



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA  
UNIDAD IZTAPALAPA

**ANÁLISIS DEL CRITERIO ECOLÓGICO  
DE OPTIMIZACIÓN MEDIANTE DIVERSAS  
LEYES DE TRANSFERENCIA DE CALOR**

TESIS QUE PRESENTA

**M. en C. Delfino Ladino Luna**

PARA OBTENER EL GRADO DE

**DOCTOR EN CIENCIAS**

Asesora:

Dra. Sara María Teresa de la Selva Monroy

México, D. F., noviembre de 2006



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Fecha : 08/11/2006

Página : 1/1

CONSTANCIA DE PRESENTACION DE EXAMEN DE GRADO

La Universidad Autónoma Metropolitana extiende la presente CONSTANCIA DE PRESENTACION DE EXAMEN DE GRADO de DOCTOR EN CIENCIAS del alumno DELFINO LADINO LUNA, matrícula 098181149, quien cumplió con los 180 créditos correspondientes a las unidades de enseñanza aprendizaje del plan de estudio. Con fecha veintiocho de noviembre del 2006 presentó la DEFENSA de su DISERTACIÓN PÚBLICA cuya denominación es:

ANALISIS DEL CRITERIO ECOLOGICO DE OPTIMIZACION MEDIANTE DIVERSAS LEYES DE TRANSFERENCIA DE CALOR

Cabe mencionar que la aprobación de la Disertación Pública tiene un valor de 180 créditos y el programa consta de 360 créditos.

El jurado del examen ha tenido a bien otorgarle la calificación de:

Aprobar

JURADO

Presidente

DR. EDUARDO PIÑA GARZA

Secretario

DRA. SARA MARIA TERESA DE LA SELVA MONROY

Vocal

DR. LUIS MIER Y TERAN CASANUEVA

Vocal

DR. FERNANDO ANGULO BROWN

Vocal

DR. ALEJANDRO GIL VILLEGAS

UNIDAD IZTAPALAPA

Coordinación de Sistemas Escolares

Av. San Rafael Atlixco 186 Col. Vicentina, México DF, 09340 Apdo. Postal 555-320-9000

Tels. 5804-4880 y 5804-4883 fax 5804-4876

**DEDICATORIA:**

**A mi madre (1927-1984):**

**De quien recibí la primera transferencia de calor.**

**A mi esposa, Sonia Nuñez Pérez**

**De quien he recibido un constante y amoroso apoyo  
para la consecución de este trabajo.**

## **AGRADECIMIENTOS:**

A la **Dra. Sara María Teresa de la Selva**, por haber accedido con entusiasmo a dirigir este proyecto, por su infinita paciencia en las horas y días que tuvieron que transcurrir hasta ver terminado el presente trabajo. Sin duda sus observaciones y comentarios sobre el trabajo han sido fundamentales para que yo madure como físico.

Al **Dr. Fernando Angulo Brown**, cuya rebeldía es en mucho culpable de que yo esté escribiendo las presentes líneas. Sus observaciones y sugerencias fueron fundamentales para que el presente trabajo pueda tener una aportación al desarrollo de la llamada Termodinámica de Tiempos Finitos.

Al **Dr. Eduardo Piña Garza**, cuyos comentarios, consejos y sugerencias fueron fundamentales para que finalmente yo haya terminado una tesis doctoral. Gracias por su constante preocupación por sus estudiantes, entre ellos yo, para quien ha sido no sólo profesor sino además una guía en este camino.

A los **Dres. Luis Mier y Terán Casanueva y Alejandro Gil Villegas**, por sus amables sugerencias y observaciones que permitieron darle mayor coherencia al presente trabajo.

A mis amigos Letizia, Alfonso, Pedro, Emma, Tonatiuh, Rubén, Ricardo, Georgina, su invaluable apoyo y afecto. A mis compañeros de trabajo en la UAM-Azcapotzalco, su constante apoyo.

Todo trabajo de esta naturaleza es colectivo, en el sentido de que es fruto del desarrollo del conocimiento y de las experiencias personales que uno tiene con quienes convive cotidianamente o ha convivido. Es por ello que quiero agradecer a todas aquellas personas que, de manera directa o indirecta, y tal vez sin saberlo han permitido que se haya realizado este trabajo.

## CONTENIDO

**Resumen**

**Introducción**

**Capítulo 1. Ciclo de Curzon y Ahlborn con adiabatas instantáneas**

**1.1 El ciclo de Curzon y Ahlborn**

**1.2 Función ecológica**

**1.2.1 Función ecológica con ley de Newton**

**1.2.2 Función ecológica con ley de Dulong y Petit**

**Apéndice 1**

**Capítulo 2. Adiabatas no instantáneas con Ley de Newton**

**2.1 El modelo de Gutkowics-Krusin, Procaccia y Ross**

**2.2 Función ecológica con adiabatas no instantáneas**

**2.3 La aproximación lineal**

**Apéndice 2**

**Capítulo 3. Eficiencia con Ley de Dulong y Petit**

**3.1 Forma general de la función ecológica para  $k > 1$**

**3.2 Eficiencia ecológica en forma analítica**

**3.3 Maximización de la potencia de salida**

**Capítulo 4. El gas de van der Waals**

**4.1 La ecuación de estado y la hipótesis de endorreversibilidad**

**4.2 Función potencia y función ecológica con Ley de Newton**

**4.3 Función potencia y función ecológica con ley de Dulong y Petit**

**Capítulo 5. Ciclo de Curzon y Ahlborn no-endorreversible**

**5.1 Ciclo no-endorreversible con ley de transferencia de Newton y gas ideal**

**5.2 Ciclo no-endorreversible con transferencia de calor no lineal y gas ideal**

**5.3 Ciclo no-endorreversible con gas de van der Waals**

**Conclusiones**

**Referencias**

**Apéndice de publicaciones**

## Resumen

Se considera la optimización de una máquina térmica, suponiendo primero gas ideal y después gas de van der Waals como sustancia de trabajo, con la maximización de la llamada función ecológica y de la potencia de salida en un ciclo tipo Carnot. Se supone la transferencia de calor entre los almacenes y la máquina, primero, de acuerdo con la ley de enfriamiento de Newton y, después, de acuerdo con la ley de transferencia de calor de Dulong y Petit. En ambos casos se encuentra la eficiencia como una serie de potencias del parámetro  $\lambda \sim (\ln V_{máx} - \ln V_{mín})^{-1}$ , siendo  $V_{máx}$  y  $V_{mín}$  los volúmenes máximo y mínimo efectivos subtendidos por el ciclo, respectivamente. Se muestra que cuando se consideran ramas adiabáticas prácticamente instantáneas se está en el límite  $\lambda = 0$ , que corresponde a una relación de compresión infinita. Se analiza la llamada propiedad de semi-suma de la eficiencia ecológica. Se analiza primero el caso endorreversible y después el caso no-endorreversible del llamado ciclo de Curzon y Ahlborn.

## Introducción

Se considera que la Termodinámica Clásica de Equilibrio inició su desarrollo a partir del célebre trabajo de Carnot, *“Reflexiones sobre la potencia motriz del fuego”*, publicado en 1824 [1], en el cual él planteó el principio que ahora lleva su nombre, el teorema de Carnot, y que se puede expresar como:

***“Cualquier proceso cíclico, operando solamente entre una temperatura máxima  $T_1$  y una temperatura mínima  $T_2$ , tiene una eficiencia  $\eta$  que cumple la condición  $\eta \leq 1 - \frac{T_2}{T_1}$ ”.***

La igualdad en la expresión anterior se cumple sólo para el ciclo reversible de Carnot, formado, como se sabe, por dos procesos isotérmicos y dos adiabáticos, operando entre las mismas dos temperaturas, a saber,

$$\eta_C = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (0.1)$$

Así el teorema de Carnot establece una cota máxima para la operación de ciclos térmicos. Estos resultados abrieron el camino para la formulación del concepto de entropía, que propuso Clausius en 1865 [2], el cual a su vez permitió plantear con claridad el concepto de irreversibilidad a través de la Segunda Ley de la Termodinámica.

Por su naturaleza misma, la Termodinámica Clásica de Equilibrio no se ocupa de los efectos de la irreversibilidad en la eficiencia de ciclos térmicos; véase por ejemplo Fermi (1936) [3]. La discusión más extensa sobre este problema fue hecha por Tolman y Fine (1948) [4], haciendo notar que:

***“...una determinación de los diferentes procesos irreversibles, que producen entropía dentro de una máquina térmica, hace posible evaluar las contribuciones relativas de esos procesos a la ineficiencia del proceso global en términos del trabajo útil perdido”.***

Sin embargo, la Termodinámica Irreversible Lineal se ocupa de la irreversibilidad de los procesos de intercambio de calor pero no de la eficiencia de los ciclos térmicos, y sus fundadores no pusieron mucha atención a este problema, ver por ejemplo Onsager [5], Meixner [6], Prigogine (1947) [7] y De Groot y Mazur (1962) [8]. Sólo hasta 1957 Novikov [9] y Chambadal [10], en el caso de plantas núcleo-eléctricas, hicieron notar que

los procesos irreversibles, en el intercambio de calor entre el reactor y su sistema de refrigeración, ocasionaban disminución de la eficiencia de la planta. Posteriormente, en 1975, Curzon y Ahlborn [11] analizaron, para un ciclo tipo Carnot, el efecto de la ausencia de equilibrio térmico entre los almacenes y la sustancia de trabajo durante el ciclo.

Se sabe que los procesos en el ciclo de Carnot, desde el punto de vista de la Termodinámica Clásica de Equilibrio, están constituidos por sucesiones de estados de equilibrio; de manera que emplean un tiempo tan grande que puede tomarse como infinito, por lo que son necesariamente cuasi-estáticos. Estos procesos son reversibles no disipativos. De este modo, el precio que paga el ciclo de Carnot, por ser el más eficiente posible, es el de tener una potencia nula.

Curzon y Ahlborn emplearon el formalismo de la Termodinámica Clásica de Equilibrio, al suponer que la sustancia de trabajo realiza transformaciones reversibles internamente, mientras que es sólo en los acoplamientos del sistema con sus alrededores donde acontece la irreversibilidad. Esta hipótesis se conoce como hipótesis de endorreversibilidad, y se apoya en la idea de que los procesos al interior de la sustancia de trabajo tienen un tiempo de relajación muy pequeño, comparado con el tiempo total del ciclo, esto es, se ajustan al paso de los procesos del ciclo prácticamente en forma instantánea, y se les puede por lo tanto considerar como en equilibrio o cuasi-estáticos. El intercambio de calor entre los almacenes y la máquina lo supusieron dado por la ley de enfriamiento de Newton. De este modo construyeron un ciclo de Carnot más realista, con potencia no nula y con producción de entropía, llamado ahora ciclo de Curzon y Ahlborn o ciclo de Carnot generalizado (Fig. 0.1). Con este modelo encontraron, por medio de la maximización de la potencia, una eficiencia dada por

$$\eta_{CAN} = 1 - \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}. \quad (0.2)$$

Este resultado actualmente se conoce como eficiencia de Curzon-Ahlborn-Novikov, donde  $T_2$  y  $T_1$  son las temperaturas absolutas de los almacenes frío y caliente, respectivamente,

que adquiere valores notablemente cercanos a los medidos en plantas productoras de potencia, como puede verse en la Tabla I del trabajo de estos autores (referencia [11]).

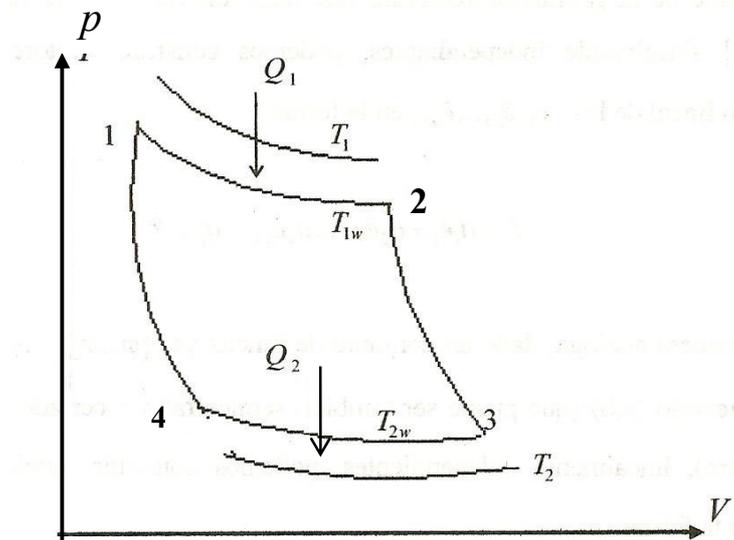


Figura 0.1 Ciclo de Curzon y Ahlborn o ciclo generalizado de Carnot en el plano  $(V,p)$

Esta manera de analizar el desempeño de una máquina térmica se conoce como **Termodinámica de Tiempo Finito**. La Termodinámica de Tiempo Finito, también llamada Termodinámica Endorreversible, ha desarrollado su propio programa de investigación; esto es, en vista de que la Termodinámica Clásica de Equilibrio establece cotas de operación ideales para procesos reales, la Termodinámica de Tiempo Finito busca cotas más acordes con la realidad, tratando de sustituir las desigualdades típicas de la Termodinámica Clásica de Equilibrio por igualdades, a las cuales se puede llegar al tomar en cuenta las fuentes productoras de irreversibilidad, meta aún no lograda; así como también obtener expresiones de la eficiencia de ciclos, a partir de su definición como la razón entre el trabajo total realizado,  $W_{TOT}$ , y la cantidad de calor absorbida por la máquina,  $Q_{abs}$ , a saber

$$\eta = \frac{W_{TOT}}{Q_{abs}}.$$

A partir de la publicación del ahora célebre trabajo de Curzon y Ahlborn, diversos autores han estudiado varios aspectos de la Termodinámica Endorreversible, tomando en cuenta

aspectos no contemplados por ellos, además de otras formas de obtener la expresión (0.2). A continuación se hace un breve recuento de algunos de estos trabajos.

Salamon et. al. [12] desarrollaron un algoritmo para construir potenciales que definan los valores extremos del trabajo, para procesos con restricciones arbitrarias, mostrando que dichos potenciales pueden estar dados para cualquier proceso cuasiestático. Rubin [13, 14, 15] determinó la configuración óptima para una clase de máquinas térmicas, con tiempo finito del ciclo, para la máxima potencia de salida y la máxima eficiencia. De Vos [16] consideró un ciclo de Curzon y Ahlborn con sólo una diferencia de temperaturas entre el baño y el sistema, operando a máxima potencia, con el cual reprodujo la expresión (0.2) y la de la eficiencia en la conversión de energía solar, conocida como fórmula de Castañs [17]. Mostró además varias restricciones para la aplicabilidad de estas ecuaciones. Torres [18] optimizó el desempeño de un modelo de motor de turbina, conectado a fuentes de calor finitas y al medio ambiente, bajo el criterio de máximo trabajo entregado durante un período fijo de operación, considerando paredes con conductividades finitas. Chen y Yan [19, 20] construyeron un modelo de ciclo endorreversible, bajo la suposición de un ciclo con tres fuentes de calor, observando que para discutir los efectos de tener una de estas fuentes finita puede construirse una expresión que represente la configuración óptima de la máquina; dedujeron también la relación entre la óptima tasa de refrigeración y el coeficiente de rendimiento. O'Sullivan [21] estudió tres modelos distintos de enfriamiento, entre ellos la ley de enfriamiento de Newton, bajo condiciones de laboratorio, encontrando un modelo susceptible de ser aplicado en un amplio espectro de temperaturas y condiciones de enfriamiento. Chen [22] utilizó como sistema una máquina térmica que opera como dos ciclos acoplados; tomó como función por optimizar la potencia de salida, y halló que la eficiencia en el máximo de la potencia es la dada en la ecuación (0.2).

Por otra parte, Rebhan [23], tomando como modelo de máquina térmica un mecanismo que incluye un pistón móvil dentro de un cilindro, en contacto térmico con una fuente de calor y un sumidero de calor, hizo notar que el resultado de Curzon-Ahlborn-Novikov corresponde al caso en que la única pérdida de trabajo útil ocurre por la expulsión de calor, y que la

eficiencia a potencia máxima tiene un valor entre la eficiencia considerando sólo efectos de fricción, sin expulsión de calor, y la eficiencia de Curzon-Ahlborn-Novikov, esto es,

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) < \eta_{Pm\acute{a}x} < 1 - \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}.$$

Vale la pena señalar que en los trabajos de revisión de Bejan (1995) [24] y Hoffmann (1997) [25] se encuentran descripciones amplias de la llamada termodinámica de tiempo finito o termodinámica endorreversible, en los que se analizan diversos tópicos de ella, haciendo notar que:

**“... la termodinámica de tiempo finito es un método que combina, en un modelo simple, los conceptos básicos involucrados en la transferencia de calor, fluidos mecánicos y termodinámicos, con el objeto de optimizar mecanismos y procesos sujetos a tamaño y tiempo finitos.”**

En las referencias [12-25], se ha supuesto como irrelevante la contribución del tiempo de duración de las ramas adiabáticas en el ciclo. Sin embargo, un examen cuidadoso de la manera como funcionan las plantas térmicas indica que, dicho tiempo, debe tener algún efecto en el resultado final de conversión de calor en trabajo. Gutkowics-Krusin et. al. [26] mostraron que en un régimen a potencia máxima, proponiendo una forma particular de calcular el tiempo de dichas ramas adiabáticas, es posible escribir la eficiencia del ciclo generalizado de Carnot en función de la razón de compresión,  $r_C = \frac{V_{\max}}{V_{\min}}$ ; de manera que cuando esta razón tiende a infinito se obtiene la eficiencia de Curzon-Ahlborn-Novikov.

Es importante hacer notar que la expresión (0.2) logró acercamientos de alrededor del 90%, respecto a eficiencias reportadas para varias plantas de poder (termo-eléctricas, núcleo-eléctricas, geo-eléctricas), lo que sugiere que el criterio de diseño de dichas plantas es el de potencia máxima. Pero, el criterio de potencia máxima va acompañado por una alta producción de entropía, lo que lleva a un efecto no deseable, en tanto que no se aprovecha todo el calor disponible y se desperdicia parte de él entregándolo al medio ambiente. Así, la producción de entropía sigue siendo un problema en este modelo. A continuación se hace

un breve recuento de algunos trabajos en los que se estudia la producción de entropía en el ciclo de Curzon y Ahlborn.

Considerando minimización de la producción de entropía, Salamon et. al. [27] encontraron que esto conduce a la pérdida de disponibilidad. Torres [28] también utilizó el criterio de minimización de la producción de entropía, encontrando que dicho ciclo funciona de manera óptima sólo en el límite cuasi-estático. Angulo-Brown [29] estudió la superficie obtenida de la expresión para la producción de entropía, en función de la eficiencia  $\eta$  y de la razón de temperaturas de los almacenes  $T_2/T_1$ , y encontró que la expresión (0.2) se puede obtener no sólo por maximización de la potencia de salida. Obtuvo esta expresión con ayuda del teorema del valor medio, aplicado a la superficie asociada a la producción de entropía. De Vos et. al. [30] construyeron un formalismo para describir la conversión de radiación en trabajo en términos de los flujos de energía y entropía, entre otros aspectos. Spirkel y Ries [31] dieron expresiones para el proceso óptimo en el caso general de un sistema con diferentes variables de estado, utilizando minimización de la producción de entropía. Como alternativa para incluir la producción de entropía, en el estudio del desempeño del ciclo de Curzon y Ahlborn, Angulo-Brown [32] propuso un criterio de mérito, diferente al de máxima potencia, llamado criterio ecológico, en el que la cantidad por maximizar es una función que representa el compromiso entre alta potencia y baja producción de entropía, llamada *función ecológica*, y que definió como

$$E \equiv P - T_2 \sigma, \quad (0.3)$$

donde  $P$  es la potencia de salida de la máquina,  $\sigma$  es la producción de entropía y  $T_2$  es la temperatura del almacén frío. La función  $E$  tiene propiedades interesantes, pues al maximizarla se encuentra que el sistema sólo sacrifica un 25% de la máxima potencia, a cambio de producir un 75% menos de la entropía correspondiente al régimen de potencia máxima. Además, se encuentra que la eficiencia a  $E$  máxima tiene un valor cercano a la semisuma de la eficiencia máxima de Carnot,  $\eta_C$ , ecuación (0.1), y la eficiencia a máxima potencia,  $\eta_{CAN}$ , ecuación (0.2):

$$\eta_E \approx \frac{1}{2}(\eta_C + \eta_{CAN}) \equiv \eta_S, \quad (0.4)$$

La tabla 0.1 muestra los valores de  $\eta_S$  comparados con los de las eficiencias dadas por las expresiones (0.1) y (0.2), y con los valores de la eficiencia observada para varias plantas de poder, tomando como modelo de máquina térmica el ciclo de Curzon y Ahlborn.

Tabla 0.1. Comparación de la eficiencia de Carnot con otros modelos teóricos.

Planta	$T_2$ (K)	$T_1$ (K)	$\eta_C$	$\eta_{CAN}$	$\eta_S$	$\eta_{obs}$
Planta convencional de vapor por carbón quemado, West Thurrock, 1962.	298	838	0.64439	0.40367	0.52403	0.36000
Planta geotérmica de vapor, Lardarello, Italia, 1964	353	523	0.32505	0.17845	0.25175	0.16000
Planta central de potencia a vapor, R. U. 1936-1940	298	698	0.57307	0.3466	0.45984	0.28000
Planta de potencia de vapor, E. U. A. 1956	298	923	0.67714	0.43179	0.55447	0.40000
Planta de ciclo combinado (vapor y mercurio), E. U. A. 1949.	298	783	0.61941	0.38308	0.50125	0.34000
Planta nuclear de potencia Doel 4 (Bélgica), 1985.	283	566	0.50000	0.29289	0.39645	0.35000
Planta nuclear, reactor sobrecargado Almaraz II España	290	600	0.51667	0.30478	0.41073	0.34500
Planta nuclear, reactor sobrecargado Sizewell B, R. U..	288	581	0.50430	0.29594	0.40012	0.36300
Planta nuclear Cofrentes, España	289	562	0.48577	0.28290	0.38434	0.34000
Planta nuclear Heysham, reactor avanzado enfriado con gas, R. U.	288	727	0.60385	0.37060	0.48723	0.40000

El uso de la función ecológica se conoce ahora como **criterio ecológico**, y permite analizar diversos aspectos del funcionamiento de máquinas térmicas. Por ejemplo, Cheng y Chen [33] utilizaron este criterio para analizar una máquina térmica irreversible de Carnot, suponiendo una de las fuentes de calor es finita. Velasco et. al. [34] mostraron la posibilidad de utilizar el criterio ecológico en problemas fuera de la termodinámica de tiempo finito, tales como problemas de carácter industrial o económico. Chen et al. [35] utilizaron también este criterio para analizar el desempeño del refrigerador irreversible de Carnot, suponiendo una ley de transferencia de calor tipo Newton, tomando en cuenta fuga de calor e irreversibilidades internas.

Es importante hacer notar que, en la mayoría de los trabajos antes citados, se ha supuesto que la transferencia de calor se realiza como indica la ley de enfriamiento de Newton. Pero algunos han considerado otras formas de transferencia de calor. Particularmente,

maximizando la función  $E$ , Angulo-Brown y Páez-Hernández [36], Árias-Hernández y Angulo-Brown [37] y Chen et. al. [38, 39] analizaron diversos aspectos del funcionamiento de una máquina endorreversible, tomando en cuenta una ley de transferencia de calor no lineal, y encontraron que la forma de la eficiencia a potencia máxima depende de la ley de transferencia de calor utilizada en el modelo, no así la llamada propiedad de semisuma, expresión (0.4). Al considerar estos mismos autores una ley de transporte de calor no lineal tomaron en cuenta los intercambios de calor debidos a efectos de conducción, convección y radiación. El modelo se vuelve más realista y sin embargo los valores de las eficiencias permanecen cercanos a los reportados por Curzon y Ahlborn [11] y por Bejan [24] con la ley de transferencia de calor de Newton.

En el presente trabajo se analiza el funcionamiento de una máquina (ciclo) de Curzon y Ahlborn [11], combinando el formalismo desarrollado por Gutkowics-Krusin et. al. [26] con el criterio ecológico de Angulo-Brown [32]. Esto es, en vez de maximizar la potencia de salida, se maximiza la función ecológica pero ahora tomando en cuenta los tiempos de duración de la expansión y la compresión adiabáticas del ciclo, de manera que se pueda escribir la eficiencia de la máquina como una suma de potencias de un parámetro que dependa de la razón de los volúmenes máximo y mínimo subtendidos por ella, esto es la razón de compresión. Se estudian dos casos, de acuerdo con las leyes de transferencia de calor, de Newton y de Dulong-Petit.

En el capítulo 1 se hace una exposición breve de los trabajos de Curzon y Ahlborn [11] y de Angulo-Brown y colaboradores [36, 37, 40], que servirán de antecedente para el desarrollo de este trabajo. En el capítulo 2 se estudia la máquina de Curzon y Alborn, con adiabatas no instantáneas, pero con la ley de transferencia de Newton y se muestra que, en efecto, al maximizar la función  $E$  el sistema sólo sacrifica aproximadamente un 25% de la máxima potencia, a cambio de producir, aproximadamente, un 75% menos de la entropía correspondiente al régimen de potencia máxima. En el capítulo 3 se estudia la máquina de Curzon y Ahlborn, con adiabatas no instantáneas pero con la ley de transferencia de Dulong-Petit. En el capítulo 4 se hace un breve estudio de la máquina de Curzon y Ahlborn para el caso de un gas de van der Waals. En el capítulo 5 se hace un estudio del ciclo de Curzon y Ahlborn no endorreversible, considerando tanto ley de transferencia de Newton

como ley de transferencia de Dulong y Petit, de manera que se puedan generalizar algunos resultados del caso endorreversible. Finalmente se plantean las conclusiones y comentarios referentes a los resultados obtenidos.

Los principales resultados de este trabajo son:

Para el caso de la ley de Newton,

1. De manera semejante al resultado de Gutkowics-Krusin et. al. [26] (con el criterio de potencia máxima), se obtiene una expresión en serie de potencias para la eficiencia ecológica, en términos de un parámetro en función de la relación de compresión, y que tiene como una cota superior la eficiencia ecológica hallada por Angulo-Brown [32]. Se comparan los resultados con los datos experimentales y teóricos reportados en diversos trabajos previos de varios autores.
2. Tomando la aproximación lineal de la expresión para la eficiencia de Gutkowics-Krusin et.al. y la presentada en este trabajo para la eficiencia por maximización de la función ecológica, se hace un análisis del comportamiento de la razón de compresión en función de las correspondientes eficiencias a primer orden y, tomando un intervalo de valores de la razón de compresión, se encuentran los correspondientes valores de la eficiencia a potencia máxima y función ecológica máxima, comparándolos con los valores de la Tabla 0.1 y otros hallados y los de la referencia [34].

Para el caso de la Ley de Dulong y Petit,

3. Con gas ideal como substancia de trabajo, nuevamente se encuentra una expresión en serie de potencias del parámetro antes citado, para la eficiencia a potencia máxima y a función ecológica máxima, obteniendo una expresión algebraica para la expresión (0.4), ampliando el alcance de la verificación numérica hecha en [37, 38]. Además se encuentra una eficiencia expresada como la semisuma de la eficiencia a potencia máxima con ley de Newton,  $\eta_{CAN}$ , y la eficiencia a potencia máxima con ley de Dulong y Petit, cuyos valores son muy cercanos a los valores experimentales reportados por diversos autores, para plantas convencionales.

4. Para un gas de van der Waals, como substancia de trabajo, se encuentra que las eficiencias a potencia máxima y a función ecológica máxima, a orden cero en un parámetro función del volumen efectivo, tienen la misma estructura algebraica que las correspondientes para gas ideal con ley de Newton y ley de Dulong y Petit.
5. En el caso del ciclo no-endorreversible, se logran obtener intervalos de valores de la eficiencia, a potencia máxima y función ecológica máxima, más estrechos que los reportados en la literatura, alrededor de los valores observados, tanto para plantas convencionales como para plantas núcleo-eléctricas.

## Capítulo 1. Ciclo de Curzon y Ahlborn con adiabatas instantáneas.

Todo proceso macroscópico de transformación de energía que ocurre en la naturaleza es irreversible, y en muchos casos estas irreversibilidades se pueden incluir en una descripción de tales procesos. La Termodinámica de Tiempo Finito es una aproximación en esa dirección, al suponer al sistema como internamente reversible (endorreversible), mientras intercambia energía en forma irreversible con sus alrededores, suponiendo todas las irreversibilidades debidas a esta interacción. Como se ha comentado en la introducción, una manera de evaluar el funcionamiento de una máquina térmica consiste en optimizar alguna cantidad relacionada con la eficiencia de ella. La elección de dicha cantidad tiene que ver con los efectos disipativos que queramos tomar en cuenta. En este capítulo se analizan brevemente dos enfoques básicos para el desarrollo posterior del presente trabajo. Esto permitirá construir un modelo para conseguir los objetivos planteados, a saber, hallar la eficiencia ecológica de una máquina térmica, modelada como un ciclo de Curzon y Ahlborn, como una suma de potencias de un parámetro que dependa de la razón de los volúmenes máximo y mínimo, analizando dos casos, de acuerdo con las leyes de transferencia de calor de Newton y de Dulong y Petit. Para el caso de la ley de Dulong y Petit hallar, además, una forma explícita de la llamada propiedad de semisuma, (0.4), ampliando el alcance de la verificación numérica hecha en [36, 37]. Al mismo tiempo se introducirán las cantidades que serán importantes al momento de elaborar conclusiones.

