

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA  
UNIDAD IZTAPALAPA

Estudio de la dinámica de materia escalar en un fondo cósmico cuántico

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS  
MATEMATICAS

PRESENTA:

MARCOS JAFRED HERNÁNDEZ MERCADO

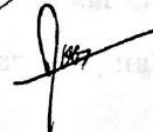


ASESORES:

Dr. HUGO MORALES TÉCOTL



Dr. JOAQUÍN DELGADO FERNÁNDEZ



IZTAPALAPA, CDMX,

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Relatividad General</b>	<b>3</b>
1.1. Espacio FLRW . . . . .	3
<b>2. Campo escalar en una geometría clásica</b>	<b>6</b>
2.1. Cuantización canónica . . . . .	6
2.2. Campo escalar en Minkowski . . . . .	7
2.3. Integral Funcional . . . . .	9
2.4. Campo escalar en un fondo curvo . . . . .	11
2.4.1. Acoplamiento conforme . . . . .	12
2.5. FLRW . . . . .	13
2.6. Expansión adiabática . . . . .	15
2.7. Tensor de energía momento . . . . .	17
<b>3. Espacio-tiempo FLRW cuántico efectivo</b>	<b>18</b>
3.1. Integral de trayectoria . . . . .	19
<b>4. Campo escalar en un fondo FLRW efectivo</b>	<b>22</b>

# Introducción

La cosmología cuántica busca completar dos aspectos fundamentales en el entendimiento del universo: describir adecuadamente lo que en relatividad general aparece como una singularidad denominada la gran explosión, y obtener predicciones de su era temprana. Estas juegan un papel importante en la escala de Planck  $\ell_{\text{Pl}} = \sqrt{\frac{G_{\text{Newton}}\hbar}{c^3}} \sim 10^{-33}\text{cm}$ , donde los efectos cuánticos, relativistas y gravitacionales juegan un papel importante.

La teoría cuántica de campos en fondos curvos clásicos [2] ha sido exitosa en la descripción de la formación de estructura a gran escala basándose en la existencia de una fase de expansión acelerada del universo conocida como inflación [4, 5, 6]. En estos análisis se conjetura que el espacio tiempo es descrito adecuadamente por la relatividad general, incluso en la era inflacionaria. Sin embargo, de acuerdo a los teoremas de Hawking y Penrose, el espacio tiempo es necesariamente singular. La existencia de singularidades impide plantear condiciones iniciales en el estado inicial de la materia.

Para indagar que es lo que sucede en la escala de Planck, se necesita una teoría cuántica de la gravedad. Hasta el momento no existe una teoría completa de gravedad cuántica, sin embargo la cosmología cuántica de lazos proporciona algunos resultados interesantes de que es lo que sucede a la escala de Planck. La cosmología cuántica es una versión simétrica de la gravedad cuántica por lazos. En este esquema el espacio tiempo se trata de manera cuántica. La implementación de esta geometría cuántica da lugar a una fuerza repulsiva cuando la curvatura del espacio tiempo alcanza el régimen Planckiano. La fuerza es tan intensa que la gran explosión se reemplaza por un rebote que implica un volumen mínimo no cero para el universo. La fuerza crece rápidamente cuando  $\rho \sim 0,01\rho_{\text{Pl}}$ , y decrece rápidamente apenas la densidad cae por debajo de este valor. En este segundo caso, el espacio tiempo cuántico es una muy buena aproximación, del espacio tiempo continuo de la relatividad general.

La geometría cuántica del modelo cósmico plano e isótropo sin constante cosmológica se ha estudiado considerando como fuente un campo escalar cuántico. Aunque el espacio de Hilbert gravitacional es de dimensión infinita y cada estado sufre un rebote, es posible considerar estados restringidos altamente centrados en una geometría clásica a tiempos tardíos lejos de la gran explosión clásica y describir su evolución. Notablemente la cosmología cuántica por lazos predice que la dinámica de estos estados es adecuadamente descrita por ciertas trayectorias efectivas para todo tiempo, inclusive el rebote. Como podría esperarse, esta trayectoria efectiva difiere de manera importante respecto de la solución de las ecuaciones de Einstein cerca del rebote. Sin embargo, de este modo, se define una métrica suave del espacio tiempo conteniendo correcciones cuánticas. Estas correcciones son extremadamente grandes en el régimen de Planck pero decaen rápidamente fuera del mismo y el espacio tiempo efectivo es indistinguible de la solución clásica FLRW en la región de curvaturas pequeñas.

Así, la cosmología cuántica provee geometrías cuánticas bien definidas a partir de las cuales

los modelos FLRW clásicos emergen lejos de la escala de Planck. A nivel fundamental no tenemos una métrica clásica sino una amplitud de probabilidad para varias métricas. Es entonces natural plantearse ¿Cómo se propagan los campos de materia cuánticos en estas geometrías cuánticas?

El acceso a una teoría cuántica de campos satisfactoria en una geometría cuántica aportaría nuevas perspectivas en varias direcciones. Primero, podría indicar una teoría coherente de formación de estructura de primeros principios. Por ejemplo, uno puede especificar las condiciones iniciales en el pasado infinito donde el espacio tiempo cuántico es bien descrito por una geometría clásica, o bien en el punto de rebote. Segundo, podría indicar un puente entre la teoría de gravedad cuántica y la teoría cuántica de campos en espacio tiempos curvos. Asimismo permitiría responder a preguntas como ¿Cuáles son las implicaciones de las fluctuaciones cuánticas de la geometría sobre la dinámica de los campos de materia? ¿Cuáles son las consecuencias de las fluctuaciones de los conos de luz de la geometría efectiva que implican el concepto físico de causalidad?

Trabajo reciente implica la dinámica de un campo cuántico de prueba sobre la geometría cuántica provista por la cosmología cuántica por lazos. Se introduce un tiempo relacional *la Leibnitz*, se analiza el surgimiento de un operador hamiltoniano del campo de prueba a partir de la ecuación de constricción del modelo gravitacional. La teoría cuántica de campos familiar en espacio tiempos clásicos FLRW está contenida en el modelo más fundamental propuesto. Sin embargo el esquema de aproximación si bien intuitivo no es sistemático y requiere mayor estudio.

En el presente proyecto abordaremos la caracterización del modelo cuántico efectivo FLRW espacialmente plano en la perspectiva de la integral de trayectoria de Feynman [8, 9]. Este provee una acción efectiva de la cual se derivan las ecuaciones hamiltonianas del modelo y en este sentido es análogo al esquema usado para el caso del interior de agujeros negros [10, 11]. En esta geometría se implementará la descomposición en modos de un campo escalar para estudiar su dinámica e investigar las propiedades de la función de dos puntos o función de Green de frecuencias positivas.

