

***Ecuaciones Diferenciales Ordinarias  
En Circuitos Eléctricos No Lineales***

**Tesis que presenta  
Juan Domingo Pérez López**

**Para la obtención del grado  
*De Maestro en Ciencias: Matemáticas*  
Mayo del 2007.**



**Asesor: Dr. Ernesto A. Lacomba Zamora**

**México D. F.**

# Índice general

0.1. Circuitos no lineales en general y sus gráficas . . . . .	4
0.1.1. Gráficas asociadas a un circuito . . . . .	4
0.1.2. Análisis de los circuitos por ramas y nodos . . . . .	5
0.1.3. Las ecuaciones diferenciales de las redes no lineales . . . . .	10
0.1.4. Espacios simplécticos y reciprocidad en circuitos . . . . .	21
0.2. Resultados para redes lineales y conclusiones . . . . .	34
0.2.1. Transformación de fuentes . . . . .	34
0.2.2. Topología de las Redes Lineales en el Estado Estacionario	37
0.2.3. Conclusiones . . . . .	42
<b>A. Elementos en Circuitos Eléctricos. . . . .</b>	<b>43</b>
A.1. Definición y características de los principales elementos eléctricos lineales. . . . .	43
A.2. Resistor. . . . .	43
A.3. Capacitor. . . . .	44
A.4. La bobina. . . . .	45
A.5. Generador o Fuente de Voltaje. . . . .	46
A.6. Generador de Corriente . . . . .	46
A.7. Análisis y comparación de elementos lineales y no lineales. . . . .	47
<b>B. Conceptos Matemáticos Básicos. . . . .</b>	<b>51</b>
B.1. Funcional Lineal y Espacio Dual . . . . .	51
B.1.1. Espacio Simpléctico y Forma Bilineal . . . . .	53
B.2. Homología y Cohomología . . . . .	56

## Resumen

En este trabajo se trata de hacer un estudio de las ecuaciones diferenciales que aparecen en conexión con los circuitos eléctricos.

Para iniciar podemos decir que, la forma de conectar los elementos de un circuito implica la existencia de mapeos lineales que se relacionan de forma muy natural a los espacios vectoriales asociados. Los espacios vectoriales (cadenas) representan las corrientes y los espacios vectoriales duales (cocadenas) representan voltajes. Asimismo la suma directa de un espacio vectorial con su dual tiene una estructura simpléctica natural, donde las condiciones de reciprocidad tienen mucha importancia.

La reciprocidad aparece aquí cuando las características del circuito definen ciertas subvariedades de los espacios simplécticos, que son generadas por funciones escalares; Siempre hay una reciprocidad lineal debido a las leyes de interconexión de Kirchhoff que definen subespacios lineales. Una clase amplia de circuitos no lineales llamados recíprocos presenta también reciprocidad.

En este trabajo tratamos de demostrar tres resultados de Ekmann, además de que hasta donde tenemos información se demuestran por primera vez, encontramos que en los circuitos lineales las demostraciones se volvieron sencillas usando matrices, sin necesidad de usar la herramienta simpléctica. En el caso de los circuitos no lineales vislumbramos que el asunto corre por el lado de la posible invertibilidad de las características de los elementos eléctricos que forman al circuito.

Estas propuestas o resultados de Ekmann nos parecieron importantes porque constituyen un intento para obtener ecuaciones diferenciales explícitas en un circuito no lineal. Estas condiciones se dan cuando suponemos que las capacitancias e inductancias son siempre funciones positivas; lo cual implica que las relaciones constitutivas de las cuales las anteriores son sus derivadas, son invertibles.

Además podemos usar indistintamente control por voltaje o por carga para los capacitores, y por corriente o por flujo para los inductores.

En este trabajo también usamos la construcción de una función llamada potencial mixto y damos una demostración del teorema de Brayton-Mosser de una forma mas sencilla que las que se dan en la literatura en general en la sección 1,3.

# Introducción

En este trabajo tratamos de presentar un estudio de conceptos que son de interés en las matemáticas, aplicándolos a los circuitos eléctricos lineales y no lineales. Un circuito eléctrico consiste en la interconexión de varios elementos eléctricos.

Nuestro interés está más enfocado sobre las ecuaciones diferenciales ordinarias que aparecen de manera natural en los circuitos eléctricos. Sin embargo debido a la forma como se comportan los principales elementos eléctricos, y la forma como están interconectados dentro del circuito, también echamos mano de conceptos de Topología Algebraica como son: Complejos simpliciales, cadenas, cocadenas, operadores frontera y cofrontera. Así mismo, hacemos uso del Algebra Lineal y del Análisis Matemático.

Una propiedad que es muy importante en nuestro estudio es la reciprocidad que aparece asociada a las redes eléctricas. En el caso más simple ésta está asociada a la propiedad general  $d^2 f = 0$  (con  $d$  la diferencial exterior), donde  $f$  es una función escalar y así aparecen las llamadas Subvariedades Lagrangianas, que definiremos en el curso de este trabajo.

Debido a las leyes de Kirchhoff, una red eléctrica siempre posee una reciprocidad lineal, que resulta de las distintas interconexiones de los elementos, independientemente de su naturaleza.

Cuando existen inductores o capacitores, aparecen ecuaciones diferenciales ordinarias que bajo ciertas condiciones están definidas sobre una suvariedad lagrangiana  $\mathcal{L}$ , que en general es no lineal. Cuando ciertas condiciones específicas son válidas, éstas quedan en forma explícita. Las leyes fenomenológicas de Ohm para los resistores son de gran ayuda porque hacen que el espacio fase se reduzca, esencialmente, a las corrientes y voltajes correspondientes a los elementos no resistivos.

En analogía con las ecuaciones de tipo gradiente o de Hamilton, aparecen las ecuaciones de Brayton-Moser que también se mencionan aquí y que están definidas al menos en forma local, debido a la reciprocidad que presentan los circuitos correspondientes.

Aquí aclaramos que, generalmente las variables que controlan a un inductor y a un capacitor son corriente y voltaje, respectivamente.

## 0.1. Circuitos no lineales en general y sus gráficas

### 0.1.1. Gráficas asociadas a un circuito

A continuación definiremos lo que se conoce como una gráfica planar:

**Definición.** Una *gráfica planar* es aquella que puede trazarse en un plano sin que se crucen sus aristas. La figura 1 muestra una gráfica con dos aristas que se cruzan; Pero es posible dibujar la figura como se muestra en b), sin que se crucen las aristas. Por lo tanto es una gráfica planar.

En cambio la que se muestra en la figura c) no es posible dibujarla de ninguna forma sin que se crucen sus aristas.

Por lo tanto es no planar.

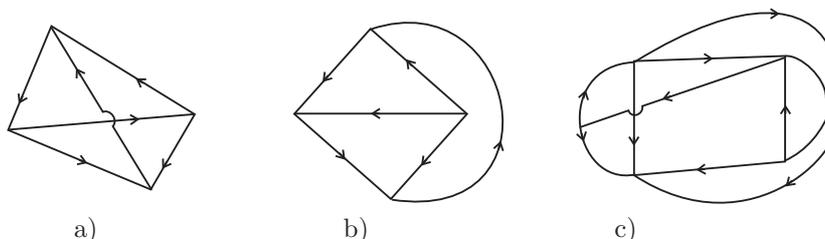


Figura 1: Ilustración del concepto de gráfica planar.

**Definición** Una *Subgráfica* es cualquier parte de una gráfica.

Las figuras a) y b) muestran dos posibles conjuntos de subgráficas de la gráfica 1 – a).

Se conoce como *subgráfica degenerada* a aquella que está formada por un solo nodo.

Una gráfica es *pivotante* si puede dividirse en dos subgráficas, unidas por medio de un solo nodo. Esto se muestra en la figura y el ejemplo. Una gráfica que no tiene esta propiedad se conoce como no pivotante. Este es el caso de las gráficas de la figura 2.

Una gráfica pivotante puede tratarse como dos gráficas no pivotantes independientes, si se les separa en el nodo que sirve de pivote, ya que las ecuaciones de Kirchoff de cada una de las gráficas son independientes.

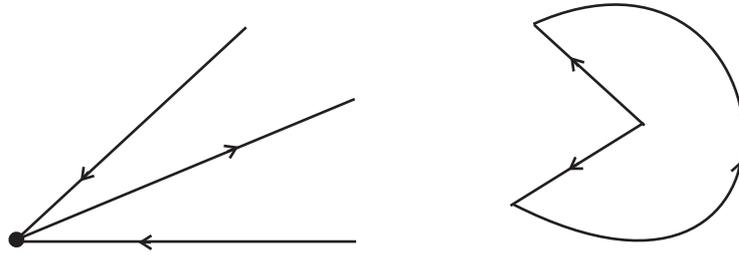


Figura 2: Dos posibles conjuntos de subgráficas de la gráfica de la figura 1b.

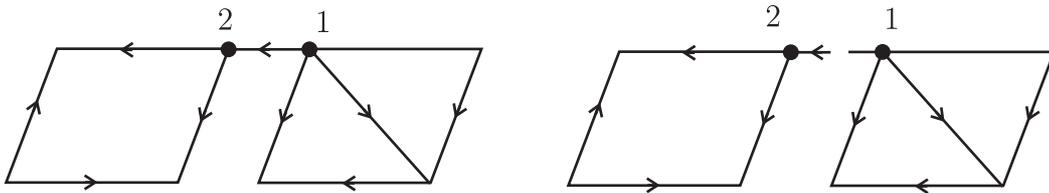


Figura 3: Gráfica pivotante.

### 0.1.2. Análisis de los circuitos por ramas y nodos

En esta sección haremos el estudio de los circuitos en base al análisis por ramas y nodos. La topología del circuito tiene que ver con la forma como se interconectan los elementos eléctricos que consideramos en este trabajo.

La formas de las interconexiones de los elementos se refleja en las leyes de Kirchhoff y de Tellegen.

En este rubro lo que más interesa es cómo se orientan los elementos y las mallas, lo que tiene relación con la topología combinatoria. Para que estas ideas vayan quedando claro, consideremos la siguiente analogía entre un circuito que tiene como elementos un resistor, dos capacitores y una fuente de voltaje con la gráfica (complejo simplicial de una dimensión) orientada que se le asocia; la cual se muestra a su derecha

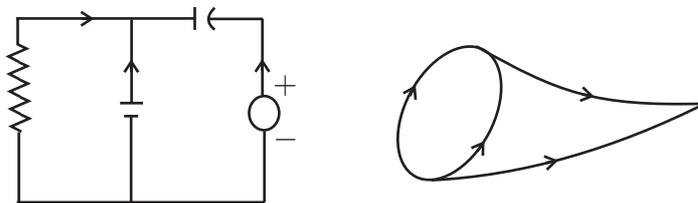


Figura 4: Analogía de un circuito con su gráfica orientada.

Haremos las siguientes hipótesis que son razonables en este trabajo:

- a) Todos los elementos del circuito están conectados a nodos en sus dos extremos,
- b) una rama ó elemento conecta dos diferentes nodos y
- c) un nodo tiene al menos dos ramas que inciden sobre él.

Si tenemos  $n$  nodos y  $b$  ramas en un circuito dado, nuestras hipótesis anteriores implican que  $b \geq n$ .

Si  $0_1, \dots, 0_n$  son los diferentes nodos y  $e_1, \dots, e_b$  las diferentes ramas de un circuito, podemos formalmente definir los siguientes espacios vectoriales reales, conocidos como 0-cadenas y 1-cadenas respectivamente:

$$C_0 = \left\{ \sum_k \beta_k 0_k : \beta_k \in R \right\}$$

$$C_1 = \left\{ \sum_j \alpha_j e_j : \alpha_j \in R \right\}.$$

Los elementos de estos espacios vectoriales físicamente pueden ser interpretados como asignar un número a cada nodo ó a cada rama del circuito. Estos números, asignados en un instante de tiempo dado  $t$  son la corriente instantánea  $I_k$  en el nodo  $k$  y la corriente instantánea de rama  $i_j$  en la rama  $j$ . Los correspondientes vector de corriente de nodo  $I$  y de corriente de rama  $i$  son, respectivamente

$$I = \sum_{k=1}^n I_k O_k \in C_0,$$

$$i = \sum_{j=1}^b i_j e_j \in C_1.$$

Por ejemplo,  $e_j \in C_1$  significa una corriente unitaria en la rama  $j$  y cero en cualquier otra rama.

Para poder tratar con cantidades como potenciales de nodo y caídas de potencial eléctrico (o voltaje) a través de las ramas tenemos que considerar los espacios duales de los definidos anteriormente esto es  $C^0 = C_0^*$  y  $C^1 = C_1^*$ , conocidos como 0-cocadenas y 1-cocadenas respectivamente.

Para dar una descripción de las interconexiones entre nodos y ramas se tiene que definir un operador llamado operador frontera  $\partial : C_1 \rightarrow C_0$ . Así mismo en los respectivos espacios duales, definimos el operador cofrontera  $\partial^* : C^0 \rightarrow C^1$ .

Como el operador frontera es una transformación lineal, es suficiente con definirlo en las ramas  $e_i$  la cuales forman una base de  $C_1$ , y posteriormente extenderlo por linealidad.

En efecto, si  $e_l \in C_1$  es una rama dirigida del nodo  $O_k$  al nodo  $O_j$  definimos  $\partial e_l = O_j - O_k \in C_0$ .

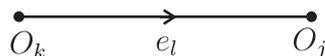


Figura 5: Rama dirigida del nodo  $O_k$  al nodo  $O_j$ .

Para definir la cofrontera primero tomamos la base dual  $e_1^*, \dots, e_b^*$  en  $C^1$  y  $O_1^*, \dots, O_n^*$  en  $C^0$ , esto es, las formas lineales tal que  $e_l^*(e_j) = \delta_{lj}$ ,  $O_K^*(O_l) = \delta_{Kl}$ . Así tenemos  $\partial^* O_K^* = \sum_m \in_{km} e_m^*$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , donde los coeficientes  $\in_{Kk}$  están por determinarse. Por la definición estandar de mapeo dual y de  $\partial e_l$  en general obtenemos

$$\partial^* O_K^*(e_l) = O_K^*(\partial e_l) = \delta_{lj} - \delta_{lK}$$

Ya que el lado izquierdo es  $\in_{kl}$  por la expresión de arriba, obtenemos

$$\in_{kl} = \partial^* O_K^*(\partial e_l) = \left\{ \begin{array}{l} -1 \text{ si } e_l \text{ sale del nodo } O_k, \\ +1 \text{ si } e_l \text{ llega hacia el nodo } O_k, \\ 0 \text{ si } e_l \text{ no incide en } O_k. \end{array} \right\} \quad (5)$$

Esto implica que  $\partial^* O_K^*$  es la suma algebraica de duales de los elementos dirigidos al nodo  $k$ . Una interpretación geométrica de este hecho es que el dual del nodo  $O_K$  es cofrontera común para los duales de todas las ramas que llegan a él, con el signo adecuado. La matriz de  $\partial$  o matriz de incidencia es exactamente  $(\in_{kl})$ .

A un elemento  $V^* \in C^0$  se le llama vector potencial de nodo. De la misma forma, a un elemento  $v^* \in C^1$  se le llama vector potencial de rama así que podemos escribir

$$V^* = \sum_{K=1}^n V_K O_K^*, \quad v^* = \sum_{j=1}^b v_j e_j^*.$$

los números  $V_K$  son potenciales instantáneos asignados a los nodos y  $v_j$  son caídas de potencial (o de voltaje) instantáneo asignados a las ramas.

Ahora podemos citar las leyes de Kirchhoff, en una forma que es adecuada para su formulación en términos de operadores  $\partial$  y  $\partial^*$ . Estas últimas también serán reescritas más adelante en una forma más familiar:

Ley de corrientes de Kirchhoff: La suma algebraica de corrientes de las ramas que entran a cualquier nodo es cero.

Ley de voltajes de Kirchhoff: La caída de voltaje a través de un elemento, es la diferencia algebraica entre los potenciales de los nodos en los que incide.

Dado un vector corriente de rama arbitrario  $i = \sum i_j e_j \in C_1$  y el vector potencial de nodo

$$v^* = \sum v_K 0_K^*,$$

calculamos

$$\partial i = \sum i_j \partial e_j = \sum I_l 0_l, \partial^* v^* = \sum v_K \partial^* 0_K^* = \sum V_l e_l^*,$$

donde por dualidad y tomando en cuenta (5) obtenemos

$$I_l = 0_l^* \sum i_j \partial e_j = \sum_j i_j \in_{lj}, V_l = \sum_k v_k \partial^* 0_K^*(e_l) = \sum_K v_K \in_{Kl}. \quad (6)$$

Recordemos que  $\in_{Kl} = \pm 1$  (no cero) solamente cuando la rama  $e_l$  incide en el nodo  $0_K$ ,  $I_l$  es la corriente neta que entra al nodo  $0_K$ , mientras  $V_l = v_j - v_m$  cuando la rama  $e_l$  va de  $0_m$  a  $0_j$ .

Observemos que la definición formal de  $\partial e_l$  se ve como la fórmula para la cantidad dual  $V_l$ , mientras  $\partial^* 0_K^*$  se ve como  $I_l$ . La explicación es que a fin de calcular los coeficientes en (6), tuvimos que aplicar los elementos de la base dual correspondiente.

Ahora es evidente que la ley de corrientes de kirchhoff (LCK) y la ley de voltaje (LVK) se pueden reescribir diciendo que  $i \in C_1$ ,  $v \in C^1$  deben satisfacer que  $\partial i = 0$  y  $v = \partial^* v^*$  para algún  $v^* \in C^0$ . Esto puede escribirse simplemente como

$$LVK : v \in im \partial^*,$$

$$LCK : i \in Ker \partial.$$

Al subespacio vectorial  $Ker \partial \subset C_1$  se le llaman los 1-ciclos (o combinaciones lineales de mallas) del circuito, al subespacio  $im \partial^* \subset C^1$  se le llama las 1-cofronteras del circuito.

Con el fin de calcular la dimensión de  $Ker \partial$  usamos el hecho de que si  $l : V \rightarrow W$  es un mapeo lineal, entonces por un teorema elemental del álgebra lineal

$$dim(Ker l) + dim(im l) = dim V. \quad (7)$$

Si  $l^* : W^* \rightarrow V^*$  es el mapeo dual, tenemos que

$$dim(im l) = dim(im l^*). \quad (8)$$

Como la única forma de obtener caída de voltaje cero en todas las ramas es asignando el mismo potencial a todos los nodos, vemos que  $\dim(\text{Ker}\partial^*) = 1$ . Usando (7) para  $l = \partial^*$ ,  $V = C^0$  encontramos que

$$\dim(\text{im}\partial^*) = n - 1. \quad (8)$$

Por la fórmula (8) tenemos  $\dim(\text{im}\partial) = n - 1$ , y usando (7) de nuevo con  $l = \partial$  obtenemos

$$\dim(\text{Ker}\partial) = b - n + 1. \quad (9)$$

Por lo tanto  $\text{Ker}\partial \oplus \text{im}\partial^*$  es un subespacio vectorial  $b$ -dimensional del espacio vectorial  $C_1 \oplus C^1$  de dimensión  $2b$ . Las consecuencias de este hecho se analizarán más adelante.

Existe una interpretación muy interesante de la ecuación (9) en el caso de gráficas planas. Pensemos que el contorno exterior de la gráfica de la red nos describe una región poligonal en el plano. Entonces (9) es el número de los 1-ciclos linealmente independientes o mallas en la red,  $c = \dim(\text{Ker}\partial)$  es exactamente el número de caras independientes entre los polígonos descritos anteriormente. Entonces (9) puede ahora escribirse como  $c - b + n = 1$ , lo cual nos dice que la característica de Euler  $c - b + n$  de tales regiones poligonales es 1; a su vez un invariante topológico.

De la dualidad entre los operadores de frontera y cofrontera obtenemos el Teorema de Tellegen:

**Teorema 1.** si  $i \in \text{Ker}\partial$  y  $v \in \text{im}\partial^*$ , entonces

$$v(i) = \sum_j i_j v_j = 0. \quad (10)$$

De hecho, como  $v$  se puede escribir como  $v = \partial * v^*$  para algún  $v^* \in C^0$ , entonces  $\partial * v^*(i) = v^*(\partial i) = 0$ .

La fórmula (10) se puede interpretar físicamente como que la potencia total de la red en cualquier instante de tiempo es igual a cero. Esto es una propiedad topológica, ya que las corrientes y los voltajes no necesitan residir sobre el mismo circuito, sino sobre circuitos topológicamente equivalentes [5].

Con el fin de dar otra interpretación de (8) y (9) así como una terminología para más adelante, necesitamos las nociones de árbol, eslabones y conjunto de corte para una gráfica dada.

Dada una red con gráfica  $G$ , una subgráfica  $T$  conexa se llama un árbol para  $G$  si sus ramas conectan todos los nodos de  $T$ , pero no forman ninguna malla. Las ramas de  $T$  se llaman ramas de árbol y las ramas de  $G$  que no están en  $T$  se llaman eslabones o ligas. Claramente, la elección del árbol en una gráfica no es

única, pero el número de sus ramas es siempre  $n - 1$  de tal manera que existen  $b - n + 1$  eslabones asociados.

De hecho por inducción probaremos que cualquier árbol de toda gráfica con  $n+1$  nodos tiene exactamente  $n$  ramas. En efecto, una gráfica con dos nodos tiene un árbol con una sola rama, ya que ninguna malla es admitida. Supongamos que cualquier red con  $K$  nodos tiene un árbol con  $K - 1$  ramas.

Si se agrega un nodo a esta red, necesitamos agregar una rama más al árbol original, porque la adición de más de una rama crearía una malla. Por lo tanto, el nuevo árbol para la red de  $K + 1$  nodos tiene  $K$  ramas.

En particular para la elección de un árbol  $\text{im}\partial^*$  puede ser parametrizado por voltajes en las ramas de árbol, y  $\text{Ker}\partial$  puede ser parametrizado por corrientes en los eslabones.

Esto es cierto porque las ramas de árbol no forman ninguna malla, así que es imposible obtener ningún voltaje de rama de árbol en términos de los voltajes restantes.

Esto significa que son independientes y por (8) generan todos los otros voltajes. Similarmente es imposible encontrar un nodo conectado solamente por eslabones, tal que las corrientes del eslabón sean independientes. Y por (9) generan todas las otras corrientes.

Note que dado un árbol, cada vez que agregamos un eslabón se forma exactamente una nueva malla, dando una manera sistemática de formar una base de mallas.

Decimos que una red es plana si se puede dibujar en un plano sin que se crucen ningún par de ramas, excepto en los nodos. Dada una red plana con  $n$  nodos,  $b$  ramas y  $c = b - n + 1$  mallas independientes, hay un procedimiento [7] para construir una red plana bien definida llamada su red dual con  $c+1$  nodos,  $b$  ramas y  $n-1$  mallas independientes de tal manera que las dimensiones duales en (8) y (9) son intercambiadas. Podemos probar que cuando se pasa de una gráfica plana a su dual, los conjuntos de corte son cambiados por mallas, mientras las ramas de árbol son cambiadas por eslabones. Por extensión, decimos que estos pares de objetos son duales uno del otro, cuando están considerados en la misma gráfica (no necesariamente plana).

### 0.1.3. Las ecuaciones diferenciales de las redes no lineales

Esencialmente se conocen 2 casos generales en que podemos escribir de manera sistemática, las ecuaciones diferenciales de un circuito no lineal. En esta parte consideramos un punto de vista unificado para ambos casos, generalizando las llamadas ecuaciones de Brayton-Moser. Este punto de vista justifica que tengamos que estudiar a fondo las estructuras simplécticas.

Antes de continuar daremos un ejemplo para motivar las ideas e ilustrar las leyes de Kichhoff. Los ejemplos 1 y 2 que estudiaremos a continuación conducen a ecuaciones diferenciales explícitas, y el 3<sup>o</sup> da ecuaciones diferenciales implícitas.

**Ejemplo 1.** Considere el circuito siguiente con un resistor no lineal controlado por voltaje; con característica dada por  $i = f(v)$ .