### 1.1. El ciclo de Curzon y Ahlborn.

En 1975 Curzon y Ahlborn [11] analizaron un ciclo de Carnot en el que no hay equilibrio térmico entre los almacenes térmicos y la substancia de trabajo (figura 0.1 en la Introducción), esto es, tomaron en cuenta que las temperaturas de los almacenes y de la substancia de trabajo son diferentes. Consideraron que el intercambio de calor que ocurre en las ramas isotérmicas está descrito por la ley de enfriamiento de Newton,  $\frac{dQ}{dt} = \alpha(T_f - T_i)$ , donde  $T_f$  y  $T_i$  son las temperaturas final e inicial durante un proceso de intercambio de calor, y  $Q$  es el calor transferido, perdido o ganado por el sistema, en cualquier instante de dicho proceso de intercambio de calor; la conductancia térmica  $\alpha$  se

supone constante. Denotando las temperaturas de los almacenes caliente y frío, respectivamente, como  $T_1$  y  $T_2$ , y las temperaturas alta y baja de la sustancia de trabajo, en las ramas isotérmicas del ciclo,  $T_{1w}$  y  $T_{2w}$ , respectivamente, supusieron que el flujo de calor del almacén caliente hacia el sistema, durante la expansión isotérmica, se realiza de acuerdo con

$$\frac{dQ}{dt} = \alpha(T_1 - T_{1w}), \quad (1.1)$$

en donde  $\frac{dQ}{dt}$  es el flujo de calor y  $\alpha$  es la conductancia térmica, constante, del medio que separa al sistema del almacén, siendo positivo el calor transferido del almacén hacia el sistema, absorbido por la sustancia de trabajo. Si este proceso se realiza en un tiempo  $t_1$ , del estado 1 al estado 2, dicho calor es,

$$Q_1 = \int_1^2 dQ = \alpha t_1 (T_1 - T_{1w}). \quad (1.2)$$

De manera análoga, para la compresión isotérmica, durante la cual fluye calor del sistema hacia el almacén frío, se tiene,

$$\frac{dQ}{dt} = \beta(T_{2w} - T_2), \quad (1.3)$$

de donde,

$$Q_2 = \beta t_2 (T_{2w} - T_2) \quad (1.4)$$

es la cantidad de calor cedido por la máquina hacia el almacén frío;  $t_2$  es el tiempo de duración de la compresión isotérmica y  $\beta$  es la conductancia térmica, constante, del medio que separa al sistema del almacén frío. Ahora el calor cedido será negativo. Se hace además la hipótesis de endorreversibilidad, que consiste en suponer que internamente en el ciclo los procesos son completamente reversibles, lo que equivale a suponer que se cumple la igualdad de Clausius

$$\frac{Q_1}{T_{1w}} = \frac{Q_2}{T_{2w}}. \quad (1.5)$$

La substitución de (1.2) y (1.4) en (1.5) permite obtener la expresión

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\beta T_{2w}(T_{2w} - T_2)}{\alpha T_{1w}(T_1 - T_{1w})}, \quad (1.6)$$

Además, si  $W$  es el trabajo realizado por la máquina y  $t_{tot}$  el tiempo total empleado en el ciclo completo, la potencia desarrollada por la máquina, definida por  $P = \frac{W}{t_{tot}}$ , es como

$$P = \frac{Q_1 - Q_2}{\Gamma(t_1 + t_2)}. \quad (1.7)$$

El tiempo total se escribe como  $t_{tot} = t_1 + t_2 + (\Gamma - 1)(t_1 + t_2)$ , siendo  $(\Gamma - 1)(t_1 + t_2)$  el tiempo empleado por los procesos adiabáticos, esto es, se supone que el tiempo de duración de las ramas adiabáticas es proporcional al tiempo de duración de las ramas isotérmicas en el ciclo, con constante de proporcionalidad  $\Gamma - 1$ . El caso de ramas adiabáticas instantáneas en el ciclo se obtiene cuando  $\Gamma = 1$ . La potencia de salida de la máquina, utilizando (1.5), es entonces

$$P = \frac{Q_2(T_{1w} - T_{2w})}{T_{2w}\Gamma(t_1 + t_2)}. \quad (1.8)$$

Factorizando  $t_2$  en el denominador y substituyendo (1.4) y (1.6), la expresión (1.8) se convierte en

$$P = \frac{\alpha\beta(T_{2w} - T_2)(T_{1w} - T_{2w})(T_1 - T_{1w})}{\Gamma[\beta T_{1w}(T_{2w} - T_2) + \alpha T_{2w}(T_1 - T_{1w})]}, \quad (1.9)$$

y con el cambio de variables

$$x = T_1 - T_{1w} \quad \text{e} \quad y = T_{2w} - T_2, \quad (1.9a)$$

se obtiene,

$$P = \frac{\alpha\beta xy(T_1 - T_2 - x - y)}{\Gamma[\beta T_1 y + \alpha T_2 x + xy(\alpha - \beta)]}. \quad (1.10)$$

La potencia máxima para las variables  $x$  y  $y$  se obtiene con las condiciones

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad (1.11)$$

de donde se encuentran las ecuaciones,

$$\beta T_1 y (T_1 - T_2 - x - y) = x [\beta T_1 y + \alpha T_2 x + xy(\alpha - \beta)] \quad (1.12)$$

$$\alpha T_2 x(T_1 - T_2 - x - y) = y[\beta T_1 y + \alpha T_2 x + xy(\alpha - \beta)], \quad (1.13)$$

Dividiendo miembro a miembro (1.12) y (1.13) se obtiene la relación entre  $x$  y  $y$ ,

$$y = x \sqrt{\frac{\alpha T_2}{\beta T_1}}, \quad (1.14)$$

y, substituyendo (1.14) en (1.12) se tiene

$$\frac{x^2}{T_1^2} \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) - 2 \frac{x}{T_1} \left(1 + \sqrt{\frac{\alpha T_1}{\beta T_2}}\right) + \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = 0, \quad (1.15)$$

que es una ecuación cuadrática para el parámetro  $\frac{x}{T_1}$ , cuya solución es

$$\frac{x}{T_1} = \frac{1 + \sqrt{\frac{\alpha T_2}{\beta T_1}} \pm \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}\right)}{1 - \frac{\alpha}{\beta}}. \quad (1.16)$$

Obsérvese que (1.9a) indica que  $\frac{x}{T_1}$  debe ser positivo, lo que se obtiene tomando el caso de la resta en (1.16), de donde,

$$\frac{x}{T_1} = \frac{\left(1 - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right) - \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \left(1 - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)}{\left(1 - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right) \left(1 + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)} = \frac{1 - \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}}{1 + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}}. \quad (1.17)$$

Análogamente, para el parámetro  $\frac{y}{T_2}$ , que también es positivo, se tiene

$$\frac{y}{T_2} = \frac{\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - 1}{1 + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}}. \quad (1.18)$$

Ahora bien, de la definición de eficiencia,

$$\eta \equiv \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}, \quad (1.19a)$$

se puede escribir,

$$\eta = 1 - \frac{T_{2w}}{T_{1w}} = 1 - \frac{T_2 + y}{T_1 - x}; \quad (1.19b)$$

de donde, al substituir (1.17) y (1.18) en (1.19b), queda

$$\eta = 1 - \frac{T_2 + \left(\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - 1\right) \left(1 + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^{-1} T_2}{T_1 - \left(1 - \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}\right) \left(1 + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^{-1} T_1},$$

que se reduce a

$$\eta = 1 - \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}. \quad (1.20)$$

Se puede observar que los puntos relevantes son: la construcción de la función  $P(x, y)$ , la forma de expresar el tiempo de duración de las ramas adiabáticas y la suposición de que se cumple (1.5). Las constantes que representan las conductancias térmicas al absorber y ceder calor resultan irrelevantes, lo que indica independencia de la calidad del medio que separa al sistema de los almacenes; o que la influencia de tales conductancias se encuentra en el valor del tiempo requerido para los procesos de intercambio de calor.

Por otro lado, de  $x = T_1 - T_{1w}$  y de (1.17) se encuentra

$$1 - \frac{T_{1w}}{T_1} = \frac{1 - \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}}{1 + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}}, \quad (1.21)$$

de donde, al despejar  $T_{1w}$  se tiene

$$T_{1w} = \frac{\sqrt{T_2\beta} + \sqrt{T_1\alpha}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} \sqrt{T_1}. \quad (1.22)$$

De manera análoga,

$$T_{2w} = \frac{\sqrt{T_2\beta} + \sqrt{T_1\alpha}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} \sqrt{T_2}, \quad (1.23)$$

de donde se encuentra la razón  $\frac{T_{2w}}{T_{1w}}$  como una función de la razón  $\frac{T_2}{T_1}$ ,  $\frac{T_{2w}}{T_{1w}} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$ , lo que indica que partiendo de la definición de la eficiencia, dada en (1.19), el problema se puede plantear como la búsqueda de dicha función,  $\frac{T_{2w}}{T_{1w}} = f\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$ , dependiendo de la ley de transferencia de calor y de la manera como se plantee la actuación de las ramas adiabáticas en el ciclo.

## 1.2. Función ecológica

### 1.2.1 Función ecológica con Ley de Newton.

Utilizando las mismas consideraciones que Curzon y Ahlborn para un gas ideal como sustancia de trabajo en una máquina térmica, Angulo-Brown propuso un meritorio procedimiento para evaluar el funcionamiento de dicha máquina, con el compromiso de obtener la mayor potencia de salida posible y al mismo tiempo la menor producción de entropía posible. Ahora el objetivo es encontrar las condiciones en que aparece el extremo máximo de la función  $E$ , ecuación (0.3), para las mismas variables  $x$  y  $y$ , definidas en la sección anterior, dada por

$$E(x, y) \equiv P(x, y) - T_2 \sigma(x, y). \quad (1.24)$$

Para este fin, partiendo de la expresión para la producción de entropía [28],

$$\sigma = \frac{\Delta S}{\tau}; \quad (1.25)$$

y puesto que el incremento de entropía,  $\Delta S$ , está dado por

$$\Delta S = -\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2}, \quad (1.26)$$

que se puede escribir ahora como,

$$\Delta S = \beta t_2 (T_{2w} - T_2) \left( -\frac{T_{1w}}{T_1 T_{2w}} + \frac{1}{T_2} \right). \quad (1.27)$$

Con ayuda de (1.2), (1.4) y (1.5), se observa que (1.25) queda expresada por

$$\sigma = \beta t_2 (T_{2w} - T_2) \frac{-T_2 T_{1w} + T_1 T_{2w}}{T_1 T_{2w} T_2 \Gamma(t_1 + t_2)}. \quad (1.28)$$

Factorizando  $t_2$  y substituyendo (1.6) y (1.9a) en (1.28), se obtiene la producción de entropía como una función de las variables  $x$  y  $y$ ,  $\sigma = \sigma(x, y)$ . Cuando  $\Gamma = 1$ , adiabatas instantáneas,

$$\sigma(x, y) = \frac{\alpha \beta (x^2 y T_2 + x y^2 T_1)}{T_2 T_1 [\alpha T_2 x + \beta T_1 y + (\alpha - \beta) x y]}. \quad (1.29)$$

La potencia, ecuación (1.10), para el mismo caso de adiabatas instantáneas queda ahora expresada por

$$P = \frac{\alpha\beta xy(T_1 - T_2 - x - y)}{\beta T_1 y + \alpha T_2 x + xy(\alpha - \beta)}. \quad (1.30)$$

de manera que es posible escribir ahora la expresión (1.24), para las mismas variables utilizadas en (1.30), en la forma

$$E(x, y) = \frac{\alpha\beta T_1(T_1 - T_2) - (T_1 + T_2)x - 2T_1 y}{T_1[\alpha T_2 x + \beta T_1 y + (\alpha - \beta)xy]} xy. \quad (1.31)$$

Por otro lado, puesto que el denominador de  $P$  y  $\sigma$  es el mismo salvo un factor, se puede proponer una función  $g(x, y)$  tal que

$$P(x, y) = g(x, y)\sigma(x, y) \quad (1.32)$$

dada por la expresión

$$g(x, y) = \frac{T_1 - T_2 - x - y}{xT_2 + yT_1} T_1 T_2, \quad (1.33)$$

de donde se obtiene

$$\frac{g(\eta)}{\eta} = \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2 - \eta T_1}, \quad (1.34)$$

y utilizando la definición de eficiencia, ecuación (1.19a),

$$\frac{g(\eta)}{\eta} = \frac{T_1 T_2 Q_1}{Q_2 T_1 - Q_1 T_2} = \frac{Q_1}{\frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1}}, \quad (1.35)$$

que con la substitución de (1.26) queda como

$$\frac{g(\eta)}{\eta} = \frac{Q_1}{\Delta S}. \quad (1.37)$$

Pero de (1.34), factorizando  $T_1$ , también se tiene,

$$\frac{g(\eta)}{\eta} = \frac{T_2}{\eta_C - \eta}; \quad (1.38)$$

entonces, substituyendo (1.38) en (1.37) se encuentra

$$\eta Q_1 = \eta_C Q_1 - T_2 \Delta S; \quad (1.39)$$

que se puede escribir como

$$W = W_{rev} - T_2 \Delta S, \quad (1.40)$$

siendo  $W_{rev}$  el trabajo realizado por un ciclo reversible de Carnot, y la cantidad  $T_2 \Delta S$  puede interpretarse como el trabajo no realizado (perdido) durante el ciclo. Así, al dividir por el tiempo de duración del ciclo,  $\tau$ , y por la definición de potencia en un ciclo, se tiene ahora

$$P_E = \frac{W_{rev}}{\tau} - T_2 \sigma, \quad (1.41)$$

donde  $T_2 \sigma$  puede interpretarse como la potencia perdida. La ecuación (1.41) es esencialmente (1.24); esto es, la función ecológica resulta ser la diferencia entre la potencia máxima que se puede obtener, la potencia producida por un ciclo reversible de Carnot, y la potencia perdida por los fenómenos de transporte entre el sistema y los almacenes; la función ecológica resulta ser entonces la potencia efectiva. Ahora bien, las condiciones de extremo para la expresión (1.31) en las variables  $x$  y  $y$  permite obtener la relación entre ellas como

$$y = \left[ \frac{\alpha T_2 (T_1 + T_2)}{2 \beta T_1^2} \right]^{1/2} x, \quad (1.42)$$

de donde, utilizando  $\varepsilon = \frac{T_2}{T_1}$ , se encuentra que la eficiencia, para el ciclo endorreversible cuando  $\alpha = \beta$ , está dada por

$$\eta_E(\varepsilon) = \eta_C \frac{1 + 2\varepsilon + \frac{3}{2}\sqrt{2}(\varepsilon + \varepsilon^2)^{1/2}}{1 + 3\varepsilon + 2\sqrt{2}(\varepsilon + \varepsilon^2)^{1/2}}, \quad (1.43)$$

siendo  $\eta_C = 1 - \varepsilon$  la eficiencia de la máquina reversible de Carnot. El parámetro  $\varepsilon$  tiene valores en el intervalo  $[0,1]$  y es fácil mostrar que la semisuma  $\eta_S = \frac{1}{2}(\eta_C + \eta_{CA})$  cumple la relación  $\eta_S \geq \eta_E$ ; lo que se muestra en el apéndice 1, donde además, se muestra que (1.43) tiene la forma más simple

$$\eta_E(\varepsilon) = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}(\varepsilon^2 + \varepsilon)}. \quad (1.44)$$

### 1.2.2 Función ecológica con Ley de Dulong y Petit.

En la sub-sección anterior la función ecológica se estudió con la ley de transferencia de Newton. Pero se sabe que esta ley es una idealización de la forma real en que se produce la transferencia de calor, que depende de los materiales y del medio entre el sistema y los alrededores. Varios autores han estudiado el comportamiento de máquinas térmicas considerando leyes de transferencia diferentes a la de Newton [20, 36, 37, 39, 40]. O'Sullivan [21] recurrió a un experimento muy particular, forzando el enfriamiento de un sistema, y analizó dicho sistema con las leyes de transferencia de Newton, Dulong y Petit,

$\frac{dQ}{dt} = \alpha(T_f - T_i)^{\frac{5}{4}}$ , y una combinación de las leyes de Newton y Stefan-Boltzman,  $\frac{dQ}{dt} = A\alpha_{S-B}C_{S-B}(T_f^4 - T_i^4)$ . De Vos [16] construyó un modelo de máquina térmica,

donde la potencia de salida está limitada por la razón de entrada y/o salida de calor. Analizó diversas formas de la transferencia de calor, de manera de tener una forma general de la

eficiencia,  $\eta_r = \left(1 - \frac{T_{1w}^n}{T_1^n}\right) \left(1 - \frac{T_2}{T_{1w}}\right)$ , que se puede reducir a cinco casos, dependiendo del

valor del exponente  $n$ :  $n = +\infty$ , que corresponde a la eficiencia de Carnot;  $n = 4$ , que corresponde al caso de conversión de energía solar;  $n = 2$ , que corresponde a la eficiencia de la conversión de ruido térmico emitido por un resistor a temperatura  $T_1$ ;  $n = 1$ , que corresponde a la relación lineal entre flujos y fuerzas, que es un modelo termodinámico no en equilibrio pero cercano a él;  $n = -1$ , que es también un modelo lineal pero donde la diferencia de temperaturas  $T_1 - T_{1w}$  no tiene un papel importante. Concluyó que la expresión de Curzon-Ahlborn-Novikov es aplicable sólo en el caso de transferencia lineal de calor (caso  $n = 1$ ), en donde sólo hay pérdida de calor por expulsión del mismo.

Un modelo de transferencia de calor que permite incluir diversas formas de transmisión de calor entre el sistema y sus alrededores es la ley de transferencia de calor de Dulong y Petit. Partiendo de esta suposición, Angulo-Brown y colaboradores [36, 37, 40] hallaron interesantes resultados en forma numérica. Dicha ley de transferencia, muy cercana a la realidad, tiene la forma

$$\frac{dQ}{dt} = \alpha(T_f - T_i)^k, \quad (1.45)$$

siendo el de Dulong y Petit el caso particular para  $k = 5/4$ . Considerando adiabatas instantáneas, en Angulo-Brown y Páez-Hernández [36] se realiza una maximización de la potencia, usando las mismas variables  $x$  y  $y$ , de manera que el tiempo del ciclo queda

$$\tau = \frac{|Q_1|}{\alpha x^{5/4}} + \frac{|Q_2|}{\beta y^{5/4}}, \quad (1.46)$$

donde  $Q_1$  y  $Q_2$  son los calores intercambiados entre la máquina térmica y los almacenes. Las correspondientes constantes de transferencia de calor son  $\alpha$  y  $\beta$ . La potencia de la máquina queda como

$$P_{DP} = \frac{|Q_1| - |Q_2|}{|Q_1|/\alpha x^{5/4} + |Q_2|/\beta y^{5/4}}. \quad (1.47)$$

De la condición (1.5) y para las variables  $x$  y  $y$ , (1.47) queda como

$$P_{DP}(x, y) = \frac{\alpha\beta x^{5/4} y^{5/4} (T_1 - T_2 - x - y)}{\alpha T_2 x^{5/4} + \beta T_1 y^{5/4} + (\alpha x^{1/4} - \beta y^{1/4})xy}, \quad (1.48)$$

que corresponde a una superficie con un solo máximo, en el dominio donde  $P_{DP} \geq 0$ . La correspondiente maximización de esta función da como resultado las relaciones entre las variables  $x$  y  $y$

$$\frac{5}{4} \alpha x^{5/4} (T_2 + y)(T_1 - T_2 - x - y) = y(T_1 - x)(\alpha x^{5/4} + \beta y^{5/4}) \quad (1.49)$$

$$\frac{5}{4} \alpha y^{5/4} (T_1 - x)(T_1 - T_2 - x - y) = x(T_2 - y)(\alpha x^{5/4} + \beta y^{5/4}).$$

La producción de entropía queda expresada, a partir de (1.25), como

$$\sigma_{DP} = \frac{\alpha\beta(T_2 x + T_1 y)x^{5/4} y^{5/4}}{T_1 T_2 [\alpha T_2 x^{5/4} + \beta T_1 y^{5/4} + (\alpha x^{1/4} - \beta y^{1/4})xy]}, \quad (1.50)$$

y, por tanto, la función ecológica queda como

$$E_{DP} = \frac{\alpha\beta[T_1(T_1 - T_2) - (T_1 + T_2)x - 2T_1 y](xy)^{5/4}}{T_1 [\alpha T_2 x^{5/4} + \beta T_1 y^{5/4} + (\alpha x^{1/4} - \beta y^{1/4})xy]}. \quad (1.51)$$

La maximización de la expresión (1.51), para las mismas variables que para la maximización de (1.48), produce un par de ecuaciones semejantes a las expresiones (1.49), que relacionan a dichas variables. Sin embargo, como es fácil observar, la solución analítica de ellas es difícil de obtener, aún en el caso particular cuando  $\alpha = \beta$ .

Por otra parte, expresando a dicha función como dependiente de la eficiencia, Arias-Hernández y Angulo-Brown [37] encontraron la expresión

$$E(\eta) = \frac{\Gamma_p}{T_1} \left[ \frac{(1-\eta)(2\eta-1)T_1^{\frac{5}{4}+1} + (1-2\eta)T_1T_1^{\frac{5}{4}} + (1-\eta)^{\frac{5}{4}}T_1^{\frac{5}{4}}T_2 - T_2^{\frac{5}{4}+1}}{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}(1-\eta) + \frac{\beta}{\alpha+\beta}(1-\eta)^{\frac{5}{4}}} \right], \quad (1.52)$$

siendo  $\Gamma_p = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ . Una alternativa para resolver (1.52) es utilizar métodos numéricos, con lo cual encontraron que la llamada propiedad de semisuma, ecuación (0.4) no depende de la ley de transferencia de calor, esto es, que siempre aparece como la semisuma de la eficiencia del ciclo reversible de Carnot y la eficiencia a potencia máxima del ciclo endorreversible de Curzon y Ahlborn; y construyeron tablas comparativas de eficiencias calculadas con maximización de potencia y maximización de función ecológica, dependiendo del valor del exponente  $k$ , en (1.45). Un problema a resolver es, entonces, hallar expresiones analíticas para la eficiencia maximizando la potencia o la función ecológica, considerando adiabatas no instantáneas, de manera que se pueda comparar con los resultados obtenidos en los trabajos arriba citados.

## Apéndice 1

### 1.A. Forma abreviada de la eficiencia ecológica.

En esta sección se muestra primero que la eficiencia ecológica tiene la expresión simple (1.44), al substituir en (1.43) la eficiencia de Carnot,  $\eta_C = 1 - \varepsilon$ , y realizar el producto indicado. Hecho lo anterior, se busca construir en el numerador un término igual al denominador, como factor común de  $1 - \sqrt{\frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon^2)}$ . Entonces,

$$\begin{aligned}
 \eta_E(\varepsilon) &= (1 - \varepsilon) \frac{1 + 2\varepsilon + \frac{3}{2}\sqrt{2}(\varepsilon + \varepsilon^2)^{1/2}}{1 + 3\varepsilon + 2\sqrt{2}(\varepsilon + \varepsilon^2)^{1/2}} \\
 &= \frac{1 + 2\varepsilon + \frac{3}{2}\sqrt{2}(\varepsilon + \varepsilon^2)^{1/2} - \varepsilon(1 + 2\varepsilon + \frac{3}{2}\sqrt{2}(\varepsilon + \varepsilon^2)^{1/2})}{1 + 3\varepsilon + 2\sqrt{2}(\varepsilon + \varepsilon^2)^{1/2}} \\
 &= \frac{1 + 3\varepsilon - \varepsilon + \frac{4}{2}\sqrt{2}(\varepsilon + \varepsilon^2)^{1/2} - \frac{\sqrt{2}}{2}(\varepsilon + \varepsilon^2)^{1/2} - \varepsilon - 2\varepsilon^2 - \frac{3}{2}\sqrt{2}\varepsilon(\varepsilon + \varepsilon^2)^{1/2}}{1 + 3\varepsilon + 2\sqrt{2}(\varepsilon + \varepsilon^2)^{1/2}} \\
 &= \frac{1 + 3\varepsilon + 2\sqrt{2}(\varepsilon + \varepsilon^2)^{1/2} - \left[ 2(\varepsilon + \varepsilon^2) + \frac{3}{2}\sqrt{2}\varepsilon(\varepsilon + \varepsilon^2)^{1/2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\varepsilon + \varepsilon^2)^{1/2} \right]}{1 + 3\varepsilon + 2\sqrt{2}(\varepsilon + \varepsilon^2)^{1/2}} \\
 &= \frac{1 + 3\varepsilon + 2\sqrt{2}(\varepsilon + \varepsilon^2)^{1/2} - \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon + \varepsilon^2)^{1/2} \left[ 2\sqrt{2}(\varepsilon + \varepsilon^2)^{1/2} + 3\varepsilon + 1 \right]}{1 + 3\varepsilon + 2\sqrt{2}(\varepsilon + \varepsilon^2)^{1/2}} \\
 &= \frac{\left( 1 - \sqrt{\frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon^2)} \right) \left[ 2\sqrt{2}(\varepsilon + \varepsilon^2)^{1/2} + 3\varepsilon + 1 \right]}{1 + 3\varepsilon + 2\sqrt{2}(\varepsilon + \varepsilon^2)^{1/2}} = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon^2)},
 \end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar. Este mismo resultado fue obtenido por F. Angulo-Brown y Arias-Hernández [37], usando funciones de la eficiencia.

Es posible obtener de manera directa la expresión inmediata anterior, partiendo de los resultados de la maximización de la función ecológica. En efecto, de (1.19) se tiene la expresión para la eficiencia,

$$\eta = 1 - \frac{T_2 + y}{T_1 - x} = \frac{T_1 - T_2 - x - y}{T_1 - x} \quad (1.A.1)$$

Ahora en (1.42) tómesese  $A = \sqrt{\frac{T_2(T_1+T_2)}{2T_1^2}}$ , entonces se tiene

$$y = Ax \quad (1.A.2)$$

con lo cual (1.A.1) se convierte en

$$\eta = \frac{T_1 - T_2 - x - Ax}{T_1 - x} = 1 - \frac{T_2 + Ax}{T_1 - x}. \quad (1.A.3)$$

Por otro lado, la condición  $\frac{T_1}{\alpha\beta} \left(\frac{\partial E}{\partial y}\right)_x = 0$  lleva a

$$\alpha T_2 x [T_1(T_1 - T_2) - (T_1 + T_2)x - 2T_1 y] = 2T_1 y [\alpha T_2 x + \beta T_1 y + (\alpha - \beta)xy],$$

que para  $\alpha = \beta$  se convierte en

$$T_2 x [T_1(T_1 - T_2) - (T_1 + T_2)x] = 4T_1 T_2 xy + 2T_1^2 y^2; \quad (1.A.4)$$

o bien, substituyendo (1.A.2),

$$T_1 T_2 (T_1 - T_2)x - [2T_2(T_1 + T_2) + 4T_1 T_2 A]x^2 = 0, \quad (1.A.5)$$

cuyas soluciones son  $x = 0$  y

$$x = \frac{T_1(T_1 + T_2)}{2(T_1 + T_2 + 2T_1 A)}. \quad (1.A.6)$$

Substituyendo (1.A.6) en el segundo miembro de la expresión (1.A.3), y reduciendo términos semejantes, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{T_2 + Ax}{T_1 - x} \cdot \frac{A}{A} &= \frac{T_2 + A \frac{T_1^2 - T_1 T_2}{2T_1 + 2T_2 + 4T_1 A}}{\left[T_1 - \frac{T_1^2 - T_1 T_2}{2T_1 + 2T_2 + 4T_1 A}\right] A} \cdot A = \frac{2T_1 T_2 + 2T_2 + 4T_1 T_2 + AT_1^2 - T_1 T_2 A}{[2T_1^2 + 2T_1 T_2 + 4T_1^2 - T_1^2 + T_1 T_2] A} \cdot A \\ &= \frac{2T_1 T_2 + 2T_2^2 + 3T_1 T_2 A + T_1^2 A}{2T_1 A + 2T_1 T_2 A + 2T_1 T_2 + 2T_2^2 - T_1^2 A + T_1 T_2 A} \cdot A = A \end{aligned}$$

Por tanto se tiene que (1.A.3), como se quería demostrar, se convierte en

$$\eta = 1 - A = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon^2)}.$$

### 1.B. Relación entre la eficiencia ecológica y la propiedad de semisuma.

Ahora se demuestra la afirmación

$$\eta_s \geq \eta_E. \quad (1.B.1)$$

Si se supone cierta esta relación, se debe encontrar una expresión equivalente, inequívocamente cierta, que implique dicha afirmación en el intervalo de interés  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ .

Además, se sabe que

$$\eta_s = \frac{1}{2}(1 - \varepsilon + 1 - \sqrt{\varepsilon}) = 1 - \frac{1}{2}(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon}) \quad \text{y} \quad \eta_E = \sqrt{\frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon^2)}. \quad (1.B.2)$$

Entonces se propone

$$1 - \frac{1}{2}(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon}) \geq 1 - \sqrt{\frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon^2)} \Rightarrow -\frac{1}{2}(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon}) \geq -\sqrt{\frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon^2)}.$$

Al multiplicar por  $-1$  la desigualdad se invierte, de modo que elevando al cuadrado,

$$\sqrt{\frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon^2)} \geq \frac{1}{2}(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon}) \Rightarrow \frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon^2) \geq \frac{1}{4}(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon})^2;$$

o bien, desarrollando el lado derecho,

$$\varepsilon + \varepsilon^2 \geq \frac{1}{2}(\varepsilon + 2\varepsilon\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon^2) \Rightarrow \frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon^2) \geq \varepsilon\sqrt{\varepsilon},$$

de modo que al elevar nuevamente al cuadrado se tiene

$$\frac{1}{4}\varepsilon^2(1 + \varepsilon)^2 \geq \varepsilon^3 \Rightarrow 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2 \geq 4\varepsilon,$$

de donde, se encuentra finalmente que

$$1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 \geq 0 \Rightarrow (1 - \varepsilon)^2 \geq 0, \quad (1.B.3)$$

lo que implica las soluciones

$$1 - \varepsilon \geq 0 \quad \text{ó} \quad 1 - \varepsilon \leq 0. \quad (1.B.4)$$

El parámetro  $\varepsilon$  cumple  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ , por tanto la primera desigualdad en (1.B.4) muestra la certeza de la afirmación (1.B.1).

## Capítulo 2. Adiabatas no instantáneas con Ley de Newton.

En el contexto de la Termodinámica Clásica de Equilibrio el postulado de Kelvin establece: *“Es imposible transformar en trabajo el calor que se toma de una única fuente a temperatura uniforme mediante una transformación que no produzca algún otro cambio en los sistemas que intervienen en ella”*.

Para lograr dicha transformación se necesitan al menos dos fuentes de calor, a temperaturas distintas. Sólo así es posible transformar el calor en trabajo, desechando hacia la fuente menos caliente el calor no utilizado durante la transformación. El modelo más simple de un mecanismo que realiza esta transformación es el *ciclo de Carnot*, que corresponde al caso en que las temperaturas de las fuentes y del sistema (figura 0.1 en la Introducción) cumplen

$$T_1 \equiv T_{1w} \quad y \quad T_2 \equiv T_{2w}, \quad (2.1)$$

y que, a partir de la definición de eficiencia de una máquina térmica, permiten escribir la eficiencia para dicho ciclo (máquina de Carnot) como

$$\eta_C \equiv 1 - \frac{T_{2w}}{T_{1w}} \quad \text{ó} \quad \eta_C \equiv 1 - \frac{T_2}{T_1}, \quad (2.2)$$

que constituye un límite físico para cualquier máquina térmica, y por tanto cumple

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \leq 1 - \frac{T_{2w}}{T_{1w}}. \quad (2.3)$$

Es importante hacer notar que tanto la expresión de la eficiencia dada por Carnot,  $\eta_C \equiv 1 - \varepsilon$ , como las halladas por Curzon y Ahlborn,  $\eta_{CAN} = 1 - \sqrt{\varepsilon}$ , y por Angulo-Brown  $\eta_E = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}(\varepsilon^2 + \varepsilon)}$ , con la ley de transferencia de calor de Newton, aparecen como función de la razón  $\varepsilon$  dada en (1.43), de las temperaturas de los almacenes,  $T_1 > T_2$ , caliente y frío, respectivamente, en la forma

$$\eta = 1 - z(\varepsilon), \quad (2.4)$$

Entonces, el problema de encontrar la eficiencia con cualquiera de los dos procedimientos siguientes: maximización de la potencia de salida de la máquina ó maximización de la función ecológica de la misma máquina (en donde se tiene la ventaja de obtener la mayor potencia de salida posible, cuando se produce la menor entropía posible del sistema), se

convierte en el problema de encontrar una función  $z(\varepsilon)$ , tan complicada o simple como lo permitan la ley de transferencia de calor usada y el procedimiento escogido, de manera que al substituirse en la expresión (2.4) se obtenga la eficiencia en la forma

$$\eta = \eta(\varepsilon). \quad (2.5)$$

En el presente capítulo se supondrá la ley de transferencia de calor de Newton, con un mismo coeficiente de conductancia térmica  $\alpha$  en ambas ramas isotérmicas de la figura 0.1, de modo que el calor intercambiado por la máquina y los alrededores se expresa por

$$\frac{dQ}{dt} = (-1)^{i-1} \alpha (T_i - T_{iw}); \quad i = 1, 2. \quad (2.6)$$

Se realizará la maximización de la función ecológica, antes citada, empleando el procedimiento de Gutkowics-Krusin, Procaccia y Ross, con la ecuación de estado del gas ideal, y se compararán los resultados obtenidos, gráficamente y numéricamente, con los resultados de algunos de los autores citados anteriormente.

## 2.1 El modelo de Gutkowics-Krusin, Procaccia y Ross.

Para hacer auto-consistente el presente capítulo se realiza, en esta sección, una revisión de algunos resultados de la referencia [26], que serán necesarios para el propósito arriba planteado.

Gutkowics-Krusin, Procaccia y Ross (1978) [26] consideraron un gas ideal como sustancia de trabajo, contenido dentro de un cilindro y encerrado por un pistón móvil de masa no despreciable. La inercia del pistón en movimiento no influye en el carácter endorreversible del ciclo de Curzon y Ahlborn, al considerar la expansión del gas, pues el volumen ocupado por el gas en la expansión y la compresión se puede escribir como

$$V = l \cdot A, \quad (2.7)$$

donde  $V$  es el volumen,  $A$  es el área transversal (constante) del cilindro y  $l$  es la distancia recorrida por el pistón en la expansión o la compresión del gas, la aceleración del pistón durante dichos procesos es

$$\frac{d^2 l}{dt^2} = \frac{1}{A} \cdot \frac{d^2 V}{dt^2}, \quad (2.8)$$

de manera que la presión, definida como

$$presión = \frac{fuerza}{área}, \quad (2.9)$$

y la segunda ley de Newton,  $fuerza = (masa)(aceleración)$ , permiten escribir,

$$\frac{1}{A} \left( m \frac{d^2 l}{dt^2} \right) = \frac{fuerza}{área} = presión. \quad (2.10)$$

Para el sistema **gas + pistón**, la diferencia de presiones interna y externa queda expresada por

$$p - p_{ext} = \frac{m}{A} \frac{d^2 V}{dt^2}. \quad (2.11)$$

Por otro lado, la ley de conservación de la energía para el sistema puede escribirse como

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dQ}{dt} - p_{ext} \frac{dV}{dt} - \frac{m}{A} \frac{d^2 V}{dt^2} \frac{dV}{dt}, \quad (2.12)$$

en donde el último término representa la potencia desarrollada durante el movimiento del pistón para alcanzar el volumen  $V$ . Substituyendo (2.11) en (2.12) se tiene

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dQ}{dt} - p_{ext} \frac{dV}{dt} - (p - p_{ext}) \frac{dV}{dt} \quad \text{ó} \quad \frac{dU}{dt} = \frac{dQ}{dt} - p \frac{dV}{dt}, \quad (2.13)$$

lo cual significa que el sistema se encuentra en equilibrio mecánico con sus alrededores.

Ahora bien, para construir la forma de los tiempos de duración de cada proceso se utiliza la ley de transferencia de calor de Newton, ecuación (2.6). Para los procesos isotérmicos, usando gas ideal, se tiene que  $U = U(T) = constante$ , lo que indica que (2.13) se reduce a la expresión

$$\frac{dQ}{dt} = p \frac{dV}{dt}. \quad (2.14)$$

Puesto que  $p = \frac{nRT}{V}$ , para  $n = 1$ , en el caso de gas ideal, (2.14) queda como

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{RT}{V} \frac{dV}{dt} = RT \frac{d}{dt} (\ln V); \quad (2.15)$$

así, el calor absorbido  $Q_1$  se obtiene, al integrar (2.15), como

$$Q_1 = RT_{1w} \ln \frac{V_2}{V_1}; \quad (2.16)$$

además, de (2.6) se encuentra que

$$Q_1 = \alpha(T_1 - T_{1w})t_1. \quad (2.17)$$

Igualando (2.16) y (2.17), se tiene

$$t_1 = \frac{RT_{1w}}{\alpha(T_1 - T_{1w})} \ln \frac{V_2}{V_1} = f_1 \ln \frac{V_2}{V_1}, \quad (2.18)$$

donde se ha definido el parámetro  $f_1 \equiv \frac{RT_{1w}}{\alpha(T_1 - T_{1w})}$ .

Por otro lado, de la primera ley de la termodinámica, para un proceso adiabático, se tiene

$$dU + \delta W = 0,$$

donde  $U$  es la energía interna del gas y  $W$  es el trabajo realizado durante una expansión o una compresión. Recuérdese que  $U$  depende sólo de los estados inicial y final del proceso y que  $W$  depende de la trayectoria del proceso; de ahí el uso de  $dU$  para los cambios infinitesimales de energía y  $\delta W$  para el trabajo realizado durante el proceso infinitesimal de cambio de estado. Así, como  $\Delta U = C_V \Delta T$  y  $W_{1 \rightarrow f} = p \Delta V$ , tomando  $\Delta T = T_1 - T_{1w}$  y por la ecuación de estado para  $n = 1$  moles, se puede escribir

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \alpha \frac{T_1 - T_{1w}}{RT_{1w}}, \quad (2.19)$$

de donde se encuentra que el tiempo de duración de la primera adiabata es como

$$t_2 = \frac{RT_{1w}}{\alpha(T_1 - T_{1w})} \ln \frac{V_3}{V_2}. \quad (2.20)$$

De manera análoga, pero con el parámetro  $f_2 \equiv \frac{RT_{2w}}{\alpha(T_{2w} - T_2)}$ , los tiempos de duración para la segunda isoterma y segunda adiabata son

$$t_3 = f_2 \ln \frac{V_3}{V_4} \quad \text{y} \quad t_4 = f_2 \ln \frac{V_4}{V_1}, \quad (2.21)$$

en donde se ha tomado en cuenta que por ser procesos de compresión la transferencia de calor es negativa para el sistema. El tiempo total de duración del ciclo, utilizando las propiedades de los logaritmos, es entonces

$$t_{TOT} = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = (f_1 + f_2) \ln \frac{V_3}{V_1}; \quad (2.22)$$

que al substituir el valor de los parámetros  $f_1$  y  $f_2$  queda como

$$t_{TOT} = \frac{R}{\alpha} \left[ \frac{T_{1w}}{T_1 - T_{1w}} + \frac{T_{2w}}{T_{2w} - T_2} \right] \ln \frac{V_3}{V_1}. \quad (2.23)$$

Se ha tomado en cuenta que para los procesos adiabáticos se cumple  $TV^{\gamma-1} = \text{constante}$ , con  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ , de donde se encuentra que  $\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$  y

$$V_2 = V_3 \left( \frac{T_{2w}}{T_{1w}} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \quad (2.24)$$

Para escribir la potencia desarrollada por la máquina se necesita escribir la forma que tiene el trabajo. De (2.14), para  $p = \frac{nRT}{V}$  con  $n = 1$ , se tiene que el calor cedido,  $Q_2$ , queda como

$$Q_2 = -RT_{2w} \ln \frac{V_3}{V_4}, \quad (2.25)$$

y entonces

$$W_{TOT} = Q_1 + Q_2 = R \left( T_{1w} \ln \frac{V_2}{V_1} - T_{2w} \ln \frac{V_3}{V_4} \right). \quad (2.26)$$

y por (2.24)

$$W_{TOT} = R(T_{1w} - T_{2w}) \left( \ln \frac{V_3}{V_1} + \frac{1}{\gamma-1} \ln \frac{T_{2w}}{T_{1w}} \right). \quad (2.27)$$

Substituyendo (2.23) y (2.27) en la definición de potencia se tiene

$$P = \frac{\alpha(T_{1w} - T_{2w}) \left( \ln \frac{V_3}{V_1} + \frac{1}{\gamma-1} \ln \frac{T_{2w}}{T_{1w}} \right)}{\left( \frac{T_{1w}}{T_1 - T_{1w}} + \frac{T_{2w}}{T_{2w} - T_2} \right) \ln \frac{V_3}{V_1}}. \quad (2.28)$$

La factorización de  $T_{1w}$  en el numerador y denominador, y de  $T_1$  en el denominador, permite obtener la expresión

$$P = \alpha T_1 \left( 1 - \frac{T_{2w}}{T_{1w}} \right) \left( \ln \frac{V_3}{V_1} + \frac{1}{\gamma-1} \ln \frac{T_{2w}}{T_{1w}} \right) \cdot \left[ \left( \frac{1}{1 - \frac{T_{1w}}{T_1}} + \frac{\frac{T_{2w}}{T_{1w}}}{\frac{T_{2w} - T_2}{T_1 - T_1}} \right) \ln \frac{V_3}{V_1} \right]^{-1}. \quad (2.29)$$

Aquí conviene hacer el siguiente cambio de variables

$$u = \frac{T_{1w}}{T_1} \quad \text{y} \quad z = \frac{T_{2w}}{T_{1w}}, \quad (2.30)$$

de manera que, para valores dados de  $\alpha$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $V_1$ ,  $V_3$  y  $\gamma$ , se tiene  $P = P(u, z)$ .

Dividiendo por  $\ln \frac{V_3}{V_1}$  y como  $\varepsilon = \frac{T_2}{T_1}$ ,  $P$  se puede escribir ahora como (Apéndice 2)

$$P = \frac{\alpha T_1 (1-z) [1 + \lambda \ln z]}{\frac{1}{1-u} + \frac{z}{uz-\varepsilon}}, \quad (2.31)$$

donde se ha definido

$$\lambda = \frac{1}{(\gamma-1) \ln \frac{V_3}{V_1}}. \quad (2.32)$$

Pero, como se puede observar de la figura 2.1a, en donde se ha graficado  $\frac{P}{\alpha T_1}$  para las variables  $u$  y  $z$ , tomando como parámetros constantes  $\varepsilon = 0.5$  y  $\lambda = 0$ , aparentemente no existen extremos en el rectángulo  $[0,1] \times [0,1]$  para  $P$ , pero tiene al menos un cero en  $z = \varepsilon$ . Sin embargo, independientemente de que en alguna sub-región de  $[0,1] \times [0,1]$  pudieran existir extremos de  $P$ , para algún  $u$  dado, al ser cortada la superficie por un plano  $u = \text{constante}$ , se genera una curva con al menos un extremo máximo dentro del intervalo  $[0, 1]$ , para la variable  $z$ . Esto equivale a proyectar la superficie sobre un plano  $(z, P)$ .

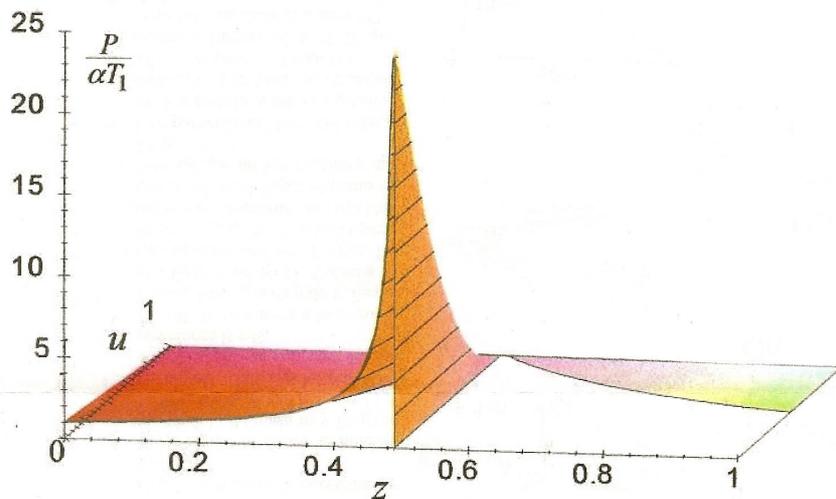


Figura 2.1a. Gráfica de  $P/\alpha T_1$  en la región  $[0, 1] \times [0, 1]$  para las variables  $u$  y  $z$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\lambda = 0$

También, se puede observar en la misma Figura 2.1a, que existe alguna sub-región del rectángulo  $[0,1] \times [0,1]$  en donde  $P$  no es cero y con valores de  $z$  mayores a  $\varepsilon$ . En efecto, utilizando los mismos valores de los parámetros  $\varepsilon$  y  $\lambda$ , las gráficas de la figura 2.1b muestran cómo se va haciendo importante una sub-región cercana al punto  $(1,1)$ , y que es

más evidente en la Figura 2.1c. Para observar mejor este comportamiento de  $\frac{P}{\alpha T_1}$  se hace necesario buscar una relación entre las variables  $u$  y  $z$ , de manera que se pueda hallar  $u=u(z)$ , y entonces tener  $P=P(u(z), z)$ .

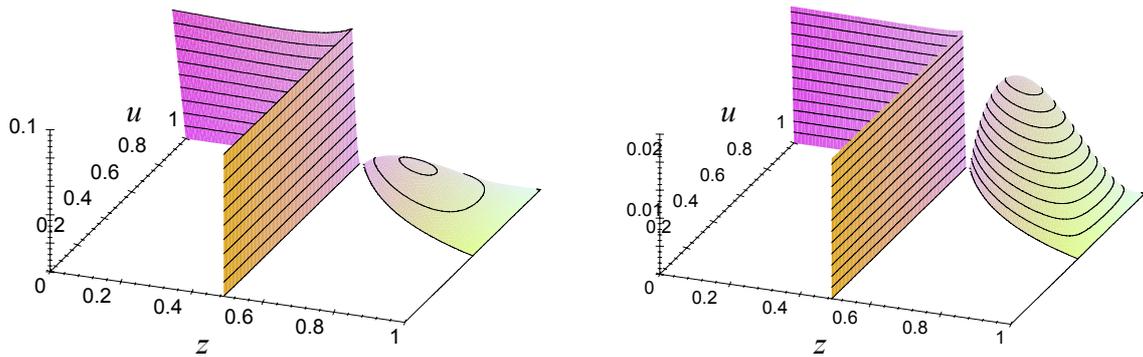


Figura 2.1b. Acercamientos en la gráfica de  $P/aT_1$ , donde se hace evidente la importancia de la existencia de la sub-región de  $[0, 1] \times [0, 1]$  donde existe  $P$ .

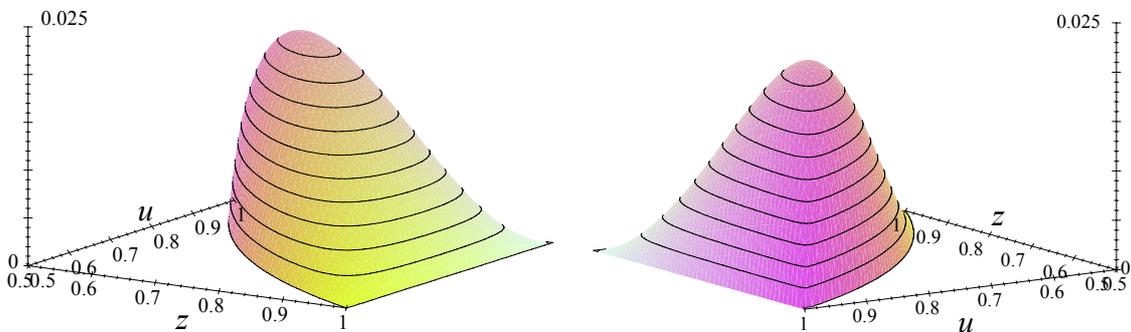


Figura 2.1c. Vistas anterior y posterior de la superficie generada por la expresión algebraica de  $P$ .

Para las condiciones  $\frac{\partial P}{\partial u} = 0$  y  $\frac{\partial P}{\partial z} = 0$ , se buscan ahora los valores de  $u$  y  $z$  que permitirán encontrar condiciones de existencia de extremos. De la primera condición es fácil obtener

$$\frac{-\alpha T_1 (1-z)(1+\lambda \ln z) \left[ \frac{1}{(1-u)^2} - \frac{z^2}{(zu-\varepsilon)^2} \right]}{\left( \frac{1}{1-u} + \frac{z}{zu-\varepsilon} \right)^2} = 0, \quad (2.33)$$

de donde, puesto que se está buscando una relación entre  $u$  y  $z$ , el factor nulo

$$\frac{1}{(1-u)^2} - \frac{z^2}{(zu-\varepsilon)^2} = 0, \quad (2.34)$$

permite obtener la relación  $(zu-\varepsilon)^2 = z^2(1-u)^2$ , o bien  $zu-\varepsilon = z(1-u)$ , de donde se puede escribir  $u = u(z)$  como,

$$u = \frac{z + \varepsilon}{2z}. \quad (2.35)$$

Substituyendo (2.35) en (2.31) se encuentra ahora que

$$P = \alpha T_1 \frac{(z-\varepsilon)(1-z)(1+\lambda \ln z)}{4z},$$

de manera que, como debe suceder  $P \geq 0$ ,  $z$  debe estar en el intervalo  $[\varepsilon, 1]$ , esto es,  $\frac{T_2}{T_1} \leq \frac{T_{2w}}{T_{1w}} \leq 1$ ; por tanto  $\frac{\varepsilon+1}{2} \leq u \leq 1$ . Es importante hacer notar que de la substitución de (2.35) en (2.31) se obtiene  $[\varepsilon, 1]$  como único intervalo físicamente posible para los valores de  $z$ , esto es  $\varepsilon \leq z \leq 1$ , lo que implica que la región importante del plano  $(u, z)$  es la que se encuentra dentro del rectángulo  $[\frac{\varepsilon+1}{2}, 1] \times [\varepsilon, 1]$ , como se muestra en la Figura (2.1d).

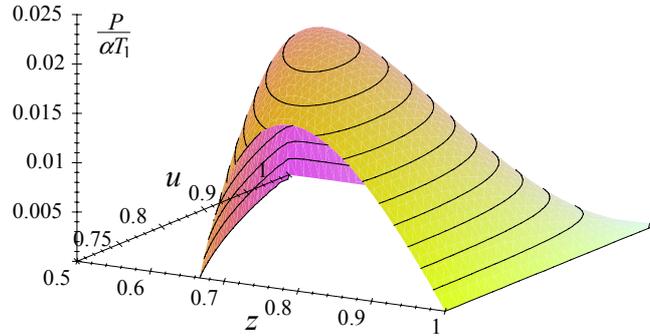


Figura 2.1d. Gráfica de la superficie generada por  $P/\alpha T_1$  en el intervalo de existencia física  $[0.75, 1] \times [0.5, 1]$ , cuando  $\varepsilon = 0.5$ .

De la segunda condición de extremo se obtiene la expresión

$$\left[ (1-z) \frac{\lambda}{z} - 1 - \lambda \ln z \right] \left( \frac{1}{1-u} + \frac{z}{zu-\varepsilon} \right) + \frac{\varepsilon(1-z)(1+\lambda \ln z)}{(zu-\varepsilon)^2} = 0, \quad (2.36)$$

la cual, con ayuda de (2.35) y después de reducirse algebraicamente, se convierte en

$$(z^2 - \varepsilon)(1 + \lambda \ln z) = \lambda(z - \varepsilon)(1 - z). \quad (2.37)$$

Bajo estas condiciones es que se puede encontrar  $P_{\max} = P_{\max}(u(z), z)$ . De (2.37), Gutkowics-Krusin, Procaccia y Ross [26] encontraron que tomar el caso límite  $\lambda = 0$ , que equivale a una razón de compresión,  $\frac{V_3}{V_1}$ , infinita, se traduce en el caso de ramas adiabáticas instantáneas, con  $z_0 = z(\lambda = 0) = \sqrt{\varepsilon}$ . Esto es, se reproduce el resultado de Curzon y Ahlborn [11] para la eficiencia, como un caso límite. Además, a partir de la expresión (2.37), suponiendo ahora  $z = z(\lambda, \varepsilon)$ , como una suma de potencias de  $\lambda$ ,

$$z = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + \dots \quad (2.38)$$

y al derivar respecto a  $\lambda$  y tomar el límite cuando  $\lambda \rightarrow 0$  en cada derivada, se encuentran los coeficientes  $a_0, a_1, a_2$ , etc., de modo que se tiene la suma convergente (ver Apéndice 2)

$$z = \sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{\varepsilon})^2 \lambda + \frac{1}{4}(1 - \sqrt{\varepsilon})^2 \left[ \frac{(1 - \sqrt{\varepsilon})^2}{2\sqrt{\varepsilon}} - \ln \varepsilon \right] \lambda^2 + O(\lambda^3); \quad (2.39)$$

esto es,

$$\eta_{\max} = 1 - z(\lambda = 0, \varepsilon) = \eta_{CAN}, \quad (2.40)$$

de donde se puede concluir que la eficiencia hallada por Curzon y Ahlborn [11] corresponde, en efecto, al caso de maximización de la potencia con adiabatas instantáneas.

De manera análoga, en la siguiente sección se construirá la correspondiente función ecológica que, como se verá, tiene una forma semejante al caso de la potencia (Figs. 2.1), y se maximizará para obtener resultados semejantes a los arriba expuestos.

## 2.2 Función ecológica con adiabatas no instantáneas.

En la sección 2 del capítulo 1 se hizo un breve resumen de los resultados de los trabajos de Angulo-Brown y col. [36, 37, 40]. Es importante señalar que su trabajo y los resultados obtenidos por ellos se basaron en la suposición de que las adiabatas en el ciclo de Curzon y Ahlborn ocurren instantáneamente. Sin embargo en la realidad esto no es así, y aunque estos procesos ocurriesen en tiempos muy cortos comparados con el tiempo en que ocurren

las ramas isotérmicas, es necesario tomarlos en cuenta. Un acercamiento al proceso real, para dicho ciclo, se realiza con la misma suposición que hicieron Gutkowics-Krusin y col. [26]. Esto es, tomando como tiempo total del ciclo el tiempo hallado en (2.23), sólo falta construir la producción de entropía para tener la forma de la función ecológica, definida en (1.24), para las variables  $u$  y  $z$ , y aplicar las condiciones de extremo para hallar las condiciones en que se tendrá un máximo de dicha función. Partiendo de la ecuación (1.25); puesto que se conoce la forma de las cantidades de los calores absorbido y cedido por el sistema, substituyendo (2.16) y (2.25) en (1.26) se tiene el incremento en la entropía,

$$\Delta S = \frac{-RT_{1w} \ln \frac{V_2}{V_1}}{T_1} + \frac{RT_{2w} \ln \frac{V_4}{V_3}}{T_2}, \quad (2.41)$$

y, al substituir en (1.25) el tiempo total de duración del ciclo, hallado en (2.23), se tiene

$$\sigma = \left( \frac{-RT_{1w} \ln \frac{V_2}{V_1}}{T_1} + \frac{RT_{2w} \ln \frac{V_4}{V_3}}{T_2} \right) \frac{\alpha}{R} \ln \frac{V_1}{V_3} \left( \frac{T_{1w}}{T_1 - T_{1w}} + \frac{T_{2w}}{T_2 - T_{2w}} \right)^{-1}, \quad (2.42)$$

que con (2.24), y una reducción de términos, de manera semejante a  $P$ , se convierte en

$$\sigma = \alpha \left( \ln \frac{V_3}{V_1} + \frac{1}{\gamma-1} \ln \frac{T_{2w}}{T_{1w}} \right) \left( \frac{T_{1w}}{T_1} + \frac{T_{2w}}{T_2} \right) \ln \frac{V_1}{V_3} \left[ \frac{T_{1w}}{T_1 - T_{1w}} + \frac{T_{2w}}{T_2 - T_{2w}} \right]^{-1}. \quad (2.43)$$

Ahora, substituyendo (2.30), y reduciendo algunos factores, (2.43) queda

$$\sigma = \alpha \frac{T_1}{T_2} \frac{\left( \ln \frac{V_3}{V_1} + \frac{1}{\gamma-1} \ln z \right) (z - \varepsilon)}{\ln \frac{V_3}{V_1} \left[ \frac{1}{1-u} + \frac{z}{zu-\varepsilon} \right]}, \quad (2.44)$$

de manera que (1.24) se puede escribir como

$$E = \alpha T_1 \left[ \frac{(1-z)(1-\lambda \ln z)}{\frac{1}{1-u} + \frac{z}{zu-\varepsilon}} - T_2 \frac{1}{T_2} \frac{(1+\lambda \ln z)(z-\varepsilon)}{\frac{1}{1-u} + \frac{z}{zu-\varepsilon}} \right], \quad (2.45a)$$

o bien,

$$E = \alpha T_1 \frac{(1+\varepsilon-2z)(1+\lambda \ln z)}{\frac{1}{1-u} + \frac{z}{zu-\varepsilon}} \quad (2.45b)$$

Las Figuras 2.2 muestran el comportamiento de  $E(u,z)$ , en forma semejante a  $P(u,z)$ . Pero es importante observar que también existe una sub-región del rectángulo  $[0,1] \times [0,1]$

físicamente posible para los valores de  $u$  y  $z$ . Para hallar dicha sub-región se buscará primero  $u = u(z)$ , de manera de obtener  $E = E(u(z), z)$ .

