



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - IZTAPALAPA  
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

Modelación numérica de la fase  
inicial de pruebas de trazadores de  
inyección-extracción considerando flujo  
radial y vertical

Tesis que presenta:

**Gabriela Susana Escobar Alfaro**

Para obtener el grado de

**Maestra en Ciencias**

**(Matemáticas Aplicadas e Industriales)**

Asesores: Dra. María Luisa Sandoval Solís  
Dr. Manuel Coronado Gallardo

Jurado calificador:

Presidente: Dr. Martín Alberto Díaz Viera

Secretario: Dra. Patricia Saavedra Barrera

Vocal: Dra. María Luisa Sandoval Solís

Vocal: Dr. Manuel Coronado Gallardo

México, D.F. Abril 2014.



*A Dios.*

*A mis padres, Evelia e Isaí, y hermanos, David y Jonathan.*

*A mi Toi y Kensy, nunca los olvidaré.*

*A veces las bendiciones de Dios llegan en forma misteriosa: a través del dolor y de los problemas. En tales momentos podremos conocer Su bondad pero solo si confiamos en Él.*



# Agradecimientos

Quiero agradecer a mis asesores de tesis, Dra. María Luisa Sandoval y Dr. Manuel Coronado, por sus conocimientos compartidos y sobre todo por su paciencia para que este trabajo llegara a su fin. También a los miembros del jurado, Dra. Patricia Saavedra y Dr. Martín Díaz, por las valiosas contribuciones que hicieron al trabajo final y por el tiempo que dedicaron para revisarlo.

Agradezco a CONACYT por el apoyo económico para realizar mis estudios. A la Maestría en Ciencias (Matemáticas Aplicadas e Industriales), por todo el apoyo durante este tiempo.

A mis compañeros del AT-335, por el tiempo que pasamos juntos. A todas aquellas personas, familia y no familia, que de una u otra forma contribuyeron a sentirme como en casa.

Un especial agradecimiento a tres personas muy importantes en mi vida, por su amistad y los buenos momentos, Daniel, Miguel y Leonel. Finalmente a mis hermosos sobrinos, Danna y Jafet, que me alegran el día cuando los veo.



---

# Resumen

Las pruebas de trazadores se presentan como una herramienta para caracterizar formaciones subterráneas en la vecindad de un pozo. Las pruebas de trazadores en un pozo inyector-extractor se realiza en tres etapas: inyección de fluido, periodo de reposo y extracción del fluido. En la primera etapa se inyecta al yacimiento una cantidad constante de fluido que contiene un pulso trazador, la entrada al medio poroso se realiza a través de una región llamada zona de disparos. Al terminar la fase de inyección de fluido, se deja reposar el pulso de trazador dentro del medio poroso. Finalmente, se extrae el fluido inyectado del yacimiento; esta fase termina después de la salida de la concentración del pulso trazador.

En esta tesis se trabaja únicamente la etapa de inyección. La modelación de esta fase se realiza en dos partes: la primera consiste en determinar la velocidad del fluido inyectado y la segunda en describir la dinámica del pulso de trazador arrastrado por el fluido sometido a advección y dispersión. Ambos modelos se discretizan con el método de elemento finito. En particular, la ecuación de advección-dispersión se integra en el tiempo con el método de Crank-Nicholson y se estabiliza el término advectivo usando la técnica de mínimos cuadrados.

Tradicionalmente en los modelos de inyección-extracción de trazador se considera que la velocidad del fluido que sale de la zona de disparos es puramente radial. Los modelos propuestos en este trabajo consideran que el flujo tiene adicionalmente una componente vertical.

En los resultados mostrados en este documento se emplean elementos bicuadráticos ya que se obtiene una mejor aproximación a la solución analítica propuesta. Además se considera permeabilidad y dispersión constante para simplificar el estudio.

También se presenta un análisis de resultados de la velocidad tomando distintos tamaños de la zona de disparos, con el objeto de estudiar la dependencia en  $z$ . Para el modelo de la concentración, se realizaron pruebas con tres valores de dispersión constante con el fin de analizar la dinámica de los trazadores y se presenta una comparación de un pulso de trazador para dos tipos de velocidades: una radial y vertical, y otra puramente radial.

**Palabras clave:** pruebas de trazadores, etapa de inyección, flujo radial y vertical, modelación numérica, advección dominante.



# Contenido

<b>Agradecimientos</b>	<b>v</b>
<b>Resumen</b>	<b>vii</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivo de la tesis . . . . .	6
1.2. Estructura de la tesis . . . . .	7
<b>2. Modelación matemática de la fase de inyección de trazador</b>	<b>9</b>
2.1. Medio continuo . . . . .	9
2.1.1. Propiedades extensivas e intensivas . . . . .	10
2.2. Determinación de la velocidad del fluido inyectado (Modelo A) . . . . .	11
2.2.1. Condiciones de frontera . . . . .	13
2.2.2. Adimensionalización . . . . .	16
2.3. Determinación de la concentración del trazador (Modelo B) . . . . .	17
2.3.1. Condiciones de frontera e inicial . . . . .	18
2.3.2. Adimensionalización . . . . .	19
<b>3. Discretización</b>	<b>21</b>
3.1. Presión del fluido . . . . .	21
3.1.1. Definición de espacios . . . . .	21
3.1.2. Formulación variacional . . . . .	22
3.1.3. Discretización del problema variacional . . . . .	23
3.1.4. Funciones de forma . . . . .	27
3.1.5. Transformaciones isoparamétricas . . . . .	29
3.1.6. Integración numérica . . . . .	34

3.1.7. Error de Interpolación . . . . .	35
3.2. Velocidad de inyección . . . . .	36
3.3. Transporte de trazador . . . . .	37
3.3.1. Formulación variacional . . . . .	37
<b>4. Simulaciones numéricas</b>	<b>43</b>
4.1. Resultados numéricos del Modelo A . . . . .	43
4.1.1. Caso 1. $h = H$ (validación) . . . . .	44
4.1.2. Caso 2. $h \neq H$ . . . . .	49
4.1.3. Análisis de resultados . . . . .	51
4.2. Resultados numéricos y análisis del Modelo B . . . . .	58
4.2.1. Perfiles de concentración . . . . .	59
4.2.2. Curvas de surgencia . . . . .	64
4.2.3. Caso del pulso con velocidad radial . . . . .	68
<b>5. Conclusiones</b>	<b>71</b>
<b>A. Apéndice</b>	<b>73</b>
A.1. Método $\theta$ . . . . .	73
A.2. Método mínimos cuadrados . . . . .	74
A.3. Rotating Cosine Hill . . . . .	75
<b>B. Apéndice</b>	<b>79</b>
B.1. Implementación computacional . . . . .	79
<b>Bibliografía</b>	<b>83</b>

En la actualidad tanto en México como en otros países petroleros se cuentan con yacimientos maduros que requieren de procesos de recuperación secundaria y mejorada. Hoy en día existen grandes inversiones en instalaciones y personal para la recuperación secundaria y mejorada del petróleo y gas, basadas en estudios de yacimientos y predicciones del comportamiento de los mismos, ver figura 1.1.



Figura 1.1: Plataforma petrolera.

Un yacimiento es una unidad geológica de volumen limitado, poroso y permeable que contiene hidrocarburos en estado líquido y/o gaseoso. Los cinco ingredientes básicos que deben estar presentes para tener un yacimiento de hidrocarburos son: fuente, camino migratorio, trampa (anomalías geológicas que detienen la migración del petróleo y produce su acumulación), almacenaje/porosidad (fracción de volumen hueco), transmisibilidad/permeabilidad (propiedad que describe la manera en que un fluido fluye a través del medio poroso).

La producción de hidrocarburos se realiza originalmente por la propia presión natural del yacimiento y normalmente se conoce como periodo de *recuperación primaria*. El petróleo y el gas natural son desplazados hacia los pozos productores mediante expansión de fluido, drena gravitacional y expulsión capilar. Cuando no existe ni acuífero ni inyección de fluidos, la recuperación de hidrocarburos se debe principalmente a la expansión del fluido, aunque en el caso del petróleo, la recuperación se puede llevar a cabo por drena gravitacional. Si se utiliza inyección de agua u otros fluidos al yacimiento se llama *recuperación secundaria*. Cuando el agua procede de un acuífero o es inyectada en los pozos como lo muestra la figura 1.2, la recuperación se efectúa por medio de un mecanismo de desplazamiento, el cual puede ser ayudado por drena gravitacional o expulsión capilar. El gas se inyecta como fluido de desplazamiento para ayudar a la recuperación de crudo y también como gas para mantenimiento de presión.

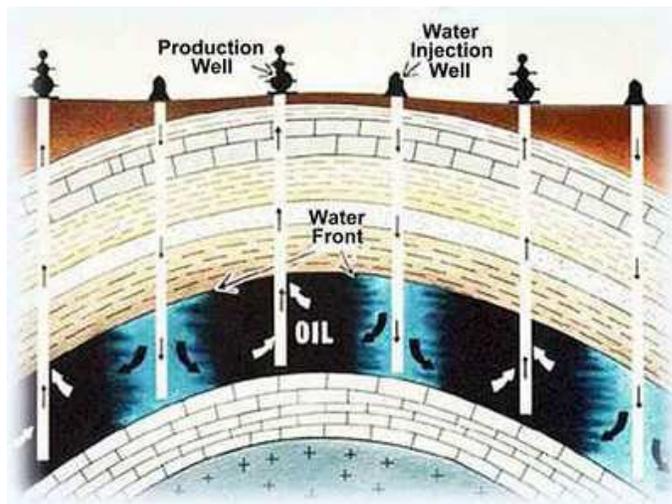


Figura 1.2: Inyección de agua en un yacimiento.

Existe otro proceso de desplazamiento llamado *recuperación terciaria o mejorada* y se emplea cuando la recuperación secundaria ya dejó de ser efectiva. Este proceso considera cambios en las propiedades de la roca (como mojabilidad) o del fluido (como la viscosidad o tensión interfacial) y la inyección de fluidos ajenos a los fluidos naturales presentes en un yacimiento. Por ejemplo, al inyectar dióxido de carbono ( $CO_2$ ) miscible se reduce la viscosidad del petróleo atrapado con el fin de que el fluido se mueva fácilmente, ver figura 1.3.

Las pruebas de trazadores se presentan como una herramienta de diagnóstico para determinar los canales de comunicación en yacimientos debido a la extracción e inyección



Figura 1.3: Inyección de dióxido de carbono.

del fluido en los procesos de recuperación secundaria y mejorada. Estas pruebas están orientadas a caracterizar formaciones subterráneas y determinar propiedades como porosidad, coeficiente de retraso por absorción, espesor de la capa productora, presencia de canales de alta permeabilidad, etc (Coronado (2011), Ptak et al. (2004)).

Una prueba de trazadores entre pozos en un yacimiento consiste en inyectar una sustancia (química o radioactiva) disuelta en el fluido de inyección y monitorear su arribo en los pozos productores vecinos (Shook et al. (2004), Bingyu et al. (2002), Davis et al. (2005, 2002)). De los resultados del monitoreo se obtendrá en cada pozo productor, una gráfica de concentración de trazador en función del tiempo llamada curva de surgencia o de respuesta que nos permitirá inferir propiedades del medio poroso subterráneo (Chase Jr. (1971), Ghergut et al. (2012, 2013), Goda & Sato (2010), Istok et al. (2002), Ptak et al. (2004), Ramirez (2008), Tomich et al. (1973)).

Si el monitoreo no es adecuado y/o la cantidad de trazadores es insuficiente sólo se podrán captar pocos puntos de la curva de surgencia. Por lo cual existirá gran incertidumbre en los intervalos más significativos de la curva, ver figura 1.4. Las simulaciones numéricas de la dinámica de los trazadores permitirán interpretar las pruebas de campo, es decir, ayudarán a describir con mayor precisión el yacimiento.

Las pruebas de un solo pozo se conocen como pruebas push-pull o de inyección-extracción (Davis et al. (2002), Huang et al. (2010), Istok et al. (2002), Schroth et al. (2001), Tomich et al. (1973)). Habitualmente se emplean con trazadores particionables (Davis et al. (2005, 2002), Istok et al. (2002)) para determinar saturación residual de aceite en zonas invadidas por agua. También se utilizan para medir coeficientes de dispersión (John et al. (2002)). Una ventaja de estas pruebas es su corta duración (pocos

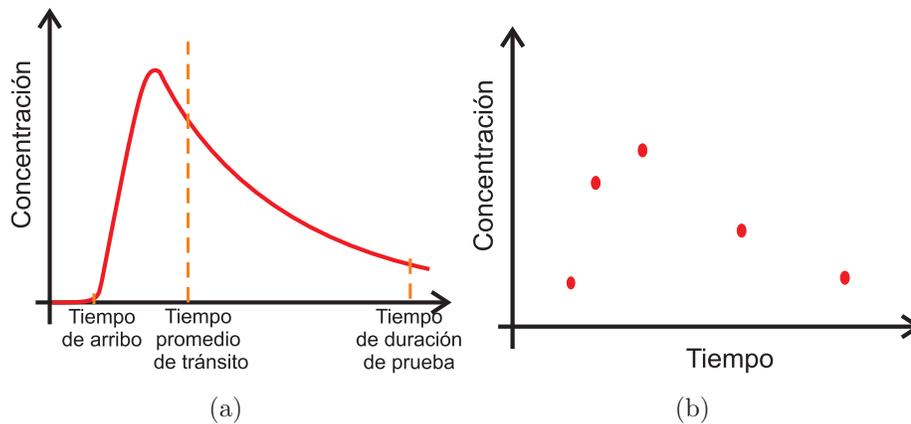


Figura 1.4: Curvas de surgencia del trazador: (a) curva modelada y (b) datos de campo.

días).

El interés por las pruebas de inyección-extracción inició en los años noventa con el propósito de medir coeficientes de dispersión, ya que éste es relevante en procesos de recuperación secundaria por inyección de gas miscible o por invasión del yacimiento usando productos químicos (Somaruga (2002)). Sin embargo, las capacidades de dichas pruebas para medir propiedades del medio poroso en las vecindades del pozo no han sido exploradas cabalmente.

La mayoría de los trabajos publicados que emplean pruebas de trazadores en uno o varios pozos están desarrollados para contaminación en acuíferos (Davis et al. (2005, 2002), Huang et al. (2010), Istok et al. (2002), Schroth et al. (2001)). Existen soluciones analíticas para pruebas *push-pull* en una dimensión con flujo radial (sin flujo en la vertical) (Huang et al. (2010)) y semianalíticas para pruebas de un solo pozo o entre varios pozos (Ghergut et al. (2013)). Para pruebas de trazadores en tres dimensiones se emplean simuladores numéricos usando el método de Diferencias Finitas como UTCHEM (Agca et al. (1990)), STOMP (Davis et al. (2005)), ECLIPSE y STARS o Elemento Finito en OpenGeoSys (Singh et al. (2012)).

En la literatura de yacimientos petroleros se pueden encontrar diversos artículos que modelan el flujo de fluido (Gritsen & Durlinsky (2005), Jha et al. (2009)), la transferencia de calor en rocas fracturadas (Kolditz (1995a,b)) y también existen trabajos sobre la simulación numérica en 3D para reservorios de gas (Singh et al. (2012)). Sin embargo, hay pocos trabajos de pruebas de trazadores de un solo pozo usando un fluido de inyección en una dimensión (Chase Jr. (1971), Tomich et al. (1973)), la mayoría es entre pozos (Agca et al. (1990), Goda & Sato (2010)) y esto es debido a que se ha

---

adaptado el software desarrollado para simular el movimiento del hidrocarburo en un campo petrolero. En particular no se ha realizado modelación numérica de pruebas de trazadores de un solo pozo en yacimientos petroleros considerando la presencia de flujo vertical, que es uno de los objetivos de este trabajo.

Inicialmente los métodos numéricos en medios porosos se desarrollaron para modelar y simular flujos de fluidos en yacimientos petroleros o depósitos subterráneos de agua. El objetivo principal de la simulación de yacimientos es predecir el rendimiento futuro de un depósito y encontrar los medios para optimizar la recuperación de algunos de los hidrocarburos, ver Chen (2005), Chen et al. (2006). Se describen flujos de una, dos o tres fases en medios porosos. En comparación con los métodos de Diferencias Finitas, la introducción de métodos de Elementos Finitos es relativamente reciente. Las ventajas de este método sobre Diferencias Finitas es que, las condiciones de frontera, la geometría y las propiedades del material pueden ser manipuladas con relativa facilidad. Además, la estructura fácil de los métodos de Elementos Finitos hace posible el desarrollo de software de propósito general para aplicaciones. Existe una sólida base teórica que da confianza adicional y en muchos casos es posible obtener estimaciones de error concretas para las soluciones de Elementos Finitos. Estos métodos se introdujeron por primera vez por Courant en 1943. A partir de los años 1950 y 1970, fueron desarrollados por ingenieros y matemáticos como un método general para la solución numérica de ecuaciones en derivadas parciales.

Las pruebas de trazadores en un pozo inyector-extractor se realiza en tres etapas, ver figura 1.5:

- Etapa I: inyección de fluido.
- Etapa II: periodo de reposo.
- Etapa III: extracción del fluido.

En la etapa I se inyecta al yacimiento una cantidad constante de fluido  $Q$  que contiene un pulso de trazador, la inyección se realiza a través de una región llamada zona de disparos, ver figura 1.6. Una vez suspendida la inyección de fluido se empieza la etapa II, en la cual se deja reposar al pulso de trazador dentro del medio poroso. En la última etapa, el pozo se pone a producir, es decir, se extrae fluido del yacimiento. Esta fase termina después de la salida del pulso de trazador.

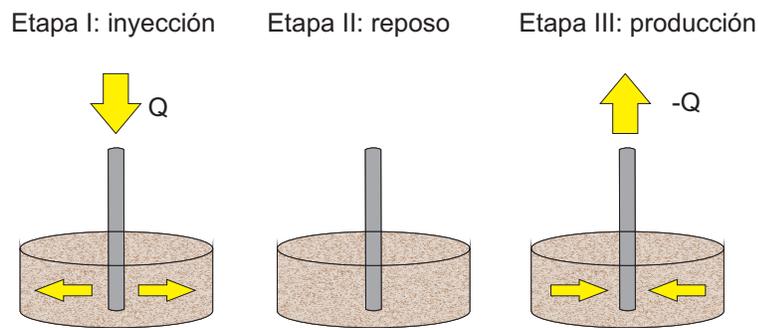


Figura 1.5: Etapas de la prueba de trazador.

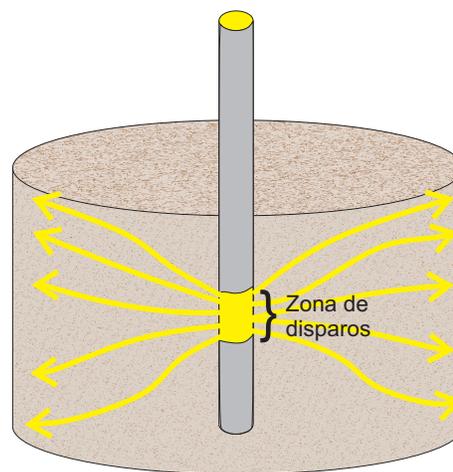


Figura 1.6: Zona de disparos en un pozo.

## 1.1. Objetivo de la tesis

El objetivo de la tesis es modelar y simular numéricamente la fase inicial de pruebas de trazadores de inyección-extracción, considerando flujo con componentes radial y vertical en un medio poroso, homogéneo, definido en un dominio cilíndrico. El fin es verificar que la dinámica del trazador cambia cuando se incorpora una dependencia en  $z$  para el flujo del fluido de inyección. Además de realizar un análisis de perfiles de concentración para diversos valores de dispersión a diferentes tiempos, así como obtener las gráficas de surgencia para distintos puntos del dominio.

Para ello la modelación se realizará en dos fases, la primera consiste en determinar la velocidad del fluido en estado estacionario (modelo A) y la segunda en calcular la dinámica de la concentración del trazador sometido a advección debida a la velocidad

del fluido que lo arrastra y a la dispersión (modelo B).

Ambos modelos se discretizan con el método de Elemento Finito. En particular, la ecuación de advección-dispersión se integrará en el tiempo con el método de Crank-Nicholson y se estabilizará el término advectivo usando la técnica de mínimos cuadrados..

## **1.2. Estructura de la tesis**

Este documento se estructura en cinco capítulos. En el primero se encuentra la introducción, se presenta un pequeño panorama de las pruebas de trazadores, se exponen las razones del tema de tesis y los objetivos de la misma.

En el segundo capítulo se explican los modelos matemáticos para determinar la presión y velocidad del fluido, así como el modelo para la concentración del trazador y la adimensionalización de cada modelo.

En el capítulo 3 se discretizan los modelos expuestos en el capítulo anterior empleando el método de Elemento Finito. Además para la ecuación de advección-dispersión se describe cómo se combina el método de Crank-Nicholson junto con la técnica de mínimos cuadrados.

El capítulo 4 ubica las simulaciones numéricas de la fase de inyección de una prueba de trazador. Se muestran diferentes resultados de la presión y velocidad para distintos tamaños de la zona de disparos. También se realiza un análisis de parámetros.

Finalmente en el capítulo 5 se presentan las conclusiones del trabajo.



## Modelación matemática de la fase de inyección de trazador

En este capítulo se presenta la modelación matemática de la fase de inyección del trazador. La etapa I consiste en inyectar un fluido en el pozo de forma continua, típicamente agua. Al alcanzar el fluido un estado estacionario, se inyecta como parte del mismo un pulso de trazador. Cuando el pulso ingresa a la formación porosa del yacimiento inicia el tiempo,  $t = 0$ . Se continúa inyectando el fluido en la formación durante un período de tiempo  $t = T$  y se suspende la inyección.

Consideremos una región de yacimiento petrolero con geometría cilíndrica, cuyo radio es  $L$  y altura  $2H$ , ver figura 2.1. La zona de disparos de la región es un cilindro de radio  $r_w$  y altura  $2h$  que se encuentra en el centro de dicha porción del yacimiento (superficie  $S_5$ ). Las fronteras de la región de estudio están dadas por las superficies  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_4$ ,  $S_5$  y  $S_6$  como se muestra en la figura 2.1.

La modelación en esta etapa se realiza en dos partes. La primera consiste en determinar la velocidad del fluido inyectado (modelo A) y la segunda en describir la dinámica de un pulso de trazador sometido a advección y dispersión (modelo B). En ambos modelos se utiliza el enfoque de la mecánica de medios continuos que se describe a continuación.

### 2.1. Medio continuo

Se entiende por medio continuo una estructura que llena todo el espacio de forma continua (que forman parte, por ejemplo, de un sólido, de un fluido o de un gas) que es estudiado macroscópicamente, es decir, sin considerar las posibles discontinuidades existentes en el nivel microscópico (nivel atómico o molecular). En consecuencia, se admite que no hay discontinuidades entre las partículas y que la descripción matemática

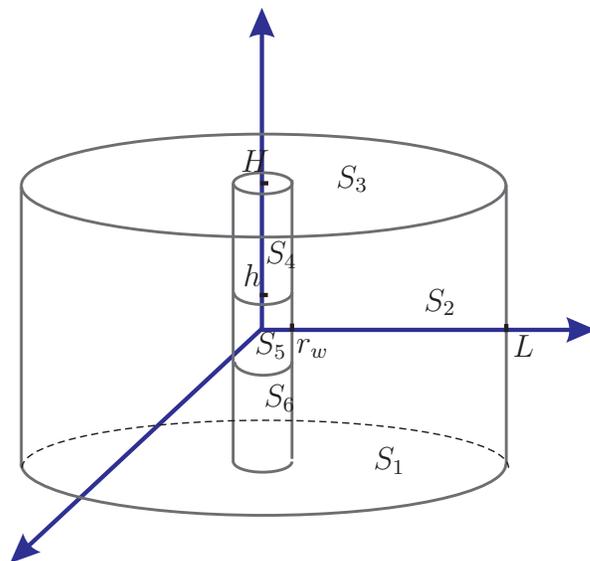


Figura 2.1: Región de estudio formada por la diferencia de volúmenes de los cilindros de radio  $L$  menos el de radio  $r_w$ .

de este medio y de sus propiedades se puede realizar mediante funciones continuas.

### 2.1.1. Propiedades extensivas e intensivas

Cuando una propiedad puede expresarse como una integral sobre el volumen  $B(t)$  ocupada por el cuerpo, decimos que la propiedad es una *propiedad extensiva*. Dada una función cualquiera  $\zeta(\vec{x}, t)$ , definida

$$E(t) = \int_{B(t)} \zeta(\vec{x}, t) d\vec{x}, \quad (2.1)$$

entonces  $E(t)$  es una propiedad extensiva. Aún más, una propiedad  $E(t)$  es extensiva si y solamente si, se puede expresar en la forma dada por la ecuación (2.1). En tal caso, a la función  $\zeta(\vec{x}, t)$  se le llama *propiedad intensiva* asociada a la propiedad extensiva  $E(t)$ , ver Diaz (2014).

Algunos ejemplos de correspondencia entre propiedades extensivas e intensivas, respectivamente, son:

- masa  $\Leftrightarrow$  densidad de masa
- energía  $\Leftrightarrow$  energía específica o densidad de energía
- volumen  $\Leftrightarrow$  norma del espacio, en el espacio euclidiano ésta es la constante unitaria.

Debido a que cualquier propiedad extensiva es la integral de la intensiva asociada (ecuación (2.1)) y que la derivada material de una propiedad intensiva  $\zeta$  es

$$\frac{d\zeta(\vec{x}, t)}{dt} = \frac{\partial\zeta(\vec{x}, t)}{\partial t} + \vec{\mathcal{V}}(\vec{x}, t) \cdot \nabla\zeta(\vec{x}, t)$$

donde el término  $\vec{\mathcal{V}} \cdot \nabla\zeta$  es la derivada convectiva. Entonces la derivada total de la propiedad extensiva  $E(t)$ , suponiendo  $\nabla \cdot \vec{\mathcal{V}} = 0$ , será la integral de volumen de la derivada material de la propiedad intensiva, es decir

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_{B(t)} \left\{ \frac{\partial\zeta(\vec{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot [\zeta(\vec{x}, t) \vec{\mathcal{V}}(\vec{x}, t)] \right\} dV, \quad \forall \vec{x} \in B(t), \forall t. \quad (2.2)$$

Los detalles se pueden ver en Olivella & de Sacribar (2000). Es importante señalar que esta ecuación es válida siempre y cuando la propiedad intensiva no tenga discontinuidades en su dominio. La expresión (2.2) debe cumplirse no solo para  $B(t)$  sino también para todo volumen  $\Delta B(t)$  contenido en  $B(t)$  que se considere.

Por otro lado, la hipótesis básica desde el punto de vista físico, para la formulación de las ecuaciones de balance de las propiedades extensivas en la teoría de medios continuos se puede enunciar de la siguiente manera: *cualquier variación de la propiedad extensiva proviene de lo que se genera o desaparece dentro del cuerpo o de lo que entra o sale a través de su frontera*, ver Bird et al. (2001). La expresión matemática de esta hipótesis es:

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_{B(t)} g(\vec{x}, t) d\vec{x} + \int_{\partial B(t)} \vec{\tau}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n} dS, \quad (2.3)$$

donde  $g(\vec{x}, t)$  es lo que se genera o desaparece en el interior del cuerpo  $B(t)$  que es el cambio temporal  $\frac{\partial\zeta}{\partial t}$  y la fuente o sumidero  $\mathcal{S}(\vec{x}, t)$ , y  $\vec{\tau}(\vec{x}, t)$  es lo que entra o sale a través de la frontera del cuerpo  $\partial B(t)$ . La relación (2.3) se llama *ecuación de balance global*. Utilizando el teorema de la divergencia, la integral de superficie en la ecuación (2.3) se transforma en una integral de volumen en  $B(t)$ . Posteriormente, escribiendo  $g(\vec{x}, t) = \frac{\partial\zeta}{\partial t} - \mathcal{S}(\vec{x}, t)$  y considerando sólo flujo advectivo  $\vec{\tau} = \zeta \vec{\mathcal{V}}$  se obtiene una ecuación más general que (2.2), que incluye una fuente o sumidero.