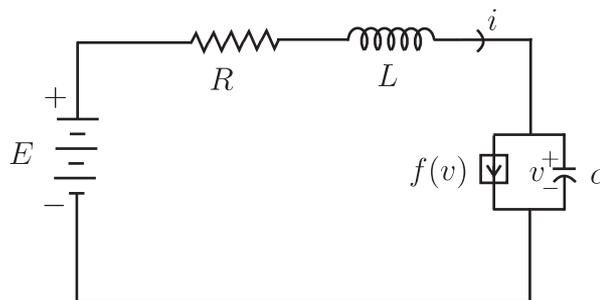


Figura 6: Diagrama del circuito del ejemplo 1 de la secc II.3.

Aplicando la *LCK* al nodo *A*, la *LVK* a la malla externa que consiste de elementos lineales junto con sus relaciones constitutivas, obtenemos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} Cdv/dt &= i - f(v), \\ Ldi/dt &= E - Ri - v. \end{aligned}$$

Este es un sistema lineal de dos ecuaciones diferenciales ordinarias, los cuales se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} Ldi/dt &= -\partial P/\partial i, \\ Cdv/dt &= \partial P/\partial v, \end{aligned} \tag{11}$$

donde  $P(i, v) = Ri^2/2 - Ei + iv - \int_0^v f(v)dv$ , función que se conoce como Potencial Mixto [5], que se definirá mas adelante de manera explícita.

**Ejemplo 2.** Considere el siguiente circuito con elementos no lineales cuyas características son indicadas en la figura

Aplicando la *LCK* al nodo *A*, la *LVK* a las 2 mallas independientes, y usando la relación (1) para describir voltajes en los inductores como la derivada respecto al tiempo de sus flujos, así como las corrientes en los condensadores como derivada con respecto al tiempo de sus cargas, encontramos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} q' &= -F_1(\phi_1) - F_2(\phi_2) \\ \phi_1' &= f_C(q) - f_1(F_1(\phi_1)) - e_s \\ \phi_2' &= f_C(q) - f_2(F_2(\phi_2)). \end{aligned} \tag{12}$$

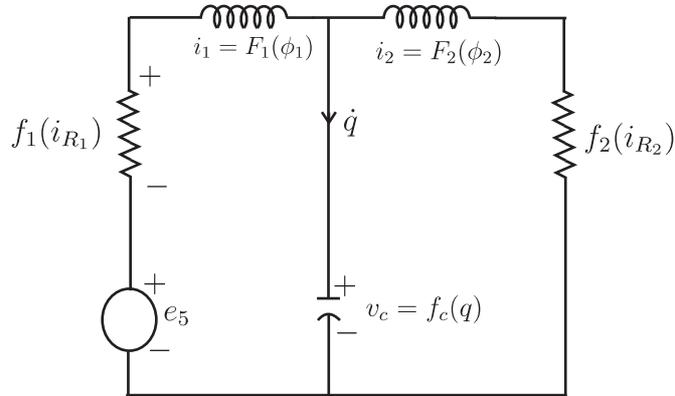


Figura 7: Diagrama del circuito del ejemplo 2 de la secc. II.3

Este es un sistema de 3 ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de 1<sup>er</sup> orden en las variables  $q, \phi_1, \phi_2$ .

**Ejemplo 3** Considere el siguiente circuito no lineal con las características que se indican:

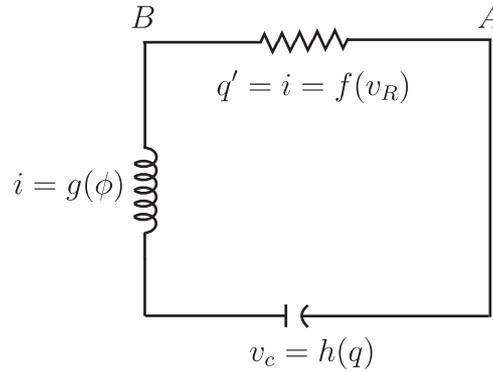


Figura 8: Diagrama del circuito del ejemplo 3 de la secc. II.3.

De nuevo utilizando las ecuaciones (1), aplicamos la *LCK* a los nodos  $A$  y  $B$ , y *LVK* para la única malla obtenemos:

$$\begin{aligned} q' &= f(v_R) \\ 0 &= g(\phi) - f(v_R) \\ \phi' &= -v_R - h(q) \end{aligned} \tag{13}$$

Este es un sistema de 3 ecuaciones diferenciales no lineales de 1<sup>er</sup> orden en las variables  $q, v_R, \phi$ . Sin embargo, es un sistema implícito porque la segunda ecuación no contiene  $v'_R$ . Si la función  $f$  fuera invertible podríamos resolver para

$v_R$  en términos de  $\phi$ , consiguiendo un sistema de dos ecuaciones diferenciales. En el caso general, hay un procedimiento llamado de regularización [5], mediante el cual agregamos capacitores pequeños como una pequeña perturbación del sistema, a fin de conseguir un sistema de ecuaciones diferenciales explícito.

Las ecuaciones diferenciales implícitas están relacionadas con las llamadas “Oscilaciones de Relajación” [7]. Siempre se puede conseguir ecuaciones diferenciales en algunas variables y adicionalmente ecuaciones funcionales implícitas como en (13). Takens [7] ha estudiado ecuaciones diferenciales implícitas para circuitos en este contexto.

En el ejemplo 1, todos los inductores son controlados por corriente y todos los capacitores por voltaje. En cambio, en los ejemplos 2 y 3 todos los inductores son controlados por flujo y todos los capacitores están controlados por carga. En los 2 primeros ejemplos vemos que los parámetros que controlan a los inductores y capacitores, corrientes y voltajes, se pueden determinar en todos los elementos, solamente por medio de las leyes de Kirchhoff y las relaciones constitutivas del circuito (no necesariamente con derivadas respecto del tiempo). Este hecho implica una descripción mediante ecuaciones diferenciales explícitas.

En general, se imponen algunas hipótesis generales para evitar ecuaciones diferenciales implícitas las cuales serán mencionadas en seguida.

Hasta donde tenemos información, las condiciones más generales para obtener ecuaciones diferenciales explícitas en un circuito no lineal fueron probadas por Eckman [6]. Estas condiciones están dadas suponiendo que las capacitancias y las inductancias son siempre funciones positivas. Esto implica que las relaciones constitutivas de las cuales las capacitancias e inductancias son sus derivadas, son invertibles; podemos usar indistintamente control por voltaje o por carga para los capacitores, y por corriente o flujo para los inductores.

Resumiremos aquí los resultados de Eckman:

Denotemos por  $v_\rho, v_\gamma, v_\lambda$  los voltajes a través de los resistores, capacitores e inductores respectivamente; y por  $i_\rho, i_\gamma, i_\lambda$  las corrientes correspondientes.

**Lema.** Sea  $\eta = (G, R, E)$  una red lineal de Kirchhoff donde  $G$  es la gráfica orientada del circuito,  $R$  las resistencias en el circuito y  $E$  las fuentes; además  $X$  una matriz cuyas columnas forman un conjunto completo de soluciones linealmente independientes del sistema de ecuaciones  $a^t x = 0$ , que es la LCK ( $a$  es la matriz de incidencia, que en sus filas tiene a los nodos y en los renglones tiene a las ramas); entonces  $\eta$  tiene solución única si y sólo si  $\det(X^t R X) \neq 0$ .

Además, la solución  $J$ , de la LVK  $c^t [R J - E] = 0$  (donde  $c$  es un vector columna de números reales) y la LCK  $a^t J = 0$ ; correspondiente a  $E$ , está dada por  $J = X(X^t R X)^{-1} X^t E$ .

*Demostración:* De  $a^T J = 0$  se tiene que  $J = Xy$ .

Ahora calculamos  $y$  tal que el producto  $Xy = J$  satisfaga la ecuación  $C^T[RJ - E] = 0$  para toda malla  $C^T h$  de  $G$ .

$C = Xy'$  donde  $y'$  es cualquier vector, es una solución de la ecuación  $a^T C = 0$ , por lo tanto,  $C^T h = (Xy')^T h$  es un ciclo.

Sustituyendo en la ecuación anterior  $J$  por  $Xy$  y  $C^T$  por  $(Xy')^T = y'^T X^T$ , tenemos la ecuación  $y'^T [X^T (RXy - E)] = 0$  la cual se satisface para todo vector  $y'^T$ .

La ecuación anterior es un producto escalar de  $y'^T$  con el paréntesis cuadrado y como  $y'^T$  no es idénticamente cero entonces necesariamente lo que está en el paréntesis cuadrado es igual a cero; con lo que tenemos:

$$X^T R X y = X^T E.$$

Este sistema tendrá solución única “ $y$ ”, sí y sólo sí  $\det(X^T R X) \neq 0$ .

Supongamos que  $\det(X^T R X) \neq 0$ , entonces  $y = (X^T R X)^{-1} X^T E$  queda determinada en forma única, consecuentemente  $J$  queda determinada en forma única:  $J = X (X^T R X)^{-1} X^T E$ .

**Teorema 2.** Dado un circuito, las variables  $v_\gamma$  e  $i_\lambda$  son linealmente independientes bajo las leyes Kirchhoff, si y sólo si no tiene mallas de capacitores y ningún conjunto de corte de inductores. (Sin embargo podemos eliminar las mallas de capacitores y los conjuntos de corte de inductores introduciendo resistores pequeños dentro del circuito).

**Prueba.** Primero probaremos que las variables  $i_\lambda$  en los inductores no son linealmente independientes si existe un conjunto de corte de inductores. Por la Ley Generalizada de Kirchhoff [3] al separar con un corte en 2 subgráficas, precisamente la suma algebraica de corrientes en esos inductores de corte es cero (las dos subgráficas funcionan como dos grandes nodos) así que son dependientes.

En general, si existe una malla de capacitores, entonces tenemos una ecuación lineal que relaciona los voltajes de los capacitores de esa malla por la ley de Kirchhoff de voltajes; entonces todos los voltajes de capacitores en el circuito  $v_\gamma$  no son linealmente independientes.

En ambos casos se sigue que  $v_\gamma$  e  $i_\lambda$  ya no son linealmente independientes. Con lo cual queda demostrado que si los voltajes en los capacitores y las corrientes en los inductores son linealmente independientes bajo las leyes de Kirchhoff; entonces no deben existir mallas de capacitores ni conjuntos de corte de inductores.

Ahora haremos esta prueba en el otro sentido:

Suponiendo como conocidas las corrientes en inductores y el voltaje en los capacitores, estos elementos los podemos ver como fuentes respectivas de corrientes y de voltaje. De aquí podemos transformar todas las fuentes de corriente en fuentes de voltaje (ó todas las fuentes de voltajes en fuentes corrientes); cosa que siempre se puede hacer mediante una transformación de fuentes [3].

Teniendo esta red resultante con puras resistencias lineales (red lineal de Kirchhoff) y solo fuentes de voltaje podemos aplicar el Lema anterior, el cual nos dice que podemos escribir todas las corrientes y voltajes desconocidas del circuito en términos de las fuerzas electromotrices en fuentes (cuyos valores son conocidos). Solo que recordemos que las fuerzas electromotrices de las fuentes están dadas en términos de los voltajes en capacitores y corrientes en inductores. Con lo que queda demostrado la recíproca de lo que probamos antes. Con esto se tiene una demostración completa.  $\square$

En otras palabras, si no existen conjuntos de corte de inductores ó mallas de capacitores en el circuito, entonces siempre podemos conocer todas sus variables en términos de los voltajes en capacitores y corrientes en inductores.

El resultado del lema anterior es un caso particular del resultado de Roth que se enuncia después de la ecuación (29) del capítulo 3, si allí tomamos las impedancias reales (resistores), fuentes de corriente nulas ( $J = 0$ ) y fuentes de voltaje reales.

**Corolario 1.** Sea dado un circuito con todos sus resistores lineales. Las variables  $v_\gamma$  e  $i_\lambda$  son independientes bajo las leyes de Kirchhoff y las leyes de Ohm y determinan todas las corrientes y todos los voltajes de forma única en los elementos, si y sólo si, el circuito no tiene ninguna malla que contenga capacitores ni conjuntos de corte de inductores.

**Prueba:** La demostración de este resultado es exactamente análogo al resultado anterior.

**Proposición.** Considere un circuito con resistores no lineales. Suponga que cada uno de los resistores controlados por voltaje está contenido en una malla donde todas las otras ramas contienen solamente capacitores; y que cada uno de los resistores controlados por corriente está dentro de una malla donde las otras ramas solamente contienen inductores. Si no hay mallas de capacitores ni conjuntos de corte de inductores entonces las variables  $v_\gamma$  e  $i_\lambda$  son independientes bajo las leyes de Kirchhoff y las leyes de Ohm, y determinan todos los otros voltajes y corrientes. (Sin embargo siempre es posible agregar capacitores e inductores lineales pequeños al circuito, con el fin de obtener un circuito que satisfaga las condiciones del resultado 3: Esto se llama una regularización en el sentido mencionado en el ejemplo 3 \*).

Con este material, estamos ya preparados para definir las ecuaciones de Brayton- Moser\* que generalizan a (11). La hipótesis general es que  $v_\gamma$  e  $i_\lambda$  son

linealmente independientes bajo las leyes de Kirchhoff y de Ohm, y estas leyes determinan de manera única los demás voltajes y corrientes. Esto es cierto si las hipótesis de los resultados 2 o 3 son satisfechas y esto proporciona una base fuerte a la hipótesis de Brayton-Mosser para calcular todas las otras variables del circuito. También estamos usando la hipótesis de Eckmann de que las relaciones constitutivas de condensadores e inductores son invertibles.

En forma más precisa, definimos el espacio de estados físicos  $\Sigma^*$  como el subconjunto de todas las corrientes y voltajes en  $C_1 \times C^1$  que satisfacen las leyes de Kirchhoff y de Ohm :

$$\Sigma = (i, v) \in C_1 \times C^1 / (i, v) \in Ker \partial \times im \partial^*, v_\rho = f_\rho(i_\rho), \rho = 1, \dots, r$$

donde  $(i_\rho, v_\rho)$  denota las componentes de  $i, v$  en la rama, donde  $\rho$  varía sobre las ramas  $r$  con resistores. Por facilidad, esta definición supone que los resistores son controlados por corriente, así que la ley de Ohm tiene que modificarse en forma adecuada para los resistores controlados por voltaje.

Bajo condiciones muy generales,  $\Sigma$  será una variedad, esto es, el análogo de una superficie en dimensión más alta. Como el subespacio de Kirchhoff  $Ker \partial \times im \partial^*$  tiene la misma dimensión que  $C_1$  y las leyes de Ohm agregan  $r$  restricciones, claramente tenemos

$$dim \Sigma = l + c$$

donde  $l$  es el número de inductores y  $c$  el número de capacitores.

Denotemos por  $i_L \subset C_1$  y  $v_C \subset C^1$  a los subespacios vectoriales de corrientes en los inductores y voltajes en los capacitores, respectivamente. Considere la proyección  $\pi : \Sigma \rightarrow i_L \times v_C$ , la cual a cualquier estado físico en  $\Sigma$  asocia sus corrientes correspondientes en los inductores y voltajes en los capacitores. La hipótesis de Brayton-Moser, formulada por Smale\*, es como sigue:

Hipótesis de Brayton-Moser: El mapeo  $\pi : \Sigma \rightarrow i_L \times v_C$  tiene una inversa, la cual es un mapeo diferenciable.

$$i_L \times v_C \rightarrow \Sigma \subset C_1 \times C^1.$$

En otras palabras, ya que  $i_L \times v_C$  son buenas coordenadas globales para la variedad  $\Sigma$ , podemos trabajar en forma más sencilla en el espacio euclidiano  $i_L \times v_C$ .

Más adelante veremos cómo obtener ecuaciones diferenciales explícitas para el circuito en este caso.

De hecho no es suficiente que  $\Sigma$  sea una subvariedad para obtener ecuaciones diferenciales explícitas; además, tiene que proyectarse bien sobre  $i_L \times v_C$ .

Smale ha demostrado mediante una construcción general que las ecuaciones diferenciales explícitas tienen lugar localmente si y sólo si  $i_L \times v_C$  son válidas como coordenadas incrementales (o sea a nivel del espacio tangente). Aplicando el Teorema de la Función Implícita esto significa que éstas nos proporcionan coordenadas para toda una vecindad de  $\Sigma$ . Analizaremos el ejemplo 3 en este contexto. El subespacio 3 dimensional de Kirchoff puede ser parametrizado por  $i, v_C, v_R$  aunque el espacio completo de voltajes y corrientes tiene dimensión 6. La subvariedad  $\Sigma$  de dimensión 2 puede ser representada en el espacio de 3 dimensiones, como la siguiente superficie

$$\{(i, v_c, v_R) : i = f(v_R)\}.$$

Los parámetros  $i, v_C$  son buenas coordenadas para la superficie solo si  $f'(v_R) \neq 0$ , lo cual significa que  $f$  es localmente invertible. Si  $f$  es globalmente invertible, el resistor también puede pensarse como controlado por corriente, y como se mencionó antes, se encuentran ecuaciones diferenciales explícitas para este ejemplo.

Supongamos que la superficie está dada por la siguiente figura, admitiendo  $i, v_c$  como coordenadas locales en todas partes, excepto en la línea  $f'(v_R) = 0$  donde el plano tangente es ortogonal al plano  $i, v_c$ .

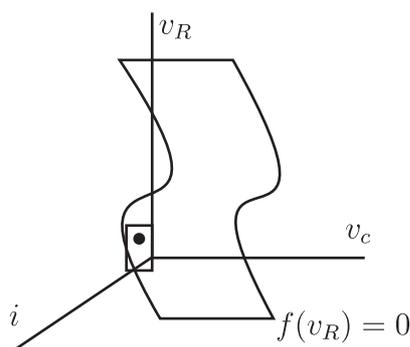


Figura 9: Subvariedad de dimensión 2 representada en un espacio

Para formular las ecuaciones diferenciales, definimos la Función Potencial Mixto

$$P : C_1 \times C^1 \rightarrow R \text{ mediante la fórmula } P(i, v) = \sum_{\gamma} i_{\gamma} v_{\gamma} + \sum_{\rho} \int v_{\rho} di_{\rho}$$

donde las sumas sobre  $\gamma$  y  $\rho$  son sobre las ramas de capacitores y resistores, respectivamente. Para el caso controlado por corriente la integral indefinida se define con respecto a la variable independiente  $i_{\rho}$ , de manera que  $P$  está definida excepto por una constante.

Si el resistor es controlado por voltaje, aplicamos el método de integración por partes, tomando a  $v$  como variable independiente

$$\int v_\rho di_\rho = i_\rho v_\rho - \int i_\rho dv_\rho.$$

Mediante las leyes de Kirchhoff y de Ohm,  $P$  puede ser considerado como un mapeo de  $\Sigma$  en  $R$ . Por la hipótesis de Brayton-Moser, tenemos

$$P : i_L \times v_C \rightarrow R.$$

A continuación mencionaremos el teorema de Brayton-Moser y daremos una demostración más sencilla que la encontrada en la literatura en general.

**Teorema 3. (Brayton-Moser)** *Toda trayectoria física de un circuito eléctrico que satisface las hipótesis mencionadas anteriormente, es una curva solución del sistema*

$$L_\lambda(i_\lambda)di_\lambda/dt = -\partial P/i_\lambda, \quad C_\gamma(v_\gamma)dv_\gamma/dt = \partial P/v_\gamma. \quad (14)$$

*Los índices  $\lambda$  y  $\gamma$  denotan todos los elementos del circuito que tienen inductores o capacitores, respectivamente. Recíprocamente, toda solución a estas ecuaciones es una trayectoria física .*

**Prueba :** Consideremos una curva arbitraria  $C^1$  en  $L \times C^*$ . Debido a nuestra hipótesis podemos identificar  $L \times C^1$  con  $\Sigma \subset C_1 \times C^1$ ; entonces tomamos la curva escrita en la forma

$$t(i(t), v(t)) \in C_1 \times C^1$$

Por leyes de Kichhoff  $i(t) \in Ker\partial$  . Entonces  $i' \in Ker\partial$ . Por *LVK*  $v(t) \in Im\partial^*$ . Por el Teorema de Tellegen, para todo  $t$  se cumple

$$\sum_{n \in N} v_n(t)i_n(t) = 0.$$

Que también podemos escribir como

$$\sum vi + \sum vi + \sum vi = 0.$$

Por regla de Leibniz nosotros tenemos

$$\sum vi' = (\sum vi)' - \sum iv'.$$

Substituyendo esta última en la ecuación precedente obtenemos

$$-\sum vi + \sum iv = (\sum iv)' + \sum vi' = dP/dt,$$

por la definición de  $P$  y las Leyes de Ohm generalizadas. Por la regla de la cadena tenemos

$$dP/dt = \sum (\partial P/\partial i) \cdot i' + \sum (\partial P/\partial v) v'.$$

Para las dos últimas ecuaciones encontramos

$$\sum (\partial P/\partial i + v) i'' + \sum (\partial P/\partial v - i) v'' = 0.$$

Como  $i'$  y  $v'$  pueden tomar cualquier valor,

$$\partial P/\partial i = -v, \quad \partial P/\partial v = i.$$

La demostración se da por terminada si se toman en cuenta

$$L(i) di/dt = v y C(v) dv/dt = i.$$

Para resolver (14) como una ecuación diferencial explícita, necesitamos la hipótesis de Eckmann de que las relaciones constitutivas para los inductores y capacitores sean invertibles. De hecho, se probará el resultado siguiente que considera una hipótesis más general.

Consideremos el circuito que consiste de inductores, que pueden estar controlados tanto por flujo como por corriente; también, capacitores que pueden estar controlados tanto por carga como por voltaje. Las relaciones constitutivas no son necesariamente invertibles. Para el caso de relaciones constitutivas invertibles el teorema que sigue se reduce al teorema de Brayton-Moser.

**Teorema 4.** *Supongamos que todas las corrientes en el circuito son determinadas únicamente por flujos  $\phi_l$  en inductores que son controlados por flujo, y corrientes  $i_\lambda$  en inductores controlados por corriente, cargas  $q_C$  en capacitores controlados por carga y voltajes  $v_\gamma$  en los capacitores controlados por voltaje; entonces las ecuaciones diferenciales del circuito están dadas por*

$$\begin{aligned} N_l(\phi_l) d\phi_l/dt &= -\partial P/\partial \phi_l, S_c(q_c) dq_c/dt = \partial P/\partial q_c, \\ L_\lambda(i_\lambda) di_\lambda/dt &= -\partial P/\partial i_\lambda, C_\gamma(v_\gamma) dv_\gamma/dt = \partial P/\partial v_\gamma \end{aligned} \quad (15)$$

**Prueba:** Esencialmente seguiremos las ideas de [4] hasta la ecuación (16). Repetimos aquí todos los detalles ya que en la referencia hay un error tipográfico.

Considere el potencial mixto escrito en la forma

$$P(i, v) = \sum_c i_c v_c + \sum_\gamma i_\gamma v_\gamma + \sum_\rho \int v_\rho di_\rho$$

donde separamos la suma sobre  $C$  para controlados por carga y suma sobre  $\gamma$  para los controlados por voltaje, respectivamente.

De acuerdo a la hipótesis del teorema, el potencial mixto puede ser considerado una función de las variables  $\phi_l, i_\lambda, q_C, v_\gamma$ . Nuevamente, por la ley de Kirchhoff de corriente  $i(t) \in Ker\partial$ . Como esto es un subespacio vectorial, lo mismo se cumple para la derivada respecto al tiempo  $i'(t) \in Ker\partial$ . En este caso el teorema de Tellegen es válido en la siguiente forma

$$\sum_{\rho} v_{\rho} i'_{\rho} + \sum_{\lambda} v_{\lambda} i'_{\lambda} + \sum_l v_l i'_l + \sum_C v_C i'_C + \sum_{\gamma} v_{\gamma} i'_{\gamma} = 0 \quad (15')$$

donde la suma sobre  $l$  es para inductores controlados por flujo, y sobre  $\lambda$  para inductores controlados por corriente.