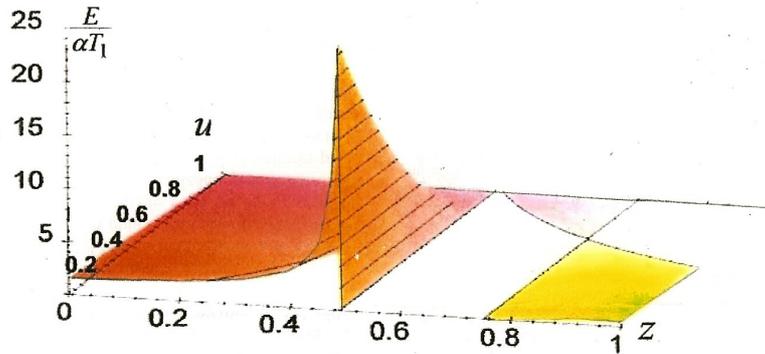


Figura 2.2a. Gráfica de  $E/\alpha T_1$  en el plano de coordenadas  $(u, z)$  en la región  $[0, 1] \times [0, 1]$ , para  $\varepsilon = 0.5$  y  $\lambda = 0$ .

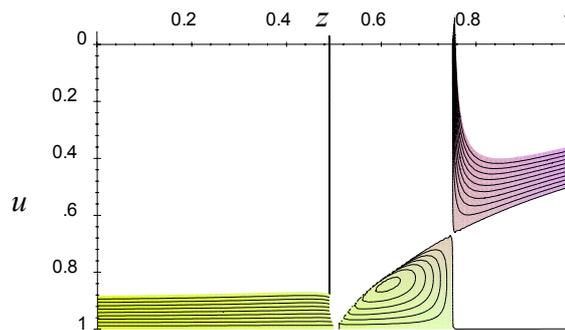


Figura 2.2b. Vista superior de la gráfica de  $E/\alpha T_1$  en el plano de coordenadas  $(u, z)$  en la región  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

La maximización de  $E = E(u, z)$ , esto es la resolución de las ecuaciones dadas por  $\frac{\partial E}{\partial u} = 0$  y

$\frac{\partial E}{\partial z} = 0$ , permite obtener nuevamente

$$u = \frac{z + \varepsilon}{2z}, \quad (2.46)$$

y la relación

$$[2(1 + \lambda \ln z)z - \lambda(1 + \varepsilon - 2z)](z - \varepsilon)(zu - \varepsilon) = (1 + \varepsilon - 2z)(1 + \lambda \ln z)(1 - u)\varepsilon, \quad (2.47)$$

De manera que al substituir (2.46) en (2.45b) se tiene

$$E = \alpha T_1 \frac{(z - \varepsilon)(1 + \varepsilon - 2z)(1 + \lambda \ln z)}{4z},$$

de donde, puesto que  $E \geq 0$  y para  $\lambda = 0$ , se encuentra que se debe cumplir  $\varepsilon \leq z \leq \frac{1+\varepsilon}{2}$  y  $1 \geq u \geq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} + \frac{1}{2}$ , obteniéndose la gráfica de la figura (2.2c).

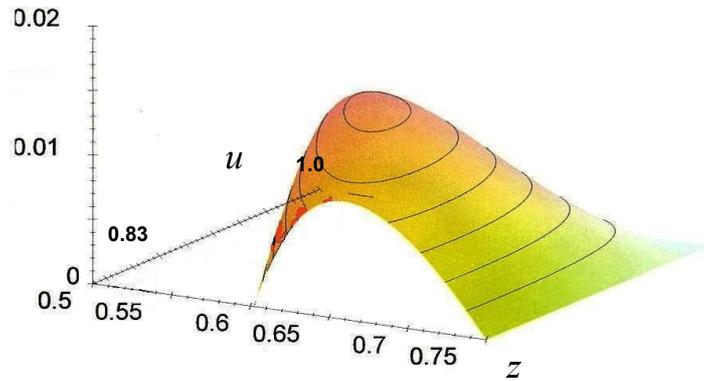


Figura 2.2c. Gráfica del comportamiento de  $E/\alpha T_1$  en la sub-región  $[0.83, 1] \times [0.5, 0.75]$  de existencia física de  $E$ , del plano de coordenadas  $(u, z)$ , para  $\varepsilon = 0.5$  y  $\lambda = 0$ .

Así, es posible tener una gráfica que muestre el comportamiento de  $P$ ,  $\sigma$  y  $E$  en el plano obtenido para  $u$  constante, cuando  $\lambda = 0$ ,  $\varepsilon = \text{constante}$  y  $z$  variable, véase la Figura 2.3 para  $\varepsilon = 0.5$ , donde se observa que la máxima potencia de salida se obtiene cuando se produce una gran cantidad de entropía. También se observa que la producción de entropía nula se encuentra con la potencia de salida nula; además la función  $E$  es máxima cuando al mismo tiempo se tiene una baja producción de entropía y una alta potencia producida y se hace evidente la existencia de un intervalo para el parámetro  $u$ , donde existe físicamente  $E$ .

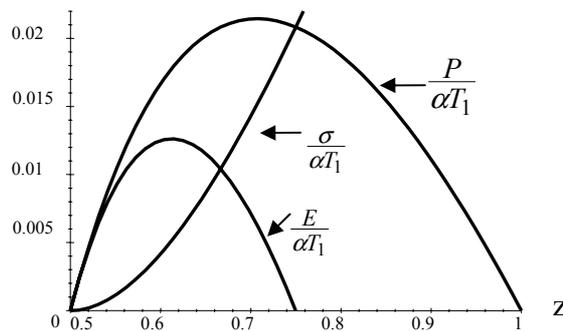


Figura 2.3. Comparación del comportamiento de  $P$ ,  $E$  y  $\sigma$ , en el intervalo de existencia física de  $P$ , para los valores  $\varepsilon = 0.5$  y  $\lambda = 0$ , esto es  $0.5 \leq z \leq 1$ ,

La substitución de  $u$ , dada en (2.46), en la expresión (2.47) da la ecuación que  $z$  obedece en el máximo de la función ecológica, en el plano  $(\varepsilon, z)$  para un  $\lambda$  dado, de manera que se tiene

$$[2(1 + \lambda \ln z)z - \lambda(1 + \varepsilon - 2z)](z - \varepsilon) = (1 + \varepsilon - 2z)(1 + \lambda \ln z)\varepsilon \quad (2.48)$$

Obsérvese que  $z$  es función implícita de  $\lambda$  y de  $\varepsilon$ ,  $z = z(\lambda, \varepsilon)$ ; así, suponiendo una suma de potencias en el parámetro  $\lambda$ , con coeficientes en función de  $\varepsilon$ ,  $b_i = b_i(\varepsilon)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , se tiene,

$$z \equiv b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2 + b_3\lambda^3 + \dots \quad (2.49)$$

Derivando implícitamente, sucesivamente,  $z$  respecto a  $\lambda$  en (2.48) y (2.49), se obtiene el sistema de ecuaciones que permite hallar la forma de los coeficientes  $b_i = b_i(\varepsilon)$ , esto es,

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \lambda} &= b_1 + 2b_2\lambda + 3b_3\lambda^2 + \dots + nb_n\lambda^{n-1} + \dots \\ \frac{\partial^2 z}{\partial \lambda^2} &= 2b_2 + 6b_3\lambda + \dots + n(n-1)b_n\lambda^{n-2} + \dots \\ \frac{\partial^3 z}{\partial \lambda^3} &= 6b_3 + \dots + n(n-1)(n-2)\lambda^{n-3} + \dots \\ &etc. \end{aligned} \quad (2.50)$$

De (2.50), al tomar el límite  $\lambda \rightarrow 0$ , se encuentran los coeficientes  $b_i$  en (2.49), en la misma forma que los coeficientes  $a_i$  de la ecuación (2.28), véase el apéndice 2. La función  $z$  ahora se puede escribir como la expansión en potencias de  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} z(\varepsilon, \lambda) &= \sqrt{\frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon^2)} \left\{ 1 + \left[ \frac{1}{4}(1 + 3\varepsilon) \sqrt{\frac{2}{\varepsilon + \varepsilon^2} - 1} \right] \lambda \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{16} \frac{(1 + 3\varepsilon)}{\varepsilon + \varepsilon^2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\varepsilon + \varepsilon^2}} \ln \sqrt{\frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon^2)} \right) \left( 1 + 3\varepsilon - 4\sqrt{\frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon^2)} \right) \lambda^2 + O(\lambda^3) \right\} \end{aligned} \quad (2.51)$$

Los coeficientes  $b_i$  en (2.51) cumplen  $b_i > 0$ . Entonces es posible escribir la eficiencia como la expansión en términos de  $\lambda$ ,

$$\eta_{ENG} \equiv 1 - z(\varepsilon, \lambda) \quad (2.52)$$

En el caso cuando  $\lambda = 0$ , se encuentra

$$z(\varepsilon, \lambda = 0) = \sqrt{\frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon^2)} \quad (2.53)$$

y en este caso particular se tiene el valor para la eficiencia

$$\eta_{EN} = 1 - z(\varepsilon, \lambda = 0) = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon^2)} ; \quad (2.54)$$

que es la máxima posible cuando se maximiza la función ecológica. Todos los términos en (2.51) son positivos, y (2.54) es la misma (1.44), lo que muestra que la eficiencia ecológica corresponde al caso  $\lambda = 0$  o, lo que es lo mismo, a una relación de compresión infinita o por lo menos al caso  $V_{m\acute{a}x} \gg V_{m\acute{i}n}$ . La tabla 2.1 muestra una comparación entre  $\eta_C$ ,  $\eta_{CAN}$ ,  $\eta_S$  y  $\eta_{EN}$  para la máquina de calor propuesta, tomadas de Angulo-Brown (1991) [32]. Se observa que  $\eta_{CAN} < \eta_{EN} < \eta_S$ , y es fácil probar que  $\eta_S > \eta_{EN}$  y  $\eta_{EN} > \eta_{CAN}$ . Para valores de  $\varepsilon$  en el intervalo  $[0, 1]$  se cumple  $\eta_{EN} > \eta_{CAN}$ , como se aprecia de las columnas 6 y 7 de la tabla 2.1.

Tabla 2.1. Comparación de las diferentes eficiencias para varias plantas térmicas reportadas y los valores hallados para la eficiencia ecológica en el límite  $\lambda = 0$ .

Power plant	$T_2$ (K)	$T_1$ (K)	$\eta_C$	$\eta_{CAN}$	$\eta_S$	$\eta_{EN}$
Planta convencional de vapor por carbón quemado, West Thurrock , 1962.	298	838	0.64439	0.403367	0.52403	0.50905
Planta geotérmica de vapor, Lardarello, Italia, 1964	353	523	0.32505	0.17845	0.25175	0.24818
Planta central de potencia a vapor, R. U. 1936-1940	298	698	0.57307	0.3466	0.45984	0.44808
Planta de potencia de vapor, E. U. A. 1956	298	923	0.67714	0.43179	0.55447	0.53789
Planta de ciclo combinado (vapor y mercurio), E. U. A. 1949.	298	783	0.61941	0.38308	0.50125	0.48744
Planta nuclear de potencia Doel 4 (Bélgica), 1985.	283	566	0.50000	0.29289	0.39645	0.38763

La figura 2.4 muestra gráficamente que la diferencia entre  $\eta_{EN}$  y  $\eta_S$  es suficientemente pequeño como para que sea válida la consideración (0.4).

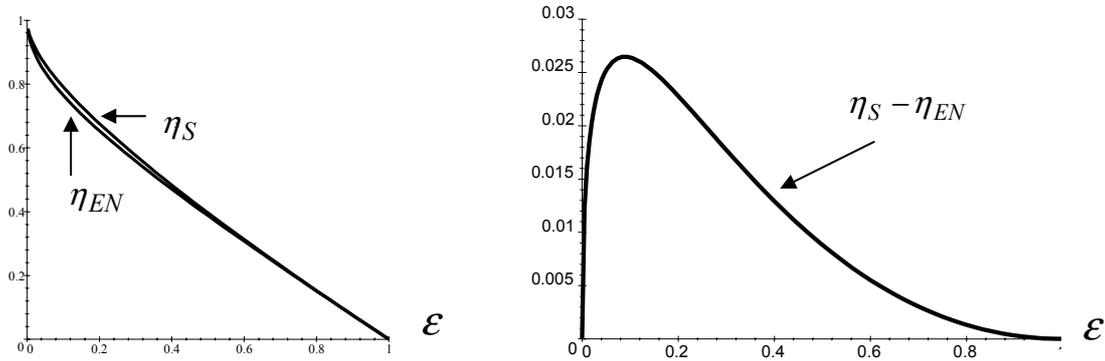


Figura 2.4. Comparación entre la eficiencia ecológica  $\eta_{EN}$  y la semisuma de  $\eta_{CAN}$  y  $\eta_C$ , definida por  $\eta_S$ .

### 2.3 La aproximación lineal.

Como se aprecia en las expresiones (2.39) y (2.51), se puede tomar una aproximación lineal para la eficiencia  $\eta$  en términos de la razón de los volúmenes máximo y mínimo subtendidos durante el ciclo (llamada razón de compresión), y de la razón de temperaturas de los almacenes frío y caliente,  $T_2$  y  $T_1$  respectivamente, de manera de obtener una relación de la forma  $F(\eta, V_{\max}/V_{\min}, T_2/T_1) = 0$ , que tendrá la misma estructura independientemente de que se obtenga por la maximización de la función potencia de salida o función ecológica, lo que permite analizar el comportamiento de la razón de compresión respecto de la razón de temperaturas de los almacenes frío y caliente.

Se puede verificar que para  $r_C \rightarrow \infty$  y  $\lambda \rightarrow 0$  se tiene la eficiencia de Curzon-Ahlborn-Novikov, dada ahora como  $\eta_{CAN} \equiv \eta_P(\lambda = 0) = \eta_{PO}$ . A partir de (2.39), se tiene la aproximación lineal,

$$\eta_{PL}(\lambda) = 1 - \sqrt{\varepsilon} - \frac{1}{2}(1 - \sqrt{\varepsilon})^2 \lambda, \quad (2.55)$$

donde el coeficiente del término lineal para  $\lambda$  es  $b_P = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{\varepsilon})^2$ .

La correspondiente aproximación lineal de la eficiencia ecológica queda como

$$\eta_{EL}(\lambda) = 1 - \sqrt{\frac{\varepsilon^2 + \varepsilon}{2}} - \left[ \frac{1}{4}(1 + 3\varepsilon) - \sqrt{\frac{\varepsilon^2 + \varepsilon}{2}} \right] \lambda, \quad (2.56)$$

y el coeficiente del término lineal en  $\lambda$  es  $b_E = \frac{1}{4}(1+3\varepsilon) - \sqrt{\frac{\varepsilon^2+\varepsilon}{2}}$ .

Como puede observarse, la aproximación lineal de la eficiencia, independientemente de que se haya maximizado la potencia o la función ecológica, tiene la forma,

$$\eta_{IL}(\varepsilon, \lambda) = \eta_{IO} - b_I(\varepsilon)\lambda = \eta_{IO} - b_I(\varepsilon) \frac{1}{(\gamma-1)\ln r_C}, \quad (2.57)$$

puesto que  $\lambda = [(\gamma-1)\ln r_C]^{-1}$ , donde el subíndice  $I$  se substituye por  $P$  ó  $E$ , según sea el caso: maximización de la función potencia ó maximización de la función ecológica. Esto es, si se maximiza la potencia se tiene  $\eta_{PL}$ ,  $\eta_P$  y  $b_P$ ; y si se maximiza la función ecológica se tiene  $\eta_{EL}$ ,  $\eta_E$  y  $b_E$ . Así, para un valor dado de la eficiencia se tiene  $r_C = r_C(\varepsilon)$ . La forma general de  $r_C(\varepsilon)$ , a partir de (2.57), se obtiene como

$$r_C = \exp\left\{\frac{b_I}{(\gamma-1)(\eta_{IO} - \eta_{IL})}\right\}. \quad (2.58)$$

Tomando la eficiencia  $\eta_{IO}$  como la calculada en Curzon y Ahlborn (1975) [11] y Angulo-Brown (1991) [32], respectivamente, se tendrá,

$$0 < \eta_{IL} < \eta_{IO}. \quad (2.59)$$

Dado un valor de la eficiencia  $\eta_{IL}$  es posible encontrar también un intervalo  $0 < \varepsilon < 1$ , para el cual  $r_C$  cumple

$$r_C > 1; \quad (2.60)$$

lo que permite hallar, a partir de (2.58),

$$\frac{b_I}{(\gamma-1)(\eta_{IO} - \eta_{IL})} > 0, \quad (2.61)$$

que lleva a la desigualdad

$$\eta_{IL} < \eta_{IO}, \quad (2.62)$$

como una condición necesaria, pues  $\eta_{IO}$  debe ser una cota superior para  $\eta_{IL}$ . Para gases monoatómicos,  $\gamma = 1.67$ , con  $\eta_{IL}$  como parámetro variable, se obtiene la variación de  $r_C$ , observándose que  $r_C \rightarrow \infty$  cuando  $\eta_{IL} \rightarrow \eta_{IO}$ , como debe de ser. Para cada par de temperaturas dadas en Curzon y Ahlborn (1975) [11] y Angulo-Brown (1991) [32], se tiene la variación de  $r_C$  a partir de (2.58). Por ejemplo en el caso de la planta West Turrock

(1962) las temperaturas de los almacenes, en grados Kelvin, son  $T_1 = 838$  y  $T_2 = 298$ , con  $\eta_{PO} = \eta_{CA} = 0.403367$ . La figura 2.5 muestra el comportamiento de  $r_C$  respecto de  $\eta_{PL}$ . Usando la función ecológica, para la misma planta,  $\eta_{EO} = 0.50905$ , la figura 2.6 muestra el comportamiento de  $r_C$  respecto de  $\eta_{EL}$ .

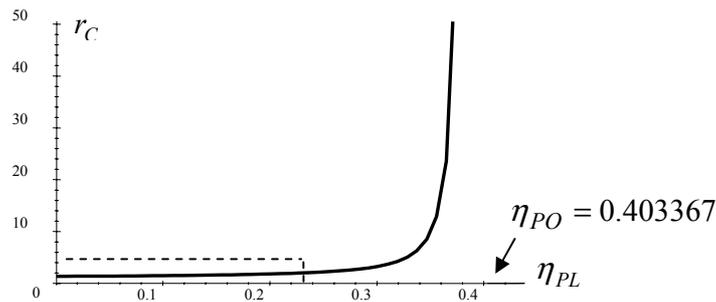


Figura 2.5. Comportamiento de  $r_C$  respecto a la variación de  $\eta_{PL}$  en el intervalo  $[0, 0.403367)$ .

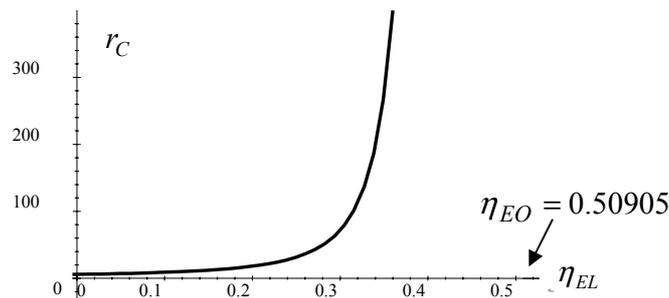


Figura 2.6. Comportamiento de  $r_C$  respecto a la variación de  $\eta_{EL}$  en el intervalo  $[0, 0.50905)$ .

Obsérvese que existe un valor mínimo de la razón de compresión, mayor de 1. La figura 2.7 muestra lo acertado de esta afirmación, con el segmento escogido (encerrado por las líneas discontinuas) de la figura 2.5. Por otro lado, dado  $r_C$  para los valores de los parámetros utilizados en las figuras 2.5, 2.6 y 2.7, es posible hallar el comportamiento de  $\eta_{IL}$  en función del parámetro  $\varepsilon \equiv T_2/T_1$ , donde se observa lo correcto de la afirmación (2.62), de manera que  $\eta_{IL} \rightarrow \eta_{IO}$  sólo cuando  $\varepsilon \rightarrow 1$ , como se observa en la figura 2.8, para la función ecológica, en donde se ha tomado el valor  $r_C = 10$ , cercano a los valores de la

razón de compresión reportados en textos de termodinámica (ver por ejemplo K. Wark, 1983 [41] y M.D. Burghardt, 1982 [42]). Además, naturalmente, los valores obtenidos con la aproximación lineal se acercan más de lo que se acercan los correspondientes valores  $\eta_{CA}$  y  $\eta_E$ , a los valores experimentales reportados en las referencias mencionadas. Los valores físicamente posibles de  $r_C$  llevan a valores de  $\lambda$  que cumplen con la relación  $0 < \lambda < 1$ .

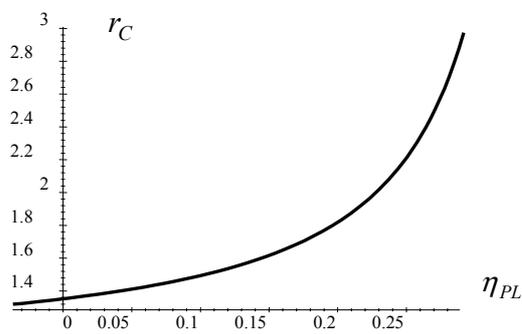


Figura 2.7 Verificación gráfica de la existencia de un valor  $r_C > 0$  para  $\eta_{PL} = 0$ , con  $T_1 = 838$  y  $T_2 = 298$ .

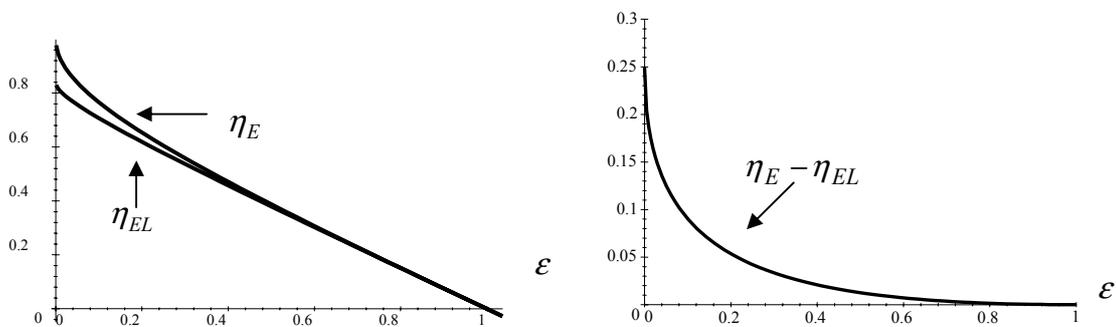


Figura 2.8 Comparación entre la eficiencia ecológica a orden cero y a orden lineal.

En los compresores reales, llamados compresores alternativos con espacio muerto, el porcentaje de volumen de desplazamiento total de un pistón en un cilindro se llama coeficiente de espacio muerto, dado por  $c = \frac{\text{volumen de espacio muerto}}{\text{volumen de desplazamiento}}$ , ver referencia [42], página 339. En el caso de un ciclo tipo Carnot, ciclo de Curzon y Ahlborn

$c = \frac{\text{volumen mínimo}}{\text{volumen máximo}}$  es el recíproco de  $r_C$ . Se encuentra experimentalmente que  $3\% \leq c \leq 10\%$ , así que  $\frac{100}{3} \geq r_C \geq \frac{100}{10}$ , o lo que es lo mismo  $33 > r_C \geq 10$ . La razón de compresión resulta ser un parámetro útil para modelar el funcionamiento de una máquina térmica, pero es difícil introducir un parámetro tal en plantas que generan electricidad. Sería interesante hallar un modelo donde  $r_C$  pudiese ser incorporada.

Si se supone que dichas plantas funcionan como un ciclo de Curzon y Ahlborn, se encuentra que la aproximación lineal de la eficiencia hallada, expresión (2.57), permite hallar intervalos de los valores de la eficiencia ecológica más cercanos a los valores medidos experimentalmente, que comparados con los valores reportados en la referencia [34], para plantas núcleo-eléctricas. Para  $\gamma = 1.67$  (gas ideal), se muestran en la Tabla comparativa 2.2, a partir de la Tabla 1 de dicha referencia, lo que hace evidente la necesidad de una aproximación mayor, a orden 2, pero que muestra la cercanía del extremo inferior del intervalo de valores de la eficiencia a orden lineal con los valores observados.

Tabla 2.2. Comparación de los valores de las eficiencias observada,  $\eta_C$ ,  $\eta_{CAN}$ ,  $\eta_{opt}$  (referencia [34]),  $\eta_{obs}$  y la aproximación lineal hallada en la presente sección

Planta	$T_2$ (K)	$T_1$ (K)	$\eta_C$	$\eta_{CAN}$	$\eta_{opt}$	$\eta_{obs}$	$\eta_{ENL}, 10 \leq r_C < 33$
Planta nuclear de potencia Doel 4 (Bélgica), 1985.	283	566	0.50000	0.29289	0.40500	0.35000	0.37944 a 0.38224
Planta nuclear, reactor sobrecargado Almaraz II España	290	600	0.51667	0.30478	0.42000	0.34500	0.39234 a 0.39539
Planta nuclear, reactor sobrecargado Sizewell B, R. U.	288	581	0.50430	0.29594	0.41000	0.36300	0.38277 a 0.38563
Planta nuclear Cofrentes, España	289	562	0.48577	0.28290	0.39300	0.34000	0.36844 a 0.37103
Planta nuclear Heysham, reactor avanzado enfriado con gas, R. U.	288	727	0.60385	0.37060	0.501	0.40000	0.46036 a 0.46506

## Apéndice 2

### 2.A. Potencia en función de las variables $u$ y $z$ .

Se obtendrá (2.31) a partir de (2.28), al realizar las operaciones necesarias hasta substituir las variables  $T_{1w}$  y  $T_{2w}$  por las variables  $u$  y  $z$ , definidas en (2.30). En efecto,

$$P = \frac{\alpha(T_{1w} - T_{2w}) \left[ \ln \frac{V_3}{V_1} + \frac{1}{\gamma-1} \ln \frac{T_{2w}}{T_{1w}} \right]}{\left[ \frac{T_{1w}}{T_1 - T_{1w}} + \frac{T_{2w}}{T_{2w} - T_{2w}} \right] \ln \frac{V_3}{V_1}} = \frac{\alpha T_{1w} \left(1 - \frac{T_{2w}}{T_{1w}}\right) \left[ \ln \frac{V_3}{V_1} + \frac{1}{\gamma-1} \ln \frac{T_{2w}}{T_{1w}} \right]}{T_{1w} \left[ \frac{1}{T_1 - T_{1w}} + \frac{T_{2w}}{T_{2w} - T_{2w}} \right] \ln \frac{V_3}{V_1}}$$

$$= \frac{\alpha \left(1 - \frac{T_{2w}}{T_{1w}}\right) \ln \frac{V_3}{V_1} \left(1 + \frac{1}{(\gamma-1) \ln \frac{V_3}{V_1}} \ln \frac{T_{2w}}{T_{1w}}\right)}{\left( \frac{1}{T_1 - T_{1w}} + \frac{T_{2w}}{T_{2w} - T_{2w}} \right) \ln \frac{V_3}{V_1}} = \frac{\alpha \left(1 - \frac{T_{2w}}{T_{1w}}\right) \left(1 + \frac{1}{(\gamma-1) \ln \frac{V_3}{V_1}} \ln \frac{T_{2w}}{T_{1w}}\right)}{\left( \frac{1}{T_1 - T_{1w}} + \frac{T_{2w}}{T_{2w} - T_{2w}} \right)}$$

Pero,

$$\frac{1}{T_1 - T_{1w}} + \frac{T_{2w}}{T_{2w} - T_2} = \frac{1}{T_1 \left(1 - \frac{T_{1w}}{T_1}\right)} + \frac{T_{2w}}{T_1 \left(\frac{T_{2w}}{T_1} - \frac{T_2}{T_1}\right)} = \frac{1}{T_1} \left[ \frac{1}{1 - \frac{T_{1w}}{T_1}} + \frac{T_{2w}}{T_1} \cdot \frac{T_1}{T_{1w}} - \frac{T_2}{T_1} \right],$$

entonces, con ayuda de (2.30) y (2.32) se puede escribir (2.31)

$$P = \frac{\alpha T_1 (1-z)(1 + \lambda \ln z)}{\frac{1}{1-u} + \frac{z}{uz-\varepsilon}},$$

como se quería demostrar.

