UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Casa abierta al tiempo

DIVISIÓN DE CIENCIAS SOCIALES Y HUMANIDADES
POSGRADO EN HUMANIDADES
LÍNEA EN FILOSOFÍA DE LAS CIENCIAS Y DEL LENGUAJE

SOBRE LA DEFINICION EN FREGE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MAESTRO EN HUMANIDADES

Presenta:

JOSÉ LUIS SANTOS GONZÁLEZ

Director:
Dr. JOSÉ JORGE MAX FERNÁNDEZ DE CASTRO TAPIA

Sinodales:
Dr. SILVIO JOSÉ MOTA PINTO
Dr. VÍCTOR CANTERO FLORES

México, D. F. **ENERO 2015**

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Casa abierta al tiempo

DIVISIÓN DE CIENCIAS SOCIALES Y HUMANIDADES
POSGRADO EN HUMANIDADES
LÍNEA EN FILOSOFÍA DE LAS CIENCIAS Y DEL LENGUAJE

SOBRE LA DEFINICION EN FREGE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MAESTRO EN HUMANIDADES

Presenta:

JOSÉ LUIS SANTOS GONZÁLEZ

J Fernández de C

Director:
Dr. JOSÉ JORGE MAX FERNÁNDEZ DE CASTRO TAPIA

Sinodales:
Dr. SILVIO JOSÉ MOTA PINTO
Dr. VÍCTOR CANTERO FLORES

México, D. F. ENERO 2015

ÍNDICE

Introducción

En este trabajo se analizará lo referente a la construcción y problemas acerca de la noción de definición en Frege, a lo largo de sus obras más significativas al respecto del tema: *Begriffsschrift* (1879), *Die Grundlagen der Arithmetik* (1884) y *Grundgesetze der Arithmetik* (1903). Con ello se muestran los problemas de su filosofía de las matemáticas, por el tratamiento que le da Frege a la definición de número, y en la disciplina instaurada por él, la filosofía del lenguaje.

Las definiciones que han sido tratadas a lo largo de este trabajo refieren a dos tipos de definiciones: las definiciones formales o estipulativas, caracterizadas en *Begriffsschrift* y las definiciones informales o fructíferas, caracterizadas en *Grundlagen*. Y la síntesis de ambas definiciones en *Grundgesetze*.

El propósito es mostrar que Frege estaba sumamente interesado en las definiciones formales que se dan en la construcción de su *lingua characteristica* sin ir más allá de ese instrumento, como se muestra en *Begriffsschrift*; pero, al atender la definición de número, ve la imposibilidad de utilizar aquellas definiciones para llegar a la naturaleza de los números, por lo que recurre a la definición informal, apelando a las distinciones de los juicios kantianos para arremeter contra todas las definiciones anteriores acerca del número, considerándolas superfluas por no tener la característica de *fertilidad*, porque no "producen" nuevas verdades. Sin embargo, como se hará notar, esa definición filosófica de número natural, la transforma en *Grundgesetze* en un lenguaje de su sistema de *Begriffsschrift*, retornando nuevamente a las definiciones formales.

En dicho proceso se analizan, en ambas definiciones, la noción de analítico y de sintético con sus respectivas variaciones que en el trabajo quedan plasmadas. Puede ser que, muy en el fondo, los dos tipos de definiciones no se contraponen si atendemos la caracterización que hace Frege de los juicios kantianos o el propósito específico de su introducción de cada definición en su respectiva obra y su síntesis en *Grundgesetze*; o son distintas si atendemos las definiciones formales son propias de un lenguaje objeto y las definiciones informales parecen estar en un metalenguaje que pretende aclarar el significado de algo, en este caso del número, donde se contraponen los principios de cada definición al pretender vincularlos tal cual, generando una disensión: la paradoja del análisis.

Se analizará sin dar una solución a la paradoja del análisis se genera al pretender vincular o contraponer los principios de *eliminabilidad* y *fertilidad* propios de las definiciones formales e informales, respectivamente. Frege no atendió de manera contundente tal paradoja porque no veía como antagónicas a los dos tipos de definiciones o en su defecto era tanto su empeño por llevar a cabo su proyecto *logicista* que desatendió problemas, que hasta la fecha, son motivo de preocupación: la definición, los indefinibles y el proceso de análisis -con una base ambigua acerca de las distinciones entre analítico/sintético y a priori/ a posteriori.

Considerando lo dicho hasta el momento, es menester mostrar como Frege "reconcilia" en *Grundgesetze* ambos tipos de definición, trasformando la definición filosófica de número natural en un lenguaje de su sistema de *Begriffsschrift*, sin pretender solucionar con ello la paradoja del análisis, sin embargo, muestra su interés específico por las defunciones formales.

1. DEFINICIÓN FORMAL

Sobre *Begriffsschrift*[1]

Introducción:

Siguiendo el orden de aparición de las obras de Frege, para tratar el tema de la definición, se utiliza en primer lugar *Begriffsschrift*. Es importante esta obra porque marca el inicio de la presentación de su sistema formal, de su sistema de signos y la introducción de los cuantificadores, donde la distinción aristotélica entre sujeto y predicado no tiene cabida.

En esta sección analizaremos las definiciones formales utilizadas en un sistema formal como *Begriffsschrift*, en una *lingua characteristica*, donde cada objeto se representa mediante un signo formal preciso, sin ambigüedades.

En este contexto una definición que aparece dentro de una derivación del sistema fregeano, en *Begriffsschrift*, es siempre una estipulación de convenciones de notación: un nuevo símbolo de notación se va a utilizar como forma abreviada de un complejo de signos ya usado y *entendido* previamente. Mostraremos, partiendo de la fórmula 69, los momentos de construcción de la definición formal, las peculiaridades que ella envuelve y los elementos de la misma: el signo de juicio, el signo de igualdad y el signo doble de juicio.

El fin es mostrar la forma que deben tener las definiciones siempre como una relación de *igualdad* entre un conjunto de signos y su caracterizaciones dualidad que la vincula con los juicios kantianos que reformula Frege para sus propios fines.

Seguiremos con el análisis del principio de *eliminabilidad*, propio de las definiciones formales el cual ayudará a distinguir el principio de *fertilidad* de las definiciones informales de la segundo sección.

Al término del análisis del principio de la definición formal, se construirá la aplicación de la definición formal en la propiedad de *hereditariedad*. Acto seguido se describirán las características que deben tener las definiciones formales, para concluir con las consecuencias que conlleva *Begriffsschrift.*

1.1 Elementos de la definición formal

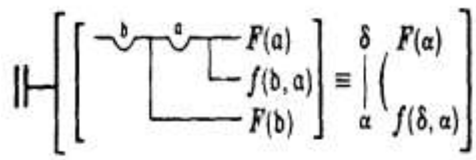
Las definiciones en Frege se clasifican en:

1. Definiciones *formales*: son introducidas de manera precisa para ser utilizadas exclusivamente dentro de un sistema formal como *Begriffsschrift*.

[1] Para este apartado se utiliza especialmente *Begriffsschrift* (1879)

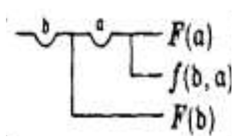
2. Definiciones *informales*: son utilizadas en su totalidad en *Grundlagen* y no en un sistema formal porque su pretensión es explicar un concepto mediante lo que significa.

Atendiendo las definiciones formales, observamos que la forma de cualquier definición en *Begriffsschrift* es "‖− (A≡B)", siendo la fórmula 69 de la sección III la que presenta las características propias de dicha forma, porque indica una relación de igualdad mediante la introducción de abreviaturas por definición:

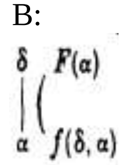


Se realiza la introducción de un conjunto de signos en *B* para abreviar los signos más amplios de *A*, mediante una estipulación arbitraria, siendo:

A:



B:



Frege menciona que la distinción y característica de esta fórmula, con respecto a las anteriores, es que en ella se introduce por primera vez en el sistema de *Begriffsschrift*, una fórmula con la forma de una definición "‖− (A≡B)": "Esta proposición se distingue de las consideradas hasta ahora, en que los símbolos que aparecen en ella no han sido definidos previamente; ella misma da esta definición" (Frege, Conceptografia 1972, 39).

La fórmula 69 es un ejemplo característico de una definición formal (por estipulación), donde se distinguen los símbolos que pueden ser representados de forma distinta (las letras y los signos de puntuación), como los nuevos signos introducidos por primera vez, y aquellos que tienen un *sentido* totalmente determinado y que son constantes al relacionar las expresiones de un lado con las del otro:

1) La barra doble de juicio: ‖−
2) El signo de igualdad: ≡

1.2 El signo de juicio: |−

La comprensión de la función dual del signo de la barra doble de juicio "‖−" está en relación con la distinción adecuada de la barra simple de juicio "|−". Esta última indica el contenido del juicio[2], contenido judicable necesariamente.

[2] En *Der Gedanke*, Frege distingue claramente lo que es un juicio diferenciándolo, en principio considera que en una oración o sentencia asertiva se debe distinguir, la captación de un pensamiento (el pensar); que es reconocer la verdad de

Para entender adecuadamente la necesidad de que los juicios deban tener contenido judicable[3] es ilustrativo relacionarlos con los enunciados, en la versión contemporánea del sistema fregeano: la lógica de enunciados. Los enunciados que considera la lógica para su estudio son aquellos que tienen la característica de ser verdaderos o falsos.

En la versión contemporánea del sistema Fregeano los enunciados son tratados como categorías lógicas fundamentales, *indefinibles* y no están sujetos a un proceso de análisis lógico (inanalizables). Forman la categoría semántica básica: son simples y no se pueden descomponer más, no están sujetos al análisis ni a la distinción aristotélica sujeto-predicado.

Considerando que las expresiones de tipo literario, poético o fantástico, así como, los nombres o términos tienen contenido no *judicable*, por ejemplo:

1) “El hombre de tres cabezas”;
2) “La mesa”;
3) “Pedro TRB”;
4) “El destello de la inmensidad de tus ojos”, y
5) “El unicornio azul”.

Por ello los siguientes ejemplos tienen contenido judicable:

1) “El símbolo del oxígeno es ‘O’”;
2) “4X4=16”;
3) “El punto de ebullición del agua es de 100° C a nivel del mar”;
4) “2+2=4”, y
5) “Las especies evolucionan por selección natural”.

Además no sólo los juicios de tipo científico tienen contenido judicable, sino cualquier otro donde tiene sentido preguntarse por su verdad o falsedad, como en los siguientes casos:

1) “El perro es blanco”;
2) “El pizarrón es verde”;
3) “El gato entró a la casa”;
4) “Sergio tiene fiebre”, y
5) “Pedro ganó la competencia”.

Al ser una lógica bivalente, el valor de verdad de cada uno de estos enunciados tiene sólo dos posibilidades: ser verdadero o ser falso. El contenido *judicable* no se encontrará en expresiones de carácter estilístico, retórico, poético, etcétera. Al sistema de *Begriffsschrift* le interesan aquellos enunciados donde entra en consideración la verdad o falsedad.

---

un pensamiento (el juzgar); y, la manifestación del juicio (el aseverar). Pensar y juzgar son actos internos, aseverar es un acto externo.

[3] Este contenido *judicable* posteriormente es la terminología fregeana se denominara pensamiento (*Gedanke*) y habitualmente en lógica se le conoce como proposición

Si se omite la barra vertical (*barra del juicio)* en el extremo izquierdo de la horizontal (*barra del contenido)*, esto transforma el juicio en una *mera combinación de ideas*[4] acerca de lo cual no se expresa el reconocimiento de la verdad o falsedad en ella. Lo que está a la derecha de la barra de contenido (*judicable* o no *judicable*) no necesariamente se convertirá en juicio: es necesario emplear exclusivamente la barra del juicio en contenido *judicable*.

Veamos los siguientes ejemplos:

1. "William derroto a Harold"
2. "Harold fue derrotado por William"

Los ejemplos anteriores son juicios que tienen claramente contenido *judicable*, sólo se distinguen en su escritura y su *sentido* prevaleciendo en ambos el mismo contenido *judicable*: lo objetivo y lo lógico que está en contraposición a lo subjetivo o psicológico, como en el caso de los ejemplos que no son enunciados.

Por ello el contenido judicable[5] es aquel contenido que sigue a la barra horizontal, que puede ser juzgado como verdadero o falso según sea el caso. Lo que define al contenido judicable es solo aquello que es relevante en una derivación que permite inferir consecuencias. Es así que, el contenido judicable tiene una estrecha relación con la noción de pensamiento, como el *sentido* de un enunciado, que conectaría con su referencia (valor de verdad) y el contenido no judicable es relativo a nombres propios o expresiones incompletas y no puede utilizarse en ellos la barra del contenido.

Es irrelevante e inadecuada la distinción de las propiedades que pretendió Aristóteles y la caracterización tradicional de los juicios: el sujeto (la persona que realiza la acción), el predicado (la acción que realiza el sujeto), la copula (que une al sujeto con el predicado), la cantidad (particular o general) y la cualidad (afirmación o negación).

Es indiferente para el contendido judicable de un enunciado su forma o estilo gramatical, es decir, la posición activa o pasiva del sujeto en una oración. Se sustituyen los conceptos de la lógica tradicional de sujeto y predicado por los de argumento y función, es decir, argumentos de contenidos judicables para la función correspondiente:

> En especial, creo que la sustitución de los conceptos de *sujeto* y *predicado* por los de *argumento* y *función*, se acreditará con el tiempo. Es fácil ver cómo la aprehensión de un contenido como función de un argumento surte el efecto de una aprehensión formadora de conceptos (Frege, Conceptografia 1972, 4).

Para ejemplificar la eliminación de la relación sujeto-predica tradicional que se encuentra en la lógica aristotélica, tomemos el mismo ejemplo:

---

[4] Frege cuando introduce el símbolo de juicio "|–" y habla de ideas no hace la distinción clara entre lógica y psicología, sin embargo, el juicio es la unidad básica de significación y conocimiento contrariamente a la lógica tradicional aristotélica que la situá en el concepto.

[5] El contenido judicable es previo a la diferenciación sentido/referencia, pero está relacionado con ella: se trata de un contenido que es importante con respecto a la verdad, la cual posteriormente será la referencia del enunciado.

1. “William derroto a Harold”
2. “Harold fue derrotado por William”

En el primer ejemplo se puede observar que el sujeto del enunciado es “William” y el predicado es “derrotó a Harold” (analizado como verbo activo y objeto y en el segundo caso el sujeto es “Harold” y el predicado “fue derrotado por Williams” (analizado como verbo pasivo y agente). Esta caracterización es importante si se atiende su estructura gramatical, sin embargo, esas diferencias son irrelevantes en lo que de ellas se sigue lógicamente: todo lo que lógicamente se sigue de la primera, se sigue de la segunda y viceversa. Estos ejemplos difieren de su estructura gramatical, pero, no de su contenido judicable. En el §3 de *Begriffsschrift* Frege manifiesta rotundamente renunciar a expresar todo aquello que carezca de significado para la secuencia de inferencias:

> En mi modo de representar un juicio, no *tiene lugar* una distinción entre *sujeto* y *predicado.* Para justificar esto, advierto que los contenidos de dos juicios pueden ser distintos de doble manera: primero, que las consecuencias que se puedan derivar de uno, en combinación con otros juicios determinados, se sigan también del otro, en combinación con los mismos otros juicios; en segundo lugar, (15) que no sea este el caso. Las dos proposiciones: "en Platea derrotaron los griegos a los persas" y "en Platea fueron derrotados los persas por los griegos", se distinguen de la primera manera. Aun cuando se puede reconocer una pequeña diferencia en el sentido, la concordancia, no obstante, prevalece. Así, a aquella parte del contenido que es la *misma* en ambas, la llamo el *contenido judicable.* Puesto que *sólo éste* tiene significado para la Conceptografía, no necesito hacer distinción alguna entre proposiciones que tienen el mismo contenido judicable. (Frege, Conceptografia 1972, 7)

Los tipos de juicios y las características tradicionales de los mismos, simplemente no interesan, sólo importa el *contenido judicable*, es decir, el elemento objetivo, *lo lógico* en el pensamiento y no lo que permanece en el juicio cuando el contenido es excluido, descartando el elemento específicamente psicológico, subjetivo.

Es manifiesto el interés por encausar una lucha continúa contra el lenguaje y la gramática que no pretenden dar una explicación clara de *lo lógico*. Para Frege *lo lógico* es “una doctrina del contenido, de su estructura y naturaleza, y no sólo de su fragmento formal” (Coffa 2005, 115). La intención es claramente separar el elemento psicológico de lo lógico, lo subjetivo de lo objetivo. Es importante diferenciar a la lógica de los aspectos psicológicos, manifestada por los filósofos de tradición empirista y, por otra parte, diferenciarla a la lógica de aspectos epistemológicos, mezclados por la tradición racionalista inaugurada por Descartes.

En efecto, la lógica no intente mezclarse con los aspectos psicológicos o epistemológicos.

La lógica de enunciados como una teoría de la lógica consigue explicar la noción de consecuencia lógica por medio de una definición exacta, partiendo de elementos previamente establecidos por un lenguaje formal y por una sintaxis que nos da ciertas reglas por medio de las cuales es posible formar cadenas de símbolos bien formados según esos criterios. Además del lenguaje formal y la sintaxis, la lógica de enunciados cuenta con una semántica que nos permite interpretar de manera precisa el lenguaje usado en esta lógica, por ejemplo, el caso de las conectivas lógicas o el establecimiento de los valores de verdad para los enunciados. Con los elementos anteriores es posible construir métodos que separen a las inferencias correctas de las incorrectas. Cumpliendo con dos objetivos, a saber:

1) una explicación de la relación de implicación lógica; y,
2) el método para discernir las inferencias correctas de las que no lo son.

Para cumplir su cometido la lógica de enunciados ha de hacer uso de recursos técnicos que simplifican su tarea: el primer aspecto notable de estos recursos es el uso de un lenguaje propio y perfectamente definido que representa formalmente el lenguaje natural.

En *Begriffsschrift* Frege construye una *lingua characteristica* para limpiar la lengua de todos los rasgos irrelevantes en la validez de la prueba. Por ello, el elemento importante que permite realizar las inferencias es el contenido judicable.

Frege no manifestaba que su *Begriffsschrift* es un lenguaje nuevo, perfecto el cual descarta al lenguaje natural imperfecto, sino que lo relaciona: ambos lenguajes tienen una relación similar a la de un microscopio y el ojo. El ojo (lenguaje natural) es superior al microscopio (*Begriffsschrift)*, sin embargo cuando se requiere una alta resolución para fines particulares es cuando el microscopio resulta superior al ojo desnudo:

> Considerado como aparato óptico [el ojo][6], muestra sin duda muchas imperfecciones, las cuales pasan desapercibidas, por lo común, sólo como consecuencia de su estrecha conexión con la vida mental. Pero tan pronto como los propósitos científicos establecen mayores exigencias en la precisión de las distinciones, el ojo resulta insuficiente. (Frege, Conceptografia 1972, 3)

La lógica moderna de enunciados construye un lenguaje simbólico que utiliza letras enunciativas para representar, lo que interesa necesariamente de ellos: su verdad o falsedad, independientemente de la particularidad que puedan tener en el lenguaje natural, mediante el desarrollo de un lenguaje perfecto, que exprese de modo exacto el contenido de lo que se dice.

El proyecto de Frege cuyo propósito es diseñar una *lingua characteristica* tiene las siguientes características:

a) Cada enunciado del lenguaje, en este caso del alemán, tiene una traducción en este fragmento.

[6] Los corchetes no son propios de la cita.

b) La forma de cada enunciado en este fragmento refleja *isomorficamente*[7] los constituyentes del contendido que expresa, así como su combinación en ese contenido.

En la lógica tradicional, anterior a Kant, se centraban en el problema acerca de qué se sigue de qué, qué es válido y cosas similares, pero "Frege fue más allá de lo que se llama lógica formal, semántica, significado y contenidos, donde encontró el fundamento de la inferencia, la validez y mucho más." (Coffa 2005, 116). Frege rompe de manera impresionante rompe con la lógica tradicional y ese "más allá", es estar por encima de problemas de la lógica tradicional.

1.3 El signo de igualdad: ≡

La fórmula 69, mediante una relación de igualdad, expresa la aplicación de un procedimiento arbitrario de introducir símbolos nuevos que aparecen de lado derecho del signo "≡" que no se han definido, utilizados, explicados o aclarados con anterioridad, siendo la misma estipulación su definición: se realiza una simple abreviación de los signos que aparecen del lado izquierdo del signo "≡", sin agregar nada más al contenido ya estipulado por aquel. El *definiendum*, el cual parece siempre de lado derecho del signo "≡", al ser introducido para efectos de abreviación, necesariamente, preserva el *significado* ya dado por el *definiens*, el cual siempre aparece de lado izquierdo del signo "≡"[8]. El signo "≡" indica que hay una relación de igualdad entre un conjunto de signos extensos con uno o varios signos menos extensos, que mantiene el mismo significado de aquellos.

Si se tuviera un lenguaje perfecto habría un único símbolo para cada contenido diferente, en cuyo caso no habría necesidad de un símbolo para la igualdad de contenido, sería inútil, debido a que las únicas proposiciones que los contuviesen serian *truismos* de la forma "A≡A", por ejemplo:

El primer ministro ≡ El primer ministro

Sin embargo, no tiene sentido proceder de tal forma, porque es posible determinar el mismo contenido de maneras muy diversas y es significativo que se tengan diversos modos de presentación de nombres que tienen el mismo contendido como en la forma "A≡B".

Es así que el signo de igualdad pueda ser considerado como la extensión del símbolo aritmético "=". El signo "≡" que propone Frege se usa para indicar que las expresiones que lo flanquean nombran el mismo contenido, de cualquier clase que sea. La existencia de diferentes nombres con el mismo contenido no es una imperfección del lenguaje: la matemática resultaría empobrecida si no fuera posible determinar el mismo contenido de más de un modo.