Por la regla de Leibnitz podemos reemplazar como sigue en la ecuación que precede

$$v_C i'_C = (i_C v_C)' - i_C v'_C, v_{\gamma} i'_{\gamma} = (i_{\gamma} v_{\gamma})' - i_{\gamma} v'_{\gamma}.$$

Por definición de  $P$ , tenemos entonces

$$\begin{aligned} dP/dt &= \left( \sum i_C v_C + \sum i_{\gamma} v_{\gamma} \right)' + \sum v_{\rho} i'_{\rho} = \\ &= \sum (i'_C v_C + i_C v'_C) + \sum (i'_{\gamma} v_{\gamma} + i_{\gamma} v'_{\gamma}) + \sum v_{\rho} i'_{\rho} \\ &= \sum i'_C v_C + \sum i'_{\gamma} v_{\gamma} + \sum i'_{\rho} v_{\rho} + \sum i_C v'_C + \sum i_{\gamma} v'_{\gamma} \\ &= - \sum_l v_l i'_l - \sum_{\lambda} v_{\lambda} i'_{\lambda} + \sum_C i_C v'_C + \sum_{\gamma} i_{\gamma} v'_{\gamma}. \end{aligned} \quad (16)$$

Por otro lado, por la regla de la cadena

$$dP/dt = \sum \partial P / \partial \phi_l \phi'_l + \sum \partial P / \partial i_{\lambda} i'_{\lambda} + \sum \partial P / \partial q_C q'_C + \sum \partial P / \partial v_{\gamma} v'_{\gamma} \quad (17)$$

Recordando que  $\phi'_l = v_l$  y  $q'_c = i_c$  y comparando con (16), concluimos que

$$\partial P / \partial \phi_l = -i'_l, \partial P / \partial i_{\lambda} = -v_{\lambda}, \partial P / \partial q_c = v'_c, \partial P / \partial v_{\gamma} = i_{\gamma}. \quad (18)$$

Usando (2) y las ecuaciones análogas para elementos controlados por flujo y por carga se tiene

$$i'_l = N_l(\phi_l) \phi'_l, v_{\lambda} = L_{\lambda}(i_{\lambda}) i'_{\lambda}, v'_C = S_C(q_C) q'_C, i_{\gamma} = C_{\gamma}(v_{\gamma}) v'_{\gamma}, \quad (19)$$

donde las  $N_l$  son inductancias inversas y las  $S_C$  son elastancias de los correspondientes elementos. Substituyendo (19) en (18) se obtiene (15).  $\square$

Si hay solo inductores controlados por flujo y capacitores controlados por carga, solo se obtiene el primer renglón de las ecuaciones (15). En algún sentido esto es una contraparte de las ecuaciones de Brayton - Moser.

Las ecuaciones (11) en el ejemplo 1 son un caso particular de las ecuaciones de Brayton-Moser.

Analicemos el ejemplo 2, teniendo en mente las ecuaciones más generales.

Usando leyes de Kirchhoff y de Ohm, con las relaciones constitutivas para inductores y capacitores, calculamos el potencial mixto para el circuito como sigue

$$P(q, \phi_1, \phi_2) = -f_c(q)F_1(\phi_1) - f_c(q)F_2(\phi_2) + e_s F_1(\phi_1) + \int f_1(F_1(\phi_1))F'_1(\phi_1)d\phi_1 + \int f_2(F_2(\phi_2))F'_2(\phi_2)d\phi_2.$$

Podemos probar de una manera relativamente fácil que las ecuaciones (12) multiplicadas por la elastancia  $f'_c(q)$  del capacitor y las inductancias inversas  $F'_1(\phi_1)$  y  $F'_2(\phi_2)$  de los inductores, respectivamente, se transforman en

$$\begin{aligned} f'_c(q)q' &= \partial P / \partial q \\ F'_1(\phi_1)\phi'_1 &= -\partial P / \partial \phi_1 \\ F'_2(\phi_2)\phi'_2 &= -\partial P / \partial \phi_2 \end{aligned} \quad (12')$$

Estas ecuaciones son ecuaciones diferenciales explícitas, si pudiéramos resolverlas para  $q'$ ,  $\phi'_1$  y  $\phi'_2$ , respectivamente. Esto es posible si  $f'_c, F'_1, F'_2$  siempre tienen el mismo signo, esto es, positivo.

Como las ecuaciones (12) son ecuaciones diferenciales explícitas, son por lo tanto menos generales que (12'). Así, a fin de obtener las ecuaciones de Brayton-Moser como ecuaciones diferenciales explícitas, se pierde alguna generalidad por pedir que las características de los elementos no resistivos sean invertibles.

**Corolario.** *Para obtener ecuaciones diferenciales explícitas, utilizando las hipótesis del teorema 1, las características de los inductores controlados por corriente y capacitores controlados por voltaje tienen que ser invertibles. Así que podemos considerar que todos los inductores están controlados por flujo y todos los capacitores están controlados por carga, obteniendo las siguientes ecuaciones:*

$$N(\phi_l)d\phi_l/dt = -\partial P / \partial \phi_l, S_c(q_C)dq_C/dt = \partial P / \partial q_C$$

donde los índices  $l, c$  corren sobre los inductores y capacitores respectivamente. Las  $N_l$  y  $S_c$  pueden ser formalmente canceladas de estas ecuaciones, obteniendo ecuaciones igualmente válidas.

**Demostración.** Recordemos que  $P = \sum_{\gamma} i_{\gamma} v_{\gamma} + \sum_{\rho} \int v_{\rho} di_{\rho}$  donde  $\gamma$  corre sobre las ramas de capacitores y  $\rho$  sobre las ramas de resistores. Con esto podemos calcular

$$\begin{aligned} \partial P / \partial q_C &= \sum_{\gamma} (i_{\gamma} \partial v_{\gamma} / \partial q_C + \partial i_{\gamma} / \partial q_C v_{\gamma}) + \sum_{\rho} v_{\rho} \partial i_{\rho} / \partial q_C \\ \partial P / \partial \phi_l &= \sum_{\gamma} (i_{\gamma} \partial v_{\gamma} / \partial \phi_l + \partial i_{\gamma} / \partial \phi_l v_{\gamma}) + \sum_{\rho} v_{\rho} \partial i_{\rho} / \partial \phi_l. \end{aligned} \quad (20)$$

Solo necesitamos verificar que la función  $\partial P/\partial q_C$  tiene como uno de sus factores a  $dv_C/dq_C = S_C(q_C)$ , y  $\partial P/\partial \phi_\ell$  tiene como factor a  $di_\ell/d\phi_\ell = N_\ell(\phi_\ell)$ .

Debido a la hipótesis tenemos que  $q_C, \phi_\ell$  determinan todas las corrientes y voltajes en el circuito, así que  $v_\gamma = F_\gamma(v_c, i_\ell)$  para ramas de capacitores e  $i_k = G_k(v_c, i_\ell)$  para cualquier rama  $k$ , donde  $v_C$  es una función de la carga  $q_C$ , y cada  $i_\ell$  es una función del flujo  $\phi_\ell$ . Entonces

$$\begin{aligned}\partial v_\gamma/\partial \phi_\ell &= \partial F_\gamma/\partial i_\ell di_\ell/d\phi_\ell, \quad \partial i_K/\partial \phi_\ell = \partial G_K/\partial i_\ell di_\ell/d\phi_\ell, \\ \partial i_K/\partial q_C &= \partial G_K/\partial v_C dv_C/dq_C, \quad \partial v_\gamma/\partial q_C = \delta_{\gamma C} dv_C/dq_C.\end{aligned}$$

donde  $\delta_{\gamma C}$  es la delta de Kronecker para índices  $\gamma, C$ , la cual vale 1 si  $\gamma = C$  y 0 si  $\gamma \neq C$ . Substituyendo en (20) completamos la demostración.

Aquí aclaramos que los índices  $\gamma$  y  $C$  corren ambos sobre todos los capacitores del circuito. Esto se debe a que todos pueden pensarse como controlados por carga o por voltaje.

#### 0.1.4. Espacios simplécticos y reciprocidad en circuitos

En esta sección se interpretan las leyes de Kirchhoff y las ecuaciones de Brayton–Moser, así como las ecuaciones generalizadas para circuitos no lineales en términos de los conceptos de reciprocidad y de espacios simplécticos. Informalmente hablando, la reciprocidad, tiene que ver con el hecho de que excepto por multiplicación por una matriz, las ecuaciones (15) son ecuaciones diferenciales tipo gradiente.

Para motivar la idea de reciprocidad, utilizaremos el ejemplo 1 que estudiamos antes. Para la función  $P(i, v)$  donde  $i$  es la corriente en el inductor y  $v$  el voltaje en el capacitor, podemos escribir

$$dP = \partial P/\partial i di + \partial P/\partial v dv.$$

Usando el sistema de ecuaciones (11), podemos escribir

$$dP = -v * di + i * dv \tag{21}$$

donde  $v^*$  es el voltaje en el inductor, e  $i^*$  es la corriente en el capacitor. Análogamente, debido a la igualdad de las derivadas parciales cruzadas de  $P$ , la cual en notación de formas diferenciales se escribe como  $d^2P = 0$ , obtenemos la siguiente condición de reciprocidad para la red

$$\partial v^*/\partial v = -\partial i^*/\partial i. \tag{22}$$

Esta condición la podemos interpretar como sigue:

Consideremos las variables independientes  $(i, v)$  como variables de control y las correspondientes  $(v^*, i^*)$  como variables de respuesta. Suponiendo que

el inductor y el capacitor se quitan del circuito, obtenemos un puerto de dos entradas, como se muestra en la Figura 10, abajo. El puerto del capacitor queda a la izquierda de la figura y el del inductor a la derecha.

Si se aplica una fuente de voltaje con valor constante  $v$  en el puerto del capacitor y una de corriente de valor constante  $i$  se aplica al puerto del inductor, obtenemos la corriente  $i^*$  y el voltaje  $v^*$  respectivamente, como se muestra.

Ahora cambiamos  $v$  mediante un pequeño incremento  $\Delta v$ , manteniendo  $i$  fija, y calculamos la relación de transferencia de voltaje  $\Delta v^*/\Delta v$ . Repetimos el mismo procedimiento para la  $i$  con un pequeño incremento  $\Delta i$  manteniendo  $v$  fijo, y calculamos  $\Delta i^*/\Delta i$ . Excepto por el cambio de signo, ambos cocientes de diferencias tienen el mismo límite cuando  $\Delta v$  y  $\Delta i$  tienden a 0.

$$\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \Delta v^*/\Delta v = - \lim_{\Delta i \rightarrow 0} \Delta i^*/\Delta i$$

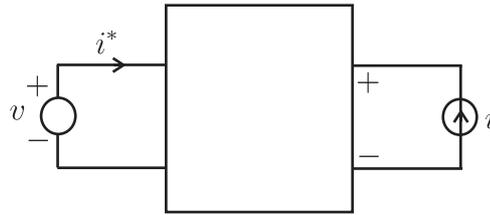


Figura 10: Puerto de dos entradas, con fuentes de voltaje y corriente.

Si el circuito es lineal y pasivo (no hay batería) lo anterior es demostrado aplicando primero una fuente de voltaje de valor  $v$  en el puerto de la izquierda, y calculando el voltaje a circuito abierto  $v^*$  en el de la derecha.

Luego aplicamos una fuente de corriente de valor  $i$  en el puerto de la derecha y se registra el valor de corriente en corto circuito  $i^*$  en el de la izquierda. Como resultado obtenemos

$$v^*/v = -i^*/i$$

lo cual nos da, excepto por el cambio de signo la igualdad de la relación transferencia de voltaje y la de corriente en el puerto con 2 entradas. En este sentido, (22) es una relación de incremental en el caso no lineal.

Finalmente, al aplicar diferenciales en ambos lados de (21), obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= d^2P = -dv^* \wedge di + di^* \wedge dv \\ &= di \wedge dv^* + di^* \wedge dv. \end{aligned}$$

Por otro lado, si consideramos el espacio de dimensión 4 dado por  $(i, i^*, v^*, v)$ , espacio de corrientes y voltajes en la bobina y el capacitor, en ese orden, entonces el conjunto

$$L = \{(i, i^*, v^*, v) : i^* = \partial P / \partial v, v^* = -\partial P / \partial i\}$$

es una subvariedad de dimensión 2 en un espacio de 4 dimensiones, donde la 2-forma  $\Omega = di^*dv^* + di^*dv$  se anula. La  $\Omega$  es un ejemplo de lo que se conoce como una 2-forma simpléctica y  $L$  se llama una subvariedad lagrangiana con respecto a  $\Omega$ . Su dimensión es la mitad de la dimensión del espacio total de corrientes y de voltajes. En esta definición, decimos que  $L$  tiene a  $P : R^2 \rightarrow R$  como función generatriz. Para una red lineal pasiva,  $P$  sería cuadrática y  $L$  un subespacio vectorial (subespacio lagrangiano) de  $R^4$ . Estos términos se harán precisos más adelante.

Ahora consideremos el caso más general de un circuito no lineal que satisfice la hipótesis de Brayton-Moser, con bobinas controladas por corrientes  $i_\lambda$  y condensadores controlados por voltajes  $v_\gamma$ , en un espacio euclidiano  $R^{2k}$  cuyas coordenadas  $(i_\lambda, i_\gamma, v_\lambda, v_\gamma)$  son las corrientes y voltajes en las bobinas y los condensadores respectivamente.

(Consideramos que entre condensadores y bobinas suman un total de  $k$  elementos).

Definamos la siguiente 2-forma simpléctica, motivados por el ejemplo anterior:

$$\Omega = \sum_{\lambda} di_{\lambda} \wedge dv_{\lambda} + \sum_{\gamma} di_{\gamma} \wedge dv_{\gamma}. \quad (23)$$

La subvariedad de  $R^{2k}$  generada por el potencial mixto  $P(i_\lambda, v_\gamma)$  se define como

$$L = \{(i_\lambda, i_\gamma, v_\lambda, v_\gamma) : i_\gamma = \partial P / \partial v_\gamma, v_\lambda = -\partial P / \partial i_\lambda\}.$$

Su dimensión es exactamente  $k$ , puesto que está parametrizada por las coordenadas  $(i_\lambda, v_\gamma)$ . De la propiedad  $d^2P = 0$ , podemos asegurar como antes que  $\Omega$  se aniquila en  $L$ , así que la variedad es lagrangiana.

En el caso donde las bobinas están controladas por flujo y los condensadores por carga, el potencial mixto es una función de los flujos de las bobinas y de las cargas de los condensadores  $(\phi_\lambda, q_\gamma)$ . Diferenciando  $P$ , tenemos

$$\begin{aligned} dP &= \sum_{\lambda} \partial P / \partial \phi_{\lambda} d\phi_{\lambda} + \sum_{\gamma} \partial P / \partial q_{\gamma} dq_{\gamma} \\ &= -\sum_{\lambda} i'_{\lambda} d\phi_{\lambda} + \sum_{\gamma} v'_{\gamma} dq_{\gamma}, \end{aligned}$$

La segunda relación es el resultado de las ecuaciones (18). Diferenciando nuevamente, nos queda

$$0 = d^2P = \sum d\phi_{\lambda} \wedge di'_{\lambda} + \sum dv'_{\gamma} \wedge dq_{\gamma}.$$

Esto sugiere que las variables correctas para describir este tipo de circuito pueden ser  $(\phi_\lambda, v'_\gamma, i'_\lambda, q_\gamma)$  donde  $v'_\gamma$  e  $i'_\lambda$  son las derivadas respecto al tiempo del voltaje en los capacitores y de la corriente en las bobinas. La 2-forma simpléctica es

$$\omega = \sum_{\lambda} d\phi_{\lambda} \wedge di'_{\lambda} + \sum_{\gamma} dv'_{\gamma} \wedge dq_{\gamma}, \quad (23')$$

y la subvariedad con dimensión la mitad del espacio  $R^{2k}$ , generada por  $P$  con la condición de que  $\omega$  se anule (esto es, es lagrangiana) está definida por

$$l = \{(\phi_{\lambda}, v'_{\gamma}, i'_{\lambda}, q_{\gamma}) : v'_{\gamma} = \partial P / \partial q_{\gamma}, i'_{\lambda} = -\partial P / \partial \phi_{\lambda}\} \subset R^{2k}.$$

En el caso general del teorema 2, la forma simpléctica es la suma de (23) y de (23'). Ahora haremos precisos los términos considerados anteriormente.

Si  $(x_1, \dots, x_n)$  son coordenadas en  $R^n$ , las 1-formas diferenciales elementales  $dx_i (i = 1, \dots, n)$  son objetos incrementales, los cuales cuando se aplican a un vector tangente que tiene base en un punto  $p$  en  $R^n$  toman la  $i$ -ésima componente del vector y excluyen el punto base. Una 1-forma diferencial en general  $\theta = f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$  cuando se aplica a un vector tangente  $v = (v_1, \dots, v_n)$  basado en el punto  $p \in R^n$ , es evaluada como

$$\theta(v_p) = f_1(p)v_1 + \dots + f_n(p)v_n.$$

Este es un mapeo lineal para para  $p$  fijo, cuyos coeficientes cambian suavemente con  $p$ . Un caso particular es la diferencial

$$df = \partial f / \partial x_n dx_1 + \dots + \partial f / \partial x_n dx_n$$

de una función  $f : R^n \rightarrow R$  de clase  $C^\infty$ .

Ahora vamos a interpretar las ecuaciones (14) y (15), en términos de 1-formas. Primero escribimos

$$\begin{aligned} -L_{\lambda}(i_{\lambda}) \frac{di_{\lambda}}{dt} di_{\lambda} &= \frac{\partial P}{\partial i_{\lambda}} di_{\lambda} \\ C_{\gamma}(V_{\gamma}) \frac{dv_{\gamma}}{dt} dv_{\gamma} &= \frac{\partial P}{\partial v_{\gamma}} dv_{\gamma} \end{aligned}$$

Sumando sobre  $\lambda$  y  $\gamma$  obtenemos

$$-\sum L_{\lambda}(L_{\lambda}) di_{\lambda} / dt di + \sum C_{\gamma}(v_{\gamma}) dv_{\gamma} / dt dv_{\gamma} = dP \quad (24)$$

El primer miembro es análogo a la siguiente forma cuadrática

$$\eta = -\sum L_{\lambda}(i_{\lambda}) di_{\lambda} \cdot di_{\lambda} + \sum C_{\gamma}(v_{\gamma}) dv_{\gamma} \cdot dv_{\gamma}$$

definida en los vectores tangentes al subespacio  $i_L \times v_C$  de inductores controlados por corriente y condensadores controlados por voltaje. Este es un caso particular

de una métrica Riemaniana [ 4], dado que es una forma cuadrática en cada espacio tangente. Es indefinida en general (*como una métrica de Minkowski*), siempre que haya tanto inductores como condensadores. En general, una forma cuadrática, digamos  $Q = \sum f_i dx_i \cdot dx_i$  se evalúa en una pareja de vectores tangentes  $u_p, w_p$  basados en el mismo punto  $p$  por medio de la regla

$$Q = (u_p, w_p) = \sum f_i(p) u_i w_i.$$

Si se evalúa solamente en un vector tangente, obtenemos una 1-forma  $Q(u_p, \cdot) = \sum f_i(p) u_i dx_i$ , cuya aplicación a un vector  $w_p$  se define como  $Q(u_p, \cdot)w_p = Q(u_p, w_p) = \sum f_i(p) u_i w_i = \sum f_i(p) u_i dx_i(w_p)$ , la cual tiene la forma de la fórmula (24) para la métrica  $\eta$ , evaluada en un vector tangente a la solución de (14). En este caso, de las primeras ecuaciones en (15), podemos definir del mismo modo una métrica riemaniana indefinida

$$\xi = - \sum_i N_i(\phi_i) d\phi_i \cdot d\phi_i + \sum_C S_C(q_C) dq_C \cdot dq_C.$$

Una situación similar aparece en la ecuación de Hamilton en mecánica clásica [1], solamente que  $\eta$  es remplazada por una 2-forma simpléctica (la cual es antisimétrica). Esto explica el que las ecuaciones tengan una estructura análoga al caso Hamiltoniano.

Las 2 – *formas* diferenciales son objetos bilineales antisimétricos en cada espacio tangente. Las 2 – *formas* diferenciales más elementales son objetos de la forma  $dx_i \wedge dx_j$ . Estos están definidos para cualquier par de vectores tangentes  $u_p, w_p$  con base en el mismo punto  $p$ , por la formula:

$$dx_i \wedge dx_j(v_p, w_p) = \begin{vmatrix} dx_i(v_p) & dx_i(w_p) \\ dx_j(v_p) & dx_j(w_p) \end{vmatrix} = w_i w_j - v_j w_i$$

Si  $\theta$  es la 1 – *forma* anterior, su diferencial está definida como la 2 – *forma*

$$d\theta = df_1 \wedge dx_1 + df_2 \wedge dx_2 + \cdots + df_n \wedge dx_n.$$

Es fácil de probar que si  $\theta = df$ , entonces  $d\theta = 0$ , esto es  $d^2 f = 0$  para cualquier función  $f$ .

Consideremos ahora el caso de dimensión par  $n = 2k$ , renombrando las coordenadas  $(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k)$  en  $R^{2k}$ .

La 2 – *forma* canónica

$$\Omega = dx_1 \wedge dy_1 + \cdots + dx_k \wedge dy_k \tag{25}$$

es llamada una forma simpléctica en  $R^{2k}$ , porque su matriz como forma bilineal en cualquier punto es no singular.

De hecho, a partir de la definición obtenemos:

$$\begin{aligned}\Omega(u_p, w_p) &= (v_1 w_{k+1} - v_{k+1} w_1) + \cdots + (v_k w_{2k} - v_{2k} w_k) \\ &= (v_1, \dots, v_k; v_{k+1}, \dots, v_{2k}) \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} (w_1, \dots, w_k; w_{k+1}, \dots, w_{2k})^t\end{aligned}$$

donde  $t$  denota traspuesta e  $I$  y  $O$  son las matrices identidad y nula de orden  $k$ , respectivamente.

Esta definición depende de las coordenadas, pero puede ser demostrado que para cualquier 2-forma diferencial cuya matriz es no singular, existe un cambio local de coordenadas bajo el cual toma la forma (25). Recordando la estructura de las formas simplécticas (23), (23') definidas anteriormente, vemos que esto es suficiente para nuestros propósitos.

Una subvariedad *lagrangiana* de  $R^{2k}$  con respecto a la forma simpléctica  $\Omega$  es una subvariedad  $L$  de dimensión  $k$ , tal que  $\Omega$  restringida a  $L$  nos da cero. Esto demuestra que, por lo menos localmente, la función cuya gráfica define  $L$  puede ser escrita en la forma  $F = \nabla P$  para alguna función  $P$  con valores reales, la cual es llamada una *función generatriz* para  $L$ . Esto es lo que queremos decir con reciprocidad. Las subvariedades *lagrangianas* en los ejemplos anteriores tienen coordenadas globales en un subespacio vectorial  $k$ -dimensional de  $R^{2k}$  con función generatriz  $P$ .

En el caso donde  $L$  es en particular un subespacio vectorial de  $R^{2k}$ , decimos que  $L$  es un *subespacio lagrangiano*. Dado que nuestras formas simplécticas no dependen del punto base, podemos operar al nivel incremental (lineal) y vemos que un subespacio vectorial lagrangiano  $k$ -dimensional aniquila la forma bilineal cuya matriz es  $\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ . Aquí no hay distinción entre elementos y vectores tangentes de un subespacio.

Más generalmente, si  $W$  es un espacio vectorial real de dimensión finita y  $W^*$  su dual, podemos formar un nuevo espacio vectorial  $S = W \oplus W^*$  de dimensión par. A este espacio vectorial  $S$  se le llama espacio vectorial dual.

Hay una manera natural de definir, utilizando un par dual como  $S$ , una forma bilineal no degenerada antisimétrica en  $S$ , i.e. una estructura simpléctica, dada por:

$$A(u \oplus u^*, w \oplus w^*) = w^*(u) - u^*(w) \quad \text{para } u, w \in W; u^*, w^* \in W^*. \quad (26)$$

Al tomar cualquier base en  $W$  y su base dual en  $W^*$ , vemos que la matriz de  $A$  es exactamente  $\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ , donde el orden de los bloques matriciales es igual a la dimensión de  $W$ .

Recordemos que el espacio de todos los vectores voltajes de rama  $C^1$  en una red, es el dual de los vectores corrientes de rama  $C_1$ . En particular, esto sigue siendo verdadero si tomamos cualquier subconjunto de ramas, por ejemplo, las que corresponden a bobinas y condensadores en los ejemplos anteriores.