## 2.2. Determinación de la velocidad del fluido inyectado (Modelo A)

La masa de un fluido al tiempo  $t$  para un medio poroso,  $M_f(t)$ , es una propiedad extensiva que se expresa como la integral de volumen de la densidad  $\rho$  por la porosidad

$\Phi$ :

$$M_f(t) = \int_{B(t)} \Phi \rho(\vec{x}, t) dV, \quad (2.4)$$

cuya derivada total es

$$\frac{dM_f}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{B(t)} \Phi \rho(\vec{x}, t) dV, \quad \forall \vec{x} \in B(t), \forall t. \quad (2.5)$$

Empleando el principio de conservación de masa de la relación (2.3) sin fuente de fluido se tiene

$$\int_{B(t)} \left\{ \frac{\partial(\Phi \rho(\vec{x}, t))}{\partial t} + \nabla \cdot [\Phi \rho(\vec{x}, t) \vec{\mathcal{V}}(\vec{x}, t)] \right\} dV = 0, \quad \forall \vec{x} \in B(t), \forall t. \quad (2.6)$$

Esto se cumple para todo volumen  $\Delta B(t)$  contenida en  $B(t)$ , por lo cual el integrando es igual a cero, es decir

$$\frac{\partial(\Phi \rho)}{\partial t} + \nabla \cdot (\Phi \rho \vec{\mathcal{V}}) = 0$$

A la relación  $\vec{U} = \Phi \vec{\mathcal{V}}$  se le conoce como la velocidad de Darcy.

Por lo tanto, la ecuación de continuidad dentro del yacimiento es

$$\frac{\partial(\Phi \rho)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U}) = 0.$$

En caso estacionario y flujo incompresible se obtiene que

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0.$$

Adicionalmente, empleando la ecuación de Darcy se satisface

$$\vec{U} = -\frac{\kappa}{\mu} \nabla p, \quad (2.7)$$

con  $\mu$  la viscosidad del fluido,  $\kappa$  la permeabilidad y  $p$  la presión.

Luego, el problema se reduce a encontrar la presión  $p$  tal que

$$\nabla \cdot \left( \frac{\kappa}{\mu} \nabla p \right) = 0, \quad (2.8)$$

sujeto a las condiciones de frontera descritas en el apartado siguiente.

Sin pérdida de generalidad, consideremos que el flujo tiene simetría axial, es decir, sólo depende de la componente radial  $r$  y la altura  $z$ . En la región de interés se realiza un corte transversal a un ángulo fijo, ver figura 2.2. Esto da lugar a una subregión  $2D$  que tiene forma rectangular y es denotada por  $\bar{\Omega}$ . Así la zona de análisis  $2D$  para el proceso de inyección del fluido es  $\bar{\Omega} = [r_w, L] \times [-H, H]$  como se muestra la figura 2.3 y  $p = p(r, z)$ , en la ecuación 2.8, es la presión del fluido inyectado en estado estacionario en la posición  $(r, z)$ .

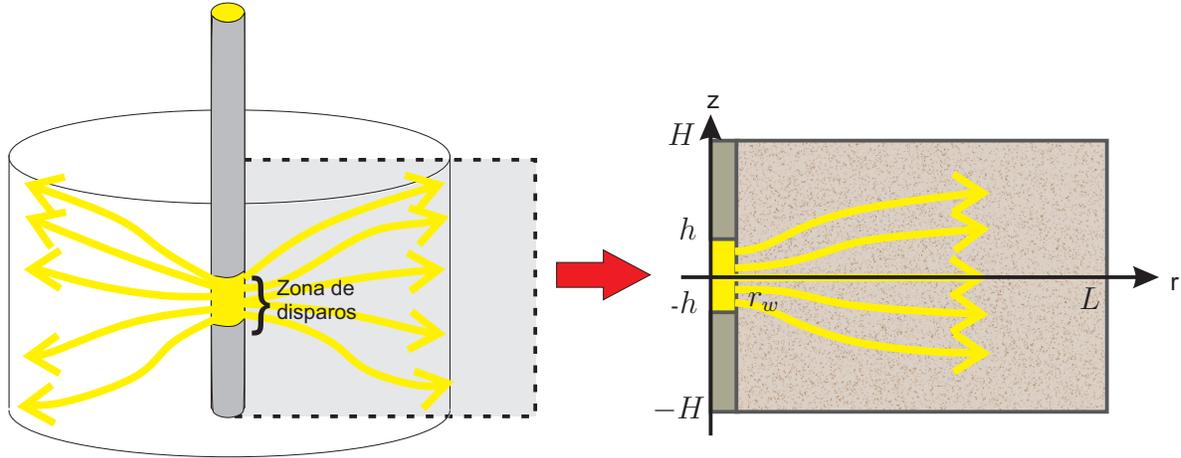


Figura 2.2: Corte transversal a un ángulo fijo de la región de interés.

### 2.2.1. Condiciones de frontera

La frontera de  $\Omega$ , denotada por  $\Gamma$ , es igual a  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5 \cup \Gamma_6$ , donde los  $\Gamma_i$  se definen en la figura 2.3. Las condiciones de frontera para los  $\Gamma_i$  son equivalentes a las fronteras  $S_i$  de los cilindros por la simetría axial alrededor del eje  $z$  (figura 2.1).

Por las fronteras inferior ( $\Gamma_1$ ) y superior ( $\Gamma_3$ ) no hay movimiento de fluido hacia afuera de la zona del yacimiento, esto es

$$\vec{U} \cdot \hat{n} = 0, \quad (2.9)$$

en términos de la presión,

$$\frac{\partial p}{\partial z}(r, z) = 0. \quad (2.10)$$

para  $r \in [r_w, L]$  y  $z = \pm H$ . Además, el fluido no puede atravesar las paredes formadas por las fronteras  $\Gamma_4$  y  $\Gamma_6$ , ya que están selladas,

$$\frac{\partial p}{\partial r}(r, z) = 0 \quad (2.11)$$

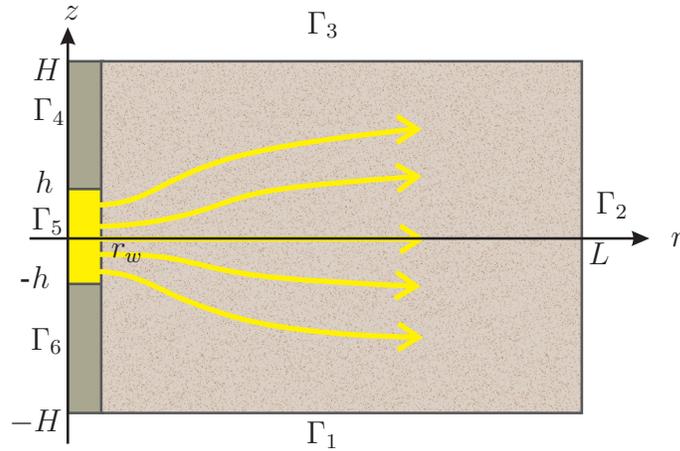


Figura 2.3: Subregión 2D para el proceso de inyección del fluido.

para  $r = r_w$ ,  $z \in [-H, -h] \cup [h, H]$ .

En  $r = L$  el fluido sale del sistema radialmente. Debido a la conservación de masa se supondrá que la cantidad de fluido que sale de la región de estudio es la misma que entra.

Como caso especial, para evaluar la condición en la frontera  $\Gamma_2$  se considera que la zona de disparos es del ancho de la región de estudio, es decir,  $h = H$ . Sea  $Q$  la cantidad de fluido que entra a la formación porosa y sea  $S$  el área o superficie que encierra el volumen  $V$  del cilindro de radio  $L$  y altura  $2H$ . La cantidad de fluido que atraviesa la superficie  $S$  es

$$Q = \int_S \vec{U} \cdot \hat{n} dS. \quad (2.12)$$

Como el fluido sale en forma radial entonces  $\vec{U} \cdot \hat{n} = U_1(L)$  y  $dS = r d\theta dz$ . Así

$$\int_A \vec{U} \cdot \hat{n} dA = \int_{-H}^H \int_0^{2\pi} U_1(L) L d\theta dz, \quad (2.13)$$

por lo que

$$(2\pi) (2H) L U_1(L) = Q, \quad (2.14)$$

donde  $\vec{U}(r, z) = (U_1(r, z), U_2(r, z))$ . Luego

$$U_1(L) = \frac{Q}{4\pi LH}. \quad (2.15)$$

Por lo tanto en  $r = L$  se tiene

$$\vec{U} = \frac{Q}{4\pi LH} \hat{r}. \quad (2.16)$$

Aplicando la ecuación de Darcy (2.7) resulta la siguiente condición para la frontera  $\Gamma_2$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=L} = -\frac{\mu U_1(L)}{\kappa(L)} = -\frac{\mu Q}{4\pi L H \kappa(L)}. \quad (2.17)$$

Por la zona de disparos ( $\Gamma_5$ ), el fluido se mueve hacia dentro del yacimiento con dirección radial y vertical. Debido a que en  $\Gamma_4$  y  $\Gamma_6$  se tiene que  $\vec{U} \cdot \hat{n} = 0$ , la condición de frontera en  $\Gamma_5$  también debe de cumplir dicha restricción en  $z = h$  y  $z = -h$ , con el objetivo de no obtener saltos en las fronteras. La condición que se propone en esta frontera es tipo Neumann de la forma

$$\vec{U} \cdot \hat{n} = \mathcal{A} \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right) \hat{r} \quad (2.18)$$

Para encontrar el valor de  $\mathcal{A}$ , se utiliza la conservación de masa. De manera análoga al caso anterior,

$$Q = \int_S \vec{U} \cdot \hat{n} dS = \int_S \mathcal{A} \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right) dS = \mathcal{A} \int_{-h}^h \int_0^{2\pi} \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right) r_w d\theta dz = \mathcal{A} (8 h r_w), \quad (2.19)$$

por lo cual  $\mathcal{A} = \frac{Q}{8hr_w}$ .

Luego

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=r_w} = \frac{\mu Q}{8hr_w \kappa(r_w)} \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right). \quad (2.20)$$

Por lo tanto, el modelo A consiste en el problema elíptico, ecuación (2.8), sujeto a las condiciones de frontera siguientes:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial z}(r, z) \right|_{z=-H} = 0, \quad r \in [r_w, L], \quad (2.21)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r}(r, z) \right|_{r=L} = -\frac{\mu Q}{4\pi L H \kappa(L)}, \quad z \in [-H, H], \quad (2.22)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial z}(r, z) \right|_{z=H} = 0, \quad r \in [r_w, L], \quad (2.23)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r}(r, z) \right|_{r=r_w} = 0, \quad z \in [h, H], \quad (2.24)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r}(r, z) \right|_{r=r_w} = \frac{\mu Q}{8r_w h \kappa(r_w)} \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right), \quad z \in [-h, h], \quad (2.25)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r}(r, z) \right|_{r=r_w} = 0, \quad z \in [-H, -h]. \quad (2.26)$$

Una vez que se obtiene la presión se calcula la velocidad  $\vec{U}$  mediante la ecuación de Darcy dada en (2.7).

Finalmente observemos que las condiciones de frontera cumplen la condición de compatibilidad, es decir

$$\int_{\Gamma_2} -\frac{\mu Q}{4\pi L H \kappa(L)} r \, d\Gamma + \int_{\Gamma_5} \frac{\mu Q}{8r_w h \kappa(r_w)} \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right) r \, d\Gamma = 0,$$

por lo tanto el problema de Neumann puro tiene solución.

### 2.2.2. Adimensionalización

En este apartado las variables de las ecuaciones (2.8) y (2.21)-(2.26) se representan con un asterisco (\*) para especificar que se trata de variables con dimensiones.

Con la finalidad de adimensionalizar la ecuación (2.8) se introducen las variables adimensionales:

$$r = \frac{r^*}{H}, \quad z = \frac{z^*}{H}, \quad p = \frac{p^*}{p_0}, \quad (2.27)$$

donde  $p_0$  es la presión fija en el centro de la zona de disparos,  $(r_w, 0)$ .

Se considera flujo radial y vertical en coordenadas cilíndricas, esto es

$$\nabla p^* = \frac{\partial p^*}{\partial r^*} \hat{r} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial p^*}{\partial \theta^*} \hat{\theta} + \frac{\partial p^*}{\partial z^*} \hat{z}.$$

Debido a que  $p = p(r, z)$ , entonces

$$\nabla p^* = \frac{\partial p^*}{\partial r^*} \hat{r} + \frac{\partial p^*}{\partial z^*} \hat{z}.$$

Luego, al adimensionalizar la ecuación (2.8) se tiene

$$\frac{H}{p_0} \nabla \cdot \left( \frac{\kappa}{\mu} \nabla p^* \right) = 0.$$

Para simplificar el modelo en el resto del trabajo se toma  $\kappa$  y  $\mu$  constantes, así la igualdad anterior se transforma en

$$\nabla \cdot (\nabla p) = 0. \quad (2.28)$$

Análogamente al adimensionalizar las condiciones de frontera (2.21)-(2.26) resulta

$$\left. \frac{\partial p}{\partial z}(r, z) \right|_{z=-1} = 0, \quad r \in \left[ \frac{r_w}{H}, \frac{L}{H} \right], \quad (2.29)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r}(r, z) \right|_{r=\frac{L}{H}} = -\frac{\mu Q}{4\pi p_0 L \kappa}, \quad z \in [-1, 1], \quad (2.30)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial z}(r, z) \right|_{z=1} = 0, \quad r \in \left[ \frac{r_w}{H}, \frac{L}{H} \right], \quad (2.31)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r}(r, z) \right|_{r=\frac{r_w}{H}} = 0, \quad z \in \left[ \frac{h}{H}, 1 \right], \quad (2.32)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r}(r, z) \right|_{r=\frac{r_w}{H}} = \frac{\mu Q H}{8 p_0 h r_w \kappa} \cos\left(\frac{\pi H}{2h} z\right), \quad z \in \left[ -\frac{h}{H}, \frac{h}{H} \right], \quad (2.33)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r}(r, z) \right|_{r=\frac{r_w}{H}} = 0, \quad z \in \left[ -1, -\frac{h}{H} \right]. \quad (2.34)$$

### 2.3. Determinación de la concentración del trazador (Modelo B)

De forma análoga a la velocidad del fluido, se puede derivar el modelo de concentración de trazador en el medio poroso. Se considera que la masa del trazador disuelto en el fluido es una propiedad extensiva asociada a la concentración del trazador por la porosidad, es decir

$$M_T(t) = \int_{B(t)} \Phi C(\vec{x}, t) dV. \quad (2.35)$$

De la ecuación (2.3) se tiene que

$$\int_{B(t)} \left\{ \frac{\partial(\Phi C(\vec{x}, t))}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\tau} \right\} dV = \int_{B(t)} \mathcal{S}(\vec{x}, t) dV \quad \forall \vec{x} \in B(t), \forall t. \quad (2.36)$$

donde  $\mathcal{S}(\vec{x}, t)$  es la fuente de trazador. El flujo  $\vec{\tau}$  se supondrá que no sólo tiene una parte advectiva sino también una parte dispersiva, es decir,  $\vec{\tau} = C\vec{\mathcal{V}} - \Phi \underline{\underline{D}} \cdot \nabla C$ , donde  $\underline{\underline{D}}$  es el tensor de dispersión hidrodinámica definido por

$$D_{ij} = D_T |\vec{\mathcal{V}}| \delta_{ij} + (D_L - D_T) \frac{\mathcal{V}_i \mathcal{V}_j}{|\vec{\mathcal{V}}|} + D_m \theta \delta_{ij} \quad (2.37)$$

donde  $\theta$  es la tortuosidad del medio poroso ( $\theta < 1$ ),  $D_T$  el coeficiente de dispersividad transversal,  $D_L$  el coeficiente de dispersividad longitudinal y  $D_m$  el coeficiente de dispersión molecular.

Aplicando el teorema de la divergencia para la integral con termino  $\vec{\tau}$  y considerando que la relación es válida para todo volumen contenido en  $B(t)$ , la ecuación (2.36) se reduce a

$$\frac{\partial(\Phi C)}{\partial t} + \nabla \cdot (\Phi C \vec{\mathcal{V}}) = \nabla \cdot (\underline{\underline{D}} \cdot \nabla C) \quad (2.38)$$

Empleando la relación  $U = \Phi \vec{\mathcal{V}}$  se tiene la ecuación de transporte del trazador

$$\frac{\partial(\Phi C)}{\partial t} + \nabla \cdot (C \vec{U}) = \nabla \cdot (\underline{\underline{D}} \cdot \nabla C) \quad (2.39)$$

Algunos autores consideran la dispersión hidrodinámica como  $\alpha|\vec{U}|$  con  $\alpha$  la dispersividad y  $|\vec{U}|$  la magnitud de la velocidad (Schroth et al. (2001)). En nuestro caso se tomará  $\underline{\underline{D}} = DI$  ( $I$  es el tensor unitario) como una dispersión efectiva constante.

Por lo tanto, el problema es encontrar  $C(r, z, t)$  tal que

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{\Phi} \nabla \cdot [\vec{U}C - D \nabla C] = 0. \quad (2.40)$$

### 2.3.1. Condiciones de frontera e inicial

La inyección del pulso se realiza únicamente en el instante  $t = 0$ . Se supondrá la condición inicial como:

$$C^0 = C(r, z, t) \Big|_{t=0} = \begin{cases} \mathcal{B}(r, z) & \text{si } r \in [r_1, r_2], z \in [-h, h] \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (2.41)$$

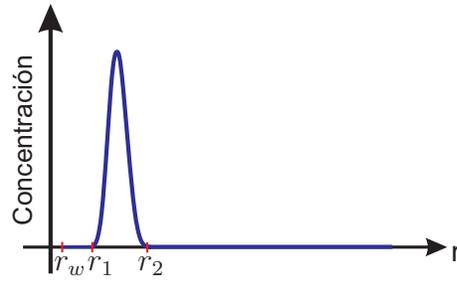
con

$$\mathcal{B}(r, z) = \frac{M_t}{8\pi h (r_2^2 - r_1^2)} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{h}z\right) + 1 \right] \left[ \cos\left(\frac{(2r - r_1 - r_2)\pi}{r_2 - r_1}\right) + 1 \right], \quad (2.42)$$

$M_t$  la cantidad total de trazador inyectado y  $r_2 - r_1$  el ancho del pulso en  $z = 0$  como se muestra en la figura 2.4.

En  $r = L$  no hay concentración de trazador. Para  $\Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6$  no hay flujo de trazador a través de las fronteras, esto es

$$[\vec{U}C - D \nabla C] \cdot \vec{n} = 0.$$


 Figura 2.4: Pulso de trazador en  $z = 0$ .

El modelo B se basa en resolver la ecuación (2.40) sujeto a la condición inicial (2.41) y a las condiciones de frontera

$$C(r, z, t) \Big|_{r=L} = 0, \quad z \in [-H, H], \quad (2.43)$$

$$\left[ \vec{U}C - D\nabla C \right] \cdot \vec{n} \Big|_{z=-H} = 0, \quad r \in [r_w, L], \quad (2.44)$$

$$\left[ \vec{U}C - D\nabla C \right] \cdot \vec{n} \Big|_{z=H} = 0, \quad r \in [r_w, L], \quad (2.45)$$

$$\left[ \vec{U}C - D\nabla C \right] \cdot \vec{n} \Big|_{r=r_w} = 0, \quad z \in [-H, H]. \quad (2.46)$$

La condición (2.43) implica que si hay flujo a través de la frontera en  $r = L$ , pero sólo de tipo dispersivo. En la simulación se analizarán casos donde el pulso no llega a esta frontera.

Cabe señalar que al terminar esta etapa se tendrá una concentración  $C(r, z, T)$ , donde  $T$  es el tiempo de duración de la etapa I desde la salida del trazador en la zona de disparos hasta la supresión de inyección del fluido en el pozo.

### 2.3.2. Adimensionalización

En este apartado se presentan las relaciones del modelo B, ecuaciones (2.40) - (2.46), sin dimensiones. Para ello se agregan nuevas variables adimensionales a aquellas definidas en (2.27)

$$\vec{U} = \frac{\vec{U}^*}{U_{ref}}, \quad U_{ref} = \frac{\kappa p_0}{\mu L}, \quad C = \frac{C^*}{C_{ref}}, \quad C_{ref} = \max C^0(r, z), \quad (2.47)$$

$$t = \frac{t^*}{\tau}, \quad \tau = \frac{H}{U_{ref}}, \quad D = \frac{\tau D^*}{H^2}, \quad r_1 = \frac{r_1}{H}, \quad r_2 = \frac{r_2}{H}.$$

Al utilizar las expresiones (2.27) y (2.47) en ecuaciones (2.40)- (2.46) y simplificar se obtiene el modelo  $B$  sin dimensiones:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{\Phi} \nabla \cdot [\vec{U}C - D\nabla C] = 0. \quad (2.48)$$

sujeto a

$$C(r, z, t) \Big|_{r=\frac{L}{H}} = 0, \quad z \in [-1, 1], \quad (2.49)$$

$$[\vec{U}C - D\nabla C] \cdot \vec{n} \Big|_{z=-1} = 0, \quad r \in \left[ \frac{r_w}{H}, \frac{L}{H} \right], \quad (2.50)$$

$$[\vec{U}C - D\nabla C] \cdot \vec{n} \Big|_{z=1} = 0, \quad r \in \left[ \frac{r_w}{H}, \frac{L}{H} \right], \quad (2.51)$$

$$[\vec{U}C - D\nabla C] \cdot \vec{n} \Big|_{r=\frac{r_w}{H}} = 0, \quad z \in [-1, 1], \quad (2.52)$$

y

$$C^0 = \begin{cases} \mathcal{B}(r, z) & \text{si } r \in [r_1, r_2], z \in \left[ -\frac{h}{H}, \frac{h}{H} \right] \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (2.53)$$

con

$$\mathcal{B}(r, z) = \frac{1}{4} \left[ \cos \left( \frac{\pi H}{h} z \right) + 1 \right] \left[ \cos \left( \frac{(2r - r_1 - r_2)\pi}{r_2 - r_1} \right) + 1 \right]. \quad (2.54)$$

El método de elemento finito requiere de una formulación variacional adecuada del problema y de la elección de espacios funcionales admisibles para el análisis teórico continuo y discreto, y su posterior implementación computacional. Por ello, en cada apartado de este capítulo se presentan los espacios de funciones ad hoc, la formulación variacional y la discretización del modelo correspondiente, modelo A apartados 3.1 y 3.2, y modelo B apartado 3.3.

### 3.1. Presión del fluido

El problema es encontrar una función  $p = p(r, z)$  tal que

$$\nabla \cdot (\nabla p) = 0. \quad (3.1)$$

sujeto a las condiciones de frontera (2.29)-(2.34).

#### 3.1.1. Definición de espacios

Con el objeto de introducir una formulación variacional donde la función de prueba  $w$  sea suficientemente suave y que pertenezca a un espacio de Hilbert se definen los espacios de funciones siguientes.

Sea  $\Omega$  una región acotada contenida en  $\mathbb{R}^d$ ,  $d=2$  ó  $3$ . Se denota por  $L_2(\Omega)$  al espacio de las funciones cuadrado integrables en  $\Omega$ , dotado de la norma  $\|v\|_{L_2} = \sqrt{(v, v)}$ , donde  $(\cdot, \cdot)$  es el producto interior estándar definido por  $(u, v) = \int_{\Omega} u v d\Omega$ .

El espacio de Sobolev  $H^1(\Omega)$  se define como

$$H^1(\Omega) = \left\{ w \in L_2(\Omega) : \frac{\partial w}{\partial r}, \frac{\partial w}{\partial z} \in L_2(\Omega) \right\}, \quad (3.2)$$

cuya norma es

$$\begin{aligned} \|w\|_{H^1} &= \left\{ \int_{\Omega} \left[ w^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega \right\}^{1/2} \\ &= \left[ \|w\|_{L_2}^2 + \left\| \frac{\partial w}{\partial r} \right\|_{L_2}^2 + \left\| \frac{\partial w}{\partial z} \right\|_{L_2}^2 \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Por su parte,  $\mathbf{L}_2(\Omega) = L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$  con  $\|\vec{w}\|_{\mathbf{L}_2} = \sqrt{(\vec{w}, \vec{w})} = [\|w_1\|_{L_2}^2 + \|w_2\|_{L_2}^2]^{1/2}$  y  $\mathbf{H}^1(\Omega) = H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$  con  $\|\vec{w}\|_{\mathbf{H}^1} = [\|w_1\|_{H^1}^2 + \|w_2\|_{H^1}^2]^{1/2}$ ,  $\vec{w} = (w_1, w_2)$ .

### 3.1.2. Formulación variacional

Sea  $w \in H^1(V)$  y  $V$  el volumen formado por la región de estudio definida en el apartado 2.2. Al multiplicar la ecuación (3.1) por la función de prueba  $w$  e integrar en  $V$  se obtiene

$$\int_V \nabla \cdot (\nabla p) w dV = 0, \quad \forall w \in H^1(V).$$

Aplicando formulas de Green y multiplicando por -1, se tiene

$$\int_V \nabla w \cdot \nabla p dV - \int_S (w \nabla p) \cdot \hat{n} dS = 0,$$

donde  $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5 \cup S_6$ . Entonces

$$\begin{aligned} \int_V \nabla w \cdot \nabla p dV - \int_{S_1} (w \nabla p) \cdot \hat{n}_1 dS - \int_{S_2} (w \nabla p) \cdot \hat{n}_2 dS - \int_{S_3} (w \nabla p) \cdot \hat{n}_3 dS \\ - \int_{S_4} (w \nabla p) \cdot \hat{n}_4 dS - \int_{S_5} (w \nabla p) \cdot \hat{n}_5 dS - \int_{S_6} (w \nabla p) \cdot \hat{n}_6 dS = 0. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_{r_w/H}^{L/H} \int_{-1}^1 \nabla w \cdot \nabla p r dz dr d\theta - \int_0^{2\pi} \int_{r_w/H}^{L/H} (w \nabla p) \cdot \hat{n}_1 r dr d\theta \\ - \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 (w \nabla p) \cdot \hat{n}_2 r dz d\theta - \int_0^{2\pi} \int_{r_w/H}^{L/H} (w \nabla p) \cdot \hat{n}_3 r dr d\theta \\ - \int_0^{2\pi} \int_{h/H}^1 (w \nabla p) \cdot \hat{n}_4 r dz d\theta - \int_0^{2\pi} \int_{-h/H}^{h/H} (w \nabla p) \cdot \hat{n}_5 r dz d\theta \\ - \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{-h/H} (w \nabla p) \cdot \hat{n}_6 r dz d\theta = 0, \quad \forall w \in H^1(V). \end{aligned}$$

Observemos que la región  $\Omega$ , definida en el apartado 2.2.1 genera el volumen  $V$  al rotarla un ángulo de  $2\pi$  con respecto al eje  $z$ . Análogamente la superficie  $S_i$  se obtiene al rotar la frontera  $\Gamma_i$  (ver figuras 2.1 y 2.3).

Al sustituir las condiciones de frontera (2.29) -(2.34) e integrar con respecto a  $\theta$  y multiplicar por  $\frac{1}{2\pi}$ , la relación anterior se reduce a

$$\int_{-1}^1 \int_{r_w/H}^{L/H} \nabla w \cdot \nabla p r dr dz - \frac{L\delta_1}{H} \int_{-1}^1 w dz + \frac{r_w\delta_2}{H} \int_{-h/H}^{h/H} w \cos\left(\frac{\pi H}{2h}z\right) dz = 0, \quad \forall w \in H^1(\Omega), \quad (3.4)$$

donde  $\delta_1 = \frac{\mu Q}{4\pi p_0 L \kappa}$  y  $\delta_2 = \frac{\mu Q H}{8 p_0 h r_w \kappa}$ .

