\omega k_y^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.84)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \frac{(k_x-ik_y)(\omega k_x-ik_y k_z)}{2(\omega^3-\omega k_y^2)} & \frac{(k_x-ik_y)(\omega^2-k_z\omega-(ik_x+k_y)k_y)}{2(\omega^3-\omega k_y^2)} & -\frac{Mk_y(ik_x+k_y)}{2(\omega^3-\omega k_y^2)} & \frac{M(k_x-ik_y)}{2(\omega^2-k_y^2)} \\ \frac{(\omega-k_z)(\omega k_x-ik_y k_z)}{2(\omega^3-\omega k_y^2)} & \frac{(\omega-k_z)(\omega^2-k_z\omega-(ik_x+k_y)k_y)}{2(\omega^3-\omega k_y^2)} & -\frac{iMk_y(\omega-k_z)}{2(\omega^3-\omega k_y^2)} & \frac{M(\omega-k_z)}{2(\omega^2-k_y^2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{M\omega k_x-iMk_y k_z}{2\omega^3-2\omega k_y^2} & \frac{M(\omega^2-k_z\omega-(ik_x+k_y)k_y)}{2(\omega^3-\omega k_y^2)} & -\frac{iM^2 k_y}{2\omega^3-2\omega k_y^2} & \frac{M^2}{2\omega^2-2k_y^2} \end{pmatrix}, \quad (4.85)$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} \frac{M^2}{2\omega^2-2k_y^2} & -\frac{iM^2 k_y}{2\omega^3-2\omega k_y^2} & \frac{M(\omega^2-k_z\omega+ik_y(k_x+ik_y))}{2(\omega^3-\omega k_y^2)} & -\frac{M(\omega k_x+ik_y k_z)}{2(\omega^3-\omega k_y^2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{M(\omega-k_z)}{2(\omega^2-k_y^2)} & -\frac{iMk_y(\omega-k_z)}{2(\omega^3-\omega k_y^2)} & \frac{(\omega-k_z)(\omega^2-k_z\omega+ik_y(k_x+ik_y))}{2(\omega^3-\omega k_y^2)} & -\frac{(\omega-k_z)(\omega k_x+ik_y k_z)}{2(\omega^3-\omega k_y^2)} \\ \frac{M(k_x+ik_y)}{2(k_y^2-\omega^2)} & -\frac{Mk_y(k_y-ik_x)}{2(\omega^3-\omega k_y^2)} & -\frac{(k_x+ik_y)(\omega^2-k_z\omega+ik_y(k_x+ik_y))}{2(\omega^3-\omega k_y^2)} & \frac{(k_x+ik_y)(\omega k_x+ik_y k_z)}{2(\omega^3-\omega k_y^2)} \end{pmatrix}, \quad (4.86)$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{iM^2 k_y}{2\omega^3-2\omega k_y^2} & \frac{M^2}{2\omega^2-2k_y^2} & -\frac{M(\omega k_x+ik_y k_z)}{2(\omega^3-\omega k_y^2)} & \frac{M(\omega^2+k_z\omega-(ik_x+k_y)k_y)}{2(\omega^3-\omega k_y^2)} \\ -\frac{Mk_y(ik_x+k_y)}{2(\omega^3-\omega k_y^2)} & \frac{M(k_x-ik_y)}{2(k_y^2-\omega^2)} & \frac{(k_x-ik_y)(\omega k_x+ik_y k_z)}{2(\omega^3-\omega k_y^2)} & -\frac{(k_x-ik_y)(\omega^2+k_z\omega-(ik_x+k_y)k_y)}{2(\omega^3-\omega k_y^2)} \\ \frac{iMk_y(\omega+k_z)}{2(\omega^3-\omega k_y^2)} & \frac{M(\omega+k_z)}{2(\omega^2-k_y^2)} & -\frac{(\omega+k_z)(\omega k_x+ik_y k_z)}{2(\omega^3-\omega k_y^2)} & \frac{(\omega+k_z)(\omega^2+k_z\omega-(ik_x+k_y)k_y)}{2(\omega^3-\omega k_y^2)} \end{pmatrix}. \quad (4.87)$$

#### 4.4. PROPAGADOR CON OSCILADORES DE FERMI POLIMÉRICOS

---

Esto completa el cálculo de nuestro modelo de propagador del campo de Dirac polimérico. Es importante destacar que el cuerpo de este propagador coincide con el propagador estándar calculado previamente en la sección anterior (4.83) y que las modificaciones son términos de alma que dependen de potencias de primer y segundo orden en los parámetros reales anticonmutativos introducidos en nuestra cuantización (4.80) así como en el espectro de energía del oscilador de Fermi polimérico (3.106).

Vemos entonces que el campo de Dirac en su versión polimérica posee un propagador modificado con correcciones Grassmannianas de alma. Estas correcciones resultan de la naturaleza singular de la representación no superanalítica de los osciladores de Fermi poliméricos. A diferencia de las correcciones del campo escalar polimérico, las del campo de Dirac polimérico no se “acoplan” con los vectores de onda de la descomposición en modos y por lo tanto, no permiten definir regímenes infrarrojo o ultravioleta. Esto también impedirá escribir el propagador del campo de Dirac polimérico a partir del propagador del campo escalar polimérico, un hecho que contrasta notablemente con los propagadores de los campos escalar real y de Dirac libres cuantizados de la forma usual.

Llegado a este punto, discutiremos en el siguiente capítulo las consecuencias de este resultado con mayor detalle y daremos nuestras conclusiones en tal sentido.

## 5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES.

*“Lack of originality, everywhere, all over the world, from time immemorial, has always been considered the foremost quality and the recommendation of the active, efficient and practical man.”*  
The Idiot, **F. M. Dostoyevski**

Investigar los efectos de las singularidades del espacio - tiempo y el comportamiento a muy altas energías de los campos de materia son interrogantes cuyas respuestas están relacionadas con la estructura subyacente, probablemente cuántica, del espacio-tiempo. Con esta motivación Hossain y colaboradores [7] investigaron una ruta distinta a la usual de la cuantización de los modos de Fourier de un campo escalar real. La ruta mencionada consiste en reemplazar los osciladores armónicos cuánticos que constituyen los modos de Fourier del campo escalar real, por la versión polimérica de los mismos.

El cálculo del propagador del campo escalar real conduce entonces a una modificación de éste pero que coincide con el propagador usual del campo escalar real a bajas energías y se aparta del mismo a energías altas. Inspirados por esta idea nos propusimos estudiar la versión similar de esta ruta pero para otro campo de materia, en este caso, el campo de Dirac libre en un espacio-tiempo plano. En el proceso de resolver esta tarea emergieron no pocas preguntas que fuimos respondiendo a lo largo del trabajo y que ofrecemos en esta tesis.

El primer paso consiste en reproducir los cálculos del trabajo de Hossain y sus colaboradores para el campo escalar real y a ello dedicamos el Capítulo 2. Éste comienza con la descomposición en modos de Fourier del campo escalar real (sección 2.1) y luego con la separación de sus modos en sus partes real e imaginaria. Este paso es necesario ya que la ruta ofrecida por Hossain et al. no emplea las soluciones clásicas de la teoría del campo escalar, en particular su descripción en términos de operadores de creación y aniquilación, sino aquella que se basa en las variables canónicas empleadas en la representación de Schrödinger. En este paso realizamos un desarrollo completo de tal descripción escribiendo el hamiltoniano del campo escalar real en términos de los modos de Fourier y obteniendo que el mismo no queda en la forma de una suma de hamiltonianos de osciladores armónicos

---

cuánticos, uno para cada vector de onda  $\vec{k}$ . Sabiendo que esto último es posible puesto que sucede en la descomposición en operadores de creación y aniquilación, realizamos una rotación en el espacio de las variables canónicas y ajustamos los parámetros de la rotación con lo cual pudimos escribir el hamiltoniano del campo escalar real cuántico como una suma de hamiltonianos de osciladores armónicos cuánticos para cada vector de onda. A partir de este punto la identificación de las variables cuánticas adecuadas, es decir, aquellas que nos conducen al sistema dado por un conjunto infinito de osciladores armónicos cuánticos, nos ofrece el arsenal de resultados disponibles de la cuantización del oscilador armónico cuántico. Proponemos entonces que el espacio de Hilbert para cada modo sea  $L^2$ , y que el problema de autovalores de los modos queda resuelto y asociado al problema de autovalores del oscilador armónico cuántico. Posteriormente pasamos a calcular el propagador del campo escalar real libre (sección 2.2) y verificamos que el resultado coincide con el del propagador estándar calculado en términos de operadores de creación y aniquilación [35].