[7] Es decir que la estructura de un enunciado reduce para su estudio la estructura de los constituyentes del contendido o viceversa.
[8] En el caso de Frege la relación de igualdad tiene esta forma "*Definiens≡Definiendum*" en la actualidad los lugares se invierten.

Por ello, en las definiciones formales se observa y se aplica el principio de identidad (A≡A), pero en la forma (A≡B), que expresa la circunstancia de que dos nombres tienen el mismo contenido porque se refieren al mismo objeto, aunado a su función dual expresada mediante el signo "||−" que se explicará en la siguiente sección. Es decir, las definiciones en *Begriffsschrif* tendrán la forma ||− (A≡B), que aluden a una relación entre nombres (A y B) que tienen el mismo contenido conceptual, debido a que se introducen nuevos símbolos, que no fueron utilizados previamente para referirse al mismo contenido de un signo que ya estaba en el sistema porque refieren al mismo objeto:

> No dice: "el lado derecho de la igualdad tiene el mismo contenido que el izquierdo", sino "debe tener el mismo contenido" (Frege, Conceptografia 1972, 39).

Por ello una característica muy clara en la relación de igualdad, previa a la distinción sentido y referencia, es la denominada *igualdad de contenido* que se mantiene cuando se introduce un signo o conjunto de signos de lado derecho de "≡" que abrevia al conjunto de signos de lado izquierdo: "*el símbolo A y el símbolo B tienen el mismo contenido conceptual, de modo que, en cualquier caso, se puede poner B en lugar de A*" (Frege, Conceptografia 1972, 13).

Con ello se afirma que si "A≡B", entonces, el símbolo *A* y el símbolo *B* al tener el mismo contenido conceptual[9], pueden reemplazarse indistintamente (A por B y viceversa), sin perjuicio de la verdad ni de la demostración: en el lugar de A podemos escribir proposiciones complejas, o nombres sean simples o complejos.

Asimismo cuando se habla de identidad de contenidos, Frege utiliza "nombre" para cubrir todos los otros tipos diferentes de símbolos. La igualdad es una aserción sobre nombres, no sobre sus contenidos, expresando la circunstancia de que dos nombres tienen el mismo contenido. Frege no menciona que si tomamos una proposición que contenga a *A* y la remplazamos por *B* obtendremos otra proposición con el mismo contenido, tomemos un ejemplo de la familia jurídica religiosa:

El primer ministro ≡ El jefe electo del Gobierno

En este ejemplo tenemos dos nombres relacionados con el signo (*A* y *B*), que dada la imprecisión de la noción de contenido aparenta[10] que de algún modo no se tiene el mismo contenido del lado izquierdo que del derecho en la relación de igualdad, porque cambia lo que después se denomina sentido, sin embargo, lo que quiere decir Frege no es que el reemplazo no afecte el modo en que como se presenta el conjunto de signos de un lado con los del otro en la igualdad (contenido), sino, más precisamente, que no afectará el valor de verdad donde ocurre algunos de los nombres al sustituirse entre sí: si se reemplaza en un contexto directo una proposición con algún valor de verdad (sea verdadero o falso) un nombre por otro que se relacionan porque tienen el mismo contenido conceptual, entonces, se preservará intacto el valor de verdad que tenía la proposición antes del reemplazo (sea verdadero o falso dependiendo el caso).

[9] Es de notar que en la cita anterior de Frege el contenido judicable ahora toma el nombre de *contenido conceptual*
[10] Esta pequeña ambigüedad será sustituida por la separación entre sentido y referencia.

Frege menciona una característica importante de las definiciones formales en las formulas donde se establece una relación de igualdad:

> No dice: "el lado derecho de la igualdad tiene el mismo contenido que el izquierdo", sino "debe tener el mismo contenido" (Frege, Conceptografia 1972, 39).

En efecto porque sólo se está estipulando un conjunto de signos que abrevian otro más extenso, en cuyo caso al no tener la distinción sentido y referencia en este momento, no se tienen las condiciones para saber si el *definiens* debería tener, además de la misma referencia, el mismo sentido que el *definiendum*, debido a que sólo estamos abreviando[11]. La igualdad de contenido se preserva por el hecho de que dos nombres comparten la misma referencia, pero por el momento no se sabe si comparten, lo que él denominó más adelante como el *sentido*[12].

En este momento Frege no tiene el interés para argumentar acerca de la diferencia de las formulas ||− (A≡A) y ||− (A≡B), sin embargo, tiene la pretensión de que todas las definiciones tengan la segunda forma. La fórmula ||− (A≡B), que se utilizan en las definiciones, obliga a que cuando se introduce un signo de igualdad de contenido "≡" se esté relacionando dos nombres distintos, que se refieren al mismo objeto: este procedimiento se funda en la necesidad de determinar de maneras distintas el contenido del juicio, mencionando que no es sólo una manera ociosa de proceder sino que atañen a la naturaleza del asunto. De ahí que Frege caracterice a las definiciones como sintéticas: "El juicio que tiene por objeto la igualdad de contenido es sintético en sentido kantiano" (Frege, Conceptografia 1972, 13).

Es así que las definiciones no serían meras consecuencias de la ley de identidad aplicada a identidades de la forma de ||− (A≡A), sino que para deducir y ser utilizadas, estas denominadas *definiciones formales* deben tener la forma ||− (A≡B), caracterizando a las identidades de las definiciones no trivialmente, indicando que estas son sintéticas en sentido kantiano, lo cual remite necesariamente a la identidad de contenido y sus distintos modos en cómo se presenta un mismo objeto.

Después del ejemplo de geometría del §8 dado en *Begriffsschrift*, Frege menciona la necesidad de la introducción de un signo de identidad, para indicar dos modos distintos el punto que asocia la posición del rayo cuando éste es perpendicular al diámetro de una circunferencia, como se muestra a continuación, referido al campo de la geometría exclusivamente:

> En una circunferencia hay un punto fijo A, alrededor del cual se hace girar un rayo. Cuando éste forma un diámetro, llamamos al extremo opuesto a A el punto B asociado a esta posición del rayo. Además, luego llamamos al

[11] Aunque en este momento Frege no tiene clara la diferencia de esos dos aspectos, puede vincularse de inmediato con tal separación a fin de comprender el enunciado anterior y su respectiva noción de igualdad de contenido.
[12] Al no tener clara la noción de *sentido* y al no ser crucial para su *lingua characteristica*, Frege simplemente acepta la sinonimia sin problema alguno, desconociendo las consecuencias filosóficas que ello implica.

> punto de intersección de ambas líneas el punto *B* asociado a la posición del rayo en cada caso, que se produce a partir de la regla de que a variaciones continuas de la posición del rayo, deben corresponder siempre variaciones continuas de la posición de *B*. Por tanto, el nombre *B* significa algo indeterminado, mientras no se especifique la posición asociada del rayo. Así, se puede preguntar: ¿a qué punto se asocia la posición del rayo cuando éste es perpendicular al diámetro? La respuesta será: al punto A. Por tanto, en este caso, el nombre B tiene el mismo contenido que el nombre A; y, sin embargo, no se podría usar de antemano un sólo nombre, ya que primordialmente la justificación de éste se da a través de la respuesta. El mismo punto se determina de dos maneras:
> 1. inmediatamente, por la intuición,
> 2. como punto B asociado al rayo perpendicular al diámetro. (Frege, Conceptografia 1972, 13)

Frege introduce de forma cautelosa esta explicación con la intención de indicar que el ejemplo geométrico dado y referido a la identidad de contenido es sintético, en sentido kantiano, formando proposiciones derivadas de ellos. Frege considera de la misma forma que Kant, que la geometría contiene un elemento *intuitivo*. Es decir, la geometría es sintética. En palabras de Kanterian: "para Kant y Frege la geometría sintética es porque se trata de una intuición espacial *a priori*" (Kanterian 2011, 121).

Sin embargo, las identidades no triviales en *Begriffsschrift* no pueden ser sintéticas, en este sentido, porque pone en riesgo el proyecto *logicista* (la reducción de la aritmética a leyes lógicas) porque se introduce un elemento sintético o de *intuición* el cual no conectaría con sus elementos primitivos puramente lógicos. De ahí su necesidad de que la aritmética se analítica.

Todas las identidades en *Begriffsschrift* son analíticas, triviales (sin valor informativo) o no triviales (sintéticas), opuestas a considerarse aplicables en la geometría. Kanterian considera que no hay una manera de estar seguros, porque Frege no lo manifiesta, de que en una cierta prueba, no se haya infiltrado un contenido intuitivo en una definición, incluyendo a la aritmética. Frege no es claro al respecto, pero con ello se restringe y priva el estudio de la geometría a otros medios que no sean la intuición espacial de Kant:

> En última instancia, las estrictas imposiciones epistemológicas sobre *Begriffsschrift* se enfrentan a sus limitaciones, y no van más allá de lo humanamente posible en el dominio de la intuición espacial. (Kanterian 2011, 53).

Sin embargo, el punto significativo es que Frege concibe y requiere de la noción de analítico para dar cuenta de su proyecto *logicista*, que no sería posible si en la cadena deductiva se ingresa un elemento extraño que no permitiera conectar adecuadamente las formulas aritméticas con las leyes lógicas. Por ello el signo de igualdad o identidad en *Begriffsschrift* desempeña un papel sumamente importante en las definiciones que le permitirá regresar a los primitivos lógicos:

> En efecto, a lo largo del ensayo de Boole (1880/1881) Frege insiste en que el signo se utiliza sobre todo en la definición de las definiciones de concepto, es una abreviatura tipo de identidad. Es una que estipula que A tiene el signo más complejo, el *definiens*, mismo contenido que, y puede ser sustituido por un signo más simple, previamente no utilizado, el *definiendum*. (Kanterian 2011, 118)

Frege considera que la identidad no es más que un signo elemental o primitivo, empleado sobre todo en las definiciones, para estipular el *sentido* de una nueva designación. Frege considera que "los componentes primitivos se deben tomar tan simples como sea posible si se ha de producir orden y claridad" (Frege, Conceptografia 1972, 4).

Por tanto una definición, en *Begriffsschrift*, siempre se presenta en forma de una identidad[13] entre notaciones, siendo un elemento *primitivo* con la utilización del signo "≡" aunado al signo "||–" que explicaremos a continuación.

1.4 El signo doble de juicio: ||–

Se observa que en la fórmula 69 el signo de identidad se emplea junto con el signo especial doble de juicio "||–" y no el signo que se trató en el apartado correspondiente a el signo "|–". El signo de barra doble de juicio "||–" representa una dualidad:

Primer momento: no es un juicio en principio como cuando se utiliza el signo "|–"

Sólo se está indicando que se utilizará un conjunto de signos que abreviará a otro extenso, sin realizar afirmación alguna. Las definiciones sólo tienen el propósito de producir una simplificación extrínseca por medio del establecimiento de una abreviación. Al no ser un juicio, tampoco es un juicio *sintético* (haciendo alusión a la afirmación de Kant consideraba de esta naturaleza a los juicios de la matemática): "Así, si (69) fuera un juicio sintético, entonces habría proposiciones derivadas de él." (Frege, Conceptografia 1972, 39).

Segundo momento: de inmediato se transforma en juicio

Una vez que se ha fijado el significado de los nuevos símbolos, adquiere validez y, por tanto, la fórmula vale también como juicio, pero no como juicio sintético sino como juicio *analítico*, porque sólo hace resaltar otra vez lo introducido en los nuevos símbolos y el significado que heredan de los signos que abrevian.

Frege menciona:

> Si bien originariamente (69) no es un juicio, de inmediato se transforma en tal; ya que una vez que se ha fijado el significado de los nuevos símbolos, adquiere validez y, por tanto, la fórmula (69) vale también como juicio, pero

[13] En *Grundlagen* se adoptará la definición de Leibniz de identidad: *eadem sunt quorum unum potest substitui Alteri salva veritate*.

> como juicio analítico, porque sólo hace resaltar otra vez lo introducido en los nuevos símbolos. (Frege, Conceptografia 1972, 39).

Una característica que se muestra es la función de la definición: simplificar pruebas en un sistema lógico o abreviar fórmulas. Ésta no tiene la simple barra del juicio porque no es tal, sin embargo, tiene una función dual, indicada por medio de la duplicación de la barra de juicio, tan pronto esa abreviación al ser tratada como juicio ordinario o una vez aceptada se trata como juicio analítico: "vale también como juicio, pero como juicio analítico, porque sólo hace resaltar otra vez lo introducido en los nuevos símbolos" (Frege, Conceptografia 1972, 39), se torna en una proposición analítica verdadera en virtud de la misma definición. Las definiciones sólo pretenden simplificar formulas mediante una abreviación que serán utilizadas en un sistema lógico.

El papel dual de la formula, indicado mediante el signo doble de juicio, sugiere que la definición en principio establece el contenido del *definiendum*, transferido por el *definiens* que está abreviando. Esto permite inmediatamente estipular la afirmación del juicio analítico correspondiente. Por ello la definición en principio no se convierte de inmediato en un juicio, sino que se hace la estipulación para indicar que se utilizará una expresión que mantiene el mismo contenido de un conjunto de signos empleado previamente.

Además en la fórmula 69 observamos que la barra de contenido dual, establece que dicho juicio se tomará como juicio analítico y no sintético. Lo anterior está en relación con la noción que tiene Frege de los juicios analíticos y en la utilización de las definiciones en las futuras derivaciones: sólo tienen el propósito de simplificar formulas por medio del establecimiento de una abreviación, en una relación de igualdad y no de realizar nuevas pruebas mediante su establecimiento, considerando que una verdad es analítica si se desprende de las definiciones y axiomas.

Con la fórmula 69 y su función dual se observa además que si es un juicio analítico y al mismo tiempo una aplicación del principio de identidad en la forma "(A≡B)", entonces, también es un juicio sintético. El problema es cómo estas entidades (de contenido) no triviales son sintéticas; mientras que cuando se derivan de las definiciones, son analíticas. Esto atañe a las acepciones acerca de lo sintético y analítico. Frege entiende como sintético dos aspectos que no se contraponen entre sí:

> 1) Aquello que estrictamente aumenta el conocimiento (valor cognitivo) como en el juicio |− (A≡B).
> 2) Juicios que permiten derivar proposiciones nuevas en un sistema lógico.

Su contraparte es lo analítico que tiene también dos aspectos:

> 1) Aquello que estrictamente no aumenta el conocimiento (valor cognitivo) como en el juicio |− (A≡A).
> 2) Juicios que no permiten derivar proposiciones nuevas en un sistema lógico.

En las derivaciones las definiciones son juicios analíticos (en su segunda acepción), pero también son sintéticos por ser una manera distinta de referirse al mismo objeto (en su primera acepción): las definiciones al ser analíticas atañen a la demostración, imposibilitando nuevas derivaciones; y lo sintético a la aplicación del principio de identidad en su forma "(A≡B)". Es decir que, *strictu sensu*, son analíticas al no añadir nada más a la prueba, sin embargo, no imposibilita un agregado cognitivo. Tyler Burge en *Truth, thought, reason: essays on Frege* considera que las definiciones "no pueden añadir al conocimiento en el sentido más idealizado 'de añaden'. El *definiens* tiene el mismo sentido que el *definiendum*" (Burge 2005, 147). Frege estaría de acuerdo con tal postura en las definiciones formales atendiendo solamente la noción de analítico que imposibilita la introducción de nuevo significado al que ya está estipulado previamente.

Se debe tener cuidado en el empleo de la noción de sintético que vagamente se emplea. En un primer momento lo sintético atiende la identidad de un objeto dado en diferentes modos de determinación, donde el significado (contenido) del *definiendum* depende por completo del contenido de los *definiens*; en otro momento la noción de sintético es ilustrada como una contraposición a la segunda acepción de lo analítico: en este caso la noción de sintético es propia de la geometría, mientras que la noción de analítico es propia de la aritmética.

Precisamente la oscilación en la definición de los tipos de juicios kantianos está en relación con la ambigüedad en el uso del término contenido, que podía ser resuelta por la distinción sentido/referencia.

Sintetizando, si las expresiones tienen los símbolos "≡" y "||−", entonces es una relación de igualdad, que abrevia un conjunto de signos más extensos con uno menos extensos que *deben* tener el mismo contenido conceptual:

> Así que una definición, mientras mantenga la forma de una identidad, es más parecida a un imperativo. Se asigna a un nuevo signo el contenido de un signo complejo ya establecido (Kanterian 2011, 119).

Las definiciones en *Begriffsschrift* son definiciones que abrevian expresiones más extensas por unas más cortas, estableciendo que éste último tendrá el mismo contenido que el que se pretende abreviar por ser lógicamente equivalentes. A este tipo de definiciones Kanterian les denomina *definiciones formales*:

> Las definiciones formales son expresiones lingüísticas no juicios. La definición no puede transformase en absoluto, sigue siendo lo que es, una definición, y es necesario, como tal, precisamente por el juicio analítico subsecuente, justificado por definición. (Kanterian 2011, 120).

Son denominadas definiciones formales porque son abreviaciones precisas que son utilizadas estrictamente en una sistema formal como *Begriffsschrift*, en cuyo caso estas definiciones no tendrán algún contenido nuevo, solo abrevian el conjunto de signos más extensos (*definiens*) por uno menos extenso (*definiendum*) preservando el *contenido* ya fijado previamente por el primero. Estrictamente este tipo de definiciones formales son analíticas y son utilizadas en sistema formal para simplificar pruebas.

En ese orden de ideas Blanchette observa el *papel conservador de definiciones* que llamamos formales, las cuales son utilizadas en el sistema de lógica pura, como la obra que nos ocupa, pues sólo justifica que las conclusiones demostrables en dicho sistema se realizan mediante leyes de la lógica y de las mismas definiciones, dando cuenta de su *demostrabilidad*. A lo que agrega Blanchette en *Frege's Conception of Logic*:

> Cada axioma que contiene un término definido sigue siendo un axioma si su término es sustituido por su *definiens*, y cada instancia de una regla de inferencia se mantiene como una instancia si los términos definidos se sustituyen por *definiendum*. Por lo tanto, cualquier derivación que implica una definición se puede transformarse sin problema en una derivación que no incluye definiciones. (Blanchette 2012, 13).

Como sólo son abreviaturas, todos los símbolos definidos en *Begriffsschrift* deben ser ampliados en fórmulas consistentes únicamente en vocabulario primitivo de *Begriffsschrif*. Cada símbolo en *Begriffsschrift* es primitivo o en última instancia se define en términos de símbolos *primitivos* o en términos de *indefinibles*.[14] Es decir que el papel conservador de las definiciones sugiere que podemos prescindir en su totalidad de las definiciones en las derivaciones que se hagan en un sistema de lógica pura, porque no juegan ningún papel esencial en la demostración –reivindicando el cálculo axiomático de Hilbert.

1.5 Principio de e*liminabilidad* en las definiciones formales

Si el proyecto fregeano de reducir la aritmética a la lógica es correcto, entonces, las siguientes fórmulas aritméticas "2+1+1=4" y "[(2) (1-5)]-4=4" serian lógicamente equivalentes, demostrando que si una es verdadera, entonces, la otra también lo es y viceversa, sin embargo, lo que se entiende en cada uno de las dos fórmulas es diferente: hay algo que las hace diferente. De inmediato nos remitiría a que no se tiene el mismo contenido conceptual, por no tener otro concepto que nos explique lo que sucede con ese cambio en el entendimiento, por eso se considera ambigua la noción contenido.

Menciona Beaney en *Frege: Making Sense* que la ambigüedad en la noción de contenido motivo a la definición de los números con extensión de conceptos:

> En la primera noción de Frege de contenido bien pudo haber motivado a sus definiciones fundamentales de los números como una extensión de los conceptos. Frege era consciente de que esas definiciones no se podrían derivar, por lo que les ofreció oficialmente sólo como estipulaciones, sin embargo, les requieren cierta justificación filosófica y está claro que Frege seguía preocupado por su estado (Beaney 1996, 10).

La distinción entre sentido y referencia pretendía resolver el problema de la ambigüedad que se suscita en la igualdad de contenido conceptual. Los enunciados aritméticos parecen

---

[14] Ejemplos de primitivos lógicos o entidades indefinibles[14], son las que Frege define en las secciones I, II, III, tales como las funciones lógicas de la condicionalidad, la negación y la identidad y en *Grundgesetze* esquematiza los ocho primitivos del sistema de *Begriffsschrift*.

ser afirmaciones sobre extensiones de conceptos, pero la diferencia radica sólo en el nivel de sentido, no de referencia; los números actualmente son extensiones de conceptos (lógicamente definibles):

> Pero como Frege pronto se dio cuenta, en el caso de la identidad que se encuentran en la base de una teoría, es decir, axiomas, declaraciones y definiciones, se requiere uniformidad de sentido, así como la misma referencia. En su respuesta final al problema, por lo tanto, Frege sostuvo que la tarea del teórico es reconstruir nuestras nociones, con el objetivo de proveer sentidos claros a los términos relevantes cuando estos no son claros (Beaney 1996, 10).

Si la aritmética es informativa por la noción de sintético tratada, entonces, se requiere un tratamiento epistémico, así como una concepción semántica de los contenidos.

Michael Dummett, observa dos aspectos en la arbitrariedad de las definiciones que deben ser tomados en cuenta:

1. El sentido del término recién definido debe estar lo más cercano posible a la captación del sentido ordinario.

2. Cuando el sentido de los términos recién definidos va más allá del original, incorporando un elemento arbitrario para cerrar los huecos dejados por el sentido original, la exigencia importante es que la parte arbitraria no juega ningún papel esencial en la derivación de la sentencia en cuestión.

La distinción entre sentido y referencia todavía no está claramente delimitada en esta obra de Frege, la utilización nos llevaría la comprensión adecuada de esta obra como Dummett y Beaney la consideran. Observamos que si se introduce un conjunto de signos nuevos necesariamente se tiene un nuevo sentido en la expresión completa, y que el sentido del *definiens*, no es el mismo que el *definiendum*, al utilizar nuevos símbolos que no se encuentran en el sistema.