Como es un problema elíptico con condiciones en toda la frontera tipo Neumann tiene solución salvo una constante, por lo cual para encontrar dicha solución se fijará el valor en un punto que llamaremos nodo  $\vec{n}_\gamma = (\frac{r_w}{H}, 0)$ , es decir,  $p(\vec{n}_\gamma) = p_\gamma$ .

Por lo tanto, el problema variacional asociado a las ecuaciones (2.28)-(2.34) se puede formular de la siguiente manera.

Encontrar  $p \in W$  tal que

$$\int_{-1}^1 \int_{r_w/H}^{L/H} \nabla w \cdot \nabla p r dr dz = \frac{L\delta_1}{H} \int_{-1}^1 w dz - \frac{r_w\delta_2}{H} \int_{-h/H}^{h/H} w \cos\left(\frac{\pi H}{2h}z\right) dz, \quad \forall w \in W_0. \quad (3.5)$$

con  $W = \{w \in H^1(\Omega) : w(\vec{n}_\gamma) = p_\gamma\}$  y  $W_0 = \{w \in H^1(\Omega) : w(\vec{n}_\gamma) = 0\}$ .

Una vez que está calculada la presión se recupera la velocidad usando la ecuación de Darcy (2.7) a nivel variacional, ver apartado 3.2.

### 3.1.3. Discretización del problema variacional

Con el objeto de discretizar los subespacios  $W$  y  $W_0$ , definidos en el apartado anterior, se particiona el dominio de estudio  $\bar{\Omega}$  descrito en el apartado 2.2.1 en  $ne$  elementos finitos  $\Omega_e$ . Dado que la frontera es poligonal, la malla o partición  $\Omega_h$  coincide con  $\bar{\Omega}$  ( $\Omega_h = \bar{\Omega}$ ) y  $\Omega_h = \bigcup_{e=1}^{ne} \Omega_e$ .

Dos elementos  $\Omega_i$  y  $\Omega_j$ ,  $i, j = 1, \dots, ne$ , satisfacen sólo una de las siguientes propiedades:

1.  $\overset{\circ}{\Omega}_i \cap \overset{\circ}{\Omega}_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$ , donde  $\overset{\circ}{\Omega}_i$  es el interior no vacío de  $\Omega_i$ .

2. La intersección  $\Omega_i \cap \Omega_j$ ,  $i \neq j$ , es solamente en un vértice o en una arista.

La malla  $\Omega_h$  se distingue a través del parámetro  $h$ , el cual se define como

$$h = \max_{\Omega_e \in \Omega_h} \text{diam}(\Omega_e), \quad (3.6)$$

con  $\text{diam}(\Omega_e) = \text{diámetro de } \Omega_e = \text{lado más largo de } \Omega_e$ .

La figura 3.1 muestra una malla  $\Omega_h$  de un dominio  $\bar{\Omega}$  usando cuadriláteros bilineales.

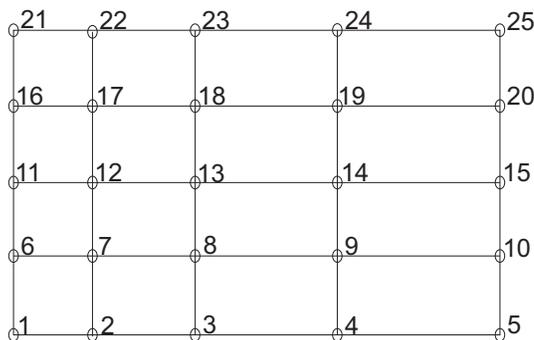


Figura 3.1: Malla del dominio  $\bar{\Omega}$ .

En particular, los elementos finitos que se utilizan en este trabajo son cuadriláteros. Por lo cual, los elementos del espacio  $H^1(\Omega)$  se aproximan a través de funciones continuas que restringidas al elemento  $\Omega_e$  son polinomios bilineales o bicuadráticos.

Sean  $W_h$  y  $W_{h,0}$  los subespacios de dimensión finita de  $W$  y  $W_0$  respectivamente tales que

$$W_h = \{w \in \mathcal{C}^0(\Omega) : w|_{\Omega_e} \in \mathbb{Q}_n \ \forall \Omega_e \in \Omega_h, w(\vec{n}_\gamma) = p_\gamma\}$$

y

$$W_{h,0} = \{w \in \mathcal{C}^0(\Omega) : w|_{\Omega_e} \in \mathbb{Q}_n \ \forall \Omega_e \in \Omega_h, w(\vec{n}_\gamma) = 0\}$$

donde  $\mathcal{C}^0(\Omega)$  es el conjunto de funciones continuas en  $\Omega$  y  $\mathbb{Q}_n(\Omega_e)$  el conjunto de polinomios de grado  $n$  en cada una de las componentes de  $\mathbb{R}^2$ . Si  $n = 1$ , el polinomio de aproximación es bilineal y si  $n = 2$  el polinomio es bicuadrático. Lo que se desea es aproximar una función  $p \in H^1(\Omega)$  por medio de una función  $p_h \in W_h$ .

Los nodos del elemento finito son los puntos que se utilizan para realizar la aproximación sobre cada elemento  $\Omega_e$ . A los valores de  $p_h$  evaluados en tales nodos se les llama grados

de libertad globales. Llamemos  $nnt$  al número de nodos totales o grados de libertad global del problema.

Sea  $\{\phi_j\}$  funciones base de  $W_h$  y  $W_{h,0}$  tales que

$$\phi_j(\vec{n}_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

donde  $\vec{n}_i = (r_i, z_i)$  son las coordenadas del nodo  $i$  para  $i = 1, \dots, nnt$ .

El soporte de  $\phi_j(\vec{n}_j)$  está formado por todos los elementos  $\Omega_e$  que están conectados con el nodo  $n_j$ , ver figura 3.2. Esta función es cero fuera de su soporte compacto. Además

por ser  $\{\phi_i\}$  una base de  $W_h$ , si  $w_h \in W_{h,0}$  y  $p_h \in W_h$  entonces  $w_h(r, z) = \sum_{i=1}^{nnt} \alpha_i \phi_i(r, z)$ ,  $p_h = \sum_{j=1}^{nnt} p(\vec{n}_j) \phi_j$ . Las  $\phi_i$  se construyen tal que  $p_h(\vec{n}_i) = p(\vec{n}_i)$ . El espacio  $W_h$  es de dimensión finita igual a  $nnt$  y los  $p(\vec{n}_i)$ ,  $i = 1, \dots, nnt$ , son los grados de libertad global.

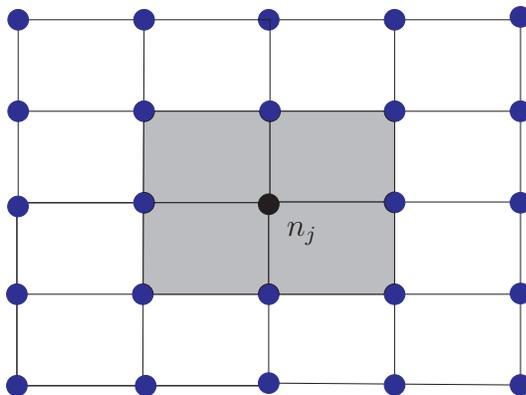


Figura 3.2: Soporte de la función  $\phi_j$  para el nodo  $\vec{n}_j$ .

El problema (3.5) se convierte en un problema variacional discreto: encontrar  $p_h \in W_h$  tal que

$$\int_{\Omega_h} \nabla w_h \cdot \nabla p_h r \, d\Omega = \frac{L\delta_1}{H} \int_{\Gamma_2} w_h \, d\Gamma - \frac{r_w \delta_2}{H} \int_{\Gamma_5} w_h \cos\left(\frac{\pi H}{2h} z\right) \, d\Gamma, \quad \forall w_h \in W_{h,0}.$$

Observemos que  $d\Omega = dr \, dz$ .

En términos de los elementos  $\Omega_e$ , de las funciones base  $\phi_i$  y usando la propiedad de sumabilidad resulta

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{ne} \int_{\Omega_e} \nabla \phi_i \cdot \nabla \left( \sum_{j=1}^{nnt} p_j \phi_j \right) r d\Omega &= \sum_{e=1}^{ne} \frac{L\delta_1}{H} \int_{\Gamma_2} \phi_i \Big|_{\Gamma_2} d\Gamma \\ &- \sum_{e=1}^{ne} \frac{r_w \delta_2}{H} \int_{\Gamma_5} \phi_i \Big|_{\Gamma_5} \cos \left( \frac{\pi H}{2h} z \right) d\Gamma, \quad \forall i = 1, 2, \dots, nnt \end{aligned}$$

donde  $p_{\mathfrak{b}} = \sum_{j=1}^{nnt} p_j \phi_j$ ,  $p_j = p(\vec{n}_j)$ .

Por las propiedades del operador integral

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{nnt} \sum_{e=1}^{ne} p_j \int_{\Omega_e} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j r d\Omega &= \sum_{e=1}^{ne} \frac{L\delta_1}{H} \int_{\Gamma_2} \phi_i \Big|_{\Gamma_2} d\Gamma \\ &- \sum_{e=1}^{ne} \frac{r_w \delta_2}{H} \int_{\Gamma_5} \phi_i \Big|_{\Gamma_5} \cos \left( \frac{\pi H}{2h} z \right) d\Gamma, \quad \forall i = 1, 2, \dots, nnt. \end{aligned}$$

Dado que conocemos  $p_\gamma = p(\vec{n}_\gamma)$ ,  $\vec{n}_\gamma = \left( \frac{r_w}{H}, 0 \right)$ , la expresión anterior constituye un sistema de  $nnt - 1$  ecuaciones con  $nnt - 1$  incógnitas de la forma

$$K \vec{p}_{\mathfrak{b}} = \vec{F} \tag{3.7}$$

donde  $\vec{p}_{\mathfrak{b}}$  es el vector presión y

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \sum_{e=1}^{ne} \int_{\Omega_e} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j r d\Omega \\ F_i &= \sum_{e=1}^{ne} \frac{L\delta_1}{H} \int_{\Gamma_2} \phi_i \Big|_{\Gamma_2} d\Gamma - \sum_{e=1}^{ne} \frac{r_w \delta_2}{H} \int_{\Gamma_5} \phi_i \Big|_{\Gamma_5} \cos \left( \frac{\pi H}{2h} z \right) d\Gamma \\ &- \sum_{e=1}^{ne} p_\gamma \int_{\Omega_e} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_\gamma r d\Omega. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \sum_{e=1}^{ne} K_{ij}^e \quad \text{con} \quad K_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j r d\Omega \\ F_i &= \sum_{e=1}^{ne} F_i^e \quad \text{con} \quad F_i^e = \frac{L\delta_1}{H} \int_{\Gamma_2} \phi_i \Big|_{\Gamma_2} d\Gamma - \frac{r_w \delta_2}{H} \int_{\Gamma_5} \phi_i \Big|_{\Gamma_5} \cos \left( \frac{\pi H}{2h} z \right) d\Gamma \\ &- p_\gamma \int_{\Omega_e} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_\gamma r d\Omega. \end{aligned}$$

### 3.1.4. Funciones de forma

Si se restringen las funciones base  $\phi_i$  y  $\phi_j$  al elemento  $\Omega_e$  se obtienen las funciones de forma  $\psi_\beta$  y  $\psi_\lambda$  respectivamente, es decir  $\phi_i|_{\Omega_e} = \psi_\beta^e$  y  $\phi_j|_{\Omega_e} = \psi_\lambda^e$ ,

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \nabla \psi_\beta^e \cdot \nabla \psi_\lambda^e r d\Omega = K_{\beta\lambda}^e, \quad (3.8)$$

$$F_i^e = \frac{L\delta_1}{H} \int_{\Gamma_2} \psi_\beta^e|_{\Gamma_2} d\Gamma - \frac{r_w\delta_2}{H} \int_{\Gamma_5} \psi_\beta^e|_{\Gamma_5} \cos\left(\frac{\pi H}{2h}z\right) d\Gamma - p_\gamma \int_{\Omega_e} \nabla \psi_\beta^e \cdot \nabla \psi_\gamma r d\Omega = F_\beta^e. \quad (3.9)$$

donde  $K_{\beta\lambda}^e$  es un elemento o entrada de la matriz elemental  $K^e$ , de tamaño  $nne \times nne$ , con  $nne$  el número de nodos por elemento.

Por su parte, el cálculo de los primeros dos términos de  $F$  en la ecuación (3.9), se puede realizar de forma independiente a  $K$ . Las funciones  $\psi_\beta^e|_{\Gamma}$  son funciones de forma en una dimensión que dependen de  $z$ . Si se divide la frontera  $\Gamma_2$  en  $nef_2$  elementos, y  $\Gamma_2 = \bigcup_{e=1}^{nef_2} \Gamma_2^e$ , donde los elementos  $\Gamma_2^e$  son intervalos con extremos  $z_a$  y  $z_b$ , (análogamente para  $\Gamma_5$ ) entonces

$$F_\beta = \sum_{e=1}^{nef_2} \frac{L\delta_1}{H} \int_{z_a}^{z_b} \psi_\beta^e|_{\Gamma_2^e} dz - \sum_{e=1}^{nef_5} \frac{r_w\delta_2}{H} \int_{z_a}^{z_b} \psi_\beta^e|_{\Gamma_5^e} dz.$$

Los funciones de forma  $\psi_\lambda^e$  del elemento  $\Omega_e$  cumplen las propiedades siguientes:

1.  $\psi_\lambda^e(r_\beta, z_\beta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \beta = \lambda \\ 0 & \text{si } \beta \neq \lambda \end{cases}$
2.  $\psi_1^e + \psi_2^e + \dots + \psi_{nne}^e = 1$ ,

para  $\beta, \lambda = 1, 2, \dots, nne$ .

### Elementos bilineales

Para elementos rectangulares o cuadriláteros bilineales  $\beta, \lambda = 1, 2, 3, 4$ . Luego las matrices elementales son  $K^e$  y  $F^e$  son

$$K^e = \begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e & K_{13}^e & K_{14}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e & K_{23}^e & K_{24}^e \\ K_{31}^e & K_{32}^e & K_{33}^e & K_{34}^e \\ K_{41}^e & K_{42}^e & K_{43}^e & K_{44}^e \end{bmatrix}, \quad F^e = \begin{bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \\ F_3^e \\ F_4^e \end{bmatrix}.$$

Si  $w_h|_{\Omega_e} = w_h^e$  y  $w_h^e \in \mathbb{Q}_1(\Omega_e)$ , entonces  $w_h^e$  se puede aproximar por un polinomio bilineal en  $r$  y  $z$ , esto es

$$\begin{aligned} w_h^e &= a_1 + a_2 r + a_3 z + a_4 r z \\ &= w_1 \psi_1^e + w_2 \psi_2^e + w_3 \psi_3^e + w_4 \psi_4^e \end{aligned}$$

donde  $w_\lambda$ ,  $\lambda = 1, \dots, 4$  son los grados de libertad locales y  $\psi_\lambda^e$ ,  $\lambda = 1, \dots, 4$  son las funciones de forma para el elemento  $\Omega_e$

En particular, para este elemento de 4 nodos se utilizan funciones de forma con la numeración local como se muestra en la figura 3.3.

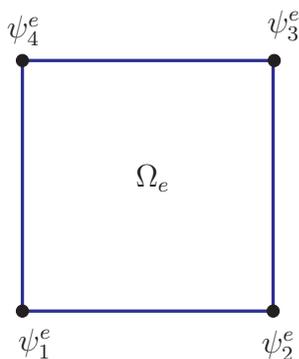


Figura 3.3: Numeración de las funciones de forma para un cuadrilátero de 4 nodos.

### Elementos bicuadráticos

El método de elemento finito permite aproximar la solución con polinomios de mayor orden. Un caso particular son los polinomios bicuadráticos para cada elemento.

Sea  $w_h^e \in \mathbb{Q}_2(\Omega_e)$ , entonces

$$\begin{aligned} w_h^e(r, z) &= a_1 + a_2 r + a_3 z + a_4 r z + a_5 r^2 + a_6 z^2 + a_7 r^2 z + a_8 r z^2 + a_9 r^2 z^2 \\ &= w_1 \psi_1^e + w_2 \psi_2^e + w_3 \psi_3^e + w_4 \psi_4^e + w_5 \psi_5^e + w_6 \psi_6^e + w_7 \psi_7^e + w_8 \psi_8^e + w_9 \psi_9^e, \end{aligned}$$

donde  $w_\lambda$ ,  $\lambda = 1, \dots, 9$  son los grados de libertad locales y las  $\psi_\lambda^e$  son las funciones de forma. Para construir las matrices elementales  $K^e$  y  $F^e$  se utilizan las ecuaciones (3.8) y 3.9 con  $nne = 9$ . Se usa la numeración local indicada en la figura 3.4.

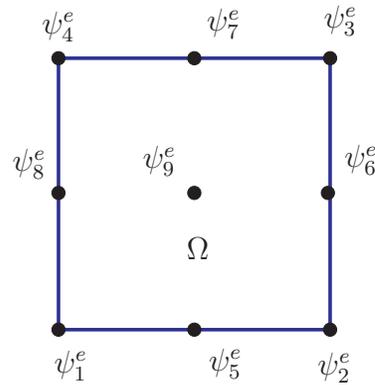


Figura 3.4: Numeración de las funciones de forma para un cuadrilátero de 9 nodos.

### 3.1.5. Transformaciones isoparamétricas

Consideremos una transformación  $T_e : \hat{\Omega} \rightarrow \Omega_e$  de la forma

$$T_e : \begin{cases} r = r(\xi, \eta) \\ z = z(\xi, \eta) \end{cases} \quad (3.10)$$

tal que  $T_e(\hat{\Omega}) = \Omega_e$ , donde  $\hat{\Omega}$  se le llama elemento de referencia (ver figura 3.5).

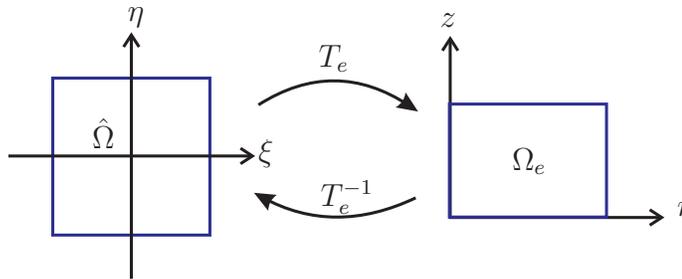


Figura 3.5: Transformación isoparamétrica

Supongamos que las funciones  $r$  y  $z$  son continuamente diferenciables con respecto a  $\xi$  y  $\eta$ , entonces

$$\begin{aligned} dr &= \frac{\partial r}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial r}{\partial \eta} d\eta \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta \end{aligned} \quad (3.11)$$

esto es

$$\begin{bmatrix} dr \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial r}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} = J_e \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

donde  $J_e$  es la matriz Jacobiana de la transformación  $T_e$ .

Si  $|J_e| = \det(J_e) = \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial r}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \neq 0$ , entonces

$$\begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} = J_e^{-1} \begin{bmatrix} dr \\ dz \end{bmatrix} = \frac{1}{|J_e|} \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial \eta} & -\frac{\partial r}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial r}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dr \\ dz \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Análogamente a las expresiones (3.10) y (3.11),

$$T_e^{-1} : \begin{cases} \xi = \xi(r, z) \\ \eta = \eta(r, z) \end{cases}, \quad T_e^{-1}(\Omega_e) = \hat{\Omega} \quad (3.14)$$

y

$$\begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial r} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial r} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dr \\ dz \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Igualando las ecuaciones (3.13) y (3.15) resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial r} &= \frac{1}{|J_e|} \frac{\partial z}{\partial \eta}, & \frac{\partial \xi}{\partial z} &= -\frac{1}{|J_e|} \frac{\partial r}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial r} &= -\frac{1}{|J_e|} \frac{\partial z}{\partial \xi}, & \frac{\partial \eta}{\partial z} &= \frac{1}{|J_e|} \frac{\partial r}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Cuando el número de nodos del elemento de referencia  $\hat{\Omega}$  es igual al número de nodos de cada elemento  $\Omega_e$  se le llama a  $T_e$  transformación isoparamétrica (ver Becker et al. (1981)) y se escribe como

$$T_e : \begin{cases} r = \sum_{k=1}^{nne} r_k \hat{\psi}_k(\xi, \eta) \\ z = \sum_{k=1}^{nne} z_k \hat{\psi}_k(\xi, \eta) \end{cases}, \quad (3.17)$$

donde  $(r_k, z_k)$ ,  $\forall k = 1, \dots, nne$ , son las coordenadas de todos los nodos de  $\Omega_e$  y  $\hat{\psi}_k$  es la función de forma para elemento de referencia  $\hat{\Omega}$  asociada al nodo con coordenadas  $(r_k, z_k)$ .

Si  $g : \Omega_e \rightarrow \mathbb{R}$  es una función, entonces

$$g(r, z) = g(r(\xi, \eta), z(\xi, \eta)) = g(T_e(\xi, \eta)) = \widehat{g}(\xi, \eta)$$

y además

$$\widehat{g}(\xi, \eta) = g(T_e^{-1}(r, z)) = g(r, z).$$

Por lo tanto

$$\psi_\lambda^e(r, z) = \widehat{\psi}_\lambda(\xi(r, z), \eta(r, z)), \quad \lambda = 1, 2, \dots, nne.$$

Por la regla de la cadena

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_\lambda^e}{\partial r} &= \frac{\partial \widehat{\psi}_\lambda}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial \widehat{\psi}_\lambda}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial r}, \\ \frac{\partial \psi_\lambda^e}{\partial z} &= \frac{\partial \widehat{\psi}_\lambda}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \widehat{\psi}_\lambda}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Empleando la transformación isoparamétrica de la relación (3.17)

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \xi} &= \sum_{k=1}^{nne} r_k \frac{\partial \widehat{\psi}_k}{\partial \xi}(\xi, \eta), & \frac{\partial r}{\partial \eta} &= \sum_{k=1}^{nne} r_k \frac{\partial \widehat{\psi}_k}{\partial \eta}(\xi, \eta), \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} &= \sum_{k=1}^{nne} z_k \frac{\partial \widehat{\psi}_k}{\partial \xi}(\xi, \eta), & \frac{\partial z}{\partial \eta} &= \sum_{k=1}^{nne} z_k \frac{\partial \widehat{\psi}_k}{\partial \eta}(\xi, \eta). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Usando las igualdades (3.18) y (3.19) en ecuación (3.16) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial r} &= \frac{1}{|J_e|} \frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{1}{|J_e|} \sum_{k=1}^{nne} z_k \frac{\partial \widehat{\psi}_k}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} &= -\frac{1}{|J_e|} \frac{\partial r}{\partial \eta} = -\frac{1}{|J_e|} \sum_{k=1}^{nne} r_k \frac{\partial \widehat{\psi}_k}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial r} &= -\frac{1}{|J_e|} \frac{\partial z}{\partial \xi} = -\frac{1}{|J_e|} \sum_{k=1}^{nne} z_k \frac{\partial \widehat{\psi}_k}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial z} &= \frac{1}{|J_e|} \frac{\partial r}{\partial \xi} = \frac{1}{|J_e|} \sum_{k=1}^{nne} r_k \frac{\partial \widehat{\psi}_k}{\partial \xi}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Sustituyendo las relaciones (3.20) en (3.19)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_\lambda^e}{\partial r} &= \frac{\partial \widehat{\psi}_\lambda}{\partial \xi} \left[ \frac{1}{|J_e|} \sum_{k=1}^{nne} z_k \frac{\partial \widehat{\psi}_k}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial \widehat{\psi}_\lambda}{\partial \eta} \left[ -\frac{1}{|J_e|} \sum_{k=1}^{nne} z_k \frac{\partial \widehat{\psi}_k}{\partial \xi} \right] \\ \frac{\partial \psi_\lambda^e}{\partial z} &= \frac{\partial \widehat{\psi}_\lambda}{\partial \xi} \left[ -\frac{1}{|J_e|} \sum_{k=1}^{nne} r_k \frac{\partial \widehat{\psi}_k}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial \widehat{\psi}_\lambda}{\partial \eta} \left[ \frac{1}{|J_e|} \sum_{k=1}^{nne} r_k \frac{\partial \widehat{\psi}_k}{\partial \xi} \right]. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Por otro lado,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_\lambda^e}{\partial r} \\ \frac{\partial \psi_\lambda^e}{\partial z} \end{bmatrix} = J_e^{-T} \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\psi}_\lambda^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \hat{\psi}_\lambda^e}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

y en notación compacta

$$\nabla_{rz} \psi_\lambda^e = J_e^{-T} \nabla_{\xi\eta} \hat{\psi}_\lambda. \quad (3.23)$$

Luego la integral sobre  $\Omega_e$  de la ecuación (3.8) se transforma a una integral sobre el elemento de referencia  $\hat{\Omega}$ , esto es

$$K_{\beta\lambda}^e = \int_{\hat{\Omega}} \left( J_e^{-T} \nabla_{\xi\eta} \hat{\psi}_\beta \right) \cdot \left( J_e^{-T} \nabla_{\xi\eta} \hat{\psi}_\lambda \right) \hat{r} |J_e| d\xi d\eta, \quad (3.24)$$

donde  $\hat{r} = \sum_{k=1}^{nne} r_k \hat{\psi}_k(\xi, \eta)$ .

### Elementos bilineales

Las funciones de forma  $\hat{\psi}_i$  (ver figura 3.6) para el elemento de referencia bilineal son

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\ \hat{\psi}_2 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ \hat{\psi}_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\ \hat{\psi}_4 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \quad (3.25)$$

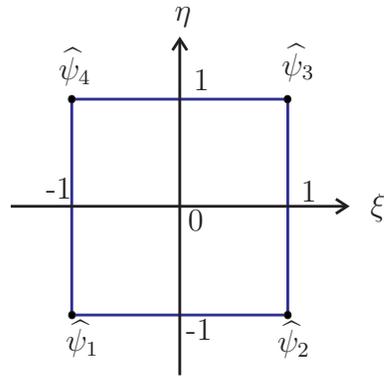


Figura 3.6: Funciones de forma para el elemento de referencia bilineal  $\hat{\Omega}$ .

### Elementos bicuadráticos

Las funciones de forma del elemento de referencia bicuadrático (ver figura 3.7) son:

$$\begin{aligned}
 \widehat{\psi}_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 - \eta) \\
 \widehat{\psi}_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 + \eta) \\
 \widehat{\psi}_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 - \eta) \\
 \widehat{\psi}_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 + \eta) \\
 \widehat{\psi}_5(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(\eta^2 - \eta) \\
 \widehat{\psi}_6(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(\xi^2 + \xi)(1 - \eta^2) \\
 \widehat{\psi}_7(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(\eta^2 + \eta) \\
 \widehat{\psi}_8(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(\xi^2 - \xi)(1 - \eta^2) \\
 \widehat{\psi}_9(\xi, \eta) &= (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

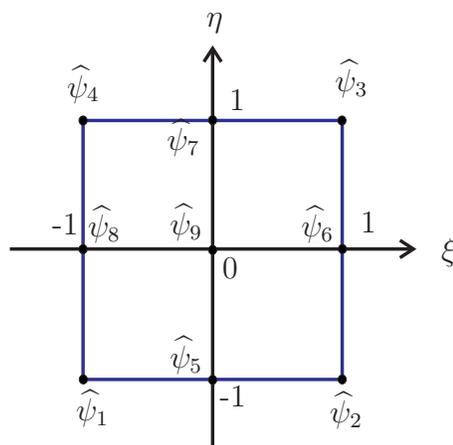


Figura 3.7: Funciones de forma para el elemento de referencia bicuadrático  $\hat{\Omega}$ .

### 3.1.6. Integración numérica

La integral de la ecuación (3.24) se resuelve numéricamente utilizando la fórmula de integración adecuada y se elige tomando en cuenta el orden de los polinomios de aproximación.