El siguiente paso del trabajo de Hossain et. al. [7] requiere de la construcción polimérica del campo escalar real la cual se realiza reemplazando los osciladores armónicos cuánticos obtenidos en la descripción anterior por la versión polimérica de los mismos. Esto nos conduce a exponer los aspectos principales de la cuantización polimérica del oscilador armónico la cual es brevemente expuesta en la sección 2.3. Recordemos que este esquema de cuantización (polimérica) emerge como resultado de explorar en modelos con un número finito de grados de libertad los efectos que tendría el esquema de cuantización por lazos [3]. En este sentido, la cuantización polimérica sirve como un laboratorio teórico para investigar los efectos de las técnicas desarrolladas para cuantizar la gravedad [3, 4, 6, 33, 34]. En el trabajo empleamos esencialmente los autovalores de energía y los autoestados dados por [7] como resultado de resolver la ecuación de Mathieu. Dada la importancia de ésta ecuación dedicamos el Anexo A a exponer sus características principales. Posteriormente, pasamos al cálculo del propagador del campo escalar polimérico (en la sección 2.4), el cual como hemos mencionado resulta de reemplazar los osciladores armónicos poliméricos en los modos del campo escalar real. Vemos que éste conduce al propagador conocido del campo escalar real libre a bajas energías y a modificaciones del mismo cuando las energías son altas. Estos resultados son precisamente los reportados por Hossain et. al. en [7]. Siendo clara entonces la ruta a seguir pasamos a estudiar la construcción polimérica del campo de Dirac, en particular de su propagador.

Es importante mencionar que en el caso del campo escalar, la descripción en modos permite que los parámetros que caracterizan la cuantización

---

polimérica, en particular aquellos que etiquetan los operadores de Weyl, están presentes en la construcción del operador hamiltoniano polimérico. Este hecho permite definir un parámetro que admite una interpretación como escala definido en (2.54) y con este parámetro es que realizamos la distinción entre los diferentes regímenes de energía con los cuales estudiamos el propagador. En el caso del campo de Dirac, esto no sucede.

Debido a que en trabajos previos [10] propusimos una relación entre los osciladores de Fermi y los modos de Fourier del campo de Dirac, dedicamos el capítulo 3 a estudiar el oscilador de Fermi y nuestra propuesta de la versión polimérica del oscilador de Fermi. Esta última fue adelantada en [11] pero en este trabajo mostramos aspectos adicionales de la construcción como lo son el cálculo de las funciones de correlación tanto con la cuantización estándar como con la versión polimérica. El capítulo comienza con la descripción de la teoría clásica hamiltoniana del oscilador de Fermi en la sección 3.1. Las características asociadas al tratamiento clásico de sistemas Grassmannianos puede encontrarse en una variada colección de referencias [41, 42, 44, 48] aunque esta sección está consagrada exclusivamente al tratamiento aplicado al oscilador de Fermi. Luego, dedicamos la sección 3.2 a estudiar la cuantización estándar del oscilador de Fermi. En esta sección ofrecemos una elección diferente a la dada en [41] para cuantizarlo y que está más cercana a la ofrecida por [46]. La peculiaridad de nuestro esquema es que ofrece un tratamiento análogo a la cuantización en representación de Schrödinger pero empleando un super espacio de Hilbert (3.30). La ventaja de éste es que incorpora las multiplicaciones por los super números y esto permite la construcción de la representación de la super álgebra de Weyl fermiónica. Destaquemos que esta sección aporta además los elementos con los cuales relacionamos la representación de Fock con la de Schrödinger para el oscilador de Fermi, con particular énfasis en la transformada de Fourier que relaciona los estados en ambas representaciones. Esta transformada jugará un papel relevante en la cuantización polimérica. Posteriormente pasamos a estudiar la representación de la super álgebra de Weyl en la sección 3.3. En esta sección seguimos principalmente el camino ofrecido en [3] para construir el álgebra de Weyl del oscilador armónico a partir de las variables fundamentales. Conociendo la representación de éstas, estudiamos la representación de su exponenciación empleando parámetros reales anticonmutativos debido a que el espacio de fase (reducido) es precisamente  $\mathbb{R}_a^2$ . A los operadores así construidos los denominamos generadores de la super álgebra de Weyl. Sin embargo, la acción de éstos en el espacio de Fock (espacio de kets) era inconsistente por lo cual redefinimos el tipo de exponenciación a tomar sustituyendo  $u^1$  por  $iu^1$ . Con este cambio la super

---

álgebra de Weyl resultante es consistente y además permite recuperar, por diferenciación super analítica, la representación de los operadores fundamentales  $\widehat{x}^j$ . Además también permiten obtener los subgrupos uniparamétricos en completa analogía con la versión bosónica del oscilador armónico. Ya con la super álgebra de Weyl definida pasamos a construir nuestra propuesta de oscilador de Fermi polimérico. El super espacio de Hilbert polimérico se propone entonces en analogía a la construcción del espacio de Hilbert polimérico en representación de coordenadas del oscilador armónico bosónico. La representación de la super álgebra de Weyl deja de ser super analítica reemplazando la delta de Dirac Grassmanniana por una delta de Kronecker para construir el producto interno en el super espacio de Hilbert polimérico. Todo esto lo mostramos en en la sección 3.4 donde ofrecemos la construcción del super espacio de Hilbert polimérico  $\mathcal{H}_p$  de manera formal. Dejamos abierto el construir la representación polimérica a partir de la construcción GNS [49] y verificar si coincide con la ofrecida por nosotros en [11] y en este trabajo. Uno de los resultados importantes de nuestra construcción consiste en que la transformada de Fourier, traída a nuestro sistema en analogía con la construcción bosónica, deja de ser una biyección entre los super espacios de Hilbert de coordenadas y su versión de momentos. Esto está relacionado con el hecho de que no contamos con el análogo al espacio de las funciones casi periódicas en sistemas fermiónicos anticonmutativos. No obstante, esta transformación ofrece información sobre la forma del espectro de energía polimérico el cual adquiere correcciones en potencias de los parámetros que caracterizan los generadores de Weyl que forman el hamiltoniano polimérico. El otro aspecto relevante es que el super espacio de Hilbert al cual conduce la transformación de Fourier es un espacio en el que los generadores resultan ser super analíticos y esto permite recuperar los operadores fundamentales  $\widehat{x}^j$ . El operador hamiltoniano que proponemos para estudiar la dinámica en la subsección 3.4.1 se construye también en analogía a la construcción del operador hamiltoniano en la versión bosónica y ofrecemos como criterio adicional el que éste operador conduzca a la ecuación de autovalores adecuada en la representación sobre el super espacio de Hilbert usual. Ya teniendo los elementos relacionados con la construcción polimérica fermiónica pasamos a estudiar el campo de Dirac.

El capítulo 4 comienza con el análisis de la teoría clásica del campo de Dirac. Éste obedece una ecuación de primer orden lo cual implica que debemos aplicarle el formalismo de Dirac para teorías con constricciones y aparte de esto, el manejo del campo de Dirac es similar al realizado para el campo escalar real. Luego de realizar la separación en partes real e imaginaria de los modos de Fourier del campo de Dirac, imponemos las relaciones

---

de anticonmutación canónicas. El espacio de Hilbert en el cual representamos los modos resultará de introducir cuatro variables de Grassmann reales anticonmutativas y es tomado esencialmente de [46]. Luego de tomar una representación para las relaciones de anticonmutación de los modos, el problema de autovalores del hamiltoniano correspondiente queda expuesto y conduce a los autovalores y las autofunciones dadas en (4.15) y (4.16) - (4.31). Probamos posteriormente la relación entre los modos de Fourier y los osciladores de Fermi en la subsección 4.1.1 proponiendo la existencia de una transformación  $U$  que luego especificamos en detalle en (4.48). Con una expresión para la transformación  $U$  bajo control estamos listos para pasar a determinar el propagador del campo de Dirac en cada una de las descripciones disponibles. Señalamos que la dependencia de los autoestados en potencias de las variables de Grassmann juegan un papel importante para facilitar el cálculo del propagador y éste además explota la descripción en el esquema de Heisenberg de los modos de Fourier del campo de Dirac. Recalcamos una vez más que nuestro análisis difiere del estándar al no emplear una descripción en términos de operadores de creación y aniquilación. Sin embargo, ambos propagadores coinciden, tanto el obtenido en la descomposición en modos (4.2), como en osciladores de Fermi, sección 4.3, con el estándar [35].