Lo ideal sería preservar el mismo sentido en las expresiones ya estipuladas y en los signos nuevos a utilizar, sin embargo, menciona Dummett se debe tomar en consideración que el sentido del *definiendum* debe ser lo más cercano al sentido del *definiens*, en la relación de igualdad pero no es un requisito que debe tener la definición, es irrelevante si se atiende que la definición es una simple estipulación.

Respecto al segundo punto se sabe que los signos introducidos no juegan algún papel importante en las derivaciones, la parte arbitraria de la definición es una parte aislada de la prueba, (como menciona Blanchette), sin embargo, al utilizar definiciones se pretende que el sentido del *definiendum* no vaya más allá del sentido del *definiens*, pretendiendo que los signos utilizados cierren los huecos dejados por el sentido original.

Ese es uno de los propósitos de la abreviación, no sólo la estipulación, sino, *strictu sensu*, cerrar los huecos cognitivos que tiene el modo de presentación de un signo al ser utilizado:

es como si se pretendiera tener una mayor comprensión de un conjunto de signos para poder manipularlos en una demostración lo mejor posible y evitar hacerla más complicada.

Menciona Dummett al respecto:

> Si la prueba de la afirmación no depende esencialmente de las características de la definición que se han elegido de forma arbitraria, se convertirá sólo en aquellas características que se responda al sentido de la expresión, ya que se usa habitualmente; y entonces la declaración, tal como se entiende normalmente, se habrá demostrado adecuadamente (Dummett, Frege and Other Philosophers 1991, 179).

Por ello Frege abogaría por una identidad que mantiene una igualdad de sentido entre el *definiens* y *el definiendum*, como lo mencionó Tyler Burge líneas atrás. Frege no trata adecuadamente las implicaciones que esa igualdad involucra las cuales están íntimamente relacionadas con el problema del análisis lógico y la paradoja.

En este escrito hay que recordar que Frege no tiene clara la diferencia entre sentido y referencia, sólo quedando claro que las definiciones se introducen con el simple propósito de abreviar fórmulas más extensas y como Frege menciona sobre la definición de la condicionalidad: una simple introducción de signos que permite aclarar y delimitar adecuadamente cómo funciona, y en todo el apartado "Definición de los símbolos" de *Begriffsschrift*, nos da cuenta de ello.

Aunque la argumentación de *Begriffsschrift* es extensa y se pueden rastrear más temas, basta con encontrar los lugares donde Frege habla de la igualdad para saber que noción tiene acerca de la definición y su relación con la igualdad de contenido, como se realizó.

Frege tiene poco que decir sobre definiciones distintas de la restricción estándar que sean totalmente estipulativas y eliminables en principio. Por ello las definiciones formales permiten eliminar cualquier signo A o B en ||− (A≡B), simplemente porque preservan el mismo contenido, sin "agregar" o "producir" algo más de lo que ya estaba estipulado previa a la introducción de los signos nuevos que abrevian a los que ya estaban en uso en el sistema.

Atendiendo lo que menciona Blanchett, las cuestiones metateóricas que a Frege le preocupan explícitamente tienen que ver con la *fiabilidad* de su sistema formal, su *lingua characteristica*, e incluyen:

> (1) la fiabilidad de reglas individuales y axiomas,
> (2) la naturaleza de manera exclusiva y en referencia de las sentencias y las partes suboracionales del lenguaje, y
> (3) la *eliminabilidad* de los términos definidos.

Nos interesa el tercer punto, donde la *eliminabilidad* de los términos definidos implica que las pruebas realizadas necesariamente se encuentran en relación con un sistema lógico formal, es decir, atañen exclusivamente a las definiciones formales. Cada verdad aritmética debe ser necesariamente una verdad analítica como se mencionó, y las características de *eliminabilidad* de las definiciones se utilizan en un orden *puramente lógico*. El sistema formal para Frege es una herramienta con un propósito muy específico:

> Servir como un medio para expresar pruebas, un medio que está garantizado para presentar pruebas de tal manera que ningún paso puede "colarse inadvertido " en la cadena de inferencias a partir de premisas a la conclusión (Blanchette 2012, 170).

Una prueba expresada por una derivación en un sistema con las características mencionadas, demostrará con mayor certeza la convicción de la *fiabilidad* del sistema, es decir , seria efectivo para probar la relación de implicación lógica que guarda el conjunto de premisas establecidas en la prueba con la conclusión de la misma, obtenida mediante inferencias realizadas con el uso de las definiciones: " un sistema confiable de la prueba es justo lo que necesita Frege a fin de demostrar la tesis logicista" (Blanchette 2012, 170). Se entiende que la preocupación metateórica real de Frege es el de la *fiabilidad* de su sistema a fin de reducir el lenguaje de la aritmética a leyes puramente lógicas.

1.6 Aplicación de la definición formal: *hereditariedad*

La sección anterior nos contenta de inmediato con la parte III de *Begriffsschrift* y su noción de *hereditariedad*. Aquí Frege mediante seis axiomas, junto con el *modus ponens*, una regla de sustitución y mediante definiciones, trata de probar algunas proposiciones relevantes para la aritmética.

Uno de los usos más significativos de las definiciones formales, tiene que ver con la noción de *hereditariedad* de una propiedad. Introduce un nuevo símbolo que, según nos dice viene a ser equivalente a la propiedad de *hereditariedad*:

La circunstancia de que la propiedad *F* se hereda en la serie *f*

Si *x* tiene la propiedad *F* que se hereda de la *serie f*, y si *y* sigue a *x* en la *serie f*, entonces *y* también tiene la propiedad *F*. [15]

A Frege le interesa definir la noción general de seguirse en una serie a fin de ser usada a su vez para dar una explicación en términos puramente lógicos de la relación de sucesión que liga a los números en la serie numérica. Lo que busca es ofrecer una formula lógica exacta que capturase la idea intuitiva de ordenamiento en una serie encerrada en la expresión "*y* así sucesivamente" por ello propuso la siguiente definición:

B sigue a *A* en la serie *f*

[15] Este es el principio general en que se basa el principio de inducción matemática: Si *F* se tiene de 0 y *F* se tiene de *n*, entonces *F* se tiene de $n + 1$, por lo tanto, *F* es válido para cualquier número. Es un procedimiento por el cual concluimos que si una propiedad pertenece al número 0, y pertenece también a todo número que sea el sucesor de cualquier número que tenga esa propiedad, entonces la propiedad pertenece a todos los números naturales

Significa que para todo *F*, si cualquier que tenga la relación *f* con A tiene la propiedad *F*, y si *F* es hereditaria en la serie *f*, entonces *B* tiene la propiedad *F*. Así si la serie *f* es la serie generada por la relación de "Hijo de…", entonces *B* seguirá a *A* en la serie (será un descendiente de *A*) si *B* tiene todas las propiedades hereditarias que pertenecen a todo los hijos de *A*.

Para pasar de la definición de cero y uno a la definición de los otros números naturales, Frege hace uso de las definiciones de *sucesor* y de otras relaciones matemáticas en el seno de la serie numérica que se desarrolla en *Begriffsschrift*. Mediante el Axioma 5 enunciado en *Grundgesetze* le permitiría a Frege la transición de un concepto a su extensión:

Todo *G* es *F*, entonces, la clase de los *Fs* es idéntica a la clase de los *Gs*, y viceversa

Lo que es importante en este orden de ideas es que si aplicamos la propiedad de *hereditariedad* a las identidades, podemos reemplazar todos los *definiendum* por su *definiens*, llegando necesariamente a los primitivos. Debido a que en la igualdad se utiliza un símbolo más simple que abrevia a uno complejo, necesariamente preserva o se transferiré el contenido de este último, al sustituir los *definiendum* por los *definiens*.

Frege pretende que el conjunto de los enunciados de la aritmética pueda ser reducido a simples leyes lógicas. Mediante la *hereditariedad*. Frege espera dar una explicación y justificación puramente lógica de las formulas aritméticas, mediante la relación de sucesión que une a los números en la serie numérica, como ya se mencionó:

> Si de la proposición de que δ tiene la propiedad F, sea lo que fuere δ, se puede inferir en general que cada resultado de una aplicación del procedimiento f sobre δ tiene la propiedad F, entonces digo: 'la propiedad F se hereda en la serie f ' (Frege, Conceptografia 1972, 40).

Mediante una definición enlaza el conjunto de los números a esta propiedad de *hereditariedad*, pretendiendo que en la cadena deductiva no haya duda de la unión de cada una de las partes de la demostración (analítico), por el simple hecho de heredar las propiedades de uno a otro:

> Él da un ejemplo de la teoría general de las series, la abreviatura de la expresión conceptográfica del contenido judicable "la circunstancia de que la propiedad F se hereda en la serie f". Pero, este ejemplo es demasiado complejo y engorroso para los propósitos actuales. (Frege en realidad viene a considerar esta definición superflua) (Kanterian 2011, 118).

El punto es que mediante la *hereditariedad* Frege pretende reducir el lenguaje de la aritmética al de la lógica como lo planteo Blanchette en *Frege's Conception of Logic*.

1.7 Características de las definiciones formales

Las definiciones deben atender lo siguiente:

1. Que los nuevos símbolos introducidos no hayan aparecido previamente;
2. Que los símbolos pueden ser sustituidas (eliminados) por sus los símbolos que abrevian, en cualquier ocurrencia atendiendo sólo su igualdad o diversidad;
3. Los nuevos símbolos introducidos no pueden representar contenido independiente, y
4. Los símbolos nuevos sólo tienen significado dentro de la fórmula donde se introdujeron.

En ese orden de ideas, acerca de la definición, menciona Gottlob: “nada se sigue de ella que no se pudiera inferir sin ella” (Frege, Conceptografia 1972, 39) . En este sentido se garantiza que la introducción de nuevos signos no pretende de ningún modo introducir suposiciones ocultas u otro contenido no lógico, como las intuiciones.

Evidentemente ninguna nueva fórmula es derivable cuando se añade una definición: por ser simple estipulación que abrevia un conjunto de signos más extensos ningún nuevo contenido conceptual es comprobable a través de la utilización de las definiciones; y por estar en una relación de igualdad de contenido se preserva su contenido.

Para Frege la definición sólo tiene el propósito de abreviar formulas, sin ninguna función relevante en la prueba, como menciona Blanchette, sólo se muestra el papel conservador de definiciones cuya función en estricto sentido sólo es ahorrar espacio en las demostraciones, porque nada se sigue de una definición que también pueda ser deducido sin ella en una deducción puramente lógica.

Recordando a Kanterian, él a éste tipo de definiciones mostradas en *Begriffsschrift* les denomina *definiciones formales*, porque son introducidas de manera precisa en un sistema formal, pero son demasiado restrictivas por permitir la introducción de nombres de objetos solamente, de hecho, sólo un sub-grupo de nombres, nombres de contenidos judicables[16]. Menciona Kanterian:

> La visualización de las definiciones como simples abreviaturas arbitrarias de nombres más complejos por los nombres más simples es insuficiente para explicar el papel ontológico de las definiciones, y específicamente para las definiciones de los conceptos. Pero los conceptos no son objetos. La identidad puede obtener entre extensiones de conceptos, que son objetos, pero nunca entre los conceptos. (Kanterian 2011, 122).

La igualdad en *Begriffsschrift* siempre se introduce con el propósito de sustituir signos más extensos por unos menos extensos, siempre en aquellos que tienen contendido judicable y nunca en entidades que requieren un argumento para su complementación.

[16]Esta restricción se abandona en *Grundgesetze*, donde se permitirá introducir el signo de identidad no sólo los nombres del contenido judicable, sino a la extensión de un concepto (todavía un objeto en esta obra). No es relevante al trabajo esta posición por lo que no la trataremos.

1.8 Consecuencias de *Begriffsschrift*

En las páginas 130-131 de *Frege: a guide for the perplexed*, Kanterian enumera 11 puntos que aclaran los pasos de los primeros atisbos de la aplicación de las definiciones de *Begriffsschrift* de los cuales tomamos la misma numeración para destacar los más importantes:

> 1 La aritmética comienza con intuiciones confusas o cogniciones de objetos lógicos, para los que se introducen los signos de *Begriffsschrift*, que pretenden eliminar toda ambigüedad;
>
> 7. *Begriffsschrift* se desarrolla. Su vocabulario básico contiene signos precisos de los indefinibles lógicos, introducidas por elucidaciones o aclaraciones. Los Axiomas del sistema expresan verdades acerca de los indefinibles. Su cálculo permite la derivación de teoremas complejos por normas precisas, y
>
> 9 Dentro de este sistema podemos abreviar trivialmente signos complejos por los sencillos, sin pérdida de precisión. Estas abreviaturas son definiciones formales.

Frege pretende demostrar que las derivaciones realizadas en su sistema son definidos en términos de los verdaderos primitivos (objetos lógicos).

De ahí que *Begriffsschrift* es concebida como un *órganon*, como un instrumento: Frege a menudo hace hincapié en que una de las ventajas de su trabajo sobre lógicas rivales (como Boole) es su capacidad para desarrollar nuevos conceptos fructíferos (que se observaran la siguiente sección). Y de inmediato uno estaría tentado a pensar que nuevos conceptos permitirá la expresión de nuevas verdades como Kanterian lo observó: “por lo menos, si *Begriffsschrift* es una herramienta para tallar nuevos conceptos, un método hallado de nuevas verdades ha sido realizado, y esto es lo que Frege no cree” (Kanterian 2011, 11).

Kanterian supone que Frege aceptaría dicha caracterización de su sistema porque se muestra un progreso metodológico que, al igual que los científicos, le permitiría avanzar en una verdadera revolución científica. Pero, Frege no habla de un método o metodología, sino de un fundamento que permite vincular las formulas aritméticas a leyes lógicas y con ello trazar un edificio, con unos cimientos sumamente importantes: va más allá de una simple metodología que permite conectar la realidad con una teoría, para predecir eventos. Menciona Kanterian:

> Frege es modesta en relación con las nuevas verdades que Begriffsschrift propone, pero ambicioso sobre sus futuras aplicaciones. Esta confianza parece menos sólo 130 años más tarde. Begriffsschrift era un libro pionero en la lógica, pero la mayor parte de nuestra lógica actual es descendiente de Russell y Whitehead Principia Mathematica y otras obras lógicos (Kanterian 2011, 11)

Frege no aceptaría tal caracterización de su sistema, en tanto que estaría a favor de la lógica inductiva, a la manera del *Novum Organum* de Bacon. Estaría utilizando una metodología que apoyaría la probabilidad en la construcción o inducción de verdades, lo que haría que su herramienta sólo fuese un artífice utilizado en cierto tiempo: imposibilitaría la reducción de la aritmética a leyes lógicas mediante la deducción (vínculo analítico), dejando prácticamente el designio de su sistema a la probabilidad y a elementos intuitivos.

Continuando con los 11 puntos que menciona Kanterian:

2. La aritmética evoluciona, sobre la base de intuiciones no aclaradas;

3 Debido a esta falta de claridad, los problemas aparecen en el curso de la aritmética: se confunden sus objetos y no se conocen con precisión;

4 Una primera solución a la crisis es volver a las bases y definir informalmente signos aritméticos en términos de lo que es epistemológica y ontológicamente más simple, los *indefinibles*;

5 Los indefinibles resultan ser entidades lógicas, como se argumenta en *Grundlagen*. Los objetos de la aritmética son definibles en términos de combinaciones de estas entidades lógicas. Por ejemplo, el número 0 resulta ser la extensión del concepto "equinumérico al concepto siendo idéntico a sí mismo", y

6. La cognición de los objetos de la aritmética (números) es todavía difusa al igual que sus definiciones. El rigor de la prueba y una precisa *lingua characteristica* son llamados, por la vaguedad y contenido intuitivo de la lengua ordinaria.

Estos puntos obligan a recurrir no sólo a definiciones formales que se encuentran en *Begriffsschrift*, que no le permitirían a Frege realizar una investigación acerca de la naturaleza de los números. Por ello recurrirá a las *definiciones informales* para llegar hasta los fundamentos de los números, que son la base de lo que trata de reducir a simples leyes lógicas. Estas últimas definiciones, como se observará en la sección siguiente, no tienen la precisión de las definiciones formales porque no son usadas en una *lingua characteristica*.

Concluyendo

Podemos rastrear los elementos de las definiciones formales utilizadas en *Begriffsschrift*, en una *lingua characteristica*, si partimos del tratamiento de la fórmula 69 y la comprensión de los signos constantes que la componen: el signo "≡" y el signo "||–". Si las definiciones siempre se presentan como una igualdad, entonces, son la aplicación del principio de identidad, pero en su forma ||– (A≡B), donde se abrevia un conjunto de signos por unos menos extensos que refieren al mismo objeto y con ello se da un agregado cognitivo que lo vincula con lo sintético, evitando los *truismos* (A≡A). Cuando se usa el signo doble de juicio "||–", su función dual lo vincula a un juicio analítico, que refiere necesariamente a un contenido judicable y lo distingue del signo de juicio "|–": ambos se relacionan con una noción ambigua de contenido y sintético.

Se mostró en este contexto que una definición formal que aparece dentro de una derivación del sistema fregeano, en *Begriffsschrift*, es siempre una estipulación de convenciones de notación: un nuevo símbolo de notación se va a utilizar como forma abreviada de un complejo de signos ya usado y *entendido* previamente.

Se realizó un análisis del principio de *eliminabilidad*, que sugiere que las definiciones formales, al ser simples abreviaciones o estipulaciones, se preserva el contenido del *definiens* al *definienum* que se contrapone al principio de *fertilidad* de las definiciones informales que se mostraran en el segundo capítulo.

Mediante los elementos de las definiciones informales se construyó la propiedad de *hereditariedad*: La circunstancia de que la propiedad *F* se hereda en la serie *f*. Sumamente importante para dar una explicación en términos puramente lógicos de la relación de sucesión que liga a los números en la serie numérica.

Por último se enumeraron las características que deben tener las definiciones formales, así como las consecuencias de *Begriffsschrift***.**

Es importante resaltar que la distinción sentido y referencia, aunque posterior a la obra tratada, puede utilizarse en la discusión, a fin de entender la ambigüedad en el uso de la distinción analítico/sintético explicada en esta sección.

También se debe recalcar la necesidad de contextualizar éste tipo de definiciones formales dadas en *Begriffsschrift*: son simples abreviaciones o estipulaciones arbitrarias que permiten hacer más fácil la manipulación de un conjunto de signos en una prueba, dentro de un sistema estrictamente formal.

En el apartado siguiente las características de las definiciones varían porque el propósito es distinto y no se pretende aplicar en un sistema formal, sino ahondar en la naturaleza de los números.

2. DEFINICIÓN INFORMAL

Sobre *Die Grundlagen der Arithmetik*[17]

Introducción:

Después de comprender la definición formal dada en *Begriffsschrift*, continuaremos con *Die Grundlagen der Arithmetik* donde aquel tipo de definición se relega para dar paso a otro de definición, que en este apartado encontraremos que no se contrapone rotundamente a la primera.

En *Grundlagen* ya no se usa más las características de la definición como simple estipulación o abreviación de fórmulas que se da mediante una relación de igualdad como en *Begriffsschrift*. Ahora toda definición debe tener una característica especial que se estipula: *fertilidad*. Es decir, las definiciones informales deben "producir" algo más que en las simples definiciones formales.

En este apartado analizaremos las definiciones informales que pretende dar cuenta de una manera informal de la naturaleza de las entidades lógicas que la lengua ordinaria ha designado de una manera imprecisa y vaga. En el uso diario acerca del significado, que una lengua le designa a una entidad lógica puede no ser correcto y no se tiene consciencia de dicha ambigüedad hasta que mediante la definición informal se pretende ser consciente de ello: la falta de conocimiento (inconciencia) de lo que el lenguaje ordinario designa a cierta entidad lógica se elimina después de un descubrimiento, de una investigación. Este será el proceder de esta obra acerca de la definición en general y específicamente del número.

En los *Grundlagen* se pretende acercar a los fundamentos de la aritmética con explicaciones informales (sin un sistema formal como *Begriffsschrift*) que deberían proporcionar total claridad acerca de la naturaleza de los objetos, sin embargo, eso no basta, sólo hasta que se diseñe una *lingua characteristica*, que al igual que en *Begriffsschrift*, cada objeto se represente mediante un signo formal preciso, sin ambigüedades.

Se recurrirá a la noción de *analiticidad* que pretende evitar contradicción entre las definiciones que se realicen y con ello revisar los principios de las definiciones informales

Con el empleo de este tipo de *definiciones informales* se permita llegar a los fundamentos últimos de la naturaleza de los números, adentrarse en los fundamentos lógicos de la matemática. Por ello el objetivo principal de *Grundlagen* es argumentar que todas las inferencias que parecen ser particulares de la aritmética están basadas en leyes generales de la lógica, mediante tres momentos: la naturaleza de las proposiciones aritméticas, el concepto de número y la noción de uno o unidad

[17] Para este apartado se utiliza especialmente *Die Grundlagen der Arithmetik* (1884)

En esta sección analizaremos el principio de *fertilidad* de las definiciones informales utilizadas en *Grundlagen* y las peculiaridades que ella envuelve, vinculado a la distinción de los juicios kantianos y la caracterización de los mismos por parte de Frege a fin de aclarar la "producción" de nuevas verdades que se proporcionan en las definiciones informales. Con ello tenemos que aludir nuevamente al valor cognitivo mediante una distinción ambigua entre analítico/sintético por parte de Gottlob.

Continuaremos con la aplicación de la definición informal que posibilita la "producción" de algo más que no se tenía en las propiedades de los números, es decir, se mostrará la definición filosófica de número natural. Además se enumeraran las características propias de las definiciones informales y las consecuencias de lo estipulado en *Grundlagen*, íntimamente vinculado con la noción de análisis conceptual.

2.1 Principio de *fertilidad* en las definiciones informales

Recordando el inicio del apartado anterior, las definiciones en Frege se clasifican en:

1. Definiciones *formales*: son introducidas de manera precisa para ser utilizadas exclusivamente dentro de un sistema formal como *Begriffsschrift*.

2. Definiciones *informales*: son utilizadas en su totalidad en *Grundlagen* y no en un sistema formal porque su pretensión es explicar un concepto mediante lo que significa.