En general, la fórmula de integración se escribe como

$$\int_{\Omega_e} g(r, z) dr dz = \int_{\hat{\Omega}} \hat{g}(\xi, \eta) |J_e(\xi, \eta)| d\xi d\eta \approx \sum_{l=1}^{npg} \hat{g}(\xi_l, \eta_l) |J_e(\xi_l, \eta_l)| \omega_l \quad (3.27)$$

donde  $(\xi_l, \eta_l)$  son los puntos de cuadratura,  $\omega_l$  el peso correspondiente y  $npg$  el número de puntos de gauss.

Por lo tanto, al integrar la ecuación (3.24) se tiene

$$K_{\beta\lambda}^e \approx \sum_{l=1}^{npg} \hat{g}(\xi_l, \eta_l) |J_e(\xi_l, \eta_l)| \omega_l,$$

donde  $\hat{g}(\xi, \eta) = (J_e^{-T} \nabla_{\xi\eta} \hat{\psi}_\beta) \cdot (J_e^{-T} \nabla_{\xi\eta} \hat{\psi}_\lambda) \hat{r}$  y  $|J_e(\xi_l, \eta_l)| = \text{área de } \Omega_e$ .

#### Elementos bilineales

Para la integración se utilizan los siguientes puntos de cuadratura  $(\xi_l, \eta_l)$  junto con su peso correspondiente  $\omega_l$ :

$l$	1	2	3	4
$\xi_l$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\eta_l$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\omega_l$	1	1	1	1

Tabla 3.1: Puntos de cuadratura y pesos para elementos bilineales.

En este caso  $npg = 4$ .

### Elementos bicuadráticos

Para la integración se utilizan los siguientes puntos de cuadratura con sus respectivos pesos ( $npg = 9$ ):

$l$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\xi_l$	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$	0	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$	0	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$	0	$\sqrt{\frac{3}{5}}$
$\eta_l$	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$	0	0	0	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\sqrt{\frac{3}{5}}$
$\omega_l$	$\frac{25}{81}$	$\frac{40}{81}$	$\frac{25}{81}$	$\frac{40}{81}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{40}{81}$	$\frac{25}{81}$	$\frac{40}{81}$	$\frac{25}{81}$

Tabla 3.2: Puntos de cuadratura y pesos para elementos bicuadráticos.

### 3.1.7. Error de Interpolación

Sea  $p \in H_1(\Omega)$ . Si suponemos que las funciones de forma  $\psi_\beta^e$  contienen polinomios completos de grado  $\leq k$ , entonces el error en el interpolante  $p_h$  de  $p$  es

$$\|p - p_h\|_{L_2} \leq C_1 h^{k+1} \quad (3.28)$$

$$\|p - p_h\|_{H^1} \leq C_2 h^k \quad (3.29)$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes positivas que dependen de los datos del problema, ver Carey & Odem (1983). En nuestro caso para polinomios bilineales  $k = 1$  y para polinomios bicuadráticos  $k = 2$ .

## 3.2. Velocidad de inyección

Una vez obtenida la presión se aproxima la velocidad utilizando la ecuación de Darcy discreta adimensionalizada:

$$\vec{U}_h = -\frac{L}{H} \nabla p_h. \quad (3.30)$$

Sabemos que el polinomio de interpolación para la presión es  $p_h(r, z) = \sum_{j=1}^{nnt} p_j \phi_j(r, z)$ , sin embargo no conocemos explícitamente a  $\phi_j$  en  $\Omega$ , pero si se sabe quien es  $\phi_j$  restringida a cada elemento de su soporte. Por lo cual es necesario obtener la velocidad a nivel variacional. Observemos que si se integra en todo  $\Omega$  se tendría que construir dos matrices de tamaño  $nnt \times nnt$  y resolver un sistema de ecuaciones, lo que es muy costoso. Otra forma más económica es aproximar la velocidad a nivel nodal, ya que  $\phi$  es distinta de cero en su soporte,  $sop(\phi_i)$ . Esto es, dado que  $\vec{U}_h = (U_{1,h}, U_{2,h})$ , la primera componente de la ecuación (3.30) es

$$U_{1,h} = -\frac{L}{H} \frac{\partial p_h}{\partial r}. \quad (3.31)$$

Si  $U_{1,h} = \sum_{i=1}^{nnt} U_{1,i} \phi_i(r, z)$ , donde  $U_{1,i} = U_{1,h}(\vec{n}_i)$ , para encontrar la velocidad a nivel nodal de la primera componente, se fija el nodo  $i$ ,  $U_{1,i}$ , en la relación (3.31), se multiplica por la función base  $\phi_i$  del espacio  $W_h$  y se integra sobre el soporte de  $\phi_i$ , entonces

$$\sum_{e=1}^{sop(\phi_i)} \int_{\Omega_e} U_{1,i} \phi_i d\Omega = -\frac{L}{H} \sum_{e=1}^{sop(\phi_i)} \int_{\Omega_e} \frac{\partial}{\partial r} \left( \sum_{j=1}^{nnt} p_j \phi_j \right) \phi_i d\Omega, \quad \forall i = 1, 2, \dots, nnt. \quad (3.32)$$

Luego,

$$U_{1,i} = -\frac{L \sum_{e=1}^{sop(\phi_i)} \int_{\Omega_e} \sum_{j=1}^{nnt} p_j \frac{\partial \phi_j}{\partial r} \phi_i d\Omega}{H \sum_{e=1}^{sop(\phi_i)} \int_{\Omega_e} \phi_i d\Omega}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, nnt. \quad (3.33)$$

Las cálculos son análogos para obtener  $U_{2,i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, nnt$ .

Cabe mencionar que existen otros métodos para calcular la velocidad, por ejemplo Srinivasan & Lipnikov (2013) utilizan la técnica de volumen finito para resolver la ecuación de Darcy empleando líneas de corriente.

### 3.3. Transporte de trazador

Recordemos que la ecuación del modelo B adimensionalizada es:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{\Phi} \nabla \cdot [\vec{U}C - D\nabla C] = 0. \quad (3.34)$$

Por otro lado  $\nabla \cdot [\vec{U}C - D\nabla C] = \vec{U} \cdot \nabla C - \nabla \cdot (D\nabla C)$  ya que  $\nabla \cdot \vec{U} = 0$ .

El problema (3.34) se puede escribir como

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{\Phi} [\vec{U} \cdot \nabla C - \nabla \cdot (D\nabla C)] = 0, \quad (3.35)$$

sujeto a las condiciones (2.49)- (2.54).

Si el término convectivo es dominante, como es nuestro caso, se producen inestabilidades numéricas. Donea & Huerta (2003) muestran que una buena opción para corregir estas inestabilidades es usar la técnica de Crank-Nicholson (CN) y mínimos cuadrados (MC) para la discretización en el tiempo y en el espacio, respectivamente. La solución numérica es más cercana a la solución real siempre y cuando el número de Courant sea cercano a 1. En el Anexo A.3 se presenta un problema de advección pura para mostrar el comportamiento de CN y MC.

#### 3.3.1. Formulación variacional

Sea  $H^1(\Omega) = \{v \in L_2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial r}, \frac{\partial v}{\partial z} \in L_2(\Omega)\}$ . Definimos los espacios

$$S_t = \left\{ c \in H^1(\Omega) \times [0, T] : C(r, z, t) \Big|_{\Gamma_2} = 0, \quad z \in [-H, H] \right\},$$

$$\mathcal{V} = \left\{ v \in H^1(\Omega) : v(r, z) \Big|_{\Gamma_2} = 0 \right\}.$$

Supongamos que  $\Phi$  es constante. Para obtener la formulación débil del problema multiplicamos la ecuación (3.35) por la función de prueba  $v \in \mathcal{V}$  e integramos con respecto

al volumen  $V$ ,

$$\int_V \frac{\partial C}{\partial t} v dV + \frac{1}{\Phi} \left[ \int_V \vec{U} \cdot \nabla C v dV - \int_V \nabla \cdot (D \nabla C) v dV \right] = 0. \quad (3.36)$$

Aplicando formulas de Green

$$\int_V \frac{\partial C}{\partial t} v dV + \frac{1}{\Phi} \left[ \int_V \vec{U} \cdot \nabla C v dV + \int_V D \nabla C \cdot \nabla v dV - \int_V \nabla \cdot (D \nabla C v) dV \right] = 0. \quad (3.37)$$

Por el teorema de la divergencia

$$\int_V \frac{\partial C}{\partial t} v dV + \frac{1}{\Phi} \left[ \int_V \vec{U} \cdot \nabla C v dV + \int_V D \nabla C \cdot \nabla v dV - \int_S (D \nabla C v) \cdot n dV \right] = 0. \quad (3.38)$$

Utilizando las condiciones de frontera (2.49)-(2.52)

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial C}{\partial t} v dV + \frac{1}{\Phi} \left[ \int_V \vec{U} \cdot \nabla C v dV + \int_V D \nabla C \cdot \nabla v dV \right. \\ \left. - \int_{S_5} (D \nabla C v) \cdot n dS \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

La formulación variacional del problema transitorio de advección-dispersión se enuncia como: encontrar  $C \in S_t$  tal que

$$\frac{\partial(C, v)}{\partial t} + \frac{1}{\Phi} a(v, C) = 0 \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad (3.40)$$

donde el operador  $a$  está definido de la siguiente manera

$$\begin{aligned} a(v, C) &= (v, \vec{U} \cdot \nabla C) + (\nabla v, D \nabla C) - \int_{S_5} D \nabla C v \cdot n dS \\ &= (v, \vec{U} \cdot \nabla C) + (\nabla v, D \nabla C) + \int_{S_5} C U_1 v r d\Omega \end{aligned} \quad (3.41)$$

con

$$(u, v) = \int_V u v dV. \quad (3.42)$$

### Discretización en el tiempo

Para la discretización en el tiempo se utiliza la ecuación (A.3) del método de Crank-Nicholson descrito en el Apendice A.1:

$$C^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} C_t^{n+1} = C^n + \frac{\Delta t}{2} C_t^n. \quad (3.43)$$

Dado que  $C_t = -\frac{1}{\Phi} [\vec{U} \cdot \nabla C - \nabla \cdot (D \nabla C)]$ , el esquema semidiscreto se reescribe como

$$C^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \mathfrak{L} C^{n+1} = C^n - \frac{\Delta t}{2} \mathfrak{L} C^n \quad (3.44)$$

donde el operador  $\mathfrak{L} = -C_t$ .

### Discretización en el espacio

Para estabilizar el término convectivo utilizamos la técnica de mínimos cuadrados, descrita en el Apéndice A.2. Para ello, a partir de la ecuación (3.44) se puede definir el operador espacial  $L$  y la función  $f$  como

$$\begin{aligned} L(C^{n+1}) &= \left( C^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \mathfrak{L} C^{n+1} \right) \\ f &= C^n - \frac{\Delta t}{2} \mathfrak{L} C^n \end{aligned}$$

De esta manera, la formulación débil de la técnica de mínimos cuadrados, conforme a la ecuación (A.7), se escribe como: encontrar  $C^{n+1} \in S_t$  tal que

$$\left( v + \frac{\Delta t}{2} \mathfrak{L} v, C^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \mathfrak{L} C^{n+1} \right) = \left( v + \frac{\Delta t}{2} \mathfrak{L} v, C^n - \frac{\Delta t}{2} \mathfrak{L} C^n \right) \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad (3.45)$$

donde el producto interior  $(\cdot, \cdot)$  está definido en (3.42).

Desarrollando la igualdad anterior

$$\begin{aligned} (v, C^{n+1}) + \frac{\Delta t}{2} (v, \mathfrak{L} C^{n+1}) + \frac{\Delta t}{2} (\mathfrak{L} v, C^{n+1}) + \frac{\Delta t^2}{4} (\mathfrak{L} v, \mathfrak{L} C^{n+1}) \\ = (v, C^n) - \frac{\Delta t}{2} (v, \mathfrak{L} C^n) + \frac{\Delta t}{2} (\mathfrak{L} v, C^n) - \frac{\Delta t^2}{4} (\mathfrak{L} v, \mathfrak{L} C^n). \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor del operador  $\mathfrak{L}$

$$\begin{aligned}
& (v, C^{n+1}) + \frac{\Delta t}{2\Phi} \left\{ \left[ (v, \vec{U} \cdot \nabla C^{n+1}) - (v, \nabla \cdot D \nabla C^{n+1}) \right] + \left[ (\vec{U} \cdot \nabla v, C^{n+1}) \right. \right. \\
& \left. \left. - (\nabla \cdot D \nabla v, C^{n+1}) \right] \right\} + \frac{\Delta t^2}{4\Phi^2} \left[ (\vec{U} \cdot \nabla v, \vec{U} \cdot \nabla C^{n+1}) - (\nabla \cdot D \nabla v, \vec{U} \cdot \nabla C^{n+1}) \right. \\
& \quad \left. - (\vec{U} \cdot \nabla v, \nabla \cdot D \nabla C^{n+1}) + (\nabla \cdot D \nabla v, \nabla \cdot D \nabla C^{n+1}) \right] \\
& = (v, C^n) + \frac{\Delta t}{2\Phi} \left\{ - \left[ (v, \vec{U} \cdot \nabla C^n) - (v, \nabla \cdot D \nabla C^n) \right] + \left[ (\vec{U} \cdot \nabla v, C^n) \right. \right. \\
& \left. \left. - (\nabla \cdot D \nabla v, C^n) \right] \right\} - \frac{\Delta t^2}{4\Phi^2} \left[ (\vec{U} \cdot \nabla v, \vec{U} \cdot \nabla C^n) - (\nabla \cdot D \nabla v, \vec{U} \cdot \nabla C^n) \right. \\
& \quad \left. - (\vec{U} \cdot \nabla v, \nabla \cdot D \nabla C^n) + (\nabla \cdot D \nabla v, \nabla \cdot D \nabla C^n) \right]
\end{aligned}$$

Para la discretización espacial usamos elementos finitos bilineales (cuadriláteros), teniendo en cuenta que en coordenadas cilíndricas,  $\nabla \cdot (\nabla v) = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r}$  para estos elementos en  $\Omega_e$ .

$$\begin{aligned}
& (v, C^{n+1}) + \frac{\Delta t}{2\Phi} \left[ a(v, C^{n+1}) + (\vec{U} \cdot \nabla v, C^{n+1}) - D \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r}, C^{n+1} \right) \right] \\
& + \frac{\Delta t^2}{4\Phi^2} \left[ (\vec{U} \cdot \nabla v, \vec{U} \cdot \nabla C^{n+1}) - D \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r}, \vec{U} \cdot \nabla C^{n+1} \right) - D \left( \vec{U} \cdot \nabla v, \frac{1}{r} \frac{\partial C^{n+1}}{\partial r} \right) \right. \\
& \quad \left. + D^2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial C^{n+1}}{\partial r} \right) \right] \\
& = (v, C^n) + \frac{\Delta t}{2\Phi} \left[ -a(v, C^n) + (\vec{U} \cdot \nabla v, C^n) - D \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r}, C^n \right) \right] \\
& - \frac{\Delta t^2}{4\Phi^2} \left[ (\vec{U} \cdot \nabla v, \vec{U} \cdot \nabla C^n) - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r}, \vec{U} \cdot \nabla C^n \right) - D \left( \vec{U} \cdot \nabla v, \frac{1}{r} \frac{\partial C^n}{\partial r} \right) \right. \\
& \quad \left. + D^2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial C^n}{\partial r} \right) \right] \tag{3.46}
\end{aligned}$$

La discretización por elementos finitos de la relación anterior se expresa como el siguiente sistema de ecuaciones lineales siguientes:

$$\begin{aligned}
& \left[ M + \frac{\Delta t}{2\Phi} (G + DK + E_5) + \frac{\Delta t}{2\Phi} (G^T - DR) + \frac{\Delta t^2}{4\Phi^2} (\hat{K} - D(S + S^T) + DT) \right] \vec{C}^{n+1} = \\
& \left[ M - \frac{\Delta t}{2\Phi} (G + DK + E_5) + \frac{\Delta t}{2\Phi} (G^T - DR) - \frac{\Delta t^2}{4\Phi^2} (\hat{K} - D(S + S^T) + DT) \right] \vec{C}^n
\end{aligned}$$

donde cada una de las matrices es la suma de matrices elementales, es decir,

$$\begin{aligned}
 M &= \sum_{e=1}^{ne} M^e & \text{con} & \quad M_{\beta\lambda}^e = \int_{\Omega_e} \psi_\beta \psi_\lambda r \, d\Omega \\
 G &= \sum_{e=1}^{ne} G^e & \text{con} & \quad G_{\beta\lambda}^e = \int_{\Omega_e} \left( U_1 \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial r} \psi_\beta + U_2 \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial r} \psi_\beta \right) r \, d\Omega \\
 K &= \sum_{e=1}^{ne} K^e & \text{con} & \quad K_{\beta\lambda}^e = \int_{\Omega_e} \left( \frac{\partial \psi_\beta}{\partial r} \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial r} + \frac{\partial \psi_\beta}{\partial z} \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial z} \right) r \, d\Omega \\
 \hat{K} &= \sum_{e=1}^{ne} \hat{K}^e & \text{con} & \quad \hat{K}_{\beta\lambda}^e = \int_{\Omega_e} \left( U_1 \frac{\partial \psi_\beta}{\partial r} + U_2 \frac{\partial \psi_\beta}{\partial r} \right) \left( U_1 \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial r} + U_2 \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial r} \right) r \, d\Omega \\
 R &= \sum_{e=1}^{ne} R^e & \text{con} & \quad R_{\beta\lambda}^e = \int_{\Omega_e} \frac{\partial \psi_\beta}{\partial r} \psi_\lambda \, d\Omega \\
 S &= \sum_{e=1}^{ne} S^e & \text{con} & \quad S_{\beta\lambda}^e = \int_{\Omega_e} \frac{\partial \psi_\beta}{\partial r} \left( U_1 \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial r} + U_2 \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial r} \right) \, d\Omega \\
 T &= \sum_{e=1}^{ne} T^e & \text{con} & \quad T_{\beta\lambda}^e = \int_{\Omega_e} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\beta}{\partial r} \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial r} \, d\Omega \\
 E_5 &= \sum_{e=1}^{ne} E_5^e & \text{con} & \quad E_{5\beta\lambda}^e = \int_{\Gamma_{5e}} U_1 \psi_\beta|_{\Gamma_5} \psi_\lambda|_{\Gamma_5} r \, d\Gamma.
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Sea } A &= M + \frac{\Delta t}{2\Phi}(G + G^T) + \frac{\Delta t}{2\Phi}(DK - DR + E_5) + \frac{\Delta t^2}{4\Phi^2} \left( \hat{K} - D(S + S^T) + DT \right) \text{ y} \\
 B &= M + \frac{\Delta t}{2\Phi}(G^T - DR), \text{ en cada paso de tiempo } n \text{ se resuelve el sistema}
 \end{aligned}$$

$$A\vec{C}^{n+1} = [2B - A]\vec{C}^n. \tag{3.48}$$

Las matrices  $A$  y  $B$  son constantes en cada paso de tiempo por lo que es necesario calcularlas una única vez.

En coordenadas cartesianas el método de mínimos cuadrados produce sistemas simétricos definidos positivos, en este caso basta con almacenar la matriz triangular superior o inferior. En particular, para coordenadas cilíndricas la técnica no produce sistemas simétricos, esto se debe a la matriz  $R$ . A pesar de este inconveniente es una técnica que estabiliza apropiadamente el término convectivo como se puede observar en los resultados numéricos.

Por su parte, Crank-Nicholson junto con mínimos cuadrados funciona adecuadamente para números de Courant ( $C \approx \|\frac{\Delta t \vec{U}}{\Phi \eta}\|$ ) cercanos a 1, ver Donea & Huerta (2003).

Es importante resaltar que si la dispersión depende de la velocidad,  $D = D(U)$ , entonces este parámetro no se podría sacar de los productos interiores de la ecuación (3.46) y serían parte de las integrales definidas en (3.47), por lo cual cambiarían las entradas de las matrices  $A$  y  $B$ , y sus propiedades.

## Simulaciones numéricas

En este capítulo se presenta un análisis de resultados numéricos, en el apartado 4.1 los correspondientes al modelo A y en el apartado 4.2 las pruebas del modelo B. Llamaremos soluciones numéricas a las aproximaciones obtenidas de la presión, velocidad y concentración, expresiones (3.7), (3.33) y (3.48), respectivamente.

En general, se considera el caso de un campo petrolero con las características siguientes:

- $L$  = 100 metros (zona de influencia del pozo)
- $H$  = 25 metros (espesor de la capa productora)
- $h$  = 2.5 metros (espesor de la zona de disparos)
- $r_w$  = 10 centímetros (radio del pozo)
- $\mu$  = 1 cp (viscosidad)
- $Q$  = 2600 barriles/día (gasto del pozo)
- $p_0$  = 3700 psi (presión inicial)
- $\kappa$  = 12 miliDarcy (permeabilidad)
- $\Phi$  = 10 % (porosidad)

donde  $1 \text{ cp} = 1 \times 10^{-3} \text{ Pa s}$ ,  $1 \text{ barril} = 0.15899 \text{ m}^3$ ,  $1 \text{ psi} = 6894 \text{ Pa}$  y  $1 \text{ Darcy} = 9.86923 \times 10^{-13} \text{ m}^2$ .

Todos los algoritmos han sido programados en MATLAB versión 7.14 (2012a) y ejecutados en una PC con procesador Intel Core i5, 3.2 GHz y 4 GB de RAM bajo Linux. Para más detalle de la implementación computacional ver Apéndice B.1.

### 4.1. Resultados numéricos del Modelo A

Los valores de la presión y la velocidad cerca de la zona de disparos desciende drásticamente, en forma logarítmica e hiperbólica, respectivamente. Por ello, se refinó la malla

alrededor de esta zona en la dirección  $r$  a través de una serie geométrica, como se muestra en la figura 4.1. Para modelar la etapa de inyección se utilizaron elementos bilineales y bicuadráticos. Con el fin de que la comparación entre tipos de elementos sea justa, de un elemento bicuadrático se obtienen cuatro elementos bilineales, consecuentemente se emplea el mismo número de grados de libertad.

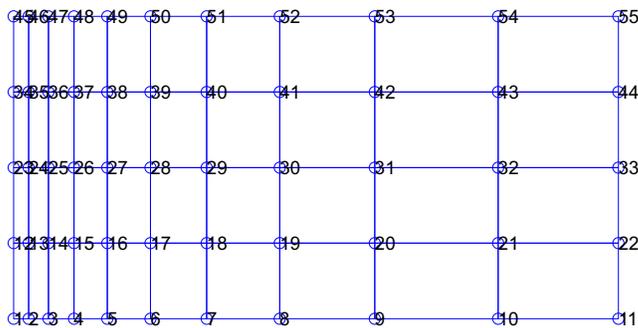


Figura 4.1: Malla refinada para la zona de disparos.

#### 4.1.1. Caso 1. $h = H$ (validación)

El modelo propuesto para la presión y velocidad depende de dos variables,  $r$  y  $z$ . Una manera de simplificarlo es proponer que la zona de disparos sea del ancho de la región de estudio, es decir,  $\Gamma_4 \cup \Gamma_5 \cup \Gamma_6$ . Con esto se elimina la dependencia en  $z$  y se traslada el problema de dos dimensiones a uno en una dimensión. Esto nos sirve para encontrar una solución analítica del problema, la cual comparamos con la solución numérica.

Si  $h = H$ , se realiza un proceso análogo a aquel que se usó en la obtención de la ecuación (2.16) y se deduce la siguiente expresión para la velocidad

$$\vec{U}(r) = \frac{Q}{4\pi H r} \hat{r}. \quad (4.1)$$

En este caso tanto la velocidad como la presión depende de  $r$ .

De la ecuación de Darcy (2.7) y dado que  $U_2 = 0$ , se tiene

$$U_1 = -\frac{\kappa}{\mu} \frac{dp}{dr}. \quad (4.2)$$

El índice 1 y 2 en la velocidad se refieren a la componente radial y azimutal (alrededor del eje) respectivamente.

Luego, al comparar las relaciones (4.1) y (4.2) se concluye que

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{p_L}{r}, \quad (4.3)$$

con  $p_L = \frac{\mu Q}{4\pi H \kappa}$ . Por su parte, al integrar la expresión (4.3) y utilizar el hecho que  $p(r_w) = p_0$  (ver apartado 2.2.2), entonces

$$p(r) = p_0 - p_L \ln\left(\frac{r}{r_w}\right). \quad (4.4)$$

Dado que la ecuación (4.4) tiene dimensiones de presión, se emplean las variables definidas en (2.27) para adimensionarla. De esa manera, la solución analítica de la presión  $p_a$  sin dimensiones es

$$p_a(r) = 1 - \frac{p_L}{p_0} \ln\left(\frac{H}{r_w} r\right), \quad (4.5)$$

definida en toda la zona de disparos ( $z \in [-1, 1]$ ).

La figura 4.2 presenta las gráficas de la presión analítica y numérica con flujo puramente radial para: (a) elementos bilineales y (b) elementos bicuadráticos. Las tablas 4.1 y 4.2 muestran los errores absolutos y relativos de la presión, respectivamente, en las normas  $L_2(\Omega)$  y  $H_1(\Omega)$  para dos valores de  $\mathfrak{h}$ . Recordemos que  $\mathfrak{h}$  esta definido por la ecuación (3.6). Los errores absolutos se describen en el apartado 3.1.7 y los relativos se calculan de la siguiente forma:

$$e_{L_2} = \frac{\|p_h - p_a\|_{L_2}}{\|p_a\|_{L_2}}, \quad e_{H_1} = \frac{\|p_h - p_a\|_{H_1}}{\|p_a\|_{H_1}} \quad (4.6)$$

donde  $\|\cdot\|_{L_2}$  y  $\|\cdot\|_{H_1}$  estan definidos en el apartado 3.1.1, y  $p_h$  es la solución numérica de la presión.

	$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{max}$	$\mathfrak{h}_{min}$	$e_{L_2}$	$e_{H_1}$	$ne$	$nnt$
Bilineales	0.2501	0.1	0.1291	0.3085	1600	1681
	0.1479	0.01	0.0077	0.0434	19520	19845
Bicuadráticos	0.5001	0.1	0.0948	0.2632	400	1681
	0.2957	0.01	0.0021	0.0231	4880	19845

Tabla 4.1: Errores absolutos para la presión con elementos bilineales y bicuadráticos.

	$h = h_{max}$	$h_{min}$	$e_{L_2}$	$e_{H_1}$	$ne$	$nnt$
Bilineales	0.2501	0.1	0.0649	0.1417	1600	1681
	0.1479	0.01	0.0039	0.0191	19520	19845
Bicuadráticos	0.5001	0.1	0.0475	0.1123	400	1681
	0.2957	0.01	0.0010	0.0101	4880	19845

Tabla 4.2: Errores relativos para la presión con elementos bilineales y bicuadráticos.

El valor de  $h_{max}$  se obtiene para los elementos que están en  $\Gamma_2$  (extremo derecho de la malla), mientras que  $h_{min}$  es el valor para elementos que están en el lado izquierdo del dominio.

Los resultados de la Tabla 4.1 están de acuerdo a los errores de interpolación descritos en las ecuaciones (3.28) y (3.29). Por ejemplo, para un elemento bicuadrático con  $h = 0.2957$  el orden del error en la norma  $L_2$  está dado por  $h^3 = 0.0258$  y en la norma por  $H1$   $h^2 = 0.0874$ ; estos valores son más grandes que los resultados respectivos de la tabla.

