

MAESTRÍA EN CIENCIAS
(MATEMÁTICAS APLICADAS E INDUSTRIALES)

PROBLEMA INVERSO
ELECTROENCEFALOGRÁFICO:
ESTUDIO NUMÉRICO DEL SUBPROBLEMA DE
DETECCIÓN DE FUENTES VOLUMÉTRICAS

Tesis que presenta:
Belem Isabel Rojas Ramírez
Para obtener el grado de:
Maestra en Ciencias
(Matemáticas Aplicadas e Industriales)

Asesor: Dr. Lorenzo Héctor Juárez Valencia
Co-asesor: Dr. José Jacobo Oliveros Oliveros

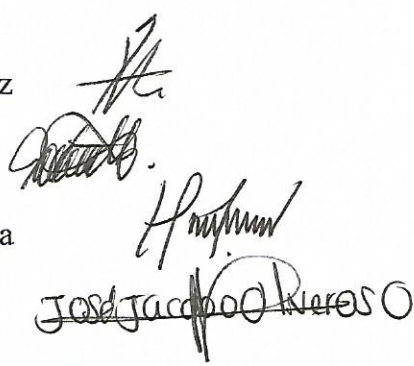
Jurado Calificador:

Presidente: Dr. Miguel Ángel Moreles Vazquez

Secretario: Dr. José Héctor Morales Bárcenas

Vocal: Dr. Lorenzo Héctor Juárez Valencia

Vocal: Dr. José Jacobo Oliveros Oliveros



Handwritten signatures of the jury members: Miguel Ángel Moreles Vazquez, José Héctor Morales Bárcenas, Lorenzo Héctor Juárez Valencia, and José Jacobo Oliveros Oliveros.

México. D.F. Diciembre 2015

Agradecimientos

Al Dr. Héctor Juárez, por sus enseñanzas y tiempo dedicado en la dirección de este trabajo, así como su apoyo en todo momento.

Al Dr. Julio Conde por su tiempo, dedicación y paciencia en guiarme a lo largo este trabajo.

Al Dr. Jacobo Oliveros, por la coasesoría de este trabajo y sus comentarios para mejorarlo.

A mis sinodales: Dr. Miguel Ángel Moreles y Dr. Héctor Morales, por el tiempo que dedicaron en revisar mi trabajo y orientarme con sus observaciones para mejorarlo.

A mis profesores de posgrado, por compartir sus conocimientos.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por el apoyo otorgado, el cual fue esencial para realizar mis estudios.

Resumen

En la actualidad existe un gran interés por la investigación sobre los métodos no destructivos para la detección de fuentes de actividad bioeléctrica en el cerebro.

La electroencefalografía es una de las técnicas más conocidas de investigación no invasiva del cerebro. Por medio de ella se registran los potenciales en un electroencefalograma (EEG); estos potenciales provienen de la actividad eléctrica de los tejidos excitables, y se captan midiendo la diferencia de potencial existente entre un electrodo extrapolador y otro de referencia. Entre las ventajas de la técnica del EEG se encuentra que la información que proporciona se captura en tiempo real, de manera simple, es no invasiva además de económica. Por medio de esta técnica se han detectado posibles anomalías en el cerebro (daños, mal funcionamiento, etc.) y una de sus principales aplicaciones se encuentra en el diagnóstico y detección de focos epilépticos.

En el presente trabajo se estudia un problema que se obtiene a través de una simplificación del llamado problema inverso electroencefalográfico, el cual consiste en determinar fuentes bioeléctricas en el cerebro a partir del electroencefalograma sobre el cuero cabelludo.

En este problema, que se denomina problema de detección de fuentes volumétricas (PDFV) se pretende recuperar una fuente bioeléctrica en el cerebro en un medio homogéneo a partir de una medición ficticia que se obtiene del electroencefalograma sobre el cuero cabelludo. El PDFV es mal planteado debido a que está sobredeterminado y que es sensible a errores. Para tratar la inestabilidad numérica del problema se propone replantearlo como un problema de control distribuido donde se propone un funcional a minimizar. Para minimizar este funcional se implementa el método de gradiente conjugado (MGC) en un programa realizado en MATLAB.

Para estudiar la convergencia y estabilidad del método, se propone el ejemplo de una fuente donde se conoce la solución exacta al problema, en una región circular. Además, para validar el método se examina otra fuente en distintas regiones: un círculo, una elipse y una región irregular.

Índice general

Conclusiones	I
Resumen	II
Introducción.	3
1. Preliminares	4
1.1. El electroencefalograma	4
1.2. Planteamiento del problema	6
1.2.1. Existencia y unicidad de la solución débil del PCE	9
1.2.2. Solución Clásica del PCE	12
1.2.3. Reducción del PIE	12
2. Formulación de los problemas como problemas de control.	14
2.1. Método de solución para el problema de Cauchy	14
2.1.1. Reformulación del problema de Cauchy.	14
2.1.2. El método de gradiente conjugado.	15
2.2. Método de solución del problema de detección de la fuente volumétrica.	21
2.2.1. Reformulación del problema de detección de la fuente.	22
2.2.2. El método de gradiente conjugado	22
2.3. Otra formulación del problema de identificación de la fuente.	27
2.3.1. El método de gradiente conjugado	30
2.4. Método de solución para el problema desacoplado del PIE	33
2.4.1. Reformulación del problema desacoplado del PIE	33
2.4.2. El método de gradiente conjugado	33
3. Solución analítica del problema de la fuente para dos círculos concéntricos.	39
3.1. Solución analítica del problema de Cauchy para la ecuación de Laplace en una región anular circular.	39
3.2. Solución analítica del problema directo electroencefalográfico	42
3.2.1. Solución del problema inverso electroencefalográfico	45
3.3. Solución del problema de la fuente del PIES	45

4. Solución numérica del problema de detección de fuentes volumétricas.	48
4.1. Ejemplo 1: Problema de detección de la fuente $f(x, y) = x^2 - y^2$ en una región circular.	48
4.2. Ejemplo 2: Problema de detección de la fuente $f(x, y) = \exp(x) \operatorname{sen}(y)$	55
4.2.1. Región circular.	55
4.2.2. Región elíptica.	60
4.2.3. Región irregular.	64
Conclusiones	70
Apéndice A. El Método de Elemento Finito (MEF)	71
Bibliografía	78

Introducción

El problema inverso electroencefalográfico (PIE) considera la cabeza dividida en dos capas o regiones: una es la correspondiente al cerebro y la otra la forman las demás capas de la cabeza, y consiste en que dado el potencial generado por un electroencefalograma (EEG) en el cuero cabelludo se desea hallar la fuente volumétrica en el cerebro que lo genera. De la reducción del PIE a una sola región se derivan el problema de detección de la fuente el cual es mal planteado debido a que está sobredeterminado y a la inestabilidad numérica ante errores en los datos de entrada. Ha sido demostrado que a partir del EEG puede determinarse la componente armónica de la fuente bioeléctrica y en este trabajo se replantea el problema de detección de fuentes armónicas como un problema de control distribuido que se resuelve implementando el método de gradiente conjugado (MGC), a su vez en éste método es necesario resolver algunos problemas de contorno en cada iteración y para ello se usa el método de elementos finitos puesto que es uno de los métodos más robustos para aproximar soluciones en regiones complejas.

A continuación se describen los puntos principales que se abordarán en cada capítulo de este trabajo:

En el capítulo 1 se detallan las bases biofísicas del electroencefalograma que permiten obtener el modelo del problema de contorno electroencefalográfico (PCE) y agregando los datos del electroencefalograma surge el PIE. Se estudia la existencia y unicidad de la solución débil del PCE, así mismo se simplifica el PIE a una región que permitirá su estudio teórico y numérico.

En el capítulo 2 se describe el algoritmo del MGC para resolver el problema de detección de la fuente y se proponen otras formas de resolver el problema. También se describe el algoritmo para la solución del problema de Cauchy en una región anular.

En el capítulo 3 se calcula la solución analítica del problema para validar los resultados numéricos de la implementación del MGC con fuentes concretas que se presentarán en el próximo capítulo.

El capítulo 4 contiene los resultados numéricos de aplicar el MGC en una región circular y otra elíptica, así como para una región irregular. También se analizan los resultados de aplicar perturbación a los datos.

Finalmente se presenta un anexo del método de elemento finito que se usa para resolver los problemas de contorno en el MGC.

Capítulo 1

Preliminares

En diversos campos de la investigación, se presentan situaciones en las cuales es necesario conocer las causas que producen ciertos fenómenos a través de la información parcial que se obtiene del mismo. En este trabajo se abordará el estudio numérico del subproblema de detección de fuentes volumétricas derivado del problema inverso electroencefalográfico. Dicho problema consiste en hallar conglomerados de neuronas en el cerebro dados los datos proporcionados por el electroencefalograma, que mide potenciales derivados de la actividad eléctrica del cerebro. A continuación se detallan algunos antecedentes para plantear el modelo del problema inverso electroencefalográfico.

1.1. El electroencefalograma

El electroencefalograma registra los potenciales que provienen de la actividad eléctrica de los tejidos excitables, y se captan midiendo la diferencia de potencial entre un electrodo extrapolarador y otro de referencia.

La mayor ventaja del EEG es que mide los potenciales de manera no invasiva y con una resolución de milisegundos (en tiempo real). Aunque su inconveniente es que por su carácter macroscópico y diversidad de configuraciones de fuentes posibles, a priori es imposible la determinación unívoca de los generadores del EEG.

Bases biofísicas

En esta sección se exponen las bases biofísicas que describen la generación de campos electromagnéticos medidos por el EEG.

En la actividad electromagnética cerebral se distinguen dos niveles:

Nivel microscópico: Se refiere a la actividad de las neuronas y su base electrofisiológica está en las corrientes que circulan a través de los canales iónicos de membranas. Parte de esta actividad no es visible en el registro a distancia del EEG, debido a las cancelaciones de corrientes iónicas extracelulares producida por geometrías dendríticas en campo cerrado, según Loret de Nó [5]. En cambio, las geometrías en campo abierto sí permiten el registro en el EEG.

Nivel macroscópico: Es la actividad de grandes conglomerados (en número y distribución espacial) de neuronas que se pueden registrar con electrodos en el cuero cabelludo a través del EEG o con electrodos intracraneales colocados en una región del cerebro (potenciales locales).

Las mediciones asociadas a ambos niveles resultan de una misma y única actividad: el flujo de iones positivos y negativos a través de la membrana celular y el espacio intercelular. Se distinguen dos tipos de corriente:

Corriente primaria o activa: Es el flujo de iones que corresponde a la corriente microscópica.

Corriente secundaria o pasiva: Son las corrientes inducidas en el espacio intercelular (respuesta eléctrica del medio conductor).

Las corrientes secundarias microscópicas inducen gradientes de potencial proporcionales a las magnitud de la corriente local y la conductividad, por esto, se dice que son corrientes óhmicas o que cumplen la Ley de Ohm.

Estudios comparativos con tejido cerebral y cardíaco [9] muestran que las mediciones realizadas macroscópicamente (como el EEG) se producen esencialmente por las corrientes secundarias o pasivas microscópicas. De modo que, es razonable modelar la corriente primaria macroscópica como una corriente óhmica. A este tipo de corriente se le denomina corriente irrotacional.

Así, el EEG mide diferentes aspectos de las corriente primaria irrotacional.

En la modelación, se representa la corriente total como la suma de dos componentes: la corriente primaria asociada a los generadores neuronales y la corriente secundaria (pasiva).

La relación entre los campos electromagnéticos y las corrientes intracerebrales pueden describirse por las ecuaciones de Maxwell. Estudios realizados en medios conductores vivos muestran que, para frecuencias menores de 1.00 Hz, la interdependencia descrita por las ecuaciones de Maxwell entre ambos campos puede despreciarse y así resulta la llamada aproximación casi estática. Este desacoplamiento entre los campos eléctricos y magnéticos dan lugar a un fenómeno sin memoria.

De la aproximación casi estática de las ecuaciones de Maxwell resulta que las mediciones del EEG y las corrientes se relacionan de forma lineal. De aquí surgen dos problemas:

- **Problema directo electroencefalográfico (PDE):** Conocidas las características del medio y las corrientes, determinar el EEG.
- **Problema inverso electroencefalográfico (PIE):** Conocidas las características del medio y las mediciones del EEG, determinar las corrientes que produjeron dichas mediciones. La dificultad en este problema está en la falta de unicidad de la solución debido a que existen corrientes que no producen mediciones, llamadas corrientes silentes.

1.2. Planteamiento del problema

Una fuente bioeléctrica cerebral se compone de conglomerados de neuronas que actúan simultáneamente y son generadas por la actividad electroquímica de éstas. Las fuentes pueden ubicarse dentro del volumen ocupado por el cerebro o en la corteza cerebral, y tienen diferentes representaciones matemáticas, dependiendo de su naturaleza. Por ejemplo, cuando la fuente está asociada a un foco epiléptico se representa por medio de distribuciones (funciones generalizadas) y si están concentradas en una región del cerebro, se pueden representar por funciones cuadrado integrables.

En diversos campos de investigación, entre ellos la medicina, existe un gran interés en el problema de identificación de fuentes bioeléctricas cerebrales, a partir de datos obtenidos por el EEG, ya que permite detectar posibles anomalías (daños, mal funcionamiento, etc.) sin intervención quirúrgica.

En este trabajo sólo se consideran las fuentes ubicadas en el cerebro y que se representan por funciones cuadrado integrables.

Para estudiar el problema de identificación se usa el modelo del medio conductor, que utiliza la aproximación casi estática de las ecuaciones de Maxwell, el cual considera a la cabeza dividida en capas conductoras correspondientes a diferentes regiones de la cabeza como músculos cerebrales, cerebro, líquido intracraneal, cráneo y cuero cabelludo. Por simplicidad se consideran dos capas de la cabeza disjuntas.

Sean Ω_1 la capa correspondiente al cerebro, Ω_2 las capas restantes de la cabeza, S_1 la corteza cerebral y S_2 el cuero cabelludo como se muestra en la Figura (1.1).

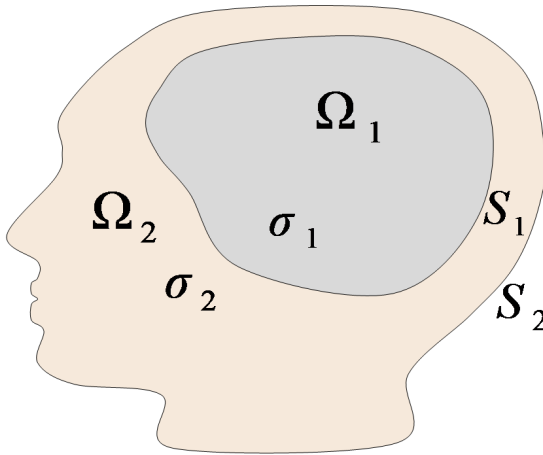


Figura 1.1: Representación de la cabeza como dos medios conductores homogéneos acoplados.

Supóngase que $\Omega = \bar{\Omega}_1 \cup \Omega_2$ donde $\bar{\Omega}_1$ representa la cerradura de Ω_1 y que cada región Ω_1, Ω_2 tiene conductividad constante positiva σ_1 y σ_2 , respectivamente, con $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Además se supone que las corrientes que pueden producirse en Ω se deben únicamente a la actividad eléctrica del cerebro, y éstas pueden ser de dos tipos ([8]):

- **óhmicas:** se deben al movimiento de cargas iónicas a través del fluido extracelular en el cerebro,

- **impresas:** se deben a las corrientes de difusión a través de las membranas neuronales.

La densidad volumétrica de las corrientes impresas, o corrientes primarias, en Ω_1 se denotan por \mathbf{J} y son las de interés en el problema de identificación, ya que el soporte de estas puede proporcionar información acerca de la ubicación espacial de la zona afectada.

Sea \mathbf{J}_T^i la densidad volumétrica total en Ω_i , y \mathbf{E}_i el campo eléctrico generado por la actividad bioeléctrica en Ω_i , para $i = 1, 2$. Se sabe que estas densidades se pueden expresar como la suma de las corrientes primarias (impresas) y secundarias (óhmicas), de modo que en Ω_1

$$\mathbf{J}_T^1 = \mathbf{J} + \sigma_1 \mathbf{E}_1, \quad (1.1)$$

y como en Ω_2 no hay fuentes de actividad bioeléctrica, sólo se consideran las corrientes secundarias,

$$\mathbf{J}_T^2 = \sigma_2 \mathbf{E}_2. \quad (1.2)$$

Por la ley de conservación de la carga (ecuación de continuidad) se sabe que

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_T^i + \frac{\partial \rho_i}{\partial t} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (1.3)$$

donde ρ_i representa la densidad de carga eléctrica en cada región Ω_i y dado que

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} = \frac{\sigma_i}{\epsilon_0} p_0 \exp\left(-\frac{\sigma_i t}{\epsilon_0}\right)$$

donde

$$\frac{\sigma_i}{\epsilon_0} \approx \frac{1}{200}$$

y

$$\epsilon_0 = 1.8 \times 10^{-9} s$$

sobre el cráneo y en otras capas de la cabeza es mucho menor, el término $\frac{\partial \rho_i}{\partial t}$ se puede despreciar [4] en la ecuación (1.3),

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_T^i = 0, \quad i = 1, 2. \quad (1.4)$$

Sustituyendo (1.1) y (1.2) en (1.4) para cada i , se obtiene

$$\nabla \cdot (\mathbf{J} + \sigma_1 \mathbf{E}_1) = 0, \quad \text{en } \Omega_1, \quad (1.5)$$

$$\nabla \cdot (\sigma_2 \mathbf{E}_2) = 0, \quad \text{en } \Omega_2. \quad (1.6)$$

Por otro lado, de la Ley de Faraday se sabe que

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0,$$

donde \mathbf{B} representa el campo magnético generado por la actividad eléctrica del cerebro; además por resultados experimentales se conoce que $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ y considerando que la corriente en el medio conductor es continua se concluye que el campo eléctrico es irrotacional [10],

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

y por lo tanto, existe un potencial eléctrico u tal que

$$\mathbf{E}_i = -\nabla u_i, \quad i = 1, 2. \quad (1.7)$$

Sustituyendo (1.7) con $i = 1$ en (1.5),

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{J} + \sigma_1 \mathbf{E}_1) &= \nabla \cdot (\mathbf{J} + \sigma_1 (-\nabla u_1)) \\ &= \nabla \cdot \mathbf{J} - \nabla \cdot (\sigma_1 \nabla u_1) \\ &= 0, \end{aligned}$$

así

$$-\nabla \cdot (\sigma_1 \nabla u_1) = f, \quad \text{en } \Omega_1, \quad (1.8)$$

donde $f = -\nabla \cdot \mathbf{J}$.

Ahora, sustituyendo (1.7) con $i = 2$ en (1.2), se obtiene

$$-\nabla \cdot (\sigma_2 \nabla u_2) = 0, \quad \text{en } \Omega_2. \quad (1.9)$$

Las condiciones de continuidad para el potencial eléctrico y flujos de corriente en cada superficie S_i con $i = 1, 2$ son

$$u_1 = u_2, \quad \text{sobre } S_1, \quad (1.10)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial \hat{n}_1} = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial \hat{n}_1}, \quad \text{sobre } S_1, \quad (1.11)$$

y se denominan condiciones de transmisión, las cuales corresponden al acoplamiento de dos medios conductores con diferente conductividad. Considerando que la conductividad de Ω^C (conductividad del aire) es cero, se obtiene la siguiente condición de frontera

$$\frac{\partial u_2}{\partial \hat{n}_2} = 0, \quad \text{sobre } S_2, \quad (1.12)$$

donde $\frac{\partial u_i}{\partial \hat{n}_j}$ denota la derivada normal de u_i en S_j respecto al vector normal unitario \hat{n}_j exterior a S_j , $i, j = 1, 2$.