### 2.B. La función potencia tiene un extremo máximo.

Considérese una máquina con temperatura  $T_{1w}$ , acoplada a un almacén calorífico a temperatura  $T_1$ . La máquina cede calor a un almacén a temperatura  $T_2$  de manera que

$$\eta = \frac{W}{Q_1} \leq 1 - \frac{T_2}{T_{1w}}, \quad (2.B.1)$$

para  $T_1 > T_{1w} > T_2$ . Por otro lado, para un tiempo cualquiera  $t_1$ , se puede escribir

$$\frac{w/t_1}{Q_1/t_1} \leq 1 - \frac{T_2}{T_{1w}}, \quad (2.B.2)$$

de modo que, para  $t_{TOT} > t_1$ ,

$$\frac{W/t_1}{Q_1/t_1} > \frac{W/t_{TOT}}{Q_1/t_1} = \frac{P}{Q_1/t_1}. \quad (2.B.3)$$

Supóngase ahora una función que represente la tasa de transferencia de calor como

$\dot{Q} = f(T, T_{1w}) = const.$  Sea  $\dot{Q}_1 = \frac{Q_1}{t_1}$ , entonces de (2.B.3) se tiene

$$1 - \frac{T_2}{T_{1w}} \geq \frac{W/t_1}{Q_1/t_1} \Rightarrow 1 - \frac{T_2}{T_{1w}} > \frac{P}{Q_1/t_1} = \frac{P}{\dot{Q}_1}; \quad (2.B.4)$$

pero, de la ley de transferencia de calor de Newton,  $\dot{Q}_1 = \alpha(T_1 - T_{1w})$ , se tiene,

$$T_{1w} = T_1 - \frac{\dot{Q}_1}{\alpha} \Rightarrow \frac{P}{\dot{Q}_1} \leq 1 - \frac{T_2}{T_1 - \frac{\dot{Q}_1}{\alpha}}. \quad (2.B.5)$$

Pero el lado derecho de esta expresión se puede escribir como

$$1 - \frac{T_2}{T_1 - \frac{\dot{Q}_1}{\alpha}} = \frac{T_1 - \frac{\dot{Q}_1}{\alpha} - T_2}{T_1 - \frac{\dot{Q}_1}{\alpha}} = \frac{1 - \frac{T_2}{T_1} - \frac{\dot{Q}_1}{\alpha T_1}}{1 - \frac{\dot{Q}_1}{\alpha T_1}} = \frac{\eta_C - \frac{\dot{Q}_1}{\alpha T_1}}{1 - \frac{\dot{Q}_1}{\alpha T_1}}$$

de modo que

$$P \leq \dot{Q}_1 \left( \eta_C - \frac{\dot{Q}_1}{\alpha T_1} \right) \left( 1 - \frac{\dot{Q}_1}{\alpha T_1} \right)^{-1}. \quad (2.B.6)$$

Para la igualdad, maximizando  $P$  respecto a  $\dot{Q}_1$  se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\dot{Q}_1} &= \frac{\left( \eta_C - \frac{2\dot{Q}_1}{\alpha T_1} \right) \left( 1 - \frac{\dot{Q}_1}{\alpha T_1} \right) + \left( \eta_C \dot{Q}_1 - \frac{\dot{Q}_1^2}{\alpha T_1} \right) \frac{1}{\alpha T_1}}{\left( 1 - \frac{\dot{Q}_1}{\alpha T_1} \right)^2} = 0 \\ &\Rightarrow \left( \eta_C - \frac{2\dot{Q}_1}{\alpha T_1} \right) \left( 1 - \frac{\dot{Q}_1}{\alpha T_1} \right) + \left( \eta_C \dot{Q}_1 - \frac{\dot{Q}_1^2}{\alpha T_1} \right) \frac{1}{\alpha T_1} = 0, \end{aligned}$$

de donde, al realizar los productos indicados, se tiene la ecuación cuadrática para la variable  $\dot{Q}_1$

$$\frac{\dot{Q}_1^2}{\alpha^2 T_1^2} - \frac{2\dot{Q}_1}{\alpha T_1} + \eta_C = 0 \Rightarrow \dot{Q}_1^2 - \alpha T_1 \dot{Q}_1 + \alpha^2 T_1^2 \eta_C = 0, \quad (2.B.7)$$

cuya solución es

$$\dot{Q}_1 = \alpha T_1 (1 \pm \sqrt{1 - \eta_C}). \quad (2.B.8)$$

Para la expresión anterior, en el caso de la resta, se encuentra que  $P$  tiene un extremo máximo, en efecto, al calcular la segunda derivada se tiene

$$\frac{d^2 P}{d \dot{Q}_1^2} = \frac{\left( \frac{2\dot{Q}_1}{\alpha^2 T_1^2} - \frac{2}{\alpha T_1} \right) \left( 1 - \frac{\dot{Q}_1}{\alpha T_1} \right) - \left( \frac{\dot{Q}_1^2}{\alpha^2 T_1^2} - \frac{2\dot{Q}_1}{\alpha T_1} + 1 - \frac{T_2}{T_1} \right) \left( -\frac{2}{\alpha T_1} \right)}{\left( 1 - \frac{\dot{Q}_1}{\alpha T_1} \right)^3}. \quad (2.B.9)$$

Pero, el segundo producto del numerador en (2.B.9) es la misma (2.B.7) y

$$1 - \frac{\dot{Q}_1}{\alpha T_1} = 1 - \frac{\alpha T_1}{\alpha T_1} \left( 1 - \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \right) = 1 - 1 + \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} > 0,$$

$$\frac{2\dot{Q}_1}{\alpha^2 T_1^2} - \frac{2}{\alpha T_1} = \frac{2\alpha T_1}{\alpha^2 T_1^2} \left( 1 - \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \right) - \frac{2}{\alpha T_1} = \frac{2}{\alpha T_1} \left( 1 - \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} - 1 \right) < 0,$$

de donde se obtiene  $\frac{d^2 P}{d \dot{Q}_1^2} < 0$ , lo que implica que  $P$  tiene un máximo en el valor de  $\dot{Q}_1$  dado en (2.B.7).

## 2.C. Cálculo de los coeficientes de la serie para $z=z(\varepsilon, \lambda)$ en potencias de $\lambda$ .

El procedimiento que se desarrolla para obtener los coeficientes  $a_0, a_1, a_2, \dots, etc$ , de la expresión (2.38) es el mismo que se sigue para hallar los coeficientes  $b_0, b_1, b_2, \dots, etc$ . de la expresión (2.49).

Calcúlense las derivadas sucesivas implícitas de (2.37), despejando la derivada correspondiente en cada término.

Puesto que

$$(z^2 - \varepsilon)(1 + \lambda \ln z) = \lambda(z - \varepsilon)(1 - z) \text{ y } z = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + \dots, \quad (2.C.1)$$

para obtener  $a_0$  basta evaluar en  $\lambda = 0$  las dos expresiones (2.C.1), de manera que se tiene, de la primera expresión,

$$z^2 - \varepsilon = 0 \Rightarrow z = \pm\sqrt{\varepsilon} \Rightarrow z = \sqrt{\varepsilon}, \text{ para } 0 \leq \varepsilon \leq 1,$$

y, de la segunda expresión,

$$z = a_0 \therefore a_0 = \sqrt{\varepsilon}.$$

Para el segundo coeficiente calcúlese la primera derivada respecto de  $\lambda$ , para  $\varepsilon$  constante, en las mismas expresiones (2.C.1), obteniendo de la primera,

$$\frac{dz}{d\lambda} = \frac{(z - \varepsilon)(1 - z) - (z^2 - \varepsilon) \ln z}{2z(1 + \lambda \ln z) + \frac{\lambda}{z}(z^2 - \varepsilon) - \lambda[(1 - z) - (z - \varepsilon)]},$$

que al ser evaluada en  $\lambda = 0$ , con  $z(\lambda = 0) = \sqrt{\varepsilon}$ , se tiene

$$\frac{dz}{d\lambda}(\lambda = 0) = \frac{(\sqrt{\varepsilon} - \varepsilon)(1 - \sqrt{\varepsilon})}{2\sqrt{\varepsilon}} = \frac{\sqrt{\varepsilon}(1 - \sqrt{\varepsilon})(1 - \sqrt{\varepsilon})}{2\sqrt{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{\varepsilon})^2,$$

y puesto que de la segunda expresión (2.C.1) se tiene  $\frac{dz}{d\lambda}(\lambda = 0) = a_1$ ,

se encuentra que

$$a_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{\varepsilon})^2.$$

Los coeficientes subsiguientes se obtienen de la misma manera, encontrándose que todos cumplen con  $0 \leq a_i \leq 1$ ,  $i=0,1,2,\dots$ , para  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ .

**2.D. Existe  $\dot{Q}_1$  tal que  $E=P-T_2\sigma$  tiene un extremo máximo en  $0 < \frac{T_2}{T_1} < 1$ .**

De manera semejante a como se construyó  $P$  en el Apéndice 2.B, es posible construir la función ecológica,  $E$ , para la variable  $\dot{Q}_1$ , de tal manera que se encuentre un valor de dicha variable para el cual  $E$  tendrá un máximo para  $0 < \frac{T_2}{T_1} < 1$ . En el caso de  $P$  se encuentra  $\dot{Q}_1$

como función de  $\eta_{CAN}$ , pero en el caso de la función ecológica sería necesario analizar el ciclo completo, de manera de obtener ahora una función de  $\eta_E$ . La prueba de que dicha función tiene un extremo máximo en el valor de  $\dot{Q}_1$  encontrado no pierde generalidad. Pártase de construir, con el mismo modelo usado en el Apéndice 2.B, la forma que tendrá  $E$  a partir de su definición, dada en (0.2).

Ahora  $\sigma = \frac{\Delta S}{t_1}$ , de manera que la función ecológica se puede escribir como

$$E = P - T_2 \frac{\dot{Q}_1}{t_1}, \quad (2.D.1)$$

o bien, substituyendo (2.B.6)

$$E = \frac{\eta_C \dot{Q}_1 - \frac{\dot{Q}_1^2}{\alpha T_1}}{1 - \frac{\dot{Q}_1}{\alpha T_1}} + \frac{T_2}{T_1} \dot{Q}_1 = \frac{(\eta_C + \frac{T_2}{T_1}) \dot{Q}_1 - \frac{1}{\alpha T_1} (1 + \frac{T_2}{T_1}) \dot{Q}_1^2}{1 - \frac{\dot{Q}_1}{\alpha T_1}}. \quad (2.D.2)$$

La derivada primera respecto a  $\dot{Q}_1$  permite obtener la ecuación cuadrática, para ésta variable,

$$\left(1 + \frac{T_2}{T_1}\right) \dot{Q}_1^2 - 2\left(1 + \frac{T_2}{T_1}\right) \alpha T_1 \dot{Q}_1 + \alpha^2 T_1^2 = 0,$$

cuya solución es

$$\dot{Q}_1 = \alpha T_1 \pm \alpha T_1 \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \frac{T_2}{T_1}}} = \alpha T_1 \left(1 \pm \sqrt{\frac{\frac{T_2}{T_1}}{1 + \frac{T_2}{T_1}}}\right). \quad (2.D.3)$$

La segunda derivada de  $E$  respecto de  $\dot{Q}_1$  permite obtener, al substituir (2.D.3),

$$\left. \frac{d^2 E}{d \dot{Q}_1^2} \right|_{\dot{Q}_1} = \frac{\left[ \left(1 + \frac{T_2}{T_1}\right) \frac{2 \dot{Q}_1}{\alpha^2 T_1^2} - 2 \frac{1 + \frac{T_2}{T_1}}{\alpha T_1} \right]}{\left(1 - \frac{\dot{Q}_1}{\alpha T_1}\right)^2} = \frac{\left(1 + \frac{T_2}{T_1}\right) \frac{2}{\alpha^2 T_1^2} \left(\frac{\dot{Q}_1}{\alpha T_1} - 1\right)}{\left(1 - \frac{\dot{Q}_1}{\alpha T_1}\right)^2},$$

y puesto que

$$\left[ \frac{\dot{Q}_1}{\alpha T_1} - 1 \right]_{\dot{Q}_1} = \frac{\alpha T_1 \left( 1 - \sqrt{\frac{T_2/T_1}{1+T_2/T_1}} \right)}{\alpha T_1} - 1 = -\sqrt{\frac{T_2/T_1}{1+T_2/T_1}} < 0,$$

se puede afirmar que

$$\frac{d^2 E}{d \dot{Q}_1^2} < 0$$

garantiza la existencia de un máximo para  $E$  en el valor obtenido de  $\dot{Q}_1$ .

### Capítulo 3. Eficiencia con Ley de Dulong y Petit

En los sistemas térmicos existen básicamente tres formas de transferencia de calor: conducción, convección y radiación. Para cada una de ellas existe una forma de expresar la rapidez de pérdida de calor de un cuerpo; esto es, la transferencia de calor de un cuerpo caliente hacia otro cuerpo menos caliente. En el caso de la ley de enfriamiento de Newton, esta rapidez fue descrita originalmente como la razón de calor perdido por unidad de área  $A$ , de un sistema a temperatura  $T$  al introducirlo a un ambiente a temperatura  $T_0$ , de manera que se obtiene la expresión

$$\frac{1}{A} \frac{dQ}{dt} = \alpha(T - T_0), \quad (3.1)$$

que es esencialmente la ecuación (1.1). La constante  $\alpha$  es un coeficiente de transferencia de calor, que depende del material del medio que separa al sistema del medio ambiente e independiente de la temperatura, en el caso de que el enfriamiento sea producido por capas de aire, adheridas al cuerpo. Se tiene así un enfriamiento forzado producido por corrientes de convección más corrientes externas. Pero, si el enfriamiento se produce por radiación y por contacto con los alrededores, el modelo matemático más adecuado es el propuesto por Pierre Dulong y Alexis Petit, en 1818 [43], que en forma general está dado por

$$\frac{1}{A} \frac{dQ}{dt} = C_T^*(T - T_0)^k. \quad (3.2)$$

La constante  $C_T^*$  es el correspondiente coeficiente de transferencia de calor. Ahora interesa construir la potencia, la producción de entropía y la función ecológica para un ciclo de Curzon y Ahlborn con transferencia de calor finita en sus ramas isotérmicas, en la forma expresada por (3.2). En la primera sección se hallarán dichas cantidades, potencia, producción de entropía y función ecológica, en forma general a partir de (3.2); y en las siguientes secciones se analiza el caso  $k = 5/4$ , tanto para la maximización de la función ecológica como para maximización de la potencia de salida, buscando en ambos casos obtener expresiones algebraicas para la eficiencia, y no sólo obtener numéricamente valores particulares de ella. Se realizarán comparaciones gráficas.

### 3.1 Forma general de la función ecológica para $k > 1$ .

Supóngase que entre un sistema dado sus alrededores ocurre la transferencia de calor expresada por

$$\frac{dQ}{dt} = \alpha(T_f - T_i)^k; \quad (3.3)$$

y en particular supóngase que el sistema y sus alrededores están representados por el ciclo de Curzon y Ahlborn, donde  $\frac{dQ}{dt}$  es la rapidez de transferencia de la cantidad de calor  $Q$ .

De la primera ley de la termodinámica y de (3.3) se obtienen, para los procesos isotérmicos, los tiempos  $t_1$  y  $t_3$  y los calores  $Q_1$  y  $Q_2$  dados por

$$t_1 = \frac{RT_{1w}}{\alpha(T_1 - T_{1w})^k} \ln \frac{V_2}{V_1} \quad \text{y} \quad t_3 = \frac{RT_{2w}}{\alpha(T_{2w} - T_2)^k} \ln \frac{V_3}{V_4}, \quad (3.4)$$

$$Q_1 = RT_{1w} \ln \frac{V_2}{V_1} \quad \text{y} \quad Q_2 = RT_{2w} \ln \frac{V_4}{V_3}. \quad (3.5)$$

Para los procesos adiabáticos, con  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ , los tiempos de duración se toman como

$$t_2 = \frac{RT_{1w}}{\alpha(T_1 - T_{1w})^k (\gamma - 1)} \ln \frac{T_{1w}}{T_{2w}} \quad \text{y} \quad t_4 = \frac{RT_{2w}}{\alpha(T_2 - T_{2w})^k (\gamma - 1)} \ln \frac{T_{1w}}{T_{2w}}, \quad (3.6)$$

de manera semejante a como se hizo en el caso de la ley de transferencia de Newton, en los capítulos anteriores. Así, la potencia queda expresada en la forma

$$P = \frac{W}{t_{tot}} = \frac{\alpha(T_{1w} - T_{2w}) \left( \ln \frac{V_3}{V_1} + \frac{1}{\gamma - 1} \ln \frac{T_{2w}}{T_{1w}} \right)}{\ln \frac{V_3}{V_1} \left[ \frac{T_{1w}}{(T_1 - T_{1w})^k} + \frac{T_{2w}}{(T_{2w} - T_2)^k} \right]}, \quad (3.7)$$

o bien, con las variables  $z, u$  utilizadas en el capítulo 2,

$$P = \frac{T_1^k \alpha (1 - z) (1 + \lambda \ln z)}{\frac{1}{(1 - u)^k} + \frac{z}{(zu - \varepsilon)^k}}. \quad (3.8)$$

La producción de entropía, por su parte, queda como

$$\sigma = \alpha \frac{(\ln \frac{V_3}{V_1} + \frac{1}{\gamma-1} \ln \frac{T_{2w}}{T_{1w}}) (\frac{T_{1w}}{T_1} - \frac{T_{2w}}{T_2})}{(\ln \frac{V_3}{V_1}) \left[ \frac{T_{1w}}{(T_1 - T_{1w})^k} + \frac{T_{2w}}{(T_{2w} - T_2)^k} \right]}, \quad (3.9)$$

que con las mismas variables  $u$  y  $z$  utilizadas en (3.8) tiene la forma,

$$\sigma = \frac{\alpha T_1^k (1 + \lambda \ln z)(z - \varepsilon)}{T_2 \left[ \frac{1}{(1-u)^k} + \frac{z}{(zu - \varepsilon)^k} \right]}, \quad (3.10)$$

y, por consiguiente, la función ecológica (0.3) queda expresada por

$$E = \frac{T_1^k \alpha (1 + \lambda \ln z)(1 + \varepsilon - 2z)}{\frac{1}{(1-u)^k} + \frac{z}{(zu - \varepsilon)^k}}. \quad (3.11)$$

El paso siguiente, análogo a lo hecho en la sección 2.2 es maximizar la función  $E = E(u, z)$ , de donde se obtiene la relación entre las variables  $u$  y  $z$ , dada por las expresiones

$$u = \left( z^{\frac{2}{k+1}} + \varepsilon \right) \left( z + z^{\frac{2}{k+1}} \right)^{-1}; \quad (3.12)$$

$$\frac{[(1 + \varepsilon - 2z)\lambda - 2z(1 + \lambda \ln z)](zu - \varepsilon)}{z(1 + \lambda \ln z)(1 + \varepsilon - 2z)(zu - \varepsilon - zuk)} = \frac{(1-u)^k}{(zu - \varepsilon)^k + z(1-u)^k}. \quad (3.13)$$

Substituyendo (3.12) en (3.13) se obtiene la expresión

$$[-2(1 + \lambda \ln z)z + (1 + \varepsilon - 2z)\lambda](z^2 + z^{\frac{k+3}{k+1}})(z - \varepsilon) \quad (3.14a)$$

$$- z(1 + \lambda \ln z)(1 + \varepsilon - 2z) \left[ z^{\frac{k+3}{k+1}} - \varepsilon z^{\frac{2}{k+1}} - (z^{\frac{k+3}{k+1}} - z\varepsilon)k \right] = 0,$$

que relaciona a la variable  $z$  con los parámetros  $\varepsilon$  y  $\lambda$ , donde el exponente  $k$  queda involucrado de manera que, para algún valor de él, se obtengan soluciones analíticas para la variable  $z$ . Como se puede apreciar, no es fácil hallar una solución analítica de la ecuación (3.14a) cuando  $k$  es un número fraccionario, y es por ello que Angulo-Brown y colaboradores buscaron soluciones numéricas. Angulo-Brown y Páez-Hernández (1993) [36] maximizaron la potencia y hallaron expresiones equivalentes a (3.12) y (3.13), las

expresiones (44) en su trabajo, que resueltas numéricamente les permitieron obtener parte de la Tabla comparativa 3.1. También Arias-Hernández y Angulo-Brown (1997) [37] utilizaron soluciones numéricas para verificar la relación de semisuma de la eficiencia ecológica. Ahora se tiene, además, un parámetro  $\lambda$  en función de la relación de compresión que, como puede observarse de (2.31), debe estar dentro de un intervalo (0,1).

La expresión (3.14a), para el valor  $k = 5/4$  substituido sólo en los exponentes de  $z$ , puede escribirse como

$$\begin{aligned} & [-2(1 + \lambda \ln z)z + (1 + \varepsilon - 2z)\lambda](z^2 + z^{\frac{17}{9}})(z - \varepsilon) \\ & - z(1 + \lambda \ln z)(1 + \varepsilon - 2z) \left[ z^{\frac{17}{9}} - \varepsilon z^{\frac{8}{9}} - (z^{\frac{17}{9}} - z\varepsilon)k \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.14b)$$

Por otro lado, en las secciones anteriores se ha observado que la función  $z = z(\frac{T_2}{T_1})$  es una función cuadrática; es natural buscar la manera de que la variable  $z$  en (3.14) se pueda escribir como un parámetro en una relación cuadrática, junto con el parámetro  $\varepsilon$ , para algún  $k$  dado.

### 3.2 Eficiencia ecológica en forma analítica.

Respecto al exponente  $k$ , tanto Lorentz (1880) [44] como Langmuir (1910) [45] expusieron suficiente evidencia experimental como para considerar al parámetro  $C_T$  proporcional a  $(T - T_0)^{\frac{1}{4}}$ . De aquí algunos autores sugieren que el exponente  $k$  en (3.3) debe ser un número tal que cumpla  $1.3 \leq k \leq 1.6$ , Taylor (1959) [46] entre otros, pero Nelkon y Parker (1977) [47] sugieren un valor más preciso:  $k = \frac{5}{4}$ ; que es el valor que se usará en lo que sigue en la expresión (3.3). Volviendo a la expresión (3.14a), obsérvese que los exponentes no lineales de  $z$ , para el valor sugerido de  $k$ ,  $k = \frac{5}{4}$ , son respectivamente,

$$\frac{\frac{5}{4}+3}{\frac{5}{4}+1} = \frac{17}{9} \quad \text{y} \quad \frac{2}{\frac{5}{4}+1} = \frac{8}{9}. \quad (3.15)$$

Estos valores en los exponentes de  $z$  en (3.14b), dando valores a  $\varepsilon$  en fracciones de la unidad, llevan a soluciones numéricas de  $z$  para  $\lambda=0$  y  $\lambda=1$ , que corresponden a los

casos límite  $V_{m\acute{a}x} \gg V_{m\acute{i}n}$  y  $V_{m\acute{a}x} = V_{m\acute{i}n}$ ; de modo que realizando aproximaciones cuadráticas con estas soluciones, en el plano de coordenadas  $(\varepsilon, z)$ , se obtiene la figura 3.1. Cualquier otra solución de  $z = z(\lambda)$ , que cumpla  $0 \leq \lambda \leq 1$ , da una curva aproximada como éstas y estará dentro de la región comprendida por ellas, en el plano  $(\varepsilon, z)$

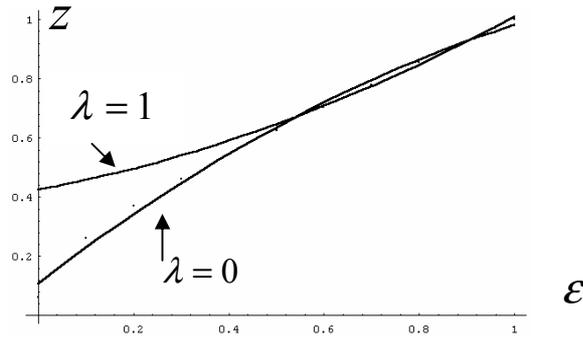


Figura 3.1. Aproximaciones cuadráticas de  $z$  como función de  $\varepsilon$ , para los valores extremos  $\lambda = 0$  y  $\lambda = 1$

Aproximaciones sencillas, aunque muy gruesas, en los exponentes de  $z$  en (3.14b) permiten obtener soluciones analíticas, numéricamente aceptables. Sean estas aproximaciones,

$$\frac{\frac{5}{4} + 3}{\frac{5}{4} + 1} \cong 2 \quad \text{y} \quad \frac{2}{\frac{5}{4} + 1} \cong 1, \quad (3.16)$$

se obtiene así la expresión,

$$\begin{aligned} & 2[-2(1 + \lambda \ln z)z + (1 + \varepsilon - 2z)\lambda](z - \varepsilon) \\ & - (1 + \lambda \ln z)(1 + \varepsilon - 2z)[(z - \varepsilon) - (z + \varepsilon)k] = 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

que en el límite  $\lambda = 0$  lleva a la expresión explícita para la función  $z = z(\varepsilon, k)$

$$z = \frac{(k-1)(1-\varepsilon) \pm \sqrt{(1-\varepsilon)^2(1-k)^2 + 8(1+k)^2(\varepsilon + \varepsilon^2)}}{4(1+k)}, \quad (3.18)$$

y para el caso  $k = 5/4$  se tiene la raíz físicamente aceptable  $z_{ODP} = z(\varepsilon, k = 5/4)$ ,

$$z_{ODP} = \frac{1 - \varepsilon + \sqrt{649\varepsilon^2 + 646\varepsilon + 1}}{36}. \quad (3.19a)$$

La Figura 3.2 muestra la gráfica de (3.19a), comparada con las aproximaciones cuadráticas de (3.14) para los valores  $\lambda = 0.5$  y  $\lambda = 1$ , líneas grises, con  $k = 5/4$ .

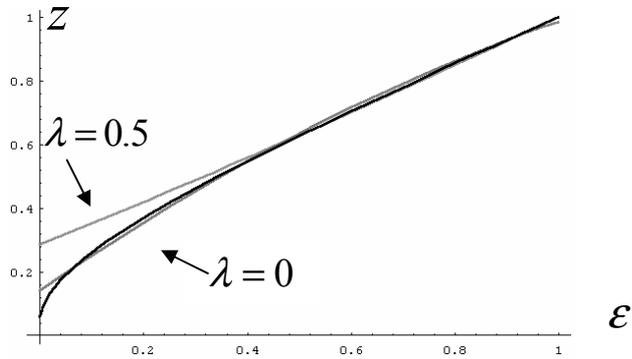


Figura 3.2 Aproximación cuadrática de  $z$  a orden cero,  $z(\lambda = 0) = z_{OPDP}$ , representada por la línea negra.

La raíz negativa de (3.18) no tiene significado físico, pues la eficiencia de una máquina térmica tiene que ser positiva. Los resultados numéricos para la eficiencia definida por (2.4), que ahora se llamará  $\eta_{EDP}$ ,

$$\eta_{EDP} = 1 - z_{ODP}, \quad (3.19b)$$

se muestran en la Tabla 3.1, comparados con los resultados de Angulo-Brown y colaboradores. Además, la Figura 3.3 muestra la diferencia entre la eficiencia  $\eta_{EDP}$  y la hallada para el caso de la ley de transferencia de Newton, (2.53), observándose la diferencia entre estas expresiones, y que se cumple  $\eta_{EDP} \leq \eta_E$  en el intervalo  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ .

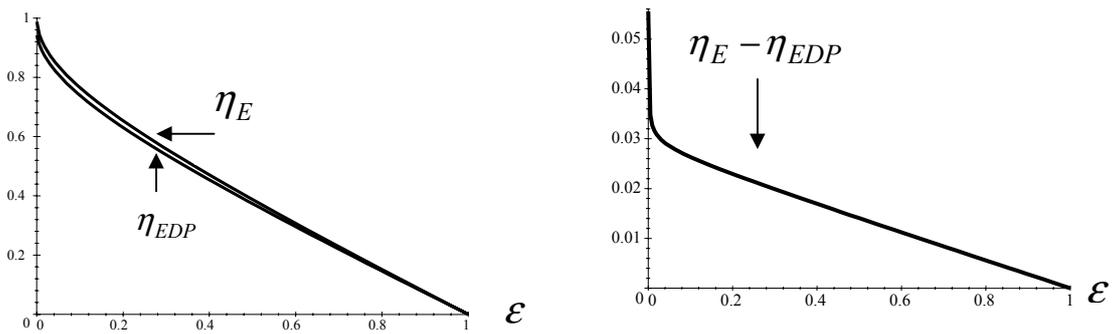


Figura 3.3 Comparación entre la eficiencia a función ecológica máxima con ley de Newton,  $\eta_E$ , y con ley de Dulong y Petit,  $\eta_{EDP}$ .