# Capítulo 1

## Relatividad General

La acción de Einstein Hilbert está dada por

$$S_{EH} = \frac{c^4}{16\pi G} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) - \frac{c^4}{8\pi G} \int_{\partial\Omega} d^3x \sqrt{h} K. \quad (1.1)$$

La integración sobre la primer integral cubre una región  $\Omega$  de la variedad espacio tiempo, y la segunda integral está definida sobre su frontera  $\partial\Omega$  la cual es solamente espacial. El término de frontera se necesita para tener un principio variacional consistente.

En adición a la acción de Einstein Hilbert, uno considera la acción de campos no gravitacionales, la cual denotaremos por  $S_m$ . Esta nos da el tensor de energía momento

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (1.2)$$

La variación de  $S_{EH} + S_m$ , nos da las ecuaciones de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.3)$$

### 1.1. Espacio FLRW

La métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker o modelo FLRW es una solución exacta de las ecuaciones de campo de Einstein Describe un universo en expansión (o contracción), homogéneo e isótropo. La métrica tiene la forma

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right). \quad (1.4)$$

Al parámetro  $k$  se le conoce como escalar de curvatura, el cual puede tomar el valor cero (especialmente plano), positivo (curvatura espacial positiva) y negativo (espacio hiperbólico). Haciendo un reescalamiento, se puede considerar solamente tres casos:  $k = 0, \pm 1$ . A  $N(t)$  se le conoce como el lapso y  $a(t)$  como el factor de escala. Tanto el lapso como el factor de escala deben ser distintos de cero. El factor de escala mide la expansión o contracción del espacio.

## Ecuaciones de Movimiento

Para derivar las ecuaciones de movimiento, se requiere el escalar de curvatura de Ricci  $R$ . Para la métrica de FLRW, se encuentra que el escalar de curvatura es

$$R = 6 \left( \frac{\ddot{a}}{N^2 a} + \frac{\ddot{a}^2}{N^2 a^2} - \frac{\dot{a}\dot{N}}{aN^3} + \frac{k}{a^2} \right). \quad (1.5)$$

Con  $\sqrt{-g} = r^2 \sin \theta N(t) a^3(t) / (1 - kr^2)^{1/2}$ . Usando integración por partes y simplificando, se encuentra que la acción gravitacional es

$$S_{grav} = -\frac{3V_0}{8\pi G} \int dt \left( \frac{a\dot{a}^2}{N} - kaN \right) \quad (1.6)$$

## Campo Escalar

Consideremos un campo escalar con acoplamiento mínimo cuya acción está dada por

$$S_m[\phi] = - \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + m^2 \phi^2 \right). \quad (1.7)$$

Para métricas y campos espacialmente homogéneos, la acción de materia se reduce a

$$S_m[\phi] = \frac{V_0}{2} \int dt N a^3 \left( \frac{\dot{\phi}^2}{N^2} - m^2 \phi^2 \right). \quad (1.8)$$

De modo que la acción total está dada por

$$S = S_{grav} + S_m = \int dt \left[ -\frac{3V_0}{8\pi G} \left( \frac{a\dot{a}^2}{N} - kaN \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{a^3 \dot{\phi}^2}{N} - m^2 N a^3 \phi^2 \right) \right] \quad (1.9)$$

## Análisis canónico

Se tienen dos variables libres  $N(t)$  y  $a(t)$ . Derivando los momentos canónicos de la manera usual, se encuentra

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} = \frac{-3V_0}{4\pi G} \frac{a\dot{a}}{N}, \quad p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{a^3 \dot{\phi}}{N} \quad p_N = \frac{\partial L_{grav}}{\partial \dot{N}} = 0. \quad (1.10)$$

Como el Lagrangiano no depende de  $\dot{N}$ , el momento canónico asociado a  $N$  es cero, por lo que no es un grado de libertad. Constricciones de esta forma están asociados con los grados de libertad de la acción. El Hamiltoniano está dado por

$$\begin{aligned} H &= p_N \dot{N} + p_a \dot{a} + p_\phi \dot{\phi} - L \\ &= \frac{N}{2} \left( -\frac{2\pi G}{3} \frac{p_a^2}{a} + \frac{p_\phi^2}{a^3} - \frac{3}{8\pi G} ka + m^2 a^3 \phi^2 \right). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Una consecuencia de que en el Hamiltoniano no aparece  $\dot{N}$  es  $\{p_N, H\} \approx 0$ , lo cual nos lleva a la constricción  $H \approx 0$ . A nivel Lagrangiano  $\{p_N, H\} \approx 0$  corresponde a una de las ecuaciones de Friedmann, la cual para  $N = 1$  es

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G a^2}{3} (\dot{\phi}^2 - m^2 \phi^2) - k. \quad (1.12)$$

La otra ecuación se obtiene de la variación de (1.9) con respecto a  $\phi$ , obteniendo

$$\ddot{\phi} + \frac{3\dot{a}}{a} \dot{\phi} - m^2 \phi = 0. \quad (1.13)$$

Centrémonos en el caso  $k = 0$  y  $m = 0$ , en este caso la solución es

$$a(\phi) = a_0 \exp(\sqrt{8\pi G/3}(\phi - \phi_0)) \quad (1.14)$$

# Capítulo 2

## Campo escalar en una geometría clásica

### 2.1. Cuantización canónica

En mecánica clásica para describir un sistema de  $N$  grados de libertad se necesitan  $N$  coordenadas  $q_i(t)$  así como las derivadas con respecto al tiempo de cada una de las  $N$  coordenadas.

Para hacerlo se construye el Lagrangiano el cual es una función de los grados de libertad  $q_i(t)$  y  $\dot{q}_i(t)$ . Así mismo se define la acción como  $S = \int dt L(q_i(t), \dot{q}_i(t))$  con  $i = 1, \dots, N$ . Al extremizar la acción se obtienen las ecuaciones de Euler Lagrange, a partir de las cuales se puede recuperar la segunda ley de Newton.

Por definición, un campo  $\phi$  es una cantidad física que puede tomar un valor distinto en cada punto del espacio, a cada instante de tiempo. En una teoría de campo el Lagrangiano se puede escribir como

$$L = \int d^{d-1}x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (2.1)$$

donde  $d - 1$  es el número de dimensiones espaciales. A  $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$  se le define como densidad lagrangiana. Del mismo modo que en mecánica clásica se define la acción como.

$$S = \int dt L = \int d^d x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (2.2)$$

Esto nos sirve para formular el principio de mínima acción. Dados el tiempo inicial  $t_i$  y el tiempo final  $t_f$  entonces la trayectoria que satisface estas condiciones es un extremal de la acción.