Al problema elíptico con valores en la frontera (ecuación de Poisson con condiciones de frontera) (1.8)-(1.12) se le llama problema de contorno electroencefalográfico (PCE).

Agregando la medición dada por el EEG denotada por V ,

$$u_2 = V, \quad \text{sobre } S_2, \quad (1.13)$$

se plantean los siguientes problemas.

Problema directo: Dado $f \in L_2(\Omega_1)$ y u que satisface el PCE, hallar

$$u|_{S_2} = V.$$

Problema inverso electroencefalográfico: Dado V en S_2 , hallar la fuente $f \in L_2(\Omega_1)$ tal que la solución u del PCE satisfaga

$$u|_{S_2} = V.$$

Una de las dificultades de este problema es que f no es continua respecto a V , es decir, si se varía un poco V no necesariamente f variará un poco.

1.2.1. Existencia y unicidad de la solución débil del PCE

A continuación se analiza la existencia y unicidad del PCE, para ello se introducen conceptos sobre los espacios de Sobolev.

Definición 1. Un espacio de Sobolev de orden k sobre $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $H^k(\Omega)$, con $k \in \mathbb{N}$ es el completamiento del espacio $C^k(\bar{\Omega})$, bajo la norma

$$\|u\|_{2,k} = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} D^{\alpha} u \right)^{\frac{1}{2}},$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ y $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

Definición 2. Se dice que una función $w \in L_2(\Omega)$ es la derivada de orden α de u ,

$$D^{\alpha} u = w,$$

si

$$\int_{\Omega} u(x) D^{\alpha} \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} w(x) \phi(x) dx, \quad \forall \phi \in C_0^{\infty}(\Omega),$$

donde

$$C_0^{\infty}(\Omega) = \{\phi \in C^{\infty}(\Omega) : \text{sup}(\phi(x)) \subseteq \Omega\}$$

y

$$D^{\alpha} u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

con $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Definición 3. Dada $f \in L_2(\Omega_1)$, una función $u \in H^1(\Omega)$ es solución débil del PCE si se cumple que

$$\int_{\Omega_1} f v_1 dx = \int_{\Omega_1} \sigma_1 \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 dx + \int_{\Omega_2} \sigma_2 \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 dx \quad (1.14)$$

para todo $v \in H^1(\Omega)$, donde $\Omega = \bar{\Omega}_1 \cup \Omega_2$ y $v_i = v|_{\Omega_i}$ con $i = 1, 2$.

TEOREMA 1. La solución débil $u \in H^1(\Omega)$ del PCE existe si $f \in L_2(\Omega_1)$ cumple que

$$\int_{\Omega_1} f dx = 0. \quad (1.15)$$

Además, si

$$\int_{\Omega} u dx = 0$$

entonces la solución es única y

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L_2(\Omega)},$$

donde la constante C no depende de f .

Demostración . Considérese el siguiente producto interno en $L_2(\Omega)$ dado por

$$\langle w, v \rangle_0 = \int_{\Omega} f v dx.$$

Así,

$$\langle w, v \rangle_0 = \int_{\Omega_1} \sigma_1 w v_1 dx + \int_{\Omega_2} \sigma_2 w v_2 dx$$

y dado que no se consideran fuentes sobre Ω_2 , tomando $w = 0$ en Ω_2 y $w = f$ en $\bar{\Omega}_1$ el segundo término del lado derecho de la igualdad se anula,

$$\langle f, v \rangle_0 = \int_{\Omega_1} \sigma_1 f v_1 dx. \quad (1.16)$$

Por otro lado, un producto interno en $H^1(\Omega)$ está dado por

$$\langle u, v \rangle_1 = \int_{\Omega} \sigma (u \cdot v + \nabla u \cdot \nabla v) dx.$$

Notése que los productos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ son equivalentes al producto interno de $L_2(\Omega)$ y $H^1(\Omega)$, respectivamente. Así,

$$\langle u, v \rangle_1 = \int_{\Omega_1} \sigma_1 (u_1 \cdot v_1 + \nabla u_1 \cdot \nabla v_1) dx + \int_{\Omega_2} \sigma_2 (u_2 \cdot v_2 + \nabla u_2 \cdot \nabla v_2) dx. \quad (1.17)$$

De las definiciones de producto interno en $L_2(\Omega)$ y en $H^1(\Omega)$, la definición de solución débil (1.14) se puede escribir como

$$\langle f, v \rangle_0 = -\langle u, v \rangle_0 + \langle u, v \rangle_1, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (1.18)$$

Se puede demostrar usando el teorema de representación de Riesz y la continuidad del producto escalar, que existen operadores lineales y continuos $F, A : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$ tales que $\langle f, v \rangle_0 = \langle F(f), v \rangle_1$ y $\langle u, v \rangle_0 = \langle A(u), v \rangle_1$. Así, por este teorema la ecuación (1.18) se puede escribir como

$$\langle F(f), v \rangle_1 = -\langle A(u), v \rangle_1 + \langle u, v \rangle_1.$$

o bien,

$$F(f) = -A(u) + u.$$

Denotando $F_0 = -F(f)$, la ecuación anterior se puede reescribir como

$$(I - A)(u) = F_0. \quad (1.19)$$

Por el teorema de alternativa de Fredholm, la ecuación (1.19) tiene solución si

$$\langle F_0, \gamma \rangle_1 = 0. \quad (1.20)$$

para toda γ solución de la ecuación operacional

$$(I - A^*)\gamma = 0,$$

es decir, (1.19) tiene solución si F_0 es ortogonal a las soluciones de la ecuación homogénea adjunta.

El operador A es autoadjunto. En efecto, de la definición de A se tiene que

$$\langle u, v \rangle_0 = \langle A(u), v \rangle_1$$

y

$$\langle v, u \rangle_0 = \langle A(v), u \rangle_1.$$

Por las propiedades de los funcionales lineales,

$$\langle A(v), u \rangle_1 = \langle u, A(v) \rangle_1.$$

Igualando las dos ecuaciones anteriores,

$$\langle A(u), v \rangle_1 = \overline{\langle A(v), u \rangle_1} = \langle u, A(v) \rangle_1.$$

Así,

$$\langle A(u), v \rangle_1 = \langle u, A(v) \rangle_1.$$

Y dado que u y v son arbitrarios, se concluye que el operador A es autoadjunto.

De modo que, como $A^* = A$,

$$(I - A)\gamma = 0. \tag{1.21}$$

Los valores propios de A son los valores λ que satisfacen

$$Au = \lambda u,$$

reformulando lo anterior

$$\langle Au, v \rangle_1 = \langle \lambda u, v \rangle_1$$

y tomando $\lambda = 1$, se tiene

$$\langle Au, v \rangle_1 = \langle u, v \rangle_1$$

y como $\langle Au, v \rangle_1 = \langle u, v \rangle_0$, se concluye que $\lambda = 1$ es valor propio de A .

Puesto que A tiene valor propio $\lambda = 1$ y función propia 1, las soluciones de la ecuación homogénea adjunta (1.21) son las funciones constantes. Entonces de (1.20) se tiene:

$$\langle F_0, 1 \rangle_1 = \langle f, 1 \rangle_0 = \int_{\Omega_1} \sigma_1 f dx = 0, \tag{1.22}$$

de modo que se satisface (1.15).

Por otro lado, sea

$$\tilde{H}^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} u dx = 0 \right\}$$

con producto interior

$$\langle u, v \rangle_3 = \int_{\Omega_1} \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 dx + \int_{\Omega_2} \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 dx.$$

Por equivalencia de normas y de la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C_1 \langle u, u \rangle_3 \leq C_2 \langle u, u \rangle_1 \leq C_2 C_3 \langle f, u \rangle_{L_2(\Omega)} \leq C \|u\|_{L_2(\Omega)} \|f\|_{L_2(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)} \|f\|_{L_2(\Omega)},$$

donde C, C_1, C_2 y C_3 son constantes positivas que no dependen de f y u . Por lo tanto

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

De aquí que la solución sea única. ■

1.2.2. Solución Clásica del PCE

Se dice que u es solución clásica del PCE si $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ y satisface el PCE en forma usual. Ahora, las condiciones para que la solución débil u del PCE sea una solución clásica del PCE es que $\partial\Omega \in C^3$ y que $f \in H^2(\Omega)$ (ver teorema 5, página 248 de [6]). Por otra parte, para que $V \in L_2(S_2)$ sea traza de una función $u \in H^1(\Omega)$ se debe satisfacer que $\partial\Omega = S_2 \in C^1$ y $V \in C^1(S_2)$ (ver teorema 2, página 146 de [6]).

1.2.3. Reducción del PIE

A continuación se presenta la reducción del PIE a una sola región, que puede ser consultado en [7], lo cual permite simplificar el estudio teórico y numérico del PIE.

Para simplificar el PIE primero se desacopla el problema (1.8)-(1.13), considerando que $f \in L_2(\Omega_1)$, $V \in L_2(\Omega_2)$ y que las soluciones de los problemas son en sentido débil, en los siguientes dos problemas.

Problema de Cauchy. Dado V en S_2 hallar la solución u_2 del problema de Cauchy en la región anular Ω_2

$$-\nabla \cdot (\sigma_2 \nabla u_2) = 0, \quad \text{en } \Omega_2, \quad (1.23)$$

$$u_2 = V, \quad \text{sobre } S_2, \quad (1.24)$$

$$\sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial \widehat{n}_2} = 0, \quad \text{sobre } S_2. \quad (1.25)$$

Problema desacoplado del PIE. Dados $\varphi = u_2|_{S_1}$ y $\psi = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial \widehat{n}_1} \Big|_{S_1}$, obtenidos una vez resuelto el problema anterior, el PIE se reduce a hallar f tal que

$$-\nabla \cdot (\sigma_1 \nabla u_1) = f, \quad \text{en } \Omega_1, \quad (1.26)$$

$$u_1 = \varphi, \quad \text{sobre } S_1, \quad (1.27)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial \widehat{n}_1} = \psi, \quad \text{sobre } S_1. \quad (1.28)$$

Notése que este segundo problema es sobredeterminado pues tiene dos condiciones de frontera sobre S_1 , de modo que constituye un problema mal planteado. Además, existe más de una función f que satisface el problema ya que

$$f = f_{arm} + f_0,$$

donde f_{arm} es una fuente armónica y f_0 es la fuente no armónica.

Para reducir el PIE a una región, el segundo problema se divide en los siguientes problemas:

$$-\nabla \cdot (\sigma_1 \nabla w) = 0, \quad \text{en } \Omega_1, \quad (1.29)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial w}{\partial \widehat{n}_1} = \psi, \quad \text{sobre } S_1. \quad (1.30)$$

y

$$-\nabla \cdot (\sigma_1 \nabla \hat{u}_1) = f, \quad \text{en } \Omega_1, \quad (1.31)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{n}_1} = 0, \quad \text{sobre } S_1. \quad (1.32)$$

Obsérvese que $u_1 = w + \hat{u}_1$ si se elige a f en (1.31) con el dato adicional

$$\hat{u}_1|_{S_1} = \hat{\varphi} = \varphi - w|_{S_1}. \quad (1.33)$$

La solución al problema (1.29)-(1.30) se toma ortogonal a las constantes, de modo que es única. Y como ψ se puede conocer a partir de los datos de Cauchy, este problema puede considerarse independiente y sólo considerarse para el estudio del problema de identificación el problema (1.31)-(1.33) que corresponde al PIE para una sola región con una condición de Neumann nula y que se denominará problema inverso electroencefalográfico simplificado (PIES).

Capítulo 2

Formulación de los problemas como problemas de control.

En este capítulo se reformula el problema inverso electroencefalográfico simplificado como un problema de control distribuido donde se buscará minimizar el funcional asociado por el método de gradiente conjugado (MGC). Para implementar este método será necesario calcular la derivada del funcional y el tamaño de paso para el descenso. Como en el algoritmo de MGC se deben resolver ciertos problemas de contorno con condiciones de Neumann en cada iteración surge la motivación de proponer una reformulación que no requiera de este tipo de condiciones. También se describe el método de solución del problema de Cauchy y del problema inverso sin la necesidad de simplificarlo.

2.1. Método de solución para el problema de Cauchy

En esta sección se plantea un problema auxiliar para resolver el primer problema (1.23)-(1.25), mediante el MGC. Para ello se propone un funcional y se calcula su derivada con la finalidad de aplicar el MGC.

2.1.1. Reformulación del problema de Cauchy.

Para el análisis del problema (1.23)-(1.25) se utiliza el siguiente problema directo asociado al problema de Cauchy,

$$-\nabla \cdot (\sigma_2 \nabla u) = 0, \quad \text{en } \Omega_2, \quad (2.1)$$

$$u = \varphi, \quad \text{sobre } S_1, \quad (2.2)$$

$$\sigma_2 \frac{\partial u}{\partial \widehat{n}} = 0, \quad \text{sobre } S_2. \quad (2.3)$$

el cual es bien planteado [1] y consiste en determinar u si conocemos φ en S_1 .

Así, el problema inverso que se plantea ahora es: recuperar el potencial $u = \varphi$ sobre S_1 a partir del conocimiento de $u = V$ en S_2 , donde u es la solución del problema (2.1)-(2.3).

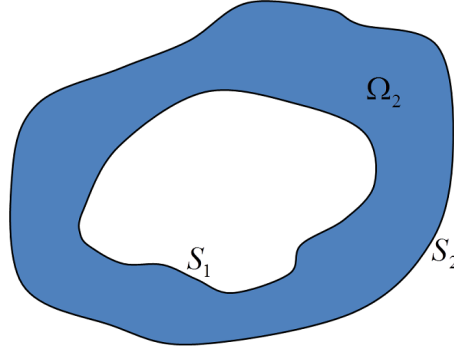


Figura 2.1: Representación geométrica de la región para el problema de Cauchy.

Sea $A : H^{\frac{1}{2}}(S_1) \rightarrow L_2(S_2)$, donde $H^{\frac{1}{2}}(S_1)$ es el espacio de funciones de $L_2(S_1)$ que son traza de alguna función de $H^1(\Omega)$, tal que a cada φ en $H^{\frac{1}{2}}(S_1)$ le asocia la traza sobre S_2 de la solución débil de (2.1)-(2.3) el operador lineal, inyectivo y compacto.

La relación entre los problemas (1.23)-(1.25) y (2.1)-(2.3) puede describirse a través del operador A como sigue:

La solución del problema (2.1)-(2.3) es también solución del problema (1.23)-(1.25) si se elige la condición de contorno φ de manera que

$$A(\varphi) := u|_{S_2} = V, \quad (2.4)$$

donde u es la solución del problema (2.1)-(2.3) y V es conocida del problema (1.23)-(1.25), es decir, si elegimos $\varphi = A^{-1}(V)$.

El problema directo asociado a la ecuación (2.4) consiste en encontrar V en S_2 cuando se conoce φ en S_1 , mientras que el problema inverso consiste en hallar φ cuando se conoce V .

Para hallar la solución $\varphi \in L_2(S_1)$ de la ecuación operacional (2.4) se propone minimizar el siguiente funcional respecto a $\varphi \in L_2(S_1)$

$$J(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{S_1} |\varphi|^2 ds + \frac{k}{2} \int_{S_2} |u(\varphi) - V|^2 ds \quad (2.5)$$

donde k es el parámetro de penalización e indica el nivel de precisión con que se cumple la igualdad. La integral en el segundo sumando de la igualdad anterior se agrega ya que sin este término en el funcional es posible que no exista solución; además la propiedad de densidad permite agregarlo pues si φ se mueve sobre todo $L_2(S_1)$ entonces $\{u(\varphi)|_{S_2} : \varphi \in L_2(S_1)\}$ es denso en $L_2(S_2)$ [3].

2.1.2. El método de gradiente conjugado.

Para hallar el mínimo del funcional $J(\varphi)$ en (2.5) aplicando el MGC se requiere conocer la derivada del funcional, $DJ(\varphi)$, la cual se calcula como sigue.

Cálculo de $DJ(\varphi)$.

Aplicando una perturbación $\delta\varphi$ a φ , se tiene

$$J(\varphi + \delta\varphi) = \frac{1}{2} \int_{S_1} |\varphi + \delta\varphi|^2 ds + \frac{k}{2} \int_{S_2} |u(\varphi + \delta\varphi) - V|^2 ds. \quad (2.6)$$

Como

$$u(\varphi + \delta\varphi) = u(\varphi) + \delta u \quad (2.7)$$

en donde u resuelve el problema (2.1)-(2.3) y δu resuelve el problema perturbado,

$$-\nabla \cdot (\sigma_2 \nabla \delta u) = 0, \quad \text{en } \Omega_2, \quad (2.8)$$

$$\delta u = \delta\varphi, \quad \text{sobre } S_1, \quad (2.9)$$

$$\sigma_2 \frac{\partial \delta u}{\partial \widehat{n}} = 0, \quad \text{sobre } S_2. \quad (2.10)$$

Entonces, sustituyendo (2.7) en (2.6), reagrupando y realizando operaciones, se tiene

$$\begin{aligned} J(\varphi + \delta\varphi) &= \frac{1}{2} \int_{S_1} |\varphi + \delta\varphi|^2 ds + \frac{k}{2} \int_{S_2} |(u(\varphi) + \delta u) - V|^2 ds \\ &= \frac{1}{2} \int_{S_1} |\varphi + \delta\varphi|^2 ds + \frac{k}{2} \int_{S_2} |(u(\varphi) - V) + \delta u|^2 ds \\ &= \frac{1}{2} \int_{S_1} |\varphi|^2 ds + \int_{S_1} \varphi \delta\varphi ds + \frac{1}{2} \int_{S_1} |\delta\varphi|^2 ds \\ &+ \frac{k}{2} \int_{S_2} |(u(\varphi) - V)|^2 ds + k \int_{S_2} (u(\varphi) - V) \delta u ds + \frac{k}{2} \int_{S_2} |\delta u|^2 ds \\ &= \left[\frac{1}{2} \int_{S_1} |\varphi|^2 ds + \frac{k}{2} \int_{S_2} |(u(\varphi) - V)|^2 ds \right] \\ &+ \int_{S_1} \varphi \delta\varphi ds + k \int_{S_2} (u(\varphi) - V) \delta u ds + \mathcal{O}(\|\delta\varphi\|^2) \end{aligned}$$

Por definición del funcional J , el sumando entre corchetes de la ecuación anterior es $J(\varphi)$,

$$J(\varphi + \delta\varphi) = J(\varphi) + \int_{S_1} \varphi \delta\varphi ds + k \int_{S_2} (u(\varphi) - V) \delta u ds + \mathcal{O}(\|\delta\varphi\|^2). \quad (2.11)$$

Para calcular la derivada del funcional de una manera práctica es necesario hallar el problema adjunto. Para ello, nótese que el operador $\mathcal{L} \equiv -\nabla \cdot (\sigma_2 \nabla)$ es un operador auto-adjunto y determinando las condiciones de frontera que permiten expresar la integral sobre S_2 en (2.11) como una integral de φ y $\delta\varphi$ sobre S_1 es que se propone el siguiente problema adjunto.

$$-\nabla \cdot (\sigma_2 \nabla w) = 0, \quad \text{en } \Omega_2, \quad (2.12)$$

$$w = 0, \quad \text{sobre } S_1, \quad (2.13)$$

$$\sigma_2 \frac{\partial w}{\partial \widehat{n}} = k(u(\varphi) - V), \quad \text{sobre } S_2. \quad (2.14)$$

Para hallar la formulación variacional de este problema adjunto, se multiplica en ambos miembros de la ecuación (2.12) por la función de prueba $\delta u \in H^1(\Omega_2)$ y se integra sobre Ω_2 ,

$$\int_{\Omega_2} -\nabla \cdot (\sigma_2 \nabla w) \delta u \, dx = 0. \quad (2.15)$$

Por la identidad vectorial $\nabla \cdot (\sigma_2 \nabla w \delta u) = \nabla \cdot (\sigma_2 \nabla w) \delta u + \sigma_2 \nabla w \cdot \nabla \delta u$, el integrando en (2.15) se puede escribir como

$$-\nabla \cdot (\sigma_2 \nabla w) \delta u = \sigma_2 \nabla w \cdot \nabla \delta u - \nabla \cdot (\sigma_2 \nabla w \delta u).$$

Así,

$$\int_{\Omega_2} [\sigma_2 \nabla w \cdot \nabla \delta u - \nabla \cdot (\sigma_2 \nabla w \delta u)] \, dx = 0,$$

o bien,

$$\int_{\Omega_2} \sigma_2 \nabla w \cdot \nabla \delta u \, dx = \int_{\Omega_2} \nabla \cdot (\sigma_2 \nabla w \delta u) \, dx. \quad (2.16)$$

Por el teorema de Green o teorema de la divergencia de Gauss, si \mathbf{F} es un campo vectorial continuo en Ω ,

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma$$

donde $\Gamma = \partial\Omega$.