Entonces la estructura simpléctica considerada en cada caso puede ser obtenida exactamente por medio de la fórmula (26).

Consideremos ahora el espacio simpléctico completo  $S_1 = C_1 \oplus C^1$ , donde puede definirse la forma simpléctica  $A$  como arriba, identificando  $W = C_1$  y  $W^* = C^1$ . Queremos interpretar las leyes de *Kirchhoff* como la restricción a un subespacio *lagrangiano* de  $S_1$ .

En efecto, recordemos de la sección 3 que las leyes de Kirchhoff nos restringen al subespacio lineal  $K = \text{Ker} \partial \oplus \text{im} \partial^* \subset C_1 \oplus C^1$  de dimensión la mitad del espacio total. Este subespacio es *lagrangiano*, puesto que por el teorema de *Tellegen*  $v^*(i) = 0$  para cualquier  $i \oplus v^* \in K$  y por definición tenemos  $A = 0$  en  $K$ .

En este sentido, las leyes de *Kirchhoff* pueden ser interpretadas como una *reciprocidad-lineal* generalizada de origen topológico.

Es muy fácil de construir una función generatriz para tal subespacio *lagrangiano*  $K$ . Esta tiene que ser necesariamente una función cuadrática, por la linealidad. Las coordenadas para parametrizar  $K$  son simplemente un conjunto independiente de las corrientes y voltajes. Recordemos que hemos denotado por  $b$  al número total de ramas, y por  $n$  el número de nodos en la red.

Así, escogemos simplemente cualquier árbol del circuito, el cual tiene  $b - c = n - 1$  ramas, de acuerdo a (9), mientras que las correspondientes ligas serán las  $c$  ramas restantes de acuerdo a la fórmula (8). Renumeremos las ramas si es necesario, de manera que los índices  $1, 2, \dots, b - c$ , corresponden a ramas del árbol, mientras que  $b - c + 1, b - c + 2, \dots, b$  corresponden a las ramas de liga. Definimos la función generatriz requerida por  $K$  como la potencia total en las ramas de árbol:

Definimos la función generatriz con la siguiente proposición:

**Teorema 5.** Dado un circuito arbitrario, una función generatriz para definir el subespacio Lagrangiano  $K$  de las leyes de Kirchhoff se puede construir de la siguiente manera: Escogemos cualquier árbol del circuito y la función generatriz  $G$  es la potencia total en las ramas de ese árbol, donde las corrientes del árbol se expresan en términos de las corrientes de enlace usando las LCK como:

$$G_1(v_1, \dots, v_{b-c}; i_1, \dots, i_{b-c}) = G(v_1, \dots, v_{b-c}; i_{b-c+1}, \dots, i_b), \quad (27)$$

Por definición

$$i_K = \frac{\partial G}{\partial V_K} \quad \text{para } K = 1, 2, \dots, b - c, \quad (28)$$

*Prueba:* Para los voltajes y corrientes de árbol (ramas) tenemos que la función generatriz se escribe como

$$G_1(v_1, \dots, v_{b-c}; i_1, \dots, i_{b-c}) = i_1 v_1 + \dots + i_{b-c} v_{b-c}$$

y en forma matricial

$$G_1(v_1, \dots, v_{b-c}; i_1, \dots, i_{b-c}) = (v_1, \dots, v_{b-c}) I \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_{b-c} \end{pmatrix}$$

y queremos expresar al vector columna de corrientes de rama  $dps \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_{b-c} \end{pmatrix}$  en

términos del vector de corrientes de enlace  $\begin{pmatrix} i_{b-c+1} \\ i_{b-c+2} \\ \vdots \\ i_b \end{pmatrix}$ .

Para hacer esto último tomamos primero  $(n - 1)$  ecuaciones de nodo linealmente independientes en la forma  $AJ = 0$ , donde  $J$  es el vector columna de corrientes, y  $A$  es la matriz de incidencia reducida que se encuentra de la forma siguiente:

Los renglones de  $A$  corresponden a  $(n - 1)$  nodos del circuito y las columnas corresponden a las  $b$  ramas del circuito.

Para dar un elemento de esta matriz hacemos lo siguiente:

- $a_{jk} = 1$  si la rama del  $k$  sale del nodo  $j$ .
- $a_{jk} = -1$  si la rama del  $k$  entra al nodo  $j$ .
- $a_{jk} = 0$  si la rama del  $k$  no incide al nodo  $j$ .

Los renglones que quedan en dicha matriz son linealmente independientes entre sí.

También tomamos  $c$  ecuaciones linealmente independientes de mallas como  $BV = 0$ , donde  $V$  es el vector columna de voltajes y  $B$  es la matriz fundamental que se puede encontrar de la siguiente manera.

Primero se escoge un árbol del circuito que ya sabemos que contiene a todos los nodos; en los renglones de  $B$  ponemos las ramas de enlace del circuito y en las columnas tenemos otra vez las ramas de enlace y las ramas de árbol del circuito.

Observe que entonces la matriz  $B$  tiene una partición natural donde la primera parte de ésta es la matriz unidad  $I$  y  $V$  es el vector columna de voltajes.

Tomando la última ecuación y haciendo una partición de las matrices tenemos

$$[I \mid F] \begin{bmatrix} V_c \\ \cdots \\ V_t \end{bmatrix} = 0,$$

- donde  $I$  es la identidad de orden  $b - c + 1$ ,
- $F$  es una matriz de orden  $cx(b - c)$  que resulta de la partición de  $B$ .
- $V_c$  es el vector de voltajes de elementos de enlace
- $V_t$  es el vector de voltajes de elementos de rama de árbol.

La última ecuación se escribe como

$$V_c + FV_t = 0 \quad (29)$$

análogamente para  $AJ = 0$  tenemos la partición

$$[X \mid K] \begin{bmatrix} J_c \\ \cdots \\ J_t \end{bmatrix} = 0,$$

o sea

$$XJ + KJ = 0 \quad (30)$$

- $J_c$  es el vector de corrientes de enlace y
- $J_t$  es el vector de corrientes de rama.

Como los renglones de la matriz  $A$  son linealmente independientes, y al haberle quitado un nodo ese número es igual al número de ramas de la gráfica del circuito, entonces  $K$  es una matriz cuadrada de máximo rango. Por lo cual la matriz  $K$  tiene inversa; con esto podemos multiplicar a la ecuación (30) por la matriz inversa  $K^{-1}$  del lado izquierdo:

$$J_t + K^{-1}XJ_c = 0 \quad (31)$$

Al multiplicar esta última ecuación a la izquierda por  $V_t^t$  obtenemos la ecuación

$$V_t^t J_t + V_t^t K^{-1} X J_c = 0 \quad (31')$$

y multiplicando (29) por  $J_c^t$  a la izquierda obtenemos

$$J_c^t V_c + J_c^t F V_t = 0 \quad (32)$$

sacando transpuesta a (32) tenemos

$$V_c^t J_c + V_t^t F^t J_c = 0 \quad (32')$$

Sumando (31') y (32') obtenemos

$$\begin{aligned} -V_t^t [F^t + K^{-1} X] J_c &= V_c^t J_c + V_t^t J_t \\ &= J_c^t V_c + J_t^t V_t \\ &= \langle J, V \rangle = 0 \quad \text{Por Teorema de Tellegen.} \end{aligned}$$

Entonces, tomando los respectivos vectores unitarios para  $V_t^t$  y  $J_c$  la forma cuadrática (escalar) del lado izquierdo vemos que  $F^t + K^{-1} X = 0$ , de donde

$$K^{-1} X = -F^t.$$

Entonces sustituyendo en (31) obtenemos

$$J_t = F^t J_c$$

y de (29)

$$V_c = -F V_t.$$

Si definimos a  $D = F^t$  entonces reescribimos

$$J_t = D J_c \quad (33)$$

$$V_c = -D^t V_t. \quad (34)$$

Tomando la ecuación (33) y sustituyendo en la ecuación que define la función generatriz obtenemos

$$G(v_1, \dots, v_{b-c}; i_{b-c+1}, \dots, i_b) = (v_1, \dots, v_{b-c}) I D J_c = (v_1, \dots, v_{b-c}) D J_c$$

Donde  $J_c$  es el vector de corrientes de enlace.

Con esto tenemos que

$$G(v_1, \dots, v_{b-c}; i_{b-c+1}, \dots, i_b) = (v_1, \dots, v_{b-c}) D \begin{pmatrix} i_{b-c+1} \\ \vdots \\ i_b \end{pmatrix}$$

De aquí sale directamente la ecuación (28). □

**Corolario 4.** Por el teorema de Tellegen podemos escribir que

$$G = - \sum_{l=b-c+1}^b i_l v_l,$$

donde

$$-v_l = \partial G / \partial i_l \quad \text{para } l = b - c + 1, \dots, b. \quad (28')$$

*Prueba:* Esta demostración es directa usando el teorema de Tellegen.

Posteriormente daremos 4 ejemplos con el objetivo de que quede más claro este resultado.

#### Ejemplo 4.

Sea el circuito cuya gráfica es la siguiente

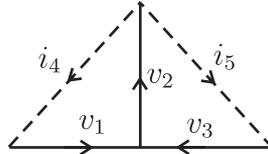


Figura 11:

Encontrar la función generatriz en términos de  $v_1, v_2, v_3, v_4, i_5$ , e  $i_6$ . Y demuestre derivando respecto de la variable apropiada que se cumplen las leyes de Kirchoff como lo indica el corolario.

De alguna forma lo que se concluyó en la demostración del teorema es que la matriz  $D$  es aquella matriz que tiene eslabones en sus columnas y ramas en los renglones. Así en nuestro ejemplo escogemos el siguiente árbol y empezamos la numeración de todas las ramas de la red en dicho árbol, como se muestra en la figura.

Con esto tenemos que la matriz  $D$  es:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ \text{eslabones} \end{pmatrix} \text{ ramas}$$

con esto tenemos que el vector de corrientes del árbol escogido en términos de las de enlace es:

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_5 \\ i_6 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$G = (v_1, v_2, v_3, v_4) \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{pmatrix} = (v_1, v_2, v_3, v_4) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_5 \\ i_6 \end{pmatrix}$$

O en forma algebraica:

$$G = v_1 i_6 + v_2(i_5 - i_6) + v_3(-i_5) + v_4(-i_5).$$

Derivando parcialmente como sigue se encuentran las leyes de Kirchoff para este circuito.

$$\begin{aligned} \partial G / \partial v_1 &= i_6 = i_1 \\ \partial G / \partial v_2 &= i_5 - i_6 = i_2 \\ \partial G / \partial v_3 &= -i_5 = i_3 \\ \partial G / \partial v_4 &= -i_5 = i_4 \\ \partial G / \partial i_5 &= v_2 - v_3 - v_4 = -(v_3 + v_4 - v_2) = -v_5. \\ \partial G / \partial i_6 &= v_1 - v_2 = -(v_2 - v_1) = -v_6. \end{aligned}$$

Dada la figura plana del circuito que se muestra en la figura encuentre la Función Generatriz, en términos de los voltajes de árbol y las corrientes de rama.

Análogamente al circuito anterior, para el árbol que se muestra en la figura tenemos que la matriz  $D$  es la siguiente:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Así con esta matriz tenemos que las corrientes 1, 2 y 3 en términos de las numeradas como 4, 5 y 6 quedan escritas como:

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{pmatrix}$$

Con esto la función  $G$  nos queda:

$$G(v_1, v_2, v_3; i_4, i_5, i_6) = (v_1 \ v_2 \ v_3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{pmatrix}$$

En forma algebraica tenemos:

$$G = -v_1 i_4 + v_2(i_5 - i_4) + v_3(i_5 - i_6)$$

De aquí se ve claro que al derivar parcialmente respecto a las variables en que está escrita la función  $G$  aparecen las ecuaciones de Kirchoff para este circuito.

Dada la gráfica no planar como se muestra en la siguiente figura muestre que existe la función  $G$ , como en los anteriores ejercicios.

Para el árbol que se muestra en la figura tenemos que la matriz  $D$  es la siguiente:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Con esta matriz tenemos que las corrientes de ramas quedan escritas como:

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \\ i_9 \\ i_{10} \end{pmatrix}$$

entonces la función  $G$  nos queda:

$$\begin{aligned} G(v_1, v_2, v_3, v_4; i_5, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}) = \\ = (v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \\ i_9 \\ i_{10} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Y algebraicamente

$$G = v_1(i_5 - i_6 - i_{10}) + v_2(i_5 - i_6 - i_8 - i_9 - i_{10}) + v_3(i_5 - i_7 - i_8 - i_9 - i_{10}) + v_4(i_5 - i_7 - i_9)$$

De esta función algebraica se pueden deducir las ecuaciones de Kirchoff sin ningún problema.

Este ejemplo pone de relieve que la gráfica del circuito no necesariamente debe poder dibujarse en un plano, solo importa la relación que existe entre el número de nodos y las aristas de la gráfica. Además en este sentido no importa si un circuito eléctrico real se puede “aplastar” en un plano bidimensional o no.

### Ejemplo 5.

Considere el circuito cuya gráfica se muestra en la siguiente figura. Las ramas de un árbol están dibujadas por medio de líneas continuas, mientras que las ramas de enlace asociadas están con líneas punteadas.

En este caso, (27) queda

$$G = i_4 v_1 + (i_4 + i_5) v_2 + i_5 v_3, \quad (27')$$

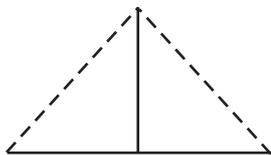


Figura 12:

y verificamos que (28), (28') se convierten en

$$i_1=i_4, i_2 = i_4 + i_5, \quad i_3 = i_5, v_4 = -(v_1 + v_2), \quad v_5 = -(v_2 + v_3),$$

que están de acuerdo con las *LCK* y *LVK*, respectivamente.

Es posible trasladar  $K \subset S_1$  en el caso general a un subespacio *Lagrangiano* en términos de corrientes y potenciales de nodo. Sea  $S_0 = C_0 \oplus C^0$ , un espacio simpléctico con la estructura simpléctica natural dada en (26).

Recordemos que las cadenas y las cocadenas a los niveles 0- y 1- están relacionadas por los operadores frontera y cofrontera  $\partial : C_1 \rightarrow C_0$  y  $\partial^* : C^0 \rightarrow C^1$ . Dado que las flechas que van en dirección opuesta, no podemos definir un mapeo de  $S_1$  a  $S_0$  o viceversa, pero podemos definir una *relación* que nos permita transferir el subespacio  $K \subset S_1$  a otro subespacio Lagrangiano  $K_0 \subset S_0$ . Puesto que  $K = \text{Ker} \partial \oplus \text{im} \partial^*$ , transfiriendo la 1ª componente  $\text{Ker} \partial$  mediante la aplicación de  $\partial$  nos da  $0 \in C_0$ .

Transfiriendo  $\text{im} \partial^*$  por medio de  $\partial^*$  a  $C^0$  corresponde a tomar la imagen inversa. Esto nos da  $K_0 = 0 \oplus C^0$  (trivialmente lagrangiano), lo cual significa 0 corrientes de nodo y potenciales arbitrarios de nodo. Eso es una expresión equivalente de las leyes de *Kirchhoff*.

Similarmente podemos interpretar  $K$  en términos de mallas orientadas independientes del circuito. Definimos un espacio de *2-cadenas*  $C_2$  como sus combinaciones lineales formales. Este espacio tiene dimensión  $c$ ; otra elección de mallas independientes corresponde a hacer un cambio de base. Sea  $C^2 = C_2^*$  el espacio correspondiente de cocadenas. La frontera de una malla es definida como la suma algebraica de las ramas orientadas que la componen. Extendiendo por linealidad, obtenemos otro mapeo frontera:  $\partial_2 : C_2 \rightarrow C_1$ ; y por dualidad, la cofrontera correspondiente  $\partial_2^* : C^1 \rightarrow C^2$ . Formamos finalmente el espacio simpléctico natural  $S_2 = C_2 \oplus C^2$ , como antes.

Procediendo como en el caso de arriba con  $\partial_2$  y  $\partial_2^*$ , obtenemos a partir de  $K$  otro subespacio lagrangiano  $K_2 \subset S_2$  como  $K_2 = C_2 \oplus O$ . Estructuralmente este subespacio se interpreta como corrientes arbitrarias de malla y cero voltajes de malla, y es otra expresión equivalente de las Leyes de Kirchhoff. La matriz para  $\partial_2^*$  es conocida como la *matriz circuital*, en analogía a la matriz de incidencia para  $\partial$ .

## 0.2. Resultados para redes lineales y conclusiones

### 0.2.1. Transformación de fuentes

Para poder aplicar los métodos que posteriormente analizaremos, primero es necesario saber cómo se transforma una fuente de corriente en una fuente de voltaje y o a la inversa, una fuente de voltaje en una fuente de corriente. De hecho cuando se aplican los métodos de análisis por mallas y por lazos, es necesario haber transformado todas las fuentes de corriente en fuentes de tensión (voltaje).

Antes de definir lo que son las transformaciones de fuentes, tenemos que mencionar que todo elemento pasivo (inductor o capacitor) con condiciones iniciales arbitrarias, puede sustituirse por el elemento con condiciones iniciales nulas y una fuente; como se ilustra en la siguiente figura:

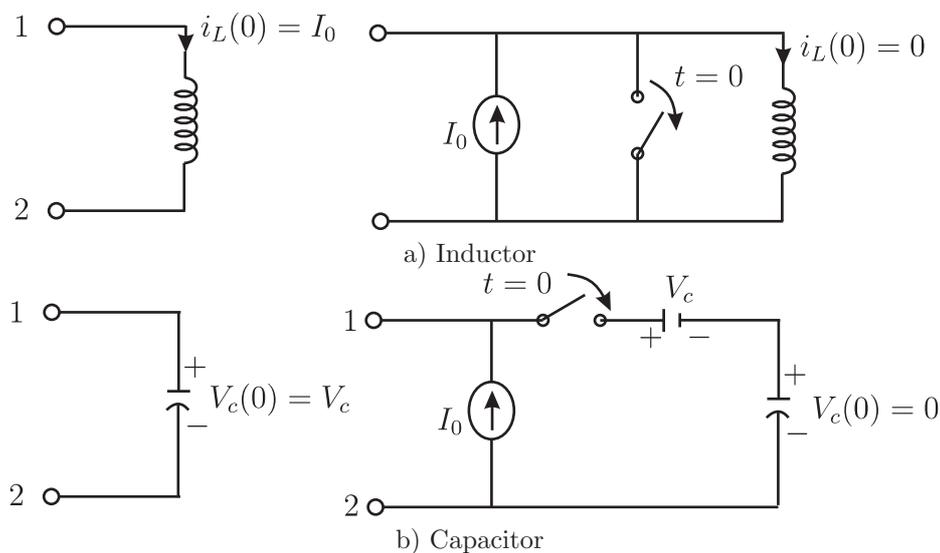


Figura 13: Cambio de elementos pasivos con condiciones iniciales.

La transformación de una fuente de voltaje en una fuente de corriente, o viceversa, se realiza como se ilustra en la figura siguiente:

Aquí aclaramos que en contraposición a lo que llamamos fuente *real* de tensión, cuando la impedancia resulte despreciable (cero) a la fuente se le conoce como fuente *ideal* de tensión.

Análogamente, cuando una fuente de corriente *real* tenga una impedancia en paralelo muy grande (infinita), se le conoce como fuente *ideal* de corriente.

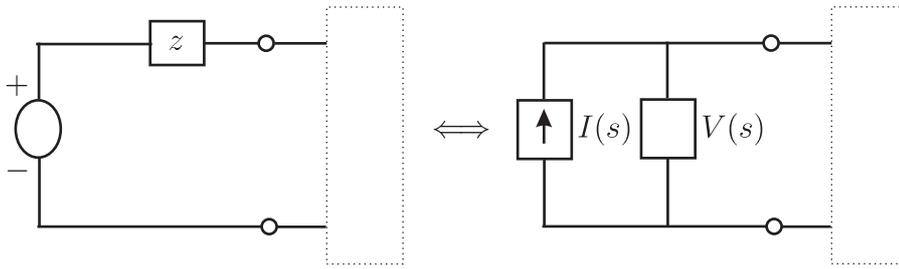


Figura 14: Transformación de una fuente real de tensión en una fuente real de corriente.

Cuando existen fuentes ideales de voltaje en un circuito, no se les puede transformar en fuentes reales de corriente empleando los métodos ilustrados en las figuras anteriores, por lo que no se puede realizar un análisis por nodos o por secciones de corte.

De la misma forma no se puede hacer la transformación de fuentes ideales de corriente a fuentes reales de tensión, que se requiere para un análisis por mallas o por lazos.

Antes de continuar daremos un ejemplo de cada una de las transformaciones de fuentes ideales de tensión o corriente en sus respectivas fuentes reales de tensión o corriente.

**Ejemplo 6.** Transformación de una fuente ideal de voltaje en una fuente real de voltaje.

Considere la figura 15-a donde la arista  $ab$  contiene una fuente ideal de voltaje, esto es no tiene ninguna impedancia en paralelo. Para poder transformarla en fuente real de voltaje se hacen las transformaciones indicadas en los incisos a), b) y c) de la misma figura donde se pone en serie con cada una de las impedancias la fuente de voltaje (inciso b). Posteriormente, como entre los nodos  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  y  $a_4$  no existe diferencia de potencial, entonces no circula corriente entre ellos por lo tanto se puede abrir la conexión entre los mismos.

Con estos cambios, la fuente ideal de voltaje quedó transformada en cuatro fuentes reales de voltaje (inciso c).

Una ilustración un poco mas general de cómo transformar una fuente ideal de voltaje en varias fuentes de voltaje real de dos maneras distintas la mostramos en la siguiente figura:

Lo que se observa en esta figura es que se “empuja” la fuente ideal de voltaje a través de una de sus terminales como se ilustra en las figuras b) y c), obteniendo circuitos equivalentes al original.

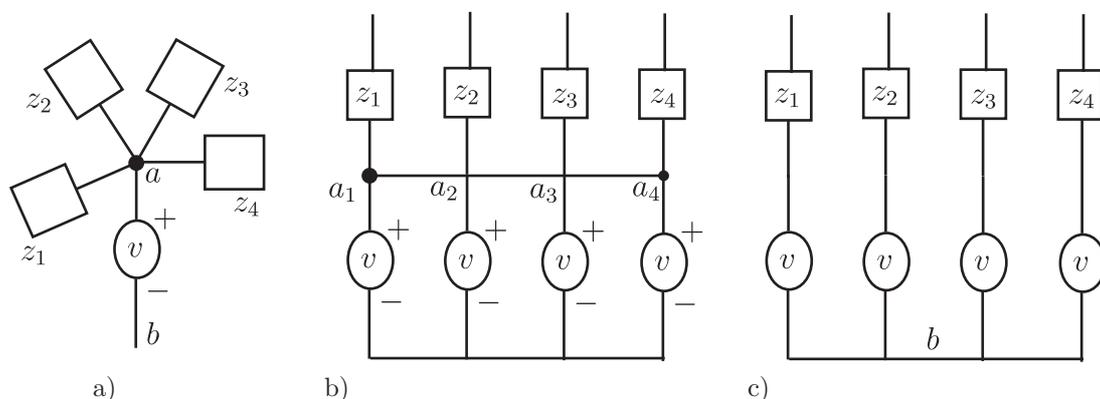


Figura 15: Transformación de una fuente ideal de tensión en fuentes de voltaje reales.

**Ejemplo7.** En este ejemplo hacemos la transformación de una fuente ideal de corriente en varias fuentes reales de corriente.

Observando la figura 24 notamos que la transformación se hace teniendo cuidado de que las leyes de Kirchhoff para los nodos principales (en nuestro ejemplo los nodos  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $c$ ) se sigan cumpliendo.

Un caso mas general de transformación de fuentes de corriente ideal lo muestra la figura 15. Se comienza seleccionando cualesquier malla que contenga la arista de la fuente ideal. Por ejemplo en nuestro caso la malla cuyos nodos son:  $abcd$  o la malla con nodos  $afghda$ . Y la fuente ideal se desconecta de su lugar original, y ahora se conecta en paralelo con cada una de las aristas, cuidando el sentido de la corriente para no violar las leyes de Kirchhoff correspondientes a cada nodo de las aristas seleccionadas.