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt (L(\phi + \delta\phi, \partial_\mu \phi + \delta\partial_\mu \phi) - L(\phi, \partial_\mu \phi)) = \int_{t_i}^{t_f} dt \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial \phi_i} \delta\phi_i + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \delta(\partial_\mu \phi_i) \right). \quad (2.3)$$

Al integrar por partes y considerar que la variación en los extremos se anula, se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} = 0. \quad (2.4)$$



Una de las formulaciones de la mecánica clásica es la de Hamilton, en la cual se introduce el momento canónico conjugado dado por  $p = \partial_{\dot{q}}L$ . Análogamente el momento canónico conjugado para teorías de campo es

$$\Pi_i(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi_i(x))}. \quad (2.5)$$

La formulación hamiltoniana está basada matemáticamente en una transformada de Legendre del Lagrangiano  $H = p\dot{q} - L$ . Para una teoría de campo la densidad hamiltoniana está dada por

$$\mathcal{H} = \sum_i \Pi^i(x) \partial_0 \phi_i(x) - \mathcal{L}, \quad (2.6)$$

por lo cual el Hamiltoniano es

$$H = \int d^{d-1}x \mathcal{H}. \quad (2.7)$$

La idea de la teoría cuántica de campos QFT (siglas en inglés para Quantum Field Theory), es empezar con una teoría clásica de campos (la cual tiene ecuaciones de movimiento determinadas por su Lagrangiano) y posteriormente cuantizarla. De mecánica cuántica sabemos que para cuantizar un sistema clásico con coordenadas  $q^i$  y momento  $p^i$ , promovemos  $q^i$  y  $p^i$  a operadores que satisfagan las relaciones de conmutación  $[q^i, p^j] = i\delta^{ij}$ . Este mismo principio se puede aplicar en campos donde  $q^i(t)$  es reemplazado por un campo  $\phi(\mathbf{x}, t)$  mientras que  $p^i(t)$  es reemplazado por el momento conjugado  $\Pi(\mathbf{x}, t)$ . Debido a que  $\mathbf{x}$  es una variable continua,  $\delta^{ij}$  debe ser reemplazada por una delta de Dirac. Entonces el principio básico de cuantización canónica es promover  $\phi$  y  $\Pi$  a operadores que satisfagan las siguientes relaciones de conmutación.

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \Pi(t, \mathbf{y})] = i\delta^{(d-1)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (2.8)$$

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \phi(t, \mathbf{y})] = [\Pi(t, \mathbf{x}), \Pi(t, \mathbf{y})] = 0. \quad (2.9)$$

## 2.2. Campo escalar en Minkowski

Empecemos con el campo más sencillo posible, el campo escalar y libre, el cual describiera partículas con espín cero, sin carga y no interactuantes. Esto corresponde a una densidad lagrangiana cuadrática que sea invariante de Lorentz, que en su forma más general es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(-\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2) = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi^2. \quad (2.10)$$

Las ecuaciones de Euler Lagrange nos llevan a la ecuación

$$(-\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi = \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi = 0, \quad (2.11)$$

que se le conoce como la ecuación de Klein-Gordon, cuya solución es

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^{\dagger} e^{ip \cdot x}), \quad (2.12)$$

donde  $p_0 = E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$

Por otra parte el momento canónico conjugado para el Lagrangiano de Klein-Gordon es  $\Pi = \partial_0 \phi = \partial_t \phi$

$$\Pi(\mathbf{x}, t) = -i \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}}}{2}} (a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} - a_{\mathbf{p}}^{\dagger} e^{ip \cdot x}). \quad (2.13)$$

Al imponer las reglas de conmutación se encuentra que los operadores  $a$  y  $a^{\dagger}$  satisfacen las relaciones de conmutación

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}^{\dagger}] = (2\pi)^{d-1} \delta^{(d-1)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (2.14)$$

Recordando que el momento canónico conjugado es  $\Pi = \dot{\phi}$ , se encuentra que el Hamiltoniano es

$$H = \int d^{d-1}x \left[ \frac{1}{2} \Pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right]. \quad (2.15)$$

Sustituyendo los valores de  $\phi(x, 0)$ ,  $\nabla \phi(\mathbf{x}, 0)$  y de  $\Pi(\mathbf{x}, 0)$  se encuentra el Hamiltoniano en términos de los operadores  $a$  y  $a^{\dagger}$ , que al usar las relaciones de conmutación de esto últimos se llega a la siguiente expresión

$$H = \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \frac{E_{\mathbf{p}}}{2} (a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} + a_{\mathbf{p}}^{\dagger} a_{\mathbf{p}}) = \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} E_{\mathbf{p}} \left( a_{\mathbf{p}}^{\dagger} a_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^{\dagger}] \right). \quad (2.16)$$

El término dado por el conmutador nos da la energía del vacío, la cual resulta ser infinita, sin embargo debido a que en la naturaleza lo que es medible son las diferencias de energía, estaremos olvidando dicho término.

Ahora podemos darle una interpretación a los operadores  $a^{\dagger}$  y  $a$ . Interpretamos a  $a_{\mathbf{p}}$  como un operador de destrucción y  $a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$  como un operador de creación. Definimos el estado base  $|0\rangle$  como el estado que es aniquilado por todos los operadores de destrucción

$$a_{\mathbf{p}} |0\rangle = 0, \quad (2.17)$$

este estado tiene energía  $E = 0$ . Cualquier otro estado genérico del espacio de Fock se obtiene actuando un operador de creación sobre el vacío. Para un estado multipartículas es

$$|\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle = (2E_{\mathbf{p}_1})^{1/2} \dots (2E_{\mathbf{p}_n})^{1/2} a_{\mathbf{p}_1}^{\dagger} \dots a_{\mathbf{p}_n}^{\dagger} |0\rangle. \quad (2.18)$$

Los factores de normalización  $(2E_{\mathbf{p}})^{1/2}$  se escogen de modo que  $\langle \mathbf{p} | \mathbf{q} \rangle$  sea un invariante de Lorentz.

La función de correlación de dos puntos o propagador está dada por  $\langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle$ , esta puede ser interpretada como la amplitud de propagación de una partícula entre  $y$  y  $x$ . Esto solo tiene sentido si  $x^0 > y^0$ . Para tener un propagador válido para cualquier valor de  $x^0 - y^0$ , se introduce el

propagador de Feynman  $D_F(x - y) = \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | 0 \rangle$ , el símbolo  $T$  denota el orden temporal, el cual nos dice en qué orden debemos de poner los operadores de campo.

$$\langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | 0 \rangle \equiv \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \phi(y) \phi(x) | 0 \rangle. \quad (2.19)$$

El propagador de Feynman para el campo de Klein Gordon, resulta ser la función de Green del operador de Klein Gordon, es decir

$$(-\partial_\mu \partial^\mu + m^2) D_f(x - y) = -i \delta^{(4)}(x - y). \quad (2.20)$$

Para el campo de Klein Gordon el propagador de Feynman se puede escribir como [3]

$$D(x - y) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{i e^{-ip(x-y)}}{p^2 + m^2 + i\epsilon}, \quad (2.21)$$

podemos identificar a

$$D(p) = \frac{i}{p^2 + m^2} \quad (2.22)$$

como el propagador en el espacio de momentos. El propagador para se puede calcular analíticamente, la expresión es

$$\langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | 0 \rangle = \frac{im}{(2\pi)^2 |x - y|} K_1(m|x - y|) + \frac{1}{4\pi} \delta(|x - y|^2), \quad (2.23)$$

donde  $K_1(z)$  es una función de Bessel modificada de primer especie. Para una partícula con masa cero, tomamos el límite  $m \rightarrow 0$ . Usando la aproximación asintótica para  $K_1(z)$  se encuentra

$$D_F(x, y) = \frac{i}{(2\pi)^2} \frac{1}{|x - y|^2} + \frac{1}{4\pi} \delta(|x - y|^2), \quad (2.24)$$

que es la función de Green para la ecuación de onda.