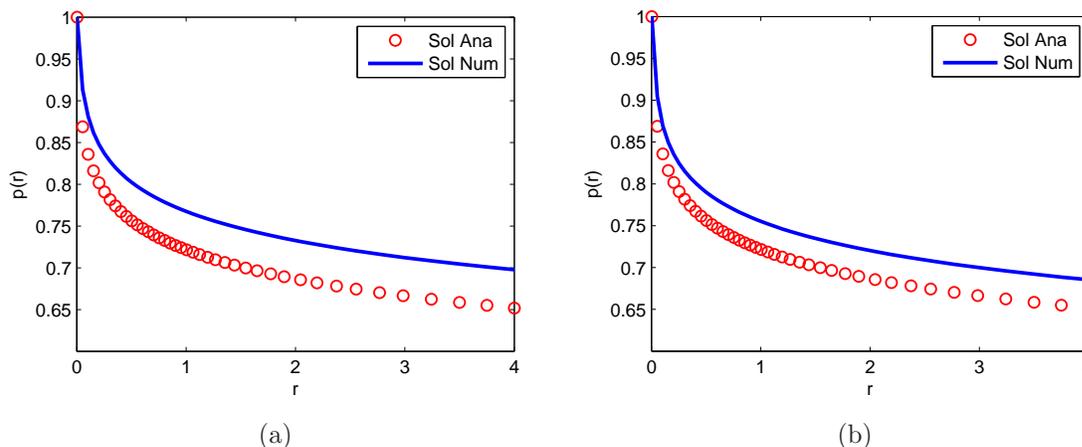


Figura 4.2: Presión analítica y numérica para elementos finitos (a) bilineales con  $h = 0.25$  y (b) bicuadráticos con  $h = 0.5$ .

Como se aprecia en la tabla 4.2, con el mismo número de grados de libertad para ambos elementos, se obtiene el mismo orden de error para aproximar la solución analítica, ecuación (4.5). Sin embargo se requiere cuatro veces más el número de elementos bilineales y además en la zona de disparos se tiene una mejor aproximación al gradiente de la presión con elementos bicuadráticos, ver la figura 4.2. Por lo tanto los resultados

numéricos que se presentan en el resto del capítulo se trabajan con mallas bicuadráticas.

Debido al tamaño de la memoria de la máquina, la malla más fina que se utiliza es  $h = 0.2957$ , que da lugar a un 1% de error, por lo cual la solución numérica de la presión se ajusta adecuadamente a la solución analítica, como se observa en la figura 4.3 para elementos bicuadráticos.

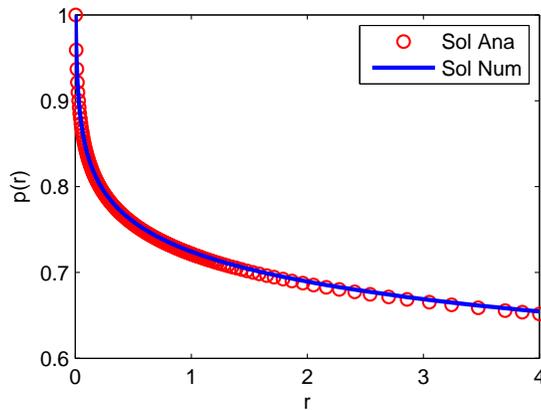


Figura 4.3: Presión analítica y numérica para elementos finitos bicuadráticos con  $h = 0.2957$ .

Observemos que la gráfica para cualquier  $z$  fijo es igual a aquella que está en la figura 4.2 (b), ya que la solución solo depende de  $r$ .

Por su parte, la presión numérica para las regiones  $\Omega$  (en  $2D$ ) y  $V$  (en  $3D$ ) se muestra en la figura 4.4 (a) y (b) respectivamente. El valor máximo de la presión es 1 en  $r = \frac{r_w}{H}$  y uniforme.

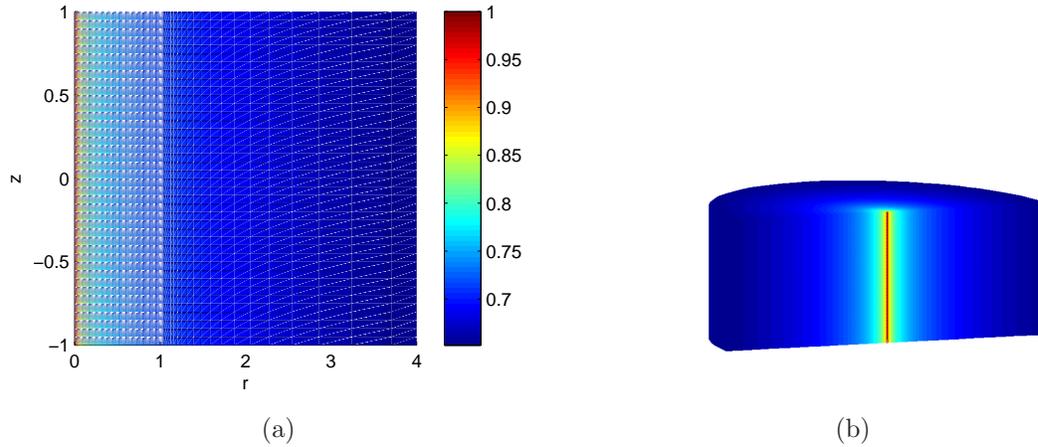


Figura 4.4: Presión para  $h = H$  en: (a) dos dimensiones y (b) tres dimensiones.

Una vez calculada la presión se obtiene la aproximación de la velocidad mediante la ecuación (3.33). La solución analítica adimensional de la velocidad es:

$$\vec{U}(r) = \frac{L p_L}{H p_0 r} \hat{r}. \quad (4.7)$$

La figura 4.5 exhibe las gráficas de la velocidad analítica y numérica ( en  $z = 0$ ) para elementos bicuadráticos con  $\mathfrak{h} = 0.2957$ . La mayor diferencia entre la solución analítica y numérica es para valores de  $r$  cercanos a  $r_w/H$ , debido a que la velocidad decrece rápidamente.

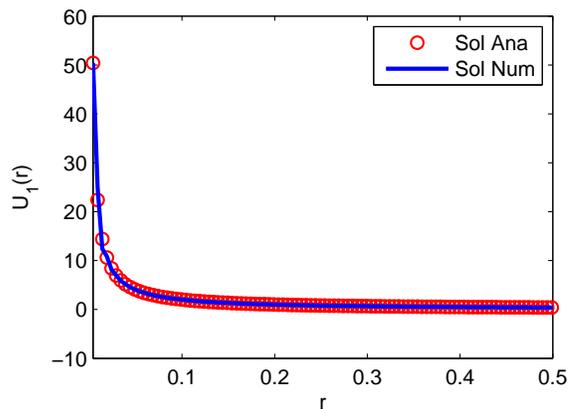


Figura 4.5: Velocidad analítica y numérica para elementos finitos bicuadráticos con  $\mathfrak{h} = 0.2957$

En la figura 4.6 se presenta el campo de velocidad aproximado para  $\Omega$ . Este campo es horizontal, lo que implica que no hay dependencia en  $z$  y  $U_2 = 0$ .

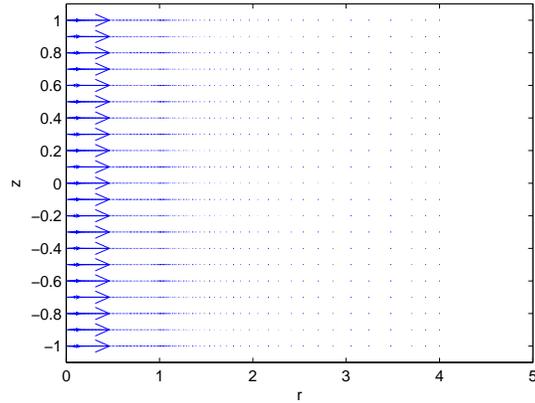


Figura 4.6: Campo de velocidad aproximado para  $h = H$ .

#### 4.1.2. Caso 2. $h \neq H$

Si consideramos para la zona de disparos  $h = 2.5 \text{ m}$  (con  $H = 25 \text{ m}$ ), las soluciones numéricas de la presión y velocidad se muestran en las figuras 4.7 - 4.10.

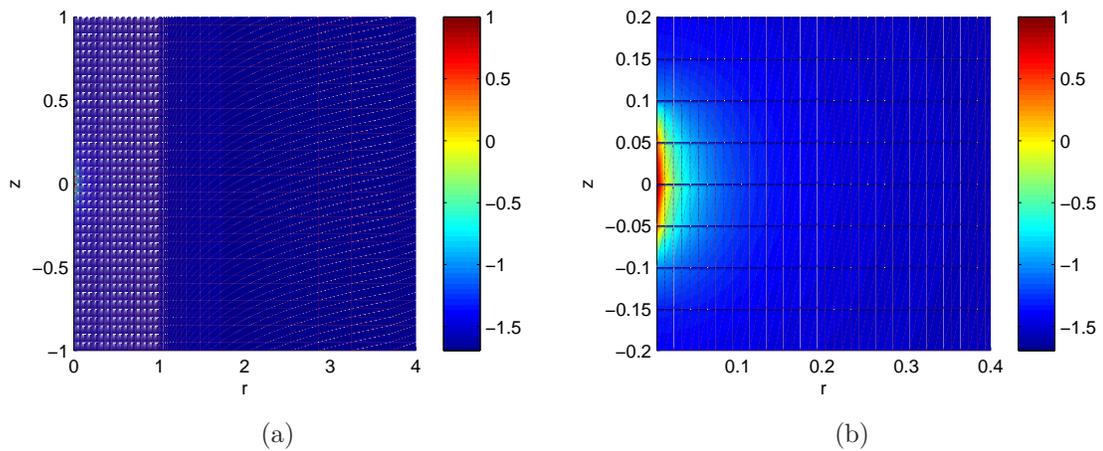


Figura 4.7: Presión numérica para  $h = 2.5$ : (a) en  $\Omega$  y (b) zoom de la presión en la zona de disparos.

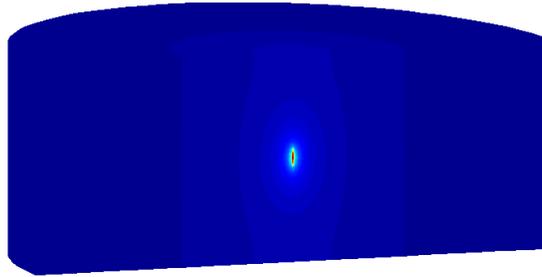


Figura 4.8: Presión numérica para  $h = 2.5$  en la región de influencia del pozo  $V$ .

La región donde hay mayor presión es pequeña y cercana a la zona de disparos. En gran parte de  $\Omega$ , la presión se mantiene constante. Aproximadamente en  $r = 2$  ya no se observa dependencia en  $z$ .

El campo de velocidad aproximado muestra que la velocidad descende rápidamente. Del acercamiento en la zona de disparos se aprecia que en  $\Gamma_4$  y  $\Gamma_6$  la velocidad es vertical.

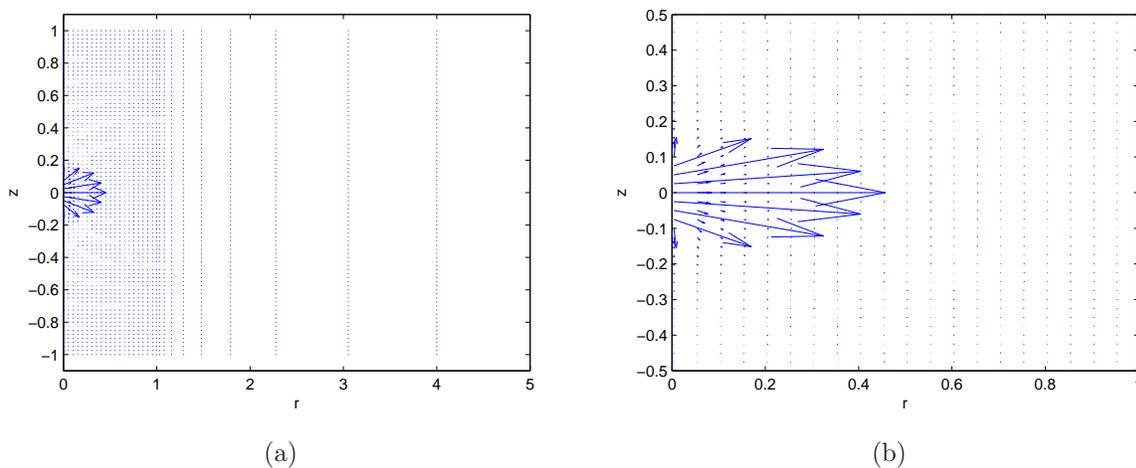


Figura 4.9: Campo de velocidad aproximado para  $h = 2.5$ : (a) en  $\Omega$  y (b) zoom en la zona de disparos.

De la figura 4.10 nos percatamos que la dinámica de la presión y velocidad numérica en  $z = 0$  es la misma que la observada para las soluciones analíticas con  $h = H$ , ver figuras 4.2 y 4.5.

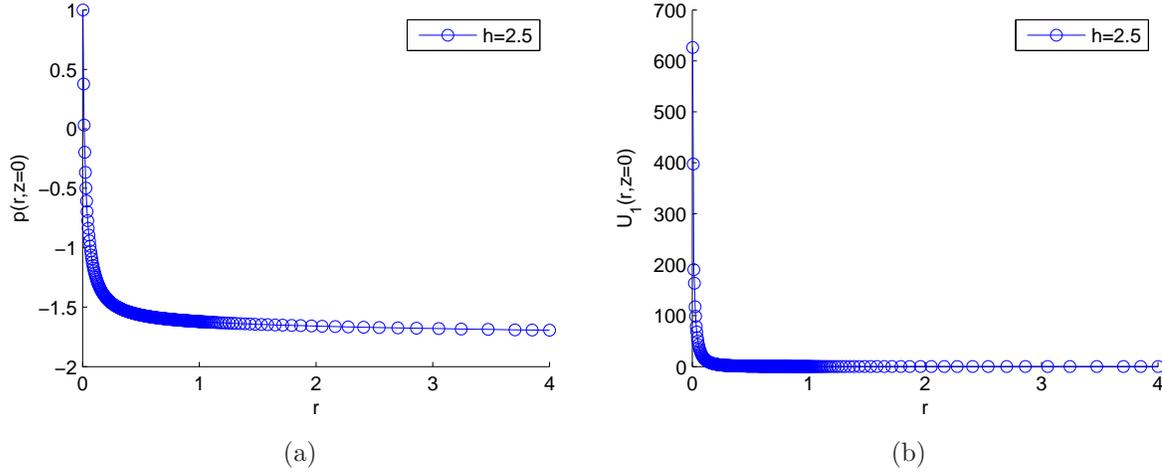


Figura 4.10: Soluciones numéricas para  $h = 2.5$ : (a) Presión y (b) velocidad.

### 4.1.3. Análisis de resultados

En este apartado se analizan los resultados obtenidos del modelo A tomando valores distintos de la zona de disparos ( $h=2.5, 5, 15, 25$ ). La importancia de este análisis es estudiar la dependencia de  $z$  en este modelo, en comparación con modelos que toman la velocidad sólo con dependencia radial (Ptak et al. (2004)). Para esto se presentan gráficas de presión y velocidad (figuras 4.11-4.16) para valores de  $r$  y  $z$  fijos.

Como se mencionó en el apartado 4.1.1, si se toma la zona de disparos igual al espesor de la capa productora de interés, entonces las soluciones de presión y velocidad sólo dependen de la componente radial (caso 1D).

La figura 4.11 presenta en (a) el perfil de la presión y, en (b) y (c) el perfil de la velocidad, para  $z = 0$ . La presión decae más rápido a medida que la zona de disparos se reduce, luego los gradientes de presión son mayores para valores de  $r$  cercanos a  $\frac{r_w}{H}$ . En consecuencia, se tiene mayor velocidad para  $h = 2.5$ . Debido a que la componente de la velocidad en la dirección  $z$  es cero, ver figura (c), la velocidad es completamente radial en  $z = 0$ .

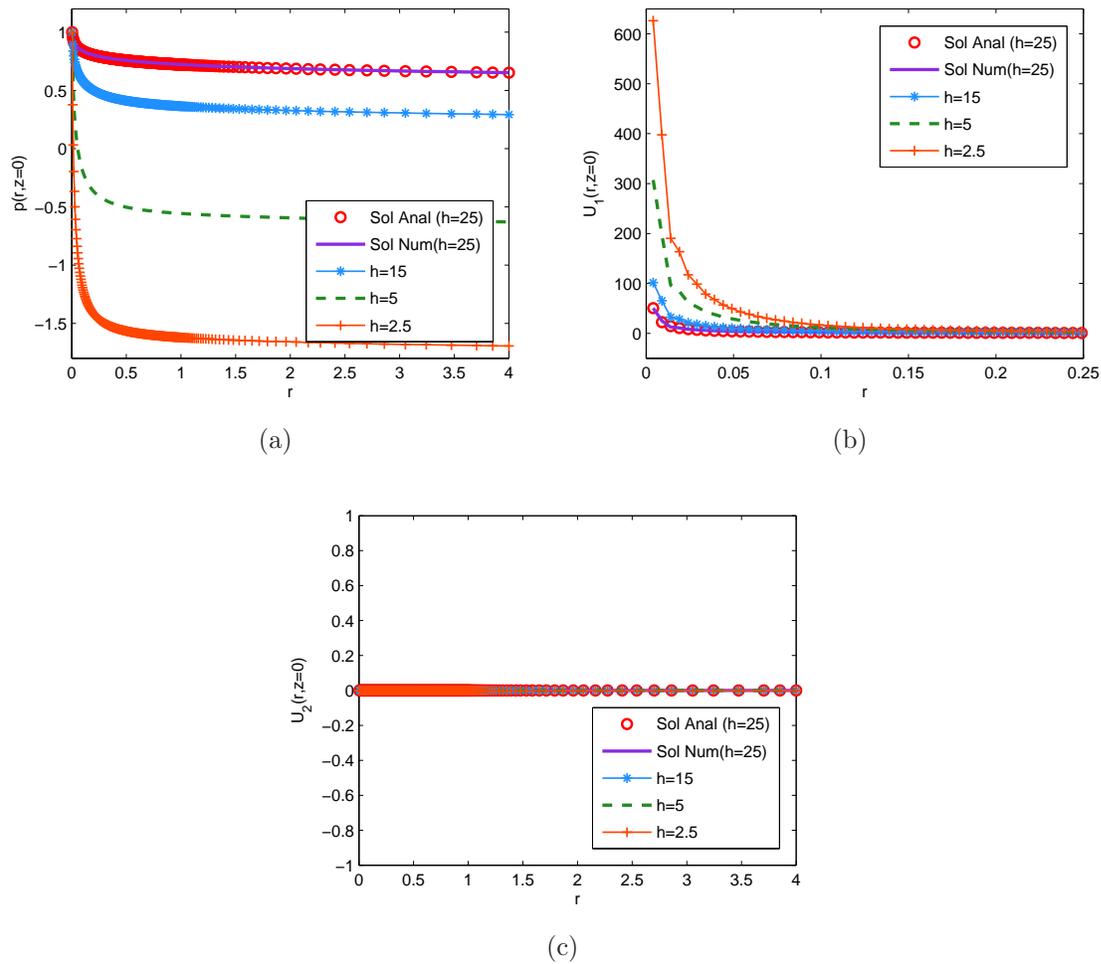


Figura 4.11: Soluciones para los perfiles de (a) presión, (b) velocidad en dirección  $r$  y (c) velocidad en dirección  $z$ , para  $r \in [r_w/H, L/H]$  y  $z = 0$ .

La figura 4.12 muestra la presión para los cortes verticales en: (a)  $r = r_w/H$ , (b)  $r = 0.05$ , (c)  $r \approx 1$  y (d)  $r \approx 2$ , con  $z \in [-1, 1]$ . Conforme se avanza en  $r$ , la presión del fluido disminuye hasta volverse constante. En  $r \approx 2$ , la presión es uniforme.

En la figura 4.13 se presentan gráficas de la componente de la velocidad en dirección  $r$ ,  $U_1$ , para: (a)  $r = r_w/H$ , (b)  $r \approx 0.05$ , (c)  $r \approx 1$  y (d)  $r \approx 2$ , con  $z \in [-1, 1]$ . En dichas curvas se observa que la velocidad máxima es para el caso de la zona de disparos más pequeña, tal como lo muestra la figura (b).

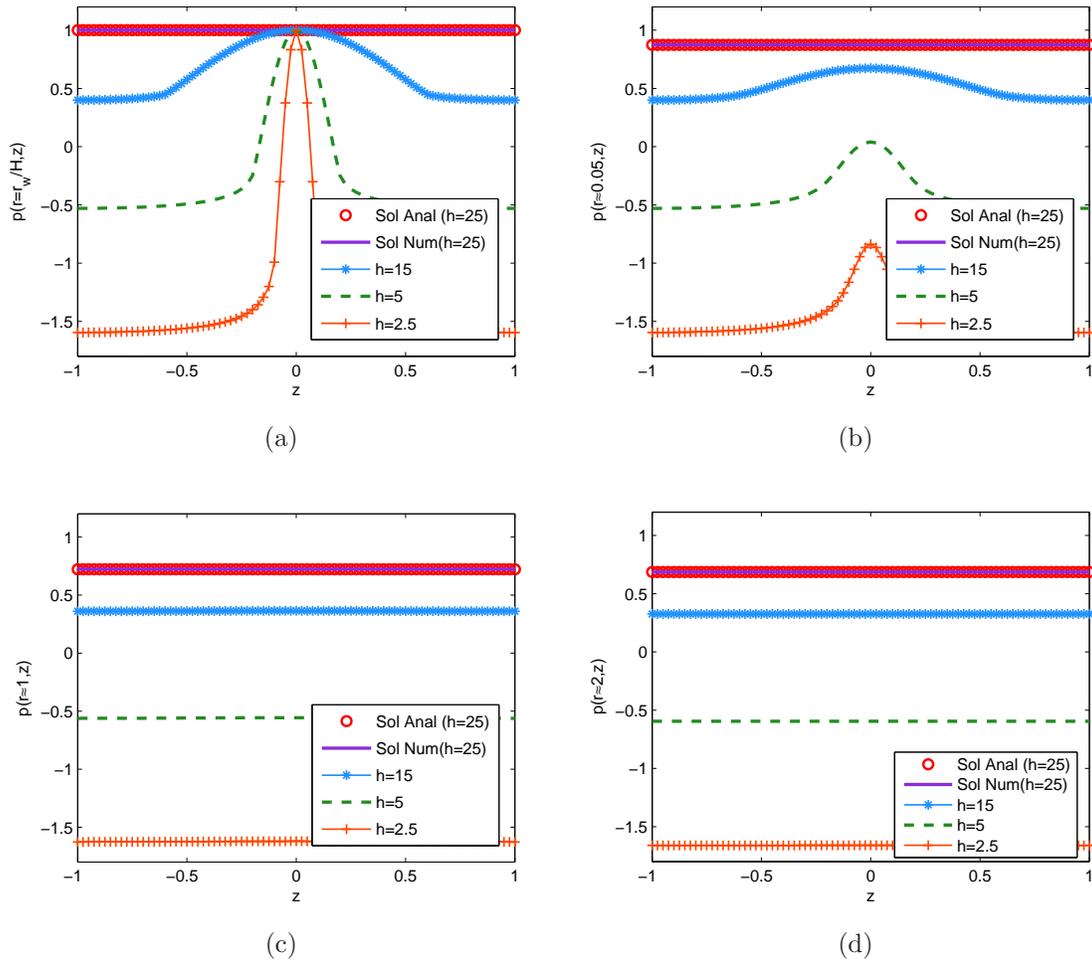


Figura 4.12: Presiones para los cortes verticales en: (a)  $r = r_w/H$ , (b)  $r \approx 0.05$ , (c)  $r \approx 1$  y (d)  $r \approx 2$ , con  $z \in [-1, 1]$ .

Es importante resaltar que la componente de la velocidad en dirección  $r$  disminuye drásticamente conforme se aleja de la zona de disparos, basta con contrastar las curvas en 4.11 (a) y (b), un orden de magnitud para  $r \approx 0.05$  y tres ordenes para  $r \approx 1$ .

En general, de las gráficas 4.13 (a), (b), (c) y (d) se concluye que la componente radial de la velocidad tiende a ser constante, donde el valor que toma es igual al caso radial ( $h = 25$ ), ver resultados en  $r \approx 2$ .

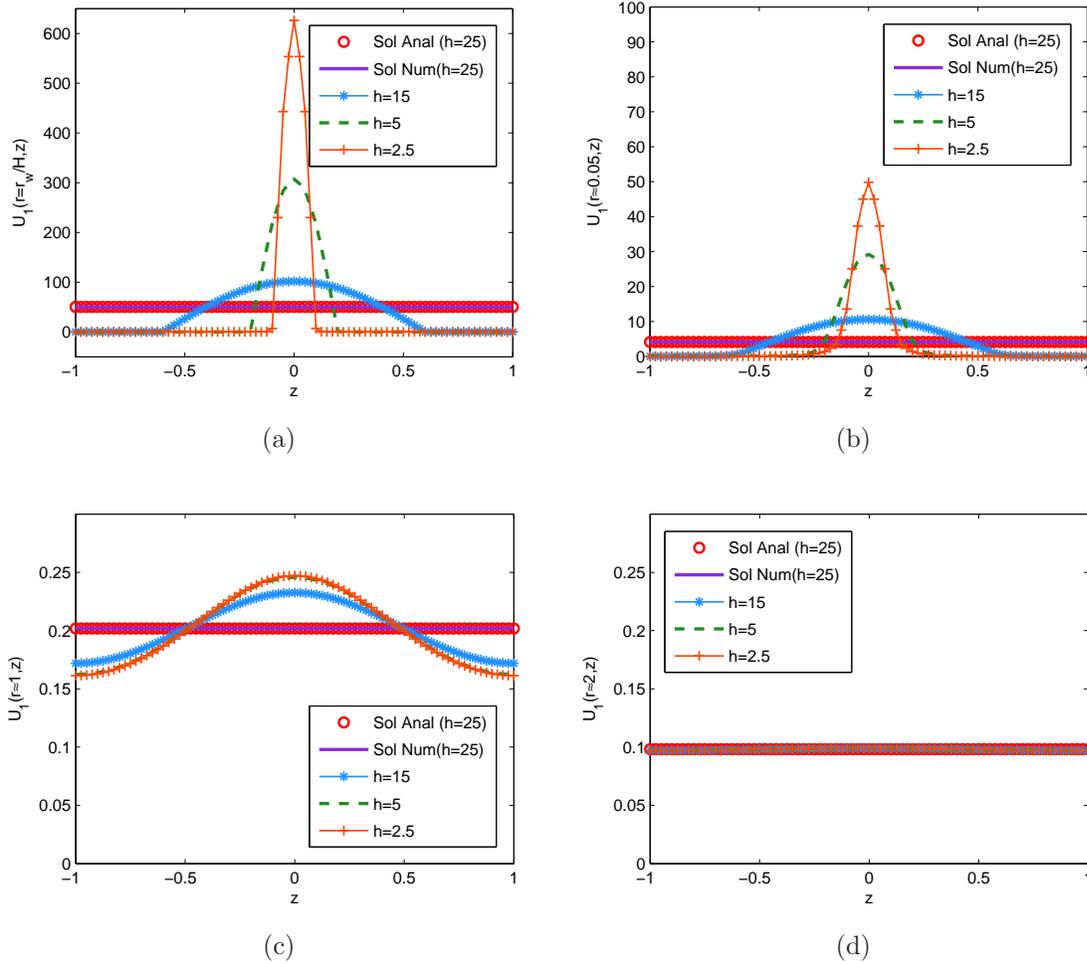


Figura 4.13: Velocidades en dirección  $r$  para: (a)  $r = r_w/H$ , (b)  $r \approx 0.05$ , (c)  $r \approx 1$  y (d)  $r \approx 2$  con  $z \in [-1, 1]$ .

La componente de la velocidad en  $z$ ,  $U_2$ , se muestra en la figura 4.14 para los mismos cuatro valores de  $r$  que se fijaron anteriormente. La velocidad en esta dirección es simétrica con respecto al origen como se exhibe en dicha figura. Para  $z \in [-1, 0]$  la velocidad viaja hacia abajo y en  $z \in (0, 1]$  hacia arriba. En las cuatro gráficas se aprecia que para  $z = 0$  la componente en  $z$  de la velocidad es cero, lo cual se observó en la figura 4.11 (c). Por tanto, en  $z = 0$  y  $r \in [\frac{r_w}{H}, \frac{L}{H}]$  la velocidad es solo radial. Por su parte, si los valores del radio del yacimiento aumentan,  $U_2$  deja de depender de  $z$ .