Aprovechamos este punto para hacer el siguiente comentario relacionado con el problema de los valores de energía negativa del espectro. Puede pensarse que estos autovalores negativos conducen a problemas de inestabilidad en el campo de Dirac pero esta dificultad es solo aparente ya que se resuelve de la forma usual: redefiniendo el valor de la energía del vacío dando un corrimiento a cero al valor mínimo del espectro. También mencionamos que la ruta seguida para cuantizar los campos poliméricamente, es la conocida como primera cuantización (cuantización de los modos de Fourier). Esto origina los problemas naturales de la teoría cuántica de campos: divergencias ultravioletas, interpretación de partícula (relacionado también con la interpretación de Stueckelberg-Feynmann), así como el carácter reducible de la representación [50], entre otros. Sin embargo, es sabido que todos estos problemas se resuelven sin mayores dificultades al pasar al esquema de segunda cuantización en el caso de los campos libres usuales. En el caso de los campos poliméricos, escalar y de Dirac, la segunda cuantización requiere del análisis de la teoría clásica de campos polimérica con la cual construir el espacio de Hilbert del campo polimérico que luego permita construir el espacio de Fock del campo polimérico.

Finalmente pasamos a calcular el propagador del campo de Dirac polimérico empleando la relación de éste con las funciones de correlación de los

---

osciladores de Fermi (4.72) y luego reemplazamos estas amplitudes por la versión polimérica de éstas dadas en (4.75). El resultado conduce al propagador (4.83) que tiene como cuerpo el propagador usual previamente calculado. Sin embargo recibe contribuciones de alma en analogía a lo que sucede con el propagador del campo escalar real. En el caso fermiónico sin embargo éstas son potencias en los parámetros de la red real anticonmutativa.

Queda abierto el elucidar las posibles consecuencias de estas contribuciones a nuestro modelo del propagador del campo de Dirac. Estas contribuciones sugieren la necesidad de estudiar el efecto polimérico más allá del campo libre y acoplarlo con otros campos de materia, por ejemplo, el campo electromagnético. También es necesario estudiar los eventuales efectos de éstas en la microcausalidad del campo pues sabemos que en el caso del campo escalar real polimérico, ésta deja de ser explícita [9]. Es de interés, tanto para el campo escalar polimérico como para el campo de Dirac polimérico, estudiar el sentido en que estos campos cuánticos son una representación del grupo de Lorentz (Poincaré). Esto implica que el espín de estos campos cuánticos, no sea una cantidad definida a este nivel y por lo tanto, el nombre de “campo escalar” y campo de Dirac, para las versiones poliméricas, sea una denominación formal.

Entre posibles estudios futuros, podría ser relevante implementar un esquema de renormalización similar al incorporado para el oscilador armónico polimérico [33]. Esperamos que en este esquema, los parámetros que definen la cuantización polimérica fermiónica y por tanto su espectro de energía polimérica puedan ser interpretados como una escala de Grassmann que permita recuperar en un cierto sentido de límite la cuantización estándar. En este caso el carácter de escala del parámetro fermiónico requiere de incorporar una topología a los super números distinta a la ofrecida por [41] y más cercana a la dada en [51].

Por último, debido a que trabajos recientes adoptan técnicas de integrales de trayectoria para incorporar el esquema de espuma de espín en modelos cosmológicos [52], sería de interés el estudiar la extensión de tales esquemas al campo de Dirac y así enriquecer y complementar los métodos hamiltonianos que hemos empleado en el presente trabajo.

## APÉNDICES

## A. SOLUCIÓN A LA ECUACIÓN DE MATHIEU

La solución detallada a la ecuación de Mathieu se expone en [39] por lo cual, en este apéndice, daremos un resumen sobre la misma. Para ello, reescribamos la ecuación de Mathieu (2.49) dada anteriormente como

$$\Psi''(u) + [a - 2q \cos(2u)] \Psi(u) = 0, \quad (\text{A.1})$$

donde hemos definido  $\alpha := a$  y

$$q := \frac{1}{4g^2}. \quad (\text{A.2})$$

Se propone entonces (siguiendo a [39]) que la solución sea de la forma:

$$\Psi(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} [A_n \cos(nu) + B_n \sin(nu)]. \quad (\text{A.3})$$

Notemos de (A.3) que la suma sobre los cosenos es una función par mientras que la suma sobre los senos será una función impar. Ambas funciones tienen períodos  $\pi$  y  $2\pi$  si el índice  $n$  es impar o par respectivamente. A la función par la denotamos como  $ce(u)$  mientras que la impar será denotada como  $se(u)$ . Luego, al insertar (A.3) en A.1 tendremos que debe satisfacerse la siguiente relación

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-2}^{+\infty} [(a - n^2)A_n - q(A_{n+2} + A_{n-2})] \cos(nu) + \\ & + \sum_{n=-1}^{+\infty} [(a - n^2)B_n - q(B_{n+2} + B_{n-2})] \sin(nu) = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

siendo que  $A_{-4} = A_{-3} = A_{-2} = A_{-1} = B_{-3} = B_{-2} = B_{-1} \equiv 0$ . Esta ecuación se resuelve agrupando los términos iguales en  $\cos(nu)$  y  $\sin(nu)$  y luego anulando sus coeficientes. Esto conduce a las siguientes relaciones de

---

recurrencia entre los coeficientes. Para  $n$  **par**

$$aA_0 - qA_2 = 0, \quad (\text{A.5})$$

$$(a - 4)A_2 - q(A_4 + 2A_0) = 0, \quad (\text{A.6})$$

$$(a - n^2)A_n - q(A_{n+2} + A_{n-2}) = 0, \quad n > 2. \quad (\text{A.7})$$

$$(a - 4)B_2 - q(B_4 + B_0) = 0, \quad (\text{A.8})$$

$$(a - n^2)B_n - q(B_{n+2} + B_{n-2}) = 0, \quad n > 2 \quad (\text{A.9})$$

mientras que para  $n$  **impar**

$$(a - 1)A_1 - q(A_1 + A_3) = 0, \quad (\text{A.10})$$

$$(a - 1)B_1 - q(B_3 - B_1) = 0, \quad (\text{A.11})$$

y adicionalmente a (A.10) y (A.11) se toman (A.7) y (A.9) para todos los  $n > 1$  impares. Las relaciones (A.5), (A.6) y (A.7) con  $n$  par, permiten construir el polinomio característico

$$V_0 - \frac{2}{V_2 - \frac{1}{V_4 - \frac{1}{V_6 - G_8 \dots}}} = 0, \quad (\text{A.12})$$

donde  $V_n := (a - n^2)/q$  y  $G_n := A_n/A_{n-2}$ . Estas definiciones de  $V_n$  y  $G_n$  son válidas para cualquier valor de  $n$ . Las raíces a este polinomio las denotamos como  $\alpha_{2r}$ . Análogamente, las relaciones de recurrencia (A.10) y (A.7) conducen al polinomio

$$V_1 - 1 - \frac{1}{V_3 - \frac{1}{V_5 - \frac{1}{V_7 - G_9 \dots}}} = 0, \quad (\text{A.13})$$

y sus raíces las denotamos como  $\alpha_{2r+1}$ . (A.8) y (A.9) conducen a

$$V_2 - \frac{1}{V_4 - \frac{1}{V_6 - \frac{1}{V_8 - G_{10} \dots}}} = 0, \quad (\text{A.14})$$

cuyas raíces escribiremos como  $\beta_{2r}$  y finalmente (A.11) junto con (A.9) conducen al polinomio

$$V_1 + 1 - \frac{1}{V_3 - \frac{1}{V_5 - \frac{1}{V_7 - G_9 \dots}}} = 0, \quad (\text{A.15})$$

que tendrá raíces  $\beta_{2r+1}$ .

Si  $g \in \mathbb{R}$  condición que se cumple, entonces las raíces satisfacen las siguientes propiedades:

- 
1. Para un valor fijo de  $q \in \mathbb{R}$  las raíces (tanto las  $\alpha_r$  como las  $\beta_r$ ) son reales y diferentes. Y si  $q \neq 0$ , entonces las raíces están ordenadas:  $\alpha_0 < \beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2 \dots$
  2. Para  $q \in \mathbb{R}$  la solución (A.3) asociada a un valor dado de  $\alpha_r$  o  $\beta_r$  tendrá  $r$  ceros en el intervalo  $0 < u < \pi$ .
  3. Los polinomios (A.12) - (A.15) no comparten raíces comunes para  $q \neq 0$ .