En esta obra se observa que Frege da un giro radical al respecto de las definiciones como mera convención tipográfica en una relación de igualdad, al introducir una característica de las definiciones: la *fertilidad*. En este orden de ideas hay que considerar que Frege está tratando con dos tipos de definiciones distintas, como se observará más adelante.

Frege de inmediato considera que las definiciones, para el propósito que persigue en este momento, no deben tener la característica de las definiciones formales, que aparentemente son estériles, infértiles, estáticas, inertes o infructuosas: es necesario que cuando se coloque una definición debe estar claramente distinguida para que la expresión no sólo juegue un papel insignificante al no pretender utilizarse más en la argumentación o tendiendo a definirla una y otra vez.

Gottlob trata con un tipo diferente de definiciones, emplazando (no rechazando) las definiciones como meras convenciones tipográficas, porque introduce el requisito de *fertilidad* cuando se define, evitando el simple ejercicio arbitrario de introducir signos nuevos que no serán utilizados más en una demostración o que en las pruebas se encuentren contradicciones al carecer de *valor*.

La *fertilidad* es caracterizada de la manera siguiente:

> Las definiciones se confirman por su fertilidad. Aquellas que podrían omitirse sin dejar una laguna en la demostración deben ser rechazadas como totalmente sin valor (Frege, Los fundamentos de la aritmética 1996, 111)

Una demostración es una lista de fórmulas de algún lenguaje simbólico, cada una de las cuales es un axioma o una definición, o bien, es producto de anteriores fórmulas aplicando reglas de transformación, es decir, un teorema, la fórmula que aparece al final de una demostración en una teoría formal (cálculo): si Φ es demostrable en dicha teoría prescindiendo de alguna definición, entonces, esta última es estéril por no tener *valor*.

Es decir que las definiciones *infértiles* son todas aquellas que en una demostración son innecesarias o prescindibles para la misma, tal y como serían las definiciones formales dadas en *Begriffsschrift* al ser simples estipulaciones que abrevian un conjunto de signos más amplios que, en este contexto, aparentemente no tienen *valor* alguno. En este sentido aquellas definiciones sin valor son aquellas que se pueden omitir en una demostración sin alterar la misma, como la mencionada formula 69 tratada en el apartado de definiciones formales[18].

En este momento la *fertilidad* de las definiciones informales refieren a que sin estas, en la cadena deductiva, no se pueden hacer nuevas pruebas, por ello deben ser utilizadas las veces que sean necesarias con la exigencia de que toda definición debe estar justificada con el mismo rigor que las pruebas en ellas realizadas, de otro modo, no tiene sentido introducir más signos al sistema, cuyo uso sólo es el de adornar el mismo, porque no se pretende hacer nuevas pruebas con ellas o en su camino existe la posibilidad de encontrar contradicciones o simplemente son prescindibles por carecer de *valor*.

Si dentro de un sistema sólo se introducen signos nuevos o ya utilizados en una definición, sin justificación o por mero ejercicio arbitrario, entonces, existe la posibilidad de encontrar contradicciones en las demostraciones realizadas con ellas o simplemente no se vuelven a utilizar más.

Hay que recalcar que las definiciones informales deben ser garantizadas por la característica de *fertilidad*, "por la posibilidad de hacer demostraciones con ellas" (Frege, Los fundamentos de la aritmética 1996, 38). Al respecto menciona Tyler Burge en *Truth, thought and reason:*

> En vez de la reflexión, Frege apela a la práctica matemática -a la observación del papel de la definición en la facilitación de la prueba como un modo de confirmar el valor y aparentemente la corrección de la definición. (Burge 2005, 342)

Frege considera que las definiciones *fértiles* se dan en el proceso de *análisis lógico*, dependiente de la construcción de la teoría formal, el cálculo, considerando que el éxito en la confirmación de los principios, que por separado son considerados como válidos,

[18] Debemos tomar en consideración la caracterización de definiciones formales que se utilizan en un sistema como *Begriffsschrift* y no es que Frege renuncie a este tipo de definiciones sino que en esta obra persigue un objetivo distinto a su *lingua characteristica* para atender la definición de número.

proporcionan alguna justificación para los principios (así como definiciones) usados en el proceso de la demostración en ese sistema. Como menciona Blanchette en el capítulo *Logicism and Conceptual Analysis* de su obra *Frege's Conception of Logic*, las definiciones ya no tienen un mero papel conservador, porque se atiende al papel de la *fertilidad* y las demostraciones hechas en un sistema de lógica pura parten de las leyes lógicas y de definiciones (Avístese Blanchette 2012, 12-3).

Por ello debemos hacer notar que la fórmula 69 de *Begriffsschrift* es una definición formal y que por el momento Frege no atiende por su necesidad de definir lo que es número. Cuando menciona Frege que no exista el caso de contradicción no está atacando a las definiciones formales[19], sino, a que existe la posibilidad de que alguien considere que una definición es un ejercicio sumamente arbitrario de agregar signos, en cuyo caso podemos construir la siguiente contradicción:

Definiciones:

(1) 2=1+1
(2) 3=2+1
(3) 3=1+1
(4) 4=3+1

Axioma: si se sustituyen iguales por iguales la igualdad permanece

Prueba: 3=2+1(def. 2)= 1+1(def. 1) +1 =3(def. 3)+1=4 (def. 4)

Por tanto: 3=4

Evidentemente en las definiciones formales no se sigue este tipo de contradicciones. Por ello Frege no está propugnando el abandono de las definiciones formales, sino que, por el momento, las deja de lado para poder cumplir con el propósito de definir número mediante el requisito de fertilidad.

Frege caracteriza a las definiciones fructíferas en §88 de *Grundlagen*:

> Las definiciones conceptuales más útiles son las que marcan líneas fronterizas que aún no habían sido trazadas en absoluto. Lo que puede inferirse a partir de ellas no puede determinarse de antemano; en este caso no se vuelve simplemente a sacar lo que se había metido en ella. Las conclusiones que sacamos de este tipo de definición aumentan nuestro conocimiento, y, siguiendo a Kant, deberían ser consideradas en consecuencia como sintéticas; no obstante, pueden ser demostrada de modo puramente lógico y, por lo tanto, son analíticas. Están contenidas de hecho como las vigas en la casa. Es frecuentemente que se precien varias definiciones para la demostración de un enunciado, el cual, por consiguiente,

[19] En la parte de *Begriffsschrift* hay características que debe cumplir una definición formal y en *Grundgesetze* lo menciona en un apartado que estudiaremos en la sección correspondiente.

> no se halla contenido en ninguna de ellas por separado y, con todo, se sigue lógicamente de todas juntas (Frege, Los fundamentos de la aritmética 1996, 129)

Evidentemente Frege simplemente califica a las definiciones conceptuales como iguales a las definiciones fructíferas distinguiéndola de las definiciones formales. De esta cita encontramos dos aspectos importantes acerca de las definiciones fructíferas: primero que son consideradas como analíticas en tanto que *pueden ser demostrada de modo puramente lógico*; en segundo lugar pueden ser consideradas sintéticas en tanto que *las conclusiones que sacamos de este tipo de definición aumenta nuestro conocimiento.* Analizaremos las definiciones fructíferas de acuerdo a cada uno de los aspectos analíticos y sintéticos correspondientes.

En ese orden de ideas el sentido de *fertilidad* que incluye al término valor, propio de las definiciones está en relación con el término de *analiticidad* y lo sintético kantiano.

2.2 Distinción analítico/sintético en Kant

En la caracterización de Kant los juicios relacionan dos conceptos. La *materia* de todos los demás juicios son los categóricos cuyo vínculo característico de este último es la relación sujeto-predicado. Por ello la materia de todos los juicios son conceptos u otros juicios.

En los juicios sintéticos no basta con poseer y examinar un concepto de un predicado A, para saber de *algún modo* que en él está contenido el concepto del sujeto B. En este tipo de juicios se amplía el conocimiento. Ejemplo de este tipo de juicios es el siguiente:

Todos los cuerpos son pesados

El concepto de pesado no está contenido en el concepto del sujeto cuerpo. Menciona Kant al respecto: “el predicado es algo enteramente distinto de lo que pienso en el mero concepto de un cuerpo en general. La adición de un predicado semejante da pues un juicio sintético” (Kant, Crítica de la razón pura 2007, 68). Kant algunas veces quiso decir por sintético “predicado no pensado en el sujeto” otras veces quiso decir “teniendo una intuición como el fundamento de la síntesis”. Es decir realizaba variaciones acerca de las nociones de sintético, sin embargo, podemos decir que son simples *juicios ampliadores* de conocimiento[20].

Acerca de los juicios analíticos en una primera definición, Kant los caracteriza como aquellos juicios donde "el predicado B pertenece al sujeto A como algo que está contenido (ocultamente) en ese concepto A” (Kant, Crítica de la razón pura 2007, 67). Considerando únicamente el caso de los juicios afirmativos universales donde se puede hablar de un concepto de sujeto y sobre el concepto de predicado contenido en él, deja de lado todas los demás juicios donde el sujeto es único o en juicios de existencia (cuantificadores). En este

[20] Los juicios sintéticos son caracterizados en *La tradición semántica. De Kant a Carnap* por Coffa como una simple explicación correcta de los *juicios ampliadores* (avístese Coffa, 2005 36)

tipo de juicios sugiere Kant que en última instancia pretende tener claridad acerca de los conceptos involucrados. Tomemos el siguiente ejemplo:

Todos los cuerpos son extensos

En la caracterización de Kant, bastaría con poseer y examinar al concepto de cuerpo para saber de *algún modo* que ya está contenido el concepto de extensión. Basta con pensar en un cuerpo para saber que los cuerpos son extensos, por ello no se tiene valor cognitivo debido a que ya está contenido en el concepto de cuerpo el concepto de extenso, es decir, que no se agrega más información que ya estaba contenida en el concepto del sujeto, no se agrega más conocimiento del que ya se tenía, por ello carece de valor cognitivo.

Simplemente divide el concepto sujeto en aquellos conceptos constituyentes que se han pensado en él desde el principio, todo concepto *x* que concuerda con el concepto de cuerpo también concordará con el concepto de extensión. Menciona Kant:

> Pues no he de salir fuera del concepto que uno al cuerpo, para hallar la extensión como enlazada con él, sino que tan sólo tengo que analizar aquel concepto, es decir, tomar conciencia de la multiplicidad que siempre pienso en él, para encontrar en esa multiplicidad dicho predicado; es pues un juicio analítico. (Kant, Crítica de la razón pura 2007, 67-8)

En ese orden de ideas un juicio categórico es analítico cuando el concepto del predicado está pensado o contenido de manera implícita en el concepto sujeto: todos lo demás juicios serian sintéticos. Conforme a la cita anterior un juicio analítico es un simple *análisis conceptual*, de los conceptos involucrados.

En palabras de Coffa lo analítico tiene una consecuencia evidente que no necesita explicación alguna: “los conceptos sólo pueden proporcionar una base para el conocimiento a través de un proceso de análisis” (Coffa 2005, 26). A partir de meros conceptos sólo obtenemos conocimiento analítico mediante los principios de identidad y/o contradicción:

> Conocer o entender un concepto es conocer su definición; luego, el conocimiento conceptual es conocimiento en virtud de definiciones (Coffa 2005, 41).

Suceden variaciones en el término de analiticidad de igual modo que en los juicios sintéticos. Siguiendo a Coffa, en algunas ocasiones lo analítico se caracteriza de la siguiente manera:

> La primera definición de Kant, la nominal, caracteriza a lo analítico como verdadera en virtud de definiciones (análisis) y lógica, la segunda lo define como verdadero en virtud del significado (Coffa 2005, 36).

Es controversial que Kant tuviera en mente la segunda noción de analiticidad en términos de significado, sin embargo, nos interesa la primera definición. Observamos que los juicios analíticos son simples juicios clarificadores[21] que no amplían el conocimiento. Se observa un estrecho vínculo trivial entre el análisis conceptual y juicios analíticos: "¿Por qué Kant no pensó que su distinción era una consecuencia absolutamente trivial de la noción de análisis conceptual?" (Coffa 2005, 36). No se está diciendo nada más en la definición de lo analítico que un mero proceso de análisis conceptual. Esto se debe a que el concepto del sujeto, considerado en general en sí mismo, aparentemente siempre contiene el concepto de predicado.

Kant consideraba que el método de la filosofía era "el análisis y que el análisis sólo podía dar base a afirmaciones analíticas" (Coffa 2005, 34), agregando para diferenciar de las dos posturas anteriores que la filosofía también tenía que examinar los juicios *a priori* que no son analíticos. En esta parte no le interesa la consideración al respecto del análisis conceptual, de la cual no da cuenta.

Por último consideremos la definición:

El ser humano es un animal racional

En este tipo de ejemplos se pretende realizar una igualdad entre un cuantificador existencial y universal, se da en términos de componentes y es por tanto un tipo de definición *estéril*, *infértil*: se definen al alcance de un concepto amplio concreto (por ejemplo humano), en términos de otros conceptos existentes (por ejemplo racional y animal).

En dicho caso el concepto definido por las características asociadas, es una de las formas menos *fértiles* de formar conceptos, similar al enunciado "el número es una cosa" que se menciona al inicio de este capítulo, donde se tiene un artículo determinado y uno indeterminado

Kant considera que la distinción entre a priori y a posteriori es una distinción entre modos de conocimiento: conocemos una verdad a priori si la conocemos independiente de la experiencia, en caso contrario es una verdad sintética. A su vez la distinción entre analítico y sintético está en función de los juicios como se mencionó. La primera división entre a priori y a posteriori atañe al campo epistemológico y la segunda al campo de la lógica.

2.3 Distinción analítico/sintético en Frege

La clasificación realizada por Kant atañe, menciona Frege, a la naturaleza de las proposiciones aritméticas, si son *a priori*, *a posteriori*, analíticas o sintéticas. La clasificación la encontramos en *Grundlagen* §3 donde alude a la verdad y su fuente o justificación. Ambas distinciones se relacionan con el fundamento último de la justificación de un juicio y no al contenido del mismo, ni mucho menos a circunstancias psicológicas, fisiológicas o físicas que han hecho posible su aparente formación.

[21] Ccaracterizada en *La tradición semántica. De Kant a Carnap* por Coffa como una simple explicación correcta de los *juicios clarificadores.* (avístese Coffa, 36).

La distinción no trata de un asunto entre epistemología contra la lógica sino una cuestión de grado de generalidad. Frege, a pesar de ser neokantiano, no quiere aceptar la línea de Kant, muestra mayor interés en caracterizar frases que expresan verdades analíticas, como la mencionada definición *nominal* de analítico en Kant, en lugar de los pensamientos que son analíticamente verdaderos, porque las definiciones son de palabras o símbolos.

Frege usa la noción de analítico para caracterizar una verdad derivable exclusivamente de leyes lógicas generales y definiciones; caso contrario es el proceder de un enunciado sintético donde las verdades no están en relación con esos dos elementos porque corresponden a un campo particular del saber.

Por ello si se habla de una justificación matemática, su justificación debe ser necesariamente matemática no psicológica. Se debe establecer la justificación matemática a los primitivos para retrotraerla a verdades analíticas o sintéticas: si en este proceso se encuentran solo leyes lógicas generales y definiciones cuya permisibilidad está establecida por tales leyes, entonces la verdad es analítica, pero si la prueba envuelve verdades que pertenecen a la esfera de alguna ciencia especial, entonces la proposición es sintética.

Del mismo modo, contrariamente a Kant, Frege considera que las distinciones entre *a priori* y *a posteriori* no atañen al contenido del juicio ni al método de llegar a él, sino a la justificación para emitirlos. Primero debe haber una justificación si es que vamos hablar de conocimiento (a priori o a posteriori), por la distinción entre mera creencia y conocimiento es que esta última es una creencia verdadera justificada. Por ello hablar de un error *a priori* es absurdo. Pues conocer *a priori* es un modo de conocer y uno solo puede conocer lo que es verdadero.

Lo *a priori* se usa para caracterizar verdades derivadas “de leyes generales únicamente, que no pueden ni precisan ser demostradas” (Frege, Los fundamentos de la aritmética 1996, 43); se procede de una forma contraria cuando se tiene una verdad *a posteriori* donde “se exige que su prueba no pueda ser validada sin alguna apelación a los hechos; es decir, a verdades indemostrables y sin universalidad, que contienen aseveraciones sobre objetos particulares” (Frege, Los fundamentos de la aritmética 1996, 43).

Una verdad es *a priori* su es demostrable a partir de leyes generales , sin recurrir a hechos particulares , una verdad no es solo *a priori* sino analítica , si las leyes generales desde las que es demostrable son leyes generales de la lógica , una ley es una ley lógica si es universalmente aplicable y no está restringida a disciplinas particulares.

Si las leyes aritméticas son derivadas de las leyes lógicas de carácter general, entonces, de acuerdo a la clasificación, son analíticas y *a priori*. Curiosamente esta caracterización parece implicar que leyes lógicas (básicas), de donde son derivadas las verdades analíticas, no son analíticas y si son *a priori* porque ellas no necesitan de justificación o definición. En una de tantas variaciones de lo *a priori* se puede ajustar muy bien la noción de primitivos.

De lo mencionado hasta este momento podemos decir que Frege, aunque no explícitamente, distingue entre verdades que pueden ser demostradas y las que no pueden ni necesitan serlo. De ello se desprende una clasificación acerca de las verdades:

1. Verdades que requieren de una demostración: enunciados *a posteriori*.
2. Verdades que no necesitan de una demostración: enunciados *a priori.*

Consideremos que Frege aunque es neokantiano no está interesado en los juicios sintéticos *a priori*, simplemente mencionamos la clasificación anterior con el fin de mencionar la ambigüedad también en los juicios a priori/ a posteriori distintos de los enunciados analíticos /sintéticos.

Los enunciados *a posteriori* cuya verdad apela a objetos particulares, denominados "hechos", hechos cognoscibles por la experiencia, mientras que las verdades primitivas generales no lo son, serian *a priori*. Podemos inferir que las verdades primitivas generales, como las leyes lógicas, no son empíricas, y por lo tanto son *a priori*.[22]

Por ello es importante, dice Frege, poner fin al desprecio por los juicios analíticos y a la leyenda de la esterilidad de la lógica pura. Mediante esta reclasificación fregeana de los juicios, se indica que la tradición en general no observó una característica sumamente importante, la *fertilidad* de los juicios analíticos: el autor de *KrV* restringe dichos juicios a los universales afirmativos "a una simple solución de un concepto en sus componentes característicos" (Kenny 1997, 128).

2.4 Verdad en las definiciones informales

La *fertilidad* es tratada mediante la noción de analítico en Frege, pero se añaden más características. Frege considera que las verdades demostradas en *Grundlagen*, están contenidas en las definiciones, por lo que el conocimiento, puede ser hallado mediante las proposiciones analíticas y la consideración de lo sintético que se mencionó anteriormente. Es decir, que las verdades analíticas de la aritmética deben ser sacadas de un sistema formal como en *Begriffsschrift* complementadas con las definiciones.

Esta es una de las características de las definiciones fértiles: aquellas que tienen la posibilidad de que "producir" verdades y no dejar una laguna en las pruebas. Como veremos más adelante, lo que "produce" este tipo de definiciones es un aspecto informativo o cognitivo. En la página 23 de *Frege: a guide for the perplexed* encontramos un esquema acerca de las verdades donde Kanterian propone y apela demasiado al uso epistémico de la teoría fregeana como consecuencia de tal clasificación:

> Note su definición estrecha de analítico y su falta de (acoplamiento con lo a priori). La clasificación tiene la consecuencia de que los hechos no son a posteriori, ni sintéticos, como Frege aparentemente reserva esta etiqueta a verdades demostrables, cuyos hechos no lo son. También digno de mención,

[22] Este uso de lo *a priori* como independiente de la experiencia, no es explicito pero si derivado de su contraparte *a posteriori*. En la teoría fregeana no es explicito pero tampoco incompatible con lo que se está mencionando.

> si no de preocupación actual, es el hecho de que la geometría es sintética para Frege, basado en nuestra facultad a priori de la intuición espacial. Por la definición de sintético, esto significa que la geometría pertenece a un dominio especial de conocimientos, teoremas geométricos, ya que siendo a priori, deben ser derivables de las leyes generales por sí solas, que son presumiblemente a priori a sí mismos, en el sentido anterior de no empírica por lo menos. (Kanterian 2011, 24)

Como se mencionó en la sección anterior, Kanterian está preocupado por las consecuencias epistemológicas y metodológicas de todo el sistema Fregeano, sin embargo, no es relevante en la filosofía fregeana en tanto que él estaba preocupado por construir una *lingua characteristica* que le permitiera reducir el lenguaje de la aritmética a leyes lógicas y definiciones y no precisamente en construir una metodología o un tratado o estudio acerca del método, síntesis que realizará en *Grundgesetze* , al pasar de las definiciones informales a las formales.

Respecto de los aspectos epistémicos no se extrae que Gottlob tuviera una preocupación sobre la noción de *hecho*, estrechamente vinculada con aspectos espacio-temporales, que suceden en la realidad física, considerando una posición empírica del conocimiento. Basta con aludir al realismo platónico fregeano para evitar esta confusión. Sin embargo si podemos considerar aspectos epistémicos si atendemos los aspectos sintéticos en las definiciones informales y su relación con el valor cognitivo.

Kanterian acierta sobre la visión que comparten Frege y Kant acerca de que la geometría es sintética y en este sentido se basa en una *intuición espacial a priori*, en sentido no empírico.