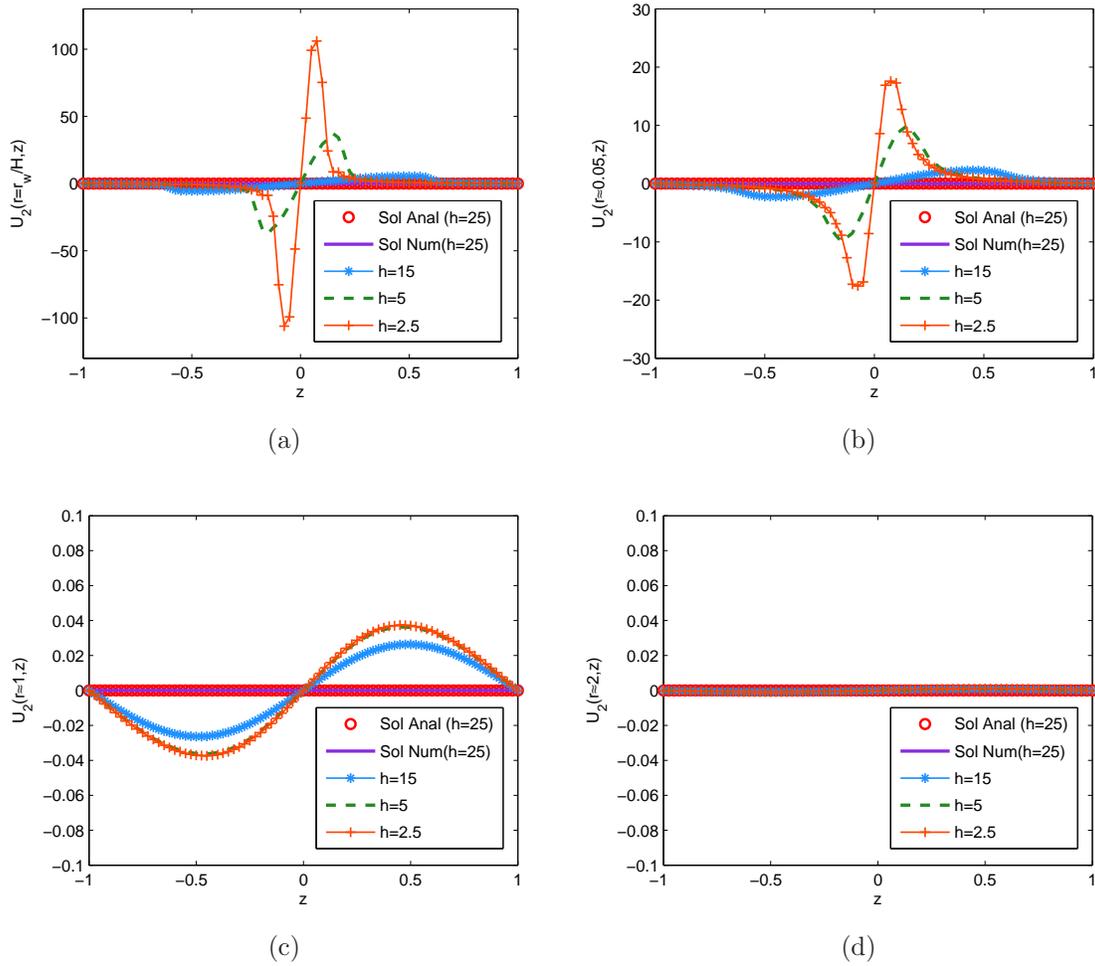


Figura 4.14: Velocidades en dirección  $z$  para: (a)  $r = r_w/H$ , (b)  $r \approx 0.05$ , (c)  $r \approx 1$  y (d)  $r \approx 2$  con  $z \in [-1, 1]$ .

Dado que la presión desciende abruptamente, se puede hacer un cambio de escala en el eje  $r$  para poder captar este cambio, figura 4.15. La solución de la presión para la zona de disparos igual al ancho del pozo, ecuación (4.5), tienen un comportamiento lineal en escala logarítmica con pendiente

$$m = -\frac{p_L}{p_0} \quad (4.8)$$

donde  $p_L = \frac{\mu Q}{4\pi H \kappa}$ . Para los valores de  $h = 5$  y  $h = 2.5$  las soluciones son lineales hasta  $r \approx 10^{-1}$ , lo que equivaldría a inyectar distintas cantidades de fluido  $Q$ .

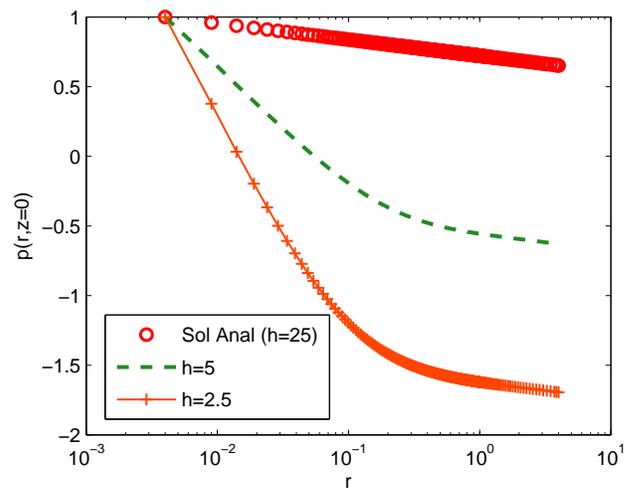


Figura 4.15: Presión vs radio para  $h=2.5, 5, 25$ . Escala semilogarítmica.

Un análisis interesante es proponer una solución escalar de la velocidad que dependa de  $(r, h)$  y comparar con las soluciones numéricas obtenidas en  $z = 0$ . Aplicando la ecuación de conservación para una región cilíndrica de altura  $2h$  se obtiene una solución particular adimensionalizada (solución analítica que depende de  $r$  y  $h$ ).

$$U_h(r, h) = \frac{\mu Q}{4\pi h \kappa H p_0 r} \frac{L}{r} \quad (4.9)$$

En un intervalo muy cercano a la zona de disparos (de longitud menor a  $10^{-1}$ ), se puede proponer que

$$\vec{U}(r, z) = \vec{U}_h(r, h),$$

ver figura 4.16, la cual muestra el radio  $r$  versus la componente de la velocidad en la dirección  $r$  en escala logarítmica.

Para radios mayores a 1, la velocidad coincide con la solución del problema en una dimensión, ecuación (4.1), esto es

$$\vec{U}(r, z) = \vec{U}(r).$$

En la gráfica 4.16 se observa que a partir de  $r = 1$  el flujo es solamente radial, no hay movimiento en dirección  $z$ .

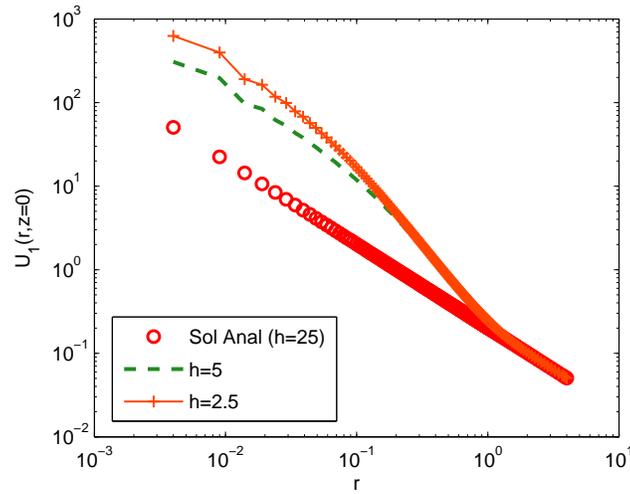


Figura 4.16: Velocidad en dirección  $r$  para  $h=2.5, 5, 25$  (en escala logarítmica).

Por lo tanto, del análisis de resultados anterior se puede concluir que:

- La presión decae más rápido conforme  $h$  decrece. Además  $p$  dependerá de  $r$  y  $z$  ( $p = p(r, z)$ ) para valores de las variables cercanos a la zona de disparos y para valores lejanos a esta región la presión será constante,  $p(r, z) = C$ , donde  $C$  es una constante que cambia para diferentes valores de  $h$ .
- La velocidad máxima se alcanza en el punto  $(\frac{r_w}{H}, 0)$  y es radial, esto es  $\vec{U}(\frac{r_w}{H}, 0) = U_1(\frac{r_w}{H}, 0) \hat{r}$ . Para radios mayores a 2 la velocidad pierde la dependencia en  $z$ ,  $U_2(r, z) = 0$  para  $z \in [-1, 1]$ . El campo de velocidades  $\vec{U}(r, z)$  es simétrico respecto al eje radial, es decir, en  $z = 0$  para  $r \in [\frac{r_w}{H}, \frac{L}{H}]$ .

## 4.2. Resultados numéricos y análisis del Modelo B

Las simulaciones que se presentan en este apartado son realizadas para las cantidades adimensionalizadas:  $T = 0.8$  (tiempo final de la etapa I) y  $M_T = 1$  (masa de trazador).

La verificación de los programas del modelo  $B$  se realiza calculando la cantidad de trazador  $M_T$  a un cierto tiempo. Esta cantidad debe ser constante siempre que el pulso de trazador no se acerque a la frontera  $\Gamma_5$ , pues esta frontera es permeable. Esto es,

$$M_T = \int_V C(r, z, t) dV, \quad (4.10)$$

para cualquier  $t \in [0, T]$  fijo.

La figura 4.17 muestra la cantidad de masa de trazador  $M_T$  para  $t \in [0, T]$  y diferentes valores de la dispersión. Se observa que para  $D = 0.2$ , hay salida de trazador a partir de tiempos muy cortos  $t = 0.2$ . Por esta razón solo se presentan los resultados numéricos para tres valores de dispersión  $D = 0.05, 0.075, 0.1$ .

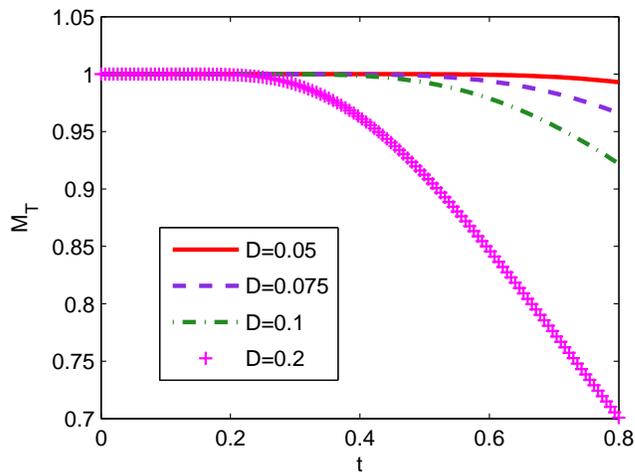


Figura 4.17: Tiempo vs cantidad de masa para  $D = 0.05, 0.075, 0.1, 0.2$ .

La tabla 4.3 muestra la pérdida de cantidad de masa del trazador al final de la etapa I. Para  $D = 0.05$  hay un extravío de masa del 0.7045%. En el caso de  $D = 0.1$ , se tiene la cantidad de masa final de 0.9219. Si la dispersión es mayor, habrá más disminución de masa, debido a que el pulso que está más disperso siente la presencia de la frontera antes que aquel que está menos disperso.

D	Masa final	Error
0.05	0.9930	0.7045 %
0.075	0.9659	3.41 %
0.1	0.9219	7.88 %

Tabla 4.3: Pérdida de la cantidad de masa para los valores de difusión en  $t = 0.8$ .

La cantidad de masa de trazador inicial dada en la condición (2.53)-(2.54) está representada en la figura 4.18. El valor máximo de la concentración es 1 y se alcanza en  $r = \frac{r_2-r_1}{2}$  y  $z = 0$ .

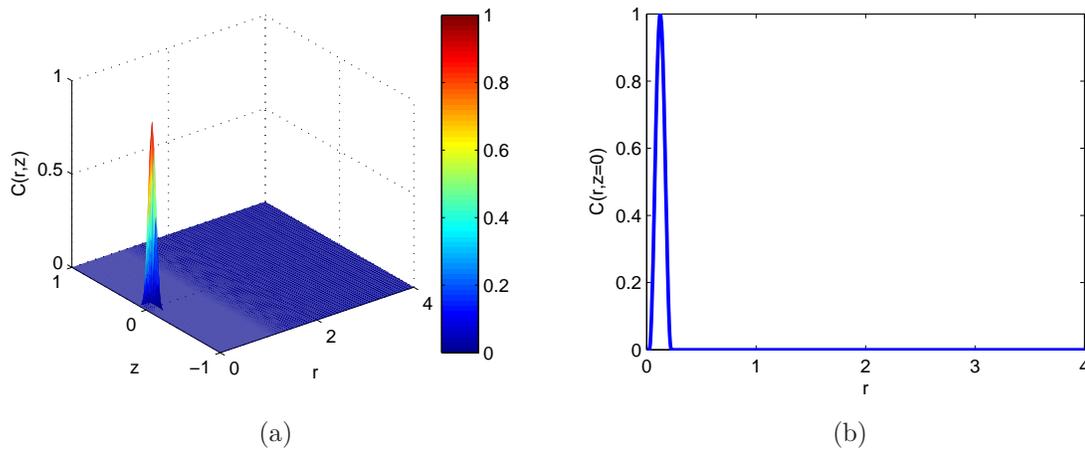


Figura 4.18: Condición inicial del modelo B: (a)  $r \in [\frac{r_w}{H}, \frac{L}{H}]$ ,  $z \in [-1, 1]$ ; (b)  $r \in [\frac{r_w}{H}, \frac{L}{H}]$ ,  $z = 0$ .

### 4.2.1. Perfiles de concentración

Las figuras 4.19 - 4.21 exhiben la dinámica de la concentración del trazador para cada uno de los tres valores de  $D$  considerados. Se muestran gráficas de concentración a 6 tiempos,  $t = 0, 0.05, 0.1, 0.2, 0.4, 0.8$ . El máximo valor de concentración disminuye drásticamente con respecto al tiempo (de una escala de 1 a  $10^{-3}$ ), pero la cantidad de trazador se conserva, como se muestra en la tabla 4.3. Nótese que las escalas en las figuras cambian.

Cercano a la zona de disparos, el campo de velocidades es mayor lo cual provoca que se comprima más el pulso de trazador antes del centro que posterior a él. Observando el tiempo  $t = 0.05$  en las tres figuras se tiene esto.

En el tiempo  $t = 0.4$ , la concentración se empieza a acumular en la base ( $\Gamma_1$ ) y tapa ( $\Gamma_3$ ) de la región.

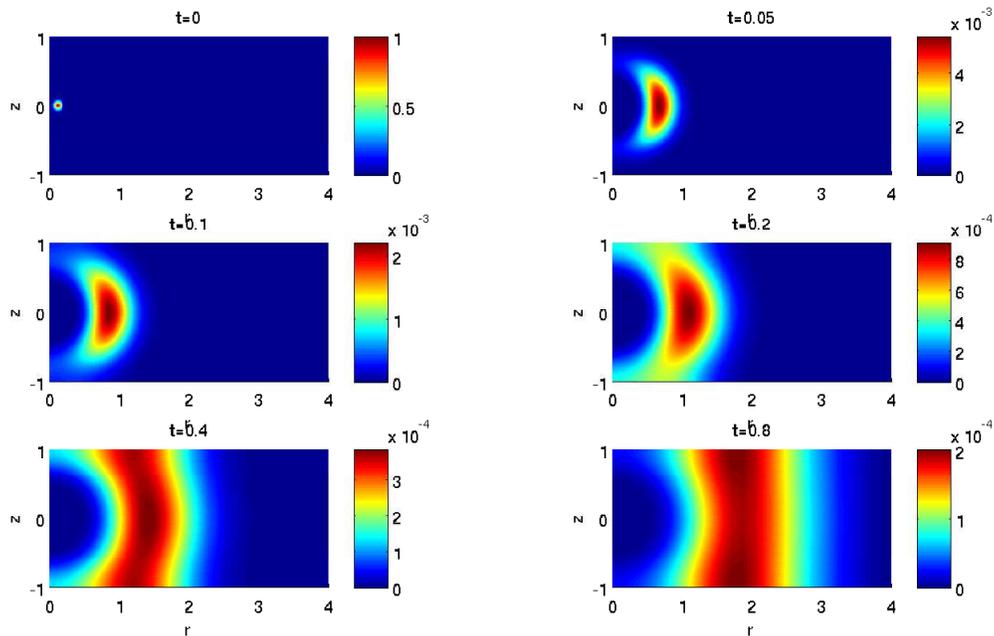


Figura 4.19: Dinámica de la concentración para  $D = 0.05$ .

Debido a que cerca de las esquinas inferior y superior izquierdas de la región la velocidad es casi nula, el trazador se mueve por dispersión provocando así la forma de un riñón. El ancho y alargamiento del riñón dependerá del valor de la dispersión, ver figuras para  $t = 0.1$ .

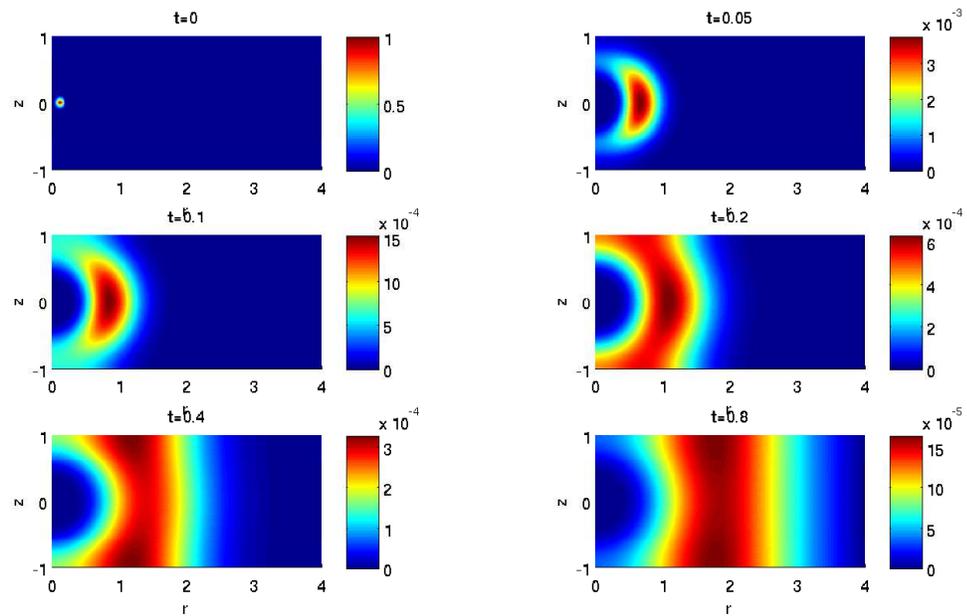


Figura 4.20: Dinámica de la concentración para  $D = 0.075$ .

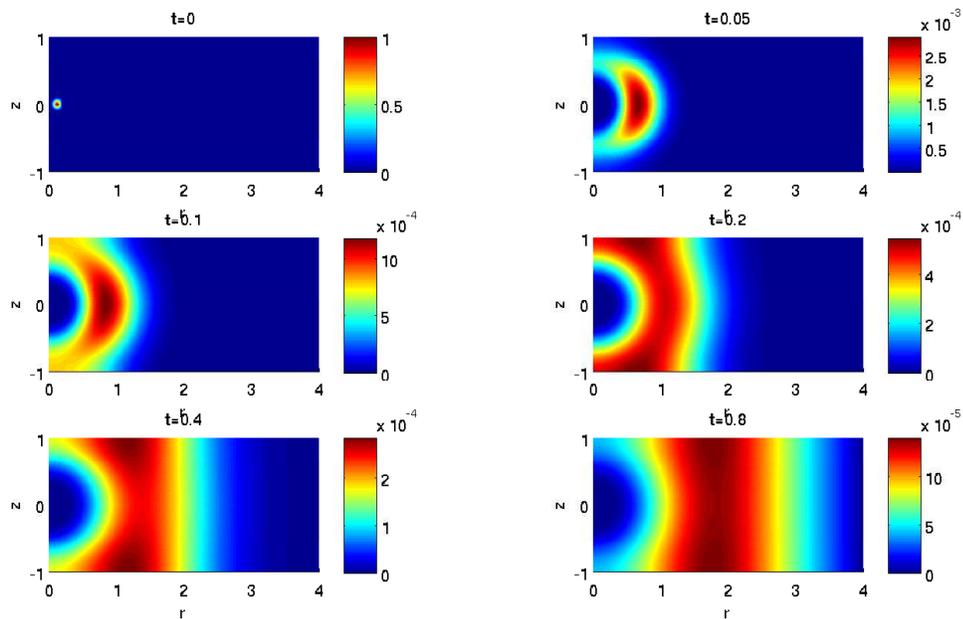


Figura 4.21: Dinámica de la concentración para  $D = 0.1$ .

Finalmente para valores del radio mayores a 2, en los tres casos, se aprecia que la concentración ya no tiene dependencia en dirección  $z$ , como es de esperarse por la condición impuesta en  $r = \frac{L}{H}$  para la velocidad.

En  $z = 0$ , el pulso de trazador en la etapa de inyección tiene el comportamiento mostrado en la figura 4.22, para los valores de dispersión  $D = 0.05, 0.75, 0.1$ . Dicha figura presenta el avance del trazador a los tiempos  $t = 0.05, 0.2, 0.8$ . Para este caso se observa que si la dispersión aumenta el doble, el máximo de la concentración disminuye a la mitad, lo cual no sucede para otros perfiles de concentración

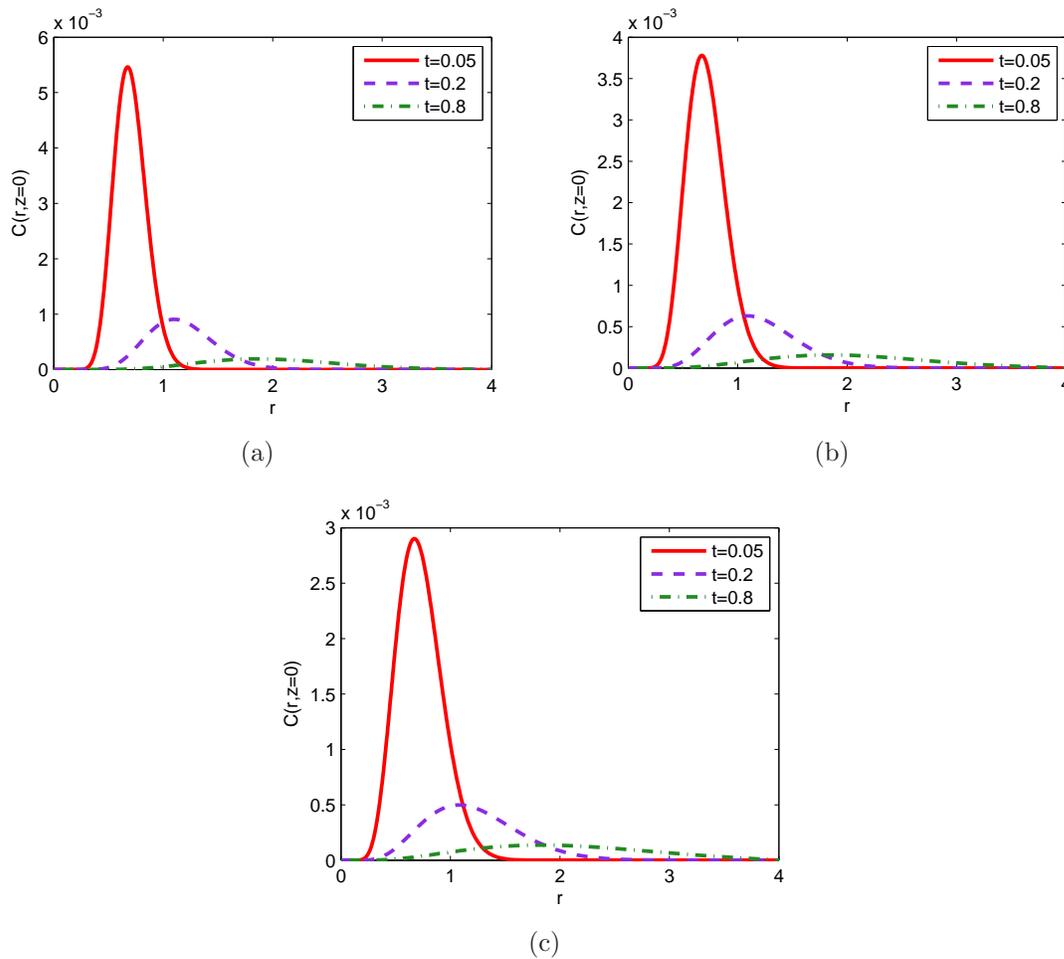


Figura 4.22: Perfiles de concentración en  $z = 0$ , a distintos tiempos para: (a)  $D = 0.05$ , (b)  $D = 0.075$  y (c)  $D = 0.1$ .

En las figuras 4.23, 4.24 y 4.25 se muestran cortes de la concentración a los tiempos

$t = 0.05$ ,  $t = 0.2$  y  $t = 0.8$  respectivamente, para (a)  $r \in [\frac{r_w}{H}, \frac{L}{H}]$ ,  $z = 0$ ; (b)  $r \approx 1$ ,  $z \in [-1, 1]$  y (c)  $r \approx 2$ ,  $z \in [-1, 1]$ .

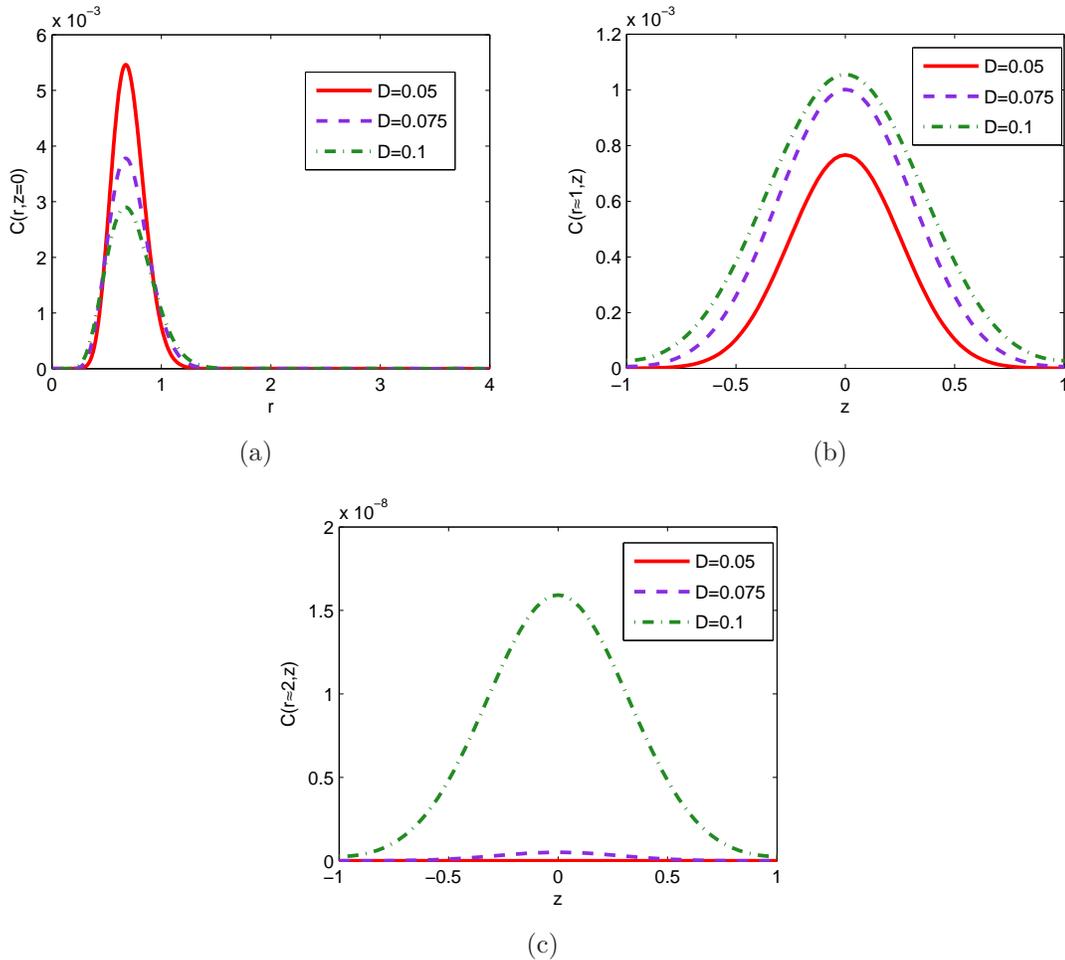


Figura 4.23: Curvas de concentración para  $t = 0.05$ : (a)  $r \in [\frac{r_w}{H}, \frac{L}{H}]$ ,  $z = 0$ ; (b)  $r \approx 1$ ,  $z \in [-1, 1]$  y (c)  $r \approx 2$ ,  $z \in [-1, 1]$ .