Algunos valores de estas raíces son

$$\alpha_0(g) = -\frac{q^2}{2} + \frac{7q^4}{128} - \frac{29q^6}{2304} \dots \quad (\text{A.16})$$

$$\beta_1(g) = \alpha_1(-q) = 1 - q - \frac{q^2}{8} + \frac{q^3}{64} - \frac{q^4}{136} - \frac{11q^5}{36864} \dots \quad (\text{A.17})$$

Las funciones (A.3) correspondientes a valores determinados de las raíces se denotan como  $ce_{2r}(u)$  para aquellas formadas con combinaciones de cosenos e índices pares y  $ce_{2r+1}(u)$  para las de índices impares. Análogamente, se define  $se(u)$  para las construidas con combinaciones de senos. Algunas de estas autofunciones son

$$ce_0(u, q) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ 1 - \frac{q}{2} \cos(2u) + q^2 \left( \frac{1}{32} \cos(4u) - \frac{1}{16} \right) - q^3 \left( \frac{1}{1152} \cos(6u) - \frac{11}{128} \cos(2u) \right) + \dots \right] \quad (\text{A.18})$$

$$ce_1(u, q) = \cos u - \frac{q}{8} \cos(3u) + q^2 \left( \frac{\cos(5u)}{192} - \frac{\cos(3u)}{64} - \frac{\cos u}{128} \right) + \dots \quad (\text{A.19})$$

$$se_1(u, q) = \sin u - \frac{q}{8} \sin(3u) + q^2 \left( \frac{\sin(5u)}{192} + \frac{\sin(3u)}{64} - \frac{\sin u}{128} \right) + \dots \quad (\text{A.20})$$

Por último, para valores de  $q \gg 1$  se tiene que los valores  $a$  satisfacen

$$\alpha_n \approx \beta_{n+1} \approx -2q + 2w\sqrt{q} - \frac{1+w^2}{8} - \frac{w^3+3w}{2^7\sqrt{q}} - \frac{5w^4+34w^2+9}{2^{12}q} + O(q^{-3/2}), \quad (\text{A.21})$$

siendo  $w = 2n + 1$ . La relación (A.2) nos permite entonces vincular el límite de  $q \gg 1$  con el de  $g \ll 1$ . El límite de  $g \ll 1$  se relaciona con la situación en la que la escala  $l$  dada a los operadores de Weyl se hace muy pequeña. Para obtener la energía en este límite, tomanos la relación (2.48)

---

y despejamos la energía  $E$ . Luego sustituimos (A.21) tomando (A.2). Esto nos conduce a la siguiente relación

$$\frac{E}{\omega} = n + \frac{1}{2} - \frac{(2n+1)^2 + 1}{16}g + O(g^2). \quad (\text{A.22})$$

De aquí vemos que el espectro de Schrödinger se recupera cuando  $g = 0$ . Para el caso en el que  $q \ll 1$  tendremos que

$$\alpha_n \approx \beta_n \approx n^2 + \frac{q^2}{2(n^2 - 1)} + O(q^4), \quad (\text{A.23})$$

lo cual conduce a una relación en la energía

$$\frac{E}{\omega} = \frac{gn^2}{2} + \frac{1}{4g} + O(g^{-3}), \quad (\text{A.24})$$

que se separa claramente del espectro de la representación de Schrödinger.

## B. SUPER ESPACIO VECTORIAL, SUPERDUAL Y SUPER ESPACIO DE HILBERT

### B.1 Super espacio vectorial

Tomar las funciones super analíticas  $\Psi : \mathbb{R}_a \rightarrow \Lambda_\infty$  permite dar por sentado que éstas serán a lo sumo, lineales en la variable  $x$ . De esta manera, cualquier función de  $\mathcal{F}$  estará definida por dos super números de la forma

$$\Psi(x) = \Psi_0 + \Psi_1 x. \quad (\text{B.1})$$

Obviamente, también pudimos definir  $\Psi(x) = \Psi_0 + x\Psi_1$  pero es evidente que esta última puede expresarse en la forma (B.1) escribiendo  $\Psi(x) = \Psi_0 + x\Psi_1 = \Psi_0 + \Psi_1^p x$ , donde  $z^p = z^u - z^v$  para todo super número  $z$ .

Debido a que queremos ver a  $\mathcal{F}$  como un super espacio vectorial, debemos definir primero una suma. Ésta será la suma de funciones punto a punto, es decir, la aplicación  $+: \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}; (\Psi(x), \Phi(x)) \mapsto (\Psi + \Phi)(x)$  donde

$$(\Psi + \Phi)(x) := (\Psi_0 + \Phi_0) + (\Psi_1 + \Phi_1)x. \quad (\text{B.2})$$

Nótese que la suma en los paréntesis de lado derecho, es la suma de supernúmeros. La suma de funciones definida así satisface las condiciones necesarias de asociatividad, distributividad, elemento neutro, etc, necesarias. Enseguida debemos dar dos operaciones de multiplicación por supernúmeros. Una por la izquierda y otra por la derecha. La multiplicación por la izquierda es una aplicación asociativa y distributiva  $\cdot_L : \Lambda_\infty \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}; (z, \Psi(x)) \mapsto (z \cdot \Psi)(x)$  tal que

$$(z \cdot \Psi)(x) = z\Psi(x) = z\Psi_0 + z\Psi_1 x. \quad (\text{B.3})$$

Esta aplicación satisface las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} ((\alpha + \beta) \cdot \Psi)(x) &= (\alpha + \beta)\Psi_0 + (\alpha + \beta)\Psi_1 x = (\alpha \cdot \Psi)(x) + (\beta \cdot \Psi)(x) \\ (\alpha \cdot (\Psi + \Phi))(x) &= \alpha(\Psi_0 + \Phi_0) + \alpha(\Psi_1 + \Phi_1)x = (\alpha \cdot \Psi)(x) + (\alpha \cdot \Phi)(x) \\ ((\alpha\beta) \cdot \Psi)(x) &= (\alpha \cdot (\beta \cdot \Psi))(x) \\ (1 \cdot \Psi)(x) &= \Psi(x). \end{aligned}$$

## B.1. SUPER ESPACIO VECTORIAL

---

Para todo  $\alpha, \beta \in \Lambda_\infty$  y para todo  $\Psi(x), \Phi(x) \in \mathcal{F}$ . Análogamente, la multiplicación por la derecha, es la aplicación  $\cdot_R : \mathcal{F} \times \Lambda_\infty \rightarrow \mathcal{F}; (\Psi(x), z) \mapsto (\Psi \cdot z)(x)$  que actúa como

$$(\Psi \cdot z)(x) := \Psi_0 z + \Psi_1 z x. \quad (\text{B.4})$$

Cabe aclarar que esta multiplicación difiere de la multiplicación por la izquierda en el hecho de que no es punto a punto, i. e.,  $\Psi(x)z = \Psi_0 z + \Psi_1 z x$ . La necesidad de no elegir la multiplicación que parecerá más natural radica en que de hacerlo, la representación de los generadores del álgebra de Clifford no será, en el mejor de los casos, lineal. Esta multiplicación por la derecha satisface sin embargo, las propiedades necesarias

$$\begin{aligned} (\Psi \cdot (\alpha + \beta))(x) &= \Psi_0(\alpha + \beta) + \Psi_1(\alpha + \beta)x = (\Psi \cdot \alpha)(x) + (\Psi \cdot \beta)(x) \\ ((\Psi + \Phi) \cdot_R \alpha)(x) &= (\Psi_0 + \Phi_0)\alpha + (\Psi_1 + \Phi_1)\alpha x = (\Psi \cdot \alpha)(x) + (\Phi \cdot \alpha)(x) \\ (\Psi \cdot (\alpha\beta))(x) &= ((\Psi \cdot \alpha)\beta)(x) \\ (\Psi \cdot 1)(x) &= \Psi(x). \end{aligned}$$

La peculiaridad de esta multiplicación se hace evidente ante el hecho de que la función  $f(x) = x$  es par al emplear las multiplicaciones dadas, pero, si usamos la multiplicación de los super números, es claro que el valor de la variable en la imagen, es impar<sup>1</sup>

La relación entre ambas multiplicaciones es entonces

$$((\alpha \cdot \Psi) \cdot \beta)(x) = (\alpha \cdot (\Psi \cdot \beta))(x) := (\alpha \Psi \beta)(x) = \alpha \Psi_0 \beta + \alpha \Psi_1 \beta x. \quad (\text{B.5})$$

La parte par e impar de un supervector  $\Psi(x)$  se define como aquellos supervectores  $U(x)$  y  $V(x)$  con los que se puede escribir  $\Psi(x) = U(x) + V(x)$  tales que:

$$(a^v \cdot U)(x) = (U \cdot a^v)(x), \quad (a^v \cdot V)(x) = -(V \cdot a^v)(x). \quad (\text{B.6})$$

donde  $a^v$  es un supernúmero impar arbitrario. Es fácil resolver estas ecuaciones para cualquier supervector  $\Psi(x) = \Psi_0 + \Psi_1 x$ , al escribir sus componentes en partes pares e impares de acuerdo a la multiplicación por los super números, i. e.,  $\Psi_0 = \Psi_0^u + \Psi_0^v$  y  $\Psi_1 = \Psi_1^u + \Psi_1^v$ . Luego, tendremos

$$U(x) = \Psi_0^u + x\Psi_1^u, \quad V(x) = \Psi_0^v + x\Psi_1^v. \quad (\text{B.7})$$

---

<sup>1</sup> Se tiene en mente modificar algunas definiciones dadas por Bryce De Witt para evitar este tipo de construcciones incómodas. Un candidato a ser modificado, es la definición de dual de un super espacio vectorial. Estimamos que esto podría eventualmente subsanar estos inconvenientes.