Cuando en un circuito ya no tenemos ninguna fuente ideal de corriente o voltaje, al punto de unión entre dos o más elementos pasivos de una red se le conoce con el nombre de *nodo*. Si los elementos pasivos de un circuito se representan por líneas (arcos), llamados *aristas*, se obtiene la *gráfica*. Normalmente los términos *arista* y *rama* se consideran como sinónimos aunque estrictamente rama debería utilizarse solo para las aristas de un *árbol*.

Un *árbol* es un conjunto de aristas que no forman una trayectoria cerrada; pero que conectan entre sí a todos los nodos de una gráfica. Cada una de las aristas que no pertenece al árbol que se escogió, recibe el nombre de *eslabón*.

Asociando a cada una de las aristas de la gráfica una dirección o marcas de polaridad (normalmente el sentido de la corriente), obtenemos la *gráfica orientada* de un circuito.

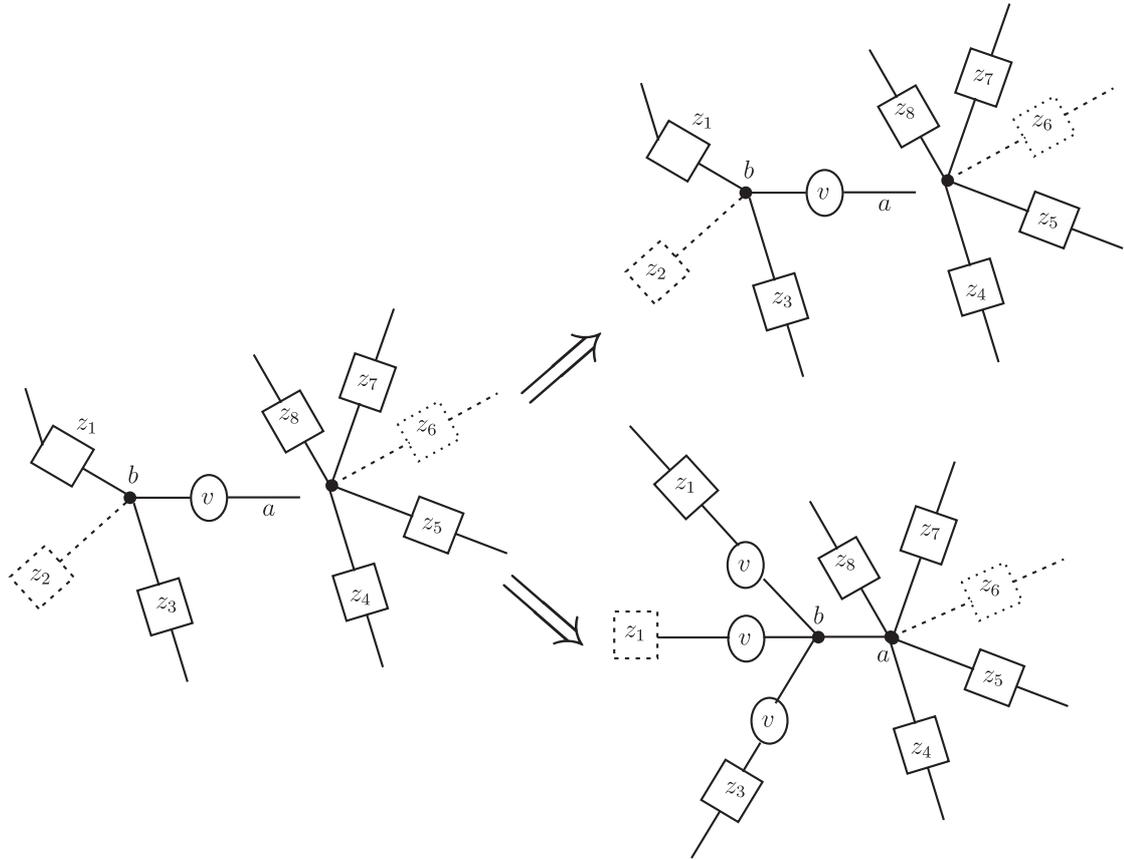


Figura 16: Transformación de una fuente ideal de tensión en varias fuentes reales de tensión.

La figura 17-a muestra un circuito eléctrico y las figuras *b* y *c* muestran su gráfica y su gráfica orientada, respectivamente.

### 0.2.2. Topología de las Redes Lineales en el Estado Estacionario

En esta sección discutimos circuitos lineales de corriente alterna en el estado estacionario, i.e. cuando se desprecia la parte transitoria. Suponemos que se aplican fuentes de corriente a nodos, mientras que en forma dual se aplican fuentes de voltaje a mallas en serie. En contraste con el tratamiento de circuitos no lineales, todas las fuentes son consideradas por separado respecto a los elementos pasivos. Si  $\omega > 0$  es la frecuencia angular de todas las fuentes (voltaje o corriente), sus expresiones como funciones del tiempo pueden ser escritas en

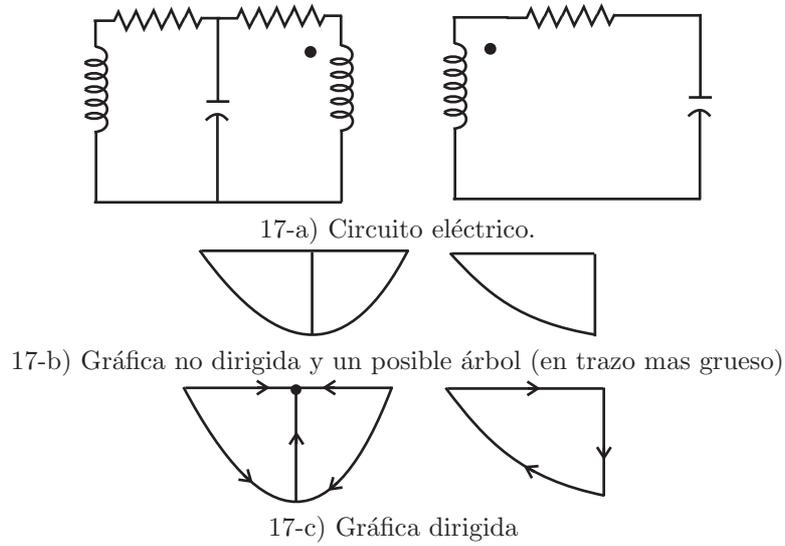


Figura 17: Circuito y sus gráficas.

la forma

$$\operatorname{Re}(Be^{j\omega t}) = |B| \cos(\omega t + \phi)$$

donde  $B = |B| e^{j\phi}$  es un número complejo. Substituyendo los valores de la fuente  $Be^{j\omega t}$  dentro de la ecuación del circuito eléctrico [1, ch7] esto conduce a la solución para corrientes y voltajes en los elementos pasivos de la forma  $De^{j\omega t}$  donde  $D \in C$ . Esto es debido al hecho de que para excitaciones externas (fuentes) de la forma dada arriba  $\frac{d}{dt}$  es reemplazado por la multiplicación por  $j\omega$ , y las ecuaciones diferenciales lineales son transformadas en ecuaciones algebraicas a ser resueltas para las  $D$ 's en términos de  $\omega$  y de las  $B$ 's. La solución real es obtenida mediante cálculo de la función  $\Re(De^{j\omega t})$ .

La anterior discusión muestra que en este caso podemos suponer que las ramas de corrientes y voltajes no cambian con el tiempo y son números complejos (las  $D$ 's antes mencionadas), en lugar de números reales. Esto implica que los espacios vectoriales de cadenas y cocadenas son tomados sobre los complejos  $C$  como escalares.

El paso siguiente es que supondremos aquí que la gráfica del circuito es un complejo simplicial de dimensión 1, lo cual implica que no tiene complejos de dimensión 2. Esto está en contraste con la sección anterior, donde las mallas estaban consideradas como complejos de dimensión 2 (aunque físicamente no aparecen objetos 2- dimensionales)

La construcción que sigue es debido a Roth [5];

Tenemos los siguientes mapeos:

$$\begin{aligned} C_o &\longleftarrow \partial \longleftarrow C_1 \longleftarrow \partial_2 \longleftarrow C_2 = 0 \\ C^o &\longrightarrow \partial^* \longrightarrow C^1 \longrightarrow \partial_2^* \longrightarrow C^2 = 0 \end{aligned}$$

donde  $\partial_2$  y  $\partial_2^*$  son triviales. Esto hace posible obtener 2 sucesiones exactas de estos mapeos, como sigue: Primero reemplazamos  $C_o$  por las llamadas O-fronteras  $B_o = im\partial$ , tal que  $\partial : C_1 \rightarrow B_o$  es sobre. Por dualidad, reemplazamos  $C^o$  por  $C^o/Z^o$  donde  $Z^o = ker\partial^*$  se llaman O-cociclos; entonces  $\partial^* : C^o/Z^o \rightarrow C^1$  es inyectiva. Los elementos de  $B_o$  son interpretados como corrientes en los nodos y  $C^o/Z^o$  son potenciales de nodo efectivos (dos de ellos estan identificados si dan lugar a las mismas ramas de voltajes).

El espacio vectorial anterior es isomorfo a  $B_0$ . Estos espacios tienen dimensión  $n - 1$ , dado que  $Z^o \subset C^o$  es exactamente el subespacio de 1- dimensión correspondiente a asignar el mismo potencial a todos los nodos (sección 3). De hecho,  $B_o \oplus C^o/Z^o$  con la estructura simplética inducida puede ser considerado como una reducción de  $C_o \oplus C^o$ .

Dado que las 2-cadenas, las 2-cocadenas y los mapeos relacionándolos con  $C^1$  y  $C_1$  son triviales, consideremos en lugar de ellos la inclusión  $Z_1 \rightarrow C_1$  en donde  $Z_1 = ker\partial$  son los 1-ciclos . Como  $C_2 = 0$ , las 1-fronteras forman un espacio trivial,  $B_1 = im\partial_2 = 0$  . Por lo tanto podemos identificar  $Z_1$  con el espacio de homologías de dimensión 1  $H_1 = Z_1/B_1 = Z_1/0$ , el cual es un invariante topológico del circuito. Por dualidad, consideramos al nivel de cocadenas el mapeo  $in^* : C_1 \rightarrow C_1/Ker(in^*)$ .

Si definimos la 1-cofrontera como  $B^1 = im\partial^*$ , inmediatamente vemos que  $B^1 \subset Ker(in^*)$ . Pero el espacio  $Ker(in^*)$  puede ser caracterizado como el conjunto de  $\alpha \in C^1$  tales que  $\alpha(z) = 0$  para cualquier  $z \in Z_1$ . Tomando una base en  $Z_1$  y extendiendo a una en  $C_1$ , consideremos la base dual en  $C^1$ . Probemos que  $dimKer(in^*) = dimC_1 - dimZ_1$ , mismo que coincide con  $dimB^1$ , dado que  $K = Z_1 \oplus B^1$  y  $dimK = dimC_1$ . Recordemos que  $K$  fué definida en la sección anterior, por lo tanto,  $B^1 = ker(in^*)$ . Por otro lado, dado que  $C^2 = 0$  el mapeo  $\partial_2^*$  es nulo, entonces los 1-cociclos son todo el espacio  $Z^1 = ker\partial_2^* = C^1$ . Por lo tanto  $C^1/B^1 = Z^1/B^1 = H^1$  que se conoce como el espacio de cohomología de dimensión 1, otro invariante topológico dual de  $H_1$ .

La dimensión de  $H_1$  y  $H^1$  se conoce como el número de Betti de orden 1 del circuito, y topológicamente nos da el número de mallas independientes del circuito.

Los elementos de  $H_1 \approx Z_1$  son corrientes de la malla del circuito, mientras  $H^1 = Z^1/B^1$  son fuerzas electromotrices efectivas de mallas ( todos los voltajes de rama  $B^1$  que provienen de la asignación de un potencial de nodo, se identifican con cero).



Entonces el mapeo  $in$  tiene que ser reemplazado por un operador frontera y las sucesiones son exactas como antes.

**Ejemplo 8.**

Considere el siguiente circuito en estado estacionario, donde las fuerzas electromotrices  $E_1, E_2 \in C_2$  y las fuentes de corriente  $J_1, J_2 \in C_2$ . Todas las fuentes tienen una frecuencia angular  $\omega$ .

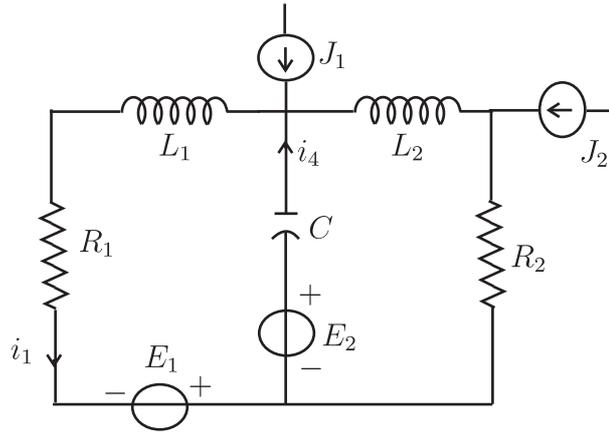


Figura 18: Diagrama del circuito del ejemplo 6

Considerando que  $i_1$  es la corriente común para los elementos  $R_1$  y  $L_1$ , obtenemos la ecuaciones (29) en la siguiente forma:

$$v_{R1} = R_1(i_1), \quad v_{R2} = R_2i_2, \quad v_c = i_4/(j\omega C)$$

$$v_{L1} = j\omega L(i_1), \quad v_{L2} = j\omega L_2(i_3),$$

$$V_c + V_{R1} + V_{L1} = E_1 + E_2$$

$$V_c - V_{R2} - V_{L2} = E_2$$

$$i_2 - i_3 = J_2 \tag{1}$$

$$i_3 + i_4 - i_1 = J_1 \tag{2}$$

$$i_2 + i_4 - i_1 = 0 \tag{3}$$

Reemplazando las caídas de voltaje en cada elemento en los renglones 3 y 4 en términos de las corrientes respectivas, dichas ecuaciones se convierten en

$$i_4/j\omega C + R_1i_1 + j\omega L_1 = E_1 + E_2, \tag{4}$$

$$i_4/j\omega C - R_2i_2 - j\omega L_2i_3 = E_2. \tag{5}$$

Las ecuaciones de (1) a (5) forman un sistema de ecuaciones sobredeterminado para las corrientes  $i_1, i_2, i_3, i_4$ . Sin embargo, las ecuaciones (1), (2) y (3) de las *LCK* no son independientes: Se combinan para recuperar la condición flotante

$$J_1 + J_2 = 0.$$

Quitando la ecuación (3), nos queda un sistema de ecuaciones independientes.

Resolviendo, tenemos

$$\begin{aligned} i_3 \Delta &= (-T_1 J_2 + E_1 + E_2)/(j\omega C) - (T_1 + (j\omega C)^{-1})(R_2 J_2 + E_2) \\ i_4 \Delta &= T_2(-T_1 J_2 + E_1 + E_2) + T_1(R_2 J_2 + E_2) \\ i_2 &= i_3 + J_2 \\ i_1 &= i_3 + i_4 + J_2, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta &= R_1 R_2 + L_1 L_2 / C - \omega^2 L_1 L_2 + j(\omega(L_1 R_2 + L_2 R_1) \\ &\quad - (R_1 + R_2)\omega^{-1} C^{-1}), T_1 = R_1 + j\omega L_1 \end{aligned}$$

y

$$T_2 = R_2 + j\omega L_2.$$

Que tiene siempre solución única, puesto que podemos probar que  $\Delta \neq 0$  para todo  $\omega > 0$ .

Recalamos que todas las corrientes en estos circuitos pueden ser obtenidas empezando por 3 mallas de corriente: corrientes  $i_1$  e  $i_2$  alrededor de la malla 2 claramente definiendo circuitos independientes, y la corriente  $J_2$  en el circuito parcial formado por  $J_2, L_2, J_1$ , y que se cerraría externamente en un camino desconocido.

Para concluir con esta sección, mencionamos que las mismas ecuaciones se aplican a circuitos con resistencias lineales de corriente directa (fuentes constantes), la diferencia es que cadenas, cocadenas y todos los espacios derivados son espacios vectoriales sobre los números reales, dado que allí no hay inductores ni capacitores. Aquí no hay ecuaciones diferenciales involucradas, sino solo ecuaciones lineales (algebraicas) no homogéneas [10].

$$\begin{aligned} in^* T(i) &= E \\ \partial i &= 0, \end{aligned} \tag{30}$$

probando que hay exactamente  $c = b - n + 1$  ecuaciones independientes y describiendo las soluciones por medio de determinantes.

**Ejemplo 9.**

Considere el siguiente circuito de corriente directa de la figura 27.

Las ecuaciones (29) quedan:

$$\begin{aligned} v_1 &= R_1 i_1, & v_2 &= R_2 i_2, \\ v_1 + v_2 &= E \\ i_1 &= i_2 \end{aligned}$$

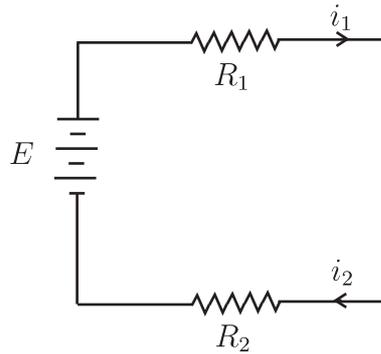


Figura 19: Diagrama del circuito del ejemplo 9.

Las ecuaciones de la ley de Ohm definen un subespacio 2- dimensional en un espacio vectorial de 4-dimensiones con coordenadas  $(i_1, i_2, v_1, v_2)$ . Las últimas 2 ecuaciones de Kirchhoff definen un subespacio 2-dimensional afín.

La intersección de ambas es el punto  $-(R_1 + R_2)^{-1}(E, E, R_1 E, R_2 E)$  mientras que las ecuaciones equivalentes (30) se escriben como:

$$R_1 i_1 + R_2 i_2 = E$$

$$i_1 = i_2$$

### 0.2.3. Conclusiones

En este trabajo comparamos los tres tipos distintos de reciprocidad. Recordando que cuando todas las ramas de una red fueron tomadas en cuenta, las leyes de interconexión de Kirchhoff restringidas a un espacio lagrangiano de  $S_1 = C_1 \oplus C^1$ ; esto es una reciprocidad lineal de origen puramente topológico.

En la sección 7,  $S_1$  fue construido solamente de una red lineal de resistores, mientras las fuentes de corriente continua fueron consideradas por separado de manera que trasladan el voltaje y la corriente en una constante. Los espacios lagrangianos resultantes obtenidos de la interconexión ya no son lineales, si no subespacios afines.

A considerar la impedancia como un isomorfismo se requiere tomar la intersección con un subespacio Lagrangiano lineal. Esa intersección es exactamente un punto, si ambos espacios son transversales, y en dado caso un subespacio afín para fuentes no triviales. Parecería que se puede definir una estructura simpléctica y cierta reciprocidad cuando  $C_1$  y  $C^1$  son espacios vectoriales complejos, pero nosotros no abordamos esta idea en el presente trabajo.

En la sección 1,3 y al inicio de la sección 1,4 consideramos circuitos recíprocos no lineales. El espacio  $S_1$  fue construido por corrientes y voltajes para todos los inductores, y ramas de capacitores del circuito.

Bajo la hipótesis de Brayton-Moser, el potencial mixto es una función generatriz para la subvariedad lagrangiana (no lineal)  $\varphi$  en  $S_1$  de corrientes admisibles y voltajes en los inductores y capacitores, bajo las leyes de interconexión, y leyes de Ohm en resistores. Estrictamente hablando, las ecuaciones diferenciales para el circuito están definidas por  $\varphi$ , la cual es parametrizada por corrientes en inductores y voltajes en capacitores (o por flujos en inductores, y cargas en capacitores).

Invariantes topológicos como los espacios vectoriales  $H_1$  y  $H^1$ , y parámetros como el número de mallas independientes  $c$  y la característica de Euler (igual a 1) de la región poligonal fue mostrado que son constantes muy importantes para el punto de vista de las interconexiones.

A la pregunta de que si el número  $n$  de nodos y  $b$  de ramas son invariantes, la respuesta es: no; porque dado un circuito nosotros podemos reemplazar una rama por otra rama en serie, cambiando  $b$  y  $n$ .

## Apéndice A

# Elementos en Circuitos Eléctricos.

### A.1. Definición y características de los principales elementos eléctricos lineales.

Todos los elementos eléctricos considerados en este trabajo son de dos terminales.

En circuitos eléctricos encontramos cinco elementos lineales básicos, 3 pasivos y 2 activos. Los pasivos almacenan o disipan energía; y estos son: El resistor, el capacitor y la bobina. Los otros dos elementos, son activos y son los que suministran energía a un circuito. Ellos son, el generador de voltaje y el generador de corriente.

Ahora definiremos y analizaremos a cada uno de ellos.

### A.2. Resistor.

En general la resistencia de un material depende del área transversal, la longitud, la temperatura, la resistividad del material, etc. Incluso puede variar con la frecuencia, cuando se le aplica una corriente alterna.

Como ya se dijo anteriormente el Resistor es un elemento pasivo y tiene 2 terminales, el parámetro que lo caracteriza se llama resistencia  $R$  y es el cociente de la diferencia de potencial (o voltaje) medida entre sus dos terminales, dividido entre la corriente que atraviesa este elemento.

De hecho esta relación es experimental y fué descubierta por Ohm.

En seguida ponemos sus símbolos y sus propiedades:

$$R = V(t)/I(t)$$

Donde:  $V(t)$  es la diferencia de potencial ó voltaje entre sus terminales e  $I(t)$  la corriente que atraviesa el elemento; al recíproco de  $R$  se le llama conductancia, en contraposición a resistencia.

Como la resistencia  $R$  es constante, la relación entre voltaje y corriente está dada por la siguiente gráfica:

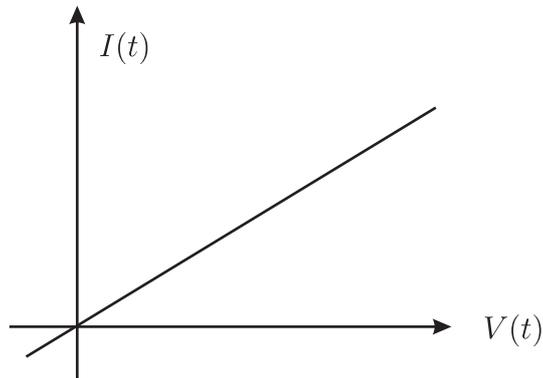


Figura A.1: Resistor Lineal

Si la gráfica no es una línea recta entre las variables  $V(t)$  e  $I(t)$ , el elemento es no lineal, como se verá en la sección I.2.

### A.3. Capacitor.

También es un elemento pasivo, y su almacenamiento de energía lo hace mediante un campo eléctrico; a la propiedad que lo distingue le llamamos capacitancia y es el cociente de la carga acumulada entre la diferencia de potencial que se mide entre sus terminales

Así tenemos que  $C = q/V$ , donde:

$C$ — es la capacitancia,

$q$ — es la carga acumulada y

$V$ — el voltaje.

De este tipo de elementos, el más conocido es el de placas paralelas, el cual mostramos en seguida:

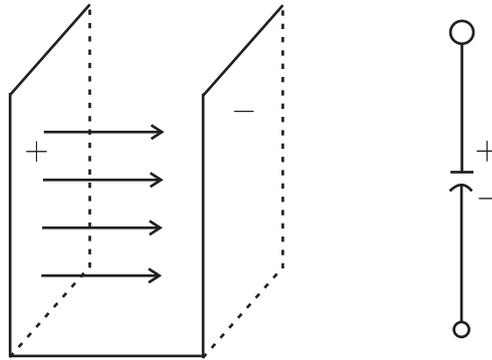


Figura A.2: a) Capacitor de placas planas paralelas b) Símbolo del capacitor

El parámetro  $C$  que caracteriza este elemento depende del área de las placas, la distancia de separación entre ellas y otra propiedad llamada permitividad eléctrica [3] del medio que separa las placas.