## 2.3. Integral Funcional

El esquema de cuantización mostrado en la sección previa, conocido como cuantización canónica es solo una de las diferentes formas que existen de cuantizar. Un enfoque de cuantización alternativo es el de integral de Feynman, llamado también método de integral funcional. El objeto básico de este enfoque de cuantización es la integral funcional dada por

$$Z[J] = \int D\phi e^{i \int d^4x (\mathcal{L} + J\phi)}, \quad (2.25)$$

donde la integral se efectúa sobre el espacio de funciones  $\phi$ . A  $Z[J]$  se le conoce como el generador funcional de la teoría y nos da la amplitud del vacío inicial  $|0, in\rangle$  al vacío final  $|0, out\rangle$  en la presencia de una fuente  $J(x)$ , la cual produce partículas.

Un resultado importante es que la función de Green está dada por

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\langle 0|T\phi(x_1)\dots\phi(x_n)|0\rangle}{\langle 0|0\rangle} = \frac{\int D\phi e^{i\int d^4x \mathcal{L}\phi(x_1)\dots\phi(x_n)}}{\int D\phi e^{i\int d^4x \mathcal{L}}}. \quad (2.26)$$

Esta expresión se puede obtener a partir de derivadas funcionales de  $Z[J]$

$$\frac{\langle 0|T\phi(x_1)\dots\phi(x_n)|0\rangle}{\langle 0|0\rangle} = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n \ln Z}{\delta J(x_1)\dots\delta J(x_n)} \quad (2.27)$$

Ilustremos como se implementa el método de cuantización de Feynman para el campo de Klein Gordon. Consideremos la acción

$$S = \int d^n x [\mathcal{L}_0(x) + i\epsilon\phi^2/2],$$

donde  $\mathcal{L}_0$  es el Lagrangiano de Klein Gordon y el factor infinitesimal está puesto para hacer convergente a la integral funcional. Integrando por partes,  $Z[J]$  se puede reescribir como

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{i\int d^n x [-\frac{1}{2}(\square+m^2-i\epsilon)\phi+J(x)\phi(x)]}. \quad (2.28)$$

Esta es una integral de la forma

$$Z[J] = \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{p} e^{-\frac{1}{2}\bar{p}A\bar{p}+\bar{J}\cdot\bar{p}} = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det A}} e^{\frac{1}{2}\bar{J}A^{-1}\bar{J}}, \quad (2.29)$$

donde  $A = i(\square + m^2 - i\epsilon)$  es un operador. Para calcular  $A^{-1}$  se necesita la inversa de  $(\square + m^2 - i\epsilon)$  multiplicada por  $i$ . La inversa es una función  $\Pi(x - y)$  que satisface

$$(\square + m^2 - i\epsilon) \Pi(x - y) = -\delta(x - y),$$

la cual sabemos que es resuelta por el propagador. Por tanto, en contramos que

$$\Pi(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n p \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 + m^2 + i\epsilon}. \quad (2.30)$$

Entonces

$$Z[J] = N e^{-i\int d^n x \int d^n y \frac{1}{2} J(x) \Pi(x-y) J(y)}, \quad (2.31)$$

de modo que el propagador es

$$\langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle = -i^2 \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x)\delta J(y)} \Big|_{J=0} = i\Pi(x - y) = \frac{i}{(2\pi)^n} \int d^n p \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 + m^2 + i\epsilon}. \quad (2.32)$$

Que es el mismo resultado que se obtuvo al ocupar los operadores de creación y aniquilación.

## 2.4. Campo escalar en un fondo curvo

Consideremos el campo de Klein Gordon en un fondo curvo general con métrica  $g_{\mu\nu}$ , cuya densidad Lagrangiana es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sqrt{-g(x)} \{g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - [m^2 + \xi R(x)] \phi^2\}. \quad (2.33)$$

El acoplamiento entre el campo escalar y el campo gravitacional está dado por el término  $\xi R \phi^2$ , donde  $\xi$  es una constante que nos dice que tan fuerte es el acoplamiento y  $R$  es el escalar de curvatura de Ricci. Utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange, se obtienen la ecuación

$$(\square_x + m^2 + \xi R(x)) \phi(x) = 0, \quad (2.34)$$

donde

$$\square_x \phi(x) = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi = (-g)^{-1/2} \partial_\mu \left[ (-g)^{-1/2} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \right]. \quad (2.35)$$

Existe un conjunto completo de modos  $u_i(x)$  ortogonales respecto al producto interno definido por

$$(\phi_1, \phi_2) = -i \int_\Sigma [\phi_1(x) \partial_\mu \phi_2^*(x) - \phi_2(x) \partial_\mu \phi_1^*(x)] \sqrt{-g_\Sigma(x)} n^\mu d\Sigma, \quad (2.36)$$

donde  $n^\mu$  es un vector unitario ortogonal a la hipersuperficie  $\Sigma$ . El campo puede ser expandido en modos

$$\phi(x) = \sum_i \left[ a_i u_i(x) + a_i^\dagger u_i^*(x) \right] \quad (2.37)$$

Al imponer las condiciones de cuantización 2.8 y 2.9, se encuentra que los operadores  $a$  y  $a^\dagger$  deben satisfacer las relaciones de conmutación

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} \quad (2.38)$$

En un espacio tiempo curvo, el grupo de Poincaré no es más un grupo de simetría como ocurría en el espacio tiempo de Minkowski. En el espacio de Minkowski existe un conjunto natural de modos, los cuales están asociados al sistema natural de coordenadas  $(t, x, y, z)$ . En un fondo curvo, no existe esa descomposición natural de modos. Aquí se ve de manifiesto uno de los principios básicos de la relatividad general, que es que el sistema coordinado es físicamente irrelevante.