## B.2. SUPER DUAL.

---

Es decir, en estas multiplicaciones por supernúmeros, la parte par (impar) de un supervector, corresponde a la función formada con las partes par (impar) de la componentes  $\Psi_0$  y  $\Psi_1$ . De este modo la imagen de estas funciones sea  $U(x)$  o  $V(x)$  es un supernúmero que en general no tiene paridad definida en cambio la función sí la tiene, dicho en otras palabras: la paridad de una función viene dada exclusivamente, por la paridad de acuerdo a los super números de sus componentes. Por esta razón, es que la función  $f(x) = x$  resulta una función par.

Finalmente, aunque la conjugación compleja no juega un papel activo en la construcción del super espacio de Hilbert, es ilustrativo darla a este nivel y porque será implementada en el espacio de funciones de prueba. En nuestro caso, tomaremos la conjugación con una acción igual a la conjugación de los supernúmeros pero actuando sólo sobre las componentes de la siguiente forma

$$(\Psi^*)(x) := \overline{\Psi}_0 + \overline{\Psi}_1 x. \quad (\text{B.8})$$

Vemos que satisface las condiciones

$$\begin{aligned} ((\Psi^*)^*)(x) &= (\overline{\Psi}_0 + \overline{\Psi}_1 x)^* = \overline{\overline{\Psi}_0} + \overline{\overline{\Psi}_1 x} = \Psi_0 + \Psi_1 x = \Psi(x). \\ (\Psi + \Phi)^*(x) &= \overline{(\Psi_0 + \Phi_0)} + \overline{(\Psi_1 + \Phi_1)x} = \overline{\Psi}_0 + \overline{\Psi}_1 x + \overline{\Phi}_0 + \overline{\Phi}_1 x \\ &= (\Psi^*)(x) + (\Phi^*)(x) \\ (z \cdot \Psi)^*(x) &= (z\Psi_0 + z\Psi_1 x)^* = \overline{\Psi}_0 \overline{z} + \overline{\Psi}_1 \overline{z} x = (\Psi^* \cdot \overline{z})(x) \\ (\Psi \cdot z)^*(x) &= (\Psi_0 z + \Psi_1 z x)^* = \overline{z} \overline{\Psi}_0 + \overline{z} \overline{\Psi}_1 x = (\overline{z} \cdot \Psi^*)(x) \end{aligned}$$

Es claro ver que tiene que definirse sobre las componentes para que las dos últimas propiedades puedan ser satisfechas. Pasemos ahora a estudiar el dual de una función super analítica.

### B.2 Super Dual.

Como habíamos mencionado, requerimos de la definición de super espacio dual para poder construir el super espacio de Hilbert.

El dual de un super espacio vectorial, es el conjunto  $\mathcal{F}^*$  de aplicaciones que denotamos como  $\omega : \mathcal{F} \rightarrow \Lambda_\infty; \Psi(x) \mapsto \omega(\Psi)$  tal que satisface las siguientes propiedades

$$\omega(X + Y) = \omega(X) + \omega(Y), \quad (\text{B.9})$$

$$\omega(\alpha X) = \alpha \omega(X). \quad (\text{B.10})$$

Para escribir la acción del dual, fijémonos en que los elementos de  $\mathcal{F}$  son además de funciones con caracter vectorial, una combinación de las funciones

## B.2. SUPER DUAL.

---

$e(x) = 1$  y  $f(x) = x$ , i. e.,  $\Psi(x) = \Psi_0 e(x) + \Psi_1 f(x)$ . Las funciones  $e(x)$  y  $f(x)$  constituyen una base de dimensión finita del super espacio vectorial  $\mathcal{F}$ . Digamos que un elemento arbitrario del dual, denotado como  $\omega$ , al actuar sobre estas funciones base nos conduce a los super números  $\omega(e) = \omega_0$  y  $\omega(f) = \omega_1$ . Entonces, por la relación (B.10) tendremos que la acción del mismo elemento  $\omega$ , sobre una función arbitraria de  $\mathcal{F}$  será:

$$\omega(\Psi) = \Psi_0 \omega_0 + \Psi_1 \omega_1. \quad (\text{B.11})$$

Puede verse que las relaciones (B.9) y (B.10) quedan satisfechas al emplear (B.11) a la cual llamaremos producto interno.

Nuestro interés en una descripción de funciones de onda, nos induce a escribir el dual de las funciones/super vectores empleando integrales de Berezin. Para lograr esto, tomamos los super números  $\omega(e) = \omega_0$  y  $\omega(f) = \omega_1$  y definimos la función super analítica  $\omega(x) := \omega_1^p + x\omega_0^p$ . El conjunto de todas estas funciones super analíticas que denotaremos como  $\mathcal{F}'$ , es isomorfo a  $\mathcal{F}$  y lo llamamos ‘espacio de prueba’. Dicho isomorfismo estará dado como  $\mathcal{I} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ ;  $\Psi(x) \mapsto \mathcal{I}\Psi(x) := \Psi_1^p + x\Psi_0^p$  siendo  $\Psi(x) = \Psi_0 + \Psi_1 x$ .

Uno puede extender la suma y las multiplicaciones de  $\mathcal{F}$  sobre  $\mathcal{F}'$  usando (B.11) quedando

$$(\mathcal{I}\omega + \mathcal{I}\eta)(x) = (\omega_1^p + \eta_1^p) + x(\omega_0^p + \eta_0^p), \quad (\text{B.12})$$

$$(z \cdot \mathcal{I}\omega)(x) = (z\omega_1)^p + x(z\omega_0)^p, \quad (\text{B.13})$$

$$(\mathcal{I}\omega \cdot z)(x) = (\omega_1 z)^p + x(\omega_0 z)^p, \quad (\text{B.14})$$

$$(\text{B.15})$$

pidiendo que en (B.13) y (B.14) se empleen las definiciones de multiplicación por la izquierda y por la derecha del dual dadas como

$$(z \cdot \omega)(\Psi) := \omega(\Psi \cdot z), \quad (\omega \cdot z)(\Psi) := \omega(\Psi)z. \quad (\text{B.16})$$

Al hacer esto, podemos indentificar cada elemento del espacio de prueba  $\mathcal{F}'$  con un elemento del dual  $\mathcal{F}^*$  y por ende, via  $\mathcal{I}$  con un elemento de  $\mathcal{F}$ . En otras palabras: estos tres super espacios vectoriales son isomorfos. Esto último se pone de relieve cuando escribimos el producto interno en forma de integral de Berezin

$$\omega(\Psi) = \int \Psi(x) \mathcal{I}\omega(x) dx, \quad (\text{B.17})$$

para todo  $\Psi(x) \in \mathcal{F}$  y todo  $\mathcal{I}\omega(x) \in \mathcal{F}'$ .

### B.3. SUPER ESPACIO DE HILBERT.

---

Otra forma de escribir (B.17) es modificando las funciones de prueba con el fin de poner el isomorfismo ‘dentro’ de la integral de Berezin en forma de un operador diferencial, es decir, como

$$\omega(\Psi) = \int \Psi(x) \left[ \omega(x) \left( x + \frac{\overrightarrow{d}}{dx} \right) \right] dx. \quad (\text{B.18})$$

En este caso, el espacio de prueba es simplemente  $\mathcal{F}$  con las mismas multiplicaciones y la misma operación de suma. Es importante señalar que el corchete cuadrado, indica que el operador diferencial  $x + \frac{\overrightarrow{d}}{dx}$  actúa solamente sobre la función de onda  $\omega(x)$ . Dicha acción toma la forma explícita:

$$\omega(x) \left( x + \frac{\overrightarrow{d}}{dx} \right) = \omega(x) \cdot x + \omega(x) \frac{\overrightarrow{d}}{dx} = \omega_0 x + \omega_1^p = \omega_1^p + x \omega_0^p. \quad (\text{B.19})$$

Esta última forma de escribir el producto interno dado en (B.18) será la notación con la que trabajaremos por la comodidad de tener un espacio de prueba con las mismas características que nuestro espacio vectorial  $\mathcal{F}$ . Dicho esto, recalcamos que un elemento arbitrario de dual tendrá la forma:

$$\omega(\cdot) = \int (\cdot) \left[ \omega(x) \left( x + \frac{\overrightarrow{d}}{dx} \right) \right] dx, \quad (\text{B.20})$$

con la multiplicación dada por (B.16) y la suma como

$$(\omega + \eta)(\cdot) = \omega(\cdot) + \eta(\cdot) \quad (\text{B.21})$$

Con todo esto, ya estamos listos para definir el super espacio de Hilbert. Pasemos a la siguiente sección para mostrar esto.