Si tomamos la ecuación que define a  $C$  y recordando que la corriente es la derivada de la carga respecto al tiempo tenemos:

$$I = dq/dt = d/dt(CV) = CdV/dt \quad (1)$$

Obteniendo la última igualdad al suponer que  $C$  es una constante, puesto que el elemento es lineal. De aquí observamos que cuando el voltaje es constante entre las placas, entonces no pasa corriente a través del conductor.

Esto significa que sólo habrá corriente en el capacitor cuando haya cambios de voltaje, por ejemplo cuando se aplica un voltaje alterno ó al cerrar o abrir interruptores.

Análogamente podemos expresar el voltaje en términos de la corriente, despejando  $dv$  en (1) e integrando:

$$\int_{V(0)}^{V(t)} dV(t) = 1/C \int_{t=0}^t I(t)dt;$$

o sea que

$$V(t) - V(0) = 1/C \int_{t=0}^t I(t)dt$$

Y despejando  $V(t)$  de aquí tenemos:

$$V(t) = 1/C \int_{t=0}^t I(t)dt + V(0)$$

Donde  $V(0)$  se conoce como voltaje inicial del capacitor.

## A.4. La bobina.

Es un hecho experimental conocido que cuando circula corriente por un conductor eléctrico, este genera un campo magnético alrededor de él.

Una bobina se construye enrollando un conductor de manera que una sección transversal del enrollado sea circular.

El parámetro que lo distingue es la inductancia  $L$ , y podemos definirla como el número  $N$  de vueltas de la espira, multiplicada por el cambio respecto a la corriente del flujo magnético producido por cada espira; esto es:

$$L = Nd\psi/dI.$$

Ahora bien, si sabemos que el voltaje es la derivada del flujo magnético total,  $N\psi$ , respecto al tiempo; o sea el cambio del flujo total  $V(t) = d(N\psi)/dt$ ; entonces aplicando la regla de la cadena y la definición de  $L$  tenemos:

$$V(t) = dN\psi/dt = Nd\psi/dI dI(t)/dt = LdI/dt, \quad (2)$$

Ahora si deseamos expresar la corriente en función del voltaje en el inductor, tenemos:

$$I(t) = 1/L \int_{t=0}^t V(t)dt + I(0)$$

donde  $1/L$  se conoce como invertancia de la bobina e  $I(0)$  es la corriente inicial a través de la bobina.

Su representación es la siguiente:

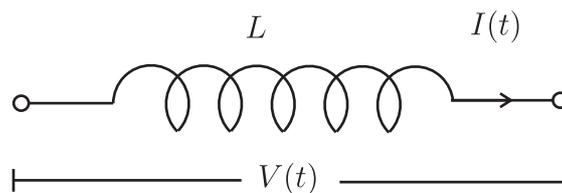


Figura A.3: La Bobina

Una de las tantas aplicaciones de la bobina es el Transformador Eléctrico, que es un dispositivo más complejo que los elementos que hemos visto y que no consideraremos en este trabajo.

## A.5. Generador o Fuente de Voltaje.

Es un elemento activo, porque mantiene entre sus dos terminales una diferencia de potencial (o un voltaje) independientemente de cómo se conecte, siempre que no se unan sus terminales en corto circuito.

En seguida mostramos los símbolos con que se acostumbra representarlo

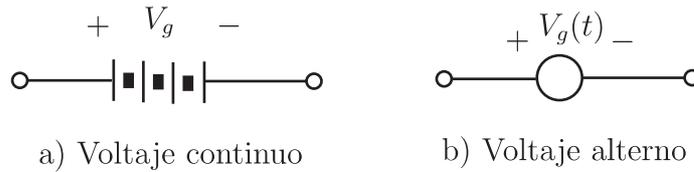


Figura A.4: Generador de voltaje

## A.6. Generador de Corriente

Este elemento mantiene entre sus dos terminales una circulación de corriente eléctrica, que es una función conocida. Además es independiente de cómo se conecte, siempre que sus dos terminales estén conectadas a un elemento o a un circuito.

La siguiente figura representa al generador de corriente:

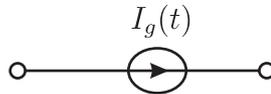


Figura A.5: Generador de Corriente

donde la flecha indica el sentido de la corriente.

Con lo que hemos dicho anteriormente para los generadores respectivos tenemos las siguientes afirmaciones:

Para el generador de voltaje:  $V_g(t)$  es una función conocida, que no depende del circuito al que se conecte ni cómo se conecte. La corriente que circula por dicho generador es una función del tiempo desconocida que depende de cómo se conecte el mismo a un circuito eléctrico y en principio es posible calcularla.

Simétricamente, para el generador de corriente: la diferencia de potencial es desconocida y depende de cómo se conecte al circuito y en principio es posible calcularla. En este generador, la  $I_g(t)$  es una función conocida, que no depende de cómo se conecte el generador al circuito.

## A.7. Análisis y comparación de elementos lineales y no lineales.

En la sección anterior describimos los elementos lineales que hasta cierto punto son una idealización de lo que ocurre en la realidad. Aquí vamos a describir los elementos no lineales comparándolos con los lineales.

Las variables más importantes para describir los circuitos eléctricos, son la corriente  $i$  que circula a través de un elemento eléctrico y el voltaje  $v$  que se puede medir en las terminales del mismo elemento. Cabe aclarar que existen elementos que tienen más de dos terminales como por ejemplo el transistor, que tiene tres terminales o entradas.

Para un elemento electrostático como lo es el capacitor, a la variable corriente la podemos reemplazar por la variable carga eléctrica  $q$  que ha sido acumulada por dicho elemento hasta cierto instante. Para un elemento electromagnético como lo es el inductor, a la variable voltaje  $v$  la podemos reemplazar por la variable flujo magnético  $\phi$ . Esta nueva variable mide la densidad de campo magnético que atraviesa una sección de área unitaria  $A$ , colocada en el centro del enrollado donde se concentra el campo magnético y perpendicular a dicho campo. Aquí aclaramos que en todo el centro de este elemento el campo magnético prácticamente es constante o de la misma intensidad, por tal motivo tiene sentido poner un área unitaria a la que atraviesa el campo dentro de la espira con el fin de medir el flujo magnético de esta forma, esto es

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A},$$

donde  $\vec{B}$  es el campo magnético dentro de la espira.

La relación entre las dos variables  $q$  e  $i$  en el capacitor es

$$i = dq/dt.$$

Análogamente la relación entre las 2 variables en el inductor es

$$v = d\phi/dt.$$

Aquí resumiremos en una tabla los elementos antes definidos, primero los lineales y luego los no lineales:

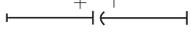
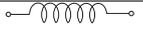
Símbolo	Nombre	Relación entre sus parámetros
	Resistor o Resistencia Eléctrica	$v = iR$ ( <i>Ley de Ohm</i> )
	Fuente de Corriente	$i = constante$
	Fuente de Voltaje	$v = constante$
	Capacitor	$q = Cv, i = Cdv/dt$
	Inductor	$\phi = Li, v = Ldi/dt$

Figura 6. Principales elementos eléctricos

Como dijimos antes,  $R$  es la resistencia,  $C$  la capacitancia y  $L$  la inductancia, parámetros que definen a sus respectivos elementos y que son proporcionados por el fabricante de los mismos.

Observemos que algunos elementos implican derivadas con respecto al tiempo para relacionar corrientes con voltaje. Más adelante veremos que esto genera ecuaciones diferenciales ordinarias para modelar los circuitos analizados.

Elementos no Lineales:

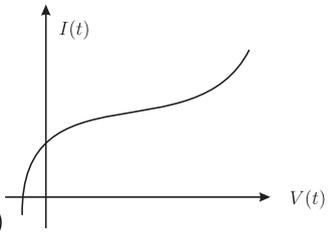
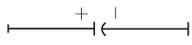
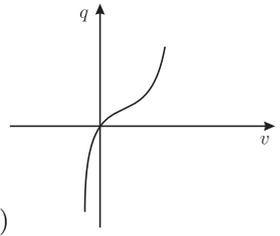
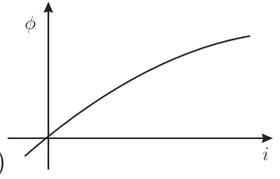
Símbolo	Nombre	Posibles Gráficas y Relación
	Resistor (incuyendo fuentes)	 $v = f(i) \text{ ó } i = f(v)$
	Capacitor	 $q = f(v) \text{ ó } v = g(q)$
	Inductor	 $\phi = f(i) \text{ ó } i = g(\phi)$

Figura 7. Relaciones funcionales posibles entre las variables eléctricas.

Observemos que los elementos lineales se pueden ver como un caso particular de los elementos no lineales.

En la teoría de Brayton-Moser, que posteriormente veremos se requiere que, las relaciones constitutivas para un capacitor y para un inductor no lineales sean funciones, respectivamente, de la siguiente forma

$$q = f_c(V_c), \phi = f_L(i_L)$$

Tomando en cuenta que la derivada respecto al tiempo de la carga es la corriente en el condensador, tenemos que

$$i_c = dq/dt = d/dt(f_c(v_c))/dt$$

o usando la regla de la cadena se escribe  $i_c = f'(v_c)dv_c/dt$ .

Por analogía con la ecuación (1), podemos escribir

$$i_c = C(v_c)dv/dt$$

donde

$$C(v_c) = f'_C(v_c)$$

De la misma manera, para el inductor la derivada del flujo magnético respecto al tiempo es el voltaje

$$v_L = d\phi /dt = d/dt(f_L(i_L)),$$

y usando la regla de la cadena  $v = f'_L(i_L)di_L/dt$ . Como una generalización de la ecuación (2), escribimos

$$v = L(i_L)di_L/dt,$$

donde

$$L(i_L) = f'_L(i_L).$$

Lo cual quiere decir que las funciones  $C(v_c)$  y  $L(i_L)$  pueden interpretarse respectivamente como las pendientes en cada punto de la gráfica de las funciones  $q = f_c(v_c)$  y  $\phi = f_L(i_L)$ .

El parámetro  $C(v_c)$  es conocido como capacitancia incremental ó simplemente como capacitancia no lineal; el parámetro  $L(i_L)$  es conocido como inductancia incremental ó inductancia no lineal.



## Apéndice B

# Conceptos Matemáticos Básicos.

### B.1. Funcional Lineal y Espacio Dual

En esta sección se darán algunas definiciones que se consideran básicas para el desarrollo de nuestro trabajo y que queremos incluir, para que este trabajo sea autocontenido.

Para ello comenzaremos con lo que se llama una Funcional Lineal y daremos algunos ejemplos.

Si consideramos un espacio vectorial  $V$  sobre un campo  $K$ , Un *Funcional Lineal*  $\phi$  es una aplicación lineal que va de  $V$  al campo  $K$  o sea que satisface la propiedad  $\phi(au + bv) = a\phi(u) + b\phi(v)$  donde  $a, b \in K$  y  $u, v \in V$ .

#### Ejemplo 1.

Sea  $\pi_i : R^n \rightarrow R$  la proyección  $i$ -ésima, o sea  $\pi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$ .

Veamos si cumple con  $\pi_i(au + bv) = a\pi_i(u) + b\pi_i(v)$ .

Tomando  $u = (x_1, \dots, x_n)$  y  $v = (y_1, \dots, y_n)$ , entonces tenemos:  $au = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n)$  y  $bv = (by_1, by_2, \dots, by_n)$ , y con esto se tiene que:

$$\begin{aligned} au + bv &= (ax_1, ax_2, \dots, ax_n) + (by_1, by_2, \dots, by_n) \\ &= (ax_1 + by_1, ax_2 + by_2, \dots, ax_n + by_n) \end{aligned}$$

aplicando  $\pi_i$  a este vector suma, se tiene:

$$\pi_i(au + bv) = ax_i + by_i \quad (\text{por definición de } \pi).$$

Por otro lado se tiene que:  $a(u) + b(v) = ax + by$  por lo tanto  $\pi_i(au + bv) = a\pi_i(u) + b\pi_i(v)$  con esto entonces mostramos que  $\pi_i$  es funcional lineal.

### Ejemplo 2.

Sea  $V$  el espacio vectorial de los polinomios en  $t$  sobre  $R$ . Sea  $g : V \rightarrow R$  el operador de integración

$$g(P(t)) = \int_0^1 P(t)dt.$$

Ahora veamos si se cumple que  $g(aP(t) + bL(t)) = ag(P(t)) + bg(L(t))$ , donde  $a, b \in R$  y  $P, L \in V$ .

Tenemos que:  $g(aP(t) + bL(t)) = \int_0^1 (aP(t) + bL(t))dt = \int_0^1 aP(t)dt + \int_0^1 bL(t)dt$ , por la propiedad de que la integral preserva sumas.

Luego se tiene que

$$g(aP(t) + bL(t)) = a \int_0^1 P(t)dt + b \int_0^1 L(t)dt.$$

Pues  $a$  y  $b$  son constantes y finalmente:

$$g(aP(t) + bL(t)) = ag(P(t)) + bg(L(t)).$$

Por lo tanto es una funcional lineal.

### Ejemplo 3.

Sea  $V$  el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden  $n$  sobre un campo  $K$ . Sea  $T : V \rightarrow K$  la aplicación traza dada por

$$T(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} \quad \text{donde } A = (a_{ij})$$

o sea que  $T$  asigna a una matriz  $A$  la suma de los elementos que están en su diagonal.

Veamos si es funcional lineal:

Tomemos  $A, B$  matrices de orden  $n \times n$  y  $\alpha, \beta \in K$ , entonces

$$\alpha A = (\alpha a_{ij}) \text{ y } \beta B = (\beta b_{ij})$$

y también se tiene por suma de matrices que:

$$\alpha A + \beta B = (\alpha a_{ij} + \beta b_{ij}).$$

Ahora aplicando  $T$  a esta suma se tiene:

$$\begin{aligned} T(\alpha a + \beta b) &= \alpha a_{11} + \alpha a_{22} + \dots + \alpha a_{nn} + \beta b_{11} + \beta b_{22} \dots + \beta b_{nn} \\ &= \alpha(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) + \beta(b_{11} + b_{22} + \dots + b_{nn}) \\ &= \alpha T(A) + \beta T(B). \end{aligned}$$

Por lo tanto la aplicación traza es funcional lineal.

Ahora enunciaremos un teorema sin demostración [9], con objeto de definir lo que se conoce como Espacio Dual.

**Teorema 1.** Sean  $U$  y  $V$  dos espacios vectoriales sobre un campo  $K$ . Entonces el conjunto de las aplicaciones de  $U$  en  $V$ , con las operaciones de adición y multiplicación por un escalar, forman un espacio vectorial sobre  $K$ .

Con el teorema anterior tenemos que el conjunto de las funcionales lineales de un espacio vectorial  $U$  sobre un campo  $K$ , es también un espacio vectorial sobre  $K$  con la adición y multiplicación por un escalar. En efecto, basta substituir en el teorema anterior a  $V$  por  $K$ . Esto significa que consideramos a  $V = K$  como un espacio de una dimensión.

Las operaciones en este espacio vectorial están definidas como:

$$(\phi + \sigma)(U) = \phi(U) + \sigma(U) \text{ y } (k\phi)(U) = k\phi(U)$$

donde  $\phi$  y  $\sigma$  son funcionales lineales sobre  $U$  y  $k \in K$ . Este espacio se llama *Espacio Dual* de  $U$  y se denota por  $U^*$ .

### B.1.1. Espacio Simpléctico y Forma Bilineal

En esta sección definiremos lo que se conoce como Forma Bilineal, así como Forma Bilineal Simétrica y Forma Bilineal Antisimétrica. En base al último concepto definiremos lo que se conoce como un Espacio Simpléctico.

Sea  $V$  un espacio Vectorial de dimensión finita sobre un campo  $K$ . Una Forma Bilineal sobre  $V$  es una aplicación  $f : V \times V \rightarrow K$  que satisface:

- i)  $f(au_1 + bu_2, v_1) = af(u_1, v_1) + bf(u_2, v_1)$
- ii)  $f(u_1, av_1 + bv_2) = af(u_1, v_1) + bf(u_1, v_2)$

para todo  $a, b \in K$  y todo  $u_i, v_i \in V$ . Cuando se cumple i) decimos que  $f$  es lineal en la primera variable y cuando se cumple ii), decimos que es lineal en la segunda variable.

#### Ejemplo 1.

Sean  $\phi$  y  $\sigma$  dos funcionales lineales arbitrarias sobre  $V$ . Sea  $f : V \times V \rightarrow K$  definida por

$$f(u, v) = \phi(u)\sigma(v)$$

Veamos si cumple las dos propiedades:

i) Sean  $u_1, u_2, v \in V$  y  $a, b \in K$ . Entonces  $f(au_1 + bu_2, v) = \phi(au_1 + bu_2)\sigma(v)$  y como  $\phi$  es lineal tenemos

$$\begin{aligned} f(au_1 + bu_2, v) &= (a\phi(u_1) + b\phi(u_2))\sigma(v) \\ &= a\phi(u_1)\sigma(v) + b\phi(u_2)\sigma(v) \\ &= af(u_1, v) + bf(u_2, v) \end{aligned}$$

con lo que se sigue i).

Luego sean  $u, v_1, v_2 \in V$  y  $a, b \in K$ .

$$f(u, av_1 + bv_2) = \phi(u)\sigma(av_1 + bv_2),$$

pero como  $\sigma$  es lineal

$$\begin{aligned} f(u, av_1 + bv_2) &= \phi(u)(a\sigma(v_1) + b\sigma(v_2)) \\ &= a\phi(u)\sigma(v_1) + b\phi(u)\sigma(v_2) \\ &= af(u, v_1) + bf(u, v_2), \end{aligned}$$

con lo que se tiene ii), y por lo tanto  $f$  es bilineal.

De hecho a la forma bilineal de este ejemplo se le conoce como “producto tensorial” de  $\phi$  y  $\sigma$ , y por esta razón se acostumbra representar como  $f = \phi \otimes \sigma$ .

Sea  $f$  el producto escalar sobre  $R$ ; esto es

$$\begin{aligned} f(u, v) = u \cdot v &= (u_1, u_2, \dots, u_n) \cdot (v_1, v_2, \dots, v_n) \\ &= u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n \end{aligned}$$

donde  $u = (u_i)$  y  $v = (v_i)$ .

Para probar la bilinealidad, tomemos primero una combinación lineal en la primera entrada:

$$\begin{aligned} f(au + bv, w) &= (au + bv) \cdot w = \\ &= (a(u_1, \dots, u_n) + b(v_1, \dots, v_n)) \cdot (w_1, \dots, w_n) \\ &= ((au_1, \dots, au_n) + (bv_1, \dots, bv_n)) \cdot (w_1, \dots, w_n) \\ &= (au_1 + bv_1, \dots, au_n + bv_n) \cdot (w_1, \dots, w_n) \\ &= (au_1 + bv_1)w_1 + (au_2 + bv_2)w_2 + \dots + (au_n + bv_n)w_n \\ &= au_1w_1 + bv_1w_1 + au_2w_2 + bv_2w_2 + \dots + au_nw_n + bv_nw_n \\ &= a(u_1w_1 + u_2w_2 + \dots + u_nw_n) + \\ &\quad + b(v_1w_1 + v_2w_2 + \dots + v_nw_n) \\ &= af(u, w) + bf(v, w), \end{aligned}$$

con lo que se sigue i).

Ahora tomemos la combinación lineal en la 2<sup>da</sup> entrada:

$$\begin{aligned}
 f(u, bv + cw) &= (u_1, \dots, u_n) \cdot (b(v_1, \dots, v_n) + c(w_1, \dots, w_n)) \\
 &= (u_1, \dots, u_n) \cdot ((bv_1, \dots, bv_n) + (cw_1, \dots, cw_n)) \\
 &= (u_1, \dots, u_n) \cdot (bv_1 + cw_1, \dots, bv_n + cw_n) \\
 &= u_1(bv_1 + cw_1) + \dots + u_n(bv_n + cw_n) \\
 &= bv_1u_1 + cw_1u_1 + \dots + bv_nu_n + cw_nu_n \\
 &= b(v_1u_1 + \dots + v_nu_n) + c(w_1u_1 + \dots + w_nu_n) \\
 &= af(u, v) + bf(u, w)
 \end{aligned}$$

Entonces es lineal en la 2<sup>da</sup> entrada. Por lo tanto es bilineal.

Sea  $A = (a_{ij})$  cualquier matriz  $n \times n$  sobre  $R$ . Veamos si es bilineal sobre  $R^n$  la aplicación con valores reales definida matricialmente a partir de  $A$  como

$$f(X, Y) = X^t AY = (x_1 x_2 \dots x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

La cual tiene también una representación polinomial como

$$f(X, Y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j = a_{11} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + \dots + a_{nn} x_n y_n. \quad (2)$$

La linealidad de  $f$  se sigue inmediatamente de la distributividad del producto de matrices con respecto a la suma en uno de los factores. Los factores en cuestión se toman como el vector fila y el vector columna, respectivamente.

Este tercer ejemplo es importante, porque muestra, en cierto sentido, que toda forma bilineal es de este tipo en términos de coordenadas respecto a una base.

De hecho a la sumatoria (2) en este ejemplo en las variables  $x_i, y_i$  se le llama un Polinomio Bilineal.

**Definición 1.** El rango de una forma bilineal  $f$  sobre  $V$ , escrito  $\text{rang}(f)$ , se define como el rango de cualquier representación matricial de  $f$ . Se dice que  $f$  es degenerada o no degenerada según si  $\text{rang}(f)$  es menor que  $\dim V$  ó si  $\text{rang}(f) = \dim V$ . Esta última condición de no degeneración es equivalente a que la matriz de cualquier representación matricial de  $f$  tenga determinante distinto de cero.

Así que podemos escribir:  $f(X, Y) = X^t AY = (X^t AY)^t = Y^t A^t X$  dado que  $X^t AY$  es un escalar y por lo tanto su transpuesta es la misma.

Resumiendo, tenemos que si  $f$  es simétrica, se tiene:

$$Y^t A^t X = Y^t A X$$

de donde tenemos que  $A^t = A$ . O sea que la matriz  $A$ , es simétrica.

Un teorema general de álgebra lineal nos dice que si  $A$  es una matriz simétrica sobre un campo  $K$ , entonces existe una matriz invertible  $P$  tal que  $P^t A P$  es una matriz diagonal.

Ilustraremos este resultado con el siguiente ejemplo:

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ -3 & -4 & 8 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora verifiquemos que  $P^t A P$  es una matriz diagonal:

En efecto, esta última matriz es diagonal.

**Definición 2.** Si una forma bilineal cumple con la condición de que  $f(u, v) = -f(v, u)$  se le conoce como forma bilineal antisimétrica.

**Definición 3.** Si  $f$  es bilineal simétrica, entonces  $f(v, v)$  se conoce como una forma cuadrática.

En base a las definiciones anteriores podemos definir lo que se conoce como un Espacio Simpléctico: Un *Espacio Simpléctico* es un espacio vectorial con una forma bilineal antisimétrica no degenerada (o sea con determinante distinto de cero).

## B.2. Homología y Cohomología

Tomemos  $R = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Cualquier línea contenida en  $R$  es llamada “1-cadena” ó cadena 1-dimensional; Una 1-cadena puede ser sólo un segmento de recta o un lazo cerrado. La frontera de un segmento de recta son sus puntos extremos. Una 1-cadena que no tiene puntos extremos no tiene frontera, y es llamada “1-ciclo”.

Una cadena la cual es frontera de alguna “área” totalmente contenida en  $R$  es llamada “1-frontera”.

Dos ciclos se dicen “homólogos” (equivalentes), si su diferencia es una frontera.

Consideremos ahora la colección de 1-ciclos:

$$H_1 = \{\dots, -2c_2, -c_2, 0, c_2, -2c_2, \dots\},$$

donde  $nc_2$  circula alrededor del hoyo  $n$ -veces a lo largo de  $c_2$  contra reloj.

$H_1$  es llamado el “primer grupo de homología de  $R$ ”, y este es claramente igual al grupo aditivo de los enteros  $Z$ , entonces escribiremos  $H_1(R) = Z$ .

Para una lámina u hoja de papel con  $k$ -hoyos en ella  $P^k$ , se tiene:  $H_1(P^k) = Z \oplus Z \oplus \dots \oplus Z$  ( $k$ -veces).