Por otro lado, si se supone, como para el caso de ley de transferencia de Newton, que  $z$  en la ecuación (3.17) se puede escribir como una serie de potencias en el parámetro  $\lambda$ , se encuentra también que la eficiencia se puede escribir como

$$\eta_{DP} = 1 - z_{DP}(\varepsilon, \lambda) \quad (3.20)$$

donde

$$z_{DP}(\varepsilon, \lambda) = z_{ODP}(1 + c_1(\varepsilon)\lambda + c_2(\varepsilon)\lambda^2 + O(\lambda^3)), \quad (3.21)$$

siendo los primeros dos coeficientes

$$c_1(\varepsilon) = \frac{-2z_{ODP} + 2\varepsilon - 6z_{ODP}\varepsilon + 2\varepsilon^2 4z_{ODP}^2}{z_{ODP}(-9z_{ODP} - \frac{1}{4}\varepsilon + \frac{1}{4})} \quad (3.22)$$

$$c_2 = \frac{1}{2z_{ODP}}(A_1(\varepsilon) + A_2(\varepsilon)), \quad (3.23)$$

con

$$A_1(\varepsilon) = \frac{4c_1}{(1 - \varepsilon - 20z_{ODP})} \left\{ -160(z_{ODP} - \varepsilon)(1 + \varepsilon - 2z_{ODP}) + [(-36z_{ODP} + 9\varepsilon + 1)\ln z_{ODP} - 18z_{ODP} + 9\varepsilon + 1 + \frac{9(\varepsilon^2 + \varepsilon)}{z_{ODP}} + 8(1 + \varepsilon - 2z_{ODP}) - 16(z_{ODP} - \varepsilon)](-1 + \varepsilon + 20z_{ODP}) \right\}$$

y

$$A_2(\varepsilon) = -\frac{8(z_{ODP} - \varepsilon)(1 + \varepsilon - 2z_{ODP})}{(1 - \varepsilon - 20z_{ODP})^2} [(36z_{ODP} + \varepsilon - 1)\ln z_{ODP} + 48z_{ODP} - 40\varepsilon - 8 + \frac{1 + \varepsilon - 2z_{ODP}}{z_{ODP}}(z_{ODP} + 9\varepsilon)].$$

Estos coeficientes han sido obtenidos de la misma manera que los coeficientes en (2.37) y (2.48). En todos los casos son siempre positivos y decrecientes en algún intervalo donde  $0 < \varepsilon < 1$ , además de ser valores pequeños, como puede observarse en las gráficas de la Figura 3.4. El valor numérico y el comportamiento decreciente de estos coeficientes, en  $0 < \varepsilon < 1$ , garantiza la convergencia de la serie (3.21), y consecuentemente la serie que se obtiene de (3.20)

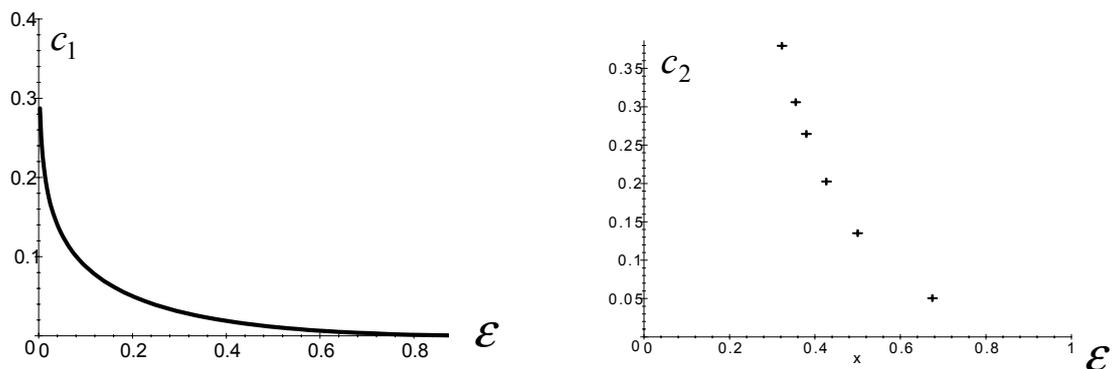


Figura 3.5 Comportamiento de los valores de los dos primeros coeficientes de la serie (3.21)

Los resultados numéricos de la eficiencia  $\eta_{MEDP}$ , para las plantas térmicas convencionales, reportadas por Angulo-Brown y col., comparados con los que se obtienen evaluando  $\eta_{EDP}$  se muestran en la Tabla 3.1, donde se observa que en (3.18) basta dar un valor adecuado a  $k$  para obtener la eficiencia para una ley de transferencia del tipo (3.3), con cualquier valor de  $k$  mayor que 1 y de tamaño suficiente para que puedan ser válidas las aproximaciones (3.16) o alguna otra semejante, como en la tercer planta reportada. Además, un ajuste con los valores de  $\eta_{MEDP}$  a una curva cuadrática, a saber,  $0.8 - 0.9776\epsilon + 0.18\epsilon^2$ , semejante a la obtenida para  $\eta_{EDP}$ , permite construir las gráficas comparativas de la Figura 3.6, para el parámetro variable  $\epsilon$ . Obsérvese que existe un intervalo de valores de  $\epsilon$  en el que prácticamente  $\eta_{EDP}$  y  $\eta_{MEDP}$  tienen el mismo valor numérico.

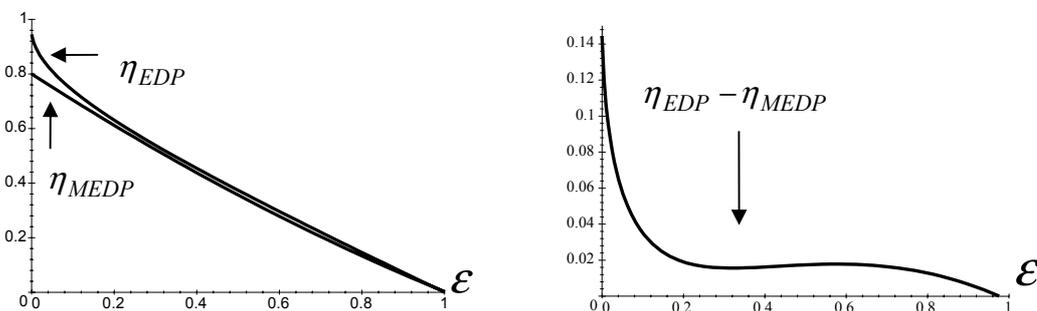


Figura 3.6 Comparación entre los valores numéricos de  $\eta_{MEDP}$ , ajustados a una cuadrática, obtenidos por Angulo-Brown y col. y  $\eta_{EDP}$  obtenida como aproximación al maximizar (3.11).

Tabla 3.1 Comparación de las eficiencias calculadas numéricamente por Angulo-Brown y col.,  $\eta_{MEDP}$ , con las eficiencias obtenidas con las aproximaciones de los exponentes (3.16),  $\eta_{EDP}$ .

Planta	$T_2$ (K)	$T_1$ (K)	$k$	$\eta_{MEDP}$	$\eta_{EDP}$
Planta convencional de vapor por carbón quemado, West Thurrock , 1962.	298	838	5/4	0.49	0.49134
Planta geotérmica de vapor, Lardarello, Italia, 1964	353	523	5/4	0.239	0.23905
Planta central de potencia a vapor, R. U. 1936-1940	298	698	1.55	0.416	0.41627
Planta de potencia de vapor, E. U. A. 1956	298	923	5/4	0.52	0.51857
Planta de ciclo combinado (vapor y mercurio), E. U. A. 1949.	298	783	5/4	0.47	0.47043

En la Tabla 3.2 se comparan las eficiencias de plantas núcleo-eléctricas, reportadas por Velasco y col.,  $\eta_{opt}$ , con los valores obtenidos al evaluar  $\eta_{EDP}$ , donde se observa que se cumple  $\eta_{obs} < \eta_{EDP} < \eta_{opt}$ , de manera que se obtiene un valor de la eficiencia más cercano al valor observado en cada planta.

Tabla 3.2 Comparación de los valores de eficiencias para las plantas núcleo-eléctricas, reportadas por Velasco y col., con los que se obtiene con la expresión aproximada  $\eta_{EDP}$  en este trabajo.

Planta	$T_2$ (K)	$T_1$ (K)	$\eta_{EDP}$	$\eta_{opt}$	$\eta_{obs}$
Planta nuclear de potencia Doel 4 (Bélgica), 1985.	283	566	0.37358	0.40500	0.35000
Planta nuclear, reactor sobrecargado Almaraz II España	290	600	0.38675	0.42000	0.34500
Planta nuclear, reactor sobrecargado Sizewell B, R. U..	288	581	0.37697	0.41000	0.36300
Planta nuclear Cofrentes, España	289	562	0.36239	0.39300	0.34000
Planta nuclear Heysham, reactor avanzado enfriado con gas, R. U.	288	727	0.45709	0.501	0.40000

Por otro lado, puesto que para el caso de Ley de Newton se verifica que se cumple la relación de semisuma (0.3), y Angulo-Brown y colaboradores han hallado numéricamente que dicha propiedad se cumple para la Ley de Dulong y Petit, en la siguiente sección se analiza la eficiencia para la maximización de la potencia de salida de la máquina, a fin de

obtener una expresión aproximada, en forma analítica, para dicha propiedad, que debe ser cercana a  $\eta_{EDP}$ .

### 3.3 Maximización de la potencia de salida.

En la sección anterior se mostró que es posible utilizar una reducción aproximada de los exponentes de la función  $z$ , en la relación que resulta de resolver el sistema obtenido de la maximización de la función ecológica. Ello permitió obtener una forma analítica de la eficiencia ecológica, cuyos valores numéricos resultan muy cercanos a los valores obtenidos numéricamente por Angulo-Brown y colaboradores. Ellos también encontraron numéricamente valores de la semisuma para las eficiencias  $\eta_C$  y  $\eta_{MP}$ , correspondiente a la maximización de la potencia [36, 37], y que se sigue cumpliendo la propiedad

$$\eta_{ME} \approx \frac{1}{2}(\eta_C + \eta_{MP}). \quad (3.24)$$

Ahora se mostrará que utilizando aproximaciones apropiadas, semejantes a (3.16), y suponiendo que la transferencia de calor ocurre como indica la ley de transferencia de calor de Dulong y Petit, es posible escribir una forma analítica para la relación de semisuma, ecuación (0.3), muy cercana a la eficiencia ecológica, de manera semejante a como ocurre con la ley de transferencia de Newton. Para lograr este objetivo, se hace necesario hallar la expresión de la eficiencia a potencia máxima, con la ley de transferencia de Dulong y Petit. Partiendo de la expresión de la potencia (3.8), y maximizando esta expresión se encuentran relaciones para  $u$  y  $z$ , que permiten llegar al objetivo arriba planteado. Maximizar la potencia en (3.8) equivale a resolver el sistema de ecuaciones que se obtiene de  $\frac{\partial P}{\partial u} = 0$  y  $\frac{\partial P}{\partial z} = 0$ , esto es,

$$(zu - \varepsilon)^{k+1} - z^2(1-u)^{k+1} = 0, \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} &[-z(1 + \lambda \ln z)(zu - \varepsilon) + \lambda(1-z)(zu - \varepsilon) + zku(1-z)(1 + \lambda \ln z)]((zu - \varepsilon)^k + z(1-u)^k) \\ &- z(1-z)(1 + \lambda \ln z)(zu - \varepsilon)(uk(zu - \varepsilon)^{k-1} + (1-u)^k) = 0, \end{aligned} \quad (3.26)$$

de donde se obtiene, resolviendo (3.25) para  $u = u(z)$ ,

$$u = \frac{z^{\frac{2}{k+1}} + \varepsilon}{z + z^{\frac{2}{k+1}}}. \quad (3.27)$$

Al substituir (3.77) en (3.26) se encuentra la relación para  $z = z(\varepsilon, \lambda, k)$ ,

$$\left[ z^{\frac{2}{k+1}}(z - \varepsilon)(\lambda(1 - z) - z(1 + \lambda \ln z)) + zk(z^{\frac{2}{k+1}} + \varepsilon)(1 - z)(1 + \lambda \ln z) \right] (z^{\frac{2k}{k+1}} + z) - z(1 - z)(1 + \lambda \ln z) \left[ z^2 + \varepsilon z^{\frac{2k}{k+1}} + z^{\frac{2}{k+1}}(z - \varepsilon) \right] = 0. \quad (3.28)$$

Nótese que los exponentes de  $z$  en (3.28), en el valor  $5/4$  del parámetro  $k$ , quedan como

$$\frac{2}{\frac{5}{4} + 1} = \frac{8}{9} \quad \text{y} \quad \frac{2(\frac{5}{4})}{\frac{5}{4} + 1} = \frac{10}{9}, \quad (3.29)$$

ambos con una diferencia de alrededor de 10% respecto a 1. Entonces, de manera semejante al caso de maximización de la función ecológica, se puede utilizar una aproximación gruesa de la forma

$$\frac{2}{\frac{5}{4} + 1} \approx 1 \quad \text{y} \quad \frac{2(\frac{5}{4})}{\frac{5}{4} + 1} \approx 1, \quad (3.30)$$

en la expresión que se obtiene a partir de (3.28). Para el caso límite  $\lambda = 0$ , (3.28) se reduce primero a

$$\left[ -z^{\frac{2}{k+1}}(z - \varepsilon) + k(z^{\frac{2}{k+1}} + \varepsilon)(1 - z) \right] (z^{\frac{2k}{k+1}} + z) - (1 - z) \left[ z^2 + \varepsilon z^{\frac{2k}{k+1}} + z^{\frac{2}{k+1}}(z - \varepsilon) \right] = 0, \quad (3.31)$$

y, con la substitución de las aproximaciones (3.30), se obtiene una expresión cuadrática cuya solución es, para  $z = z(\varepsilon, k)$ ,

$$z(\varepsilon, k) = \frac{(k - 1)(1 - \varepsilon) \pm \sqrt{(\varepsilon - 1)^2(1 - k)^2 + 4k^2\varepsilon}}{2k}. \quad (3.32)$$

Puesto que  $k > 1$ , y que el negativo de la raíz en (3.32) da una solución físicamente no aceptable, se tiene la solución

$$z(\varepsilon, k) = \frac{(k - 1)(1 - \varepsilon) + \sqrt{(\varepsilon - 1)^2(1 - k)^2 + 4k^2\varepsilon}}{2k}. \quad (3.33)$$

La substitución de  $k = 5/4$  en (3.33) permite obtener una expresión más simple para  $z$ , que llamaremos  $z_{OPDP}$ , como función solamente del parámetro  $\varepsilon$ ,

$$z_{OPDP} = \frac{1 - \varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 98\varepsilon + 1}}{10}. \quad (3.34)$$

A partir de (3.34) es posible escribir ahora la eficiencia de orden cero (esto es con  $\lambda = 0$ ), a potencia máxima y con ley de Dulong y Petit, como

$$\eta_{OPDP} = 1 - z_{OPDP}. \quad (3.34)$$

La semisuma definida en [32] queda ahora como

$$\eta_{SDP} \equiv \frac{1}{2}(\eta_C + \eta_{OPDP}), \quad (3.35)$$

cuya comparación con  $\eta_{OPDP}$ ,  $\eta_{CAN}$ ,  $\eta_{MEDP}$  y la observada,  $\eta_{OBS}$ , para los valores de las plantas convencionales reportadas en las referencias [11, 26, 32, 36, 37], se muestra en la Tabla 3.3. Se encuentra que  $\eta_{SDP} \approx \eta_{MEDP}$ , como era de esperarse. Obsérvese que para estas plantas  $\eta_{OPDP}$  es más cercana a la observada de lo que es  $\eta_{CA}$ .

Tabla 3.3 Comparación de diversas expresiones de la eficiencia, en donde se aprecian las semisumas (3.35) y (3.36). Las temperaturas son en grados Kelvin.

<i>Power plant</i>	$T_2$	$T_1$	$\eta_C$	$\eta_{CAN}$	$\eta_{MEDP}$	$\eta_{OPDP}$	$\eta_{SDP}$	$\eta_{OBS}$
Planta convencional de vapor por carbón quemado, West Thurrock, 1962.	298	838	0.64439	0.40367	0.49	0.33577	0.49008	0.360
Planta geotérmica de vapor, Lardarello, Italia, 1964	353	523	0.32505	0.17845	0.239	0.1453	0.23517	0.160
Planta de potencia de vapor, E. U. A. 1956	298	923	0.67714	0.43179	0.52	0.36006	0.5186	0.400
Planta de ciclo combinado (vapor y mercurio), E. U. A. 1949.	298	783	0.61941	0.38308	0.47	0.31804	0.46872	0.340

Obsérvese también que para plantas núcleo-eléctricas (Tabla 3.4) se cumple

$$\eta_{EDP} \approx \frac{1}{2}(\eta_C + \eta_{OPDP}), \quad (3.36a)$$

que es muy cercana a la observada,  $\eta_{OBS} \approx \eta_{EDP}$ , con un error entre 3.7% y 12.5%. Para plantas convencionales se cumple  $\eta_{OBS} \approx \eta_{SPDP}$ , siendo  $\eta_{SPDP} \equiv \frac{1}{2}(\eta_{CAN} + \eta_{OPDP})$ ,

$$\eta_{OBS} \approx \frac{1}{2}(\eta_{CAN} + \eta_{OPDP}). \quad (3.36b)$$

Además, como se muestra en la Tabla 3.4, se encuentra que  $\eta_{opt}$  de Velasco y col. cumple

$$\eta_{OBS} < \eta_{EDP} < \eta_{opt}$$

Tabla 3.4 Comparación de las eficiencias  $\eta_{CAN}$ ,  $\eta_{OPDP}$ ,  $\eta_{EDP}$ ,  $\eta_C$  y  $\eta_{opt}$  en donde se aprecian las semisumas (3.36). Las temperaturas son en grados Kelvin.

Planta	$T_2$	$T_1$	$\eta_{CAN}$	$\eta_{OPDP}$	$\eta_{EDP}$	$\eta_C$	$\eta_{opt}$	$\eta_{OBS}$
Planta nuclear de potencia Doel 4 (Bélgica), 1985.	283	566	0.293	0.24113	0.37358	0.50000	0.40500	0.35000
Planta nuclear, reactor sobrecargado Almaraz II España	290	600	0.345	0.25119	0.38675	0.51667	0.42000	0.34500
Planta nuclear, reactor sobrecargado Sizewell B, R. U..	288	581	0.296	0.24371	0.37697	0.50430	0.41000	0.36300
Planta nuclear Cofrentes, España	289	562	0.283	0.23268	0.36239	0.48577	0.39300	0.34000
Planta nuclear Heysham, reactor avanzado enfriado con gas, R. U.	288	727	0.371	0.307322	0.45709	0.60385	0.50100	0.40000

La expresión (3.35) muestra la generalidad de la relación de semisuma, enunciada por Angulo-Brown [32], siendo además una expresión analítica de dicha propiedad, y que es cercana a  $\eta_{EDP}$  obtenida en la sección anterior. La expresión (3.36b) sugiere la manera en que realmente funcionan las plantas térmicas convencionales, pues muestra la combinación de las transferencias tipo Newton y tipo Dulong-Petit, de manera semejante a la forma propuesta por De Vos [16], o por lo menos una corrección en la expresión teórica para el cálculo de dicha eficiencia. Además (3.33) puede utilizarse para valores de  $k$  diferentes de  $5/4$ , como sucede en el caso de la eficiencia ecológica, siempre que sean valores mayores de la unidad y no muy lejanos de  $5/4$ .

De la misma manera que para la eficiencia ecológica, utilizando la ley de Newton o la ley de Dulong y Petit, y para la eficiencia de Curzon-Ahlborn-Novikov usando la ley de Newton; es posible hallar una expresión en suma de potencias de  $\lambda$  para la eficiencia, con maximización de potencia y ley de Dulong-Petit, a partir de (3.28), con las aproximaciones (3.30). Esto es, derivando implícitamente y tomando el límite para  $\lambda = 0$ , se tendrá,

$$\eta_{PDP} = 1 - z_{PDP}(\lambda, \varepsilon) = 1 - z_{OPDP}[1 + B_1(\varepsilon)\lambda + B_2(\varepsilon)\lambda^2 + O(\lambda^3)], \quad (3.37)$$

Los coeficientes  $B_j$ ,  $j=1,2,\dots,etc.$ , cumplen las mismas condiciones que para los casos anteriores. Los dos primeros son

$$B_1(\varepsilon) = \frac{16(1 - z_{OPDP})(\varepsilon - z_{OPDP})}{z_{OPDP}(5 - 4\varepsilon - 40z_{OPDP})}, \quad (3.38)$$

y

$$B_2 = \frac{4(z_{OPDP} - 1)(z_{OPDP} - \varepsilon)}{(1 + 9\varepsilon - 10z_{OPDP})^2} \left\{ \frac{[(1 - \varepsilon + 10z_{OPDP}) \ln z_{OPDP} + 8z_{OPDP} - 4\varepsilon - 4](\varepsilon + 1 - 10z_{OPDP})}{1 + 9\varepsilon - 10z_{OPDP}} - \frac{40(z_{OPDP} - 1)(z_{OPDP} - \varepsilon)}{1 + 9\varepsilon - 10z_{OPDP}} - [(9\varepsilon - 1 - 10z_{OPDP}) \ln z_{OPDP} + 4 + 4\varepsilon - 8z_{OPDP}] \right\}. \quad (3.39)$$

En las gráficas de la Figura 3.7 se observa que estos coeficientes,  $B_1$  y  $B_2$ , son positivos y decrecientes para algún intervalo  $0 < \varepsilon < 1$ , de manera que se puede afirmar la convergencia de (3.37) en ese mismo intervalo para el límite  $\lambda \rightarrow 0$

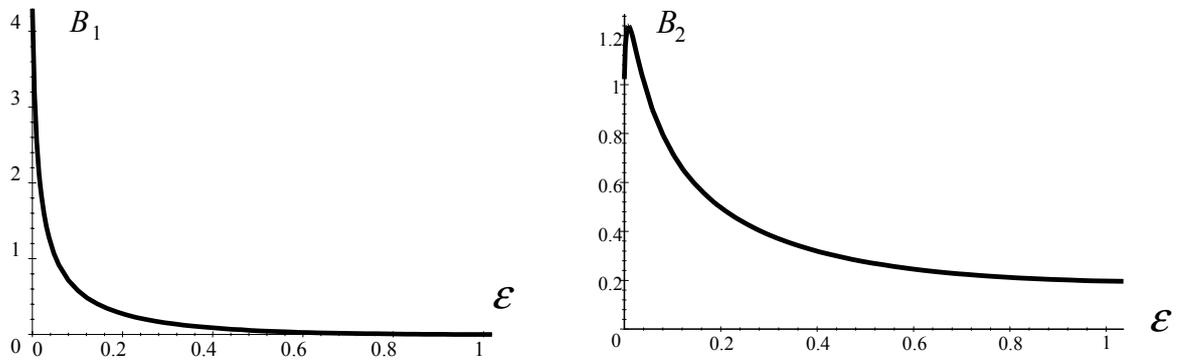


Figura 3.7 Comportamiento de los dos primeros coeficiente de la expansión de  $\eta_{PDP}$  en potencias de  $\lambda$ .

## Capítulo 4. El gas de van der Waals

Los resultados de los capítulos anteriores han sido hallados suponiendo como sustancia de trabajo un gas ideal. Sin embargo, en un contexto real, una máquina térmica trabaja con gases no ideales. En el presente capítulo se analiza la influencia que tiene en el rendimiento de la máquina al trabajar con un gas no ideal, en particular un gas de van der Waals. Se encuentra que las eficiencias a potencia máxima y a función ecológica máxima tienen la misma forma que en el caso de gas ideal, y sólo difieren en la relación de volúmenes, con las substituciones  $V_{máx} \rightarrow V_{máx} - b$  y  $V_{mín} \rightarrow V_{mín} - b$ . Utilizaremos el algoritmo desarrollado por Gutkowics-Krusin y col. (1978) [26], utilizado en los capítulos previos.

### 4.1 La ecuación de estado y la hipótesis de endorreversibilidad.

Para bajas presiones, la ecuación de estado de un gas ideal representa, con bastante aproximación, el comportamiento de los gases reales. Pero, si la presión es tal que el comportamiento del gas se aparta del de un gas ideal, la ecuación de van der Waals [48,49] describe, de manera satisfactoria, el comportamiento de muchas sustancias para un amplio intervalo de valores de temperaturas y presiones, a saber,

$$\left(p + a \frac{n^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT, \quad (4.1)$$

propuesta a partir de consideraciones de la teoría cinética y tomando en cuenta las fuerzas de cohesión entre moléculas, para  $n$  moles de sustancia. Las constantes  $a$  y  $b$  son características de cada sustancia,  $p$  es la presión,  $R$  es la constante de los gases, y  $T$  es la temperatura. Por otro lado, se sabe que para un gas ideal su energía depende sólo de la temperatura; pero para un gas real ésta depende también del volumen del sistema, en particular para un gas de van der Waals es como

$$U = C(T - T_0) - \frac{an^2}{V}, \quad (4.2)$$

siendo  $\Delta T = T - T_0$  el cambio de temperatura al volumen dado  $V$  y  $C$  la capacidad calorífica del sistema, constante. Ahora bien, considerando la variación de la energía interna respecto del cambio de volumen, se tiene,

$$dU = C_V dT + \frac{av^2}{v^2} dV. \quad (4.3)$$

De la primera ley de la Termodinámica para un proceso adiabático, con  $n = 1$ , se tiene

$$\int dU = -\int pdV \quad \text{ó} \quad \int (C_V dT + \frac{a}{v^2} dV) = -\int pdV \quad (4.4)$$

y, al substituir (4.1) en (4.4),

$$C_V \int \frac{dT}{T} = -\int R \frac{dV}{V-b}; \quad (4.5)$$

así, se puede escribir [48]

$$T(V-b)^{\frac{R}{C_V}} = \text{constante}. \quad (4.6)$$

De la expresión (4.6) se encuentra que se cumple para los procesos adiabáticos

$$\frac{V_3 - b}{V_2 - b} = \frac{V_4 - b}{V_1 - b}. \quad (4.7)$$

#### 4.2 Función potencia y función ecológica con Ley de Newton.

La forma que adquieran las expresiones de la función potencia, y la función ecológica, puede indicar la forma que debe tener la eficiencia con maximización de cada una de ellas. El interés ahora es construir estas expresiones, de manera que se vea qué diferencias hay con las halladas en los capítulos previos.

De la ecuación de estado, (4.1), y de (4.2) derivando respecto al tiempo  $t$ , suponiendo la ley de enfriamiento de Newton, se encuentra para las ramas isotérmicas,

$$\frac{RT_{iw}}{V-b} \frac{dV}{dt} = \frac{dQ_i}{dt} = (-1)^{i-1} \alpha (T_i - T_{iw}). \quad i = 1, 2 \quad (4.8)$$

Además, de (4.6) se cumple, para las ramas adiabáticas,

$$\frac{T_{1w}}{T_{2w}} = \left( \frac{V_3 - b}{V_2 - b} \right)^{\frac{R}{C_V}}, \quad \text{ó} \quad \ln \frac{V_3 - b}{V_2 - b} = \frac{C_V}{R} \ln \frac{T_{1w}}{T_{2w}} \quad (4.9a)$$

$$\frac{T_{2w}}{T_{1w}} = \left( \frac{V_1 - b}{V_4 - b} \right)^{\frac{R}{C_V}}, \quad \text{ó} \quad \ln \frac{V_1 - b}{V_4 - b} = \frac{C_V}{R} \ln \frac{T_{2w}}{T_{1w}}, \quad (4.9b)$$

y, de (4.8), los tiempos para las ramas isotérmicas del ciclo se pueden escribir como

$$t_1 = f_1 \ln \frac{V_2 - b}{V_1 - b} \quad \text{y} \quad t_3 = f_2 \ln \frac{V_3 - b}{V_4 - b}. \quad (4.10)$$

Los tiempos para las ramas adiabáticas se asumen como

$$t_2 = f_1 \ln \frac{V_3 - b}{V_2 - b} \quad \text{y} \quad t_4 = -f_2 \ln \frac{V_1 - b}{V_4 - b}, \quad (4.11)$$

como una consecuencia de la ecuación de estado de la sustancia de trabajo, con las definiciones

$$f_1 = \frac{RT_{1w}}{\alpha(T_1 - T_{1w})} \quad \text{y} \quad f_2 = \frac{RT_{2w}}{\alpha(T_{2w} - T_2)}, \quad (4.12)$$

donde  $R$  es la constante del gas y  $\alpha$  es la conductancia térmica, constante, que por simplicidad se ha supuesto igual para el calor absorbido y para el calor cedido. El tiempo total del ciclo queda dado ahora por

$$t_{tot} = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = \frac{R}{\alpha} \left( \frac{T_{1w}}{T_1 - T_{1w}} - \frac{T_{2w}}{T_2 - T_{2w}} \right) \ln \frac{V_3 - b}{V_1 - b}. \quad (4.13)$$

Consecuentemente, las expresiones para la potencia, la producción de entropía y función ecológica, utilizando (4.9), quedan como

$$P_{VW} = \frac{\alpha(T_{1w} - T_{2w}) \left( \ln \frac{V_3 - b}{V_1 - b} + \nu \ln \frac{T_{2w}}{T_{1w}} \right)}{\left( \frac{T_{1w}}{T - T_{1w}} + \frac{T_{2w}}{T_2 - T_2} \right) \ln \frac{V_3 - b}{V_1 - b}}, \quad (4.14)$$

$$\sigma_{VW} = \alpha \frac{\frac{T_1}{T_2} (1 + \lambda_{VW} \ln z) (-\varepsilon + z)}{\frac{1}{1-u} + \frac{z}{zu-\varepsilon}} \quad (4.15)$$

$$E_{VW} = \alpha T_1 \frac{(1 + \varepsilon - 2z)(1 + \lambda_{VW} \ln z)}{\frac{1}{1-u} + \frac{z}{zu-\varepsilon}} \quad (4.16)$$

donde ahora se tiene  $\lambda_{VW} = \nu \left( \ln \frac{V_3 - b}{V_1 - b} \right)^{-1}$ , con  $\nu = \frac{1}{\gamma-1}$ , y  $b$  es una constante dependiente de la sustancia. Las expresiones de la potencia, producción de entropía y función ecológica, ecuaciones (4.14), (4.15) y (4.16) son de la misma forma que para el caso de gas ideal, de esta manera las eficiencias encontradas por Gutkowics-Krusin y col. (1978), con

maximización de potencia, y la hallada en el capítulo 2, y con maximización de la función ecológica, se modifican en la forma

$$\eta_{VWP} = 1 - \left\{ \sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{\varepsilon})^2 \lambda_{VW} + \frac{1}{4}(1 - \sqrt{\varepsilon})^2 \left[ \frac{(1 - \sqrt{\varepsilon})^2}{2\sqrt{\varepsilon}} - \ln \varepsilon \right] \lambda_{VW}^2 + O(\lambda_{VW}^3) \right\} \quad (4.17)$$

$$\eta_{WEN} = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon^2)} \left\{ 1 + \left[ \frac{1}{4}(1 + 3\varepsilon) \sqrt{\frac{2}{\varepsilon + \varepsilon^2}} - 1 \right] \lambda_{VW} + \left[ \frac{1}{16}(1 + 3\varepsilon) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\varepsilon + \varepsilon^2}} \ln \sqrt{\frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon^2)} \right] \left[ 1 + 3\varepsilon - 4 \sqrt{\frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon^2)} \right] \lambda_{VW}^2 \right\} + O(\lambda_{VW}^3) \quad (4.18)$$

Los casos límite para estas expresiones son los expuestos anteriormente, pues la única diferencia entre  $\lambda$  y  $\lambda_{VW}$  es el parámetro  $b$  que depende de la substancia de trabajo.