Consideremos un segundo conjunto ortogonal de modos  $\bar{u}_j(x)$ . El campo también puede ser expandido usando esta segunda base

$$\phi(x) = \sum_j \left[ \bar{a}_j \bar{u}_j(x) + \bar{a}_j^\dagger \bar{u}_j^*(x) \right]. \quad (2.39)$$

Esta nueva descomposición en modos nos define un nuevo vacío  $|\bar{0}\rangle$  en la teoría

$$\bar{a}_j |\bar{0}\rangle = 0. \quad (2.40)$$

Como ambos conjuntos son completos, los nuevos modos pueden ser escritos en términos de los viejos:

$$\bar{u}_j = \sum_i (\alpha_{ji} u_i + \beta_{ji} u_i^*), \quad (2.41)$$

y viceversa

$$u_i = \sum_j (\alpha_{ji}^* \bar{u}_j - \beta_{ji} \bar{u}_j^*). \quad (2.42)$$

A estas relaciones se les conoce como transformaciones de Bogolubov. Las matrices  $\alpha_{ij}$ ,  $\beta_{ij}$  se conocen como coeficientes de Bogolubov. Pueden ser calculadas de la siguiente manera

$$\alpha_{ji} = (\bar{u}_i, u_j) \beta_{ji} = -(\bar{u}_i, u_j^*). \quad (2.43)$$

Una relación con importantes consecuencias físicas es

$$a_i = \sum_j (\alpha_{ji} \bar{a}_j + \beta_{ji}^* \bar{a}_j^\dagger), \quad (2.44)$$

de donde se sigue

$$0 = a_i |0\rangle = \sum_j \beta_{ji}^* \bar{a}_j^\dagger |0\rangle \neq 0 \quad (2.45)$$

Esto implica que el número de partículas observadas depende del observador. En un fondo curvo, el propagador de Feynman satisface

$$[\square_x + m^2 + \xi R(x)] G_F(x - x') = -[-g(x)]^{-1/2} \delta^n(x - x') \quad (2.46)$$

### 2.4.1. Acoplamiento conforme

Existen dos valores de  $\xi$  de particular interés: el llamado acoplamiento mínimo,  $\xi = 0$  y el acoplamiento conforme  $\xi = 1/6$ . En este último caso, si  $m = 0$  la acción y las ecuaciones de campo son invariantes ante transformaciones conformes

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}(x), \quad (2.47)$$

$$\phi(x) \rightarrow \bar{\phi}(x) = \Omega^{-1}(x) \phi(x). \quad (2.48)$$

$$\phi \rightarrow \bar{\phi}(x) = \Omega^{-1}(x) \phi(x). \quad (2.49)$$

Es claro que si  $\bar{\phi}$  es solución de la ecuación transformada

$$(\bar{\square}_x + \frac{1}{6} \bar{R}(x)) \bar{\phi}(x) = 0, \quad (2.50)$$

entonces  $\phi = \Omega\bar{\phi}$  es solución de la ecuación original

$$(\square_x + \frac{1}{6}R(x))\phi(x) = 0, \quad (2.51)$$

Un caso de particular interés es un campo invariante conforme en un espacio-tiempo conforme a un espacio-tiempo plano (Minkowski). Ejemplos de espacios conformalmente planos son modelos cosmológicos Robertson Walker. Sus tensores métricos se puede escribir como

$$g_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x)\eta_{\mu\nu}. \quad (2.52)$$

En este caso, la función de Green satisface

$$D_F(x, y) = \Omega^{-1}(x)D_F^{Mink}(x, y)\Omega^{-1}(y), \quad (2.53)$$

donde  $D_F^{Mink}(x, y)$  es la función de Green para un campo sin masa en un espacio de Minkowski.

## 2.5. FLRW

La métrica para un espacio FLRW es

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \sum_{i,j}^3 h_{ij} dx^i dx^j \quad (2.54)$$

donde

$$\begin{aligned} \sum_{i,j}^3 h_{ij} dx^i dx^j &= (1 - kr^2)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \\ &= d\chi^2 + f^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \end{aligned} \quad (2.55)$$

y

$$f(\chi) = \begin{cases} \sin \chi, & 0 \leq \chi < 2\pi, & K = +1 \\ \chi & 0 \leq \chi < \infty, & K = 0 \\ \sinh \chi, & 0 \leq \chi < \infty, & K = -1 \end{cases} \quad (2.56)$$

Escribiendo  $C(\eta) = a^2(t)$ , con el tiempo conforme  $\eta$  dado por

$$\eta = \int^t a^{-1}(t') dt'. \quad (2.57)$$

La métrica de la ecuación (2.54) puede reescribirse como

$$ds^2 = C(\eta) \left( d\eta^2 - \sum_{i,j}^3 h_{ij} dx^i dx^j \right). \quad (2.58)$$

Centrémonos en el caso plano, es decir  $K = 0$ . En este caso la descomposición en modos del campo es

$$\phi(x) = \int d^{n-1}k \left[ a_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(x) + u_{\mathbf{k}}^{\dagger} u_{\mathbf{k}}^*(x) \right]. \quad (2.59)$$

Los modos pueden escribirse como

$$u_{\mathbf{k}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} C^{-1/2}(\eta) \chi_k(\eta), \quad (2.60)$$

donde  $k = |\mathbf{k}|$  y  $\chi_k$  satisface

$$\frac{d^2 \chi_k}{d\eta^2} + \{k^2 + C(\eta) [m^2 + (\xi - \frac{1}{6}) R(\eta)]\} \chi_k = 0. \quad (2.61)$$

La condición de normalización para  $\chi_k$  es

$$\chi_k \partial_{\eta} \chi_k^* - \chi_k^* \partial_{\eta} \chi_k = i. \quad (2.62)$$

En general, no se puede obtener una expresión analítica para (2.61) sin especificar a  $C(\eta)$  (variable relacionada con el factor de escala  $a(t)$ ). Un caso en el que se simplifican los cálculos es cuando  $m = 0$  y  $\chi = 1/6$ , es decir cuando tenemos acoplamiento conforme, en este caso

$$\chi_k = (2k)^{-1/2} e^{-ik\eta}. \quad (2.63)$$

El propagador se puede escribir como

$$\langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | 0 \rangle = \left( \frac{i}{(2\pi)^2} \frac{1}{|x - y|^2} + \frac{1}{4\pi} \delta(|x - y|^2) \right) (C(\eta) C(\eta'))^{-1/2}, \quad (2.64)$$

donde  $x_0 = \eta$  y  $y_0 = \eta'$ .