La suma directa del lado derecho, representa a todos los vectores  $k$ -dimensionales con entradas enteras; la  $p$ -ésima coordenada de uno de estos vectores, describe el número de veces que el  $p$ -ésimo hoyo es circulado o rodeado. Definiremos los grupos de homología de una forma más precisa.

**Definición 1:** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre el campo  $\mathbb{R}$ , y sea  $C$  un subconjunto de  $V$ , diremos que  $C$  es convexo si:

$$c_1, c_2 \in C \implies tc_1 + (1-t)c_2 \in C \quad \forall t \in I(I = [0, 1])$$

**Definición 2:** Un conjunto  $\{v_0, \dots, v_1\}$  de puntos ó vectores en un espacio vectorial  $V$  es convexo-independiente ( $c$ -independiente), si el conjunto  $\{v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0\}$  es linealmente independiente; además note que esta definición no depende de qué vector sea llamado  $v_0$ .

**Definición 3:** Un conjunto de puntos  $[v_0, v_1, \dots, v_k]$  en  $R^n$ , es llamado  $k$ -simplejo simplicial y se denota por  $\sigma^k$ ; si  $[v_0, \dots, v_k]$  es  $c$ -independiente,  $k$  es la dimensión del simplejo. Si  $V \in [v_0, \dots, v_k]$  entonces los coeficientes  $a_i$  con  $a_i \geq 0$  y  $\sum_{i=0}^k a_i = 1$  tales que  $V = \sum_{i=0}^k a_i v_i$ , son llamadas las coordenadas baricéntricas de  $V$ .

Las caras de un simplejo  $n$ -dimensional  $[v_0, \dots, v_n]$  son los simplejos posibles generados por  $n - 1$  vértices  $[v_0, \dots, v_{n-1}]$ ,  $[v_0, \dots, v_{n-2}, v_n]$ ,  $\dots$ ,  $[v_1, v_2, \dots, v_n]$ .

Así la  $i$ -ésima cara se obtiene al separar el  $i$ -ésimo vértice  $v_i$  del conjunto  $[v_0, \dots, v_n]$ , y ella es opuesta a este vértice.

**Definición 4:** La  $i$ -ésima cara del simplejo simplicial  $\sigma^n$  es:

$$\sigma_{(i)}^{n-1} = [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$$

Las caras de menor dimensión se obtienen, de un simplejo  $[v_0, \dots, v_n]$  al separar un número cualesquiera de vértices.

**Definición 5:** Sea  $\sigma$  un simplejo, con vértices  $v_0, \dots, v_k$ . Dos orientaciones  $[v_{i_1}, \dots, v_{i_k}]$  y  $[v_{j_1}, \dots, v_{j_k}]$  de los vértices de  $\sigma$  son equivalentes si  $(j_1, \dots, j_k)$  es una permutación par de  $(i_1, \dots, i_k)$ . Esto es claramente una relación de equivalencia y para  $k > 1$ , se separan las orientaciones de  $v_0, \dots, v_k$  en dos clases de equivalencia. Un simplejo orientado, es un simplejo  $\sigma$  junto con la elección de una de estas clases de equivalencia.

**Definición 6:** La frontera orientada del simplejo  $[v_0, \dots, v_n]$ , es una combinación lineal de sus caras del siguiente tipo:

$$\partial\sigma^n = \partial[v_0, \dots, v_n] = \sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] = \sum (-1)^i \sigma_{(i)}^{n-1}$$

**Ejemplo:** Para los simplejos de dimensión 0,1 y 2 se tiene:

$$\partial[v_0] = 0$$

$$\partial[v_0, v_1] = [v_1] - [v_0]$$

$$\partial[v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$$

**Teorema 1:** Para un simplejo n-dimensional tiene lugar la fórmula:

$$\partial\partial[v_0, \dots, v_n] = 0$$

**Demostración:**

Para la demostración se aplica el cálculo directo y la definición de  $\partial$ . Por ejemplo para  $n = 2$ , se tiene:

$$\partial[v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$$

entonces

$$\partial\partial[v_0, v_1, v_2] = \{[v_2] - [v_1]\} - \{[v_2] - [v_0]\} + \{[v_1] - [v_0]\} = 0$$

El cálculo es análogo para cualquier n:

$$\partial\partial\sigma^n = \partial\left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_{(i)}^{n-1}\right)$$

en esta suma la cara  $\sigma_{(i,j)}^{n-2}$  (los vértices  $v_i, v_j$  se omiten) se incluye dos veces en las fronteras  $\partial\sigma_{(i)}^{n-1}$  y  $\partial\sigma_{(j)}^{n-1}$  con signos opuestos.

**Definición 7:** Un complejo simplicial  $K$  es un conjunto de simplejos, de dimensión arbitraria, que tienen las siguientes propiedades:

- (i) Si un simplejo está en  $K$ , sus caras de cualquier dimensión están en  $K$ .

(ii) Si  $\sigma^k$  y  $\sigma^t$  son elementos distintos de  $K$ , entonces  $\sigma^k \cap \sigma^t = \emptyset$ .

Si  $p$  es la dimensión máxima de los simplejos que constituyen a  $K$ , entonces se dice que  $K$  tiene dimensión  $p$ .

Un complejo simplicial finito se compone de un número finito de simplejos:

$$K = \{\sigma_i^0, \sigma_j^1, \sigma_k^2, \dots, \sigma_1^p\}$$

**Definición 8:** Una variedad triangulable es una terna  $(M, K, h)$ , donde  $M$  es una variedad,  $K$  es un complejo simplicial, y  $h : [K] \rightarrow M$  es un homeomorfismo.

**Definición 9:** La frontera de la cadena  $k$ -dimensional o  $k$ -cadena  $C_k = \sum_i g_i \sigma_i^p$  con  $g_i \in \mathbb{Z}$  denotada por  $(\partial C_k)$ , es la  $(k-1)$ -cadena definida por la fórmula:

$$\partial C_k = \sum g_i \partial \sigma_i^p \quad \text{donde} \quad 0 \leq p \leq k.$$

**Corolario 1:** El operador iterado

$$C_{k-1}(K; Z) \leftarrow C_k(K, Z) \leftarrow C_{k+1}(K, Z)$$

satisface  $\partial^2 = \partial \circ \partial = 0$ .

**Demostración:**

La prueba es directa aplicando el Teorema 1.

**Definición 10:** Un  $k$ -ciclo, es una  $k$ -cadena  $C_k$ , tal que  $\partial C_k = 0$ , claramente estos forman un subgrupo conmutativo de  $C_k(K, Z)$  para un complejo  $K$  y grupo conmutativo  $Z$ , el cual denotaremos por  $Z_k(K, Z)$ .

**Definición 11:** Las fronteras son cadenas  $Z_k \in C_k(K, Z)$  tales que existe una  $(k+1)$ -cadena  $C_{k+1}$ , tal que  $Z_k = \partial C_{k+1}$ ; estos ciclos forman el grupo  $B_k(K, Z)$ , el cual llamaremos grupo de fronteras  $k$ -dimensionales.

**Definición 12 (GRUPO DE HOMOLOGÍA DE UN COMPLEJO SIMPLICIAL  $K$ ):** Al grupo de homología de dimensión  $H_k(K, Z)$  de un complejo simplicial  $K$ , lo definimos como el grupo cociente del grupo  $Z_k$  de todos los ciclos de dimensión  $k$ , por ciclos  $B_k$ .

$$H_k(K, Z) = \frac{Z_k(K, Z)}{B_k(K, Z)}$$

Dos ciclos son homólogos o equivalentes si y sólo si difieren por una frontera,  $z_k - z'_k = \partial c_{k+1}$

Al grupo definido anteriormente, también se le conoce como el grupo de homología de  $K$  con coeficientes en  $Z$ .

**Definición 13:** Definamos el grupo Abeliano  $C^k(K, Z)$ , de  $k$ -cocadenas  $f^k$  de  $K$  con coeficientes en el grupo abeliano  $Z$  por:

$$\begin{aligned} C^k(K, Z) &= \{f^k \setminus f^k : C_k(K, Z) \rightarrow Z \text{ es un homomorfismo}\} \\ &= \text{Hom}(C_k(K, Z), Z) \end{aligned}$$

Esto es, una  $k$ -cocadena  $f^k$  es un homomorfismo que asigna a cada  $C_k$  un elemento  $f^k(C_k)$  en el grupo  $Z$ .

Como  $f_1^k + f_2^k$ , es un mapeo el cual envía  $C_k$  sobre  $f_1^k(C_k) + f_2^k(C_k)$ , entonces  $C^k(K, Z)$  es un grupo Abeliano.

**Observación 1-** Si llamamos  $f_i^k$  al operador dado por  $f_i^k(\sigma_j^p) = \delta_{i,j}$ , donde  $\partial_j^p$  es el  $j$ -ésimo simplejo de  $K$  de dimensión  $p$  con  $1 \leq p \leq k$ , observemos que los elementos de  $C^k$  están dados por:

$$f^k = \sum g_i f_i^p$$

En analogía con el operador frontera  $\partial$ , sobre cadenas daremos la siguiente definición.

**Definición 14:** Definiremos un operador cofrontera  $\delta$ , que envía  $k$ -cocadenas en  $(k+1)$ -cocadenas. Para  $f^k$  en  $C^k$  asignaremos  $\delta f^k$  en  $C^{k+1}$ , y una especificación de la acción de  $\delta f^k$  sobre  $(k+1)$ -cadenas es como sigue:

$$\delta f^k(C_{k+1}) = f^k(\partial C_{k+1})$$

**Observación:** De aquí en adelante denotaremos al grupo abeliano por  $G$ .

**Teorema 2:** El operador iterado:

$$C^{k-1}(K, G) \rightarrow C^k(K, G) \rightarrow C^{k+1}(K, G)$$

satisface que  $\delta \circ \delta = \delta^2 = 0$ .

**Demostración:**

La prueba es directa como consecuencia del teorema 1.

**Definición 15:** Definamos los cociclos ( $Z^k$ ) y las cofronteras de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Z^k &= \ker(\delta : C^k \rightarrow C^{k+1}) \quad (\text{grupo de cociclos } Z^k(K, G)) \\ B^k &= \text{im}(\delta : C^{k-1} \rightarrow C^k) \quad (\text{grupo de cofronteras } B^k(K, G)) \end{aligned}$$

donde  $\delta : C^k \rightarrow C^{k+1}$  y  $\delta : C^{k-1} \rightarrow C^k$  respectivamente.

**Definición 16:** El  $p$ -ésimo grupo de cohomología del complejo símplicial  $K$  ( $0 \leq p \leq \dim K$ ), con coeficientes en el grupo Abeliano  $G$ , es el grupo cociente:

$$H^p(K, G) = \frac{Z^p(K, G)}{B^p(K, G)}$$

La Cohomología se definirá como el grupo cociente de las formas diferenciales cerradas por las formas diferenciales exactas, en una variedad triangulable  $M$ .

Un producto interno en un espacio vectorial  $V$  sobre un campo  $F$ , es una función bilineal de  $V \times V \rightarrow F$ , denotada por  $(V, W) \mapsto \langle V, W \rangle$ , que es simétrica

$$\langle V, W \rangle = \langle W, V \rangle$$

y no degenerada: si  $V \neq 0$ ,  $\Rightarrow$  existe  $W \neq 0$  tal que  $\langle W, V \rangle \neq 0$ .

Aquí el campo  $F$  casi siempre es  $\mathbb{R}$ .

Para cada  $r$  con  $0 \leq r \leq n$  podemos definir un producto interno  $\langle, \rangle_r$  en  $\mathbb{R}^n$  por

$$\langle a, b \rangle_r = \sum_{i=1}^r a^i b^i - \sum_{i=r+1}^n a^i b^i$$

que es no degenerada, pues si tomamos  $a \neq 0$ ,  $\Rightarrow$

$$\langle (a^1, \dots, a^n), (a^1, \dots, a^r, -a^{r+1}, \dots, -a^n) \rangle = \sum_{i=1}^n (a^i)^2 > 0$$

En particular, para  $r = n$  "obtenemos el producto interno usual",  $\langle, \rangle$  en  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^n a^i b^i$$

para este producto interno tenemos que  $\langle a, a \rangle > 0$  si  $a \neq 0$ .

En general una función bilineal simétrica  $\langle, \rangle$  es llamada definida positiva si  $\langle V, V \rangle > 0$  para toda  $V \neq 0$ .

Una función bilineal definida positiva  $\langle, \rangle$  es claramente no degenerada, y consecuentemente un producto interno. Note que un producto interno  $\langle, \rangle$  en  $V$  es un elemento del conjunto de las funciones bilineales simétricas en  $V$ , así, si  $f : W \rightarrow V$  es una transformación lineal  $\Rightarrow f * \langle, \rangle$  es una función bilineal simétrica en  $W$ . Esta función bilineal simétrica puede ser degenerada si  $f$  es 1-1, por ejemplo, si  $\langle, \rangle$  está definida en  $\mathbb{R}^2$  por

$$\langle a, b \rangle = a^1 b^1 - a^2 b^2,$$

y  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  es  $f(a) = (a, a)$ . Sin embargo,  $f * \langle, \rangle$  es claramente no degenerada si  $f$  es un isomorfismo sobre  $V$ .

Por otro lado, si  $\langle, \rangle$  es definida positiva, entonces  $f^* \langle, \rangle$  es definida positiva si y solo si  $f$  es 1-1.

Para una base  $v_1, v_2, \dots, v_n$  de  $V$ , con su base dual correspondiente  $v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*$ , podemos escribir

$$\langle, \rangle = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} v_i^* \otimes v_j^*$$

En esta expresión  $g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$  junto con la simetría de  $\langle, \rangle$  implica que la matriz  $(g_{ij})$  es “simétrica”:

$$g_{ij} = g_{ji}$$

La matriz  $(g_{ij})$  tiene otra importante interpretación

Dado un producto interno  $\langle, \rangle$  que es lineal en la segunda entrada, podemos definir una función lineal  $\varphi_v \in V^*$  para cada  $v \in V$  por

$$\varphi_v(w) = \langle v, w \rangle$$

Dado que  $\langle, \rangle$  es lineal en la primera entrada, el mapeo  $V \rightarrow \varphi_V$  es una transformación lineal de  $V$  a  $V^*$ . La no degeneración de  $\langle, \rangle$  implica que  $\varphi_v \neq 0$  si  $v \neq 0$ . Así, si  $V$  es de dimensión finita, un producto interno  $\langle, \rangle$  dado induce un isomorfismo  $\alpha : V \rightarrow V^*$ , con  $\langle v, w \rangle = \alpha(v)(w)$ .

Claramente la matriz  $(g_{ij})$  es justamente la matriz de  $\alpha : V \rightarrow V^*$  con respecto a las bases  $\{v_i\}$  de  $V$  y  $\{v_i^*\}$  de  $V^*$ .

Así, la no degeneración de  $\langle, \rangle$  es equivalente a la condición que  $(g_{ij})$  es no singular, o sea  $\det(g_{ij}) \neq 0$ .

El que  $\langle, \rangle$  sea definida positiva corresponde a la condición mas complicada de que la matriz  $(g_{ij})$  sea “positiva definida”, cumpliendo que  $\sum_{i,j=1}^n g_{ij} a^i a^j > 0$  para toda  $a^1, \dots, a^n$  con al menos un  $a^i \neq 0$ .

Dado un producto interno  $\langle, \rangle$  definido positivo en  $V$ , definimos la norma asociada  $\| \cdot \|$  por

$$\| v \| = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \quad (\text{se toma la raíz cuadrada de un positivo})$$

En  $\mathbb{R}^n$  denotamos la norma correspondiente como  $\langle, \rangle$  simple por

$$| a | = \langle a, a \rangle^{\frac{1}{2}}$$

con la propiedad principal siguiente.

**Teorema.** Para toda  $v, w \in V$  tenemos

- 1)  $\|av\| = |a| \cdot \|v\|$
- 2)  $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$  la igualdad se da si y solo si  $v$  y  $w$  son linealmente independientes
- 3)  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

**Prueba:**

1) Es trivial.

2) Si  $v$  y  $w$  son linealmente independientes, se cumple la igualdad. Si no, entonces  $\lambda v - w \neq 0$  para toda  $\lambda \in \mathbb{R}$ , así

$$\begin{aligned} 0 < \|\lambda v - w\|^2 &= \langle \lambda v - w, \lambda v - w \rangle \\ &= \lambda^2 \|v\|^2 - 2\lambda \langle v, w \rangle + \|w\|^2 \end{aligned}$$

es una ecuación cuadrática en  $\lambda$  que no tiene solución real y por lo tanto su discriminante es negativo. Así,  $4\langle v, w \rangle^2 - 4\|v\|^2\|w\|^2 < 0$ .

3)

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w \rangle \\ &= \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v, w \rangle \\ &\leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\| \cdot \|w\| \quad \text{por 2)} \\ &= (\|v\| + \|w\|)^2 \end{aligned} \quad \square$$

La función  $\|\cdot\|$  ciertamente tiene grandes propiedades, por ejemplo, la función  $\|\cdot\|$  en  $\mathbb{R}^n$  no es diferenciable en  $0 \in \mathbb{R}^n$ .

$\|\cdot\|^2$  es una "función cuadrática." en  $V$  en términos de una base  $\{v_i\}$  para  $V$  podemos escribirla como un polinomio de grado 2 homogéneo en las componentes

$$\left\| \sum_{i=1}^n a^i v^i \right\|^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} a^i a^j$$

más concisamente

$$\|\cdot\|^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} v_i^* \cdot v_j^*$$

**Teorema.** Si  $\|\cdot\|$  es la norma asociada al producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  en  $V$ , entonces

$$1) \langle v, w \rangle = \frac{1}{2} (\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$$

$$2) \langle v, w \rangle = \frac{1}{4}(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2)$$

**Prueba:**

Cálculo directo

□

Este teorema muestra que dos productos internos con la misma norma, son ellos mismos iguales. De forma similar, si  $f : V \rightarrow V$  preserva normas ( $\|f(v)\| = \|v\|$  para toda  $v \in V$ ),  $\Rightarrow f$  así mismo preserva productos interno ( $\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle \quad \forall v, w \in V$ ).

Podemos notar que un isomorfismo preserva productos internos definidos positivos.

**Teorema.** Si  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es un producto interno definido positivo en un espacio vectorial  $V$  de dimensión  $n$ , entonces existe una base para  $V$ ,  $\{v_1, \dots, v_n\}$  tal que  $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$  (esta base es llamada ortonormal respecto a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ). En consecuencia, el isomorfismo  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow V$  tal que

$$\langle a, b \rangle = \langle f(a), f(b) \rangle \quad a, b \in \mathbb{R}^n$$

en otras palabras

$$f^* \langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle$$

**Demostración:**

Sea  $\{w_1, \dots, w_n\}$  una base para  $V$ , obtenemos una base deseable por el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt: Dado  $w_1 \neq 0$  podemos definir

$$v_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|},$$

y claramente  $\|v_1\| = 1$ . Suponga que construimos  $\{v_1, \dots, v_k\}$  tal que

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq k \quad \text{y}$$

$$\text{span}\{v_1, \dots, v_k\} = \text{span}\{w_1, \dots, w_k\}$$

Entonces,  $w_{k+1}$  es linealmente independiente de  $\{v_1, \dots, v_k\}$ .

Sea  $w'_{k+1} = w_{k+1} - \langle v_1, v_{k+1} \rangle v_1 - \dots - \langle v_k, v_{k+1} \rangle v_k \neq 0$ , vemos que  $\langle w'_{k+1}, v_i \rangle = 0$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Podemos definir  $v_{k+1} = \frac{w'_{k+1}}{\|w'_{k+1}\|}$  y se continua por inducción. □

Definimos Frontera de un q-simplejo singular  $\sigma$ , como una  $(q - 1)$ -cadena singular

$$\partial(\sigma) = \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma^{(i)}$$

En el caso especial  $\sigma = (p_0 \dots p_q)$ ;

$$\partial(p_0 \dots p_q) = \sum (-1)^i (p_0 \dots \hat{p}_i \dots p_q)$$

Extendemos  $\sigma$  a un homomorfismo entre modulos  $S_q(x) \rightarrow S_{q-1}(x)$  por linealidad, así

$$\partial \sum \nu_\sigma \sigma = \sum \nu_\sigma (\partial \sigma)$$

Para  $q = 0$ , la frontera de 0-cadenas es por definición 0.

**Proposición 9.2**  $\partial \partial = 0$

**Prueba:**

Es suficiente con verificar que  $\partial(\partial c) = 0$  donde c es un q-simplejo singular  $\sigma$ .

Derivamos el siguiente resultado por medio de un cálculo basado en el lema siguiente.

Definamos  $F_q^i$  para  $q > 0$  como las aplicaciones afines  $F_q^i : \Delta_{q-1} \rightarrow \Delta_q$  para  $0 \leq i \leq q$  tales que mandan al complejo simplicial de dimensión  $q - 1$  en la cara del complejo simplicial de dimensión q, que se obtiene omitiendo en el vértice i.

**Lema**  $F_q^i F_{q-1}^j = F_q^j F_{q-1}^{i-1}$  para  $j < i$ .

Entonces

$$\begin{aligned} \partial(\partial \sigma) &= \sum_{i=0}^q (-1)^i \partial(\sigma^{(i)}) \\ &= \sum_{i=0}^q (-1)^i \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^j (\sigma \circ F_q^i) \circ F_{q-1}^j \\ &= \sum_{j < i=1}^q (-1)^{i+j} \sigma \circ (F_q^j F_{q-1}^{i-1}) + \sum_{0=i \leq j}^{q-1} (-1)^{i+j} \sigma \circ (F_q^i F_{q-1}^j) \end{aligned}$$

y todo se cancela (colocamos  $i^1 = j, j^1 = i - 1$  en la primera suma).  $\square$

Aquí R es un anillo para las siguientes definiciones.

Una q-cadena singular C tal que  $\partial(C) = 0$  es llamada un ciclo; si  $C = \partial(C')$  para alguna  $(q + 1)$ -cadena C', C es llamada una frontera. Dos q-cadenas cuya diferencia es una frontera son llamadas homólogas y se escriben  $C_1 \sim C_2$ . Por el hecho de que  $\partial \partial = 0$  las fronteras forman un submódulo  $B_q$  del modulo  $Z_q$

de ciclos; el modulo cociente  $Z_q/B_q$  es llamado el q-ésimo módulo de homología singular de X, denotado por  $H_q(X, R)$  o simplemente  $H_q(X)$  sin la referencia a R.

**Proposición** - Sea  $(X_k)$  una familia de componentes conexas por trayectorias de X. Entonces tenemos un isomorfismo canónico

$$H_q(X) \cong \oplus_k H_q(X_k) \quad \text{para toda } q > 0$$

$\oplus M_k$  es la suma directa de una familia de R-módulos y se define como el submódulo del producto cartesiano de  $M_k^s$  que consiste de las familias  $(m_k)$  tal que a lo mas un conjunto finito de los  $m_k$  son diferentes de 0.

**Prueba:**

Tenemos de hecho un isomorfismo

$$S_q(X) \cong \oplus_k S_q(X_k) \quad \text{para toda } q \geq 0$$

tal que el operador frontera se aplica componente por componente. Ahora bien, como todo simplejo simplicial  $\Delta_q$  es conexo por trayectorias, un q-simplejo singular  $\sigma$  manda a  $\Delta_q$  dentro de una componente por trayectorias  $X_k$ . Así, cada q-cadena c se descompone en una única suma

$$c = \sum_k c_k$$

donde  $c_k$  es una q-cadena singular en  $X_k$ .