Aplicando el teorema de Green en el lado derecho de (2.16) con $\mathbf{F} = \sigma_2 \nabla w \delta u$ se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} \sigma_2 \nabla w \cdot \nabla \delta u \, dx &= \int_{\partial\Omega_2} \sigma_2 \nabla w \delta u \cdot \mathbf{n} \, ds \\ &= \int_{\partial\Omega_2} \sigma_2 (\nabla w \cdot \mathbf{n}) \delta u \, ds \\ &= \int_{\partial\Omega_2} \sigma_2 \frac{\partial w}{\partial \hat{\mathbf{n}}} \delta u \, ds. \end{aligned}$$

Como $\partial\Omega = S_1 \cup S_2$ y considerando la orientación del vector normal,

$$\int_{\Omega_2} \sigma_2 \nabla w \cdot \nabla \delta u \, dx = - \int_{S_1} \sigma_2 \frac{\partial w}{\partial \hat{\mathbf{n}}} \delta u \, ds + \int_{S_2} \sigma_2 \frac{\partial w}{\partial \hat{\mathbf{n}}} \delta u \, ds. \quad (2.17)$$

Sustituyendo las condiciones de frontera (2.9) y (2.14) en el primer y segundo sumando de (2.17) respectivamente, se obtiene

$$\int_{\Omega_2} \sigma_2 \nabla w \cdot \nabla \delta u \, dx = - \int_{S_1} \sigma_2 \frac{\partial w}{\partial \hat{\mathbf{n}}} \delta \varphi \, ds + \int_{S_2} k(u(\varphi) - V) \delta u \, ds. \quad (2.18)$$

Análogamente, se calcula la formulación variacional del problema perturbado (2.8)-(2.10) tomando como función de prueba $w \in H^1(\Omega_2)$. Así,

$$\int_{\Omega_2} \sigma_2 \nabla \delta u \cdot \nabla w \, dx = - \int_{S_1} \sigma_2 \frac{\partial \delta u}{\partial \hat{\mathbf{n}}} w \, ds + \int_{S_2} \sigma_2 \frac{\partial \delta u}{\partial \hat{\mathbf{n}}} w \, ds.$$

Dado que la función de prueba w se anula en la frontera de Dirichlet, S_1 , el primer sumando del lado derecho de la ecuación anterior se anula y por la condición de frontera (2.10) también se anula el segundo sumando. De modo que,

$$\int_{\Omega_2} \sigma_2 \nabla \delta u \cdot \nabla w dx = 0. \quad (2.19)$$

Por lo tanto, sustituyendo (2.19) en (2.18) se concluye que

$$0 = - \int_{S_1} \sigma_2 \frac{\partial w}{\partial \widehat{n}} \delta \varphi ds + \int_{S_2} k(u(\varphi) - V) \delta u ds,$$

esto es,

$$k \int_{S_2} (u(\varphi) - V) \delta u ds = \int_{S_1} \sigma_2 \frac{\partial w}{\partial \widehat{n}} \delta \varphi ds. \quad (2.20)$$

Sustituyendo (2.20) en (2.11),

$$\begin{aligned} J(\varphi + \delta \varphi) &= J(\varphi) + \int_{S_1} \varphi \delta \varphi ds + \int_{S_1} \sigma_2 \frac{\partial w}{\partial \widehat{n}} \delta \varphi ds + \mathcal{O}(\|\delta \varphi\|^2) \\ &= J(\varphi) + \int_{S_1} \left(\varphi + \sigma_2 \frac{\partial w}{\partial \widehat{n}} \right) \delta \varphi ds + \mathcal{O}(\|\delta \varphi\|^2) \\ &= J(\varphi) + \left\langle \varphi + \sigma_2 \frac{\partial w}{\partial \widehat{n}}, \delta \varphi \right\rangle_{L_2(S_1)} + \mathcal{O}(\|\delta \varphi\|^2) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la derivada del funcional es

$$DJ(\varphi) = \varphi + \sigma_2 \frac{\partial w}{\partial \widehat{n}} \Big|_{S_1}, \quad (2.21)$$

donde w se calcula en dos pasos:

- 1) se calcula u resolviendo el problema (2.1)-(2.3),
- 2) se calcula w resolviendo el problema adjunto (2.12)-(2.14).

Cálculo de α_n .

Para saber que tanto descender en el MGC es necesario calcular el tamaño de paso α , lo cual se calcula a continuación.

Sea

$$\phi(\alpha) = J(\varphi^n + \alpha d^n)$$

donde φ^n y d^n son conocidos, se desea resolver el problema: encontrar α tal que la derivada de ϕ respecto de α satisfaga lo siguiente

$$\phi'(\alpha) = \langle DJ(\varphi^n + \alpha d^n), d^n \rangle_{L_2(S_1)} = 0. \quad (2.22)$$

Tomando $\varphi = \varphi^n + \alpha d^n$ en (2.21), se tiene que

$$DJ(\varphi^n + \alpha d^n) = (\varphi^n + \alpha d^n) + \sigma_2 \frac{\partial w}{\partial \widehat{n}} \Big|_{S_1}, \quad (2.23)$$

donde w se calcula en dos pasos:

1) se calcula $u = u_1 + \alpha u_2$, donde u_1 resuelve el problema

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\sigma_2 \nabla u_1) &= 0, & \text{en } \Omega_2, \\ u_1 &= \varphi^n, & \text{sobre } S_1, \\ \sigma_2 \frac{\partial u_1}{\partial \widehat{n}} &= 0, & \text{sobre } S_2, \end{aligned}$$

y u_2 resuelve el problema

$$-\nabla \cdot (\sigma_2 \nabla u_2) = 0, \quad \text{en } \Omega_2, \quad (2.24)$$

$$u_2 = d^n, \quad \text{sobre } S_1, \quad (2.25)$$

$$\sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial \widehat{n}} = 0, \quad \text{sobre } S_2. \quad (2.26)$$

2) se calcula $w = w_1 + \alpha w_2$, donde w_1 resuelve

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\sigma_2 \nabla w_1) &= 0, & \text{en } \Omega_2, \\ w_1 &= 0, & \text{sobre } S_1, \\ \sigma_2 \frac{\partial w_1}{\partial \widehat{n}} &= k(u_1 - V), & \text{sobre } S_2, \end{aligned}$$

y w_2 resuelve

$$-\nabla \cdot (\sigma_2 \nabla w_2) = 0, \quad \text{en } \Omega_2, \quad (2.27)$$

$$w_2 = 0, \quad \text{sobre } S_1, \quad (2.28)$$

$$\sigma_2 \frac{\partial w_2}{\partial \widehat{n}} = k u_2, \quad \text{sobre } S_2. \quad (2.29)$$

Así, sustituyendo $w = w_1 + \alpha w_2$ en (2.23) y desarrollando se llega a que

$$DJ(\varphi^n + \alpha d^n) = g^n + \alpha \bar{g}^n, \quad (2.30)$$

donde

$$g^n = DJ(\varphi^n),$$

y

$$\bar{g}^n = d^n + \sigma_2 \frac{\partial \bar{w}^n}{\partial \widehat{n}} \Big|_{S_1}, \quad (2.31)$$

con \bar{w}^n obtenido de resolver los problemas (2.24)-(2.26) y (2.27)-(2.29).

Sustituyendo (2.30) en (2.22) y desarrollando, se concluye que

$$\alpha_n = -\frac{\langle g^n, d^n \rangle_{L_2(S_1)}}{\langle \bar{g}^n, d^n \rangle_{L_2(S_1)}}. \quad (2.32)$$

Con el objetivo de minimizar el funcional (2.5) se aplica el MGC como se indica a continuación.

Algoritmo del método de gradiente conjugado.

Paso 1. Inicialización. Dado φ^0 , resolver los siguientes problemas:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\sigma_2 \nabla u^0) &= 0, & \text{en } \Omega_2, \\ u^0 &= \varphi^0, & \text{sobre } S_1, \\ \sigma_2 \frac{\partial u^0}{\partial \widehat{n}} &= 0, & \text{sobre } S_2, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\sigma_2 \nabla w^0) &= 0, & \text{en } \Omega_2, \\ w^0 &= 0, & \text{sobre } S_1, \\ \sigma_2 \frac{\partial w^0}{\partial \widehat{n}} &= k(u^0 - V), & \text{sobre } S_2. \end{aligned}$$

Una vez obtenida w^0 , evaluar

$$g^0 = \varphi^0 + \sigma_2 \frac{\partial w^0}{\partial \widehat{n}} \Big|_{L_2(S_1)}$$

y hacer

$$d^0 = g^0.$$

Paso 2. Descenso. Para $n \geq 0$, dados φ^n, g^n, d^n , calcular $\varphi^{n+1}, g^{n+1}, d^{n+1}$ como sigue: resolver los problemas

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\sigma_2 \nabla \bar{u}^n) &= 0, & \text{en } \Omega_2, \\ \bar{u}^n &= d^n, & \text{sobre } S_1, \\ \sigma_2 \frac{\partial \bar{u}^n}{\partial \widehat{n}} &= 0, & \text{sobre } S_2. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\sigma_2 \nabla \bar{w}^n) &= 0, & \text{en } \Omega_2, \\ \bar{w}^n &= 0, & \text{sobre } S_1, \\ \sigma_2 \frac{\partial \bar{w}^n}{\partial \widehat{n}} &= k\bar{u}^n, & \text{sobre } S_2. \end{aligned}$$

Calcular (2.31), (2.32),

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n + \alpha_n d^n,$$

y

$$g^{n+1} = g^n + \alpha \bar{g}^n.$$

Si $\langle g^{n+1}, g^{n+1} \rangle \leq \varepsilon \langle g^n, g^n \rangle$ parar y tomar $\varphi = \varphi^{n+1}$. Por lo tanto, una solución estable del problema de Cauchy (1.23)-(1.25) está dada por la correspondiente solución u^n del problema directo (2.1)-(2.3) para $\varphi = \varphi^{n+1}$ sobre S_1 . En caso contrario hacer el siguiente paso.

Paso 3. Convergencia. Calcular

$$\beta_n = \frac{\langle g^{n+1}, g^{n+1} \rangle_{L_2(S_1)}}{\langle g^n, g^n \rangle_{L_2(S_1)}},$$

y

$$d^{n+1} = -g^{n+1} + \beta_n d^n,$$

hacer $n = n + 1$ e ir al Paso 2.

2.2. Método de solución del problema de detección de la fuente volumétrica.

En esta sección se reformula el problema de detección de la fuente como un problema de control y análogamente a la metodología del problema de Cauchy se propone un funcional a minimizar. Recuérdese que el problema original es como se plantea a continuación.

Encontrar $f \in L_2(\Omega)$ tal que la solución de

$$-\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = f, \quad \text{en } \Omega, \quad (2.33)$$

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} = 0, \quad \text{sobre } S, \quad (2.34)$$

sea tal que

$$u = \hat{\varphi}, \quad \text{sobre } S, \quad (2.35)$$

donde $\hat{\varphi}$ se define como es (1.33).

Dado que éste es un problema sobredeterminado se reformula como un problema de control distribuido.

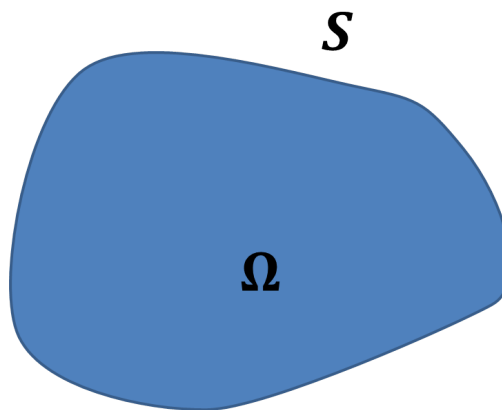


Figura 2.2: Representación geométrica de la región del problema de detección de la fuente.

2.2.1. Reformulación del problema de detección de la fuente.

La formulación del problema (2.33)-(2.35) como un problema de control es la siguiente:

Hallar el mínimo del funcional,

$$J(f) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |f|^2 dx + \frac{k}{2} \int_S |u(f) - \widehat{\varphi}|^2 ds \quad (2.36)$$

donde $u(f)$ tal que

$$\int_{\Omega} u dx = 0$$

es la solución de (2.33)-(2.34), en el espacio de controles

$$\mathcal{U} = \left\{ f \in L_2(\Omega) : \int_{\Omega} f dx = 0 \right\}. \quad (2.37)$$

Es decir, el problema es encontrar $f^* \in \mathcal{U}$ tal que

$$J(f^*) \leq J(f), \quad \forall f \in \mathcal{U}.$$

El parámetro de penalización k proporcionará el nivel de exactitud con que se satisface la condición (2.35). La propiedad de densidad garantiza que el problema de detección de la fuente tiene solución aproximada, y como el funcional es convexo, esta solución es única. Esta aproximación variacional permite obtener soluciones en forma estable del problema (2.33)-(2.35).

Así, la solución de norma mínima del problema de la fuente se obtiene minimizando el funcional en (2.36), como el funcional es cuadrático y convexo se puede usar un método iterativo de gradiente conjugado. Y para aplicar el método será necesario calcular la primera variación del funcional $DJ(f)$, así como el tamaño de descenso α_n .

A continuación se calcula $DJ(f)$ y α_n .

2.2.2. El método de gradiente conjugado

Para aplicar el MGC se realiza el cálculo de $DJ(f)$ y α_n como se muestra a continuación.

Cálculo de $DJ(f)$.

Perturbando el argumento del funcional con δf se tiene

$$J(f + \delta f) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |f + \delta f|^2 dx + \frac{k}{2} \int_S |u(f + \delta f) - \widehat{\varphi}|^2 dx. \quad (2.38)$$

Como

$$u(f + \delta f) = u(f) + \delta u, \quad (2.39)$$

donde u resuelve (2.33)-(2.34) y δu resuelve el problema perturbado

$$-\nabla \cdot (\sigma \nabla \delta u) = \delta f, \quad \text{en } \Omega, \quad (2.40)$$

$$\sigma \frac{\partial \delta u}{\partial \widehat{n}} = 0, \quad \text{sobre } S. \quad (2.41)$$

Sustituyendo (2.39) en (2.38) y realizando operaciones se obtiene

$$\begin{aligned}
J(f + \delta f) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |f|^2 dx + \int_{\Omega} f \delta f dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\delta f|^2 dx \\
&+ \frac{k}{2} \int_S |(u(f) - \widehat{\varphi})|^2 ds + k \int_S (u(f) - \widehat{\varphi}) \delta u ds + \frac{k}{2} \int_S |\delta u|^2 ds \\
&= \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} |f|^2 dx + \frac{k}{2} \int_S |(u(f) - \widehat{\varphi})|^2 ds \right] \\
&+ \int_{\Omega} f \delta f dx + k \int_S (u(f) - \widehat{\varphi}) \delta u ds + \mathcal{O}(\|\delta f\|^2),
\end{aligned}$$

donde el símbolo $\mathcal{O}(\|\delta f\|^2)$ se refiere a los términos de orden alto de δf . Así, por definición de funcional, la ecuación anterior se puede escribir como

$$J(f + \delta f) = J(f) + \int_{\Omega} f \delta f dx + k \int_S (u(f) - \widehat{\varphi}) \delta u ds + \mathcal{O}(\|\delta f\|^2). \quad (2.42)$$

Análogamente al problema de Cauchy, para calcular la derivada del funcional de forma práctica es necesario hallar el problema adjunto. Se observa que el operador $\mathcal{L} \equiv -\nabla \cdot (\sigma \nabla)$ es un operador auto-adjunto y determinando las condiciones de frontera que permiten expresar la integral sobre S en (2.42) como una integral de f y δf sobre Ω es que se propone el siguiente problema adjunto.

$$-\nabla \cdot (\sigma \nabla w) = 0, \quad \text{en } \Omega, \quad (2.43)$$

$$\sigma \frac{\partial w}{\partial \widehat{n}} = k(u - \widehat{\varphi}), \quad \text{sobre } S. \quad (2.44)$$

Su formulación variacional está dada por

$$\int_{\Omega} \sigma \nabla w \cdot \nabla z dx = \int_S \sigma \frac{\partial w}{\partial \widehat{n}} z ds,$$

para todo $z \in H^1(\Omega)$, y sustituyendo (2.44) en el lado derecho de la igualdad anterior se obtiene

$$\int_{\Omega} \sigma \nabla w \cdot \nabla z dx = \int_S k(u - \widehat{\varphi}) z ds.$$

En particular, para $z = \delta u$ en la ecuación anterior, se tiene

$$\int_{\Omega} \sigma \nabla w \cdot \nabla \delta u dx = \int_S k(u - V) \delta u ds. \quad (2.45)$$

Por otro lado, la formulación variacional del problema perturbado (2.40)-(2.41) es

$$\int_{\Omega} \sigma \nabla \delta u \cdot \nabla w dx = \int_{\Omega} (\delta f) w dx + \int_S \sigma \frac{\partial \delta u}{\partial \widehat{n}} w ds$$

y considerando la condición (2.41) se llega a

$$\int_{\Omega} \sigma \nabla \delta u \cdot \nabla w dx = \int_{\Omega} \delta f w dx. \quad (2.46)$$

Así, de (2.45) y (2.46) se concluye que

$$\int_S k(u - \widehat{\varphi}) \delta u ds = \int_{\Omega} \delta f w dx.$$

Sustituyendo la ecuación anterior en (2.42)

$$\begin{aligned} J(f + \delta f) &= J(f) + \int_{\Omega} f(\delta f) dx + \int_{\Omega} (\delta f) w dx + \mathcal{O}(\|\delta f\|^2) \\ &= J(f) + \int_{\Omega} (f + w) \delta f dx + \mathcal{O}(\|\delta f\|^2) \\ &= J(f) + \langle f + w, \delta f \rangle_{L_2(\Omega)} + \mathcal{O}(\|\delta f\|^2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la derivada del funcional (2.36) es

$$DJ(f) = f + w, \quad (2.47)$$

donde w se calcula en dos pasos:

- 1) dado f se calcula u resolviendo el problema (2.33)-(2.34),
- 2) posteriormente, se calcula w resolviendo el problema adjunto (2.43)-(2.44).