## Factor de escala exponencial

En la ecuación (1.14) se encontró una solución para las ecuaciones de Friedmann, obteniendo un factor de escala de la forma  $a(t) = \exp(2t/\alpha)$ . El elemento de línea es

$$ds^2 = dt^2 - e^{2t/\alpha} \sum_{i=1}^3 (dx^i)^2, \quad (2.65)$$

bajo un adecuado cambio de coordenadas, resulta ser el elemento de línea de un espacio De Sitter. En términos del tiempo conforme

$$\eta = -\alpha e^{-t/\alpha}, \quad (2.66)$$

el elemento de línea se puede escribir como



$$ds^2 = \frac{\alpha^2}{\eta^2} \left( d\eta^2 - \sum_{i=1}^3 (dx^i)^2 \right). \quad (2.67)$$

Al calcular el escalar de curvatura de Ricci  $R$ , se encuentra

$$R = 12/\alpha^2, \quad (2.68)$$

Este calculo nos hace ver que se trata de un espacio con curvatura constante positiva. La ecuación para  $\chi_k$  (2.61) es

$$\frac{d^2\chi_k}{d\eta^2} + \left\{ k^2 + \frac{1}{\eta^2} \left[ m^2 + \left( \xi - \frac{1}{6} \right) \frac{12}{\alpha^2} \right] \right\} \chi_k = 0, \quad (2.69)$$

cuya solución puede ser escrita en términos de funciones de Bessel o Hankel. La solución con el factor de normalización adecuado es

$$\chi_k(\eta) = \frac{1}{2} \sqrt[2]{\eta} H_\nu^{(2)}(k\eta), \quad (2.70)$$

donde

$$\nu^2 = \frac{9}{4} - m^2\alpha^2 - 12\chi. \quad (2.71)$$

Haciendo uso de la expresión explicita para los modos se encuentra la función de Wightman

$$G^+(x, x') = \frac{1}{16\pi\alpha^2} \left( \frac{1}{4} - \nu^2 \right) \sec(\pi\nu) F \left( \frac{3}{2} + \nu, \frac{3}{2} - \nu; 2, 1 + \frac{(\Delta\eta - i\epsilon)^2 - |\Delta\mathbf{x}|^2}{4\pi\eta\eta'} \right), \quad (2.72)$$

donde  $F$  es una función hipergeométrica.

## 2.6. Expansión adiabática

En algunas aplicaciones como la regularización de divergencias ultravioletas, uno examina el comportamiento a pequeñas distancias. Una enfoque para el estudio a cortas distancias de la función de Green es la expansión adiabática

Introduciendo las coordendas normales de Riemann  $y^\mu$  para el punto  $x$ , con el origen en  $x'$ , se puede desarrollar

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{3} R_{\mu\alpha\nu\beta} y^\alpha y^\beta - \frac{1}{6} R_{\mu\alpha\nu\beta;\gamma} y^\alpha y^\beta y^\gamma + \dots \quad (2.73)$$

donde los coeficientes estan evaluados en  $y=0$ .

Definiendo

$$\mathcal{G}_F(x, x') = (-g(x))^{1/4} G_F(x, x') \quad (2.74)$$

y su transformada de Fourier por

$$\mathcal{G}_F(x, x') = (2\pi)^{-n} \int d^n k e^{-iky} \mathcal{G}_F(k) \quad (2.75)$$

Desarrollando (2.46) en coordenadas normales y pasando al espacio de momentos  $k$ ,  $\mathcal{G}_F(k)$  se puede resolver iterativamente a cualquier orden. Las primeras aproximaciones son

$$\mathcal{G}_F(k) \approx -(k^2 + m^2)^{-1} + (\frac{1}{6} - \xi)R(k^2 + m^2)^{-2} + \dots \quad (2.76)$$

Sustituyendo se encuentra

$$\mathcal{G}_F(x, x') \approx - \int \frac{d^n k}{(2\pi)^4} e^{-iky} \left[ a_0(x, x') + a_1(x, x') \left( -\frac{\partial}{\partial m^2} \right) + a_2(x, x') \left( \frac{\partial}{\partial m^2} \right)^2 \right] (k^2 + m^2)^{-1} \quad (2.77)$$

donde

$$a_0(x, x') = 1 \quad (2.78)$$

$$a_1(x, x') = (\frac{1}{6} - \xi)R - \frac{1}{2}(\frac{1}{6} - \xi)R_{;\alpha}y^\alpha - \frac{1}{3}a_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta \quad (2.79)$$

$$a_2(x, x') = \frac{1}{2}(\frac{1}{6} - \xi)^2 R^2 + \frac{1}{3}a_\lambda^\lambda \quad (2.80)$$

Introduciendo la representación integral

$$-(k^2 + m^2 - i\epsilon)^{-1} = -i \int_0^\infty ds e^{-is(k^2 + m^2 - i\epsilon)} \quad (2.81)$$

$$\mathcal{G}_F(x, x') = -i(4\pi)^{-n/2} \int_0^\infty ids (is)^{-n/2} e^{-im^2s + (\sigma/2is)} F(x, x'; is), \quad (2.82)$$

donde  $\sigma(x, x') = \frac{1}{2}y_\alpha y^\alpha$  y  $F(x, x'; is)$  tiene la siguiente expansión adiabática

$$F(x, x'; is) \approx \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x, x')(is)^j. \quad (2.83)$$

La función de Green se puede escribir como

$$G_F(x, x') = -i(-g(x))^{1/4}(x, x')(4\pi)^{-n/2} \int_0^\infty ids (is)^{-n/2} e^{-im^2s + (\sigma/2is)} F(x, x'; is) \quad (2.84)$$

Por lo tanto, el propagador de Feynman toma la siguiente forma

$$G_F(x, x') \approx \frac{-i\pi(-g(x))^{1/4}}{(4\pi i)^{n/2}} \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x, x') \left( -\frac{\partial}{\partial m^2} \right)^j \quad (2.85)$$

$$\times \left[ \left( \frac{2m^2}{-\sigma} \right)^{(n-2)/4} H_{(n-2)/2}^{(2)}((2m^2\sigma)^{1/2}) \right] \quad (2.86)$$

## 2.7. Tensor de energía momento

En el espacio de Minkowski se encontró que el valor de expectación de  $H$  es infinito. Esta divergencia puede ser eliminada fácilmente introduciendo el orden normal. En espacios curvos, la solución no es tan trivial. Una de las razones es por el rol que ocupa  $T_{\mu\nu}$  en la gravedad. En ausencia de gravedad solo las diferencias de energía son observables. Cuando se toma en cuenta a la gravedad no es tan simple, ya que la energía es una fuente de gravedad, y tiene efectos sobre la curvatura del espacio tiempo. Ahora no se puede simplemente despreciar la energía infinita del estado baso. Se requiere elaborar un esquema de renormalización el cual involucra la dinámica del campo gravitacional.

La llamada teoría cuántica de campos en fondos curvos, es una teoría semiclásica, en la cual el campo gravitacional es tratado clásicamente, mientras que los campos de materia son tratados cuánticamente. Se busca encontrar una teoría basada en las ecuaciones de campo de Einstein, algo de la forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G \langle T_{\mu\nu} \rangle \quad (2.87)$$

Sabemos que clásicamente se satisface

$$\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}} = T_{\mu\nu}, \quad (2.88)$$

ahora se busca obtener el análogo cuántico. Utilizando el formalismo de integral funcional, se puede encontrar

$$\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta W}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\langle out, 0 | T_{\mu\nu} | 0, in \rangle}{\langle out, 0 | 0, in \rangle}, \quad (2.89)$$

donde  $Z[0] = e^{iW}$ .