Sea A un subespacio de X entonces  $\forall q \geq 0$ ,  $S_q(A)$  es un submódulo de  $S_q(X)$  que consiste de combinaciones lineales de q-simplejos singulares  $\Delta_q \rightarrow X$  cuya imagen está contenida en A. Podemos formar el modulo cociente y dado un operador frontera que manda a  $S_q(A)$  dentro de  $S_{q-1}(A)$ ; esto induce un homomorfismo  $\bar{\partial}$  que hace que el siguiente diagrama sea conmutativo

$$\begin{array}{ccc} S_q(X) & \longrightarrow & S_q(X)/S_q(A) \\ \partial \downarrow & & \downarrow \bar{\partial} \\ S_{q-1}(X) & \longrightarrow & S_{q-1}(X)/S_{q-1}(A) \end{array}$$

[Esto es, si  $C \in S_q(X)$  definimos  $\bar{\partial}$  (clase de C modulo  $S_q(A)$ ) = clase de  $\partial C \text{ mod } S_{q-1}(A)$ ]. Claramente  $\bar{\partial}\bar{\partial} = 0$ . Podemos considerar como antes los módulos:

- a)  $\ker[S_q(X)/S_q(A) \xrightarrow{\bar{\partial}} S_{q-1}(X)/S_{q-1}(A)]$
- b)  $\text{Imagen}[S_{q+1}(X)/S_{q+1}(A) \xrightarrow{\bar{\partial}} S_q(X)/S_q(A)]$

Dado que  $b$  es un submódulo de  $a$ ) podemos tomar el modulo cociente que es denotado por  $H_q(X, A)$  (ó  $H_q(X, A, R)$  si queremos especificar cuál es el anillo de coeficientes) y lo llamamos el q-ésimo modulo relativo de homología de  $X \text{ mod } A$ . Podemos obtener este módulo directamente  $S_q(X)$  si queremos, comenzando con  $C \in S_q(X)$ . Suponga que al recorrer el diagrama hasta  $S_{q-1}(X)/S_{q-1}(A)$ ,  $C$  va a cero; esto dice que  $\partial C \in S_{q-1}(A)$ . El conjunto de tales  $C$ 's forma un submódulo  $Z_q(X, A)$  de  $S_q(X)$  cuyos elementos se llaman q-ciclos relativos en  $X \text{ mod } A$ .

**Ejemplo:** Si  $\sigma$  es una trayectoria (curva) en  $X$ , es un 1-ciclo relativo mod  $A$  si sus punto extremos están en el subespacio  $A$ . Mas generalmente, un q-simplejo es un q-ciclo relativo si sus caras están en  $A$ .

El modulo  $Z_q(X, A)$  es justamente preimagen para el homomorfismo cociente del modulo al anterior. ¿Qué sería la preimagen para  $b$ )?. Claramente eso es el submódulo  $B_q(X, A)$ , de  $S_q(X)$  que consiste de cadenas homólogas a cadenas en  $S_q(A)$ ; estas son llamadas q-fronteras relativas en  $X$  modulo  $A$  (escribimos  $C \sim C' \text{ mod } A$  si  $C - C'$  es una q-frontera relativa).

**Lema.**  $H_q(X, A) \cong Z_q(X, A)/B_q(X, A)$

Este lema es una consecuencia del teorema de isomorfismo  $(M/P)/(N/P) \cong M/N$  en álgebra de módulos. □

Por ejemplo, si  $X$  es el cilindro  $I \times S^1$ ,  $A$  el subespacio  $1 \times S^1$ , entonces el círculo horizontal  $s \rightarrow (t, e^{2\pi s})$  es una 1-frontera relativa, puesto que es homólogo al circuito  $s \rightarrow (1, e^{2\pi s})$  en  $A$ .

**Nota:** Si  $A$  es vacío,  $S_q(A) = 0$  para toda  $q$  por definición; aquí tenemos que  $H_q(X, \phi) = H_q(X)$ . Así, la discusión de módulos de homología relativa incluye módulos absolutos como un caso especial.

La propiedad mas importante de los módulos de homología relativa  $H_q(X, A)$  es la existencia de homomorfismos

$$H_q(X, A) \rightarrow H_{q-1}(A) \tag{B.1}$$

por medio de la cual obtenemos una secuencia infinita de homomorfismos

$$\dots \rightarrow H_q(A) \rightarrow H_q(X) \rightarrow H_q(X, A) \rightarrow H_{q-1}(A) \rightarrow \dots$$

llamada secuencia de homología del par  $(X, A)$ .

Definimos este homomorfismo como sigue: Dado un q-ciclo relativo  $Z$  que representa a la clase de homología  $\bar{Z}$ . Por definición,  $\partial Z$  es una  $(q - 1)$ -cadena

en  $A$ , pero  $\partial\partial = 0$ ,  $\partial Z$  es de hecho un  $(q-1)$ -ciclo en  $A$  y podemos considerar su clase de homología  $\overline{\partial Z} \in H_{q-1}(A)$ . Estas clases dependen solo de  $\bar{Z}$ : si  $Z \sim Z'$  modulo  $A$ , entonces  $Z = Z' + w + \partial Z''$ , donde  $w$  es una  $q$ -cadena en  $A$ ,  $Z''$  una  $(q+1)$ -cadena en  $X$ ; entonces  $\partial Z = \partial Z' + \partial w$ , esto es,  $\partial Z$  y  $\partial Z'$  son homólogos en  $A$ . Definimos el homomorfismo (1) denotado así  $\partial$  por  $\partial\bar{Z} = \overline{\partial Z}$ .

**Teorema.** La secuencia de homología de  $(X, A)$  es exacta. Esto significa que

- (a) La composición de cada dos homomorfismos en la secuencia es cero, y
- (b) la imagen de un homomorfismo es igual al núcleo de el próximo.

**Prueba:**

Verificamos que cumple con propiedad de ser exacta en la etapa  $H_q(X, A)$  y dejamos como ejercicio verificar la misma propiedad en las etapas para  $H_q(A)$ ,  $H_q(X)$ .

Sea  $Z$  un  $q$ -ciclo en  $X$ , esto es  $\partial Z = 0$ . Entonces  $\partial H_q(j)(\bar{Z}) = \overline{\partial Z} = 0$ , así que la composición  $\partial \circ H_q(j)$  es cero. Sea  $Z$  un  $q$ -ciclo relativo tal que la imagen  $\overline{\partial Z}$  de  $\bar{Z}$  bajo el homomorfismo (1) es cero. Esto significa que  $\partial Z = \partial W$ , donde  $W$  es una  $q$ -cadena en  $A$ . Por lo tanto  $Z - W$  es un ciclo en  $X$ . Además, la clase de homología relativa de  $Z - W$  es la misma que la de  $Z_j$ , así  $H_q(j)(\overline{Z - W}) = \bar{Z}$ . Así mostramos que la imagen de  $H_q(j)$  es igual al núcleo de  $\partial$ .  $\square$

**Nota:** La secuencia de homología termina por la derecha con la exactitud en

$$\rightarrow H_0(X) \rightarrow H_0(X, A) \rightarrow 0$$

La exactitud en  $H_0(X, A)$  significa que la imagen de  $H_0(j)$  es igual al núcleo del homomorfismo cero, i.e.,  $H_0(j)$  es sobreyectiva.

Podemos interpretar esto más explícitamente como sigue: Dada una secuencia exacta de complejos de cadenas.

$$0 \rightarrow S_q(A) \rightarrow S_q(X) \rightarrow S_q(X)/S_q(A) \rightarrow 0$$

aplicando el functor  $Hom_R(R)$  transformamos a la secuencia en

$$0 \rightarrow \bar{S}^q(X, A) \xrightarrow{t_p} S^q(X) \xrightarrow{t_i} S^q(A) \rightarrow 0$$

**Lema.** Esta secuencia es exacta.

**Prueba:**

Primero se muestra que  $t_i$  es sobre. Sea  $S_q(X, A)$  el submódulo de  $S_q(X)$  generado por todos los simplejos singulares cuyo soporte no está contenido en  $A$ , entonces

$$S_q(X) = S_q(A) \oplus S_q(X, A).$$

Aquí una funcional lineal en  $S_q(A)$  puede ser extendida a  $S_q(X)$  definiéndolo como igual a cero en  $S_q(X, A)$ . Los pasos que faltan depende de las propiedades de  $S(X)$ .

Una  $f : S_q(X) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f \circ i = 0$  se extiende a una bien definida  $\bar{f} : S_q(X, A) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\bar{f}p = f$ . Por lo tanto,  $kert_i \subset imt_p$ . Los otros pasos se dejan al lector.  $\square$

**Teorema.** Los módulos de cohomología singular tienen las siguientes propiedades

- 1) Contrafuntorialidad
- 2) Los diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} H^q(A) & \longrightarrow & H^{q+1}(X, A) \\ H^q \uparrow & & \uparrow H^{q+1}(f) \\ H^q(B) & \longrightarrow & H^{q+1}(Y, B) \end{array}$$

- 3) La secuencia exacta de cohomología

$$0 \rightarrow H^0(X, A) \rightarrow \dots \rightarrow H^q(X) \rightarrow H^q(A) \rightarrow H^{q+1}(X, A) \rightarrow \dots$$

- 4) Es homotópicamente invariante

$$f \simeq g \Rightarrow H^q(f) = H^q(g)$$

- 5) Excision  $\bar{U} \subset \dot{A} \Rightarrow H^q(X, A) \rightarrow H^q(X - U, A - U)$  es un isomorfismo

- 6) Para un punto simple  $p$ ,  $H^q(p) = \begin{cases} R & \text{si } q = 0 \\ 0 & \text{si } q > 0 \end{cases}$

**Demostración:**

Los puntos 1) a 3) se dejan como ejercicio.

4) Se sigue dado que el mapeo homotópico induce mapeos homotópicos de cadenas de complejos singulares, así que mapeos homotópicos de cadenas del complejo de co-cadenas inducen mapeos iguales en cohomología.

Para 5) Usando el mismo argumento para obtener la equivalencia de cadena homotópica de  $S(X - U, A - U) \subset S(X, A)$ . Alternativamente considere el diagrama.

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & E^q(X, A) & \longrightarrow & H^q(X, A) & \longrightarrow & H_q(X, A)^* \longrightarrow 0 \\
E^q(f) = E^q(g) \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow t_{H_q}(f) = t_{H_q}(g) \\
0 & \longrightarrow & E^q(Y, B) & \longrightarrow & H^q(Y, B) & \longrightarrow & H_q(Y, B)^* \longrightarrow 0
\end{array}$$

6) se sigue por el teorema de excision en teoría de homología, con el diagrama conmutativo anterior con  $(X, A)$  en lugar de  $(Y, B)$  y  $(X - U, A - U)$  en lugar de  $(X, A)$  y por el lema de Barratt-Whitehead.

7) se sigue de la homología de un punto, el hecho que  $E^q(p) = 0$  para todo  $q$ , y el isomorfismo canónico  $R^* \cong R$ .  $\square$

En el lenguaje de las formas diferenciales,  $f$  que es el operador cofrontera corresponde a la llamada derivada exterior.

Si  $\Omega^3$  es una forma diferencial puesto que  $D(\Omega^3) = 0$  para una 3-forma en el 3-espacio, vemos por  $(\sigma_4, \delta c^3(\phi)) = \int_{\partial\sigma_4} \Omega^3(\phi)$  que  $\delta c^3(\phi) = 0$  (por el teorema general de Stokes).

Definimos los módulos de ciclos y cofronteras por

$$\begin{aligned}
Z^q(X) &= \ker \delta : S^q(X) \rightarrow S^{q+1}(X) \\
B^q(X) &= \text{Im} \delta : S^{q-1}(X) \rightarrow S^q(X)
\end{aligned}$$

y el módulo cohomología como  $H^q(X; R)$  por

$$H^q(X) = Z^q(X)/B^q(X)$$

Si  $f : X \rightarrow Y$ , entonces  $S^q(f)$  respeta cociclos y cofronteras e induce un homomorfismo cociente

$$H^q(f) : H^q(Y) \rightarrow H^q(X)$$

Para  $X$  el 3-espacio Euclidiano tenemos descritas las clases de cohomologías por las formas diferenciales. Los cociclos corresponden a formas cerradas, mientras que las cofronteras son las formas exactas (como  $dw$ ). Pero para  $q$  positiva es clásico que la  $q$ -forma (en  $\mathbb{R}^3$ ) es cerrada  $\Leftrightarrow$  es exacta. Esto corresponde al hecho de que  $H^q(\mathbb{R}^3) = 0$  para  $q$  positiva.

Definimos  $\bar{S}^q(X, A = \text{hom}_R(S_q(X)/S_q(A), R))$  y definimos la cofrontera  $\delta : \bar{S}^q(X, A) \rightarrow \bar{S}^{q+1}(X, A)$  que es la transpuesta del operador frontera

$$\partial : S_{q+1}(X)/S_{q+1}(A) \rightarrow S_q(X)/S_q(A)$$

Definimos

$$H^q(X, A) = [\ker \delta \text{ en } \bar{S}^q(X, A)] / [Im \delta \text{ en } \bar{S}^{q-1}(X, A)]$$

Un subespacio  $X$  del espacio euclidiano  $\mathbb{R}^n$  es llamado un poliedro (finito) si este puede ser representado como una unión finita de simplejos geométricos tales que la intersección de dos simplejos es vacío ó una iteración de caras de cada uno. Tal representación es llamada triangulación de  $X$ .

Un espacio  $X$  es llamado triangulable finitamente (también llamado simplicial finito) si es homeomorfo a un poliedro (finito). Claramente tales espacios son llamados células complejas finitas.

Si  $X$  e  $Y$  son poliedros, un mapeo  $f : X \rightarrow Y$  es llamado simplicial (con respecto a triangulaciones dadas si la restricción de  $f$  a cualquier simplejo geométrico en  $X$  es un mapeo afín de sobre un simplejo geométrico en  $Y$ ). La importancia de los poliedros es que un mapeo arbitrario puede ser aproximado por un mapeo simplicial en la misma clase de homotopía.

### Construcción de J.P. Roth

Sea  $K$  un circuito eléctrico: consideremos a  $K$  como un complejo unidimensional.

Un conjunto de corrientes que fluyen a través de las ramas  $K$  puede ser considerado como la asignación de un número complejo a cada rama. Aquí tales conjuntos de corrientes son tratados como un vector o 1-cadena orientada al espacio de tal conjunto de corrientes de rama, así coinciden con el grupo  $C^1(K)$  de 1-cadenas orientadas sobre los coeficientes del campo de números complejos. Una malla de corriente donde la corriente fluye alrededor de un circuito cerrado orientado corresponde a 1-ciclo, pero como podremos ver es más apropiado identificar a esto con un elemento de el primer grupo de homología  $H^1(K)$  de  $K$ . De hecho, el espacio de tales circuitos de corriente (las llamadas mallas de corriente) es isomorfa con  $H^1(K)$ ; con estas identificaciones, la transformación  $i = i'$  usada por Kron es el homomorfismo natural de  $H^1(K)$  sobre  $C^1(K)$ . Aquí  $i', i$  son vectores columna representando elementos de  $H^1(K), C^1(K)$  con respecto a bases escogidas para cada espacio.

Recordemos sin embargo que  $C^1(K)$  puede ser vista como el grupo de homología relativa de  $k$  módulo su esqueleto cero (nodos). Físicamente esta transformación puede ser considerada como una expresión de la Ley de corrientes de Kirchhoff. Podemos, sin embargo, ver que el espacio de corrientes (nodo = vértice) es isomorfo al grupo de frontera de cero cadenas. En la notación de Kron el operador frontera es expresado por la ecuación  $I' = A_t J$  donde  $J$  e  $I'$

son vectores columna representando vectores en  $C^1(K)$  y  $B^0(K)$  con respecto a bases dadas para esos espacios. Usamos la notación mas acostumbrada en topología,  $I' = \partial J$  donde  $\partial$  es el operador frontera. En este contexto el operador frontera puede ser interpretado como una expresión alternativa de la Ley de Kirchhoff, equivalente a la forma antes mencionada. Podemos combinar las aplicaciones  $C$  y  $\partial$  para formar la secuencia de homología reducida" definida por  $(K, K^0)$ ,  $K^0$  siendo el esqueleto cero de  $K$ :

$$0 \rightarrow H_1(k) \rightarrow C^1(k) \rightarrow B^0(k) \rightarrow 0$$

El resultado  $\partial C = 0$  (ó  $A_t C = 0$ ) es una consecuencia de la exactitud de esta secuencia y es referido por Kron como "la condición de ortogonalidad". Por supuesto este resultado puede ser verificado directamente.

El conjunto dual de relaciones consideradas en los espacios de voltajes y potenciales serán identificadas con la correspondiente secuencia de homología relativa. Comenzamos con el opuesto en el final de la secuencia.

Primero identificamos el espacio de potenciales de nodo con el grupo  $C_0(K)$  de cero cadenas de  $k$ . El espacio de diferencias de potencias (par nodo potencial) coincide con el subgrupo  $P_0(K)$  de  $C_0(K)$ , el dual  $P^0(K)$ , es isomorfo a  $C_0(K)$  módulo el subgrupo de 0-cociclos.  $P_0(K)$  es seleccionado como la imagen de  $P^0(K)$  bajo el siguiente isomorfismo: Sea  $C^0 = \sum a_i \sigma_i^0$  una 0-cadena orientada de  $k$ , la sumatoria corre sobre el conjunto de todas las 0-células de  $K$  las  $a_i$  siendo números complejos. Sea  $\varphi(C^0)$  la 0-cadena  $f$  tal que  $f(\sigma_i) = a_i$ . La transformación  $\varphi$  es un isomorfismo de  $C^0(K)$  en  $C_0(K)$ . Sea  $P_0(K)$  la imagen de  $P^0(K)$  bajo  $\sigma$ . Así, si  $\{b_K\}$  es una base para  $P^0(K)$ , llamamos así  $\{\varphi(b_K)\}$  la base correspondiente para  $P_0(K)$ . Los espacios de ramas de voltajes (terminología para los Voltajes en Kron) puede ser identificado con el grupo de 1-cadenas de  $K$ ,  $C_1(K)$ .

El operador cofrontera  $E = \delta E'$  (ó  $E = AE'$ , en notación de Kron), donde  $E, E'$  representan elementos de  $C_1(K), P_0(K)$ , pueden ser considerados como una forma de la Ley de Kirchhoff de voltaje. Finalmente, el espacio de mallas coincide con el primer grupo de cohomología  $H_1(K)$ . De nuevo, si tomamos una base fija para  $H^1(K)$  y  $C^1(K)$  y escribimos la ecuación matricial para el homomorfismo natural  $C$  y entonces usamos las mismas bases para expresar el homomorfismo dual de  $C_1(K)$  sobre  $H_1(K)$ , entonces el mapeo toma la forma usada por Kron,  $C_t V = \bar{e}$ . Este mapeo es otra forma equivalente de la Ley de voltajes de Kirchhoff. Estos dos mapeos nos proporcionan la siguiente sucesión de homologías reducida:

$$0 \rightarrow H_1(k) \leftarrow C_1(k) \leftarrow P_0(k) \leftarrow 0$$

Por exactitud,  $C_t \delta = 0$  (ó  $C_t(A) = 0$ ) esta condición es denominada por Kron "La ortogonalidad de mallas y de potenciales de nodos".

**Los isomorfismos Torcidos**

Estudiaremos las condiciones que prevalecen en las ecuaciones diferenciales descritas por corrientes de ramas y voltajes de rama en un circuito dado reduciendo las ecuaciones a la ecuación matricial  $V = LJ$ , una ecuación para el circuito donde  $J$  es un vector columna que representa la 1-cadena con respecto a bases dadas para  $C^1(k)$ . Finalmente,  $L$  es llamada la matriz impedancia y está determinada solamente por las propiedades electromagnéticas de los elementos (resistencia, inductancias mutuas, etc.); esto es esencial para reafirmar la transformación  $L$  es independiente de la forma en que las ramas están conectadas, esto es, independiente de la estructura topológica de  $K$ . En la notación de Kron  $L$  es denotada por  $Z$ .

Los problemas de circuitos eléctricos pueden ser interpretados en términos físicos como sigue: Dado un conjunto de elementos con propiedades electromagnéticas que determinan una transformación  $L$ , conectadas en una forma predeterminada siempre determina a un circuito  $K$  y dado un conjunto  $e'$  de fuentes de corriente conectadas en serie en las mallas ( $e'$  es un elemento de  $H_1(K)$ ) y un conjunto  $I'$  de corrientes que fluyen para la salida del sistema en los nodos de  $K$  ( $I'$  es un elemento de  $P^0(K)$ ), el problema es encontrar la corriente que fluye a través de la malla y el potencial en cada elemento - este es el tema de las Leyes de Kirchhoff.

En este problema puede o no haber solución y la solución depende de la naturaleza de  $L$ . Decimos que la matriz  $L$  y la transformación representada por  $L$  está bien definida si  $L + \bar{L}_t$  es definida positiva. La potencia disipada  $\frac{1}{2}(V_t \bar{J} + \bar{V}_t J)$  es definida positiva si y solo si  $L$  está bien definida. Aquí para un circuito físicamente realizable, esta condición está satisfecha.

**Teorema.** Si  $L$  está bien definida, entonces el problema circuital tiene una y solo una solución.

El problema puede ser visualizado por medio de el siguiente diagrama de circuito algebraico.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & H^1(K) & \xrightarrow{C} & C^1(K) & \xrightarrow{\partial} & P^0(K) \longrightarrow 0 \\
 & & L' \downarrow & & L \downarrow \uparrow Y & & \uparrow Y' \\
 0 & \longleftarrow & H_1(K) & \xleftarrow{C_t} & C_1(K) & \xleftarrow{\delta} & P_0(K) \longleftarrow 0
 \end{array}$$

Aquí  $Y$  es la inversa de  $L$ ,  $L' = C_t L C$ ,  $Y' = \partial Y \delta$ . Mostramos que bajo las condiciones dadas para  $L$ , que es equivalente a que  $L'$  y  $Y'$ , son no singulares. Con esto tenemos la solución. Suponga que  $L' i' = 0$ , y sea  $i = C i'$ , entonces  $\bar{i}'_t L' i'$  tomadas como igual a  $\bar{i}_t L i$ , son cero y así  $\bar{i}_t \bar{L}_t i$  es cero. Así,  $\bar{i}_t (L + \bar{L}_t) i = 0$  y asumiendo que está bien definida en  $L$ ,  $i$  también es cero. Pero dado que por exactitud,  $C$  es un isomorfismo,  $i'$  tiene que ser cero. Así, el  $\ker$  de  $L'$  es cero y,

dado que el espacio tiene igual dimensión,  $L'$  tiene que ser uno a uno. Por un argumento similar,  $Y'$  tiene entonces aquí una inversa (por exactitud e igual argumento podemos mostrar que  $L'$  y  $Y'$  tienen inversas si  $L - \bar{L}_t$  esta bien definida).

# Bibliografía

- [1] C. Desver, E. Kuh, “Basic Circuit Theory”, Mc Graw Hill, New York, 1969.
- [2] García Aviles, Alejandro; Tesis Profesional: Establecimiento de las condiciones que debe satisfacer una red de corriente alterna para que tenga solución única; ESIME, I.P.N. 1964, Méx. D.F.
- [3] Gerez Greiser, Víctor y Czitrom de Gerez, V.; Circuitos y Sistemas Electromecánicos, Ed. Alfaomega, 1991.
- [4] J. Greenberg, R. Harper; Algebraic Topology; Addison-Wesley; 1981.
- [5] J. P. Roth, “An Application of Algebraic Topology: Kron’s method of tearing”, Quart. Applic. Math. 17 (1959) 1,24
- [6] Herrera Rojas, Juan; Teoría de Circuitos, Edit. LIMUSA, 1983.
- [7] Lacomba, Ernesto A. and Budgor, Aaron; Circuits, Simplicial Chain and Symplectic Geometry; Related Fields, Applications to the Physical Sciences and Engineering; Teubner Verlag, Leipzig, pp 248-279, 1985.
- [8] Chua, Leon O.; Introduction to Nonlinear Network Theory Vol. 1, Foundation of Nonlinear network theory 1978
- [9] Lages Lima Elon; Análise No Espaço  $\mathbb{R}^n$ , Edit. Universidade de Brasilia Edgard Blucher LTDA. 1970.
- [10] Pallis Jr, Jacob y de Melo, Welington; Geometric Theory of Dynamical Systems, Springer-Verlag, 1980.
- [11] Rudin, Walter; Functional Analysis, Mc-Graw Hill, 1973.
- [12] Seymour Lipschutz, Ph D; Álgebra Lineal, Mc-Graw Hill, 1990.

***Ecuaciones Diferenciales Ordinarias  
En Circuitos Eléctricos No Lineales***

**Tesis que presenta  
Juan Domingo Pérez López**

**Para la obtención del grado  
*De Maestro en Ciencias: Matemáticas*  
Mayo del 2007.**



**Asesor: Dr. Ernesto A. Lacomba Zamora**

**México D. F.**