Notemos de la figura 4.23 (a) las concentraciones de los trazadores se encuentran en la cuarta parte de la región. Al tiempo  $t = 0.2$  cubre la mitad de la región, figura 4.24 (a)). Para el tiempo final de inyección, los trazadores se esparcen en toda la región, figura 4.25 (a).

De las gráficas (b) y (c) de las figuras 4.23 y 4.24 se observa que las concentraciones máximas se mantienen en el centro del pulso. Pero este fenómeno cambia, para  $r \approx 1$  la máxima concentración se acumula en la tapa y base, como se ve en la figura 4.25 (b),

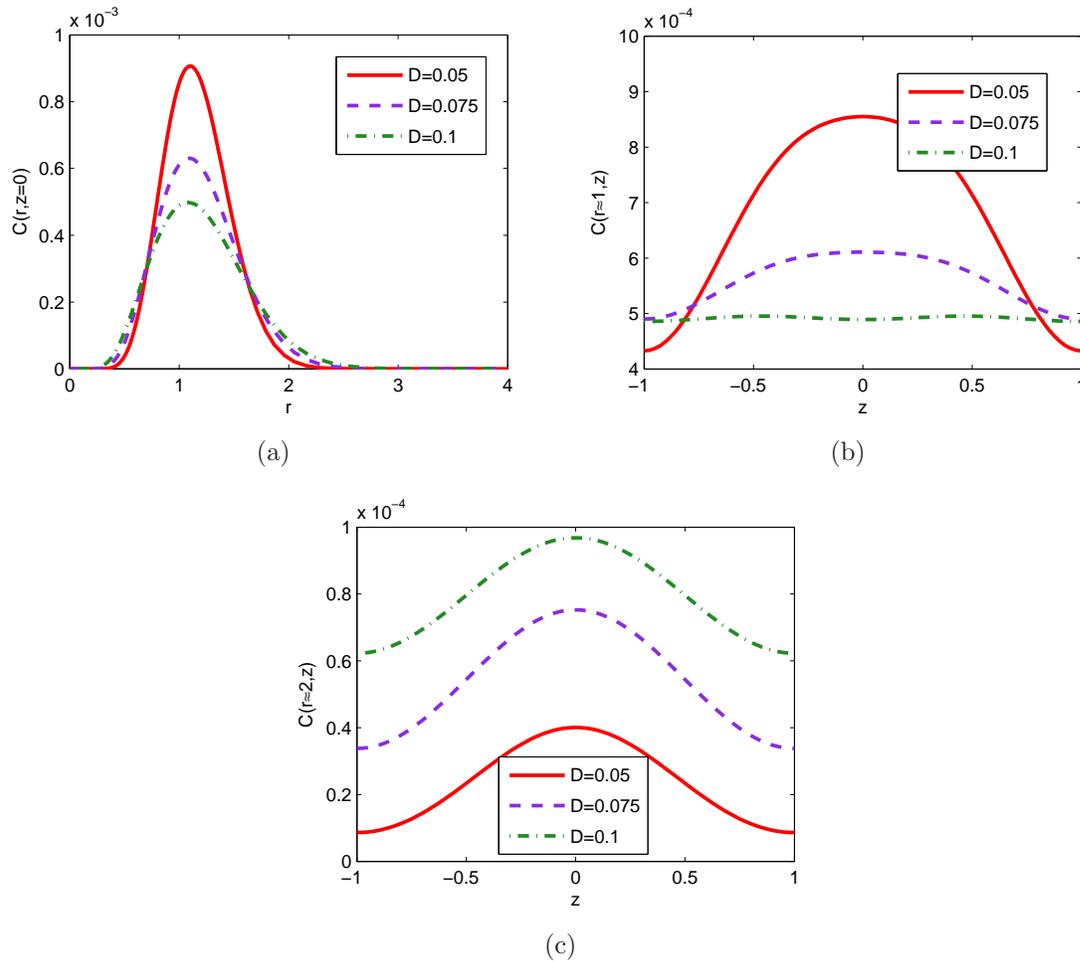


Figura 4.24: Curvas de concentración para  $t = 0.2$ : (a)  $r \in [\frac{r_{av}}{H}, \frac{L}{H}]$ ,  $z = 0$ ; (b)  $r \approx 1$ ,  $z \in [-1, 1]$  y (c)  $r \approx 2$ ,  $z \in [-1, 1]$ .

o tiende a ser constante para  $r \approx 2$ , figura 4.25 (c). Cabe señalar que la constante es diferente para distintas dispersiones.

#### 4.2.2. Curvas de surgencia

Las curvas de surgencia, figuras 4.26 y 4.27, se presentan con el fin de analizar la dependencia de la concentración en dirección  $z$ , para cada valor de  $D$ , a diferencia de otros modelos donde no hay dependencia en esta dirección para la velocidad.

La figura 4.26 muestra el comportamiento del pulso de trazador en diferentes cortes de  $z$ , para  $r \approx 1$  y  $r \approx 2$ , gráficas (a) y (b) respectivamente, considerando  $D = 0.05$ . Las curvas de surgencia se generan para  $z = 0, 0.5, 0.9$ . En un radio aproximado a 1, figura

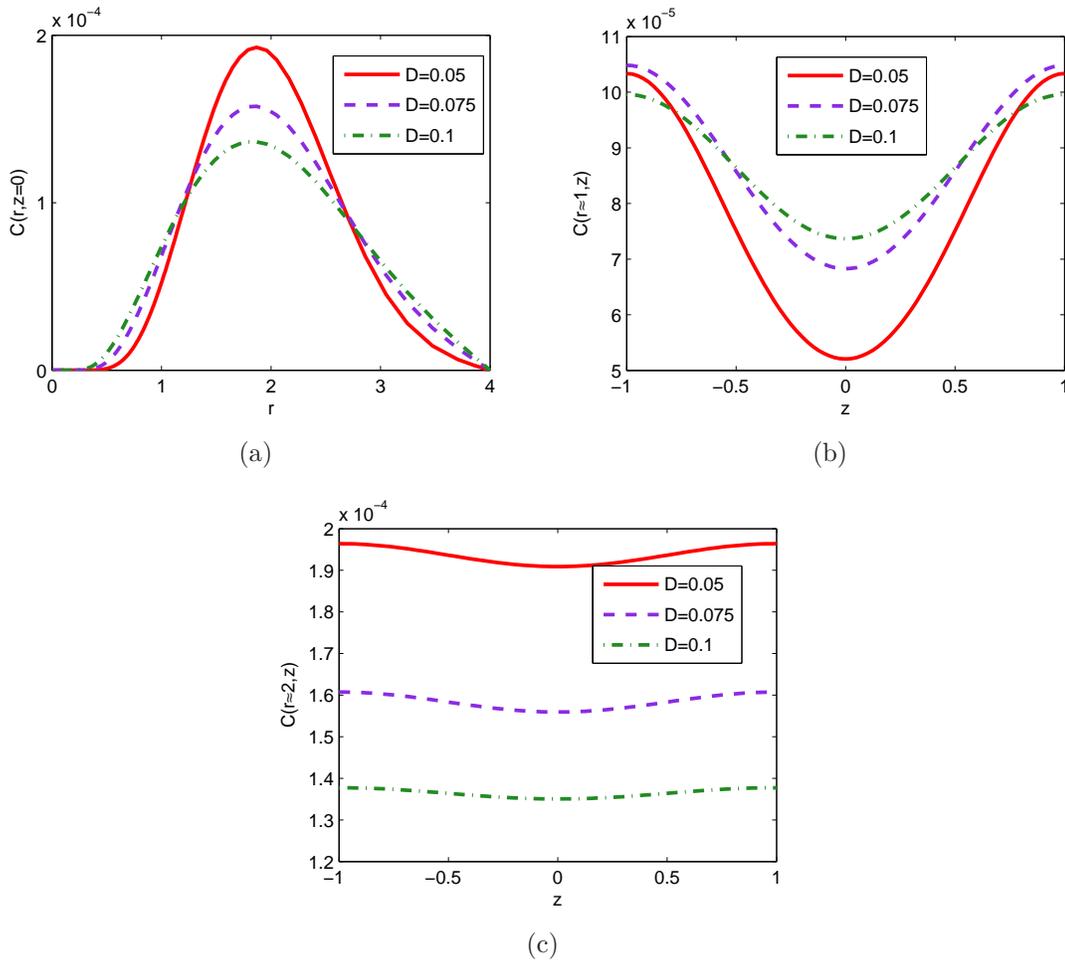


Figura 4.25: Curvas de concentración para  $t = 0.8$ : (a)  $r \in [\frac{r_w}{H}, \frac{L}{H}]$ ,  $z = 0$ ; (b)  $r \approx 1$ ,  $z \in [-1, 1]$  y (c)  $r \approx 2$ ,  $z \in [-1, 1]$ .

(a), la mayor concentración se encuentra en  $z=0$  para un tiempo  $t = 0.1$ . El pulso llega a  $r \approx 2$  después de un tiempo  $t = 0.1$  y comienza a ser significativo en  $t = 0.3$ . La cantidad de concentración que arriba en  $t = 0.8$  para las tres  $z$  fijas es la misma tanto para  $r \approx 1$  como en  $r \approx 2$ . De hecho se podría decir que en  $t = 0.6$  el trazador ya no depende de  $z$ .

La figura 4.27 muestra las curvas de surgencia para el valor de la dispersión  $D = 0.1$  para tres valores de  $z$ . En  $r \approx 1$ , figura (a), la dependencia vertical de la concentración es notoria para  $t \in [0, 0.2]$ . A partir de tiempos mayores a 0.2, las curvas de surgencia se invierten, mayor concentración en  $z = 0.9$ , pero no hay diferencia significativa. En  $r \approx 2$ , figura (b), se puede observar que la concentración ya no depende de  $z$  para  $t$  mayores a 0.4 (es constante para cualquier  $z$ ).

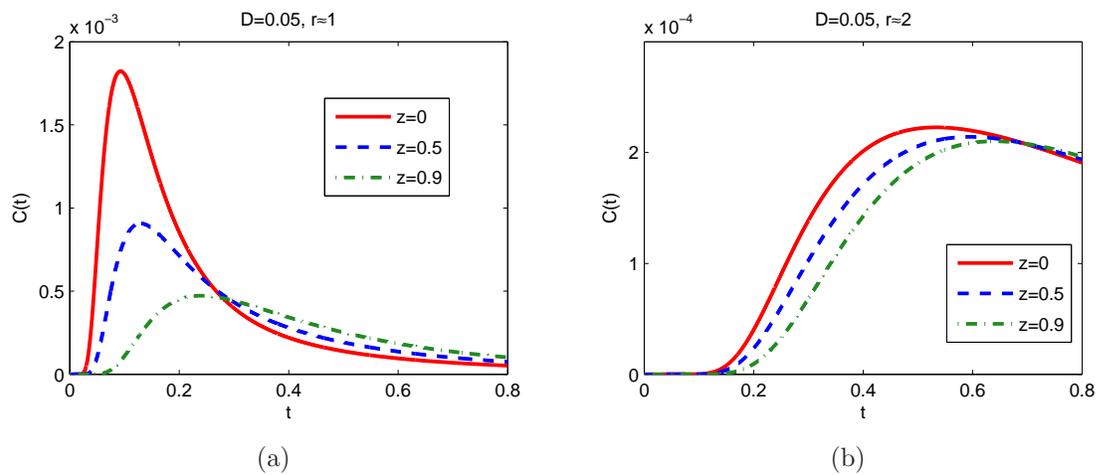


Figura 4.26: Curvas de surgencia para  $D = 0.05$ : (a)  $r \approx 1$ , (b)  $r \approx 2$ , para distintos valores de  $z$ .

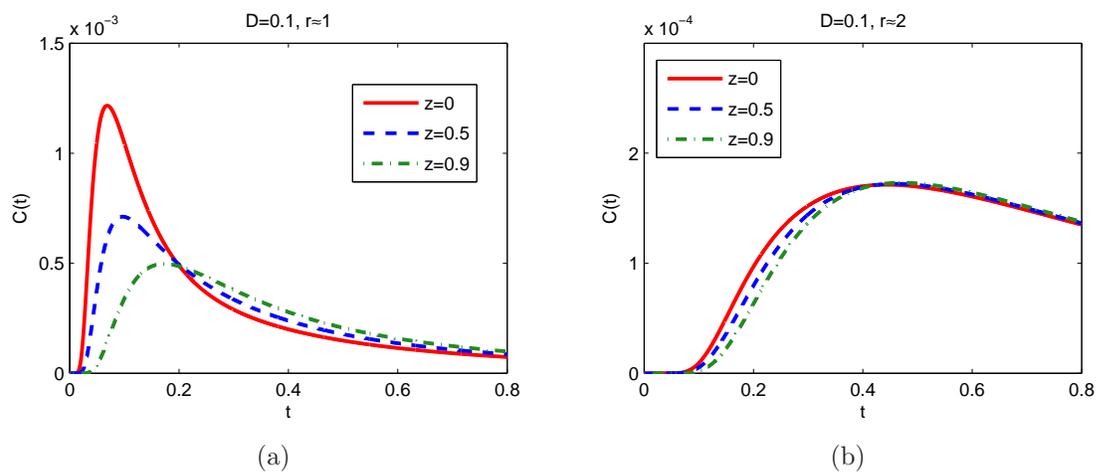


Figura 4.27: Curvas de surgencia para  $D = 0.1$ : (a)  $r \approx 1$ , (b)  $r \approx 2$ , para distintos valores de  $z$ .

La figura 4.28 contiene las curvas de surgencia para  $D = 0.05, 0.075, 0.1$ , fijando los puntos  $(r, z)$  como  $(1, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(1, 0.5)$  y  $(2, 0.5)$ , gráficas (a), (b), (c) y (d), respectivamente. El ingreso del pulso al yacimiento en el punto  $(1, 0)$  depende del valor de la dispersión para tiempos menores a 0.4; después y hasta  $t = 0.8$ , el comportamiento del trazador es igual. En el punto  $(1, 0.5)$  el paso del pulso es más lento y pasa aproximadamente la mitad de la concentración que atraviesa por  $(1, 0)$  hasta  $t = 0.4$ , para tiempos más grandes la cantidad de trazador que cruza por ambos puntos es la misma. Se observan de los incisos (b) y (d) que la cantidad y llegada del pulso de trazador es

similar en los puntos  $(2, 0)$  y  $(2, 0.5)$ .

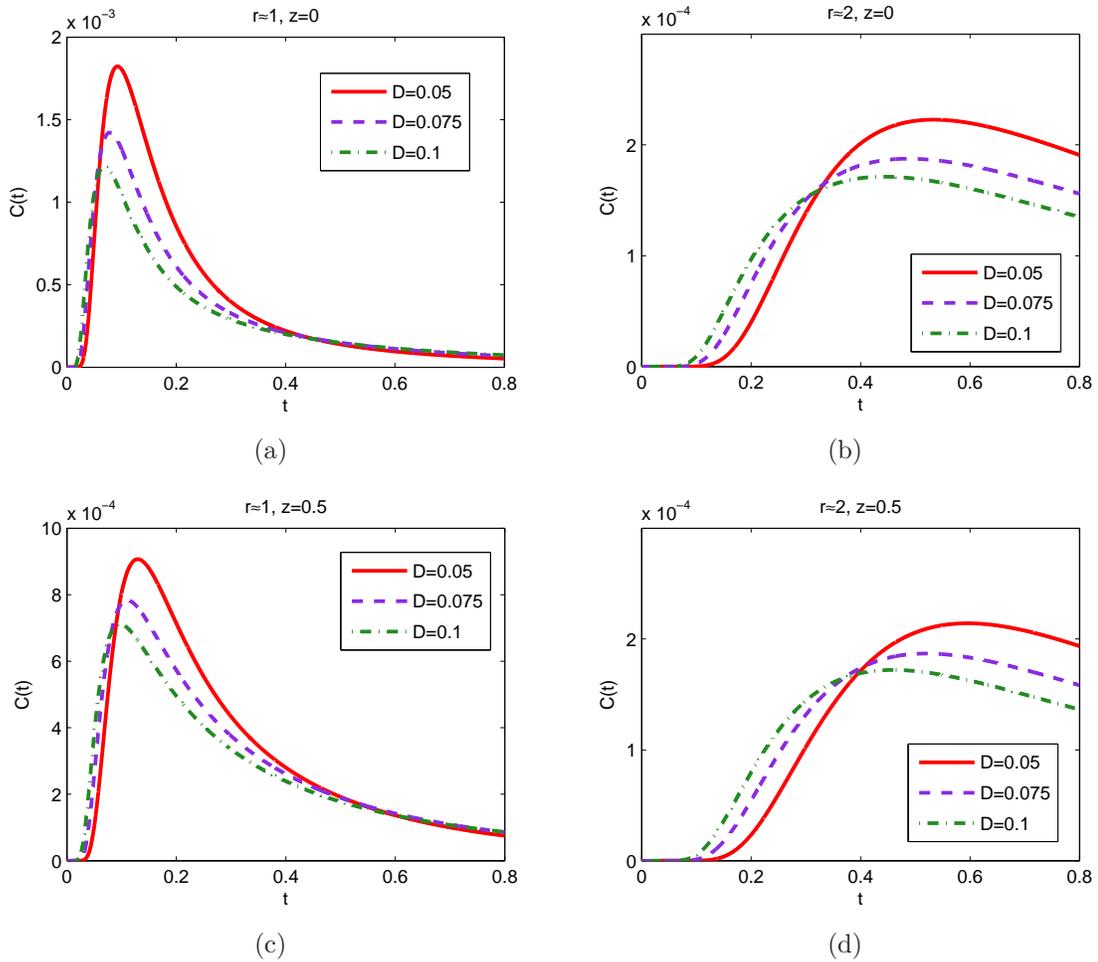


Figura 4.28: Curvas de surgencia en los puntos (a)  $(1, 0)$ , (b)  $(2, 0)$ , (c)  $(1, 0.5)$  y (d)  $(2, 0.5)$ .

De las curvas de surgencia 4.26, 4.27 y 4.28 se puede inferir que la máxima concentración se alcanza en  $t = 0.1$  para el trazador de menor dispersión  $D = 0.05$ .

El comportamiento de los trazadores es similar, sólo se retrasa si  $z$  se aleja de  $z = 0$ , o se acelera si la dispersión aumenta.

### 4.2.3. Caso del pulso con velocidad radial

En este apartado se presentan resultados de concentración para  $D = 0.05$  y dos tipos de velocidades: una radial y vertical ( $h=2.5$ ) y la otra solamente radial ( $h=H=25$ ). Ambas velocidades se calcularon en el apartado 4.1.3.

Recordemos que la figura 4.19 contiene la dinámica del trazador con velocidad radial y vertical para diferentes tiempos. En la figura 4.29 se muestra la dinámica de la concentración con velocidad radial en los tiempos  $t = 0, 0.05, 0.1, 0.2, 0.4, 0.8$ . Al finalizar esta etapa se obtuvo una pérdida de masa del 0.5179%. En la figura se observa que la concentración se dispersa en forma cilíndrica hasta que alcanza todo el ancho de la región  $\Omega$ .

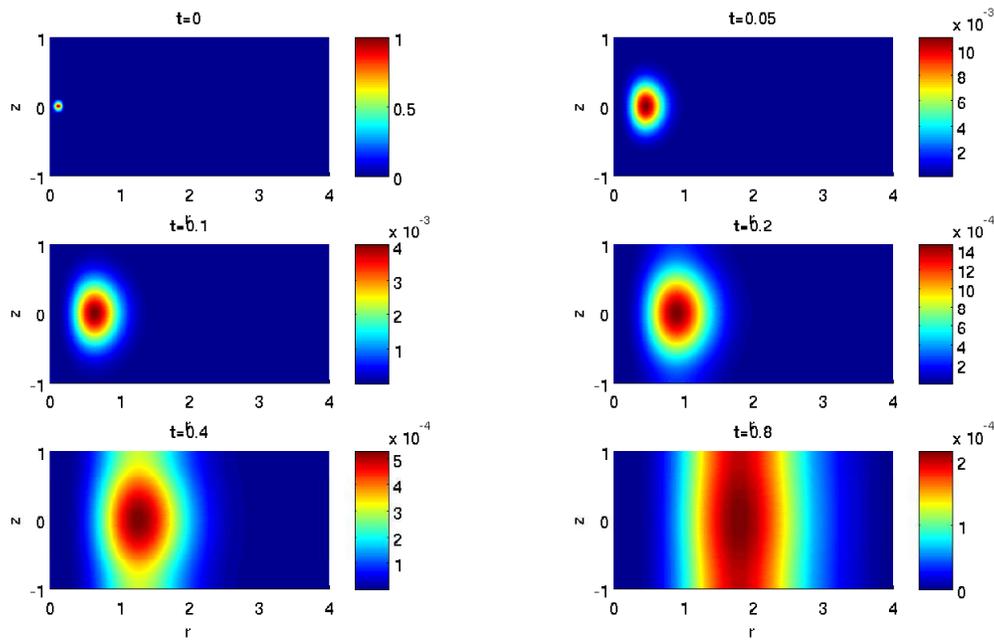


Figura 4.29: Dinámica de la concentración con velocidad radial.

Para hacer una comparación de las concentraciones con las distintas velocidades, las gráficas 4.30 y 4.31 presentan cortes en  $z = 0$ .

En la figura 4.30 se exhiben perfiles de concentración en los tiempos: (a)  $t = 0.05$ , (b)  $t = 0.1$  y (c)  $t = 0.8$  para  $h = 2.5$  y  $h = H = 25$ . La diferencia más notable de concentración es para tiempos pequeños ( $t = 0.05, 0.2$ ) y valores de  $r$  menores a

1.5. En  $t = 0.05$ , el valor máximo de la concentración para la velocidad radial es aproximadamente el doble que aquel cuando la velocidad con varia en  $z$ . Esto se debe a que la velocidad es menor cuando es radial en  $z = 0$ . Por lo cual, el pulso avanza más lento y se acumula más concentración de trazador. El pulso para  $h = 2.5$  decae más, pues hay parte del trazador que sale en dirección  $z$  hacia afuera del eje  $z = 0$ . Para  $t = 0.2$ , figura 4.30 (b), la velocidad con componente vertical disminuye y comienzan a empalmarse los dos pulsos, hasta que, para  $t = 0.8$ , la cantidad del pulso es similar en ambos casos.

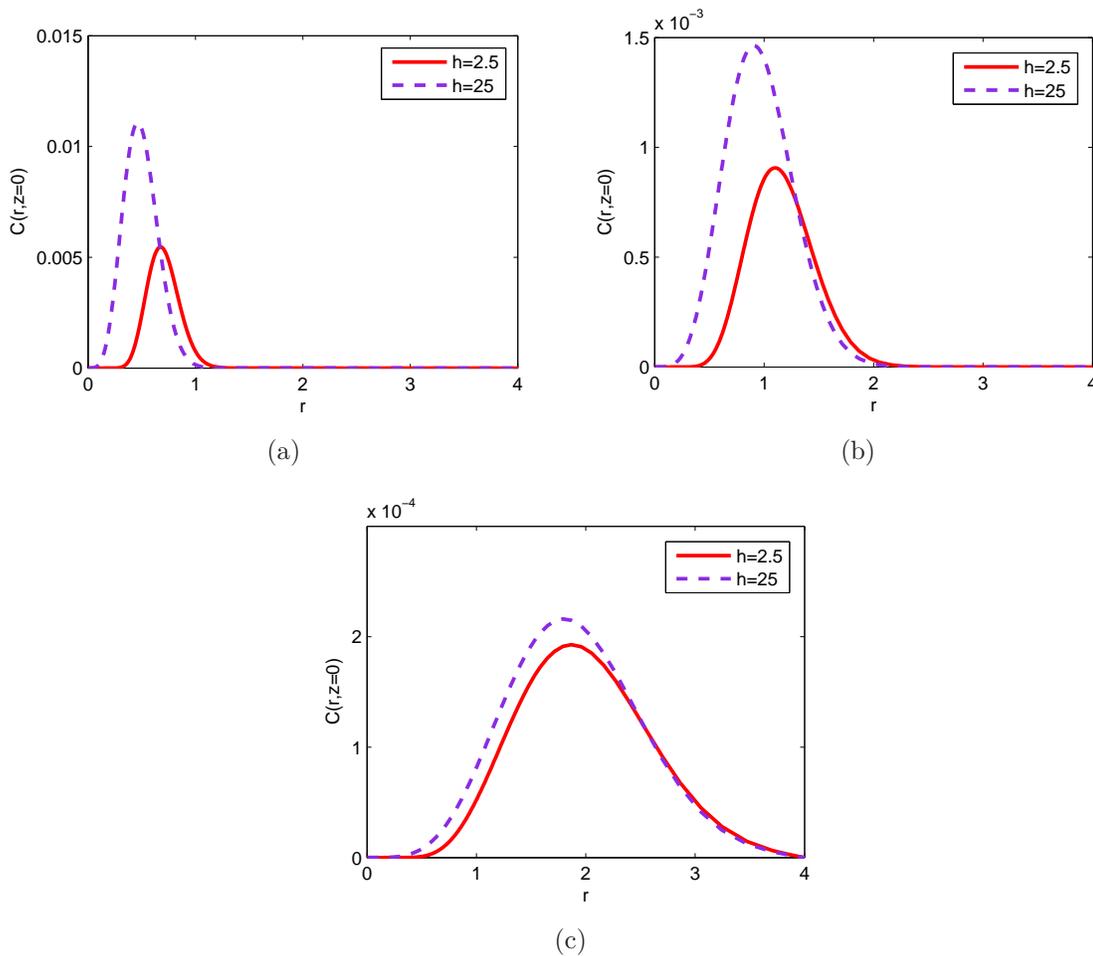


Figura 4.30: Curvas de concentración para: (a)  $t = 0.05$ , (b)  $t = 0.2$  y (c)  $t = 0.8$

En la figura 4.31 se presentan las curvas de surgencia en los puntos: (a)  $(1, 0)$  y (b)  $(2, 0)$ . En el punto  $(1, 0)$ , el pulso llega antes cuando  $h = 2.5$ , esto se debe a que en este punto la velocidad es mayor como se muestra en las figuras 4.5 y 4.11(b). La concentración en el punto  $(2, 0)$  arriba antes y es mayor con velocidad radial y vertical.