Se puede encontrar que

$$W = \frac{i}{2} \int_{m^2}^{\infty} dm^2 \int d^n x [-g(x)]^{-1/2} G_F^{DS}(x, x). \quad (2.90)$$

Se puede definir una densidad Lagrangiana efectiva  $\mathcal{L}_{eff}$ , dada por

$$W = \int \mathcal{L}_{eff} d^n x \int [-g(x)]^{1/2} L_{eff}(x) d^n x. \quad (2.91)$$

$L_{eff}$  satisface

$$L_{eff}(x) = [-g(x)]^{-1/2} \mathcal{L}_{eff} = \frac{i}{2} \lim_{x \rightarrow x'} \int_{m^2}^{\infty} dm^2 G_F^{DS}(x, x). \quad (2.92)$$

Existen términos divergentes que deben ser renormalizados, a los términos divergentes les llamaremos  $L_{div}$ . De modo que el Lagrangiano se vuelve

$$L_{ren} = L_{eff} - L_{div} \quad (2.93)$$

Al restar  $L_{div}$ , las ecuaciones de campo se transforman en

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + a^{(1)}H_{\mu\nu} + b^{(2)}H_{\mu\nu} = -8\pi G \frac{\langle out, 0 | T_{\mu\nu} | 0, in \rangle}{\langle out, 0 | 0, in \rangle}. \quad (2.94)$$

# Capítulo 3

## Espacio-tiempo FLRW cuántico efectivo

Centrémonos en el modelo FLRW con  $k = 0$ ,  $\Lambda = 0$  y un campo escalar con masa  $m = 0$  como fuente.

El espacio fase gravitacional está descrito por el par canónico  $a$  y  $p_a$ . Por medio de una transformación canónica extendida se puede pasar a unas nuevas variables  $\nu$  y  $b$ , conocidas como variables de Ashtekar Barbero. Para este modelo:

$$\nu = \frac{a^3 V_0}{2\pi G}, \quad b = -\frac{4\pi G}{3V_0} \frac{p_a}{a^2}, \quad (3.1)$$

Cuyo paréntesis de Poisson está dado por  $\{\nu, b\} = -2$ . El espacio fase gravitacional está dado por  $\phi$  y su momento canónico conjugado  $p$ .

El espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_{kin}$  cinemático es un producto tensorial de los espacios de Hilbert gravitacional y de materia  $\mathcal{H}_{kin} = \mathcal{H}_{kin}^{grav} \otimes \mathcal{H}_{kin}^{mat}$ . Los elementos de  $\mathcal{H}_{kin}^{grav}$  tienen una norma dada por  $\|\Psi\|^2 = \sum_{\nu} |\Psi(\nu)|^2$ . El espacio de Hilbert de materia es  $\mathcal{H}_{kin}^{mat} = L_2(\mathcal{R}, d\phi)$ . Por tanto los elementos del espacio de Hilbert cinemático tienen norma

$$\|\Psi\|^2 = \sum_{\nu} \int d\phi |\Psi(\nu, \phi)|^2. \quad (3.2)$$

La dinámica cuántica está codificada en la constricción

$$-\hat{C}\Psi(\nu, \phi) \equiv (-\hat{p}^2 + \Theta) \Psi(\nu, \phi) = 0, \quad (3.3)$$

donde  $\hat{p} = -i\hbar\partial_{\phi}$  y  $\Theta$  es un operador positivo y autoadjunto, definido por

$$\Theta \equiv \frac{3\pi G}{l_0^2} \left( \sqrt{|\hat{\nu}|} \sin \hat{l}_0 b \sqrt{|\hat{\nu}|} \right)^2 \quad (3.4)$$

donde  $\hat{\nu}\Psi(\nu) = \nu\Psi(\nu)$  y  $\widehat{e^{il_0 b}}$  actúa como operador de translación  $\left(\widehat{e^{il_0 b}}\Psi\right)(\nu) = \Psi(\nu + 2l_0\hbar)$ . La forma explícita de  $\Theta\Psi(\nu)$  está dada por una ecuación en diferencias. Las soluciones a la ecuación de constricción así como su producto interno, pueden ser obtenidos por el método de promedio en el grupo.

Dado un estado  $|\Psi_{kin}\rangle \in \mathcal{H}_{kin}$ , un estado físico está dado por

$$|\Psi_{phys}\rangle = \int d\alpha e^{i\hbar\alpha\hat{C}} |\Psi_{kin}\rangle \quad (3.5)$$

Se puede encontrar que la relación entre  $\Psi_{phys}(\nu, \phi)$  y  $\Psi_{kin}(\nu, \phi)$  se puede escribir como

$$\Psi_{phys}(\nu, \phi) = \sum_{\nu'} \int d\phi' A(\nu, \phi; \nu', \phi') \Psi_{kin}(\nu', \phi') \quad (3.6)$$

donde

$$A(\nu, \phi; \nu', \phi') := \int d\alpha \langle \nu, \phi | e^{(i/\hbar)\alpha\hat{C}} | \nu', \phi' \rangle, \quad (3.7)$$

a  $A$  se le conoce como amplitud de extracción, ya que extrae un estado físico a partir de uno cinemático. El producto interno físico está definido por la acción de un bra  $\langle \Phi_{phys} |$  sobre un ket  $|\Psi_{kin}\rangle$ , es decir

$$\langle \Phi_{phys} | \Psi_{kin} \rangle = \left\langle \Phi_{kin} \left| \int d\alpha e^{(i/\hbar)\alpha\hat{C}} \right| \Psi_{kin} \right\rangle \quad (3.8)$$

### 3.1. Integral de trayectoria

En mecánica cuántica usual, las integrales de trayectoria dan una expresión para los elementos de matriz del operador de evolución. Dicha derivación se debe a Feynman, el la derivó escribiendo el operador de evolución como el producto de  $N$  operadores infinitesimales e insertando relaciones de completéz entre estos operadores de evolución infinitesimales. De esta forma llegó a una integral de trayectoria discreta; la continua la obtuvo tomando el límite  $N \rightarrow \infty$ .