En la clasificación de la verdad, Kanterian indica que la explicación de la noción de *fertilidad* incumbe no solo a la definición, sino también al razonamiento deductivo (exclusivamente de proposiciones analíticas).[23] Además sugiere que la lógica es *fecunda* acerca de la verdad, pero ¿qué tipo de verdades ofrece?:

> La concepción de Frege de la lógica oscila entre viéndolo como un órganon y simplemente como un canon. Frege a menudo hace hincapié en que una de las ventajas de su escritura conceptual sobre simbolismos lógicas rivales como Boole es su capacidad para desarrollar nuevos conceptos fructíferos (Kanterian 2011, 11)

Las definiciones informales son fructíferas porque introducen nuevos conceptos, permiten nuevas expresiones de verdades. Si se concede este punto no se sigue que se pueda ir más allá como lo considera Kanterian, al sugerir que *Begriffsschrift* es una herramienta metodológica que nos permite la búsqueda de nuevas verdades, cosa que Frege en ningún momento argumento porque se interesaba solamente en la reducción de las formulas aritméticas a leyes lógicas, contrariamente a lo que se puede considerar en las definiciones informales pero aun así su interés está en la definición de número (avístese Kanterian 2011, 11).

[23] Frege respecto de lo analítico remite a una cadena deductiva que no deja pasar ningún aspecto extraño o intuitivo.

En ese orden de ideas tendríamos que recurrir nuevamente a la ambigüedad en el uso y distinciones kantianas realizadas por Frege, pero tanto en *Begriffsschrift* como en *Grundlagen*, nunca se trazó de manera certera la oposición entre verdades analíticas y sintéticas, *a priori* y *a posteriori*. El punto es que se empeñó demasiado por demostrar su tesis logicista que algunas cosas cruciales las utilizó de manera indiscriminada cuando el propósito lo permitía.

En el caso de las definiciones fructíferas son definiciones analíticas (en una deducción) y sintéticas (valor cognitivo) de acuerdo al propósito y a la argumentación en turno. Frege no dio ninguna explicación clara de lo anterior:

> Durante su período medio, nunca empleó la oposición entre verdades analíticas y sintéticas, o entre a priori y a posteriori, ya sea como él había dibujado en *Grundlagen* o de cualquier otra manera. Él no dio ninguna explicación de su abandono de estas nociones: por todo lo que podemos decir, que puede haber sido precisamente porque ya no pensaba que había algún criterio para la corrección de las definiciones que le daría sustancia a la noción de *analiticidad* o de *a priori* como lo había definido. (Dummett, Frege and other philosophers 1991, 28)

En la mayoría de los escritos Frege no da una caracterización adecuada de la relación kantiana de los juicios y sin ella las definiciones fructíferas no tienen una explicación satisfactoria, las cuales están en relación con las verdades analíticas en un momento y en otro con las sintéticas, es decir, que depende del propósito que persigue es la forma en que las caracteriza; pero, no se sigue de ello un intereses acerca de una nueva metodología fregeana que dé cuenta de la verdad en un campo de conocimiento científico.

Frege constantemente procede a vincular las nociones de juicios sintéticos solamente por su valor cognitivo y los juicios analíticos a aquellos que en una derivación se llega a leyes lógicas generales y a definiciones, pretendiendo reducir los enunciados de la matemática necesariamente a leyes lógicas, pero con sumo valor cognitivo.

Lo anterior está en concordancia con la fórmula 69 de *Begriffsschrift*: su explicación en el §24 acerca de su dualidad vinculada con los juicios analíticos y su vínculo con los juicios sintéticos por ser una aplicación del principio de identidad. Sin embargo, Frege no es abierto totalmente a esta postura por que se vincularía con la noción de sintético contrapuesto a lo analítico: primero lo separaría muy en el fondo de su proyecto logicista original causándole un serio problema por demostrar la viabilidad de su tesis principal; en segundo lugar no habría distinción en las definiciones formales e informales. Frege menciona algunos elementos al respecto, los tiene presente, pero los va evadiendo a cada momento.

En *Grundgesetze* menciona que el propósito de *Grundlagen* y todas las obras anteriores que caracterizaban al logicismo, sólo eran tesis probables: “ya no afirmó que la tesis de que las verdades de la aritmética (en plural) son analíticas, sino más bien, que la aritmética, en singular, es una rama de la lógica y no necesita recurrir a cualquier experiencia o la intuición para la base de sus pruebas" (Dummett, Frege and other philosophers 1991, 28).

Sintetizando se observa como Frege al igual que Kant variaban y combinaban los juicios sintéticos y analíticos, los cuales no pretenden conciliar en ambos sistemas por definición.

2.5 Valor cognitivo en las definiciones informales

Retomando la noción de fertilidad y atendiendo que la definición no es sólo una estipulación de unos signos que no estaban contenidos en el sistema cuyo propósito es abreviar a otro conjunto de signos, sino que mediante su introducción permitiría realizar pruebas que sin ellas no serían posibles, entonces estaríamos cumpliendo dicho requisito de *fertilidad*:

> …sus técnicas más sofisticadas de definición nos permiten construir conceptos bastante complejos, su análisis es enteramente informativo y amplía nuestro conocimiento. (Horty 2007, 33)

Las definiciones fértiles, además de la posibilidad de construir (no crear) conceptos se ajustan con otro aspecto: su *valor, necesariamente cognitivo.* Aunque podemos vincular la noción de valor con otros aspectos como el valor practico, no es relevante como el valor cognitivo que ya se ha expuesto con anterioridad y mostrar la relación que guarda con la noción de sintético. Es importante que este tipo de definiciones permita hacer derivaciones mediante el uso de las definiciones, así como su aspecto cognitivo.

En lo dicho hasta el momento se debe tomar con consideración, que a pesar de que *Über Sinn und Bedeutung* se escribe en 1892 (ocho años después de la obra que estamos tratando), no es un periodo sumamente largo para considerar que Frege no tenía en mente la división entre sentido y referencia, pero siempre era muy cauteloso al respecto, para no desviar su tesis *logicista*. Con esta obra podemos aclarar adecuadamente el papel que tiene el aspecto sintético en las definiciones que se presentan siempre como una identidad ayudando a demostrar la estrecha relación de la definición fructífera con la noción de sintético y su característica de agregación de información.

En las definiciones no sólo basta la abreviación de las fórmulas que, *strictu sensu*, serian de la forma (A≡A) sino que deben tener la forma (A≡B), que tienen valor, valor cognitivo, estrechamente vinculado a la noción de *fertilidad*. Aunque Frege no lo menciona en la obra que estamos tratando es necesario remitirnos a esta distinción.

Como se observó líneas atrás, la *fertilidad* tiene la característica de tener, producir nuevos conceptos relacionados con el término *valor*: no hay otro vínculo que refiere a ese término que las proposiciones que *aumentan el conocimiento*, es decir, que ellas tienen *valor cognitivo*. Las definiciones sólo serían estipulaciones si no se tiene valor cognitivo porque el *definiens* tendría además del mismo referente el mismo sentido que el *definiendum*.

En *Über Sinn und Bedeutung* al igual que en *Grundgesetze* se emplea el signo de igualdad como “=” y ya no como “≡”. La igualdad la caracteriza Frege: “empleo esta palabra en el sentido de identidad entiendo "a=b" en el sentido de "a es lo mismo que b" o "a y b coinciden" (Frege, Sobre sentido y referencia 1973, 49). Consideremos los dos casos donde se presenta una igualdad descrita en *Sinn und Bedeutung*:

a) a=a es analítico, y vale a priori: decir que Newton es igual a Newton es trivial y no aumenta en nada nuestro conocimiento.
b) a=b, no es analítico, y no siempre puede ser justificado *a priori*: decir que Newton es Sir, aumenta nuestro conocimiento, no es trivial, y se tiene que realizar una investigación para saberlo.

La explicación de la diferencia que existe entre estos dos tipo de igualdad, radica en cómo podemos aclarar que en una el conocimiento es trivial y no tiene valor cognitivo; mientras que en la otra existe valor cognitivo, es decir, aumenta nuestro conocimiento. Para ello podemos dar dos respuestas tentativas:

a) La igualdad es una relación entre objetos.
b) La igualdad es una relación entre signos.

Para el caso a) la igualdad sería una relación de una cosa consigo misma y que no tiene con otra: no explica el valor cognitivo de 'a=b' saber que un objeto sea igual a sí mismo. Para el caso b) suponer la igualdad como una relación entre signos (tal y como se pensó en *Begriffsschrift*) tendría la misma suerte que a): a nadie se le puede impedir que utilice arbitrariamente cualquier signo para mencionar a un objeto, sea el caso de “R2D2” para hablarle a la mascota de un amigo, o utilizar el signo “V:. M:.” para llamarle a un amigo. Esta respuesta tentativa no explicaría como igualamos los siguientes signos: “6+1”=”2+5”, simplemente las características físico-químicas son distintas[24]: no se escriben de igual manera de los signos que anteceden y proceden a “=”.

Ahora estamos en condiciones de hablar de definiciones fructíferas, que además de las características antes mencionadas, deben tener valor cognitivo que aumenta nuestro conocimiento, porque hay una relación entre sentidos que refieren al mismo objeto, siempre en una derivación y se debe atender la explicación de la formula ||− (A≡B). Aquí las definiciones tienen un problema sumamente significativo porque son juicios sintéticos y analíticos a la vez como se mencionó en la sección anterior.

Lo que él escribió acerca de la definición contiene una nueva caracterización acerca de su concepción de analítico dentro de las definiciones, mediante su noción de *sentido*, como se mencionó.

Dummett encuentra un problema al respecto:

---

[24] Frege menciona que hay una tendencia a no considerar como objeto más que lo que puede ser percibido con los sentidos, lo cual induce erróneamente a tomar por números los signos numéricos mismos, a considerarlos como los verdaderos objetos de estudio; y entonces, naturalmente, 7 y 2+5 serían distintos.

> Es decir, rechazó la exigencia de que la definición de un término existente debe capturar exactamente el sentido de que ya está fijado a ese término, y no hizo ningún supuesto de que tiene que ser tal sentido único. (Dummett, Frege and other philosophers 1991, 22).

Con ello se tendría un problema acerca de la *sinonimia* y la *paradoja del análisis* que se trataran brevemente a continuación.

Resta considerar que la relación de la definición con la noción de sintético, muy en el fondo, lo alejaría de su proyecto *logicista* original que requiere necesariamente de lo analítico.

2.6 Aplicación de la definición informal: definición de número natural

Frege, en la obra que nos ocupa, intenta definir el número o que sea reconocido como *indefinible*, como algo primitivo que no requiere de definición alguna: tomar esta última postura se debe al fracaso de los intentos realizados por definir al número. Inicia con la pregunta ¿qué es un número? Que tratara de responder de una manera fértil, atendiendo la definición informal

La respuesta tentativa a esta pregunta, se ha dado al considerar que el número es una cosa u objeto del mundo físico, sin atender adecuadamente la noción de objeto fregeano:

El número es una cosa.

Del ejemplo, indica Frege, no puede ser una definición debido a que se halla un artículo determinado (el número) y del otro lado uno indeterminado (una cosa) y en este sentido no es una definición en tanto que lo único que se hace es remitir el número a un indefinible (objeto) o universo amplio de objetos sin decirnos claramente lo que es o como Frege lo menciona en esa relación de igualdad: "No habría un contenido común" (Frege, Los fundamentos de la aritmética 1996, 32).

Mínimamente este tipo de definiciones deben cumplir los dos aspectos de las definiciones informales, su *fertilidad*: producir nuevas verdades y aumentar el conocimiento, son contradicción entre las definiciones en una prueba lógica. En caso contrario es necesario que cuando se iguale, se entienda que se utiliza un nombre distinto para mencionar que ambos nombres en dicha relación tienen el mismo contenido común, como se mencionó, en *Begriffsschrift*, que tengan el mismo contenido conceptual porque refieren al mismo objeto.

En la mayoría de los enunciados de orden científico o coloquiales nos encontramos con el error de buscar la definición de un objeto como mera explicación de las características esenciales de dicho objeto, como la denominada definición *real*, hasta encontrar un objeto que aparentemente explique a aquel; sin embargo, este último necesitaría otro objeto que lo defina y así sucesivamente[25] hasta que ya no se intente buscar más explicaciones o aclaraciones de sus objetos a utilizar, siendo el cuerpo de definiciones sólo una convención arbitraria de identidad acerca de las características distintas que tiene un objeto con respecto a otro, sin tener algún propósito que ayude en la demostración de los supuestos de la teoría que se pretende utilizar. Estos no están en relación con lo que es una definición, necesariamente en un orden lingüístico. Es importante distinguir adecuadamente que una definición se da necesariamente en un nivel lingüístico y no factico, porque Frege en ningún momento aceptaría la definición de número como una cosa o como un hecho físico.

A lo largo de la historia de la filosofía se muestra un vínculo equivocado entre la lógica y la psicología[26], como lo hacen generalmente los empiristas y sus nociones de ideas, sensaciones o percepciones; en este caso Frege se refiere a John Stuart Mill al querer fundamentar el conocimiento, incluyendo el matemático, sobre la base de la experiencia sensorial, lo cual traería una seria equivocación al no separar tajantemente lo lógico de lo psicológico, lo objetivo de subjetivo

En este trabajo no es preciso argumentar acerca de las teorías erróneas que expone Frege, solo mencionamos, las respuestas erróneas que se dan a la pregunta inicial ¿qué es un número?, dadas a lo largo de los tres primeros capítulos de *Grundlagen*: el número es una propiedad de las cosas; el número es una creación subjetiva; y, el número es un conjunto de unidades. A lo que contesta Frege introduciendo algo acerca de la definición de número en el §46 de *Grundlagen*: el número es una propiedad de un concepto, es decir, que una proposición numérica asigna una propiedad a un concepto. Frege menciona:

> Cuando digo: "venus tiene 0 lunas", no es que haya ninguna luna o agregado de lunas del que pudiera afirmase algo; pero al concepto "luna de Venus" se le atribuye una propiedad, a saber, la de que nada cae bajo el. Si digo: "del coche del Káiser tiran cuatro caballos", atribuyo el número cuatro al concepto "caballo que tira del coche del Káiser" (Frege, Los fundamentos de la aritmética 1996, 90) .

El concepto fregeano es algo objetivo y no es una entidad psicológica semejante a una imagen. Las proposiciones sobre números son proposiciones sobre conceptos, por ejemplo, "todas las ballenas son mamíferos" no es una proposición sobre animales, sino una sección de la subordinación del concepto de ballena al concepto mamífero. Se informa entonces que alguna noción del concepto general de número ha sido indicada, o, más bien, hemos sido informados de que el contenido de una proposición numérica es una acepción sobre un concepto.

Inmediatamente en el capítulo IV *El concepto de número* cambia el orden de la exposición para sacar su conclusión acerca del número en general, que a un concepto, le corresponda

---

[25] Entendiendo que no hay objetos físicos en el universo que no puedan ser reducidos infinitamente a partes más simples. La teoría atómica de Demócrito daba cuenta de ello en su momento, sin embargo, sabemos que el átomo tiene partes que los componen: electrón, protón y neutrón. Hasta la fecha seguimos buscando sin claridad las características físicas esenciales de aquellas partes que deberían ser indivisibles, que nos permitan acabar la búsqueda. Sin embargo, el humano no tiene los instrumentos para determinar que la materia o los objetos físicos no se pueden descomponer más. En el caso del número no puede estar en relación con este tipo de definiciones llamadas reales.

[26] Frege también de manera inconsciente lo hizo en *Begriffsschrift*

un número cuando caiga o no bajo él. Definiendo los números individuales de la siguiente manera:

> *El número cero 0 pertenece a un concepto *F* si, sea *a* lo que fuere no cae bajo *F*
>
> *El número 1 pertenece a un concepto *F*, cuando sea lo que sea *a* no vale con toda generalidad el enunciado de que *a* no cae bajo *F*;
>
> *Cuando: “a cae bajo F” y “b cae bajo F”, entonces a y b son lo mismo
>
> *Al concepto *F* le corresponde el número (*n+1*) cuando existe un objeto *a* que cae bajo *F* y tal que al concepto “que cae bajo *F*, pero no *a*” le corresponde el número *n*

El mismo Frege en el §56, menciona que las definiciones ofrecidas no resuelven el problema del número:

> …nunca podremos decidir –para dar u ejemplo burdo– si a un concepto le corresponde el número Julio Cesar, ni si este famoso conquistador de las Galias es un número o no. (Frege, Los fundamentos de la aritmética 1996, 99)

Es extraño que una definición de número deba incluir los caso de aplicación a Julio Cesar, pero el introducir esto como problemático está en relación con que la definición sugerida deba proporcionar un procedimiento para acceder a cada miembro de la serie de número naturales, pero lo que no se sabe es que sólo los números naturales son accesibles mediante él y no los casos de Julio Cesar, por ejemplo. Agrega Frege:

> Además, con el auxilio de nuestros intentos de definición, no podemos demostrar que deber ser a=b, cuando al concepto F le corresponde el número a y cuando al mismo le corresponde el número b (Frege, Los fundamentos de la aritmética 1996, 99)

Se suma al problema de Julio Cesar que, aunque se sepa que para cada número *n* se puede podemos hallar un concepto *F* tal que *n* pertenezca a él, no se sigue que *n* es el único número que pertenece a *F*. Es decir no se puede explicar necesariamente “a=b”.

Lo que se muestra es que las defunciones de número deben incluir el conocimiento de que un concepto solo puede tener bajo él a un único número en un mismo tiempo. Por ello una parte de la aritmética quedaría fuera del alcance de esas definiciones, hasta que esa laguna quede resuelta, se podría justificar “el número que pertenece al concepto *F*” así como la identidad. De ahí que Frege considere que las definiciones que se dio anteriormente acerca del 0 y del 1, sean ilusorias porque solo fijan el sentido de:

“el número o pertenece a “
“el número 1 pertenece a “

Sin llegar a distinguir en estos a los números como objetos independientes. En efecto, en el enunciado "el número 0 pertenece al concepto *F*", 0 es considerado por Frege como una parte del predicado (tomando en consideración al concepto *F* como el sujeto real): "Por esta razón he evitado llamar a un número, tal como 0 o 1 o 2, *propiedad* de un concepto" (Frege, Los fundamentos de la aritmética 1996, 100). Así el número no es una propiedad de una cosa ni de un concepto, sino que un número *n* pertenece a un concepto, pero la propiedad del concepto no es el propio número *n*, sino más bien la propiedad de que el número *n* le pertenece a él. Entonces las propiedades de concepto no son los números 0 y 1, sino la de tener un número 1, y la de no tener el número 0.

En ese orden de ideas los números son objetos independientes y tienen las siguientes propiedades:

a) no son una propiedad
b) no son objetos espaciales (no todo lo objetivo ocupa un espacio)
c) de b no se sigue que podamos tener una imagen psicológica de número.

Es así que Frege pretende demostrar que los numerales se comportan en las proposiciones como nombres propios. En efecto cuando decimos "el número uno" se sostiene que el articulo determinado indica que estamos hablando de un objeto. Un número individual es un objeto independiente porque "constituye solo una parte de lo que se está afirmando" (FA 166). Es decir, que un número es susceptible de ser sujeto de un contenido judicable singular.

La característica esencial de un objeto es, según Frege, la de ser algo que posee una identidad susceptible de ser reconocido una y otra vez. Los números son objetos porque son sujetos de fórmulas aritméticas como en "1+1+1=3". Atendiendo el signo principal se puede observar fácilmente que es te tipo de fórmulas aritméticas es son enunciados de identidad: las expresiones que flanquean el signo igual son tomadas como dos nombres de un mismo objeto. Se puede decir que los números al figurar en las formulas aritméticas, muestran que estos son objetos independientes y únicos y podemos relacionarlos en un identidad si nos referimos al mismo objeto. De ahí se enuncia que:

El número que pertenece al concept *F* es el mismo que el que pertenece al concepto *G*

En el principio anterior se expresa un artículo determinado "el número que pertenece al concepto *F*" asume la tarea de re identificar un número. Solo la tarea de nos autoriza a usar el articulo determinado y a asignarle un nombre propio. Por ello se debe reproducir el contendió del enunciado eliminando el "el número que perteneces al concepto *F*". Para hacer tal procedimiento Frege adopta el principio de Hume:

> Si se combinan dos número de manera tal que el uno tenga siempre una unidad que corresponda a toda la unidad del otro, entonces los declararemos iguales (Frege, Los fundamentos de la aritmética 1996, 104)

Esto se lleva a cabo definiendo la igualdad numérica, que Frege trata como identidad numérica, en términos de correlación de igualadas uno-a-uno:

El número que pertenece al concepto *F* es el mismo que el número que pertenece a *G*, si todos los elementos que caen bajo *F* pueden ser puestos en correlación de uno-a-uno con todos los elementos que caen bajo *G*

Aunque todavía no se tiene una definición contundente, el concepto de número se relaciona en términos del concepto de identidad numérica proponiendo que una definición debe plantearse en términos de "…es el mismo número que…". Con ello, en el §65 ejemplifica su noción mediante el paso del concepto de paralelismo al de dirección: dos líneas son paralelas entre sí, si ambas tienen la misma dirección. Se tiene que proceder del concepto de paralelismo al de dirección o viceversa.

Si el punto de partida inicia desde el concepto de dirección, entonces una vez que sepa que es la dirección, será fácil establecer si dos líneas tienen la misma dirección. Sin embargo dado que la dirección es un concepto geométrico, entonces, vendría dado por *intuición*. Pero aunque tengamos una intuición de la dirección de una línea recta, no distinguiríamos de alguna otra cosa como la dirección.