### 4.3 Función potencia y función ecológica con Ley de Dulong y Petit.

En el caso de un ciclo de Curzon y Ahlborn, con gas de van der Waals como substancia de trabajo y ley de transferencia de calor de Dulong y Petit, la hipótesis de endorreversibilidad tiene también la forma de la ecuación (4.7), pues es independiente de la ley de transferencia de calor utilizada. Por otro lado, la energía interna del sistema, en el caso de un gas de van der Waals como substancia de trabajo, ecuación (4.2), permite escribir,

$$\frac{dU}{dt} = \frac{an^2}{V^2} \cdot \frac{dV}{dt}. \quad (4.19)$$

Además, de la primera ley de la termodinámica se sigue que,

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dQ}{dt} - p_{ext} \frac{dV}{dt} - (p - p_{ext}) \frac{dV}{dt}, \quad (4.20)$$

siendo  $p$  la presión interna del gas y  $p_{ext}$  la presión de los alrededores. Combinando las ecuaciones (4.19) y (4.20), estando el sistema en equilibrio mecánico, se tiene

$$\frac{an^2}{V^2} \frac{dV}{dt} = \frac{dQ}{dt} - p \frac{dV}{dt}, \quad (4.21)$$

de manera que, para el caso de una transferencia de calor no lineal, se tiene

$$\frac{dQ}{dt} = \alpha(T - T_0)^k, \quad (4.22)$$

con conductancia térmica constante  $\alpha$ , y exponente constante  $k$ ,  $k > 1$ , a partir de la ecuación (4.21), para un proceso isotérmico, se tiene

$$\left(\frac{an^2}{V^2} + p\right) \frac{dV}{dt} = \alpha(T - T_0)^k, \quad (4.23)$$

donde  $T$  es la temperatura del cuerpo que cede calor y  $T_0$  es la temperatura del cuerpo que recibe calor. Por simplicidad tomemos nuevamente  $n = 1$ , y substituyendo  $p$  de la ecuación de estado en (4.23) se tiene

$$\frac{RT}{V-b} \frac{dV}{dt} = \alpha(T - T_0)^k. \quad (4.24)$$

Para el intercambio de calor entre la máquina y los almacenes, la ecuación (4.22) permite obtener el tiempo para los procesos isotérmicos por simple integración. Para los procesos adiabáticos la expresión adecuada es la ecuación (4.24), además, la ecuación (4.21) se reduce a

$$\frac{dU}{dt} = -p \frac{dV}{dt}. \quad (4.25)$$

Es posible mostrar que, al evaluar el funcionamiento de una máquina de Curzon y Ahlborn, para un gas de van der Waals como sustancia de trabajo, las expansiones (3.20) y (3.47) serán de la misma forma salvo la substitución de  $\lambda_{vW}$  en lugar de  $\lambda$ , con la ley de transferencia de calor de Dulong y Petit.

En efecto, considérese una la ley de transferencia de calor como (4.22). Substituyendo en (4.24), para los procesos isotérmicos del ciclo de la Figura 1 en la Introducción, se tiene,

$$\frac{RT_{iw}}{V-b} \frac{dV}{dt} = \frac{dQ_i}{dt} = (-1)^{i-1} \alpha(T_i - T_{iw})^k, \quad (4.26)$$

lo que lleva a definir

$$\frac{\alpha}{RT_{iw}} (-1)^{i-1} (T_i - T_{iw})^k \equiv \frac{1}{f_i}, \quad (4.27)$$

donde  $i = 1, 2$  según sea el caso: transferencia de calor desde el almacén a temperatura  $T_1$ , o transferencia de calor hacia el almacén a temperatura  $T_2$ . De esta manera se encontrará el tiempo de duración de todos los procesos en el ciclo, análogamente al caso de Ley de Newton y gas ideal.

Considérese nuevamente, por simplicidad,  $n=1$  moles de gas para los procesos isotérmicos en el ciclo de Curzon y Ahlborn. La ecuación (4.26) se escribe como

$$\frac{RT_{1w}}{V-b} \cdot \frac{dV}{dt} = \alpha(T_1 - T_{1w})^k \quad \text{y} \quad \frac{RT_{2w}}{V-b} \cdot \frac{dV}{dt} = \alpha(T_{2w} - T_2)^k, \quad (4.28)$$

y por integración directa de (4.28) se obtiene

$$t_1 = \frac{RT_{1w}}{\alpha(T_1 - T_{1w})^k} \ln \frac{V_2 - b}{V_1 - b}, \quad \text{y} \quad t_3 = \frac{RT_{2w}}{\alpha(T_{2w} - T_2)^k} \ln \frac{V_4 - b}{V_3 - b}, \quad (4.29)$$

Análogamente para los procesos adiabáticos se puede escribir

$$t_2 = \frac{RT_{1w}}{\alpha(T_1 - T_{1w})^k} \ln \frac{V_3 - b}{V_2 - b} \quad \text{y} \quad t_4 = \frac{RT_{2w}}{\alpha(T_{2w} - T_2)^k} \ln \frac{V_1 - b}{V_4 - b}, \quad (4.30)$$

Tomando en cuenta ahora las expresiones (4.9) para los procesos adiabáticos, se tiene

$$T_{1w}(V_2 - b)^{\frac{R}{C_V}} = T_{2w}(V_3 - b)^{\frac{R}{C_V}}, \quad \text{o,} \quad \ln \frac{V_3 - b}{V_2 - b} = \frac{C_V}{R} \ln \frac{T_{1w}}{T_{2w}}, \quad (4.31)$$

para el primer proceso adiabático, y para el segundo,

$$T_{2w}(V_4 - b)^{\frac{R}{C_V}} = T_{1w}(V_1 - b)^{\frac{R}{C_V}}, \quad \text{o,} \quad \ln \frac{V_1 - b}{V_4 - b} = \frac{C_V}{R} \ln \frac{T_{2w}}{T_{1w}}, \quad (4.32)$$

y combinando estas ecuaciones se encuentra la relación (4.7), lo que indica que la hipótesis de endorreversibilidad es independiente de la ley de transferencia de calor utilizada.

El principal problema ahora es construir una expresión para la potencia de la máquina,  $P$ , y para la función ecológica,  $E$ . Así que la potencia del ciclo, definida por  $P \equiv \frac{W}{t_{tot}}$ , puede ser escrita como

$$P = \alpha \cdot (T_{1w} - T_{2w}) \left[ \ln \left( \frac{T_{2w}}{T_{1w}} \right)^{\frac{C_V}{R}} + \ln \frac{V_3 - b}{V_1 - b} \right] \left[ \frac{T_{1w}}{(T_1 - T_{1w})^k} + \frac{T_{2w}}{(T_{2w} - T_2)^k} \right]^{-1} \ln \frac{V_1 - b}{V_3 - b}, \quad (4.33)$$

con  $W = Q_2 + Q_1$  obtenida a partir de (4.26), donde el tiempo total del ciclo,  $t_{tot} = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$ , ha sido simplificado con ayuda de la ecuación (4.7). Las

substituciones  $u = \frac{T_{1w}}{T_1}$ ,  $z = \frac{T_{2w}}{T_1}$  y  $\varepsilon = \frac{T_2}{T_1}$  permiten transformar la ecuación (4.33) como

$$P = \frac{\alpha T_1^k (1-z) \left[ \ln z \frac{C_V}{R} + \ln \frac{V_3-b}{V_1-b} \right]}{\left[ \frac{1}{(1-u)^k} + \frac{z}{(zu-\varepsilon)^k} \right] \ln \frac{V_3-b}{V_1-b}}, \quad (4.34)$$

o, utilizando  $\frac{C_V}{R} = \frac{1}{(\gamma-1)}$ ,  $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ , y las propiedades de los logaritmos,

$$P = \frac{\alpha T_1^k (1-z) [\lambda_{VW} \ln z + 1]}{\frac{1}{(1-u)^k} + \frac{z}{(zu-\varepsilon)^k}}, \quad (4.35)$$

donde ahora  $\lambda_{VW} = \frac{1}{(\gamma-1) \ln \frac{V_3-b}{V_1-b}}$ . Se observa que  $b \rightarrow 0$  lleva a  $\lambda_{VW} \rightarrow \lambda$  como sucede en

(4.14). También se observa que  $b \rightarrow 0$  y  $k \rightarrow 1$  reducen (4.35) a la expresión de  $P$  en el caso de gas ideal con ley de transferencia de calor de Newton. Una expresión en potencias del parámetro  $\lambda_{VW}$  permite obtener la eficiencia siguiendo el procedimiento utilizado en el caso de gas ideal.

Para el caso de la función ecológica se hace necesario construir la producción de entropía  $\sigma$ ,  $\sigma \equiv \frac{\Delta S}{t_{tot}}$ , de manera que el incremento de entropía es

$$\Delta S = \Delta S_{1 \rightarrow 2} + \Delta S_{3 \rightarrow 4}, \quad (4.36)$$

donde  $\Delta S_{1 \rightarrow 2}$  es el cambio de entropía en la primera rama isotérmica y  $\Delta S_{3 \rightarrow 4}$  es el cambio de entropía en la segunda rama isotérmica. El cambio de entropía,  $\Delta S = \frac{Q}{T}$ , supuesto solamente durante los procesos de intercambio de calor entre la máquina y los almacenes, es

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = \frac{Q_{1 \rightarrow 2}}{T_1} = R \frac{T_{1w}}{T_1} \ln \frac{V_2-b}{V_1-b} \quad \text{y} \quad \Delta S_{3 \rightarrow 4} = \frac{Q_{3 \rightarrow 4}}{T_2} = R \frac{T_{2w}}{T_2} \ln \frac{V_4-b}{V_3-b}, \quad (4.37)$$

así que la ecuación (4.36) puede ser escrita como

$$\Delta S = R \left[ \frac{T_{1w}}{T_1} \ln \frac{V_2-b}{V_1-b} - \frac{T_{2w}}{T_2} \ln \frac{V_3-b}{V_4-b} \right], \quad (4.38)$$

y por la hipótesis de endorreversibilidad se puede escribir

$$\Delta S = R \left( \frac{T_{1w}}{T_1} - \frac{T_{2w}}{T_2} \right) \left[ \frac{C_V}{R} \ln \frac{T_{2w}}{T_{1w}} + \ln \frac{V_3-b}{V_1-b} \right], \quad (4.39)$$

La producción de entropía toma ahora la forma

$$\sigma = \frac{\Delta S}{t_{tot}} = \alpha \left( \frac{T_{1w}}{T_1} - \frac{T_{2w}}{T_2} \right) \left[ \frac{C_V}{R} \ln \frac{T_{2w}}{T_{1w}} + \ln \frac{V_3-b}{V_1-b} \left[ \frac{T_{1w}}{(T_1-T_{1w})^k} + \frac{T_{2w}}{(T_{2w}-T_2)^k} \right]^{-1} \right] \cdot \ln \frac{V_1-b}{V_3-b}. \quad (4.40)$$

Factorizando  $T_{1w}$  y con el cambio de variables utilizado en (4.33) y (4.34) se encuentra la producción de entropía como

$$\sigma = \frac{\alpha T_1^k (\varepsilon - z) [\lambda_{VW} \ln z + 1]}{\frac{1}{(1-x)^k} + \frac{z}{(zx-\varepsilon)^k}}. \quad (4.41)$$

Las ecuaciones (4.35) y (4.41) permiten escribir ahora la función ecológica

$$E = \frac{\alpha T_1^k (1 - 2z + \varepsilon) [\lambda_{VW} \ln z + 1]}{\frac{1}{(1-x)^k} + \frac{z}{(zx-\varepsilon)^k}}. \quad (4.42)$$

Uno puede observar que la ecuación (4.42) lleva a la ecuación (4.16) en el límite  $k \rightarrow 1$ . También se obtiene el caso de ley de Newton con gas ideal cuando se toman al mismo tiempo los límites  $k \rightarrow 1$  y  $b \rightarrow 0$ . De esta manera es posible hallar formas aproximadas de la eficiencia, por maximización de la función potencia de salida o por maximización de la función ecológica, a partir de las expresiones obtenidas en el capítulo 3 en donde se supuso un gas ideal como sustancia de trabajo. Para el caso de tener un gas de van der Waals como sustancia de trabajo, basta substituir  $\lambda_{VW}$  por  $\lambda$ , de manera que para las aproximaciones utilizadas, para valores  $k > 1$ , se obtienen las expresiones de la eficiencia a potencia máxima y función ecológica máxima,

$$\eta_{EDPVW} = 1 - z_{EDP}(\lambda_{VW}, \varepsilon) = 1 - z_{OEDP}(1 + c_1(\varepsilon)\lambda_{VW} + c_2(\varepsilon)\lambda_{VW}^2 + O(\lambda_{VW}^3)), \quad (4.43)$$

$$\eta_{PDPVW} = 1 - z_{PDP}(\lambda_{VW}, \varepsilon) = 1 - z_{OPDP}(1 + B_1(\varepsilon)\lambda_{VW} + B_2(\varepsilon)\lambda_{VW}^2 + O(\lambda_{VW}^3)). \quad (4.44)$$

Nótese que los coeficientes son los mismos, y que la diferencia está en el parámetro que involucra a la razón de compresión, de modo que ésta será apreciable solamente a partir de las aproximaciones lineales de (4.43) y (4.44).

## Capítulo 5. Ciclo de Curzon y Ahlborn no-endorreversible.

Como se observa, de las secciones precedentes, el ciclo de Curzon y Ahlborn tiene una eficiencia en forma más general si se toma en cuenta la razón de compresión, de manera que tanto la eficiencia de Curzon-Ahlborn-Novikov,  $\eta_{CAN}$ , como la eficiencia ecológica de Angulo-Brown,  $\eta_{EN}$ , constituyen límites de operación de dicho ciclo, a potencia máxima o función ecológica máxima, respectivamente. Sin embargo, en la realidad sucede que ninguna máquina térmica funciona en forma endorreversible.

Diversos autores han abordado este problema. En particular Yan y Chen [20a] primero, y posteriormente Chiou, et. al. [20b], analizaron un ciclo de refrigeración no-endorreversible, obteniendo de esta manera un estudio más realista del ciclo. De manera semejante, Chen [22 a y b], Cheng y Chen [33], Chen et. al. [39], Velasco et. al. [34] y Angulo-Brown y col. [50, 51, 52] entre otros, analizaron el problema de la no-endorreversibilidad para un ciclo tipo Carnot, obteniendo como caso particular la eficiencia de Curzon-Ahlborn-Novikov.

La idea principal es proponer un término que englobe todo el calor generado por diversos procesos disipativos internos de la sustancia de trabajo, de manera semejante a como se muestra en la Figura 5.1. La introducción de este calor resulta equivalente a proponer adiabatas no instantáneas, como se verá a continuación, pues el factor de no-endorreversibilidad queda incluido en la forma de la potencia. Al maximizar la función potencia se obtiene la expresión (20) en [22b] (expresión (21) en [33]) a orden cero del término que incluye la relación de compresión ( $\lambda$  en los resultados precedentes).

Ahora se analizará el ciclo de Curzon y Ahlborn no-endorreversible para dos casos: con ley de enfriamiento de Newton y ley de transferencia de calor de Dulong y Petit, suponiendo gas ideal como sustancia de trabajo. Para el caso con ley de Newton, se obtendrán intervalos de valores para la eficiencia para plantas convencionales (a potencia máxima), dentro de los cuales se encuentran los valores medidos de dicha eficiencia; y se mejorarán los intervalos de los valores de la eficiencia para plantas núcleo-eléctricas (reportados en [34]), maximizando la función ecológica, a orden cero de la eficiencia correspondiente en términos del parámetro  $\lambda$ , que involucra la razón de compresión. Para el caso con ley de Dulong y Petit se obtendrán formas aproximadas de la eficiencia.

### 5.1 Ciclo no-endorreversible con ley de transferencia de calor de Newton y gas ideal.

Supóngase el ciclo de Curzon y Ahlborn, modelado como en la Figura 5.1 en donde se muestra la existencia de un calor generado por procesos disipativos internos de la máquina térmica considerada, y que además funciona como un ciclo de Curzon y Ahlborn, tomando como sustancia de trabajo un mol de gas ideal. De la desigualdad de Clausius,

$$\frac{Q_1}{T_{1w}} - \frac{Q_2}{T_{2w}} < 0, \quad (5.1)$$

se puede escribir que

$$\frac{Q_1}{T_{1w}} < \frac{Q_2}{T_{2w}},$$

de donde es posible tener,

$$I \frac{Q_2}{T_{2w}} = \frac{Q_1}{T_{1w}}, \quad 0 < I \leq 1, \quad (5.2)$$

Así, el calor cedido por el sistema al almacén frío es

$$Q_2 = \frac{1}{I} \cdot \frac{T_{2w}}{T_{1w}} Q_1. \quad (5.3)$$

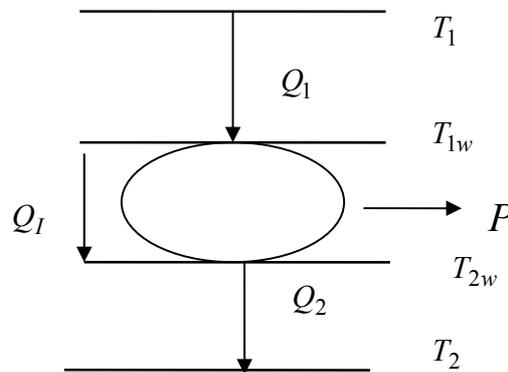


Figura 5.1 Ciclo operando con irreversibilidades internas

Consecuentemente, puesto que el calor absorbido durante la expansión isotérmica es  $Q_1 = RT_{1w} \ln \frac{V_2}{V_1}$ , e introduciendo el parámetro de no-endorreversibilidad de las referencias

[22] y [34], el trabajo desarrollado por la máquina durante el ciclo se puede escribir como función de la variación de volumen en la primera isoterma del ciclo de Curzon y Ahlborn,

$$W = R \left( T_{1w} - \frac{T_{2w}}{I} \right) \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (5.4)$$

De la propiedad para los procesos adiabáticos  $TV^{\gamma-1} = \text{constante}$ , y de (2.24), se tiene

$$W = R \left( T_{1w} - \frac{T_{2w}}{I} \right) \ln \left[ \frac{V_3}{V_1} \left( \frac{T_{2w}}{T_{1w}} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \right]. \quad (5.5)$$

Por otro lado, los tiempos de duración de los procesos isotérmicos del ciclo se encuentran, tomando en cuenta que el calor transferido entre el sistema y los almacenes es como en (2.6). Para la primera isoterma, proceso  $1 \rightarrow 2$  en la figura (0.1), se tiene

$$t_1 = F_1 \ln \frac{V_2}{V_1}, \quad (5.6a)$$

siendo  $F_1 = f_1$  (recuérdese la expresión (2.18)). Ahora, tomando en cuenta (5.3), el tiempo para la segunda isoterma, proceso  $3 \rightarrow 4$  se puede escribir como

$$t_3 = \frac{RT_{2w}}{\alpha I (T_{2w} - T_2)} \ln \frac{V_2}{V_1} = F_2 \ln \frac{V_2}{V_1}, \quad (5.6b)$$

donde se define  $F_2 \equiv \frac{RT_{2w}}{\alpha I (T_{2w} - T_2)}$ ; de modo que, en forma análoga a lo hecho en la sección 2.1 del presente trabajo, se propone una expresión para los tiempos de duración de los procesos adiabáticos del ciclo, procesos  $2 \rightarrow 3$  y  $4 \rightarrow 1$  respectivamente, como

$$t_2 = F_1 \ln \frac{V_3}{V_2} \quad \text{y} \quad t_4 = F_2 \ln \frac{V_1}{V_4}. \quad (5.7)$$

Además, de  $TV^{\gamma-1} = \text{constante}$ , con  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ , se tiene  $\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$ . Utilizando nuevamente (2.24), el tiempo total del ciclo se encuentra en la forma

$$t_{TOT} = \frac{RT_{1w}}{\alpha} \left( \frac{1}{T_1 - T_{1w}} + \frac{\frac{T_{2w}}{T_{1w}}}{I(T_{2w} - T_2)} \right) \ln \frac{V_3}{V_1}. \quad (5.8)$$

Y de la definición de potencia se tiene,

$$P = \alpha T_1 \left( 1 - \frac{1}{I} \cdot \frac{T_{2w}}{T_{1w}} \right) \left( \ln \frac{V_3}{V_1} + \frac{1}{\gamma-1} \ln \frac{T_{2w}}{T_{1w}} \right) \left( \frac{1}{1 - \frac{T_{1w}}{T_1}} + \frac{\frac{T_{2w}}{T_{1w}}}{I \left( \frac{T_{2w}}{T_1} - \frac{T_2}{T_1} \right)} \right)^{-1} \ln \frac{V_1}{V_3}, \quad (5.9)$$

o, utilizando las variables  $u$  y  $z$ , y los parámetros  $\lambda$  y  $\varepsilon$ , antes definidos,

$$P = \frac{\alpha T_1 (1 - \frac{z}{I})(1 + \ln z)}{\frac{1}{1-u} + \frac{z}{I(zu-\varepsilon)}}. \quad (5.10)$$

La maximización de (5.10) para las variables  $u$  y  $z$ , esto es, las condiciones  $\frac{\partial P}{\partial u} = 0$  y  $\frac{\partial P}{\partial z} = 0$ , permiten obtener el sistema de ecuaciones, para  $\lambda = 0$ ,

$$\begin{cases} -z^2 u^2 + 2zu\varepsilon - \varepsilon^2 + Iz^2 - 2Iz^2 u + Iz^2 u^2 = 0 \\ -I^2 z^2 u - Iz^2 u^2 + I\varepsilon - I\varepsilon^2 + I^2 z^2 u^2 - \varepsilon Iu + 2Izu\varepsilon = 0. \end{cases}$$

De la primera de estas ecuaciones se encuentra que

$$u = \frac{z\sqrt{I} + \varepsilon}{(\sqrt{I} + 1)z}, \quad (5.11)$$

y, substituyendo (5.11) en la segunda, se encuentra la solución físicamente posible para  $z$ ,

$$z = \sqrt{\frac{\varepsilon}{I}}, \quad (5.12)$$

de donde se obtiene la expresión para la eficiencia equivalente a la expresión (20) en la referencia [22b], y (21) en la referencia [22a],

$$\eta_I = 1 - \sqrt{\frac{\varepsilon}{I}}. \quad (5.13)$$

Con esta expresión, para los valores adecuados de  $I$  hallados en [34],  $0.8 \leq I \leq 0.9$ , expresión (17) con el cambio  $\tau \rightarrow \frac{\varepsilon}{I}$ , se encuentran tablas de valores de eficiencias de las plantas convencionales reportadas en diversos trabajos, como la Tabla 5.1 mostrada a continuación.

También en dicha tabla se observa que existe algún valor de  $\varepsilon$  a partir del cual la diferencia entre  $\bar{\eta}_B(I = 0.9) - \bar{\eta}_B(I = 0.8)$ , de la referencia [34], y  $\eta_I(0.9) - \eta_I(0.8)$  hallada en la presente sección, ecuación (5.13), es cada vez mayor, de manera que el intervalo de valores de  $\eta_I$  resulta más cercano a los valores de las eficiencias medidas reportadas, lo que se observa mejor en las gráficas comparativas para estas mismas diferencias en la figura 5.2.

Tabla 5.1 Comparación de los valores obtenidos para plantas convencionales (con maximización de potencia), en el intervalo de valores  $0.8 \leq I \leq 0.9$ , de las eficiencias  $\bar{\eta}_B$  hallada en [34] y  $\eta_I$  hallada en esta sección, ecuación (5.13). Se incluyen los valores de  $\eta_C$  y  $\eta_{CAN}$ .

Power plant	$T_2$ (K)	$T_1$ (K)	$\eta_C$	$\eta_{CAN}$	$\bar{\eta}_B$	$\eta_{obs}$	$\eta_I$
Planta convencional de vapor por carbón quemado, West Thurrock, 1962.	298	838	0.64439	0.403367	0.45785 – 0.5047	0.3600	0.33328 - 0.37141
Planta geotérmica de vapor, Lardarello, Italia, 1964	353	523	0.32505	0.17845	0.11972 – 0.19427	0.1600	0.081474 - 0.13401
Planta central de potencia a vapor, R. U. 1936-1940	298	698	0.57307	0.3466	0.37681 – 0.43024	0.2800	0.26947 – 0.31125
Planta de potencia de vapor, E. U. A. 1956	298	923	0.67714	0.4318	0.49657 – 0.54029	0.4000	0.36472 – 0.40106
Planta de ciclo combinado (vapor y mercurio), E. U. A. 1949.	298	783	0.61941	0.38308	0.41173 – 0.46232	0.3400	0.29666 – 0.33688

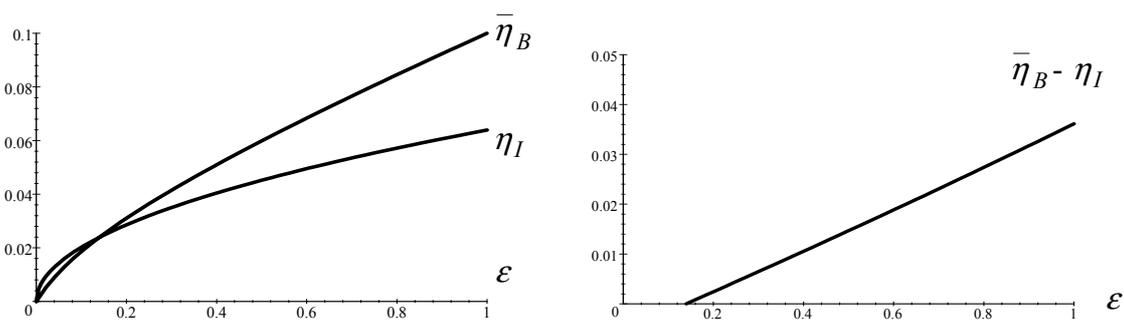


Figura 5.2 Comparación entre las diferencias para  $\bar{\eta}_B$  de la referencia [34] y  $\eta_I$  hallada en esta sección, para los valores extremos de  $I$  arriba mencionados,  $0.8 \leq I \leq 0.9$

Un análisis semejante al realizado para el desempeño del ciclo de Curzon y Ahlborn a potencia máxima, en las líneas precedentes, se puede realizar tomando como función a

maximizar la función ecológica, ecuación (0.3), pero ahora se hace necesario construir la producción de entropía, utilizando el mismo criterio de no-endorreversibilidad. Esto es, ahora se tiene el incremento de entropía, para los procesos de intercambio de calor entre el sistema y los almacenes,

$$\Delta S = -\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = -\frac{Q_1}{T_1} + \frac{\frac{1}{I} \cdot \frac{T_{2w}}{T_{1w}} Q_1}{T_2}.$$

Consecuentemente, se encuentra la producción de entropía como

$$\sigma = \frac{\Delta S}{t_{TOT}} = \frac{\alpha T_1}{T_2} \cdot \frac{\left(-\frac{T_2}{T_1} + \frac{1}{I} \cdot \frac{T_{2w}}{T_{1w}}\right) \left(1 + \lambda \ln \frac{T_{2w}}{T_{1w}}\right)}{\frac{1}{1 - \frac{T_{1w}}{T_1}} + \frac{\frac{T_{2w}}{T_{1w}}}{I \left(\frac{T_{2w}}{T_1} - \frac{T_2}{T_{1w}}\right)}} = \frac{\alpha T_1}{T_2} \cdot \frac{(-\varepsilon + \frac{z}{I})(1 + \lambda \ln z)}{\frac{1}{1-u} + \frac{z}{I(zu-\varepsilon)}},$$

y la expresión de la función ecológica, para las variables  $u$  y  $z$ , ahora es

$$E = \frac{\alpha T_1 (1 + \varepsilon - \frac{2z}{I})(1 + \lambda \ln z)}{\frac{1}{1-u} + \frac{z}{I(zu-\varepsilon)}}. \quad (5.14)$$

La maximización de (5.14) en las variables  $u$  y  $z$ , esto es la solución del sistema de ecuaciones obtenida de las condiciones  $\frac{\partial E}{\partial u} = 0$  y  $\frac{\partial E}{\partial z} = 0$ , permite obtener  $u = u(z)$  como en (5.11), y resolviendo para  $z$  la condición  $\frac{\partial E}{\partial z} = 0$ , cuando  $\lambda = 0$  utilizando (5.11), se encuentra que ahora la solución físicamente posible es

$$z = \sqrt{\frac{\varepsilon^2 + \varepsilon}{2I}}, \quad (5.15)$$

y la correspondiente eficiencia ecológica queda como

$$\eta_{EI} = 1 - \sqrt{\frac{\varepsilon^2 + \varepsilon}{2I}}. \quad (5.16)$$

Este resultado mejora los intervalos de valores de la eficiencia para plantas nucleo-eléctricas, respecto de los hallados por Velasco et. al [34], lo que se muestra en la Tabla 5.2, para las plantas reportadas en dicha referencia. Esto es, se encuentran intervalos de valores de la eficiencia más estrechos y alrededor de los valores medidos.