#### B.3 Super Espacio de Hilbert.

El super espacio de Hilbert, se construye a partir de definir una biyección entre el super espacio vectorial y su dual  $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^*; \Psi(x) \mapsto f_\Psi(\cdot)$  con particularidades que veremos más adelante. El carácter de biyección se emplea de manera inmediata escribiendo que se cumpla  $f_\Psi^{-1}(\cdot) = \Psi(x)$ . En nuestro caso, la elección que hemos hecho es que esta biyección será de la forma:

$$f_\Psi(\cdot) := \int (\cdot) \left[ (\Psi^*)(x) \left( x + \frac{\overrightarrow{d}}{dx} \right) \right] dx. \quad (\text{B.22})$$

### B.3. SUPER ESPACIO DE HILBERT.

---

siendo  $(\Psi)^*$  la conjugación compleja definida anteriormente<sup>2</sup>. Veamos que (B.22) satisface las condiciones que se pide para formar un super espacio de Hilbert.

La primera de estas condiciones, es que  $f$  ‘preserve’ la paridad de los super vectores. Esto quiere decir que si tomamos un super vector par (impar)  $\Psi \in \mathcal{F}$ , entonces  $f_\Psi$  es un super vector dual par (impar) respectivamente. Para ilustrar lo anterior, calculemos la acción de  $f_\Psi$  como producto interno sobre un elemento  $\Phi \in \mathcal{F}$ , este quedará

$$f_\Psi(\Phi) = \int \Phi(x) \left[ (\Psi^*)(x) \left( x + \frac{\overrightarrow{d}}{dx} \right) \right] dx = \Phi_0 \bar{\Psi}_0 + \Phi_1 \bar{\Psi}_1. \quad (\text{B.23})$$

Separaremos el super número resultante en su partes pares e impares. Tendremos entonces que

$$\begin{aligned} f_\Psi(\Phi) &= \Phi_0 \bar{\Psi}_0 + \Phi_1 \bar{\Psi}_1 = (\Phi_0^u + \Phi_0^v)(\bar{\Psi}_0^u + \bar{\Psi}_0^v) + (\Phi_1^u + \Phi_1^v)(\bar{\Psi}_1^u + \bar{\Psi}_1^v) \\ &= [(\Phi_0^u \bar{\Psi}_0^u + \Phi_0^v \bar{\Psi}_0^v) + (\Phi_1^u \bar{\Psi}_1^u + \Phi_1^v \bar{\Psi}_1^v)] + [(\Phi_0^u \bar{\Psi}_0^v + \Phi_0^v \bar{\Psi}_0^u) + \\ &\quad + (\Phi_1^u \bar{\Psi}_1^v + \Phi_1^v \bar{\Psi}_1^u)] \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

El primer corchete es un supernúmero par y el segundo, uno impar. Si  $\Psi$  es par, entonces  $\Psi_0^v$  y  $\Psi_1^v$  son nulos y esto coincide con las partes pares e impares del dual  $f_\Psi$  de acuerdo a la definición de parte par e impar de un elemento del dual.

La siguiente propiedad es que se cumpla

$$(z \cdot \Psi)(x) \mapsto (f_\Psi \cdot \bar{z})(\cdot), \quad (\Psi + \Phi)(x) \mapsto f_{\Psi+\Phi}(\cdot). \quad (\text{B.25})$$

Puede verse que la definición de multiplicación por la derecha sobre el dual, conduce a  $(f_\Psi \cdot \bar{z})(\cdot) = [f_\Psi(\cdot)]\bar{z} = [(\cdot)\bar{\Psi}_0 + (\cdot)\bar{\Psi}_1]\bar{z} = (\cdot)\bar{z}\bar{\Psi}_0 + (\cdot)\bar{z}\bar{\Psi}_1 = f_{z \cdot \Psi}$  y la suma se demuestra fácilmente.

La tercera propiedad pide que se cumpla

$$f_\Psi(\Phi) = \overline{f_\Phi(\Psi)}, \quad (\text{B.26})$$

lo cual es evidentemente satisfecho. De hecho, la construcción que hemos realizado, ha sido inspirada en esta expresión que encontramos en los trabajos de Floreanini y Jackiw [46]. Nótese que  $f_\Psi(\Psi)$  es siempre un supernúmero real.

---

<sup>2</sup> Es importante destacar que esta conjugación NO está definida sobre los elementos de  $\mathcal{F}$ , sino sobre los del espacio de ‘prueba’ con los que se construyen los elementos del dual.

### B.3. SUPER ESPACIO DE HILBERT.

---

La cuarta y última condición que debe cumplir  $f$  es que el cuerpo de  $f_\Psi(\Psi)$  sea positivo si y solo si el cuerpo de  $\Psi(x)$  es no nulo. El cuerpo de  $\Psi(x)$  es precisamente el cuerpo de sus componentes con lo cual, también esta última condición queda satisfecha por la biyección  $f$  que hemos elegido. De esta manera, el super espacio de Hilbert será el par  $(\mathcal{F}, f)$ .

Los elementos de  $\mathcal{F}$  deberán escribirse como super vectores abstractos en notación de Bra haciendo la identificación

$$\Psi(x) \mapsto \langle \Psi | = \int \Psi(x) dx \langle x |. \quad (\text{B.27})$$

En esta notación de los elementos del dual, la multiplicación y la suma se extiende a la multiplicación y la suma sobre las funciones de onda en el argumento de la integral de Berezin.

Los elementos del dual, via la biyección  $f$  serán consecuentemente super vectores abstractos en notación de 'Ket' de la forma

$$f_\Psi \mapsto |f_\Psi \rangle = \int |x \rangle \left[ (\Psi^*)(x) \left( x + \frac{\overleftarrow{d}}{dx} \right) \right] dx \quad (\text{B.28})$$

y la multiplicación y la suma se extienden de la misma manera que en  $\mathcal{F}$ . De esta forma, la acción del dual sobre un vector en notación de Bra-Kets quedará como

$$\langle \Phi | f_\Psi \rangle := f_\Psi(\Phi). \quad (\text{B.29})$$

Esta forma de actuar el dual parece bastante artificial pero si se observa detenidamente, puede verse que sugiere que el dual 'actúa por la derecha sobre los super vectores'. A diferencia de la notación usual donde el dual 'actuaba por la izquierda'.

Puede verse que el producto interno se recupera haciendo  $\langle x | x' \rangle = x' - x$  de modo que queda

$$\begin{aligned} \langle \Phi | f_\Psi \rangle &= \int \Phi(x) dx \langle x | \cdot \int |x' \rangle \left[ (\Psi^*)(x') \left( x' + \frac{\overleftarrow{d}}{dx'} \right) \right] dx' \\ &= \int \Phi(x) dx \int (x' - x) \left[ (\Psi^*)(x') \left( x' + \frac{\overleftarrow{d}}{dx'} \right) \right] dx' \\ &= \int \Phi(x) dx \left\{ \int x' \left[ (\Psi^*)(x') \left( x' + \frac{\overleftarrow{d}}{dx'} \right) \right] dx' - \int x \left[ (\Psi^*)(x') \left( x' + \frac{\overleftarrow{d}}{dx'} \right) \right] dx' \right\} \\ &= \int \Phi(x) dx \left[ \int x' F(x') dx' - \int x F(x') dx' \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{con } F(x') &= \left[ (\Psi^*)(x') \left( x' + \overleftarrow{\frac{d}{dx'}} \right) \right] = F_0 + F_1 x'. \\
 \langle \Phi | f_\Psi \rangle &= \int \Phi(x) dx \left[ \int x' F_0 dx' - \int x F_1 x' dx' \right], \\
 &= \int \Phi(x) dx \left[ F_0^p \int x' dx' - x F_1 \int x' dx' \right] \\
 &= \int \Phi(x) dx [F_0^p - x F_1] = \int \Phi(x) [dx F_0^p - dx x F_1] \\
 &= \int \Phi(x) [F_0 dx + F_1 x dx] = \int \Phi(x) [F_0 + F_1 x] dx \\
 &= \int \Phi(x) F(x) dx = \int \Phi(x) \left[ (\Psi^*)(x) \left( x + \overleftarrow{\frac{d}{dx}} \right) \right] dx \\
 &= f_\Psi(\Phi).
 \end{aligned}$$