Así, el óptimo f^* se satisface en $DJ(f^*) = f^* + w^*$.

Cálculo de α_n .

Para aplicar el MGC es necesario determinar α_n , mediante la solución del siguiente problema.

Suponiendo conocidos f^n y d^n se desea minimizar

$$\phi(\alpha) = J(f^n + \alpha d^n)$$

respecto de α . Es decir, se busca α tal que

$$\phi'(\alpha) = \langle DJ(f^n + \alpha d^n), d^n \rangle_{\mathcal{U}} = 0. \quad (2.48)$$

Con $f = f^n + \alpha d^n$ en (2.47),

$$DJ(f^n + \alpha d^n) = (f^n + \alpha d^n) + w \quad (2.49)$$

donde w se obtiene en dos pasos:

1) se calcula $u = u_1 + \alpha u_2$, donde u_1 resuelve el problema

$$-\nabla \cdot (\sigma \nabla u_1) = f^n, \quad \text{en } \Omega, \quad (2.50)$$

$$\sigma \frac{\partial u_1}{\partial \widehat{n}} = 0, \quad \text{sobre } S, \quad (2.51)$$

y u_2 resuelve

$$-\nabla \cdot (\sigma \nabla u_2) = d^n, \quad \text{en } \Omega, \quad (2.52)$$

$$\sigma \frac{\partial u_2}{\partial \widehat{n}} = 0, \quad \text{sobre } S, \quad (2.53)$$

2) se calcula $w = w^n + \alpha \bar{w}^n$, donde w^n resuelve el problema

$$-\nabla \cdot (\sigma \nabla w^n) = 0, \quad \text{en } \Omega, \quad (2.54)$$

$$\sigma \frac{\partial w^n}{\partial \widehat{n}} = k(u_1 - \widehat{\varphi}), \quad \text{sobre } S, \quad (2.55)$$

y \bar{w}^n resuelve

$$-\nabla \cdot (\sigma \nabla \bar{w}^n) = 0, \quad \text{en } \Omega, \quad (2.56)$$

$$\sigma \frac{\partial \bar{w}^n}{\partial \widehat{n}} = k u_2, \quad \text{sobre } S. \quad (2.57)$$

Por lo tanto, sustituyendo $w = w_1^n + w_2^n$ en (2.49) se obtiene

$$DJ(f^n + \alpha d^n) = g^n + \alpha \bar{g}^n,$$

con $g^n = DJ(f^n)$ y $\bar{g}^n = d^n + \bar{w}^n$, donde \bar{w}^n se obtiene en dos pasos:

1)

$$-\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = d^n, \quad \text{en } \Omega, \quad (2.58)$$

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial \widehat{n}} = 0, \quad \text{sobre } S, \quad (2.59)$$

2)

$$-\nabla \cdot (\sigma \nabla w) = 0, \quad \text{en } \Omega, \quad (2.60)$$

$$\sigma \frac{\partial w}{\partial \widehat{n}} = k u, \quad \text{sobre } S. \quad (2.61)$$

Sustituyendo lo anterior en (2.48) y despejando se tiene que

$$\alpha_n = -\frac{\langle g^n, d^n \rangle_{\mathcal{U}}}{\langle \bar{g}^n, d^n \rangle_{\mathcal{U}}}. \quad (2.62)$$

Algoritmo del MGC.

Paso 1: Inicialización. Dado $f^0 \in \mathcal{U}$, resolver

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\sigma \nabla u^0) &= f^0, \quad \text{en } \Omega, \\ \sigma \frac{\partial u^0}{\partial \widehat{n}} &= 0, \quad \text{sobre } S, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\sigma \nabla w^0) &= 0, \quad \text{en } \Omega, \\ \sigma \frac{\partial w^0}{\partial \widehat{n}} &= k(u_0 - \widehat{\varphi}), \quad \text{sobre } S. \end{aligned}$$

Evaluar $g^0 = f^0 + w^0$ y hacer $d^0 = -g^0$.

Paso 2: Descenso. Para $n \geq 0$, suponiendo conocidos f^n , g^n y d^n encontrar f^{n+1} , g^{n+1} y d^{n+1} realizando lo siguiente: resolver

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\sigma \nabla u^n) &= d^n, \quad \text{en } \Omega, \\ \sigma \frac{\partial u^n}{\partial \widehat{n}} &= 0, \quad \text{sobre } S, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\sigma \nabla w^n) &= 0, \quad \text{en } \Omega, \\ \sigma \frac{\partial w^n}{\partial \widehat{n}} &= k u^n, \quad \text{sobre } S. \end{aligned}$$

Calcular $\bar{g}^n = d^n + w^n$, (2.62),

$$f^{n+1} = f^n + \alpha_n d^n,$$

y

$$g^{n+1} = g^n + \alpha_n \bar{g}^n.$$

Paso 3: Convergencia. Si $\langle g^{n+1}, g^{n+1} \rangle_{\mathcal{U}} \leq \varepsilon \langle g^0, g^0 \rangle_{\mathcal{U}}$ parar y tomar $f^* = f^{n+1}$. Por lo tanto, una solución estable del problema (2.33)-(2.35) está dado por la correspondiente solución u^n del problema (2.33)-(2.34) para $f = f^{n+1}$. En caso contrario, realizar lo siguiente:

Calcular

$$\beta_n = \frac{\langle g^{n+1}, g^{n+1} \rangle_{\mathcal{U}}}{\langle g^n, g^n \rangle_{\mathcal{U}}},$$

y

$$d^{n+1} = -g^{n+1} + \beta_n d^n,$$

hacer $n = n + 1$ e ir al paso 2.

Nótese que en este algoritmo, las funciones f^n , u^n , w^n , g^n y d^n deben cumplir la propiedad de que su integral sea cero (ortogonal a las constantes). Para comprobar que se cumpla dicha propiedad por cada iteración: se toma $u - \bar{\zeta}$, donde

$$\bar{\zeta} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u dx,$$

y se verifica que

$$\int_{\Omega} (u - \bar{\zeta}) dx = \int_{\Omega} u dx - \bar{\zeta} |\Omega| = 0.$$

En el estudio del problema de detección de la fuente (2.33)-(2.35) se observó que hay otra alternativa para resolver éste como un problema con condiciones de Dirichlet, como se muestra a continuación. Cabe mencionar que esta propuesta no se implementará en este trabajo.

2.3. Otra formulación del problema de identificación de la fuente.

Para obtener una nueva formulación del problema de identificación de la fuente con condición de Dirichlet en la frontera de Ω , se desacopla el PIE (1.8)-(1.12) con el dato adicional (1.13) de la siguiente forma.

Problema 1: Dado V y $\frac{\partial u_2}{\partial \widehat{n}_2} = 0$ sobre S_2 , hallar u_2 tal que resuelva el problema de Cauchy:

$$-\sigma_2 \nabla \cdot (\nabla u_2) = 0, \quad \text{en } \Omega_2, \quad (2.63)$$

$$u_2 = V, \quad \text{sobre } S_2, \quad (2.64)$$

$$\sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial \widehat{n}_2} = 0, \quad \text{sobre } S_2. \quad (2.65)$$

Problema 2: Hallar f a través del problema de contorno

$$-\sigma_1 \nabla \cdot (\nabla u_1) = f, \quad \text{en } \Omega_1, \quad (2.66)$$

$$u_1 = \varphi, \quad \text{sobre } S_1, \quad (2.67)$$

con el dato adicional

$$\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial \widehat{n}_1} = \psi, \quad \text{sobre } S_1, \quad (2.68)$$

donde $\varphi = u_2|_{S_1}$ y $\psi = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial \widehat{n}_2} \Big|_{S_1}$.

Para el estudio del problema 2 se consideran los siguientes dos problemas de contorno, **Problema 2a:**

$$-\sigma_1 \nabla \cdot (\nabla w_1) = 0, \quad \text{en } \Omega_1, \quad (2.69)$$

$$w_1 = \varphi, \quad \text{sobre } S_1. \quad (2.70)$$

Problema 2b:

$$-\sigma_1 \nabla \cdot (\nabla w_2) = f, \quad \text{en } \Omega_1, \quad (2.71)$$

$$w_2 = 0, \quad \text{sobre } S_1. \quad (2.72)$$

Además si w_2 cumple

$$\sigma_1 \frac{\partial w_2}{\partial \widehat{n}_2} = \tilde{\psi} \quad \text{sobre } S_1,$$

donde $\tilde{\psi} = \psi - \sigma_1 \frac{\partial w_1}{\partial \widehat{n}_1} \Big|_{S_1}$, entonces la suma de w_1 y w_2 es solución del problema 2, esto es, $u_1 = w_1 + w_2$.

La condición de compatibilidad para existencia y unicidad de la solución del problema 2b es:

$$\int_{S_1} \tilde{\psi} ds = 0, \quad (2.73)$$

que se deduce considerando el problema 2b y la condición de compatibilidad de la fuente del problema general, esto es:

$$0 = \int_{\Omega_1} f dx = - \int_{\Omega_1} \sigma_1 \Delta w_2 dx = \int_{S_1} \sigma_1 \frac{\partial w_2}{\partial \widehat{n}} ds = \int_{S_1} \tilde{\psi} ds,$$

de aquí que

$$\int_{S_1} \psi ds = \int_{S_1} \sigma_1 \frac{\partial w_1}{\partial \widehat{n}} ds.$$

Considerando el problema 2a, la condición de compatibilidad para la derivada normal de w_1 sobre S_1 es:

$$\sigma_1 \int_{S_1} \frac{\partial w_1}{\partial \widehat{n}} ds = -\sigma_1 \int_{\Omega_1} \Delta w_1 dx = 0,$$

entonces

$$\int_{S_1} \psi ds = \int_{S_1} \sigma_1 \frac{\partial w_1}{\partial \widehat{n}} ds = 0.$$

Esto muestra la condición de compatibilidad (2.73).

Así, la nueva formulación del problema de la fuente se plantea como sigue.

Nuevo problema de la fuente: Dada $\tilde{\psi} \in L_2(S_1)$ encontrar $f \in L_2^+(\Omega_1)$ tal que la solución del problema de contorno

$$-\sigma_1 \nabla \cdot (\nabla w_2) = f, \quad \text{en } \Omega_1, \quad (2.74)$$

$$w_2 = 0, \quad \text{sobre } S_1, \quad (2.75)$$

sea tal que

$$\sigma_1 \frac{\partial w_2}{\partial \widehat{n}} = \tilde{\psi}, \quad \text{sobre } S_1.$$

Para hallar una solución aproximada $f \in \mathcal{U}$ a este nuevo problema se propone minimizar el siguiente funcional

$$J(f) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} |f|^2 dx + \frac{k}{2} \int_{S_1} \left| \sigma_1 \frac{\partial w_2(f)}{\partial \hat{n}} - \tilde{\psi} \right|^2 ds, \quad (2.76)$$

donde k es el parámetro de penalización, con respecto a $f \in L_2^{\perp}(\Omega_1)$ por medio de un método iterativo como el MGC. Para esto es necesario calcular la derivada de J , como se muestra a continuación.

Cálculo de $DJ(f)$.

Sustituyendo f por $f + \delta f$ en (2.76) y realizando operaciones se obtiene

$$\begin{aligned} J(f + \delta f) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} |f|^2 dx + \int_{\Omega_1} (f)(\delta f) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} |\delta f|^2 dx + \frac{k}{2} \int_{S_1} \left| \sigma_1 \frac{\partial w_2}{\partial \hat{n}} - \tilde{\psi} \right|^2 ds \\ &\quad + k \int_{S_1} \left(\sigma_1 \frac{\partial w_2}{\partial \hat{n}} - \tilde{\psi} \right) \sigma_1 \frac{\partial \delta w_2}{\partial \hat{n}} ds + \frac{k}{2} \int_{S_1} \left| \sigma_1 \frac{\partial \delta w_2}{\partial \hat{n}} \right|^2 ds \\ &= J(f) + \int_{\Omega_1} (f)(\delta f) dx + k \int_{S_1} \left(\sigma_1 \frac{\partial w_2}{\partial \hat{n}} - \tilde{\psi} \right) \sigma_1 \frac{\partial \delta w_2}{\partial \hat{n}} ds + \mathcal{O}(\|\delta f\|^2), \end{aligned} \quad (2.77)$$

donde $\mathcal{O}(\|\delta f\|^2)$ se refiere a los términos de orden alto de δf y δw_2 resuelve el problema perturbado

$$-\sigma_1 \nabla \cdot (\nabla \delta w_2) = \delta f, \quad \text{en } \Omega_1 \quad (2.78)$$

$$\delta w_2 = 0, \quad \text{sobre } S_1, \quad (2.79)$$

y cuya formulación variacional es

$$\int_{\Omega_1} \delta f v dx - \int_{\Omega_1} \sigma_1 \nabla \delta w_2 \cdot \nabla v dx = - \int_{S_1} \sigma_1 \frac{\partial \delta w_2}{\partial \hat{n}} v ds, \quad (2.80)$$

para toda $v \in H^1(\Omega_1)$ tal que $v|_{S_1} = 0$.

Nuevamente, se plantea el siguiente problema adjunto que permite calcular la derivada del funcional de manera práctica, es decir, expresando la integral sobre S_1 en (2.77) como una integral sobre Ω_1 .

$$-\sigma_1 \nabla \cdot (\nabla w) = 0, \quad \text{en } \Omega_1, \quad (2.81)$$

$$w = k \left(\sigma_1 \frac{\partial w_2}{\partial \hat{n}} - \tilde{\psi} \right), \quad \text{sobre } S_1, \quad (2.82)$$

cuya formulación variacional es

$$\int_{\Omega_1} \sigma_1 \nabla w \cdot \nabla z dx = \int_{S_1} \sigma_1 \frac{\partial w}{\partial \hat{n}} z ds,$$

para todo $z \in H^1(\Omega_1)$ tal que $z|_{S_1} = 0$. En particular, tomando $z = \delta w_2$ en la ecuación anterior y considerando la condición (2.79) se llega a que

$$\int_{\Omega_1} \sigma_1 \nabla w \cdot \nabla \delta w_2 dx = \int_{S_1} \sigma_1 \frac{\partial w}{\partial \widehat{n}} \delta w_2 ds = 0. \quad (2.83)$$

Por otro lado, tomando $v = w$ en (2.80) y usando la condición de frontera (2.82) se obtiene que

$$\int_{\Omega_1} \sigma_1 \nabla \delta w_2 \cdot \nabla w dx = \int_{\Omega_1} \delta f w dx + \int_{S_1} \sigma_1 \frac{\partial \delta w_2}{\partial n} \left[k \left(\sigma_1 \frac{\partial w_2}{\partial \widehat{n}} - \tilde{\psi} \right) \right] ds, \quad (2.84)$$

donde $w|_{S_1} = k \left(\sigma_1 \frac{\partial w_2}{\partial \widehat{n}}|_{S_1} - \tilde{\psi} \right)$. Así, sustituyendo (2.83) en (2.84) se concluye que

$$\int_{S_1} \sigma_1 \frac{\partial \delta w_2}{\partial n} \left[k \left(\sigma_1 \frac{\partial w_2}{\partial \widehat{n}} - \tilde{\psi} \right) \right] ds = - \int_{\Omega_1} \delta f w dx.$$

Así que, sustituyendo la ecuación anterior en (2.77),

$$J(f + \delta f) = J(f) + \int_{\Omega_1} (f)(\delta f) dx - \int_{\Omega_1} (\delta f) w dx + \mathcal{O}(\|\delta f\|^2) \quad (2.85)$$

$$= J(f) + \int_{\Omega_1} (f - w) \delta f dx + \mathcal{O}(\|\delta f\|^2) \quad (2.86)$$

$$= J(f) + \langle f - w, \delta f \rangle_{L^2(\Omega_1)} + \mathcal{O}(\|\delta f\|^2) \quad (2.87)$$

Por lo tanto

$$DJ(f) = f - w, \quad (2.88)$$

donde w resuelve el problema adjunto (2.81)-(2.82).

2.3.1. El método de gradiente conjugado

Para calcular el mínimo f^* del funcional J se utiliza el MGC:

$$f^{n+1} = f^n + \alpha_n d^n,$$

donde d^n es la dirección conjugada y α_n el tamaño de paso.

Cálculo de α_n .

Suponiendo conocidos f^n y d^n se desea minimizar

$$\phi(\alpha) = J(f^n + \alpha d^n).$$

Es decir, hallar α tal que satisfaga

$$\phi'(\alpha) = \langle DJ(f^n + \alpha d^n), d^n \rangle_{\mathcal{U}}. \quad (2.89)$$

Como

$$DJ(f^n + \alpha_n d^n) = f^n + \alpha_n d^n - \bar{w}^n, \quad (2.90)$$

en donde \bar{w}^n se obtiene en dos pasos:

1) calcular $v^n = v_1^n + \alpha v_2^n$, donde v_1^n resuelve

$$-\sigma_1 \nabla \cdot (\nabla v_1^n) = f^n, \quad \text{en } \Omega_1, \quad (2.91)$$

$$v_1^n = 0, \quad \text{sobre } S_1, \quad (2.92)$$

y v_2^n resuelve

$$-\sigma_1 \nabla \cdot (\nabla v_2^n) = d^n, \quad \text{en } \Omega_1, \quad (2.93)$$

$$v_2^n = 0, \quad \text{sobre } S_1, \quad (2.94)$$

2) calcular $\bar{w}^n = \bar{w}_1^n + \alpha \bar{w}_2^n$, donde \bar{w}_1^n resuelve

$$-\sigma_1 \nabla \cdot (\nabla \bar{w}_1^n) = 0, \quad \text{en } \Omega_1, \quad (2.95)$$

$$\bar{w}_1^n = k \left(\sigma_1 \frac{\partial v_1^n}{\partial \hat{n}} - \tilde{\psi} \right), \quad \text{sobre } S_1, \quad (2.96)$$

y \bar{w}_2^n resuelve

$$-\sigma_1 \nabla \cdot (\nabla \bar{w}_2^n) = 0, \quad \text{en } \Omega_1, \quad (2.97)$$

$$\bar{w}_2^n = k \left(\sigma_1 \frac{\partial v_2^n}{\partial \hat{n}} - \tilde{\psi} \right), \quad \text{sobre } S_1. \quad (2.98)$$

Entonces sustituyendo $\bar{w}_1^n + \alpha \bar{w}_2^n$ en (2.90) se tiene que

$$DJ(f^n + \alpha d^n) = g^n + \alpha \bar{g}^n \quad (2.99)$$

donde

$$g^n = DJ(f^n) \quad (2.100)$$

y

$$\bar{g}^n = d^n + \bar{w}_2^n. \quad (2.101)$$

Sustituyendo (2.99) en (2.89) y despejando α , se concluye que

$$\alpha_n = - \frac{\langle g^n, d^n \rangle_{\mathcal{U}}}{\langle \bar{g}^n, d^n \rangle_{\mathcal{U}}}. \quad (2.102)$$

donde $\bar{g}^n = d^n + \bar{w}_2^n$.

Algoritmo del método del gradiente conjugado

El algoritmo del Método del Gradiente Conjugado está dado por lo siguientes pasos:

Paso 1: Inicialización. Dada una función inicial f^0 , resolver

$$\begin{aligned} -\sigma_1 \Delta u^0 &= f^0, \quad \text{en } \Omega_1, \\ u^0 &= 0, \quad \text{sobre } S_1, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} -\sigma_1 \Delta w^0 &= 0, \quad \text{en } \Omega_1, \\ w^0 &= k \left(\sigma_1 \frac{\partial u^0}{\partial \hat{n}} - \tilde{\psi} \right), \quad \text{sobre } S_1, \end{aligned}$$

donde $\tilde{\psi} = \psi - \sigma_1 \frac{\partial w_1}{\partial \hat{n}} \Big|_{S_1}$.