Por tanto, en lugar de definir paralelismo, en término de identidad de dirección, se sugiere mostrar que "la dirección de la línea a" es idéntica a "la dirección de línea b", significa lo mismo que "la línea a es paralela la línea b". Evocando el *dictum* de Leibniz

Dos cosas son respectivamente iguales su una de ellas puede ser sustituida por la otra sin pérdida de verdad

Ahora bien la definición de dirección puede ser defendida si se puede mostrar que: si "la línea a es paralela a la línea b", entonces es posible sustituir en todas partes "la dirección de a" por "la dirección de b" sin pérdida de verdad, como menciona el principio de *verdad salva veritate* de Leibniz. Mediante esta definición se reconoce "la dirección de a" como un objeto, pero no se menciona como se reconocería como el mismo objeto si se presenta "la dirección de b", sin embargo, de igual forma esta definición no permite decidir, si Inglaterra es lo mismo que la dirección del eje de la tierra, dificultad análoga a decidir si Julio Cesar es o no un número. Frege agrega: "nadie confundirá a Inglaterra con el eje de la tierra; pero esto no es un mérito de nuestra definición" (Frege, Los fundamentos de la aritmética 1996, 108). Esa definición no dice nada acerca de si el enunciado "la dirección de *a* es igual a *q*". Sigue faltando un concepto de número como de dirección para que nos permita identificar y diferenciarlo de otros objetos. En el §68, Frege recurre a la extensión de conceptos:

> Si la recta a es paralela a la recta b, la extensión del concepto "recta paralela a la recta a" es igual a la extensión del concepto "recta paralela a la recta b", y recíprocamente, si las extensiones de esos dos conceptos son iguales, a es paralela a b. Intentemos pues definir:
> La dirección de la recta a es la extensión del concepto "paralelo a la recta a" (Frege, Los fundamentos de la aritmética 1996, 109)

En el caso que le ocupa a Frege y su definición de número, considera que basta con poner en lugar de rectas o triángulos, conceptos y en lugar de paralelismo o de la semejanza, la posibilidad de establecer una aplican biyectiva entre las extensiones de los conceptos que caen bajo uno y otro.

La extensión de conceptos es la totalidad de objetos que caen bajo el concepto, por ejemplo, la extensión del concepto humano, es el conjunto de todos seres humano, y la extensión del concepto luna de júpiter es el conjunto de las lunas de júpiter, si no hay nada que caiga bajo un concepto, no significa que no tenga extensión, solo sería una clase que no tiene miembros: clase nula (o vacía). La extensión de concepto es fácil de aplicar a conceptos monádicos pero en los diádicos es más difícil, la extensión de concepto en estaos últimos es relativa al conjunto de pares ordenados de objetos que están ligados por tal relación.

En ese orden de ideas es como se da la siguiente definición de número:

El número que pertenece al concepto *F* es la extensión del concepto "numéricamente equivalente al concepto *F*"

Agrega que:

Dos conceptos *F* y *G* son equivalente numéricamente si los objetos que caen bajo *F* pueden ser puestos en correspondencia biúnica con los objetos que caen bajo *G*

La correlación biúnica es definida en dos etapas en el §71:

> Si todo objeto que cae bajo el concepto F, se halla en relación Φ con un objeto que caiga bajo el concepto G, y si cada con todo objeto que cae bajo G está en la relación Φ con un objeto que cae bajo F, entonces los objetos que caen bajo F y G están correlacionados por la relación Φ (Frege, Los fundamentos de la aritmética 1996, 113)

Pero esto no da la correlación biúnica, sino mediante las siguientes definiciones dadas en §72:

1. Si *d* está en la relación Φ con *a*, y si *d* está en la relación Φ con *e*, entonces, en general, sean lo que sean *d*, *a* y *e*, *a* es lo mismo que *e*.

2. Si *d* está en la relación Φ con *a*, y si *b* está en la relación Φ con *a*, entonces, en general, sean lo que sean *d*, *b* y *a*, *d* es lo mismo que *b*

Se ha definición entonces la correlación de uno-a-uno (biyectiva) sin recurrir a más aspectos que los puramente lógicos por lo que se tiene la siguiente definición:

El número que corresponde al concepto *F* es la extensión del concepto “equinumérico al concepto *F*”

Por ello se puede decir que “*n* es un número”, significa “existe un concepto tal, que *n* es el número que pertenece a ese concepto”. Teniendo la definición general de número ahora procede de una manera como Leibniz a definir todos los números naturales en términos de 0 y 1 e incremento en uno:

El 0 es el número que corresponde al concepto “desigual consigo mismo”

Para todo objeto puede decirse si cae o no bajo el concepto en cuestión. Se debe exigir de cualquier concepto una delimitación clara según la cual para cada objeto este determinado si cae bajo el concepto dado o no: esta exigencia es satisfecha completamente por los conceptos que contienen una contradicción, tales como “desigual consigo mismo” pues de todo objeto se sabe que no cae bajo tal concepto” (Frege, Los fundamentos de la aritmética 1996, 116) . Es decir cualquier que sea el objeto elegido, sabemos que no cae bajo ningún concepto de este tipo. Dado que toda cosa es idéntica así mismo no hay nada que caiga bajo el concepto “no idéntico a sí mismo”. Es una verdad analítica y a priori, una definición puramente lógica.

Para pasar de 0 a 1, procede a definir “n es un inmediato sucesor de m”, de la siguiente forma:

Existe un concepto *F* y un objeto *x* que cae bajo él de tal tipo que el número que pertenece al concepto *F* es *n* y el número que corresponde al concepto “que cae bajo *F* pero no es igual a *x*” es *m*

Hay un concepto idéntico a cero, y un objeto que cae bajo él cero, tal que el número que corresponde al concepto idéntico a cero es 2, y el número que corresponde al concepto idéntico a cero pero no idéntico a cero es 0. Por la definición de sucesor, esto significa que 1 sucede inmediatamente a 0 en la serie numérica. Los números se definen de la manera siguiente:

0 es el número que pertenece al concepto “desigual consigo mismo “
1 es el número que pertenece al concepto “igual a 0”,
2 es el número que pertenece al concepto “igual a 0 o a 1”
3 es el número que pertenece al concepto “igual a 0, a 1, o a 2”

Se muestra que cada número en la serie del número natural tiene otro que le sucede, y por tanto que la serie de números es infinita.

Es así como Frege produce nuevas verdades acerca de los números mostrando la fertilidad de las definiciones, de los juicios analíticos. Por esta razón ve con desánimos que Kant haya restringido los juicios analíticos a los juicios universales afirmativos y considere al tipo de análisis que tales juicios envuelven como una simple solución de un concepto en su componente característico. Esta es precisamente la definición menos fructífera, porque define al alcance de un concepto (como humano) en términos de otros conceptos (tales como racionales y animal).

Estas definiciones dadas son fructíferas porque trazan líneas de demarcación donde previamente no se habían establecido absolutamente ninguna. De lo que se sigue que el conocimiento es genuinamente ampliado mediante las proposiciones analíticas. Recordemos una cita anterior:

> Las verdades que demostramos están contenidas en las definiciones, no a la manera manifiesta de las vigas en una casa, sino como las plantas lo están en las semillas (Frege, Los fundamentos de la aritmética 1996, 129).

Recordemos que Frege, al igual que a los que crítico, está en condiciones de dar una prueba informal de sus supuestos: no son más sólidos desde el punto de vista lógico de lo que son las pruebas en su tiempo, de ahí que sean denominadas definiciones informales

Para suprimir tal informalidad necesariamente las definiciones que se dan en la presente obra tenían que ser dadas en el simbolismo de un sistema formal como *Begriffsschrift*, es decir, pasar de las definiciones informales a las formales, a fin de reducir un número pequeño de pasos impidiendo que alguna premisa se introduzca de manera inadvertida en una prueba.

2.7 Características de las definiciones informales

La definición informal tiene las siguientes características agregadas a la noción de *fertilidad*:

1. Que la definición sea estipulada de una vez por todas;
2. Que la definición se vuelva a utilizar las veces que sea necesario;
3. Que no exista contradicción alguna entre las definiciones;
4. Que tengan valor, y
5. Que sea capaz de “producir” nuevas verdades

En efecto, si en el conjunto de definiciones informales se tienen contradicciones, entonces, no pueden ser tratadas como tales, porque se estaría violando la primera característica al estipularse una y otra vez agregando elementos probablemente contradictorios, existiendo la posibilidad de contradicción debido a la arbitrariedad y uso indiscriminado de signos, sin atender lo que propiamente se está definiendo: se agrega más significado del que ya estaba contenido en el conjunto de signos a definir (principio de fertilidad) lo cual está en contraposición con la noción de *eliminabilidad* pero si atendemos claramente el propósito de cada una de la obras no tendríamos por qué aceptar tal oposición, sin embargo, al vincular los principios se generan un problema de suma importancia: la paradoja del análisis

2.8 Análisis conceptual

Retomando la argumentación acera de la *analiticidad*, concuerda Horty con la exposición y la importancia de esta noción para abordar el problema de la definición.

Lo que se sustrajo de las secciones correspondientes fue que Frege, contrariamente a Kant, considera que las verdades de la aritmética son analíticas, coincidiendo en que la geometría es sintética por tener un aspecto de intuición espacial, pero lo más importante para este trabajo es que los dos tienen en mente el análisis conceptual.

De ello, como se argumentó, hay algo en común entre estos autores al respecto de este tema que ya se vislumbró líneas atrás:

> Ambos ven las declaraciones analíticas como aquellos cuya verdad puede ser descubierta completamente por el análisis conceptual. En el caso de Kant, esto es obvio. Para ver que es verdadero, también para Frege, debemos ver que él trata la definición -la introducción de una expresión definida en una lengua- como una especie de formación de concepto, y la deducción como un análogo al proceso de Kant de dar explícito lo que está contenido en un concepto. (Horty 2007, 29-30)

De una cita anterior se observa que Kant llamó análisis al proceso de “analizar aquel concepto, es decir, tomar conciencia de la multiplicidad que siempre pienso en él, para encontrar en esa multiplicidad dicho predicado; es pues un juicio analítico” (Kant, Crítica de la razón pura 2007, 68). La intelección del concepto analizado cambia, se mejora o aclara durante el proceso, mientras que el concepto no. Es decir que cuando separamos al concepto de sus constituyentes, hacemos que se torne “distinto” a través del análisis, aclarándolo, sin añadir nada al concepto:

> Cuando logro que un concepto se haga distinto, el mero análisis no incremente en lo más mínimo el contenido de mi cognición [a través del análisis] aprendo a distinguir mejor o con mayor claridad de conciencia lo que ya estaba contenido en el concepto dado. Así como nada se añade a un mapa cuando simplemente se le ha iluminado, la mera elucidación de determino concepto por medio del análisis de sus características no le adiciona nada al concepto en lo más mínimo (Kant, Lógica 1992, 64)

Este proceso de análisis necesariamente debe encontrar al final conceptos simples, indefinibles e inanalizables que no están sujetos a dicho proceso. Kant no argumentó al respecto de estos objetos lógicos y el proceso de análisis se vinculó demasiado con aspectos subjetivos o representacionales.

En efecto, los juicios analíticos en la visión kantiana, son verdaderos por el simple hecho de tener claridad acerca de los conceptos involucrados en el juicio y lo sintético como aquellos que se apelan a fuentes extraconceptuales de conocimiento. Es preciso recordar, lo que se mencionó en la sección anterior “…caracteriza a lo analítico como verdadera en virtud de definiciones (análisis) y lógica.” (Coffa 2005, 36).

En la descripción de Horty del requisito de *fertilidad*, (la necesidad de que al introducir las expresiones definidas se puedan utilizar para hacer nuevos descubrimientos o nuevas pruebas en las demostraciones) se observa la estrecha relación con la noción de análisis tanto kantiana como fregeana:

> Para Frege, las verdades de aritmética son analíticas porque ellas pueden ser descubiertas por el análisis conceptual sólo… (Horty 2007, 33)

Kant y Frege tienen una noción similar a lo que se refiere el proceso de análisis, aunque no dan un tratamiento adecuado a dicho proceso ni a la paradoja del análisis. Frege no tiene problema alguno en conciliar la noción de sintético con lo analítico, atendiendo los aspectos para los cuales son introducidos que se mencionaron anteriormente.

A pesar de los problemas que surjan, a Frege y Kant, muy en el fondo solo les interesa demostrar, mediante un proceso de análisis lógico, que se puede regresar a los elementos primitivos de donde se partió.

Están de acuerdo en que la lógica está fundada en el nivel del entendimiento donde la sensibilidad y sus formas no juegan ningún papel. El conflicto básico entre estos autores es acerca de la noción de *intuición* y su papel en la aritmética y en la geometría como se mencionó

Concluyendo

En *Die Grundlagen der Arithmetik* las definiciones formales son relegadas por las definiciones informales: en esta obra ya no se usa más las características de la definición como simple estipulación o abreviación de fórmulas que se da mediante una relación de igualdad como en *Begriffsschrift*. Ahora toda definición informal es caracterizada por su *fertilidad*, por su característica de "producir" nuevas verdades.

Las definiciones informales dan cuenta de una manera informal de la naturaleza de las entidades lógicas que la lengua ordinaria ha designado de una manera imprecisa y vaga, mediante una investigación, en este caso acerca del número natural.

Se indicó que en los *Grundlagen*, mediante las definiciones informales se ahondó en los fundamentos de la aritmética (sin un sistema formal como *Begriffsschrift*), sin embargo, se puntualizó que eso no basta para definir de una vez por todas al número, sólo hasta que se diseñe una *lingua characteristica*, que al igual que en *Begriffsschrift*, donde cada objeto se represente mediante un signo formal preciso, sin ambigüedades.

Hay un vínculo estrecho entre la noción de fertilidad con la noción de analiticidad, siendo el objetivo principal de *Grundlagen* indicar que todas las inferencias que parecen ser particulares de la aritmética están basadas en leyes generales de la lógica. Sin embargo, el uso ambiguo de la noción de sintético, puede contradecir tal punto como se mencionó a lo largo del trabajo. Por ello se recurrió nuevamente a la noción de valor cognitivo mediante una distinción ambigua entre analítico/sintético por parte de Gottlob.

Podemos rastrear las características de la fertilidad de las definiciones informales si las desvinculamos de las definiciones formales. Sin embargo, tienen una estrecha relación por el tratamiento que le da Frege a la distinción de los juicios kantianos.

De lo anterior se desprende un problema acerca del análisis conceptual, de la sinonimia y del aumento del conocimiento. Frege no muestra una preocupación fuerte acerca de dichos problemas al considerar que las definiciones informales “producen” nuevas verdades que no estaban contenidas en las propiedades de los números y precisamente en la definición filosófica de número natural que se mostró en esta sección, que se contrapone a su definición formal.

Es importante contextualizar éste tipo de definiciones informales dadas en *Grundlagen*: no son precisas ni son simples abreviaciones o estipulaciones arbitrarias, sino que pueden producir algo más en las derivaciones. Se pretende, mediante las definiciones informales, explicar un concepto mediante lo que significa, en este caso, llegar a los fundamentos últimos de la naturaleza de los números.

Sin embargo, esa postura no resuelve un problema relevante en la filosofía: la paradoja del análisis que se tratará en la siguiente sección.
.

3. PARADOJA DEL ANÁLISIS

Sobre *Begriffsschrift* y *Die Grundlagen der Arithmetik*[27]

Introducción:

Después de comprender la definición formal dada en *Begriffsschrift*, y la definición informal dada en *Grundlagen* y atendiendo sus propósitos específicos en cada obra, no habría necesidad de vincularlas, sin embargo, lo que se dice en una y otra definición es sumamente importante porque surge inevitablemente la paradoja del análisis: cuando se pretende conciliar los principios de *eliminabilidad* y *fertilididad*, de las definiciones formales e informales, respectivamente, de los análisis conceptuales fregeanos. En el primer caso la corrección de una definición parece exigir que alguna propiedad se preserve en la transición del *definiendum* al *definiens* mientras que la *fertilidad* parece requerir un cambio de alguna propiedad en la misma transición.

En este pequeño capítulo se analizaran los principios de *eliminabilidad* y *fertilidad*, de cada una de las definiciones correspondientes, a fin de poder observar las posturas acerca de la paradoja del análisis, inevitable si se vinculan los capítulos anteriores, referidos a *Begriffsschrift*, y la definición informal dada en *Grundlagen*

3.1 Principios de definiciones: *eliminabilidad* y *fertilidad*.

En las definiciones fregeanas se contraponen dos requisitos contenidos en las definiciones formales e informales: *eliminabilidad*, y *fertilidad* respectivamente.

En el requisito de *eliminabilidad*, propio de las definiciones formales, los símbolos definidos (en una definición formal) deben ser idénticos en contenido, a fin de que la expresión a definir pueda ser eliminada por la antes definida, es decir, que el *definiens pueda* ser eliminable en todo contexto, donde ocurra toda expresión que lo contenga por su respectivo *definiendum*. Pero si atendemos el requisito de *fertilidad*, propio de las definiciones informales, este nos permiten "producir" nuevas verdades, principio que se contrapone a la *eliminabilidad* de las definiciones formales.

Horty apela e inserta una distinción entre definiciones estipulativas y explicativas que no son explicitas en Frege: en las primeras se introduce un signo, una nueva expresión en un lenguaje o sistema de signos con el propósito de abreviar, equiparándose al principio de eliminabilidad; en las segundas, siguiendo a Dummett, se realiza una reconstrucción del significado de alguna expresión mediante el empleo de otros signos que son más claros o mejor entendidos o menos problemáticos en la manipulación de la demostración, equiparándose al principio de *fertilidad*. Sin embargo en la lectura que hace Horty se menciona que no queda adecuadamente la frontera entre ambas definiciones (avístese

[27] Para este apartado se utiliza el análisis expuesto en las dos secciones anteriores que corresponden a *Begriffsschrift* (1879) y *Die Grundlagen der Arithmetik* (1884)

Horty 007, 40). En efecto, el propósito de la introducción de símbolos definidos, menciona Horty, cambia la estructura de pensamientos expresables (sentido) en un lenguaje, de modo que la posibilidad de la *fertilidad* puede ser vista como incoherente con el requisito de *eliminabilidad*.

El requisito de fertilidad corresponde al vínculo que se realiza de las definiciones informales en *Grundlagen* y de las definiciones formales de *Begriffsschrift*. De ello se desprende la denominada paradoja del análisis:

> La paradoja surge justamente cuando se intenta conciliar 2 características aparentemente contradictorias —corrección y fertilidad— de los análisis conceptuales fregeanos. Esto porque la corrección de una definición parece exigir que alguna propiedad se preserve en la transición del definiendum (el concepto preteórico) al definiens (el concepto teórico) mientras que la fertilidad parece requerir un cambio cognitivo en la misma transición. (Pinto 2005, 199)

La paradoja del análisis surge cuando se pretende conciliar los dos requisitos de las definiciones fregeanas aparentemente contradictorias —*eliminabilidad* o *corrección* y *fertilidad*— de las definiciones formales e informales respectivamente en los análisis conceptuales fregeanos. Como se mencionó en el primer requisito de una definición formal parece exigir que alguna *propiedad* se preserve en la transición del *definiendum* (el concepto pre-teórico) al *definiens* (el concepto teórico) mientras que la segunda parece requerir un cambio en la misma transición.

La noción de corrección sugiere que cada concepto tiene solamente un análisis correcto. Esto debido a que los contenidos conceptuales mismos no cambian en la definición formal, sino a lo sumo nuestra cognición: no debe haber un cambio conceptual, en una definición formal totalmente estipulativa, en la transición del concepto que contiene el *definiens* (preteórico) y el *definiendum* (teórico). Al proponerse una identidad se pone de manifiesto, en las definiciones formales, que el *Definiendum* preserva el mismo *contenido* o *propiedades* que el *Definiens*[28], evitando cualquier cambio al respecto, incluyendo el cognitivo. En efecto porque si el análisis procede de forma contraria, modificando contenidos, entonces, el análisis difícilmente aclara contenidos ya existentes, porque los transforma de una manera radical: no habrá un solo análisis correcto sino varios en función de las transformaciones realizadas en las definiciones cuando se pretendía aclarar un concepto.

Siguiendo a Dummett

> Un análisis correcto debe dar una definición fiel al significado del término definido, ¿Cómo, entonces, podría haber alguna duda acerca de su corrección? Porque, si alguien aprehende el significado de dos expresiones ¿debe no saber de este modo su significado o significados diferentes? Si es así entonces cualquier análisis propuesto debe ser inmediatamente

[28] En el caso de Frege la relación de igualdad tiene esta forma "*Definiens*≡*Definiendum*" en la actualidad los lugares se invierten.

> reconocible, ya sea como correcto o como incorrecto. (Dummett, Frege and other philosophers 1991, 17).

En ese caso la filosofía no tendría nada que hacer, en tanto que los individuos involucrados en el entendimiento, que se da en el proceso de análisis, deberían reconocer de inmediato si los significados son equivalentes o si son distintos, en cuyo caso el proceso de análisis no tendría ningún papel relevante, mucho menos su corrección e incorrección porque se realizaría de manera totalmente consciente o intuitiva:

> Frege estaba ansioso por insistir en que el reconocimiento de la sinonimia debe ser inmediata; si se necesita una prueba, entonces, no tenemos sinonimia, por la relación más débil de equivalencia analítica (Dummett, Frege and other philosophers 1991, 17).

Como se mencionó en la primera sección, aunque en las definiciones formales el *defniens* y el *definiendum* no tuvieran exactamente el mismo contenido "sus contenidos estarían obligados en esa conexión íntima que resulta de la definición". (Dummett, Frege and other philosophers 1991, 301). Deben ser lo más cercanos para cerrar huecos cognitivos. Frege no quiso enfrentar ningún problema del proceso de análisis conceptual; para él bastaba con aprehender un sentido que se obtiene de una sola vez:

En las definiciones formales dadas en *Begriffschrif*, son simples estipulaciones o abreviaciones de signos o nombres más complejos por unos más simples que facilitan la manipulación, siendo el *defniniens* y el *definiendum* iguales en contenido (recuérdese la ambigüedad de contenido) que en estricto sentido no habría ningún tipo de paradoja porque no son informativas o tienen valor cognitivo, sin embargo, como se mencionó hay una relación estricta con la noción de sintético y el agregado cognitivo si se atiende la igualdad en el forma "(A≡B)", en caso contrario el truismo "(A≡A)" es el único caso donde ni siquiera se tendría la necesidad de estipular una definición, porque en ese sentido absolutamente nada cambia.

Pero cuando se menciona en la definición formal que no hay un cambio en ningún aspecto, Frege no se refiere al valor cognitivo, entonces, con ellos se esté manifestado una transformación en el proceso de pasar de un concepto preteórico a uno teórico, sino que solo es un modo de presentación distinto de presentar dos nombres para un mismo objeto, en cuyo caso todos debemos captar el sentido (totalmente objetivo) de los nombres a usar independientemente de la representación subjetiva de cada uno de los usuarios. Por ello en estricto sentido no cambia nada la definición, pero si hay un valor cognitivo implicado. Por ejemplo, en la definición de *hereditariedad*: "La circunstancia de que la propiedad *F* se hereda en la serie *f*".