Es muy importante señalar que los cálculos realizados dentro la integral emplean la multiplicación de los super números desde el momento en que se escribe alguno de sus elementos en el desarrollo en componentes. Por ejemplo, en la segunda línea, donde emerge la función ‘delta de Dirac’

$$\delta(x, x') = x' - x = \langle x | x' \rangle, \quad (\text{B.30})$$

debemos considerar lo siguiente. 1ro) Que esta función, al tener dos argumentos, se puede interpretar como una función sobre  $x$  o sobre  $x'$ . En el primer caso, su componente ‘cero’ será  $\delta_0 = x'$  y su componente ‘uno’ será  $\delta_1 = -1$ . Si en cambio, la consideramos como una función de argumento  $x'$ , entonces  $\delta_0 = -x$  y  $\delta_1 = 1$ . 2) Dentro de la integral, el producto  $\delta(x, x')F(x')$  ó  $G(x)\delta(x, x')$  NO supone en lo absoluto la multiplicación definida sobre los super espacios vectoriales. Es en cualquiera de los casos, la multiplicación de funciones definida punto a punto.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] T. Thiemann, - *Modern canonical quantum general relativity*. (Cambridge University Press, 2007). A. Ashtekar, J. Lewandowski, D. Marolf, J. Mourao and T. Thiemann, “Quantization of diffeomorphism invariant theories of connections with local degrees of freedom,” *J. Math. Phys.* **36**, 6456 (1995) [arXiv:gr-qc/9504018]. C. Rovelli, - *Quantum Gravity*. (Draft version, december 30, 2003).
- [2] H. Nicolai, K. Peeters and M. Zamaklar, “Loop quantum gravity: An Outside view,” *Class. Quant. Grav.* **22**, R193 (2005) [hep-th/0501114]. T. Thiemann, “Loop Quantum Gravity: An Inside View,” *Lect. Notes Phys.* **721**, 185 (2007) [hep-th/0608210].
- [3] A. Ashtekar, S. Fairhurst and J. L. Willis, “Quantum gravity, shadow states, and quantum mechanics,” *Class. Quant. Grav.* **20**, 1031 (2003) [gr-qc/0207106].
- [4] J. M. Velhinho, “The Quantum configuration space of loop quantum cosmology,” *Class. Quant. Grav.* **24**, 3745 (2007) [arXiv:0704.2397 [gr-qc]].
- [5] H. Halvorson, “Complementarity of representations in quantum mechanics”. *Studies in History and Philosophy of Modern Physics* **35**, 45-56 (2004).
- [6] A. Corichi, T. Vukasinac and J. A. Zapata, “Polymer Quantum Mechanics and its Continuum Limit,” *Phys. Rev. D* **76**, 044016 (2007) arXiv:0704.0007 [gr-qc].
- [7] G. M. Hossain, V. Husain and S. S. Seahra, “The Propagator in polymer quantum field theory,” *Phys. Rev. D* **82**, 124032 (2010) arXiv:1007.5500 [gr-qc]
- [8] S. S. Seahra, I. A. Brown, G. M. Hossain and V. Husain, “Primordial polymer perturbations”. *Journal of cosmology and Astroparticle Physics*, 041, 1475 (2012)

- [9] A. A. García-Chung and H. A. Morales-Técotl, “On causality in polymer scalar field theory”. AIP Conference Proceedings 1396 pp. 104-108 (2011) doi: 10.1063/1.3647531.
- [10] A. A. García-Chung and H. A. Morales-Técotl, “What are the mechanical degrees of freedom of the Dirac field?”. AIP Conference Proceedings 1473 pp. 163-167 (2012) doi: 10.1063/1.4748549.
- [11] A. A. García-Chung, H. A. Morales-Técotl and J. D. Reyes, “Towards polymer quantum mechanics for fermionic systems”. AIP Conference Proceedings 1548 pp. 161-166 (2013) doi: 10.1063/1.4817037.
- [12] A. A. García-Chung and H. A. Morales-Técotl, “Polymer Dirac field propagator: A model”. Phys. Rev. D, **89**, 6, (2014)
- [13] S. Weinberg, - *The Quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations*, (Cambridge, UK: Univ. Pr. 1995) 609 p
- [14] W. Pauli, “Über den Zusammenhang des Abschlusses der Elektronengruppen im Atom mit der Komplexstruktur der Spektren,” Z. Phys. **31**, 1, pp 765 (1925).
- [15] <http://www.lorentz.leidenuniv.nl/history/spin/goudsmit.html>
- [16] G. E. Uhlenbeck and S. Goudsmit, “Ersetzung der Hypothese vom unmechanischen Zwang durch eine Forderung bezüglich des inneren Verhaltens jedes einzelnen Elektrons.” *Die Naturwissenschaften* **47**, 953 (1925).
- [17] C. G. Darwin, “The electron as a vector wave,” Nature **119**, 282 (1927).  
C. G. Darwin, “The Wave Equations of the Electron.” *Proc. Roy. Soc. A***118**, 654 (1928)
- [18] P. A. M. Dirac, “The Quantum theory of electron,” Proc. Roy. Soc. Lond. A **117** (1928) 610.
- [19] P. A. M. Dirac, “The Quantum theory of electron. 2.,” Proc. Roy. Soc. Lond. A **118**, 351 (1928).
- [20] P. A. M. Dirac, “A Theory of Electrons and Protons,” Proc. Roy. Soc. Lond. A **126**, 360 (1930).
- [21] M. Born, W. Heisenberg and P. Jordan, “Zur Quantenmechanik II”, Z. f. Phys. **35**, 557 (1925) (traducción al inglés: Sources of Quantum Mechanics, Northolland Publishing Company, 1967)

- [22] P. Jordan and E. Wigner, *Z. f. Phys.* **47**, 631 (1928) (traducción al inglés: Selected papers on Quantum Electrodynamics)
- [23] M. Fierz, *Helv. Phys. Acta* **12**, (1939); W. Pauli, *Phys. Rev.* **58**, 716 (1940); W. Pauli and F. J. Belinfante, *Physica* **7**, 177 (1940)
- [24] Abdus Salam and J. Strathdee, “Super-Gauge Transformations.” ICTP, Trieste preprint IC/74/11. *Nucl. Phys. B* **76**, 477-482 (1974).
- [25] V. S. Varadarajan, - *Supersymmetry for mathematicians: an Introduction*. (Courant Lectures Notes in Mathematics, AMS, 2000)
- [26] A. Einstein, “Die Feldgleichungen der Gravitation,” Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte, 1915 (part 2), 844-847. (traducción al inglés: The Field equations of Gravitation, wikisource)
- [27] A. S. Eddington, - *Report on the Relativity Theory of Gravitation*, (London Fleetway Press, LTD 1920).
- [28] C. J. Isham, “Conceptual and Geometrical problems in Quantum Gravity.” *Lecturas presentadas en la Escuela de Invierno de Schladming*, (1991). “New perspectives in canonical gravity,” *BIBLIOPOLIS*, edizioni di filosofia e scienze, Napoli, 1988. C. Callender and N. Huggett, “Why Quantize Gravity (or any other field for that matter)?,” *Philosophy of Science*, **68** (Proceedings) pp. S382-S394.
- [29] G. Brightwell and R. Gregory, “The Structure of random discrete spacetime,” *Phys. Rev. Lett.* **66**, 260 (1991). F. Dowker, “Causal sets as discrete spacetime,” *Contemp. Phys.* **47**, 1 (2006). R. Loll, “Discrete Lorentzian quantum gravity,” *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **94**, 96 (2001) [hep-th/0011194]. J. Ambjorn, J. Jurkiewicz and R. Loll, “Reconstructing the universe,” *Phys. Rev. D* **72**, 064014 (2005) [hep-th/0505154].
- [30] A. Ashtekar, J. Baez, A. Corichi and K. Krasnov, “Quantum geometry and black hole entropy,” *Phys. Rev. Lett.* **80**, 904 (1998) [gr-qc/9710007].
- [31] H. A. Morales-Tecotl and C. Rovelli, “Fermions in quantum gravity,” *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3642 (1994) [gr-qc/9401011]. J. C. Baez and K. V. Krasnov, “Quantization of diffeomorphism invariant theories with fermions,” *J. Math. Phys.* **39**, 1251 (1998) [hep-th/9703112]. T. Thiemann, “Kinematical Hilbert spaces for Fermionic and Higgs quantum field theories,” *Class. Quant. Grav.* **15**, 1487 (1998) [gr-qc/9705021].