Evaluar $g^0 = f^0 + w^0$ y hacer $d^0 = -g^0$.

Paso 2: Descenso. Para $n \geq 0$, dados f^n , g^n y d^n calcular f^{n+1} , g^{n+1} y d^{n+1} resolviendo los problemas

$$\begin{aligned} -\sigma_1 \Delta u^n &= d^n, \quad \text{en } \Omega_1, \\ u^n &= 0, \quad \text{sobre } S_1, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} -\sigma_1 \Delta w^n &= 0, \quad \text{en } \Omega_1, \\ w^n &= k \sigma_1 \frac{\partial u^n}{\partial n}, \quad \text{sobre } S_1, \end{aligned}$$

Evaluar $\bar{g}^n = d^n + w^n$.

Calcular

$$\alpha_n = -\frac{\langle g^n, d^n \rangle_U}{\langle \bar{g}^n, d^n \rangle_U},$$

$$f^{n+1} = f^n + \alpha_n d^n,$$

y

$$g^{n+1} = g^n + \alpha_n \bar{g}^n.$$

Si

$$\frac{\langle g^{n+1}, g^{n+1} \rangle_U}{\langle g^0, g^0 \rangle_U} \leq \varepsilon,$$

parar y tomar $f^* = f^{n+1}$.

En caso contrario ir al paso 3.

Paso 3: Convergencia. Calcular

$$\beta_n = \frac{\langle g^{n+1}, g^{n+1} \rangle_{L_2^\perp(\Omega_1)}}{\langle g^n, g^n \rangle_{L_2^\perp(\Omega_1)}}.$$

y $d^{n+1} = -g^{n+1} + \beta_n d^n$.

Hacer $n = n + 1$ e ir al paso 2.

2.4. Método de solución para el problema desacoplado del PIE

En esta sección se reformula el problema de la fuente, del problema desacoplado del PIE, como un problema de control y análogamente a la metodología usada, se plantea la minimización de un funcional por medio del algoritmo de gradiente conjugado. Recuérdese que el problema es como sigue.

Encontrar $f \in L_2(\Omega)$ tal que la solución de

$$-\nabla \cdot (\sigma_1 \nabla u) = f, \quad \text{en } \Omega_1, \quad (2.103)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} = \psi, \quad \text{sobre } S_1, \quad (2.104)$$

sea tal que

$$u = \varphi, \quad \text{sobre } S_1. \quad (2.105)$$

2.4.1. Reformulación del problema desacoplado del PIE

La formulación del problema (2.103)-(2.105) como un problema de control es la siguiente:

Hallar el mínimo del funcional,

$$J(f) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} |f|^2 dx + \frac{k}{2} \int_{S_1} |u(f) - \varphi|^2 ds \quad (2.106)$$

donde $u(f)$ tal que

$$\int_{\Omega_1} u dx = 0$$

es la solución de (2.103)-(2.104), en el espacio de controles

$$\mathcal{U} = \left\{ f \in L_2(\Omega_1) : \int_{\Omega_1} f dx = 0 \right\}. \quad (2.107)$$

Es decir, el problema es encontrar $f^* \in \mathcal{U}$ tal que

$$J(f^*) \leq J(f), \quad \forall f \in \mathcal{U}.$$

A continuación se verá como aplicar el MGC para minimizar el funcional (2.106).

2.4.2. El método de gradiente conjugado

Para aplicar el MGC se calcula la derivada del funcional $DJ(f)$ y el tamaño de paso α^n para el descenso.

Cálculo de $DJ(f)$.

Perturbando el argumento del funcional con δf se tiene

$$J(f + \delta f) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |f + \delta f|^2 dx + \frac{k}{2} \int_S |u(f + \delta f) - \varphi|^2 dx. \quad (2.108)$$

Como

$$u(f + \delta f) = u(f) + \delta u, \quad (2.109)$$

donde u resuelve (2.103)-(2.104) y δu resuelve el problema perturbado

$$-\nabla \cdot (\sigma_1 \nabla \delta u) = \delta f, \quad \text{en } \Omega_1, \quad (2.110)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial \delta u}{\partial \widehat{n}} = \delta \psi, \quad \text{sobre } S_1. \quad (2.111)$$

Sustituyendo (2.109) en (2.108) y realizando operaciones se obtiene

$$\begin{aligned} J(f + \delta f) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} |f|^2 dx + \int_{\Omega_1} f \delta f dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} |\delta f|^2 dx \\ &+ \frac{k}{2} \int_{S_1} |(u(f) - \varphi)|^2 ds + k \int_{S_1} (u(f) - \varphi) \delta u ds + \frac{k}{2} \int_{S_1} |\delta u|^2 ds \\ &= \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega_1} |f|^2 dx + \frac{k}{2} \int_{S_1} |(u(f) - \varphi)|^2 dx \right] \\ &+ \int_{\Omega_1} f \delta f dx + k \int_{S_1} (u(f) - \varphi) \delta u ds + \mathcal{O}(\|\delta f\|^2), \end{aligned}$$

donde $\mathcal{O}(\|\delta f\|^2)$ indica los términos de orden alto de δf .

Así, por definición de funcional, la ecuación anterior se puede escribir como

$$J(f + \delta f) = J(f) + \int_{\Omega_1} f \delta f dx + k \int_{S_1} (u(f) - \varphi) \delta u ds + \mathcal{O}(\|\delta f\|^2). \quad (2.112)$$

Sea el problema adjunto

$$-\nabla \cdot (\sigma_1 \nabla w) = 0, \quad \text{en } \Omega_1, \quad (2.113)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial w}{\partial \widehat{n}} = k(u - \varphi), \quad \text{sobre } S_1. \quad (2.114)$$

Su formulación variacional está dada por

$$\int_{\Omega_1} \sigma_1 \nabla w \cdot \nabla z dx = \int_{S_1} \sigma_1 \frac{\partial w}{\partial \widehat{n}} z ds,$$

para todo $z \in H^1(\Omega_1)$, y sustituyendo (2.114) en el lado derecho de la igualdad anterior se obtiene

$$\int_{\Omega_1} \sigma_1 \nabla w \cdot \nabla z dx = \int_S k(u - \varphi) z ds.$$

En particular, para $z = \delta u$ en la ecuación anterior, se tiene

$$\int_{\Omega_1} \sigma_1 \nabla w \cdot \nabla \delta u dx = \int_{S_1} k(u - \varphi) \delta u ds. \quad (2.115)$$

Por otro lado, la formulación variacional del problema perturbado (2.110)-(2.111) es

$$\int_{\Omega_1} \sigma_1 \nabla \delta u \cdot \nabla w dx = \int_{\Omega_1} \delta f w dx + \int_{S_1} \sigma_1 \frac{\partial \delta u}{\partial \widehat{n}} w ds$$

y considerando la condición (2.111) se llega a

$$\int_{\Omega_1} \sigma_1 \nabla \delta u \cdot \nabla w dx = \int_{\Omega_1} \delta f w dx + \int_{S_1} \delta \psi w ds. \quad (2.116)$$

Así, de (2.115) y (2.116) se concluye que

$$\int_{S_1} k(u - \varphi) \delta u ds = \int_{\Omega_1} \delta f w dx + \int_{S_1} \delta \psi w ds.$$

Sustituyendo la ecuación anterior en (2.112)

$$J(f + \delta f) = J(f) + \int_{\Omega_1} f \delta f dx + \int_{\Omega_1} \delta f w dx + \int_{S_1} \delta \psi w ds + \mathcal{O}(\|\delta f\|^2) \quad (2.117)$$

La tercera integral del lado derecho es un término de orden alto de modo que

$$\begin{aligned} J(f + \delta f) &= J(f) + \int_{\Omega_1} f \delta f dx + \int_{\Omega_1} \delta f w dx + \mathcal{O}(\|\delta f\|^2, \delta \psi) \\ &= J(f) + \int_{\Omega} (f + w) \delta f dx + \mathcal{O}(\|\delta f\|^2, \delta \psi) \\ &= J(f) + \langle f + w, \delta f \rangle_{L_2(\Omega)} + \mathcal{O}(\|\delta f\|^2, \delta \psi). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la derivada del funcional (2.106) es

$$DJ(f) = f + w, \quad (2.118)$$

donde w se calcula en dos pasos:

- 1) dado f se calcula u resolviendo el problema (2.103)-(2.104),
- 2) posteriormente, se calcula w resolviendo el problema adjunto (2.113)-(2.114).

Así, el óptimo f^* se satisface en $DJ(f^*) = f^* + w^*$.

Cálculo de α_n .

Para aplicar el MGC es necesario determinar α_n , mediante la solución del siguiente problema.

Suponiendo conocidos f^n y d^n se desea minimizar

$$\phi(\alpha) = J(f^n + \alpha d^n)$$

respecto de α . Es decir, se busca α tal que

$$\phi'(\alpha) = \langle DJ(f^n + \alpha d^n), d^n \rangle_{\mathcal{U}} = 0. \quad (2.119)$$

Con $f = f^n + \alpha d^n$ en (2.118),

$$DJ(f^n + \alpha d^n) = (f^n + \alpha d^n) + w, \quad (2.120)$$

donde w se obtiene en dos pasos:

1) se calcula $u = u_1 + \alpha u_2$ donde u_1 resuelve el problema

$$-\nabla \cdot (\sigma_1 \nabla u_1) = f^n, \quad \text{en } \Omega_1, \quad (2.121)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial \widehat{n}} = \psi, \quad \text{sobre } S_1, \quad (2.122)$$

y u_2 resuelve

$$-\nabla \cdot (\sigma_1 \nabla u_2) = d^n, \quad \text{en } \Omega_1, \quad (2.123)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial u_2}{\partial \widehat{n}} = 0, \quad \text{sobre } S, \quad (2.124)$$

2) se calcula $w = w^n + \alpha \bar{w}^n$ donde w^n resuelve el problema

$$-\nabla \cdot (\sigma_1 \nabla w^n) = 0, \quad \text{en } \Omega_1, \quad (2.125)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial w^n}{\partial \widehat{n}} = k(u_1 - \varphi), \quad \text{sobre } S_1, \quad (2.126)$$

y \bar{w}^n resuelve

$$-\nabla \cdot (\sigma \nabla \bar{w}^n) = 0, \quad \text{en } \Omega_1, \quad (2.127)$$

$$\sigma \frac{\partial \bar{w}^n}{\partial \widehat{n}} = k u_2, \quad \text{sobre } S_1. \quad (2.128)$$

Por lo tanto, sustituyendo $w = w^n + \alpha \bar{w}^n$ en (2.120) se obtiene

$$DJ(f^n + \alpha d^n) = g^n + \alpha \bar{g}^n,$$

con $g^n = f^n + w^n$ y $\bar{g}^n = d^n + \bar{w}^n$, donde \bar{w}^n se obtiene en dos pasos:

1)

$$-\nabla \cdot (\sigma_1 \nabla u) = d^n, \quad \text{en } \Omega_1, \quad (2.129)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial u}{\partial \widehat{n}} = 0, \quad \text{sobre } S_1, \quad (2.130)$$

2)

$$-\nabla \cdot (\sigma_1 \nabla w) = 0, \quad \text{en } \Omega_1, \quad (2.131)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial w}{\partial \widehat{n}} = ku, \quad \text{sobre } S_1. \quad (2.132)$$

Sustituyendo lo anterior en (2.119) y despejando se tiene que

$$\alpha_n = -\frac{\langle g^n, d^n \rangle_{\mathcal{U}}}{\langle \bar{g}^n, d^n \rangle_{\mathcal{U}}}. \quad (2.133)$$

Algoritmo del MGC.

Paso 1: Inicialización. Dado $f^0 \in \mathcal{U}$, resolver

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\sigma_1 \nabla u^0) &= f^0, \quad \text{en } \Omega_1, \\ \sigma_1 \frac{\partial u^0}{\partial \widehat{n}} &= \psi, \quad \text{sobre } S_1, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\sigma_1 \nabla w^0) &= 0, \quad \text{en } \Omega_1, \\ \sigma_1 \frac{\partial w^0}{\partial \widehat{n}} &= k(u_0 - \varphi), \quad \text{sobre } S_1. \end{aligned}$$

Evaluar $g^0 = f^0 + w^0$ y hacer $d^0 = -g^0$.

Paso 2: Descenso. Para $n \geq 0$, suponiendo conocidos f^n , g^n y d^n encontrar f^{n+1} , g^{n+1} y d^{n+1} realizando lo siguiente: resolver

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\sigma_1 \nabla u^n) &= d^n, \quad \text{en } \Omega_1, \\ \sigma_1 \frac{\partial u^n}{\partial \widehat{n}} &= 0, \quad \text{sobre } S_1, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\sigma_1 \nabla w^n) &= 0, \quad \text{en } \Omega_1, \\ \sigma_1 \frac{\partial w^n}{\partial \widehat{n}} &= ku^n, \quad \text{sobre } S_1. \end{aligned}$$

Calcular $\bar{g}^n = d^n + w^n$, (2.133),

$$f^{n+1} = f^n + \alpha_n d^n,$$

y

$$g^{n+1} = g^n + \alpha_n \bar{g}^n.$$

Si $\langle g^{n+1}, g^{n+1} \rangle_{\mathcal{U}} \geq \varepsilon \langle g^0, g^0 \rangle_{\mathcal{U}}$ parar y tomar $f^* = f^{n+1}$. En caso contrario, realizar el siguiente paso.

Paso 3: Convergencia. Calcular

$$\beta_n = \frac{\langle g^{n+1}, g^{n+1} \rangle_{\mathcal{U}}}{\langle g^n, g^n \rangle_{\mathcal{U}}},$$

y

$$d^{n+1} = -g^{n+1} + \beta_n d^n,$$

hacer $n = n + 1$ e ir al paso 2.

Capítulo 3

Solución analítica del problema de la fuente para dos círculos concéntricos.

En este capítulo se encuentra la solución analítica del problema de detección de la fuente volumétrica para el caso de dos círculos concéntricos con el fin de validar resultados numéricos de la implementación del algoritmo propuesto, con ejemplos concretos que se verán en el próximo capítulo. Para hallar tal solución será necesario calcular la solución del problema de Cauchy y del problema directo electroencefalográfico.

3.1. Solución analítica del problema de Cauchy para la ecuación de Laplace en una región anular circular.

Considérese el problema de Cauchy

$$-\sigma_2 \nabla \cdot (\nabla u) = 0, \quad \text{en } \Omega_2, \quad (3.1)$$

$$u = V, \quad \text{sobre } S_2, \quad (3.2)$$

$$\sigma_2 \frac{\partial u}{\partial \widehat{n}} = 0, \quad \text{sobre } S_1, \quad (3.3)$$

para una función dada $V \in L_2(S_2)$ y donde

$$S_1 = \{(x, y) : |(x, y)| = R_1\}$$

$$S_2 = \{(x, y) : |(x, y)| = R_2\}.$$

Se considera el problema auxiliar al problema de Cauchy (3.1)-(3.3) de la siguiente manera:

$$-\sigma_2 \nabla \cdot (\nabla v) = 0, \quad \text{en } \Omega_2, \quad (3.4)$$

$$v = \varphi, \quad \text{sobre } S_1, \quad (3.5)$$

$$\sigma_2 \frac{\partial v}{\partial \widehat{n}} = 0, \quad \text{sobre } S_2. \quad (3.6)$$

Sea

$$\varphi(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k^1 \cos k\theta + \varphi_k^2 \sen k\theta), \quad \text{sobre } S_1.$$

La solución del problema (3.4)-(3.6) se busca en la forma:

$$v(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} [r^k (a_k \cos k\theta + b_k \sen k\theta) + r^{-k} (c_k \cos k\theta + d_k \sen k\theta)].$$

Calculando la derivada normal de v y multiplicando por σ_2 , se tiene

$$\sigma_2 \frac{\partial v(r, \theta)}{\partial \hat{n}} \Big|_{S_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_2 [(a_k k R_2^{k-1} - c_k k R_2^{-k-1}) \cos k\theta + (b_k k R_2^{k-1} - d_k k R_2^{-k-1}) \sen k\theta]$$

y por la condición (3.6), se debe cumplir que

$$a_k k R_2^{k-1} - c_k k R_2^{-k-1} = 0, \quad (3.7)$$

y

$$b_k k R_2^{k-1} - d_k k R_2^{-k-1} = 0. \quad (3.8)$$

Por otro lado, como

$$v(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} [(a_k r^k + c_k r^{-k}) \cos k\theta + (b_k r^k + d_k r^{-k}) \sen k\theta] \quad (3.9)$$

de la condición (3.5) se obtiene

$$a_k R_1^k + c_k R_1^{-k} = \varphi_k^1 \quad (3.10)$$

y

$$b_k R_1^k + d_k R_1^{-k} = \varphi_k^2. \quad (3.11)$$

Resolviendo las ecuaciones (3.7) y (3.10) se obtiene que

$$a_k = \frac{\varphi_k^1 R_2^{-k}}{R_1^k R_2^{-k} + R_1^{-k} R_2^k}$$

y

$$c_k = \frac{\varphi_k^1 R_2^k}{R_1^k R_2^{-k} + R_1^{-k} R_2^k}.$$

Análogamente se resuelven las ecuaciones (3.8) y (3.11), de donde

$$b_k = \frac{\varphi_k^2 R_2^{-k}}{R_1^k R_2^{-k} + R_1^{-k} R_2^k}$$

y

$$d_k = \frac{\varphi_k^2 R_2^k}{R_1^k R_2^{-k} + R_1^{-k} R_2^k}.$$

Sustituyendo los coeficientes obtenidos a_k, b_k, c_k y d_k en (3.9) y realizando operaciones se obtiene

$$\begin{aligned}
v(r, \theta) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\frac{\varphi_k^1 R_2^{-k}}{R_1^k R_2^{-k} + R_1^{-k} R_2^k} + \frac{\varphi_k^1 R_2^k}{R_1^k R_2^{-k} + R_1^{-k} R_2^k} \right) \cos k\theta \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\varphi_k^2 R_2^{-k}}{R_1^k R_2^{-k} + R_1^{-k} R_2^k} + \frac{\varphi_k^2 R_2^k}{R_1^k R_2^{-k} + R_1^{-k} R_2^k} \right) \sen k\theta \right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\left(\frac{r}{R_2}\right)^k + \left(\frac{R_2}{r}\right)^k}{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^k + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k} (\varphi_k^1 \cos k\theta + \varphi_k^2 \sen k\theta) \right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left[\frac{1}{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2k} + 1} (\varphi_k^1 \cos k\theta + \varphi_k^2 \sen k\theta) \right] \left[\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^k \left(\frac{r}{R_2}\right)^k + \left(\frac{R_1}{r}\right)^k \right] \right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2k}}{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2k} + 1} (\varphi_k^1 \cos k\theta + \varphi_k^2 \sen k\theta) \left[\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^k \left(\frac{r}{R_2}\right)^k + \left(\frac{R_1}{r}\right)^k \right] \right\} \quad (3.12)
\end{aligned}$$

de modo que

$$v(r, \theta)|_{r=R_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{2 \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k}{1 + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2k}} (\varphi_k^1 \cos k\theta + \varphi_k^2 \sen k\theta) \right]$$

y como

$$v(r, \theta)|_{r=R_2} = V(\theta),$$

donde

$$V(\theta) = V_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (V_k^1 \cos k\theta + V_k^2 \sen k\theta),$$

se tiene que

$$\varphi_k^1 = \frac{V_k^1 \left[1 + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2k} \right]}{2 \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k}$$

y

$$\varphi_k^2 = \frac{V_k^2 \left[1 + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2k} \right]}{2 \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k}.$$

Sustituyendo los coeficientes φ_k^1 y φ_k^2 en (3.12) se obtiene la solución del problema (3.1)-(3.3),

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[\left(\frac{r}{R_2}\right)^k + \left(\frac{R_2}{r}\right)^k \right] (V_k^1 \cos k\theta + V_k^2 \sen k\theta) \right\}.$$

3.2. Solución analítica del problema directo electroencefalográfico

Considérese el problema de contorno electroencefalográfico (1.8)-(1.12), el cual se desacopla en los siguientes tres problemas.