En el presente problema no se tiene operador de evolución, pero tenemos una restricción que jugará un papel similar; la amplitud de extracción reemplaza la amplitud de transición. Imitando lo que hizo Feynman en mecánica cuántica usual, se encuentra que la amplitud de extracción es

$$\langle \nu_f, \phi_f | e^{i\hbar\alpha\hat{C}} | \nu_i, \phi_i \rangle = \sum_{\nu_{N-1}, \dots, \nu_1} \left(\frac{l_0}{\pi}\right)^N \int db_N \dots db_1 \int d\phi_{N-1} \dots d\phi_1 \left(\frac{1}{2\pi}\right)^N \int dp_N \dots dp_1 e^{iS_N/\hbar}, \quad (3.9)$$

donde

$$S_N = \epsilon \sum_{n=0}^{N-1} \left[ p_{n+1} \frac{\phi_{n+1} - \phi_n}{\epsilon} - \frac{b_{n+1}}{2} \frac{\nu_{n+1} - \nu_n}{\epsilon} + \alpha \left( p_n^2 - \frac{3\pi G}{l_0^2} \sqrt{\nu_n \nu_{n+1}} \frac{\nu_n + \nu_{n+1}}{2} \sin^2(l_0 b_{n+1}) \right) \right]. \quad (3.10)$$

Cabe recalcar que  $\nu$  solo toma valores discretos, mientras que  $b \in (0, \pi/l_0)$ . Debido a la discretez de  $\nu$  no es posible interpretar a  $(\nu_{n+1} - \nu_n)/\epsilon$  como una derivada. Una identidad útil para nuestro fin es

$$\frac{\pi}{l_0} \sum_{\nu_n} \int_0^{\pi/l_0} db_n \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} d\nu_n \int_{-\infty}^{\infty} db_n. \quad (3.11)$$

Esta identidad nos permite que  $\nu$  y  $b$  puedan tomar cualquier valor sobre el espacio fase clásico. Ahora sí es posible tomar el límite  $N \rightarrow \infty$  e interpretar  $\dot{\nu} = (\nu_{n+1} - \nu_n)/\epsilon$ . Haciendo esto, encontramos

$$A(\nu, \phi; \nu' \phi') = \int d\alpha \int \mathcal{D}\nu \mathcal{D}b \mathcal{D}p \mathcal{D}\phi e^{i\bar{S}}, \quad (3.12)$$

donde

$$\bar{S} = \int_0^1 d\tau \left( p\dot{\phi} + \frac{1}{2}\nu\dot{b} - \alpha \left( p^2 - 3\pi G\nu^2 \frac{\sin^2 l_0 b}{l_0^2} \right) \right). \quad (3.13)$$

Notemos que la acción  $\bar{S}$  no es simplemente la acción clásica, como ocurre en el caso de mecánica cuántica usual. Esta acción contiene correcciones de gravedad cuántica. La diferencia proviene del hecho que Feynman utilizó la representación de Schrodinger, mientras que en cosmología cuántica la cinemática está basada en una representación polimérica que no es equivalente a la de representación de Schrodinger.

Las ecuaciones de movimiento para (3.13) son

$$\dot{\phi} \approx 2\alpha p \quad (3.14)$$

$$\dot{p} \approx 0 \quad (3.15)$$

$$\dot{\nu} = 12\alpha\pi G\nu^2 \frac{\sin bl_0 \cos bl_0}{l_0} \quad (3.16)$$

$$\dot{b} = 12\alpha\pi G\nu \frac{\sin^2 l_0 b}{l_0^2}, \quad (3.17)$$

con la constricción

$$H = \alpha C = \alpha \left( p^2 - 3\pi G\nu^2 \frac{\sin^2 l_0 b}{l_0^2} \right) \approx 0. \quad (3.18)$$

Las soluciones para  $\nu$  y  $\phi$  son

$$\nu = \nu_0 \cosh \left( \sqrt{12\pi G}(\phi - \phi_0) \right) \quad (3.19)$$

$$b = \frac{2\text{sign}(\nu_B)}{l_0} \tan^{-1} \left( e^{-\sqrt{12\pi G}(\phi - \phi_B)} \right), \quad (3.20)$$

donde  $\nu_B$  y  $\phi_B$  son constante de integración. Estas trayectorias representan universos con rebote, siendo  $\phi_B$  y  $\nu_B$  los valores en el punto de rebote. El volumen mínimo se relaciona con el momento del campo por  $|\nu_B| = 2l_0 p / \sqrt{12\pi G}$ . Mientras en relatividad general todas las trayectorias comienzan

en el Big-Bang (tienden a  $\nu = 0$  mientras  $\phi \rightarrow \infty$ ), aquí las trayectorias satisfacen  $\nu \rightarrow \infty$  mientras  $\phi \rightarrow -\infty$ .

Ocupando las ecuaciones (3.1) y (3.19), se encuentra el factor de escala para un espacio FLRW efectivo.

$$a(t) = \left( \frac{2\pi G \nu_B}{V_0} \right)^{1/3} \left( \cosh \sqrt{12\pi G} (t - t_0) \right)^{1/3} \quad (3.21)$$

## Capítulo 4

### Campo escalar en un fondo FLRW efectivo



# Bibliografía

- [1] B. F. Schutz, *A First Course In General Relativity*. Cambridge University Press; 2nd edition (2009)
- [2] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, “Quantum Fields in Curved Space,” Cambridge University Press; Edición: Reprint (27 de abril de 1984)
- [3] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, “An Introduction to quantum field theory,”
- [4] M. Benetti, L. Graef and R. O. Ramos, “Observational Constraints on Warm Inflation in Loop Quantum Cosmology,” arXiv:1907.03633 [astro-ph.CO].
- [5] A. Barrau, “Astrophysical and cosmological signatures of Loop Quantum Gravity,” *Scholarpedia* **12**, no. 10, 33321 (2017). doi:10.4249/scholarpedia.33321
- [6] A. Ashtekar and A. Barrau, “Loop quantum cosmology: From pre-inflationary dynamics to observations,” *Class. Quant. Grav.* **32**, no. 23, 234001 (2015) doi:10.1088/0264-9381/32/23/234001 [arXiv:1504.07559 [gr-qc]].
- [7] P. Singh, “Loop quantum cosmology: A brief introduction,” *PoS QGQGS 2011*, 007 (2011). doi:10.22323/1.140.0007
- [8] H. Kleinert. *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets*. World Scientific. Default Book Series (2009).
- [9] A. Ashtekar, M. Campiglia and A. Henderson, “Path Integrals and the WKB approximation in Loop Quantum Cosmology,” *Phys. Rev. D* **82**, 124043 (2010) doi:10.1103/PhysRevD.82.124043 [arXiv:1011.1024 [gr-qc]].
- [10] J. Cortez, W. Cuervo, H. A. Morales-Técotl and J. C. Ruelas. Effective loop quantum geometry of Schwarzschild interior. *Phys. Rev. D* **95**, no. 6, 064041 (2017) doi:10.1103/PhysRevD.95.064041 [arXiv:1704.03362 [gr-qc]].
- [11] H. A. Morales-Técotl, S. Rastgoo and J. C. Ruelas, “Effective dynamics of the Schwarzschild black hole interior with inverse triad corrections,” arXiv:1806.05795 [gr-qc].