- [32] M. H. Stone, “Linear transformations in Hilbert space (I, II, III).”, Proc. N. A. S. and J. von Neumann, Göttinger Nachrichten, 1927. J. von Neumann Mathematische Annalen, **102** (1929). J. Rosenberg, “A Selective History of the Stone-von Neumann Theorem,” CONTEMPORARY MATHEMATICS, AMS Special Session on Operator Algebras, Quantization and Noncommutative Geometry: A Centennial Celebration Honoring John von Neumann and Marshall H. Stone, January 15-16, 2003. Baltimore, Maryland.
- [33] A. Corichi, T. Vukasinac and J. A. Zapata, “Hamiltonian and physical Hilbert space in polymer quantum mechanics,” Class. Quant. Grav. **24**, 1495 (2007) [gr-qc/0610072].
- [34] E. Flores-González, H. A. Morales-Técotl and J. D. Reyes, “Propagators in polymer quantum mechanics”, Annals of Physics, Volume 336, September 2013, Pages 394-412. arXiv:1302.1906 [math-ph].
- [35] W. Greiner and J. Reinhardt, - *Field Quantization*, (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1996).
- [36] M. Peskin and D. Schroeder - *An introduction to quantum field theory*. (Addison-Wesley Publishing Company, 1995)
- [37] H. Bohr, - *Almost Periodic Functions*, (AMS Chelsea Publishing, 1947)
- [38] C. Corduneanu - *Almost periodic functions*. (AMS Chelsea Publishing, 1999)
- [39] M. Abramowitz and I. A. Stegun, - *Handbook of Mathematical Functions*, (Dover, New York, 1972)
- [40] J. Polchinski, - *String Theory: An Introduction to the Bosonic String*, Vol I. (Cambridge University Press, 1998).
- [41] B. S. DeWitt, - *Supermanifolds*, (Cambridge University Press, 1992).
- [42] M. Henneaux and C. Teitelboim, - *Quantization of Gauge Systems*, (Princeton University Press, 1992)
- [43] P. A. M. Dirac, - *Lectures on Quantum Mechanics*. (Courier Dover Publications, 2001)
- [44] D. M. Gitman and I. V. Tyutin, - *Quantization of Fields with Constraints*, (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1990).

- [45] M. Henneaux and C. Teitelboim, “Relativistic Quantum Mechanics of Supersymmetric Particles,” *Annals Phys.* **143**, 127 (1982).
- [46] R. Floreanini and R. Jackiw, “Functional Representation For Fermionic Quantum Fields”, *Phys. Rev. D* **37**, 2206 (1988).
- [47] O. Bratteli and D. W. Robinson, - *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics: Equilibrium States. Models in Quantum Statistical Mechanics* (Springer, v. 2, 1997)
- [48] F. A. Berezin, - *The Method of Second Quantization*, (Academic Press New York and London, 1966)
- [49] A. Frydryszak and L. Jakób czyk, “Generalized Gelfand - Naimark - Segal construction for supersymmetric quantum mechanics”, *Letters in Mathematical Physics* **16** (1988) 101-107.
- [50] R. M. Wald - *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*. (The University of Chicago Press, 1994)
- [51] A. Rogers, - *Supermanifolds, theory and applications*, (World Scientific, 2007)
- [52] A. Ashtekar, M. Campiglia and A. Henderson, “Casting Loop Quantum Cosmology in the Spin Foam Paradigm,” *Class. Quant. Grav.* **27**, 135020 (2010) [arXiv:1001.5147 [gr-qc]].



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

# ACTA DE DISERTACIÓN PÚBLICA

No. 00036

Matricula: 209180168

UN MODELO PARA EL PROPAGADOR  
POLIMERIC DEL CAMPO DE  
DIRAC LIBRE

En México, D.F., se presentaron a las 11:00 horas del día 14 del mes de julio del año 2014 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

- DR. ECKEHARD ERWIN WILLI MIELKE
- DR. LUIS FERNANDO URRUTIA RIOS
- DR. ROMAN LINARES ROMERO
- DR. JOSE DAVID VERGARA OLIVER
- DR. HUGO AURELIO MORALES TECOTL

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron a la presentación de la Disertación Pública cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

DOCTOR EN CIENCIAS (FISICA)

DE: ANGEL ALEJANDRO GARCIA CHUNG



ANGEL ALEJANDRO GARCIA CHUNG  
ALUMNO

y de acuerdo con el artículo 78 fracción IV del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

*Aprobar*

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

REVISÓ

*[Signature]*  
LIC. JULIO CESAR DE LARA ISASSI  
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

*[Signature]*  
DR. JOSE GILBERTO CORDOBA HERRERA

PRESIDENTE

*[Signature]*  
DR. ECKEHARD ERWIN WILLI MIELKE

VOCAL

*[Signature]*  
DR. LUIS FERNANDO URRUTIA RIOS

VOCAL

*Román Linares Romero*  
DR. ROMAN LINARES ROMERO

VOCAL

*[Signature]*  
DR. JOSE DAVID VERGARA OLIVER

SECRETARIO

*[Signature]*  
DR. HUGO AURELIO MORALES TECOTL



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

CERTIFICADO DE ESTUDIOS

MATRICULA

209180168

FOLIO

20065396

HOJA

1 / 2



LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA CERTIFICA QUE:

ANGEL ALEJANDRO GARCIA CHUNG

DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE QUE A CONTINUACION SE ANOTA Y QUE CUBREN TOTALMENTE

A NIVEL DOCTORADO EN CIENCIAS (FISICA)

CON AREA DE CONCENTRACION EN GRAVITACION Y ASTROFISICA

DIVISION DE CBI DE LA UNIDAD IZTAPALAPA DE ACUERDO CON LA INFORMACION CONTENIDA EN SUS ARCHIVOS

ESCOLARES.

HA ACREDITADO LAS UNIDADES  
LOS ESTUDIOS SUPERIORES  
DE LA

UNIDAD DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE

No.	CLAVE	TIPO EV.	CALIFICACION	VALOR EN CREDITOS	TRIMESTRE	UNIDAD
1	2116083	GLO.	MB MUY BIEN	20	09I	IZT
2	2116035	GLO.	MB MUY BIEN	12	09P	IZT
3	2116040	GLO.	MB MUY BIEN	9	09P	IZT
4	2116084	GLO.	B BIEN	20	09P	IZT
5	2116036	GLO.	RE REVALIDACION	12	09O	
6	2116037	GLO.	RE REVALIDACION	12	09O	
7	2116038	GLO.	RE REVALIDACION	12	09O	
8	2116041	GLO.	RE REVALIDACION	9	09O	
9	2116043	GLO.	RE REVALIDACION	9	09O	
10	2116042	GLO.	MB MUY BIEN	9	09O	IZT
11	2116085	GLO.	MB MUY BIEN	20	09O	IZT
12	2119001	GLO.	MB MUY BIEN	30	100	IZT
13	2119002	GLO.	MB MUY BIEN	30	100	IZT
14	2119003	GLO.	MB MUY BIEN	30	11P	IZT
15	2119004	GLO.	MB MUY BIEN	30	11O	IZT
16	2119005	GLO.	MB MUY BIEN	30	12I	IZT
17	2119006	GLO.	MB MUY BIEN	30	12P	IZT
		ACTIVIDADES ACADEMICAS: DISERTACION PUBLICA EXAMEN PREDOCTORAL		180 0		

ESTE DOCUMENTO NO TIENE VALIDEZ SI PRESENTA TACHADURAS O ENMENDADURAS

CLAVE UAM: 090008 CLAVE CARRERA: 104601

SE EXTIENDE EL PRESENTE CERTIFICADO EN MEXICO, D.F.

EL DIA 22 DE JULIO DE 2014

DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

LIC. JULIO CESAR DE LARA ISASSI

FIRMA



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

CERTIFICADO DE ESTUDIOS

MATRICULA

209180168

FOLIO

20065396

HOJA

2 / 2

LA UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA CERTIFICA QUE: ANGEL ALEJANDRO GARCIA CHUNG DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE QUE A CONTINUACION SE ANOTA Y QUE CUBREN TOTALMENTE A NIVEL DOCTORADO EN CIENCIAS (FISICA) EN CIENCIAS (FISICA) CON AREA DE CONCENTRACION EN GRAVITACION Y ASTROFISICA DE LA DIVISION DE CBI DE LA UNIDAD IZTAPALAPA DE ACUERDO CON LA INFORMACION CONTENIDA EN SUS ARCHIVOS ESCOLARES.

HA ACREDITADO LAS UNIDADES LOS ESTUDIOS SUPERIORES DE LA

Table with columns: No., CLAVE, UNIDAD DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE, TIPO EV., CALIFICACION, VALOR EN CREDITOS, TRIMESTRE, UNIDAD. Row 1: UNIDAD DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE, TOTAL DE CREDITOS, TOTAL DE CREDITOS, 504, UNIDAD.

No. CLAVE

UNIDAD DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE

TIPO EV.

CALIFICACION

VALOR EN CREDITOS

TRIMESTRE UNIDAD

TOTAL DE CREDITOS: QUINIENTOS CUATRO

NOTA : ESTE CERTIFICADO AMPARA 504 (QUINIENTOS CUATRO) CREDITOS QUE CUBREN TOTALMENTE EL PLAN DE ESTUDIOS RESPECTIVO.

PROMEDIO GENERAL NUMERICO: 9.83 (NUEVE PUNTO OCHENTA Y TRES)

CLAVE UAM: 090008 CLAVE CARRERA: 104601

SE EXTIENDE EL PRESENTE CERTIFICADO EN MEXICO, D.F.

EL DIA 22 DE JULIO DE 2014

DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

LIC. JULIO CÉSAR DE LARA ISASSI FIRMA

ESTE DOCUMENTO NO TIENE VALIDEZ SI PRESENTA TACHADURAS O ENMENDADURAS