PROBLEMA I:

$$-\nabla \cdot (\sigma_1 \nabla \bar{u}_1) = f, \quad \text{en } \Omega_1 \quad (3.13)$$

$$\bar{u}_1 = 0, \quad \text{en } S_1. \quad (3.14)$$

PROBLEMA II:

$$-\nabla \cdot (\sigma_1 \nabla \tilde{u}_1) = 0, \quad \text{en } \Omega_1 \quad (3.15)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \hat{n}} + \sigma_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \hat{n}} = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial \hat{n}}, \quad \text{en } S_1 \quad (3.16)$$

$$\tilde{u}_1 = u_2, \quad \text{sobre } S_1. \quad (3.17)$$

La solución de (1.8),(1.10),(1.11) será $u_1 = \bar{u}_1 + \tilde{u}_1$.

PROBLEMA III:

$$-\nabla(\sigma_2 \nabla u_2) = 0, \quad \text{en } \Omega_2 \quad (3.18)$$

$$\sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial \hat{n}} = 0, \quad \text{en } S_2. \quad (3.19)$$

Solución del problema I

Suponiendo que f es armónica, se propone la fuente como

$$f(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} [f_k^1 r^k \cos k\theta + f_k^2 r^k \sen k\theta], \quad (3.20)$$

donde f_k^1 y f_k^2 son constantes conocidas. También se propone como solución del Problema I a

$$\bar{u}_1(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} [a_k r^k \cos k\theta + b_k r^k \sen k\theta + c_k r^{k+2} \cos k\theta + d_k r^{k+2} \sen k\theta] \quad (3.21)$$

con a_k , b_k , c_k y d_k constantes desconocidas.

Aplicando el Laplaciano en coordenadas polares a la ecuación (3.21) y multiplicando por $-\sigma_1$ se obtiene

$$-\sigma_1 \Delta \bar{u}_1 = \sum_{k=1}^{\infty} -\sigma_1 [4(k+1)c_k r^k \cos k\theta + 4(k+1)d_k r^k \sen k\theta]. \quad (3.22)$$

Por (3.13), se igualan las ecuaciones (3.20) y (3.22) y se obtiene que

$$c_k = -\frac{f_k^1}{4\sigma_1(k+1)}$$

y

$$d_k = -\frac{f_k^2}{4\sigma_1(k+1)}.$$

Por la condición de contorno (3.14) se encuentra que

$$a_k = -c_k R_1^2 = \frac{f_k^1 R_1^2}{4\sigma_1(k+1)}$$

y

$$b_k = -d_k R_1^2 = \frac{f_k^2 R_1^2}{4\sigma_1(k+1)}.$$

Solución de los problemas II y III

Por otro lado, se propone como solución del Problema II

$$\tilde{u}_1(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\tilde{a}_k r^k \cos k\theta + \tilde{b}_k r^k \sen k\theta \right],$$

y como solución del Problema III a

$$u_2(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k^1 r^k \cos k\theta + b_k^1 r^k \sen k\theta + c_k^1 r^{-k} \cos k\theta + d_k^1 r^{-k} \sen k\theta \right]. \quad (3.23)$$

Por la condición de contorno (3.17) se encuentra que

$$\tilde{a}_k = a_k^1 + c_k^1 R_1^{-2k} \quad (3.24)$$

y

$$\tilde{b}_k = b_k^1 + d_k^1 R_1^{-2k}. \quad (3.25)$$

De la condición de frontera (3.16) se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\sigma_1 \tilde{a}_k k R_1^{k-1} = \sigma_2 a_k^1 k R_1^{k-1} - \sigma_2 c_k^1 k R_1^{-k-1} + \frac{f_k^1 R_1^{k+1}}{2(k+1)}, \quad (3.26)$$

$$\sigma_1 \tilde{b}_k k R_1^{k-1} = \sigma_2 b_k^1 k R_1^{k-1} - \sigma_2 d_k^1 k R_1^{-k-1} + \frac{f_k^2 R_1^{k+1}}{2(k+1)}. \quad (3.27)$$

Ahora, multiplicando (3.24) y (3.25) por $\sigma_1 k R_1^{k-1}$,

$$\sigma_1 \tilde{a}_k k R_1^{k-1} = \sigma_1 a_k^1 k R_1^{k-1} + \sigma_1 c_k^1 k R_1^{-k-1}, \quad (3.28)$$

$$\sigma_1 \tilde{b}_k k R_1^{k-1} = \sigma_1 b_k^1 k R_1^{k-1} + \sigma_1 d_k^1 k R_1^{-k-1}. \quad (3.29)$$

Sustituyendo (3.28) en (3.26) y (3.29) en (3.27) se llega a

$$(\sigma_1 - \sigma_2) a_k^1 R_1^{k-1} + (\sigma_1 + \sigma_2) c_k^1 R_1^{-k-1} = \frac{f_k^1 R_1^{k+1}}{2k(k+1)}, \quad (3.30)$$

$$(\sigma_1 - \sigma_2) b_k^1 R_1^{k-1} + (\sigma_1 + \sigma_2) d_k^1 R_1^{-k-1} = \frac{f_k^2 R_1^{k+1}}{2k(k+1)}. \quad (3.31)$$

Por otro lado, considerando la condición de frontera (3.19) se obtienen las ecuaciones

$$a_k^1 k R_2^{k-1} - c_k^1 k R_2^{-k-1} = 0, \quad (3.32)$$

$$b_k^1 k R_2^{k-1} - d_k^1 k R_2^{-k-1} = 0. \quad (3.33)$$

Así, resolviendo el sistema de ecuaciones (3.30)-(3.33) se encuentran los coeficientes

$$a_k^1 = \frac{f_k^1 R_1^2 \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^k}{2k(k+1) \left[(\sigma_1 - \sigma_2) \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^k + (\sigma_1 + \sigma_2) \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k \right]}, \quad (3.34)$$

$$b_k^1 = \frac{f_k^2 R_1^2 \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^k}{2k(k+1) \left[(\sigma_1 - \sigma_2) \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^k + (\sigma_1 + \sigma_2) \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k \right]}, \quad (3.35)$$

$$c_k^1 = a_k^1 R_2^{2k} = \frac{f_k^1 R_1^2 (R_1 R_2)^k}{2k(k+1) \left[(\sigma_1 - \sigma_2) \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^k + (\sigma_1 + \sigma_2) \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k \right]}, \quad (3.36)$$

$$d_k^1 = b_k^1 R_2^{2k} = \frac{f_k^2 R_1^2 (R_1 R_2)^k}{2k(k+1) \left[(\sigma_1 - \sigma_2) \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^k + (\sigma_1 + \sigma_2) \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k \right]}. \quad (3.37)$$

Con estos coeficientes se encuentra la solución del Problema III.

Ahora, sustituyendo (3.34) y (3.36) en (3.24),

$$\tilde{a}_k = \frac{f_k^1 R_1^2 \left[\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^k + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k \right]}{2k(k+1) \left[(\sigma_1 - \sigma_2) \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^k + (\sigma_1 + \sigma_2) \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k \right]}. \quad (3.38)$$

Y sustituyendo (3.35) y (3.37) en (3.25),

$$\tilde{b}_k = \frac{f_k^2 R_1^2 \left[\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^k + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k \right]}{2k(k+1) \left[(\sigma_1 - \sigma_2) \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^k + (\sigma_1 + \sigma_2) \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k \right]}. \quad (3.39)$$

Así, con estos coeficientes se tiene la solución al Problema II.

Lo que sigue es hallar

$$u_2|_{S_2} = V(\theta), \quad (3.40)$$

donde

$$V(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} [V_k^1 \cos k\theta + V_k^2 \sen k\theta]$$

es el potencial sobre S_2 generado por la fuente $f(r, \theta)$ en Ω_1 . Por (3.40) se tiene que

$$V_k^1 = \frac{f_k^1 R_1^2 R_1^k}{k(k+1) \left[(\sigma_1 - \sigma_2) \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^k + (\sigma_1 + \sigma_2) \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^k \right]} \quad (3.41)$$

y

$$V_k^2 = \frac{f_k^2 R_1^2 R_1^k}{k(k+1) \left[(\sigma_1 - \sigma_2) \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^k + (\sigma_1 + \sigma_2) \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^k \right]}. \quad (3.42)$$

3.2.1. Solución del problema inverso electroencefalográfico

Despejando f_k^1 y f_k^2 de (3.41) y (3.42), respectivamente, se obtiene

$$f_k^1 = \frac{k(k+1)}{R_1^{k+2}} \left[(\sigma_1 - \sigma_2) \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^k + (\sigma_1 + \sigma_2) \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^k \right] V_k^1$$

y

$$f_k^2 = \frac{k(k+1)}{R_1^{k+2}} \left[(\sigma_1 - \sigma_2) \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^k + (\sigma_1 + \sigma_2) \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^k \right] V_k^2.$$

Por lo tanto, dada $V(\theta)$ sobre S_2 , la única fuente armónica f en Ω_1 que reproduce V sobre S_2 es:

$$f(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{R_1^2} \left(\frac{r}{R_1} \right)^k \left[(\sigma_1 - \sigma_2) \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^k + (\sigma_1 + \sigma_2) \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^k \right] (V_k^1 \cos k\theta + V_k^2 \sen k\theta).$$

3.3. Solución del problema de la fuente del PIES

Considérese el problema de la fuente

$$-\sigma_1 \Delta \hat{u} = f, \quad \text{en } \Omega_1 \quad (3.43)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{n}} = 0, \quad \text{en } S_1, \quad (3.44)$$

con el dato adicional

$$\hat{u} = \hat{\varphi} = \varphi - v|_{S_1}, \quad (3.45)$$

donde $\varphi = u_2|_{S_1}$ y v es solución del problema

$$-\sigma_1 \Delta v = 0, \quad \text{en } \Omega_1, \quad (3.46)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial v}{\partial \hat{n}} = \psi, \quad \text{en } S_1, \quad (3.47)$$

con $\psi = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial \hat{n}}|_{S_1}$, donde u_2 es solución al problema de Cauchy y que está dada por (3.23) con los coeficientes (3.34), (3.35), (3.36) y (3.37). De manera que

$$\varphi = u_2|_{S_1} = \sum_{k=1}^{\infty} [a_k^1 R_1^k \cos k\theta + b_k^1 R_1^k \sen k\theta + c_k^1 R_1^{-k} \cos k\theta + d_k^1 R_1^{-k} \sen k\theta]. \quad (3.48)$$

Para resolver el problema (3.46)-(3.47), se propone como solución

$$v(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} [\bar{a}_k r^k \cos k\theta + \bar{b}_k r^k \sen k\theta] \quad (3.49)$$

y

$$\psi(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} [\psi_k^1 \cos k\theta + \psi_k^2 \sen k\theta].$$

Como

$$\sigma_1 \frac{\partial v}{\partial \hat{n}} \Big|_{S_1} = \sum_{k=1}^{\infty} [\sigma_1 \bar{a}_k k R_1^{k-1} \cos k\theta + \sigma_1 \bar{b}_k k R_1^{k-1} \sen k\theta]$$

y por la condición (3.47) se obtiene que

$$\bar{a}_k = \frac{\psi_k^1}{\sigma_1 k R_1^{k-1}}$$

y

$$\bar{b}_k = \frac{\psi_k^2}{\sigma_1 k R_1^{k-1}}.$$

Por lo tanto, con estos coeficientes \bar{a}_k y \bar{b}_k se obtiene la solución al problema (3.46)-(3.47).

Así, sustituyendo (3.48) y (3.49) restringido a S_1 en (3.45), se obtiene el dato adicional

$$\begin{aligned} \hat{u}(r, \theta) &= \hat{\varphi} \\ &= \varphi - v|_{S_1} \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} [a_k^1 R_1^k \cos k\theta + b_k^1 R_1^k \sen k\theta + c_k^1 R_1^{-k} \cos k\theta + d_k^1 R_1^{-k} \sen k\theta] \right\} \\ &\quad - \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} [\bar{a}_k R_1^k \cos k\theta + \bar{b}_k R_1^k \sen k\theta] \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [(a_k^1 R_1^k + c_k^1 R_1^{-k} - \bar{a}_k R_1^k) \cos k\theta + (b_k^1 R_1^k + d_k^1 R_1^{-k} - \bar{b}_k R_1^k) \sen k\theta]. \end{aligned}$$

Por otro lado, para resolver el problema (3.43)-(3.44) se propone como solución

$$\hat{u}(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} [\hat{a}_k r^k \cos k\theta + \hat{b}_k r^k \sen k\theta + \hat{c}_k r^{k+2} \cos k\theta + \hat{d}_k r^{k+2} \sen k\theta] \quad (3.50)$$

y como fuente

$$f(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} [f_k^1 r^k \cos k\theta + f_k^2 r^k \sen k\theta]. \quad (3.51)$$

Calculando el Laplaciano de (3.50) y multiplicando por $-\sigma_1$ se obtiene

$$-\sigma_1 \Delta \hat{u} = \sum_{k=1}^{\infty} -\sigma_1 [4(k+1)\hat{c}_k r^k \cos k\theta + 4(k+1)\hat{d}_k r^k \sen k\theta]. \quad (3.52)$$

Igualando las ecuaciones (3.52) y (3.51), según la condición (3.43), se obtiene que

$$\hat{c}_k = -\frac{f_k^1}{4(k+1)\sigma_1}$$

y

$$\hat{d}_k = -\frac{f_k^2}{4(k+1)\sigma_1}.$$

Ahora, puesto que

$$\sigma_1 \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{n}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sigma_1 [\hat{a}_k k R_1^{k-1} + \hat{c}_k (k+2) R_1^{k+1}] \cos k\theta + \sigma_1 [\hat{b}_k k R_1^{k-1} + \hat{d}_k (k+2) R_1^{k+1}] \sen k\theta \right\}$$

y por la condición (3.44), se igualan los coeficientes a cero y, se obtiene que

$$\hat{a}_k = -\frac{\hat{c}_k (k+2) R_1^{k+1}}{k R_1^{k-1}}$$

y

$$\hat{b}_k = -\frac{\hat{d}_k (k+2) R_1^{k+1}}{k R_1^{k-1}}.$$

Por lo tanto, con estos coeficientes se tiene la solución al problema (3.43)-(3.44).

Capítulo 4

Solución numérica del problema de detección de fuentes volumétricas.

En este capítulo se presentan los resultados numéricos de la implementación del algoritmo del MGC para la solución del problema de detección de la fuente, para esto se consideran dos fuentes distintas, una sobre una región circular y la otra para diferentes regiones: circular, elíptica e irregular. También se analizan los resultados al agregar ruido a los datos para analizar la estabilidad del método.

4.1. Ejemplo 1: Problema de detección de la fuente $f(x, y) = x^2 - y^2$ en una región circular.

Considérese en el problema (3.43)-(3.44) la fuente $f(x, y) = x^2 - y^2$, o bien en coordenadas polares

$$f(r, \theta) = r^2 \cos 2\theta.$$

Es decir, se consideran $k = 2$, $f_k^1 = 1$ y $f_k^2 = 0$ en (3.51). Además, supongamos que Ω_1 y Ω_2 son dos círculos concéntricos de radios $R_1 = 1$ y $R_2 = 1.2$, respectivamente. Los valores de la conductividades están dadas por $\sigma_1 = 3$ y $\sigma_2 = 1$.

Por lo tanto, con estos parámetros en (3.50) se obtiene la solución

$$\hat{u}(r, \theta) = (\hat{a}_2 r^2 + \hat{c}_2 r^4) \cos 2\theta$$

donde

$$\hat{a}_2 = -\frac{4\hat{c}_2 R_1^3}{2R_1}$$

y

$$\hat{c}_2 = -\frac{f_2^1}{12\sigma_1}.$$

En coordenadas cartesianas

$$\hat{u}(x, y) = \hat{a}_2(x^2 - y^2) + \hat{c}_2(x^2 + y^2)(x^2 - y^2).$$

De modo que

$$\widehat{\varphi}(x, y) = \widehat{u}(x, y)|_{S_1} = [\widehat{a}_2 + \widehat{c}_2 R_1^2](x^2 - y^2). \quad (4.1)$$

Para implementar el algoritmo del MGC descrito en la Sección 2.2.2 en la solución del problema de detección de la fuente volumétrica, se usan tres mallas triangulares diferentes de una región circular de radio 1, las cuales se generan con la toolbox *pdetool* de *MATLAB*: malla inicial MI con 146 nodos y 258 elementos como se muestra en la figura 4.1; malla R1 la cual es un refinamiento regular de la malla inicial MI con 549 nodos y 1032 elementos; malla R2 correspondiente a un segundo refinamiento con 2129 nodos y 4128 elementos. En la figura 4.1 se muestra la malla MI.

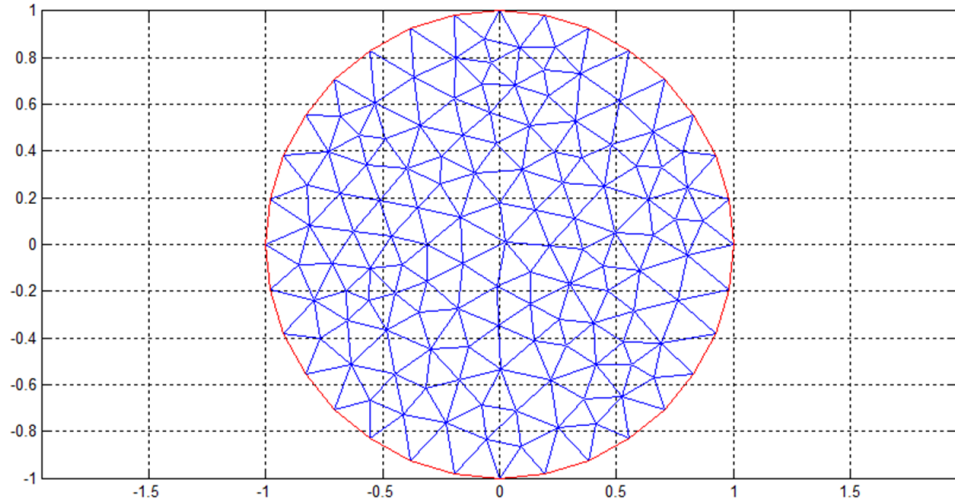


Figura 4.1: Malla inicial MI con 146 nodos y 258 elementos.