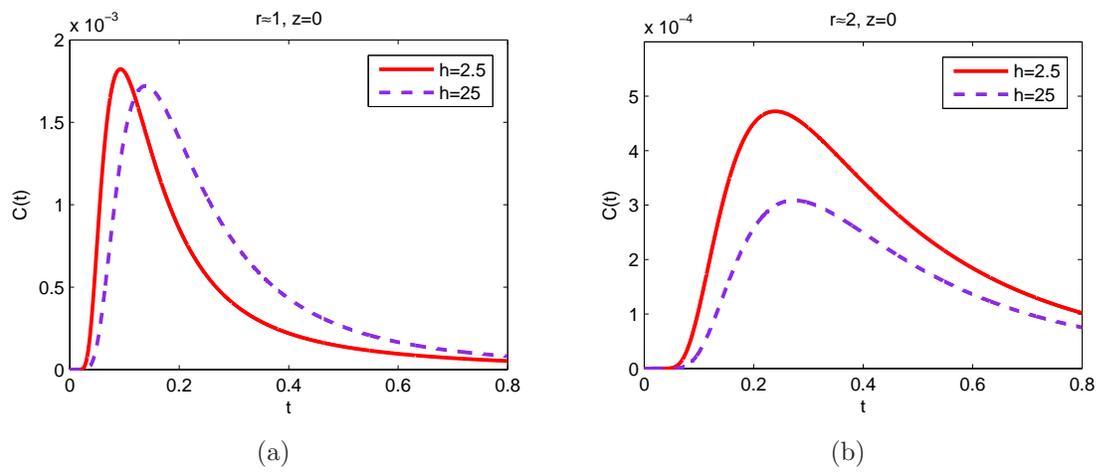


Figura 4.31: Curvas de surgencia en los puntos: (a)  $(1, 0)$  y (b)  $(2, 0)$ .

Es claro de las figuras 4.30 y 4.31 que es importante incluir la componente vertical en la velocidad para el estudio de la dinámica de trazadores inyección-extracción considerando permeabilidad y dispersión constante.

## Conclusiones

En este trabajo se realizó la modelación numérica de la etapa de inyección de un pulso de trazador de inyección-extracción en un solo pozo considerando velocidad radial y vertical con permeabilidad y dispersión constante.

Dado a que el término convectivo es dominante, para evitar las inestabilidades numéricas en la ecuación de advección-dispersión se emplearon el esquema de Crank-Nicholson y la técnica de mínimos cuadrados para discretizar el tiempo y el espacio, respectivamente.

Se probaron elementos bilineales y bicuadráticos para aproximar la presión y se observó que estos últimos generan mejores aproximaciones al gradiente de la presión para el mismo número de grados de libertad. Por lo cual, para la velocidad y concentración se optó por los elementos bicuadráticos.

De los resultados numéricos, concluimos que la presión  $p$  decae más rápido conforme la zona de disparos decrece. Además  $p$  depende de  $r$  y  $z$  para valores de las variables cercanos a la zona de disparos ( $r$  menores a 0.1) y para valores lejanos a esta región ( $r$  mayores a 1), la presión es constante.

Debido a que los gradientes de presión son mayores para valores cercanos de  $\frac{r_w}{H}$ , la velocidad máxima se alcanza en el punto  $(\frac{r_w}{H}, 0)$  y es radial en  $z = 0$ . Para radios mayores a 2 la velocidad pierde la dependencia en  $z$ ,  $U_2(r, z) = 0$  para  $z \in [-1, 1]$ . El campo de velocidades  $\vec{U}(r, z)$  es simétrico respecto al eje radial, es decir, en  $z = 0$  para  $r \in [\frac{r_w}{H}, \frac{L}{H}]$ .

Las concentraciones máximas se mantienen en el centro del pulso desde que entra en el yacimiento hasta aproximadamente  $t = 0.4$ , donde la concentración se empieza a

acumular en la base y tapa de la región. Para  $t = 0.8$ , cercano a  $r \approx 2$  la concentración ya no depende de  $z$ . En particular, la concentración será constante para cualquier valor de la dispersión y radios mayores a 2.

Al contrastar los perfiles de concentración de un pulso para dos tipos de velocidades, una radial y vertical ( $h = 2.5$ ) y otra puramente radial ( $h = 25$ ), se encontró que el primero avanza y decae más rápido porque la velocidad es mayor y depende de  $z$  que en el caso con velocidad radial. Esta diferencia se va desvaneciendo en el tiempo hasta que en  $t = 0.8$  se empalman los perfiles de concentración, que es cuando las velocidades coinciden (ambas son radiales). Por tanto, la dinámica del trazador cambia cuando se incorpora una dependencia en  $z$  para el flujo del fluido de inyección.

Como trabajo a futuro se propone modelar y simular las etapas de reposo y extracción. También se podría quitar la simetría radial en la zona de influencia considerando diferentes capas de porosidad. Otra propuesta de trabajo sería plantear la permeabilidad como una potencia,  $\kappa(r) = r^n$ , y la dispersión en función de la velocidad  $D = D(U)$ .

## A.1. Método $\theta$

Los métodos  $\theta$  son utilizados para resolver ecuaciones diferenciales. Se desea conocer el valor  $c^{n+1}$  del problema al tiempo  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$  a partir del valor de  $c^n$  en el tiempo  $t^n$ . En este caso se realiza mediante un promedio ponderado de  $c_t^n$  y  $c_t^{n+1}$  en los puntos finales de la etapa de integración:

$$\frac{c(t^{n+1}) - c(t^n)}{\Delta t} = \theta c_t(t^{n+1}) + (1 - \theta)c_t(t^n) + \mathcal{O}((1/2 - \theta)\Delta t, \Delta t^2). \quad (\text{A.1})$$

El parámetro  $\theta$  toma valores entre 0 y 1. Varios metodos son obtenidos para diferentes valores de  $\theta$ . Para valores de  $\theta < 1/2$  los esquemas son condicionalmente estable. El método de Euler,  $\theta = 0$ , es el más conocido. Para valores de  $\theta \geq 1/2$  los métodos son incondicionalmente estable. Entre los métodos más conocidos se encuentran: Euler hacia atrás ( $\theta = 1$ ), Galerkin ( $\theta = 2/3$ ) y Crank-Nicholson ( $\theta = 1/2$ ).

En particular, el esquema  $\theta$  para la ecuación de advección-difusión transitoria se expresa como

$$\frac{\Delta c}{\Delta t} - \theta \Delta c_t = c_t^n \quad (\text{A.2})$$

donde  $\Delta t$  es el incremento de tiempo,  $\Delta c = c^{n+1} - c^n$  es el incremento en la concentración,  $c_t$  es una notación compacta para  $\partial c / \partial t$  y el superíndice denota el paso de tiempo.

Para el método de Crank-Nicholson, que es un esquema de segundo orden, se obtiene la siguiente ecuación

$$\frac{\Delta c}{\Delta t} - \frac{1}{2} \Delta c_t = c_t^n \quad (\text{A.3})$$

## A.2. Método mínimos cuadrados

Consideremos un problema de valores en la frontera

$$Lu = f \quad \text{en } \Omega \tag{A.4}$$

$$Bu = g \quad \text{en } \Gamma \tag{A.5}$$

Teniendo en cuenta las condiciones de frontera del problema, ecuación (A.5), sea  $S$  el espacio de funciones

$$S = \{u \in H^1(\Omega) : Bu = 0 \text{ en } \Gamma\}.$$

Suponiendo que  $f \in L_2(\Omega)$  y  $L : S \rightarrow L_2(\Omega)$ . Para una función cualquiera  $u \in S$ , definimos la función residual  $R = Lu - f$ . El método de mínimos cuadrados está basado en minimizar la función residual.

Construimos el funcional de mínimos cuadrados

$$J(u) = \|Lu - f\|_{L_2}^2 = (Lu - f, Lu - f)$$

Nuestro problema se reduce al problema de minimización siguiente: encontrar  $u \in S$  tal que

$$J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in S. \tag{A.6}$$

Para encontrar la solución de este funcional cuadrático basta con hallar los puntos críticos de  $J$ . Una función  $u \in S$  es un punto crítico de  $J$  si la primera variación de  $J$ ,  $\delta J(u)$ , es igual a cero, esto es

$$(\delta J(u), v) = 0 \quad \forall v \in S$$

La primera variación de  $J$  se puede calcular mediante la siguiente formula

$$(\delta J(u), v) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \epsilon} J(u + \epsilon v).$$

En nuestro caso la primera variación es

$$\begin{aligned} (\delta J(u), v) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \epsilon} (L(u + \epsilon v) - f, L(u + \epsilon v) - f) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left\{ (Lu, Lu) + \epsilon(Lv, Lv) + \epsilon(Lv, Lu) + \epsilon^2(Lv, Lv) \right. \\ &\quad \left. - (Lu, f) - \epsilon(Lv, f) - (f, Lu) - \epsilon(f, Lv) + (f, f) \right\} \\ &= (Lu, Lv) + (Lv, Lu) - (Lv, f) - (f, Lv) \\ &= 2(Lv, Lu) - 2(Lv, f), \end{aligned}$$

Lo que igualando a cero, da lugar a la formulación débil de la técnica de mínimos cuadrados, en inglés conocida como *Least Square*: encontrar  $u \in S$  tal que

$$(Lv, Lu) = (Lv, f) \quad \forall v \in S. \quad (\text{A.7})$$

Observemos que en este caso la nueva función prueba es el mismo operador  $L$  aplicado a la función de prueba  $v \in S$ . Ver Carey & Odem (1983), Jiang & Povinelli (1989).

### A.3. Rotating Cosine Hill

El problema clásico para un esquema de advección en  $2D$  considera la advección de un cono producto de cosenos en un campo de velocidad rotacional. La velocidad inicial es

$$u(\mathbf{x}, 0) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 + \cos(\pi X_1))(1 + \cos(\pi X_2)) & \text{si } X_1^2 + X_2^2 \leq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

donde  $\mathbf{X} = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\rho}$ , y las condiciones de frontera es  $u = 0$  en  $\Gamma^{in}$ . La posición inicial del centro y radio de la montaña de coseno esta en  $\mathbf{x}_0$  y  $\rho$ , respectivamente. En el ejemplo se escoge como  $x_0 = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$  y  $\rho = 0.2$  para una malla uniforme de  $30 \times 30$  elementos en el cuadrado unitario  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ . El campo convectivo es rotación pura con velocidad angular unitaria  $a(\mathbf{x}) = (-x_2, x_1)$ . Se utiliza Mínimos Cuadrados junto con Crank-Nicholson.

La figura A.1 (a) muestra la gráfica de la condición inicial  $u(\mathbf{x}, 0)$  (con valores extremos: máx=1, mín=0) y (b) después de un tiempo  $t = 1.3614$ .

La vuelta completa del cono se produce para un tiempo  $t = 2\pi$ . Los valores extremos son: máximo=0.9820, mínimo=-0.026. La figura A.2 muestran el cono (a) después de un tiempo  $2\pi$  y (b) las oscilaciones que presentan el problema de convección pura.

Con el objeto de ejemplificar la dependencia del número de Courant  $C$  se presenta la figura A.3, para (a)  $C = 0.44$  y (b)  $C = 1.06$ . Para números de Courant cercanos a 1 se necesitan menos pasos de tiempo (1800 pasos de tiempo para (a) y 1000 pasos para (b)).

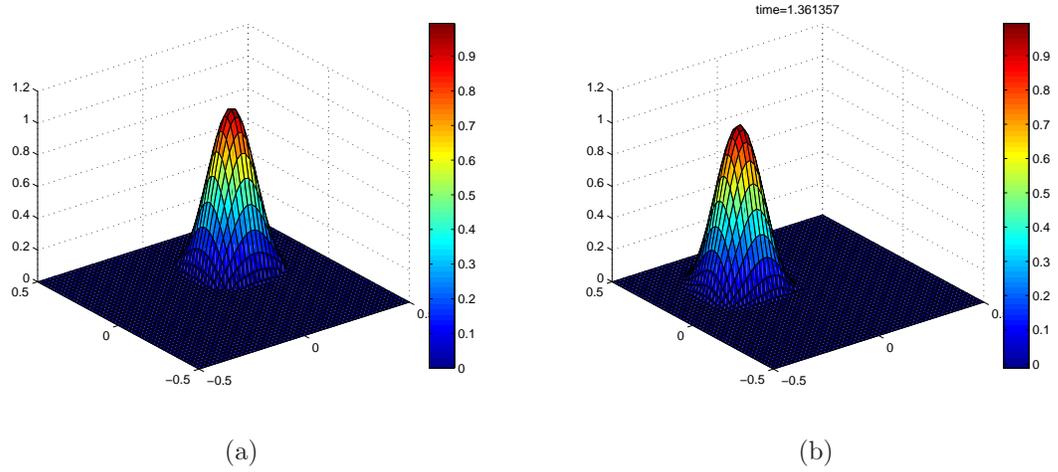


Figura A.1: Cosine Hill al tiempo (a)  $t = 0$ , (b)  $t = 1.3614$ .

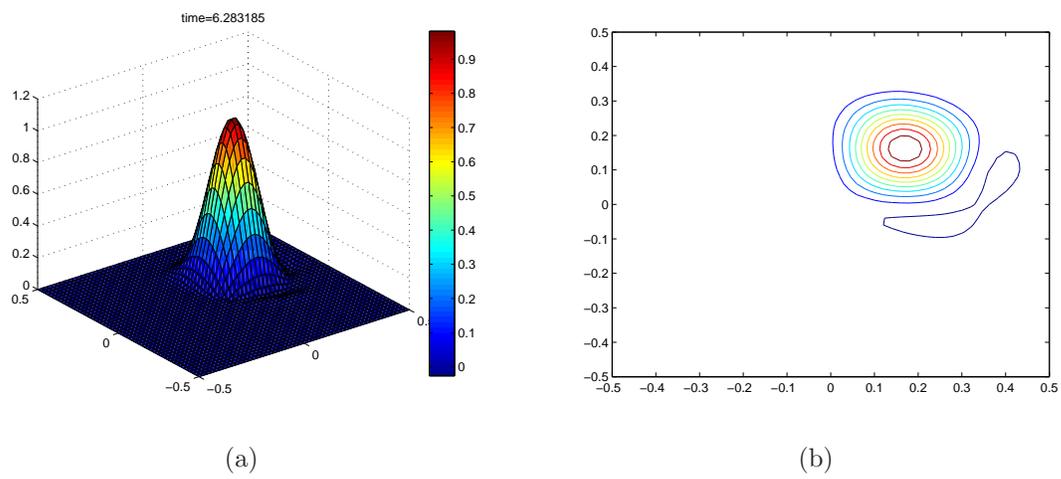


Figura A.2: Cosine Hill al tiempo final  $t_f = 2\pi$ .

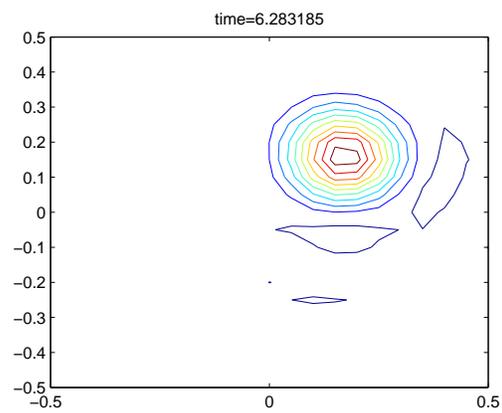
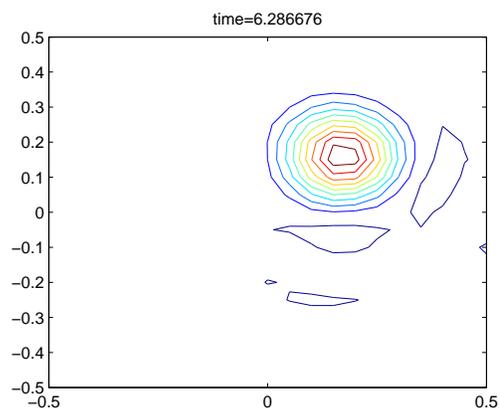


Figura A.3: Cosine Hill para: (a)  $C = 0.44$ , (b)  $C = 1.06$ .



## **B.1. Implementación computacional**

Debido a que el método de Elemento Finito produce matrices con pocos elementos distintos de cero, se ocupó la función `sparse` integrada en Matlab que utiliza tres vectores de tamaño  $nzmax$  donde esta variable representa el número de elementos distintos de cero.

Para resolver el sistema lineal que produce el método de elemento finito se ocupa la instrucción "`\`" de Matlab. Realiza la eliminación gaussiana si  $A$  es cuadrada.

A continuación se presenta de manera general los algoritmos empleados para resolver los modelos  $A$  y  $B$ .

### **Modelo A**

1. Tipo de elemento para la presión
2. Leer los datos del problema
3. Crear la malla de presión y velocidad
4. Fijar un nodo dirichlet en  $(r_w/H,0)$
5. Crear los datos para el elemento de referencia  
Puntos de cuadratura y funciones de forma
6. Crear la matriz sparse  $K$  y el vector  $F$
7. Resolver el sistema  $ph=K\F$
8. Calcular la velocidad  $U_h$
9. Guardar los resultados de presión y velocidad

### Modelo B

1. Tipo de elemento para la concentración
2. Leer los datos del problema
3. Leer los resultados del modelo A  
Presión y velocidad
4. Crear la malla de concentración
5. Crear los datos para el elemento de referencia  
Puntos de cuadratura y funciones de forma
6. Condición inicial  $C_0$
7. Construir las matrices sparse A y B constantes en todo tiempo
8. Mientras (tiempo < tiempofinal)  
    Calcular el vector b independiente  $b=(2*B-A)*C_0'$   
    Aplicar las condiciones dirichlet  
    Resolver el sistema  $C^{n+1}=A \setminus b$   
     $C_0=C^{n+1}$
- Fin
9. Guardar los resultados de concentración

## Lista de Figuras

1.1. Plataforma petrolera. . . . .	1
1.2. Inyección de agua en un yacimiento. . . . .	2
1.3. Inyección de dióxido de carbono. . . . .	3
1.4. Curvas de surgencia del trazador . . . . .	4
1.5. Etapas de la prueba de trazador. . . . .	6
1.6. Zona de disparos en un pozo. . . . .	6
2.1. Región de estudio . . . . .	10
2.2. Corte transversal a un ángulo fijo de la región de interés. . . . .	13
2.3. Subregión $2D$ para el proceso de inyección del fluido. . . . .	14
2.4. Pulso de trazador en $z = 0$ . . . . .	19
3.1. Malla del dominio $\bar{\Omega}$ . . . . .	24
3.2. Soporte de la función $\phi_j$ para el nodo $\vec{n}_j$ . . . . .	25
3.3. Numeración de las funciones de forma para un cuadrilátero de 4 nodos. . . . .	28
3.4. Numeración de las funciones de forma para un cuadrilátero de 9 nodos. . . . .	29
3.5. Transformación isoparamétrica . . . . .	29
3.6. Funciones de forma para el elemento de referencia bilineal $\hat{\Omega}$ . . . . .	33
3.7. Funciones de forma para el elemento de referencia bicuadrático $\hat{\Omega}$ . . . . .	34
4.1. Malla refinada para la zona de disparos. . . . .	44
4.2. Presión analítica y numérica para elementos finitos . . . . .	46
4.3. Presión analítica y numérica para elementos finitos bicuadráticos . . . . .	47
4.4. Presión para el caso $h = H$ . . . . .	48
4.5. Velocidad analítica y numérica para elementos finitos . . . . .	48
4.6. Campo de velocidad aproximado para $h = H$ . . . . .	49

4.7. Presión numérica para $h = 2.5$ en $\Omega$ .	49
4.8. Presión numérica para $h = 2.5$	50
4.9. Campo de velocidad para $h = 2.5$	50
4.10. Soluciones numéricas para $h = 2.5$	51
4.11. Soluciones en $z=0$ para distintos valores de $h$	52
4.12. Presiones para distintos valores de $r$	53
4.13. Velocidades en dirección $r$	54
4.14. Velocidades en dirección $z$	55
4.15. Presión vs radio para $h=2.5, 5, 25$ . Escala semilogarítmica.	56
4.16. Velocidad en dirección $r$ para $h=2.5, 5, 25$	57
4.17. Tiempo vs cantidad de masa para $D = 0.05, 0.75, 0.1, 0.2$ .	58
4.18. Condición inicial del modelo B	59
4.19. Dinámica de la concentración para $D = 0.05$ .	60
4.20. Dinámica de la concentración para $D = 0.075$ .	61
4.21. Dinámica de la concentración para $D = 0.1$ .	61
4.22. Perfiles de concentración en $z = 0$ a distintos tiempos	62
4.23. Curvas de concentración para $t = 0.05$	63
4.24. Curvas de concentración para $t = 0.2$	64
4.25. Curvas de concentración para $t = 0.8$	65
4.26. Curvas de surgencia para $D = 0.05$	66
4.27. Curvas de surgencia para $D = 0.1$	66
4.28. Curvas de surgencia en 4 puntos	67
4.29. Dinámica de la concentración con velocidad radial.	68
4.30. Curvas de concentración para: (a) $t = 0.05$ , (b) $t = 0.2$ y (c) $t = 0.8$	69
4.31. Curvas de surgencia en los puntos: (a) $(1, 0)$ y (b) $(2, 0)$ .	70
A.1. Cosine Hill al tiempo (a) $t = 0$ , (b) $t = 1.3614$ .	76
A.2. Cosine Hill al tiempo final $t_f = 2\pi$ .	76
A.3. Cosine Hill para: (a) $C = 0.44$ , (b) $C = 1.06$ .	77

## Bibliografía

- Agca, C., Pope, G. A. & Sepehrnoori, K. (1990), 'Modelling and analysis of tracer flow in oil reservoirs', *Journal of Petroleum Science and Engineering*, **4**(1), 3–19.
- Becker, B. E., Carey, G. F. & Odem, J. T. (1981), *Finite Elements: An introduction*, Vol. I, Prentice-Hall, Inc, The University of Texas at Austin.
- Bingyu, J., Xinguang, S., Qinglin, W., Qun, L., Anjian, L. & Tongjing, L. (2002), 'Advance on the tracer test technology among wells', *Society of Petroleum Engineers, SPE Asia Pacific Oil and Gas Conference and Exhibition, Melbourne, Australia* **SPE 77874**.
- Bird, R. B., Stewart, W. E. & Lighfoot, E. N. (2001), *Fenomenos de transporte*, Editorial Reverté, España.
- Carey, G. F. & Odem, J. T. (1983), *Finite Elements: A second course*, Vol. II, Prentice-Hall, Inc, The University of Texas at Austin.
- Chase Jr., C. (1971), 'Finite element analysis of single well backflow tracer test in homogeneous reservoir', *Society of Petroleum Engineers, Fall Meeting of the Society of Petroleum Engineers of AIME, Louisiana, USA* **SPE 3485**.
- Chen, Z. (2005), *Finite Elements Methods and Their Application*, Springer.
- Chen, Z., Huan, G. & Ma, Y. (2006), *Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media*, Society for Industrial and Applied Mathematic, Philadelphia.
- Coronado, M. (2011), *Propuesta de trabajo sobre el modelado de pruebas de trazadores de inyección-extracción*, documento interno del Instituto Mexicano del Petróleo, Distrito Federal, México.

- Davis, B. M., Istok, J. D. & Semprini, L. (2002), ‘Push–pull partitioning tracer tests using radon-222 to quantify non-aqueous phase liquid contamination’, *Journal of Contaminant Hydrology* **58**, 129–146.
- Davis, B. M., Istok, J. & Semprini, L. (2005), ‘Numerical simulations of radon as an in situ partitioning tracer for quantifying NAPL contamination using push–pull tests’, *Journal of Contaminant Hydrology* **78**(1-2), 87–103.
- Diaz, M. (2014), *Modelación Matemática y Computacional*, Notas de curso de posgrado, Instituto de Geofísica, UNAM.
- Donea, J. & Huerta, A. (2003), *Finite Element Methods for Flow Problems*, Wiley, England.
- Ghergut, I., Behrens, H., Licha, T., Maier, F., Nottebohm, M., Schaffer, M., Ptak, T. & Sauter, M. (2012), ‘Single-well and inter-well dual-tracer test design for quantifying phase volumes and interface areas’, *Thirty-Seventh Workshop on Geothermal Reservoir Engineering, Stanford University, California*.
- Ghergut, I., Bensabat, J., Niemi, A., Licha, T., Ptak, T. & Sauter, M. (2013), ‘CCS site characterization by single-well and inter-well tracer tests’, *Thirty-Eighth Workshop on Geothermal Reservoir Engineering, Stanford University, California*.
- Goda, T. & Sato, K. (2010), ‘Accurate fluid interface tracking of interwell tracer flow by the constrained interpolation profile method’, *Society of Petroleum Engineers, International Oil and Gas Conference and Exhibition in China, Beijing, China* **SPE 130728**.
- Gritsen, M. G. & Durlofsky, L. J. (2005), ‘Modelling fluid flow in oil reservoirs’, *Annual Review of Fluid Mechanics* **37**, 211–238.
- Huang, J., Christ, J. A. & Goltz, M. (2010), ‘Analytical solutions for efficient interpretation of single-well push-pull tracer test’, *Water Resources Research* **46**(8).
- Istok, J. D., Field, J. A., Schroth, M. H., Davis, B. M. & Dwarakanath, V. (2002), ‘Single-well ”push-pull” partitioning tracer test for NAPL detection in the subsurface’, *Environmental Science and Technology* **36**(12), 2708–2716.
- Jha, R. K., John, A. K., Bryant, S. L. & Lake, L. W. (2009), ‘Flow reversal and mixing’, *Society of Petroleum Engineers, SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Texas, USA* **SPE 103054**, 41–49.
- Jiang, B. & Povinelli, L. A. (1989), ‘Least-square finite element method for fluid dynamics’, *NASA Technical Memorandum 102352*.

- 
- John, A. K., Lake, L. W., Bryant, S. L. & Jennings, J. W. (2002), ‘Investigation of field scale dispersion’, *Society of Petroleum Engineers, SPE/DOE Improved Oil Recovery Symposium, Oklahoma, USA* **SPE 113429**.
- Kolditz, O. (1995*a*), ‘Modelling flow and heat transfer in fractured rocks: conceptual model of a 3d deterministic fracture network’, *Geothermics* **24**(3), 451–470.
- Kolditz, O. (1995*b*), ‘Modelling flow and heat transfer in fractured rocks: dimensional effect of matrix heat diffusion’, *Geothermics* **24**(3), 421–437.
- Olivella, X. O. & de Sacribar, C. A. (2000), *Mecánica de medios continuos para ingenieros*, Ediciones UPC, Barcelona, España.
- Ptak, T., Piepenbrink, M. & Martac, E. (2004), ‘Tracer tests for the investigation of heterogeneous porous media and stochastic modelling of flow and transport—a review of some recent developments’, *Journal of Hydrology* **294**(1-3), 122–163.
- Ramirez, J. (2008), *Pruebas de trazadores en la recuperación de hidrocarburos*, Academia de Ingeniería, A.C., Distrito Federal, México.
- Schroth, M. H., Istok, J. & Haggerty, R. (2001), ‘In situ evaluation of solute retardation using single-well push-pull tests’, *Advances in Water Resources* **24**, 105–117.
- Shook, G. M., Ansley, S. L. & Wylie, A. (2004), *Tracers and Tracer Testing: Design, Implementation, and Interpretation Methods*, Idaho National Engineering and Environmental Laboratory, Idaho Falls.
- Singh, A. K., P. Pilz, M. Z., Kalbacher, T., Görke, U. & Kolditz, O. (2012), ‘Numerical simulation of tracer transport in the Altmark gas field’, *Environmental Earth Sciences* **67**(2), 537–548.
- Somaruga, C. (2002), *Trazadores: una herramienta para diagnosticar sobre el estado de reservorios petroleros sujetos a proyectos de recuperación asistida*, notas de curso impartidas en el Instituto Mexicano del Petróleo, Distrito Federal, México.
- Srinivasan, G. & Lipnikov, K. (2013), ‘On the reconstrucción of Darcy velocity in finite-volume methods’, *Transport in Porous Media* **96**(2), 337–351.
- Tomich, J. F., Jr., R. L. D., Deans, H. A. & Shallenberger, L. K. (1973), ‘Single-well tracer method to measure residual oil saturation’, *Journal of Petroleum Technology* **25**(2), 211–218.