Lo que se planteó es que una definición formal intenta capturar el sentido unido a un término ya en uso, no introducido originalmente por definición, por medio de alguna expresión compleja representada como su equivalente.

Un modo de proceder contrario es el que tienen las definiciones informales y su requisito de *fertilidad*, contrario a la noción de *eliminabilidad* tratada, porque en las definiciones informales, al producir nuevas verdades, entonces, al análisis modifica los conceptos preteóricos. En su estrecho vínculo con lo sintético permite, *strictu sensu*, aumentar el conocimiento y producir nuevas verdades.

Aparentemente de forma distinta a las definiciones formales, las definiciones informales dadas en *Grundlagen* de número natural son fértiles, porque producen nuevas verdades reconocidamente analíticas. Por ejemplo, en la aplicación del principio de Hume cuando define la igualdad numérica en términos de correlación de igualdad uno-a-uno:

El número que pertenece al concepto *F* es el mismo que el número que pertenece a *G*, si todos los elementos que caen bajo *F* pueden ser puestos en correlación de uno-a-uno con todos los elementos que caen bajo *G*

Explicando la igualdad numérica en términos de la existencia de una correspondencia uno-a-uno entre los objetos que caen bajo el concepto *F* y aquellos que caen bajo el concepto *G*. También la definición explícita de número:

El número que pertenece al concepto *F* es la extensión del concepto "numéricamente equivalente al concepto *F*"

En este caso las definiciones informales cambian los contenidos que serán definidos, con productoras de verdades que no se encontraban explicitas en las propiedades de los números, por ejemplos, además de ser informativas por que se observan los distintos grados de comprensión del *definiens* y del *definiendum*.

3.2 Divergencia entre *eliminabilidad* y *fertilidad*

En *Los conceptos abiertos y la paradoja del análisis* Pinto argumenta acerca de las posibles soluciones a esta paradoja que dan Beaney y Dummett, demostrando la imposibilidad de los supuestos para resolver dicha paradoja.

En el análisis conceptual como se mencionó los contenidos conceptuales deberían proveer un contenido que coincidiera con el concepto preteórico a ser analizado, pero que además nos proporcione algo que nos genere valor cognitivo y produzca una verdad nueva, que dicho análisis sea informativo. Es decir reconciliar los dos requisitos de las definiciones o separarlos tajantemente: corrección y fertilidad. Frege separa los dos requisitos mediante los dos tipos de definiciones formales e informales en *Begriffschrift y* en *Grundlagen,* respectivamente; además de sintetizar o transformar la definición informal de número en definición formal en *Grundgesetze*.

Esta separación e integración de las definiciones con sus respectivos requisitos no resuelve el problema de la paradoja del análisis, porque como observamos en las definiciones formales Frege mantiene una noción de *contenido* ambigua que, siguiendo a Beaney, la resolvería mediante la distinción entre sentido y referencia, sin embargo, en ese momento no puede explicar el que haya una diferencia de valor cognitivo entre la igualdad "(A≡B)", solamente quedará claro la igualdad de contenido en los truismos y "(A≡A)". De ahí que este en relación con lo que mención Christopher Peacocke al mencionar que dos expresiones tienen el mismo contenido conceptual si su *intersustitución* en cualquier oración no cambia el valor cognitivo de la oración en cuestión (Citado en Pinto 2005, 209) Peacocke 1992, capítulo 1). Eso solo se logra con truismos solamente.

Supongamos que la distinción sentido y referencia efectivamente de cuenta del valor cognitivo de la igualdad (A≡B) en las definiciones, al mencionar que son dos nombres que refieren al mismo objeto con distinto sentido, entonces, podemos sustituir en una relación de igualdad, reemplazar el nombre de uno por el otro en cualquier ocurrencia, sin prejuicio de la verdad; sin embargo, eso solo puede ocurrir en las definiciones formales y no en las definiciones informales porque si la referencia de una oraciones es su valor de verdad, entonces, en una identidad de las definiciones informales se puede sustituir cualquier de los lados de la igualdad por una oración con mismo valor de verdad preservando así la corrección de la definición, lo cual no tendría sentido.

Por ello la distinción sentido/referencia no sirve para dar cuenta de la paradoja del análisis, o simplemente la referencia de una oración declarativa no es su valor de verdad. Beaney sugiere que el equívoco está en el segundo caso y la referencia de una oración sería el estado de cosas en términos de condiciones de verdad: podemos decir que sus respectivas condiciones de verdad corresponden a un nivel de contenido de la oración.

Beaney considera el contenido lógico de la oración, la cual reduciría a la de referencia en el caso de las expresiones sub-oracionales. En este contexto, Beaney sugiere que mediante la distinción entre sentido y referencia se realice también la distinción entre dos tipos de contenidos: el contenido lógico y el contenido cognitivo de una oración:

> (CC#) dos proposiciones tiene el mismo contenido veritativo, si y solo si, ellos son materialmente equivalentes
>
> (CC*) Dos proposiciones tiene el mismo contenido lógico, si y solo si, ellos son lógicamente equivalentes (probablemente materialmente equivalentes
>
> (CC†) Dos proposiciones tiene el mismo contenido cognitivo si y solo ellos son equivalente cognitivamente

En (CC#) se hace alusión a la noción de referencia y respecto al sentido los divide en (CC*) y (CC†). La división de los contenidos está en función de la apreciación de Beaney acerca de la necesidad de desambiguar la noción de contenido. El *Definiens* y el *defninedum* deben ser, por lo menos, lógicamente equivalente; si el análisis es fecundo, entonces parecería que ellos también deben tener diferente contenido cognitivo. La Distinción entre sentido y referencia, dice Beaney, se ofrece como una respuesta a la paradoja, pero su argumentación es inadecuada. Sugiere justificar la corrección del análisis sin apelar a la noción de estipulación de la manera siguiente:

> La eliminación de un nombre propio de una frase que representa un contenido (que se puede utilizar para hacer un juicio) se obtiene una expresión incompleta que representa un concepto; y con una oración

> compleja habrá más de una forma de hacer esto. Desde diferentes conceptos de este modo resultan, las definiciones y análisis pueden ser fructíferos en la revelación de nuevos conceptos de un contenido dado. (Beaney 1996, 234).

En el caso de las definiciones formales no hay problema respecto en los tipos de contenidos, pero en las definiciones informales se sugiere que hay conservación del contenido lógico de las oraciones y no-conservación de su contenido cognitivo. En el caso de la diferencia de contenido cognitivo en las definiciones es fácil observar que hay un elemento creativo de la constitución del contenido, que corresponde a la modificación del contenido cognitivo, existente por la comunidad lingüística, con ello no se cumple se cumple (CC†) pero en el caso de la equivalencia lógica se puede "justificar como una determinada manera de analizar el concepto *el número que corresponde al concepto F*.

Si esta es la explicación de la corrección de las definiciones informales, entonces, no tendríamos una manera fehaciente para saber si los análisis son correctos. Difícilmente se puede observar pero alguien consideraría que el *defienens* de estas definiciones se preserva en todas las propiedades aritméticas de los números. Sin embargo, como sabemos en las definiciones informales las verdades que ellas atribuyen a los números, son nuevas las cuales no se habían asociado con ellos antes de dichas definiciones. Si esto es así, habría un problema para saber cómo el nuevo concepto de número con sus nuevas propiedades, es una extensión correcta del anterior concepto de número. Por ello difícilmente la identidad de contenido lógico y la diferencia entre los contenidos cognitivos dan respuesta a la paradoja del análisis. Agrega Pinto:

> Aunque no sea para nada trivial que deba existir una diferencia cognitiva entre ambos lados de (PH) y (DEN), me parece más fácil explicarla que justificar la identidad de contenido lógico entre los mismos y por lo tanto la corrección de estas definiciones sin apelar a algún tipo de estipulación. No obstante, la idea de que esta identidad de contenido se apoya en una estipulación es claramente incompatible con la fertilidad del análisis. (Pinto 2005, 205).

Frege considera que cualquier definición exitosa debe ser inmediatamente reconocida como tal: cualquier persona que conozca, tanto el sentido del término definido y de la expresión por el cual se propone definir, debe saber que son los mismos. Caso contrario que el sentido de la definición no sea clara es porque no se ha tenido una clara comprensión del sentido del término que se trata de analizar:

> En este caso la recomendación de Frege es que debemos abandonar el viejo término y emplear en su lugar uno nuevo sin el disfraz, con el avance de la misma definición que hemos propuesto para el término viejo. (Dummett, Frege and other philosophers 1991, 18).

Pero lo más natural es suponer que cuando se utilizan términos nuevos, la definición ya no pretende ser una verdad analítica porque no hay tal *sinonimia* por la forma de la identidad "A=B". Frege no lo considera: "pero será una estipulativa o constructiva, establecido sin ninguna afirmación de que capta el sentido de cualquier término existente; y así se eluden los problemas de análisis" (Dummett, Frege and Other Philosophers 1991, 18).

Esto está en concordancia con la relación que guarda la definición fructífera y el proceso de análisis ya que se pretende introducir un sentido claro donde antes sólo había un sentido desdibujado, evitando en todo momento cualquier pretensión que considere que hay una igualdad entre estos sentidos (Frege no da una explicación fehaciente al respecto).

Aunque aparentemente Frege sabía de las imposiciones de los problemas que conlleva el proceso de análisis conceptual, simplemente lo trató de una manera secundaria, sin dar un criterio claro acerca de la concepción de los sentidos en las definiciones. Tal vez si Frege hubiera avanzado en ese aspecto si hubiera atendido adecuadamente su concepción acerca de las definiciones fructíferas "en lugar de mantener que las definiciones son, en principio, prescindible y dejan sin cambios en el contenido" (Dummett, Frege and other philosophers 1991, 195).

El análisis conceptual es anterior a la tradición analítica Frege-Russell, tan viejo como la propia filosofía, sin embargo, la preocupación actual es acerca de la paradoja del análisis que Frege no visualizó adecuadamente y no le dio un tratamiento adecuado.

En ese orden de ideas es importantes sólo mencionar que, de la misma forma que a Kant, la paradoja del análisis a Frege no le causó demasiada incertidumbre. En el fondo tanto Kant como Frege estarían de acuerdo sólo en considerar que el proceso de *análisis lógico* es incompleto hasta que en la cadena deductiva se llegue necesariamente a una definición totalmente enmarcada en términos *indefinibles*. El resultado del análisis conceptual necesariamente nos conecta con una verdad analítica, la cual tendría el problema acerca de si nos proporciona información o no, en caso afirmativo ¿cómo puede ser posible atendiendo la característica de analítico?

En este caso no podemos contraponer los requisitos de eliminabilidad y fertilidad y sus respectivas definiciones como antagónicas porque cumplen propósitos distintos.

Concluyendo

Se analizaron las características de las definiciones formales y su respectivo principio: *eliminabilidad*. A su vez este principio está en contraposición con el principio propio de las definiciones informales: *fertilidad*. Esto sucede cuando se quien vincular ambos tipos de definiciones. Sin embargo es muy importante aclarar que los principios antes mencionados, se aplican a la división de definiciones formales e informales que corresponden, a *Begriffsschrift* y *Grundlagen* respectivamente: dichos requisitos corresponden a momentos distintos de las obras de Frege y sus respectivas definiciones.

Es importante contextualizar éste tipo de definiciones informales dadas en *Grundlagen*: no son precisas ni son simples abreviaciones o estipulaciones arbitrarias, sino que pueden producir algo más en las derivaciones. Se pretende, mediante las definiciones informales, explicar un concepto mediante lo que significa, en este caso, llegar a los fundamentos últimos de la naturaleza de los números.

Parecería simple que después de comprender la definición formal dada en *Begriffsschrift*, y la definición informal dada en *Grundlagen* y atendiendo sus propósitos específicos en cada obra, no tendríamos la necesidad de vincularlas, sin embargo, lo que se dice en una y otra definición es sumamente importante e inevitablemente se vinculan y surge con ello la paradoja del análisis, al tratar de conciliar ambas definiciones.

Se analizaron algunas posturas acerca de la solución a la paradoja del análisis sin pretender dar una solución propia a dicho problema: dadas las condiciones del trabajo es menester mencionar las posibles soluciones debido a que tratamos con los dos tipos de definiciones.

En el siguiente capítulo observaremos como Frege no vincula las definiciones formales con las informales, sino que transforma esta última, la definición filosófica de número natural, en una definición formal. Probablemente Frege con este cometido muestra el poco interés por resolver la paradoja del análisis y con ellos nos da muestra de que pueden utilizarse ambas definiciones en su universo específico sin una vinculación necesariamente.

4. PRINCIPIOS DE DEFINICIÓN

Sobre *Grundgesetze der Arithmetik*[29]

Introducción

Frege en *Grundgesetze der Arithmetik* en *Principles of definition*, expone los principios que deben contener las definiciones, sintetizando lo que ha dicho en obras anteriores al respecto del tema que nos ocupa.

El propósito de este apartado, es mostrar el cambio de definiciones informales (fructíferas) a definiciones formales (estipulativas), trabajo que Frege pretendió realizar y sintetizar en esta obra que se presenta: *Grundgesetze*. Aquí se sintetizan ambas definiciones o más precisamente se transforma la definición filosófica de número dada en *Grundlagen* mediante un sistema formal como *Begriffsschrift*.

En esta sección analizaremos los elementos de propios de un sistema de *Begriffsschrift* indicando los cambios mínimos en *Grundgesetze*, seguido del análisis de las reglas para la formación correcta de nombres en dicho sistema. Continuando con el análisis de la noción de igualdad dad en la obra que nos ocupa así como los principios de las definiciones, que en este caso vuelve a las definiciones formales. Agregaremos los principios de *Compleción* y *simplicidad*.

Por último se muestra que mediante la construcción de la definición informal de número en el lenguaje de *Begriffsschrift* se evita, no se resuelve, el problema de la paradoja del análisis que se mostró en la sección anterior.

4.1 Elementos de *Grundgesetze*

Antes de iniciar formalmente con el proceso de cambio de definición informal de número a la definición formal, es necesario mostrar las características, de cambio o agregación al sistema de *Begriffsschrift*

La barra horizontal es sustituida debido al abandono de contenido por la distinción sentido y referencia y también las referencias de las proposiciones son los valores veritativos. Por ello la horizontal se utiliza solamente con funciones cuyo valor siempre es un valor veritativo, es decir para conceptos.

La barra de contenido es sustituida por la horizontal que elimina la confusión entre pensamiento y valor veritativos, en este caso “–A” es lo verdadero, si A es lo verdadero o cuando A no es un valor veritativo como los nombres o términos, por ejemplo “pedro” o “5” serian nombres que no tendrían cabida en el lenguaje técnico

---

[29] *Grundgesetze der Arithmetik* (1903)

Asimismo recordemos que esta obra sufre un problema muy grande expuesto por Russell que Frege ya lo había anunciado y es la dificultad que presenta el axioma 5 que introduce la noción de curso de valores que había sido añadido en al sistema de *Begriffsschrift* y que aparece en *Funktion und Begriff* manteniendo la misma notación. Frege menciona la importancia de los cursos de valores en §IX-X de *Grundgesetze*: "yo defino al número como la extensión de un concepto, y las extensiones conceptos son, como he determinado, cursos de valores" (Frege, The basic laws of arithmetic 1964, 6)

Dos funciones tiene el mismo curso de valores si y solo si tienen siempre el mismo valor para el mismo argumento con concepto es una función cuyo valor es siempre un valor veritativo, por ello la extensión de un concepto es el curso de valores veritativo de una función de este tipo. Sugiere Frege que todo objeto puede ser considerado como un curso de valores, como la extensión de un concepto, bajo el cual ese y solamente ese objeto cae, tal y como se precisó informalmente en *Grundlagen*

4.2 Igualdad

En *Grundgesetze* Frege vuelve al tema de la definición como simple proceso de abreviación, al igual que en *Begriffsschrift* introduce el signo ||−. Algo que se debe notar en esta obra es el reemplazo del símbolo de identidad "≡" por "=" y con ello la igualdad tiene la siguiente forma: ||−A=B. Respetando el mismo orden para el *definiens* y *definiendum*.

Vuelve nuevamente en este escrito, como en *Begriffsschrift* a considerar una definición como "una estipulación que establece que un signo, recién introducido va a tener el mismo sentido y referencia que un signo complejo, compuesto de signos familiares" (Frege, The basic laws of arithmetic 1964, 82). Teniendo la siguiente forma que ya se había mencionado ||− *definiens* (antiguo signo complejo) = *definiendum* (nuevo signo más simple). Esa forma puede ser usada como una proposición o teorema del sistema, estableciendo reglas para la formación correcta de nombres: deben ser introducidos como primitivos o por definición. Con el nuevo signo de identidad se establece el principio de igualdad: "Todo objeto es idéntico a sí mismo".

Siguiendo a Horty en el caso de la aplicación del principio de identidad, en su forma (A=B), si se tienen dos expresiones distintas, donde B no tiene ningún significado y sólo se introduce para abreviar, con distinto modo de presentación, pero con el mismo referente que A (signo que está abreviando), entonces, no puede ni debe tener un significado distinto al ya estipulado anteriormente en el lenguaje descrito. Pero, como se mencionó en secciones anteriores esto aumenta el conocimiento con lo que tendríamos un agregado cognitivo.

Horty observa que aunque *Grundgesetze* sea una lengua ideal formal, y aun cuando esto realmente contenga una facilidad para introducir expresiones definidas, se puede criticar que dicha facilidad de introducir símbolos en la definición, no es parte sustancial de dicho lenguaje, es decir, se reduce a una simple conveniencia tipográfica, siendo sólo una visión estándar de la definición, tal y como se le atribuye a Whitehead y Russell en *Principia Mathematica* donde se cita lo siguiente:

> Por tanto, aunque empleamos definiciones y no definamos "definición", sin embargo, "definición" no aparece entre nuestras ideas primitivas, porque las definiciones no son parte de nuestro sujeto, pero son, en sentido estricto, meras conveniencias tipográficas, y teóricamente, todas las definiciones son superfluas. (Russell y Whitehead 1963, 11).

Por ello se le considera a Frege, por lo mencionado, dentro de dicha tradición. Para ello Horty cita a Sören Stenlund:

> Según la tradición Frege-Russell una definición es simplemente una convención de abreviatura de escritura. De este punto de vista, una definición no juega ningún papel esencial dentro de una teoría; su único papel es dentro de la descripción lingüística de la teoría. (Horty 2007, 25)

Este tema se trató en secciones anteriores, se menciona por la similitud de la obra que estamos tratando. Frege menciona acerca de las definiciones formales en *Begriffsschrift* que "tales definiciones sólo tienen el propósito de producir una simplificación extrínseca por medio del establecimiento de una abreviación" (Frege, Conceptografia 1972, 39). Entonces las definiciones son sólo convenciones que no tienen una finalidad fuera del sistema donde son introducidas:

> Las definiciones no son absolutamente esenciales a un sistema. Nosotros podríamos arreglarnos con el grupo original de signos. La introducción de un signo simple no añade nada al contenido; esto sólo hace para la facilidad y la simplicidad de expresión. (Frege, 1914, p. 208).

En ($A \equiv B$) lo que se tiene es un caso de acuerdo con el sentido, entre expresiones estructuralmente distintas: Si B, un símbolo sin significado, se estipulada para significar exactamente lo que A, entonces, B no debería significar algo más. Esto es acorde a lo que ha mencionado Frege desde *Begriffsschrift*. Sin embargo, aunque no se explicite, tenemos que remitirnos siempre al aspecto sintético de las definiciones.

4.3 Principios de definición

En el apartado *Principles of definition* de la sección 2 *Definitions* de *Grundgesetze* se mencionan los principios para introducir signos mediante definición:

> 1. Cada nombre correctamente formado a partir de los nombres definidos debe tener una denotación.

Siempre debe producirse un nombre compuesto de los ocho nombres primitivos. Todo nombre adquirido por definición tiene que tener una referencia, garantizada si es *retraducible* a los primitivos. Mediante este paso Frege intenta reducir las formulas aritméticas a leyes puramente lógicas.

En la formación de los nombres, los nuevos signos introducidos deben ser primitivos o introducidos por definición, teniendo que obedecer las convenciones para el tipo de nombre al que esos signos pertenecen. Además todo nombre bien formado tiene que tener una referencia y este requisito es asegurado mediante un procedimiento recursivo: se parte de un conjunto de nombres primitivos y sus referencias, y luego establecemos paso a paso las reglas para la extensión de la esfera de los nombres.

La noción de nombre ahora incluye a las funciones lingüísticas y utiliza nombre propio para lo que antes llamaba nombre: cambia la notación de nombres y predicados para referirse a nombres propios, nombres de objetos (proposiciones completas, valores veritativos) y nombres de función. Es importante señalar que los únicos objetos que garantizan su existencia son los valores veritativos y ya no los objetos que en *Grundlagen* introdujo como la luna o Julio Cesar.

Consideremos que hay algunos elementos primitivos que no se puede probar, sin embargo, es necesario mencionar que las pruebas declaradas como tales, sean mencionadas así y se reduzca el número de primitivos[30]. Es necesario reducir a menor número de primitivos en el sistema a fin de que cualquier error que se encuentre en el mismo se pueda localizar rápidamente y de una manera muy clara: ya sea que se encuentre en los axiomas, en las definiciones, o en las reglas de aplicación de estas. En el capítulo primero introduce el vocabulario primitivo que consta de 8 nombres que son nombres de funciones[31], ninguno ellos es nombre de objeto:

Nombres de funciones de primer nivel con un argumento:

“–ξ”

“Tξ”

“/ξ”

Nombre de funciones de primer nivel con dos argumentos:

“ξ→Ϛ”

“x=z”

Nombres de funciones de segundo nivel con un argumento:

“(x)Φ(x)”

ξ Φ (ξ')

[30] Estos primitivos son los principios de los que trata la obra, porque son considerados como axiomas o proposiciones sin demostrar de donde se deriva todo el sistema.