En la Tabla 4.1 se muestran los resultados numéricos, utilizando las mallas descritas anteriormente y el dato $\widehat{\varphi}$ en 4.1. Para obtener estos resultados, se considera una tolerancia de $\varepsilon = 7 \times 10^{-6}$ para parar el MGC con un parámetro de penalización $k = 10^{23}$. Los resultados que se muestran en la tabla son los siguientes errores relativos: $ER(\widehat{u}_h^n, \widehat{u}) = \frac{\|\widehat{u}_h^n - \widehat{u}\|_{L_2(\Omega_1)}}{\|\widehat{u}\|_{L_2(\Omega_1)}}$,

$$ER(B(f_h^n), \widehat{\varphi}) = \frac{\|B(f_h^n) - \widehat{\varphi}\|_{L_2(S_1)}}{\|\widehat{\varphi}\|_{L_2(S_1)}}, \text{ donde } B(f) := \widehat{u}|_{S_1} = \widehat{\varphi} \text{ y } ER(f_h^n, f) = \frac{\|f_h^n - f\|_{L_2(S_1)}}{\|f\|_{L_2(S_1)}}.$$

	Malla MI	Malla R1	Malla R2
n	3	3	2
$ER(\widehat{u}_h^n, \widehat{u})$	5.2121e-3	3.9419e-3	2.3317e-3
$ER(B(f_h^n), \widehat{\varphi})$	4.9905e-3	4.3192e-3	4.2299e-3
$ER(f_h^n, f)$	9.8883e-3	6.3465e-3	2.7197e-3

Tabla 4.1: Errores relativos para distintos refinamiento de la malla MI, con n el número de iteraciones, $k = 10^{23}$ y $\varepsilon = 7 \times 10^{-6}$.

La figura 4.2 ilustra la gráfica del potencial exacto sobre S_1 y de sus aproximaciones \widehat{u}_h^n para diferentes mallas donde n es el número de iteraciones. No se observa diferencia significativa entre la aproximación obtenida con la malla MI y el resto con respecto al potencial exacto debido a que el mayor error relativo, cuando se usa la malla inicial MI, es sólo 0.52 % aproximadamente.

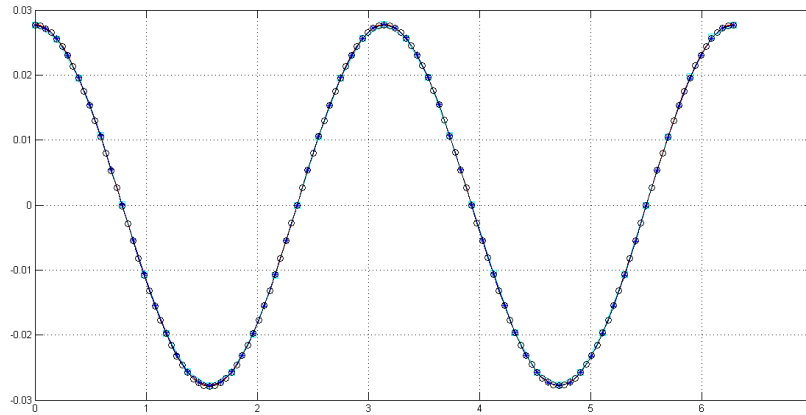


Figura 4.2: Gráficas de la solución exacta $\widehat{u}(\theta)(-)$ sobre S_1 y de sus aproximaciones en las distintas mallas MI($\square-$), R1($*-$) y R2($o-$).

En las figuras 4.3 y 4.4 se muestran los resultados gráficos del potencial exacto \widehat{u} y aproximado \widehat{u}_h^n sobre Ω_1 en la malla R2, así como la fuente exacta f y la aproximada f_h^n , respectivamente.

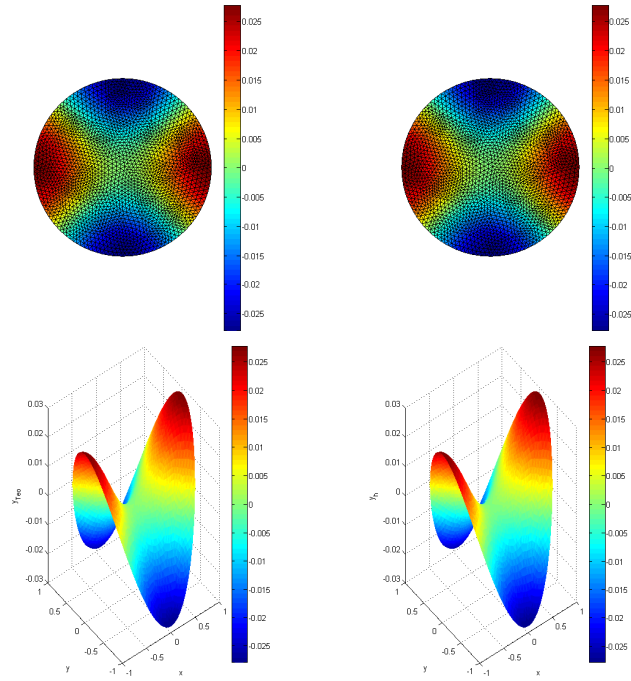


Figura 4.3: Gráfica del potencial exacto (lado izquierdo) y aproximado (lado derecho) sobre Ω_1 , en la malla R2 con $k = 10^{23}$ y $\varepsilon = 7 \times 10^{-6}$

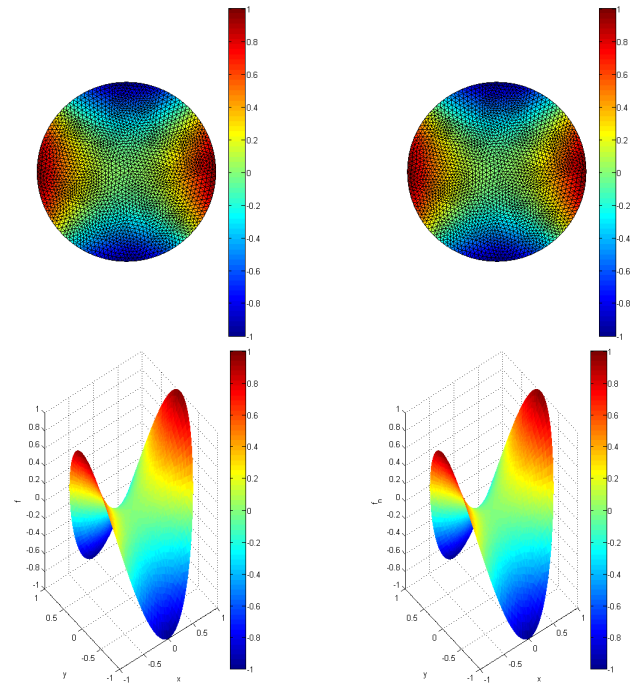


Figura 4.4: Gráfica de la fuente exacta (lado izquierdo) y la aproximada (lado derecho) sobre Ω_1 , en la malla R2 con $k = 10^{23}$ y $\varepsilon = 7 \times 10^{-6}$.

Debido a que los errores relativos obtenidos con las dos últimas mallas son muy cercanos,

será suficiente usar la malla R2 para hacer experimentos numéricos con diferentes datos perturbados. Para agregar el ruido, se generan valores aleatorios de una distribución normal $N(\mu, \sigma)$ usando la función *random* de MATLAB la cual tiene media $\mu = 0$ y desviación estándar

$$\sigma = \delta \max |\widehat{\varphi}|,$$

donde δ es el error en la medición. Una vez generados estos valores aleatorios, se suman a la función $\widehat{\varphi}$ para obtener los datos con ruido,

$$\widehat{\varphi}_\delta = \widehat{\varphi} + Error, \quad (4.2)$$

donde

$$Error = random('Normal', \mu, \sigma, 1, m)$$

es un vector de números aleatorios de tamaño m (número de nodos sobre S_1) con una distribución normal.

Cabe mencionar que se usará interpolación de los datos con ruido $\widehat{\varphi}_\delta$ de la malla inicial MI al segundo refinamiento R2 con la finalidad de determinar el ruido en los puntos que están sobre S_1 del segundo refinamiento de la malla inicial, esto debido a que el problema es mal planteado y para que exista solución se debe cumplir la condición de suavidad en los datos de entrada. Para interpolar los datos se usa la función *interp1* de MATLAB la cual, en este caso, usa el algoritmo de interpolación por splines cúbicos. Los diferentes datos $\widehat{\varphi}_\delta$ se calculan con $\delta = 0.01, 0.08, 0.1$ y 0.16 en (4.2), cuyos valores dan origen a las desviaciones relativas $ER(\widehat{\varphi}_\delta, \widehat{\varphi}) = \frac{\|\widehat{\varphi} - \widehat{\varphi}_\delta\|_{L_2(S_1)}}{\|\widehat{\varphi}\|_{L_2(S_1)}}$, como se muestra en la tabla 4.2. En dicha tabla se observa que conforme el 'ruido' δ disminuye, la solución numérica converge a la solución sin ruido. Se puede observar también que los efectos de las perturbaciones en el potencial $\widehat{u}_h^{n,\delta}$ son menores que las desviaciones relativas $ER(\widehat{\varphi}_\delta, \widehat{\varphi})$ producidas por el ruido, es decir, al agregar ruido en los datos no se amplifican los errores en la solución.

δ	0	0.01	0.08	0.1	0.16
$ER(\widehat{\varphi}_\delta, \widehat{\varphi})$	0	1.0262e-2	1.0677e-1	1.5177e-1	2.5465e-1
n	1	2	3	2	2
$ER(\widehat{u}_h^{n,\delta}, \widehat{u})$	2.3126e-3	4.1289e-3	2.6265e-2	3.7220e-2	6.8302e-2
$ER(B(f_h^{n,\delta}), \widehat{\varphi})$	3.6185e-3	5.2268e-3	2.3830e-2	3.7939e-2	6.6385e-2
$ER(f_h^{n,\delta}, f)$	2.5735e-3	4.9788e-3	2.7180e-2	4.9081e-2	6.4984e-2

Tabla 4.2: Errores relativos para diferentes datos perturbados $\widehat{\varphi}_\delta$ en la malla R2 de la región circular de radio uno, n representa el número de iteraciones, $k = 10^{23}$ y $\varepsilon = 7 \times 10^{-4}$.

Para ilustrar mejor el comportamiento de las soluciones bajo perturbaciones, en la figura 4.5 se muestra el potencial exacto \widehat{u} sobre S_1 junto con los potenciales recuperados con ruido $\widehat{u}_h^{n,\delta}$ para los distintos valores de δ .

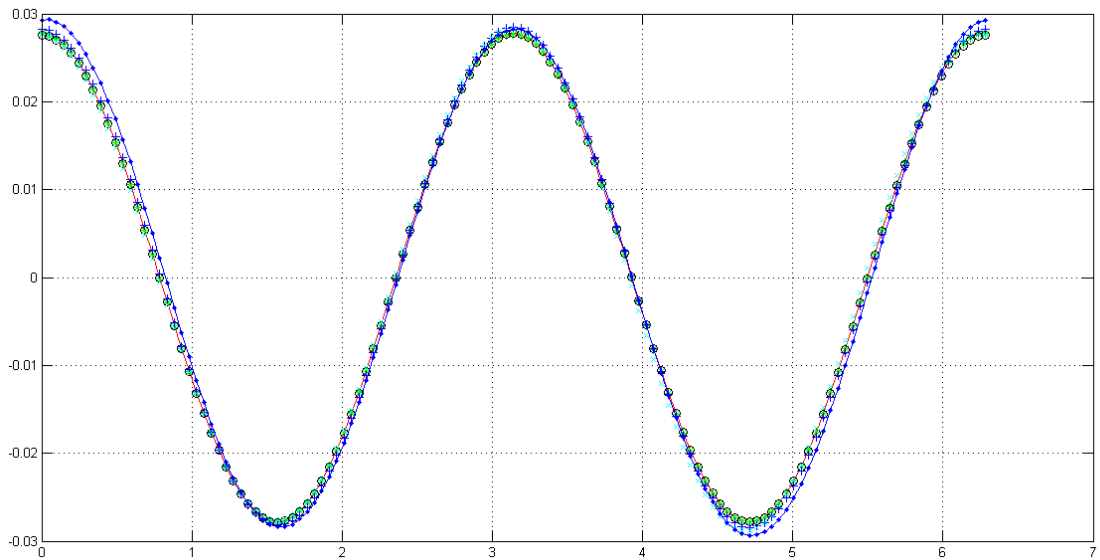


Figura 4.5: Gráfica de la solución exacta $\hat{u}(\theta)(-)$ y de las soluciones aproximadas $\hat{u}_h^{n,\delta}(\theta)$ sobre S_1 para $\delta = 0(*-)$, $\delta = 0.01(o-)$, $\delta = 0.08(+ -)$, $\delta = 0.1(x-)$, $\delta = 0.16(.-)$, utilizando la malla R2 de la región circular.

En particular, en la figura 4.6 se muestran las gráficas de $\hat{\varphi}$ y $\hat{\varphi}_h^{n,\delta}$ sobre S_1 , con $\delta = 0.16$ (la mayor perturbación en los datos) y en la figura 4.7 se muestra la solución que se recupera con el método sobre S_1 .

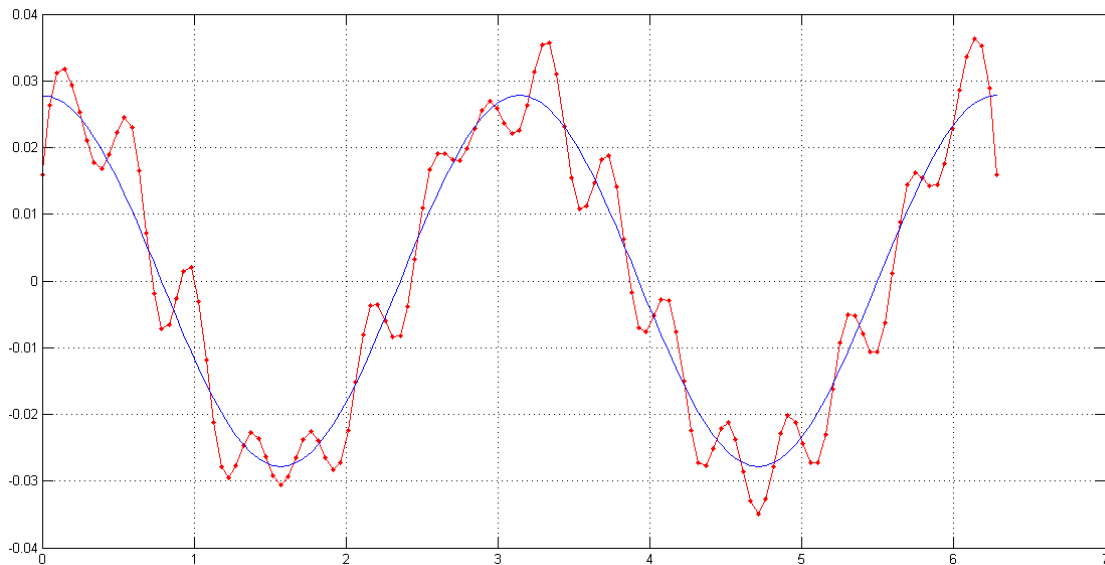


Figura 4.6: Gráficas de la medición exacta $\hat{\varphi}(\theta)$ $(-)$ y con error $\hat{\varphi}_\delta(\theta)$ $(.-)$ para $\delta = 0.16$.

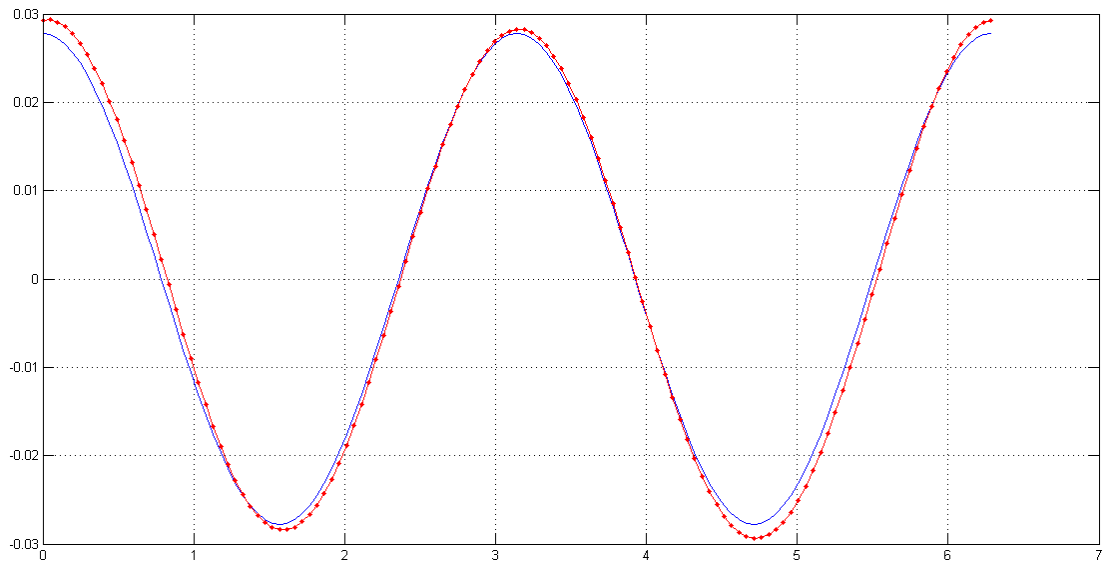


Figura 4.7: Gráfica de la solución exacta $\widehat{u}(\theta)(-)$ y de la solución aproximada $\widehat{u}_h^{n,\delta}(\theta)(-)$ sobre S_1 para $\delta = 0.16$.

Las figuras 4.8 y 4.9 muestran los potenciales y fuentes exactas y recuperadas sobre el círculo Ω_1 para el caso en que $\delta = 0.16$ en la malla R2.

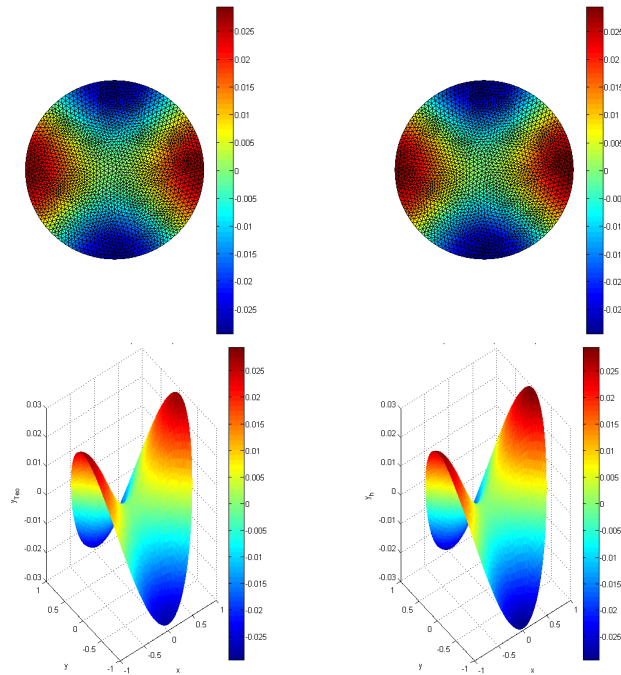


Figura 4.8: Gráfica del potencial exacto (lado izquierdo) y aproximado (lado derecho) sobre Ω_1 , en la malla R2 con $k = 10^{23}$, $\varepsilon = 7 \times 10^{-4}$ y $\delta = 0.16$.