La diferencia entre las expresiones de la eficiencia en los extremos del intervalo  $0.8 \leq I \leq 0.9$ , halladas por Velasco et. al. [34], comparadas con las expresiones para esos mismos valores extremos de  $I$ ,  $\eta_{EI}(0.9) - \eta_{EI}(0.8)$ , hallada en la presente sección, se

muestra gráficamente en la Figura 5.3, lo que hace evidente la afirmación de que los intervalos de valores de la eficiencia obtenidos en esta sección son más estrechos que los de la referencia citada

Tabla 5.2. Valores de la eficiencia  $\eta_{EI}$ , comparados con los obtenidos en [34]  $\eta_{opt}$ , y los valores de  $\eta_C$ ,  $\eta_{CAN}$ ,  $\eta_{obs}$ , para el intervalo  $0.8 \leq I \leq 0.9$ , dado en [34].

Planta	$T_2$ (K)	$T_1$ (K)	$\eta_C$	$\eta_{CAN}$	$\eta_{opt}$	$\eta_{obs}$	$\eta_{EI}$
Planta nuclear de potencia Doel 4 (Bélgica), 1985.	283	566	0.50000	0.29289	0.297 a 0.357	0.35000	0.31535 a 0.3545
Planta nuclear, reactor sobrecargado Almaraz II España	290	600	0.51667	0.30478	0.315 a 0.373	0.34500	0.3306 a 0.36889
Planta nuclear, reactor sobrecargado Sizewell B, R. U..	288	581	0.50430	0.29594	0.302 a 0.361	0.36300	0.3198 a 0.35821
Planta nuclear Cofrentes, España	289	562	0.48577	0.28290	0.282 a 0.343	0.34000	0.30238 a 0.34228
Planta nuclear Heysham, reactor avanzado enfriado con gas, R. U.	288	727	0.60385	0.37060	0.410 a 0.460	0.40000	0.41206 a 0.44568

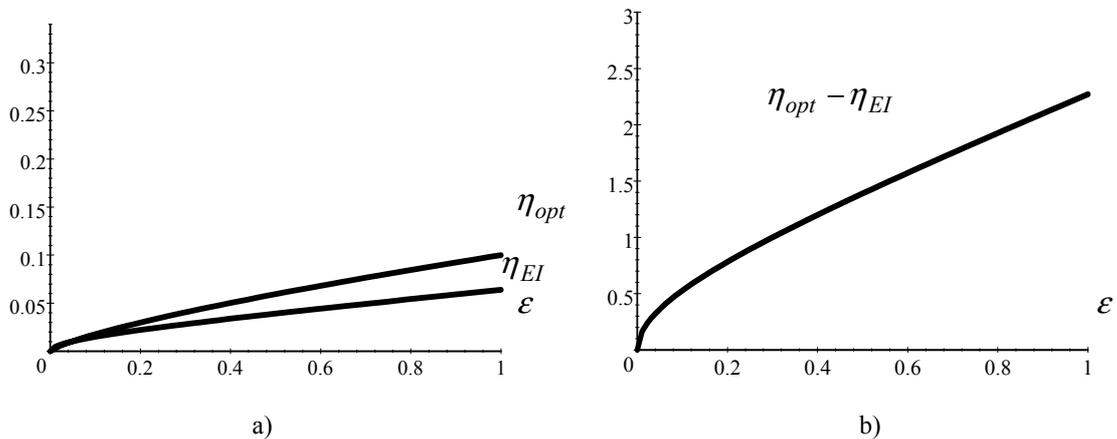


Figura 5.3. Gráficas comparativas entre las eficiencias diferencias de  $\eta_{opt}$  y  $\eta_{EI}$  para los valores extremos del intervalo  $0.8 \leq I \leq 0.9$ . a) Diferencia con los valores extremos del intervalo para cada de  $\eta_{opt}$  y  $\eta_{EI}$  una. b) Diferencia  $\eta_{opt} - \eta_{EI}$  en los mismos valores extremos.

Obsérvese que el factor de no-endorreversibilidad no es función de los parámetros  $\lambda$  y  $\varepsilon$ ; por tanto las expansiones en serie de potencias de la eficiencia, que se pueden obtener por maximización de la potencia y de la función ecológica para  $\lambda > 0$ , ecuaciones (5.10) y (5.14) respectivamente, tendrán los mismos coeficientes que las ecuaciones (2.40) y (2.52), multiplicadas por el factor  $\frac{1}{\sqrt{I}}$  de la misma manera que las eficiencias, a potencia máxima o función ecológica máxima a orden cero del parámetro  $\lambda$ . También las aproximaciones lineales, expresiones semejantes a (2.55) y (2.56), contendrán dicho factor.

## 5.2 Ciclo no-endorreversible con ley de transferencia de calor no lineal.

En el capítulo 3 se encontró que al utilizar una ley de transferencia de calor no lineal, como la expresión (3.3), es posible hallar también expresiones de la eficiencia en serie de potencias del parámetro  $\lambda$  para el caso de gas ideal. Además se halló que la modificación de la expresión para la potencia de salida, del ciclo, y de la función ecológica correspondiente es tal que su estructura algebraica permite establecer aproximaciones simples de ciertos exponentes de la variable  $z$ , de forma de obtener expresiones simples también de la eficiencia en forma aproximada. Para valores convenientes del parámetro  $k$ ,  $k > 1$ , en las expresiones de dichas eficiencias (a potencia máxima y función ecológica máxima) se obtiene como casos límite las halladas por Gutkowics-Krusin y col. y en el capítulo 2 del presente trabajo.

Para el ciclo de Curzon y Ahlborn no endorreversible, con una ley de transferencia de calor no lineal, también es posible hallar expresiones para la potencia y la función que tienen una estructura semejante a las expresiones (5.10) y (5.14), respectivamente. Supóngase ahora la relación (5.2), pero ahora para hallar la expresión del trabajo total se supondrá la ley de transferencia dada por (3.3). El tiempo total de duración del ciclo se encuentra como

$$t_{TOT} = \frac{RT_{1w}}{\alpha} \cdot \left[ \frac{1}{(T_1 - T_{1w})^k} + \frac{z}{I(T_{2w} - T_2)^k} \right] \ln \frac{V_3}{V_1}, \quad (5.17)$$

de manera que la potencia se escribe, utilizando los cambios de variable de los capítulos anteriores, como

$$P = \frac{\alpha T_1^k (1 - \frac{z}{I})(1 + \lambda \ln z)}{\frac{1}{(1-u)^k} + \frac{z}{I(uz-\varepsilon)^k}}. \quad (5.18)$$

La similitud de (5.18) con (3.8) hace suponer que se tendrán resultados semejantes a los de la sección 3.1. En efecto, al considerar las condiciones de extremo para la potencia,  $\frac{\partial P}{\partial u} = 0$  y  $\frac{\partial P}{\partial z} = 0$ , se encuentra de la primera condición que

$$u = \frac{I^{\frac{1}{k+1}} z^{\frac{2}{k+1}} - \varepsilon}{z + I^{\frac{1}{k+1}} z^{\frac{2}{k+1}}}, \quad (5.19)$$

y de la segunda, para  $\lambda = 0$ , se encuentra la expresión

$$\left( (uz - \varepsilon)^k + Iz(1-u)^k \right) (zu - \varepsilon)^{k+1} + (1+u)^k (1-Iz)(zu - \varepsilon - zu^k) = 0, \quad (5.20)$$

de donde, al substituir (5.19) y tomar aproximaciones semejantes a las utilizadas en (3.16), sólo para la variable  $z$ , se encuentra que el ciclo no-endorreversible a potencia máxima (caso de plantas convencionales), tiene la eficiencia aproximada

$$\eta_{IOPDP} = 1 - z_{IOPDP} = 1 - \frac{I^{\frac{4}{9}} - I\varepsilon + \sqrt{(I^{\frac{4}{9}} - I\varepsilon)^2 + 4(4I + 5I^{\frac{13}{9}})(5 + 4I^{\frac{4}{9}})\varepsilon}}{2I(5I^{\frac{4}{9}} + 4)}, \quad (5.21)$$

La Figura 5.4 muestra las curvas correspondientes a la eficiencia para los valores  $I = 0.8$  e  $I = 0.9$ , en donde se aprecia el corrimiento hacia el origen de dichos valores de la eficiencia, utilizando como parámetro variable el cociente  $\varepsilon$ , lo que es apreciable también en la gráfica de la diferencia entre dichas expresiones. Aunque se ha obtenido una expresión para la potencia semejante al obtenido utilizando ley de Newton, la expresión para la eficiencia hallada no es proporcional a la del ciclo endorreversible (capítulo 3), como sucede precisamente cuando se utiliza ley de Newton (ver expresiones (0.2) y (5.13)). Para los valores extremos del intervalo de validez para un gas ideal, del parámetro de no-endorreversibilidad  $I$ ,  $0.8 \leq I \leq 0.9$ , se tiene Tabla 5.3 comparativa de los casos con ley de Newton,  $\eta_I$ , y con ley de Dulong y Petit,  $\eta_{IOEDP}$ . Es conveniente hacer notar que el intervalo obtenido de valores de la eficiencia es adecuado sólo en algunas plantas. En los demás sólo el valor de la eficiencia en el extremo máximo del intervalo se acerca al valor medido experimentalmente.

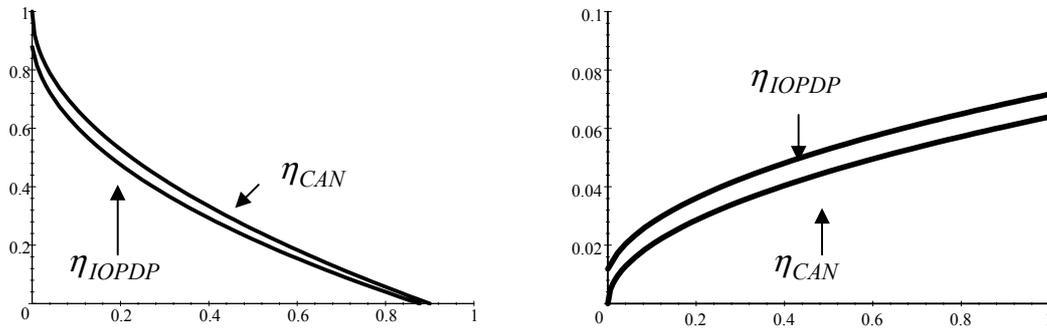


Figura 5.4. Comparación gráfica entre las eficiencias  $\eta_{CAN}$  y  $\eta_{IOPDP}$  en  $I = 0.8$ , y de la diferencia de los valores de ella en los extremos del intervalo de valores adecuados para  $I$ .

Tabla 5.3. Comparación de los valores obtenidos para plantas convencionales (con maximización de potencia), en el intervalo de valores  $0.8 \leq I \leq 0.9$ , de las eficiencias  $\eta_{IOPDP}$  y  $\eta_I$  halladas, ecuaciones (5.13) y (5.21). Se incluyen los valores de  $\eta_C$  y  $\eta_{CAN}$ .

Power plant	$T_2$ (K)	$T_1$ (K)	$\eta_C$	$\eta_{CAN}$	$\eta_{IOPDP}$	$\eta_{obs}$	$\eta_I$
Planta convencional de vapor por carbón quemado, West Thurrock, 1962.	298	838	0.64439	0.403367	0.28254 – 0.32833	0.3600	0.33328 - 0.37141
Planta geotérmica de vapor, Lardarello, Italia, 1964	353	523	0.32505	0.17845	0.04922 – 0.10951	0.1600	0.081474 - 0.13401
Planta central de potencia a vapor, R. U. 1936-1940	298	698	0.57307	0.3466	0.22294 – 0.23208	0.2800	0.26947 – 0.31125
Planta de potencia de vapor, E. U. A. 1956	298	923	0.67714	0.4318	0.31202 – 0.35599	0.4000	0.36472 - 40106
Planta de ciclo combinado (vapor y mercurio), E. U. A. 1949.	298	783	0.61941	0.38308	0.26100 – 0.30812	0.3400	0.29666 – 0.33688

De manera análoga, se encuentra que la función ecológica tiene una estructura semejante a (5.14), esto es,

$$E = \alpha T_1^k \left(1 - 2 \frac{z}{I} + \varepsilon\right) (1 + \lambda \ln z) \left[ \frac{1}{(1-u)^k} + \frac{z}{I(zu-\varepsilon)^k} \right]^{-1}. \quad (5.22)$$

Al maximizar (5.22) para las variables  $u$  y  $z$ , esto es para  $\frac{\partial E}{\partial u} = 0$  y  $\frac{\partial E}{\partial z} = 0$ , se obtiene primero para  $u$  la misma expresión que para la maximización de la potencia, ecuación (5.19), y después la relación entre estas variables, a orden cero del parámetro  $\lambda$ ,

$$\begin{aligned} & \left( -2I(uz - \varepsilon)^k + (1 - 2Iz + \varepsilon)ku(zu - \varepsilon)^{k-1} \right) \left( (zu - \varepsilon)^k + Iz(1 - u)^k \right) \\ & - (1 - 2Iz + \varepsilon)(zu - \varepsilon)^k + \left( ku(zu - \varepsilon)^{k-1} + I(1 - u)^k \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Después de hacer una aproximación adecuada sólo en los exponentes de  $z$  en términos del parámetro  $k$ , la substitución de (5.19) en (5.23) permite obtener la expresión aproximada para la correspondiente eficiencia ecológica, que ahora llamaremos  $\eta_{IOEDP}$ , en función de los parámetros  $I$  y  $\varepsilon$ ,

$$\eta_{IOEDP} = 1 + \frac{\left[ -1 - \varepsilon + 2(\sqrt[2]{I})^5 \varepsilon - \sqrt{(\varepsilon + 1)^2 + 160\varepsilon(I + \sqrt[2]{I})(\varepsilon + 1) + 4\varepsilon(\sqrt[2]{I})^5 \left( (\sqrt[2]{I})^5 \varepsilon + 81\varepsilon + 81 \right)} \right]}{4(5I + 4(\sqrt[2]{I})^5)} \quad (5.24)$$

La Figura 5.5 muestra el comportamiento de esta expresión, para los valores extremos del parámetro  $I$ ,  $I = 0.8$  e  $I = 0.9$ .

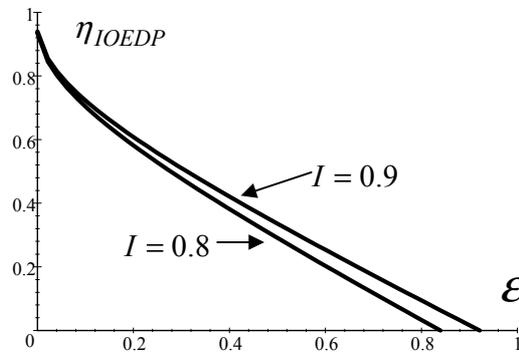


Figura 5.5 Comportamiento de la expresión 5.24 para los valores extremos del intervalo de valores del parámetro  $I$ ,  $I = 0.8$  e  $I = 0.9$ .

Desde luego, es posible también construir tablas comparativas para (5.24). La Tabla 5.4 muestra la comparación entre (5.24), eficiencia ecológica no endorreversible con ley de transferencia de calor de Dulong y Petit, y la eficiencia ecológica no endorreversible con ley de transferencia de calor de Newton,  $\eta_{EI}$ , expresión (5.16). Además, se encuentra que

los valores numéricos obtenidos de evaluar (5.22) en los extremos del intervalo  $0.8 \leq I \leq 0.9$ , se acercan en algunos casos al extremo superior y en otros al extremo inferior.

Tabla 5.4. Valores de la eficiencia  $\eta_{EI}$ , comparados con los obtenidos para (5.24) y los valores de  $\eta_C$ ,  $\eta_{CAN}$ ,  $\eta_{obs}$ , para el intervalo  $0.8 \leq I \leq 0.9$ , dado en [34].

Planta	$T_2$ (K)	$T_1$ (K)	$\eta_C$	$\eta_{CAN}$	$\eta_{IOEDP}$	$\eta_{obs}$	$\eta_{EI}$
Planta nuclear de potencia Doel 4 (Bélgica), 1985.	283	566	0.50000	0.29289	0.289 a 0.334	0.35000	0.31535 a 0.3545
Planta nuclear, reactor sobrecargado Almaraz II España	290	600	0.51667	0.30478	0.304 a 0.348	0.34500	0.3306 a 0.36889
Planta nuclear, reactor sobrecargado Sizewell B, R. U..	288	581	0.50430	0.29594	0.293 a 0.338	0.36300	0.3198 a 0.35821
Planta nuclear Cofrentes, España	289	562	0.48577	0.28290	0.276 a 0.322	0.34000	0.30238 a 0.34228
Planta nuclear Heysham, reactor avanzado enfriado con gas, R. U.	288	727	0.60385	0.37060	0.383 a 0.422	0.40000	0.41206 a 0.44568

## Conclusiones

En el presente trabajo se ha realizado un análisis del llamado Ciclo de Curzon y Ahlborn, que es un ciclo aún ideal. Por otro lado, se ha considerado como substancia de trabajo un gas ideal, y sólo en el ciclo endorreversible se analizó un gas no ideal (gas de van der Waals). Pero, tanto para gas ideal como para gas de van der Waals, se abordó el problema de una ley de transferencia de calor no lineal, y no sólo el caso de la ley de enfriamiento de Newton. De los resultados obtenidos bajo estos supuestos se concluye que:

1. Para leyes de transferencia de calor de la forma  $\frac{dQ}{dt} \sim (T_i - T_{iw})^k$ , con  $k \geq 1$ , en los casos de gas ideal y ecuación de van der Waals, siempre se pueden obtener expresiones de la eficiencia del ciclo endorreversible de Curzon y Ahlborn, en serie de potencias de un parámetro de pequeñez  $\lambda$ , que depende como  $\lambda \equiv \frac{1}{(\gamma-1)\ln r_C}$  de la razón de compresión,  $r_C$ , el cociente entre el volumen efectivo máximo (accesible a las moléculas del gas) y el volumen efectivo mínimo en el ciclo,  $r_C = \frac{V_{m\acute{a}x}-b}{V_{m\acute{i}n}-b}$ , que para gas ideal se tiene  $b = 0$ . Además, tanto a potencia de salida máxima como a función ecológica máxima, la eficiencia de Curzon-Ahlborn-Novikov o de Angulo-Brown, respectivamente, el término a orden cero es una cota superior de la eficiencia; de manera que, en vista del parámetro de pequeñez, se encuentra que las eficiencias, a orden cero, corresponden a una máquina con razón de compresión infinita.
2. En la aproximación lineal, tomando en cuenta los datos de operación de plantas de potencia, a saber  $T_{min}$  y  $T_{m\acute{a}x}$ , lo que fija la eficiencia a orden cero,  $\eta_O$ , y conociendo  $\eta_{OBS}$  con la que operan las plantas, la aproximación lineal  $\eta_{IL}$ , con las dos ecuaciones de estado empleadas aquí, produce razones de compresión dentro de un intervalo realista.
3. Al utilizar la ley de transferencia de Dulong y Petit, el que se encuentre y se obtenga una expresión analítica para la relación de semisuma a orden cero, ecuación (3.35), a saber  $\eta_{SDP} \approx \frac{1}{2}(\eta_C + \eta_{OPDP})$ , y la existencia del resultado análogo ya conocido con ley de Newton, apunta en la dirección de que dicha relación es una propiedad del ciclo. Además se encuentra que una relación semejante (una relación de semisuma) entre la eficiencia de Curzon-Ahlborn-Novikov y la hallada con Ley de Dulong y Petit, ecuación (3.36a) para

plantas núcleo-eléctricas, da valores cercanos entre 3.7% y 12.5% a la eficiencia de operación de las plantas en las tablas reportadas, mostrando una forma más realista de operación de dichas plantas, lo que indica la existencia de otras relaciones de semisuma que muestran el comportamiento de las plantas.

4. Análogamente, para las plantas convencionales se encuentra que los valores observados de la eficiencia difieren dentro de un intervalo de tamaño 1%, respecto a las medidas observadas, con la expresión (3.36b), lo que indica de mejor manera la forma como operan dichas plantas.

5. El considerar el caso no-endorreversible, del ciclo de Curzon y Ahlborn, para la ley de transferencia de calor de Newton, es posible obtener mejores valores de la eficiencia para el intervalo adecuado de valores del parámetro de irreversibilidad,  $0.8 \leq I \leq 0.9$ , al evaluar el funcionamiento del ciclo; siempre que se tomen en consideración los tiempos de duración los procesos adiabáticos del ciclo, a orden cero del parámetro  $\lambda$ , lo que evita la introducción de la razón de compresión. El ancho de los intervalos obtenidos por Velasco et. al. oscila entre 0.04433 y 0.07455, en tanto que el obtenido en el presente trabajo es de 0.03634 a 0.053536, como se observa en la Tabla 5.1.

6. Es posible extender el estudio de máquinas térmicas generadoras de potencia para analizar diversos tópicos no abordados en el presente trabajo. A continuación se enumeran algunas cuestiones que quedan pendientes, que es necesario abordar de manera que a mediano plazo se pueda tener un panorama más completo del funcionamiento de dichas plantas generadoras de potencia, y de los alcances de la llamada termodinámica de tiempos finitos:

- a) Se desprende la necesidad de abordar el análisis de otros ciclos más realistas, como modelos de máquinas térmicas, de manera semejante al que se ha realizado con el ahora llamado ciclo de Curzon y Ahlborn, los ciclos Rankine, Otto y Diesel, entre otros.
- b) Es necesario suponer otras sustancias de trabajo diferentes de gas ideal, como pueden ser un gas de van der Waals generalizado, el gas de Redlich-Kwong o bien analizar el desarrollo del virial.
- c) Dos problemas interesantes que se podrían estudiar con los métodos

desarrollados en el presente trabajo son el sistema geotérmico y una máquina frigorífica.

- d) El caso de una mezcla binaria resulta por demás interesante, y aunque en el curso del desarrollo del presente trabajo se realizaron algunos intentos por analizarla, no se llegó a algún resultado valioso.
- e) Valdría la pena incursionar en otros contextos como la termoelasticidad, aunque actualmente se carece personalmente de información al respecto.

Al resolver éstos y otros posibles problemas, que se encuentren dentro de este contexto, se estará creando una línea de investigación, con lo que sin duda considero que se estaría contribuyendo al desarrollo de la termodinámica en general, y de la termodinámica de tiempos finitos en particular, lo que me parece debe ser el espíritu de un trabajo de esta naturaleza.

Del desarrollo del presente trabajo, se obtuvieron las publicaciones que se incluyen después de la bibliografía (Referencias) como Apéndice.

## Referencias

1. S. Carnot, *Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance*, París (1824). Traducción al castellano, *Reflexiones sobre la potencia motriz del fuego*, Ed. IPN, México (1976).
2. R. Clausius, *Théorie mécanique de la chaleur, 1ère partie*, París, Lacroix (1868).
3. E. Fermi, *Thermodynamics*, Columbia University Press, N. Y., (1936).
4. R.C. Tolman y P.C. Fine, *Rev. Mod. Phys.*, **20** (1948) 51.
5. J. Meixner, *Ann. Physik.* **39** (1941) 333; **41** (1942) 409; **43** (1943) 244; *Z. Phys. Chem. B* **53** (1943) 235.
6. S.R. De Groot y P. Mazur, *Non-equilibrium thermodynamics*, Ed. North-Holland, Amsterdam (1962).
7. L. Onsager, *Physical Review*, **37** (1931) 405; **38** (1931) 2265.
8. I. Prigogine, *Etude thermodynamique des phénomènes irréversibles*, Dunod, París, Desoer, Liège 1947.
9. I. I. Novikov, *Atomnaya Energiya*, **3**(1957), 409.
10. P. Chambadal, *Les Centrales Nucleares*, Ed. Armand Colin, París (1957) 41.
11. F. L. Curzon, y B. Ahlborn, *Am. J. Phys.*, **43** (1975) 22.
12. P. Salamon, B. Andresen, y R.S. Berry, *Phys. Rev. A*, **15** (1976) 2094.
13. M. Rubin, *Phys. Rev. A*, **19** (1979) 1272.
14. M. Rubin, *Phys. Rev. A*, **19** (1979) 1277.
15. M. Rubin, *Phys. Rev. A*, **22** (1980) 1741.
16. A. De Vos, *Am. J. Phys.*, **53** (1985) 570.
17. M. Castañs, *Rev. Geofís.* **35** (1976) 227
18. J. L. Torres, *Rev. Mex. Fís.*, **32** (1985) 229.
19. J. Chen, y Z. Yan, *Phys. Rev. A*, **39** (1989) 4140.
20. a) Z. Yan, y J. Chen, *J. Phys D: Appl. Phys.* **23** (1990) 136; b) J. S. Chiou, C. J. Liu y C. K. Chen, *J. Phys D: Appl. Phys.* **28** (1995) 1314.
21. C. T. O'Sullivan, *Am. J. Phys.*, **58** (1990), 956.
22. J. Chen, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, a) **29** (1996) 2818, b) **27** (1994) 1144.
23. E. Rebhan, *Am. J. Phys.*, **70** (2002) 1143.

24. A. Bejan, *J. Appl. Phys.*, **79** (1996) 1191.
25. K.H. Hoffmann, J.M. Buzler, y S. Schubert, *J. Non-Equilib. Thermodyn.*, **22** (1997) 311.
26. D. Gutkowics-Krusin, I. Procaccia, y J. Ross, *J. Chem. Phys.*, **69** (1978) 3898.
27. P. Salamon, A. Nitzan, B. Andresen, y R. S. Berry, *Phys. Rev. A*, **21** (1980) 2115.
28. J.L. Torres, *Rev. Mex. Fís.*, **34** (1988)18.
29. F. Angulo-Brown, *Rev. Méx. Fís.*, **37** (1991) 87.
30. A. De Vos, P.T. Landsberg, P. Baruch, y J.E. Parrott, *J. Appl. Phys.*, **74** (1993) 3631.
31. W. Spirkl, y H. Ries, *Phys. Rev. E*, **52** (1995) 3485.
32. F. Angulo-Brown, *J. Appl. Phys.*, **69** (1991) 7465.
33. C. Y. Cheng, y C. K., Chen, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **30** (1997) 1602.
34. S. Velasco, J. M. Roco, A. Medina, y J. A. White, *J. Phys. D.* **33** (2000) 355.
35. L. Chen, Z. Xiaoqin, F. Sun, y Ch. Wu, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **38** (2005) 113.
36. F. Angulo-Brown, y R. T. Páez-Hernández, *J. Appl. Phys.*, **74** (1993) 2216
37. L. A Arias-Hernández, y F. Angulo-Brown, *Rev. Mex. Fís.*, **40** (1994) 866.
38. L. Chen, Y. Bi y Ch. Wu, *J. Phys. D.*, **32** (1999) 99.
39. L. Chen, F. Sun, Ch. Wu, *J. Phys. D.*, **32** (1999) 1346.
40. L. A. Arias-Hernández, y F. Angulo-Brown, *J. Appl. Phys.*, **81** (1997) 2973.
41. K. Wark, *Thermodynamics*, USA (1983). Traducción al castellano, *Termodinámica*, Mc. Graw-Hill, México (1985).
42. M. D. Burghardt, *Engineering thermodynamics*, USA (1982). Traducción al castellano, *Ingeniería termodinámica*, Harla, México (1984).
43. P. Dulong y A. T. Petit, *Ann. Chim. Phys.* **7** (1818) 113; **7** (1818) 224; **7** (1818) 337.
44. L. Lorentz, *Ann. Phys.* **13** (1881) 582.
45. I. Langmuir, *Phys. Rev.*, **34** (1912) 401
46. L. W. Taylor, *Manual of advanced Undergraduate Experiments in Physics*, Addison-Wesley, Lonrdes (1970)
47. M. Nelkon y P. Parker, *Advanced Level Physics* , Heineman, Londres (1977).
46. E. Piña, *Termodinámica*, Limusa, México (1978).
49. M. Alonso y E. J. Finn, *Física (volumen III)* Addison-Wesley, México (1986).

50. F. Angulo-Brown, G. Ares de Parga y L.A. Arias-Hernández, *J. Phys. D.*, **35** (2002) 1089.
51. L.A. Arias-Hernández, G. Ares de Parga y F. Angulo-Brown, *Energy. Open Systems & Information Dynamics*, **10** (2003) 351.
52. L.A. Arias-Hernández, G. Ares de Parga y F. Angulo-Brown, *Energy. Open Systems & Information Dynamics*, **11** (2003) 123.

## **Apéndice: Publicaciones obtenidas y relacionadas con el presente trabajo**

1. D. Ladino-Luna y S.M.T de la Selva, *The ecological efficiency of a thermal finite time engine*. Rev. Mex. Fís. **46** (1999) 52-56.
2. D. Ladino-Luna, *Ciclo de Curzon y Ahlborn para un gas de van der Waals*. Rev. Mex. Fís. **48** (2002) 575-578.
3. D. Ladino-Luna, *Efficiency of a Curzon and Ahlborn engine with Dulong-Petit heat transfer law*. Rev. Mex. Fís. **49** (2003) 87-91. (Tiene erróneamente el volumen 48 y el año 2002).
4. D. Ladino-Luna, *Van der Waals gas as working substance in a Curzon and Ahlborn-Novikov engine*. Entropy **7** (2005) 108-121.
5. D. Ladino-Luna y R.T. Páez-Hernández, *Non-enderreversible Carnot refrigerator at maximum cooling power*. Rev. Mex. Fís. **51 E**