[31] Es de notar que la igualdad que tiene una definición se da entre nombres, nunca entre funciones: lo que se igualan son expresiones saturadas no expresiones que contienen uno o más lugares vacíos. De ahí el uso de letras góticas en los cursos de valores.

Nombre de función de tercer nivel

(f)MB(f(B))

Para Se realiza de una manera sencilla la formación de nombres mediante estos 8 primitivos. Sea el caso de "Tξ" si rellenamos mediante un nombre propio, el lugar del argumento, con un nombre que tiene una referencia este a su vez tiene una referencia siendo el resultado un valor de verdad atendiendo el signo de la negación "T". Así se muestra que cada uno de los ocho nombres primitivos tiene una referencia, luego prueba que lo mismo ocurre con todos los nombre compuestos a partir de los primeros de acuerdo a las reglas y finalmente nos dice que todo nombre correctamente formado posee no solo una referencia sino también un sentido. Es decir vuelve al sistema de *Begriffsschrift* y la noción de las definiciones formales.

En ese orden de ideas menciona Frege en §50 de *Grundgesetze*, que todo nombre de un valor veritativo, así formado, expresa un sentido, un pensamiento "A saber, por nuestra estipulación se determina bajo qué condiciones el nombre denota lo verdadero" (Frege, The basic laws of arithmetic 1964, 90). No todos los nombres son nombres de valores veritativos. Frege agrega en el mismo texto en §51:

> Los nombres, sean simples o compuestos que forman el nombre de un valor veritativo contribuyen a la expresión del pensamiento, y esta contribución de los componentes individuales es su sentido., si un nombre es parte del nombre de un valor veritativo, entonces el sentido del primer nombre es parte del pensamiento expresado por el ultimo nombre (Frege, The basic laws of arithmetic 1964, 51)

Es decir que el sentido de las palabras está determinado por su contribución al sentido las proposiciones en donde ocurren y el sentido de las proposiciones está dado por las condiciones bajo las cuales son verdaderas.

2. Se deduce de 1 que un mismo signo no puede ser definido en dos ocasiones porque permanece en duda si las definiciones son coherentes entre sí.

Si un signo se define más de una vez, no previene la inconsistencia entre definiciones diferentes, lo cual podría encubrir y mostrar una contradicción en el sistema debido a que se utiliza un nombre con distintos significados en dos ocurrencias distintas que al manipularla en una demostración, probablemente encontraríamos una laguna o un elemento extraño que nos llevaría una contradicción inminente.

3. El nombre definido debe ser simple.

Es decir que el nombre definido no puede estar compuesto de cualquier nombre o nombres familiares que aún no se han definido previamente. El nuevo nombre a introducir ha de ser simple, y no deberá contener ningún término que haya sido introducido en una ocasión diferente (cautela por eliminar la inconsistencia) o que haya sido aclarado previamente

4. Si de lado izquierdo de la identidad definicional que se ha formado se tiene un nombre propio formado de los nombres primitivos o nombres definidos, entonces esto siempre tiene una denotación, y que se coloque en el lado derecho un signo simple no empleado anteriormente, se introduce ahora en la definición como un nombre propio que tiene el mismo significado, para que podamos en el futuro sustituir este signo dondequiera que ocurra el nombre de la izquierda. Por supuesto este signo puede ser utilizado como un nombre de una función, que al hacerlo sería para cortar rutas de regreso a los nombres primitivos

El lado izquierdo de la identidad definicional (*definiens*) ha de contener un nombre formado por nombres primitivos o que hayan sido definidos previamente y el signo del lado derecho (*definiendum*) ha de contener un signo que no haya sido empleado previamente.

La eliminación introduce al *definiendum* como un signo de significado equivalente que pueda reemplazar o ser reemplazado por el *definiens*, conservando su significado original. Lo cual estaría en concordancia con su proyecto logicista original.

4.4 Principios de *compleción* y *simplicidad*

Los principios que debe satisfacer toda definición son: *compleción* y *simplicidad*. En el primer caso para que la definición sea completa tiene que estipular su ocurrencia en todo posible contexto, es decir, tiene que estar determinado para cada objeto si esta cae o no bajo tal concepto. En caso contrario un concepto que no está bien definido sería un *pseudoconcepto*, de igual forma que un nombre sin referencia es un *pseudonombre*, como “Santa Claus” “Dios” “alma” entre otros. Los *pseudoconceptos* son intratables en la lógica.

La definición debe establecerse sin ambigüedad, distinguiendo las condiciones bajo las cuales un predicado es verdadero de un objeto, el concepto. Caso contrario sería la definición gradual (también la definición condicional), por ejemplo, si la raíz cuadrada de $\sqrt{9}$ ha sido definida sólo para los enteros positivos, entonces, se derrumba en el momento que se le da tratamiento a los negativos (3, -3). Si no se cuenta con una definición total y definitiva, entonces, no tendríamos teoremas finales sino parciales y con ello nunca se podrá eliminar la ambigüedad y vaguedad en el sistema.

Respecto del principio de simplicidad se hace alusión a que todo símbolo a introducir por definición tiene que ser un símbolo simple, en el sentido de que no tenga partes que a su vez sean símbolos, por el hecho de que si existieran más símbolos, entonces, las partes también necesitarían ser definidas separadamente y tal vez contradijeran la definición del conjunto donde son introducidas: “no podemos definir un símbolo o palabra definiendo la expresión en la cual ocurren y cuyas restantes partes son conocidas” (Kenny 1997, 216).

Respecto de la referencia de una expresión, no se puede dar la referencia de una parte de ella porque sería insuficiente para determinar la referencia de la parte restante. Aquí puede haber alguna contrariedad en la argumentación, en tanto se considere que la definición establece, en principio, una relación entre sentidos y no entre la referencia, la cual es conectada con el primero: aparentemente contrario a la definición contextual la cual enuncia que nunca debemos preguntar aisladamente por el significado de una palabra, porque cada palabra no refiere un objeto concreto y nos llevaría a elegir una imagen mental como su significado. Si se ocupa de oraciones solamente y no de palabras aisladas, entonces, no habría razón alguna por la cual se necesite definición explicita de las palabras, como menciona Dummett: “era una justificación de las definiciones contextuales y que pensaba que esta era una de sus consecuencias más importantes” (Dummett, La verdad y otros enigmas 1990, 166).

Por ello sería extrema la interpretación de que se rechazan estas definiciones contextuales en los *Grundgesetze*: Frege sólo invirtió su posición de estas definiciones contextuales, porque, aunque Frege crítica de manera explícita dichas definiciones, se basa en la presuposición de que sólo las definiciones explicitas son legítimas. Por lo que, citando Dummett a Quine, menciona este último que “lo importante de Frege es que descubre que la unidad mínima del significado no es la palabra sino la oración” (Dummett, La verdad y otros enigmas 1990, 166). Esto puede ser criticable, pero no es propio de este trabajo

A pesar de que en los *Grundgetsetze*, menciona Dummett, se puede otorgar significado a algunos nombres otorgándoselo a otros, sin dar un principio acerca de cuáles serían esos nombres, no se contrapone en su totalidad a la definición contextual en el sentido de que lo que interesa son las oraciones y/o expresiones breves que nos permiten afirmar o realizar actos en donde entra en consideración la verdad o falsedad, como se mencionó en la primera sección acerca del tratamiento del contendido judicable de *Begriffsschrift*.

Dummett en *The interpretation of frege's philosophy* menciona que Kluge[32] distingue dos tipos de simplicidad en Frege:

> La simplicidad de una expresión, es decir, como un conjunto de una sola palabra o símbolo, ya sea primitiva o introducida por definición; y su inanalizabilidad o indefinibilidad (Dummett, The interpretation of frege's philosophy 1939, 178)

A lo que Dummett agrega una tercera: “aquellas expresiones que poseen la propiedad más fuerte de ser incapaz de ser definido, es decir, no son susceptibles de análisis lógico” (Dummett, The interpretation of frege's philosophy 1939, 178). Considera que si se construye una teoría se puede elegir algunos términos tratados como primitivos que también tienen la posibilidad de haberse elegido como definidos, si se hubiese elegido como tal, siendo términos no definidos pero no indefinibles, es decir, susceptibles de análisis lógico. Caso contrario aquellos nombres simples que no sólo no son introducidos por definición, sino que son absolutamente indefinibles y resistentes al análisis lógico. Esta consideración se trató en el apartado acerca de los primitivos.

Finalizando, el principio de simplicidad menciona que todo símbolo a introducir por definición tiene que ser un símbolo simple, que no tenga partes que a su vez sean símbolos

[32] Se refiere a la obra de Kluge "*Frege's Begriff* des Logischeinfachen" página 52

independientes con significados propios, que tendrían la posibilidad de contradecir a las definiciones dentro de un sistema y cuyo significado no está dado por la misma definición.

4.5 Definición informal de número en el lenguaje de *Begriffsschrift*

En §XIII-XIV de *Grundgesetze* al argumenta en contra de la noción formalista de definición creativa, vuelve a las definiciones formales, mencionando que una definición no puede adornar una cosa con propiedades que antes no tuviera, creándolas o inventándolas, solo la propiedad de significar algo que ya estaba dado previamente:

> No se puede, por pura definición, conjurar mágicamente en una cosa una propiedad que de hecho no posee, salvo la de llamarla por el nombre que se le haya otorgado (Kenny 1997, 188)

Recordando *Grundlagen*, menciona que todas las definiciones que se aporten deben abandonar la pretensión de ser creativas: tiene que ser imples abreviaturas de términos complejos, introducidas para simplificar la escrita der las pruebas.

> Las definiciones no son propiamente creadoras, no lo pueden ser, sólo introducen designaciones (nombres) abreviaturas, que podrían ser evitadas si la longitud no produjera en tal caso dificultades externas insuperables (Frege, Prólogo a Las leyes fundamentales de la aritmética 1996, 224).

A las definiciones se les atribuye erróneamente una fuerza creadora, pero no se hace más que resaltar algo delimitándolo y asignándole un nombre, refiriéndose a las definiciones formales dadas en *Begriffsschrift* como meras definiciones conservadoras.

Entrando en materia, Frege menciona que la concepción de número es la misma que tenía se muestra en las definiciones informales dadas en *Grundlagen*. Parte del mismo principio que dio en §46 de *Grundlagen*, que el número es una propiedad de un concepto , es decir, que una proposición numérica asigna una propiedad a un concepto, recordando que el concepto fregeano es algo objetivo y no es una entidad psicológica semejante a una imagen.

Frege menciona que las definiciones no pueden agregar más contenido del que ya se tenía, en el sentido de que sólo se estipula o sintetiza un conjunto de signos más extensos por uno menos extenso, lo cual no estaría en contraposición con su principio de fertilidad mencionado anteriormente, pero en este caso está hablando de las definiciones formales. Para tener mayor claridad vemos el siguiente ejemplo:

> En la definición del número cero: es algo que sumado a uno da uno.

Frege menciona que se ha definido concepto al indicar la propiedad que ha de tener un objeto para caer bajo el concepto como se mencionó en *Grundlagen*, sin embargo, no se ha creado nada en absoluto, debido a que ni el concepto que se definió, ni la definición garantiza que el concepto sea vacío: “crear el cero es imposible” (Frege, Prólogo a Las leyes fundamentales de la aritmética 1996, 234). Pero no está en contraposición a la noción sintética que se mantiene en las definiciones informales: una definición es fructífera, aumenta el conocimiento, pero no es creadora, en el sentido fuerte del término, de entidad alguna.

En el cuerpo de la obra *Grundgesetze*, Frege arguye que una de las características de la definición es que sirve para conectar un sentido con una palabra, la cual se supone está vacía de contenido, pretendiendo darle contenido, siendo propiedades del contenido y no del signo en sí mismo. Agrega que una definición no puede adornar una cosa con propiedades que antes no tuviera ya, aparte de la propiedad de significar.

Ataca la noción formalista de definición creativa, la cual pretende, que por pura definición, uno puede *agregar* en una cosa una propiedad que de hecho no posee, independiente del nombre distinto que se le haya asignado y del contenido cognitivo.

Tomemos en consideración que ahora Frege intenta sintetizar los dos tipos de definiciones formales e informales iniciando con la primera para continuar con la segunda. Y en algunos momentos como se observa se sintetizan ambas

En esta parte Frege transformar definición informal del número en una definición formal, en la escritura conceptual, dicho desarrollo lo compara como una método similar al de Euclides en la campo de la geometría.

Entrando en materia, Frege menciona que la concepción de número es la misma que tenía se muestra en las definiciones informales dadas en el §46 de *Grundlagen*, que el número es una propiedad de un concepto, una proposición numérica asigna una propiedad a un concepto, recordando que el concepto es algo objetivo y no es una entidad psicológica semejante a una imagen.

El paso que realiza para conciliar las definiciones informales en *Grundlagen* con las definiciones formales utilizadas en su sistema de *Begriffsschrift* lo realiza se apoya con la formula y que es una régimen de la expresión informal “x es un miembro de z”.

En el § 37 de *Grundgesetze* trata de definir el número como a los numero individuales, introduciendo un signo para la relación muchos-a-uno y en §38 se menciona la definición de equivalencia entre conceptos todo esto realizado en *Grundlagen*.

Introduce en el §57 la palabra “mapeo” para expresar lo que hace una relación cuando correlaciona, en correspondencia de muchos-a-uno, los objetos que caen bajo el concepto *F* con los objetos que caen bajo el concepto *G*.

Consideremos que si a un concepto cuya extensión esΓ, se le llama conceptoΓ.

En la misma sección, al igual que *Grundlagen*, Frege utiliza el concepto de equivalencia para definir el número del *concepto-*Γ como la extensión del concepto equivalente al *concepto-*Γ, a una relación cuyo concepto es Δ la llamamos *concepto-* Δ, a una relación cuya extensión *V*, la llamamos una *relación –V*, entonces, se puede decir que la *relación-V mapea* el *concepto-Γ* sobre el *concepto -Δ*.

Si los conceptos son equivalentes entonces, el primero ha de darse en las dos direcciones; esto es, no solo debe la *relación-V* mapear el primer concepto sobre el segundo, sino también al revés.

Luego en §58 procede a definir los números de forma individual:

> El numero 0 como el número que pertenece al concepto cuya extensión es ξ' (¬ξ=ξ);
>
> El número 1 como el número que pertenece al concepto cuya extensión es ξ' (¬ξ=0).

Y la relación de sucesor, es la que aparece en *Grundlagen* §76, pero con algunas alteraciones mínima y escrita en su sistema de *Begriffsschrift*.

De este modo Frege realiza la síntesis en *Grundgesetze* de las definiciones informales acerca del número dadas en *Grundlagen* escrituradas en su sistema de *Begriffsschrift*

Concluyendo

Nuevamente Frege se refiere a las definiciones formales, aquellas que son utilizadas de forma precisa en un sistema formal, por lo que critica a toda definición que pretenden ser creadora: como se ha mencionado constantemente la noción de crear no es acorde ni siquiera con la definición fructífera porque esa última no crea, solo "produce". Las definiciones formales sólo pretenden sustituir conjuntos de signos por unos más manejables.

Se vuele a utilizar la distinción sentido y referencia para mencionar la característica de la noción de sintético que acompaña a la definición que es una aplicación del principio de identidad.

Los principios de definición sintetizan todo lo que se ha mencionado hasta el momento: la necesidad de que los nuevos nombres introducidos por abreviación sean simples, no se hayan definido previamente, tengan una denotación, se puedan sustituir fácilmente por los signos que abrevian, etcétera, evitando la inconsistencia o contradicciones que puedan surgir.

Se observó que el propósito de transformar la definición filosófica de número dada en *Grundlagen* mediante un sistema formal como *Begriffsschrift*: evita, no se resuelve, el problema de la paradoja del análisis. Para ello se analizaron los elementos propios de un sistema de *Begriffsschrift* y los cambios mínimos realizados en *Grundgesetze*, aunado a las reglas para la formación correcta de nombres y los principios antes mencionados.

Conclusiones

Las definiciones que han sido tratadas a lo largo de este trabajo refieren a las definiciones por estipulación o definiciones formales a la manera como se caracterizan en *Begriffsschrift* y las definiciones fructíferas o informales, caracterizadas en *Grundlagen*.

Muy en el fondo Frege sólo le interesaban las definiciones formales que se dan en la construcción de su *lingua characteristica* sin ir más allá de ese instrumento, pero al atender la definición de número, ve la imposibilidad de utilizar aquellas definiciones para llegar a la naturaleza de los números, por lo que recurre a una definición totalmente distinta, apelando nuevamente a las distinciones kantianos de una forma no muy clara, para arremeter contra todas las definiciones anteriores acerca del número, considerándolas superfluas por no tener la característica de fertilidad, que como se observó no es sumamente clara.

En ambas definiciones se acepta la noción de analítico y de sintético con variaciones que en el trabajo han quedado plasmadas. En el fondo son las mismas pero las definiciones formales son propias de un lenguaje objeto y las definiciones informales parecen estar en un metalenguaje que pretende aclarar el significado de algo, en este caso del número.

Estas definiciones lo llevan a los problemas de la paradoja del análisis que nunca quiso atender de manera adecuada como la mayoría de los términos, porque era tanto su empeño por llevar a cabo su proyecto *logicista*. Desatendió demasiados problemas que hasta la fecha son motivo de preocupación: la definición, los indefinibles y el proceso de análisis con una base ambigua acerca de las distinciones entre analítico/sintético y a priori/ a posteriori.

Se observó que en *Grundgesetze* el propósito que tenía Frege era transformar la definición filosófica de número dada en *Grundlagen* mediante un sistema formal como *Begriffsschrift*, que evita, pero no resuelve, el problema de la paradoja del análisis.

Bibliografía:

Beaney, Michael. *Frege: Making Sense.* London: Duckworth, 1996.
Blanchette, Patricia. *Frege's conception of logic.* Oxford: Oxford University Press, 2012.
Burge, Tyler. *Truth, thought, reason: essays on Frege.* Oxford: Clarendon Press, 2005.
Coffa, J. Alberto. *La tradición semántica. De Kant a Carnap.* México: UAM, 2005.
Dummett, Michael. *Frege and other philosophers.* Oxford: Clarendon Press, 1991.
—. *Frege and Other Philosophers.* New York: Oxford, 1991.
—. *La verdad y otros enigmas.* México: Fondo de Cultura Económica, 1990.
—. *The interpretation of frege's philosophy.* Cambridge: Harvard University Press, 1939.
Ferrater, Mora José. "Diccionario de Filosofía." 411. Buenos Aires: Sudamericana, 1964.
Frege, Gottlob. "Conceptografia." In *Conceptografia : los fundamentos de la aritmetica, otros estudios filosoficos*. México: UNAM, 1972.
Frege, Gottlob. "Correspondence Frege-Hilbert." In *Philosophical and mathematical correspondence*, by Frege. London: Basil Blackwell, 1980.
Frege, Gottlob. "El pensamiento: Una investigación lógica ." In *Ensayos de semantica y filosofia de la logica*, by Tr. y notas de Luis M. Valdes Villanueva. Madrid: Tecnos, 1998.
Frege, Gottlob. "Función y concepto." In *Escritos filosoficos*, by Tr. Jesús Mosterín. Barcelona: Crítica, 1996.
Frege, Gottlob. "La Lógica en la Matemática." In *Escritos Lógico-Semánticos*. Madrid: Tecnos, 1974.
Frege, Gottlob. "Los fundamentos de la aritmética." In *Escritos filosoficos*, by Tr. Jesús Mosterín. Barcelona: Crítica, 1996.
Frege, Gottlob. "Los fundamentos de la geometría." In *Tr. Jesús Mosterín*, by Escritos filosoficos. Barcelona: Crítica, 1996.
Frege, Gottlob. "Los fundamentos de la geometría, I ." In *Tr. Jesús Mosterín*, by Escritos filosoficos. Barcelona: Crítica, 1996.
—. *Posthumous Writings.* London: Basil Blackwell, 1979.
Frege, Gottlob. "Prólogo a Las leyes fundamentales de la aritmética." In *Escritos filosoficos*, by Tr. Jesús Mosterín. Barcelona: Crítica, 1996.
Frege, Gottlob. "Recensión de E. G. Husserl. Philosophie der Arithmetik I ." In *Ensayos de semantica y filosofia de la logica*, by Tr. Luis M. Valdes Villanueva. Madrid: Tecnos, 1998.
Frege, Gottlob. "Sobre Concepto y Función." In *Estudios Sobre Semántica*. Barcelona: Ariel, 1973.
Frege, Gottlob. "Sobre concepto y objeto ." In *Escritos filosoficos*, by Tr. Jesús Mosterín. Barcelona: Crítica, 1996.
Frege, Gottlob. "Sobre los fundamentos de la Geometría ." In *Escritos filosoficos*, by Tr. Jesús Mosterín. Barcelona: Crítica, 1996.
Frege, Gottlob. "Sobre los fundamentos de la Geometría II." In *Escritos filosoficos*, by Tr. Jesús Mosterín. Barcelona: Crítica, 1996.
Frege, Gottlob. "Sobre sentido y referencia." In *Estudios sobre semántica*, by Jesús Mosterín. Barcelona: ARIEL, 1973.
—. *The basic laws of arithmetic.* Berkeley: University of California Press, 1964.
Hilbert, David. *Fundamentos de la Geometría.* Madrid.: CSIC, 1996.
Horty, John F. *Frege on definitions : a case study of semantic content.* New York: Oxford University Press, , 2007.
Kant, Immanuel. *Crítica de la razón pura.* Buenos Aires: Cohheu, 2007.
—. *Lógica.* Rio de Janeiro: Tempo brasileiro, 1992.
Kanterian, Edward. *Frege: a guide for the perplexed.* New York: Continuum, 2011.
Kenny, Anthony John Patrick. *Introduccion a Frege.* Madrid: Cátedra, 1997.
Pinto, Silvio. "Los conceptos abiertos y la paradoja del análisis." *Theoria*, 2005: 199-219.
Russell, and Whitehead. *Principia Mathematica vol I.* London: Cambridge University Press, 1963.