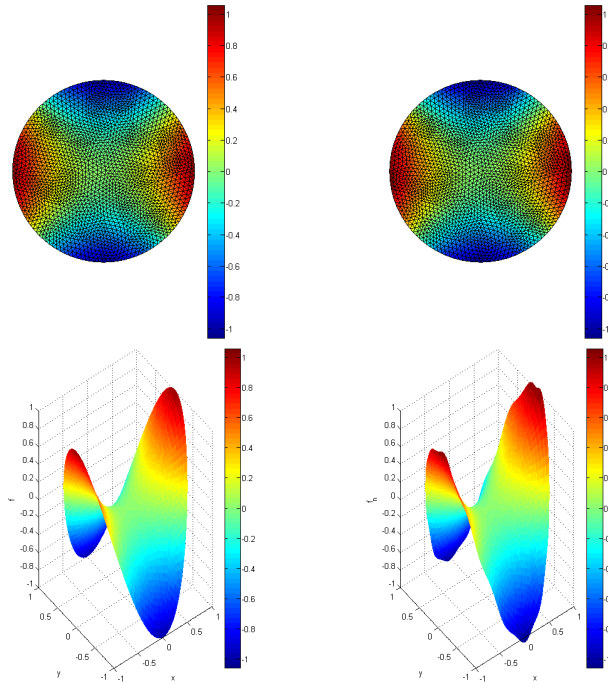


Figura 4.9: Gráfica de la fuente exacta (lado izquierdo) y la aproximada (lado derecho) sobre Ω_1 , en la malla R2 con $k = 10^{23}$, $\varepsilon = 7 \times 10^{-4}$ y $\delta = 0.16$.

El comportamiento de las soluciones en este ejemplo muestra que el método produce soluciones convergentes que son estables respecto a las perturbaciones en los datos. Además la propagación del error en las soluciones son de un orden menor que los errores en las mediciones.

4.2. Ejemplo 2: Problema de detección de la fuente

$$f(x, y) = \exp(x) \operatorname{sen}(y).$$

A continuación se muestran los resultados de aplicar la metodología del problema anterior considerando como fuente a $f(x, y) = \exp(x) \operatorname{sen}(y)$ con $(x, y) \in \Omega_1$ y se puede expresar en coordenadas polares como $f(r, \theta) = \exp(r \cos \theta) \operatorname{sen}(r \operatorname{sen} \theta)$ con $0 \leq r \leq R_1$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$, pero a diferencia del problema anterior, se mostrarán los resultados numéricos de convergencia y estabilidad para tres regiones distintas de Ω_1 : una región circular, una elíptica y una irregular (poligonal), esto se hará con la finalidad de validar el método. Otra diferencia es que ahora se considerará como solución 'exacta' u a la solución numérica en la región elíptica y en la irregular.

4.2.1. Región circular.

En esta subsección se considera una región circular Ω_1 de radio 1 como en el ejemplo anterior. La fuente en la frontera se define por $f(x, y) = \exp(x) \operatorname{sen}(y)$ con $(x, y) \in \Omega_1$. En este caso para hallar la solución 'exacta' del problema de detección de la fuente \hat{u} y los 'datos

exactos' $\widehat{\varphi} = \widehat{u}|_{S_1}$ se obtiene considerando 9 términos de la serie de Fourier, debido a que en este caso el error de aproximación entre f y su serie truncada es 1.2693×10^{-2} en la norma $L_2(\Omega_1)$. Los coeficientes de Fourier de f se calculan numéricamente usando la función *quadl* de MATLAB. Se consideran las tres mallas del ejemplo anterior para analizar la convergencia del método y los resultados que se obtienen, con una tolerancia de $\varepsilon = 5 \times 10^{-4}$ y penalización de $k = 10^{20}$, son los que se muestran en la tabla 4.3. Los resultados muestran que \widehat{u}_h^n y f_h^n convergen a las soluciones exactas conforme se refina la malla.

	Malla MI	Malla R1	Malla R2
n	4	3	3
$ER(\widehat{u}_h^n, \widehat{u})$	5.2407e-2	1.7821e-2	1.4136e-2
$ER(B(f_h^n), \widehat{\varphi})$	5.6859e-2	2.1308e-2	2.0835e-2
$ER(f_h^n, f)$	1.8451e-1	1.1838e-1	1.0306e-1

Tabla 4.3: Errores relativos para distintas mallas en una región circular para la fuente $f(x, y) = \exp(x) \sin(y)$ donde n representa el número de iteraciones, $k = 10^{20}$, $\varepsilon = 5 \times 10^{-4}$.

En la figura (4.10) se muestra la gráfica de la solución aproximada con las tres mallas sobre la frontera S_1 junto con la solución 'exacta' \widehat{u} . La diferencia entre las mallas R1 y R2 es indistinguible debido a que sus diferencias relativas son de aproximadamente 1 %.

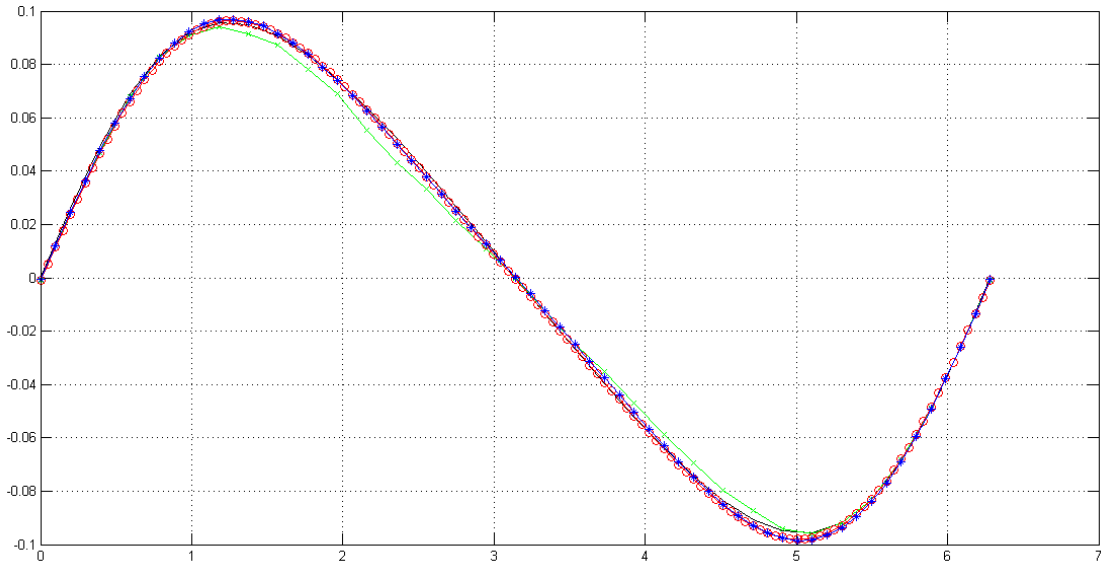


Figura 4.10: Gráfica de la 'solución exacta' $\widehat{u}(\theta)(-)$ y de las soluciones aproximadas para las mallas MI (x-), R1 (*-), R2 (o-), sobre S_1 , de la región circular con $f(x, y) = \exp(x) \sin(y)$.

Análogamente que en el ejemplo anterior, se elige la malla R2 para realizar experimentos con perturbaciones $\widehat{\varphi}_\delta$ en los datos de entrada. La tabla 4.4 muestra los resultados numéricos obtenidos. Nuevamente, los errores relativos de la solución son menores o igual que el orden de la perturbación en los datos. Conforme disminuye la perturbación δ , la solución numérica converge a la solución numérica sin perturbación. Por lo tanto, en este caso también se

ha obtenido convergencia de las soluciones respecto a la discretización y estabilidad en los resultados numéricos respecto de las perturbaciones en los datos.

δ	0	0.01	0.08	0.16
$ER(\widehat{\varphi}_\delta, \widehat{\varphi})$	0	1.1666e-2	1.0082e-1	2.1578e-1
n	3	2	3	3
$ER(\widehat{u}_h^{n,\delta}, \widehat{u})$	1.4136e-2	1.9544e-2	2.2369e-2	8.2446e-2
$ER(B(f_h^{n,\delta}), \widehat{\varphi})$	2.0835e-2	2.3093e-2	2.7575e-2	8.8190e-2
$ER(f_h^{n,\delta}, f)$	1.0306e-1	1.0951e-1	1.2682e-1	1.5635e-2

Tabla 4.4: Errores relativos para distintos datos perturbados en una región circular para la fuente $f(x, y) = \exp(x) \sin(y)$ con diferentes datos perturbados $\widehat{\varphi}_\delta$. Malla R2 para la región circular de radio uno, n representa el número de iteraciones, $k = 10^{20}$ y $\varepsilon = 4 \times 10^{-4}$.

En la figura 4.11 se muestra el potencial 'exacto' \widehat{u} sobre S_1 junto con el recuperado $\widehat{u}_h^{n,\delta}$ cuando los datos tiene ruido.

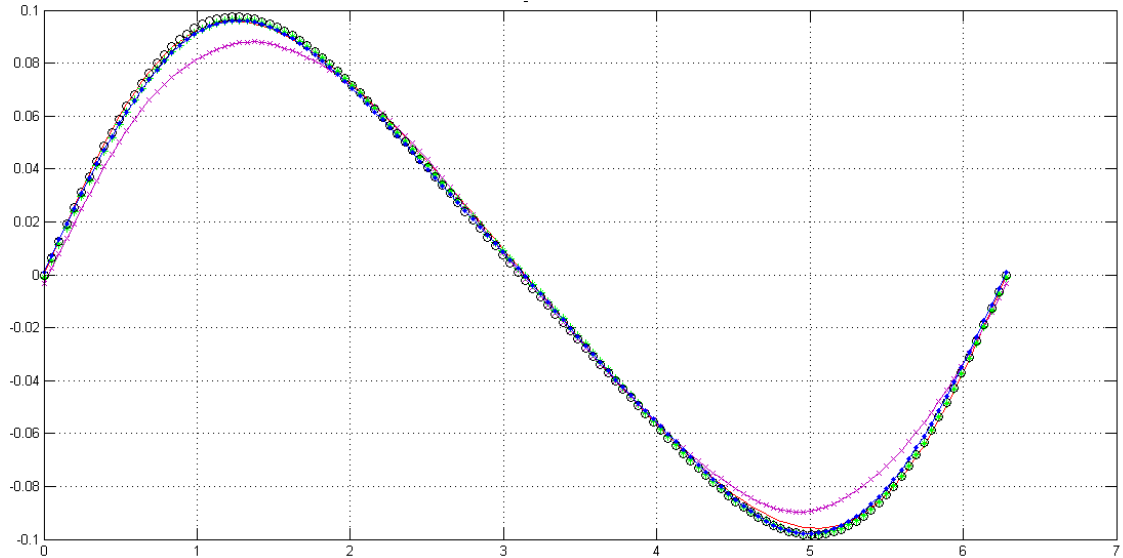


Figura 4.11: Gráfica de la 'solución exacta' $\widehat{u}(\theta)(-)$ y de las soluciones aproximadas $\widehat{u}_h^{n,\delta}(\theta)$ para $\delta = 0(*-)$, $\delta = 0.01(o-)$, $\delta = 0.08(-)$, $\delta = 0.1(x-)$, $\delta = 0.16(-)$, utilizando la malla R2 en la región circular con $f(x, y) = \exp(x) \sin(y)$, $k = 10^{20}$ y $\varepsilon = 4 \times 10^{-4}$.

En particular, en la figura 4.12 se muestra la gráfica de \widehat{u} y \widehat{u}_δ sobre S_1 , cuando $\delta = 0.16$ y en la figura 4.13 se muestra la solución exacta y la que se recupera con el método sobre S_1 .

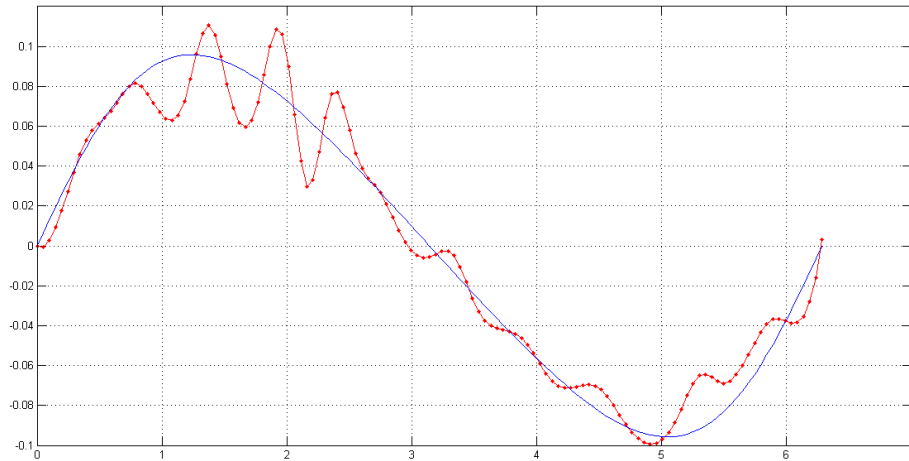


Figura 4.12: Gráficas de la medición exacta $\hat{\varphi}(\theta)$ (—) y con error $\hat{\varphi}_\delta(\theta)$ (.-), $\delta = 0.16$ para la fuente $f(x, y) = \exp(x) \operatorname{sen}(y)$ sobre el círculo, $k = 10^{20}$ y $\varepsilon = 4 \times 10^{-4}$

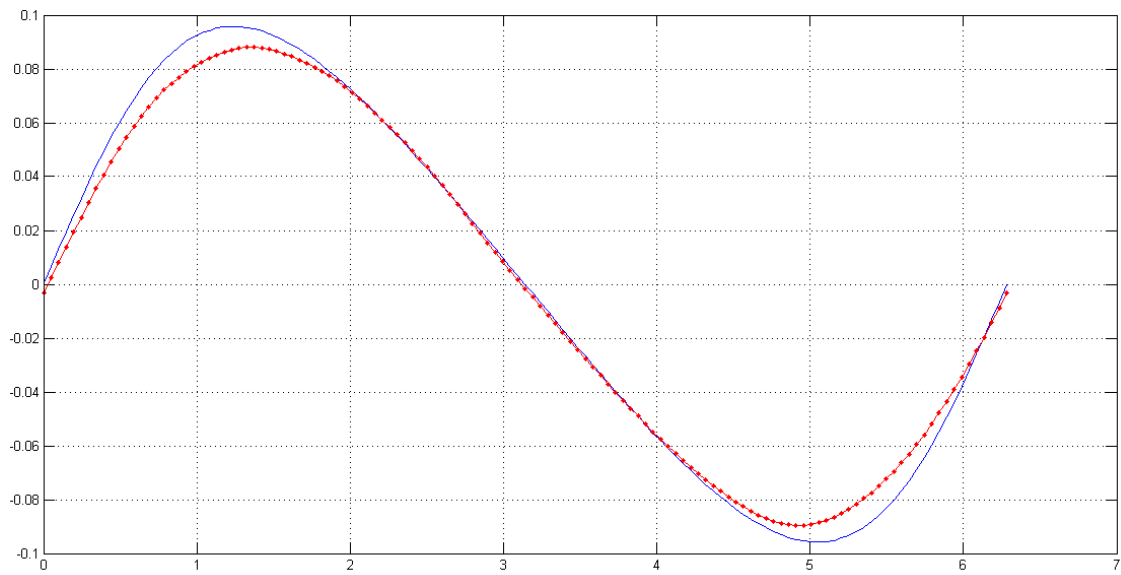


Figura 4.13: Gráfica de la solución 'exacta' $\hat{u}(\theta)$ (—) y de la solución aproximada $\hat{u}^{n,\delta}(\theta)$ (.-) para $\delta = 0.16$ con la fuente $f(x, y) = \exp(x) \operatorname{sen}(y)$ sobre el círculo, $k = 10^{20}$ y $\varepsilon = 4 \times 10^{-4}$.

Finalmente, las figuras 4.14 y 4.15 muestran gráficas de la solución exacta \hat{u} y de la solución numérica cuando $\delta = 0.16$, así como la fuente exacta f y la que se encuentra con el método f_h^n , respectivamente.

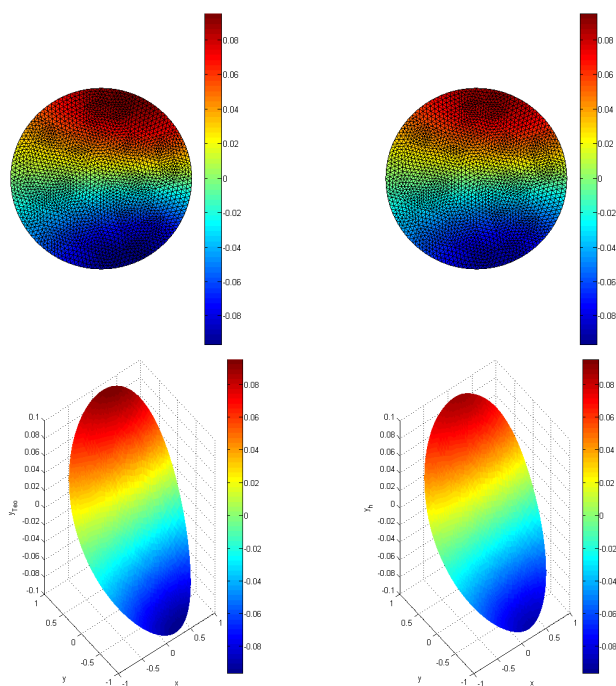


Figura 4.14: Gráfica del potencial exacto (lado izquierdo) y aproximado (lado derecho), en la malla R2 con $k = 10^{20}$, $\varepsilon = 4 \times 10^{-4}$ y $\delta = 0.16$.

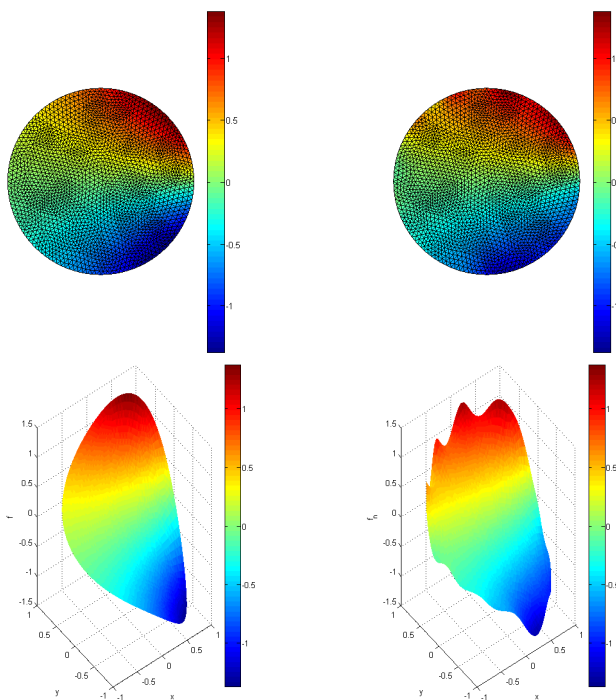


Figura 4.15: Gráfica de la fuente exacta (lado izquierdo) y la aproximada (lado derecho), en la malla R2 con $k = 10^{20}$, $\varepsilon = 4 \times 10^{-4}$ y $\delta = 0.16$.

4.2.2. Región elíptica.

En este ejemplo, se considera una región elíptica Ω_1 con semieje mayor a de magnitud 1.3 y semieje menor b de medida 1. La fuente en la frontera se define por $f(x, y) = \exp(x) \operatorname{sen}(y)$ con $(x, y) \in S_1$. En este caso para hallar la solución del problema de la fuente, la elipse Ω_1 se transforma en un círculo centrado en el origen, usando coordenadas elípticas: $x = ar \cos(\theta)$, $y = br \operatorname{sen}(\theta)$, con $0 \leq r \leq 1$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Se toma como solución 'exacta' u a la solución numérica del problema. Se consideran tres mallas de la región elíptica Ω_1 : malla inicial elíptica MEI con 117 nodos y 200 elementos, la segunda malla se obtiene del primer refinamiento regular RE1 de la MEI con 433 nodos y 800 nodos y un segundo refinamiento RE2 con 1665 nodos y 3200 elementos. En la figura 4.16 se muestra la malla inicial de la elipse.

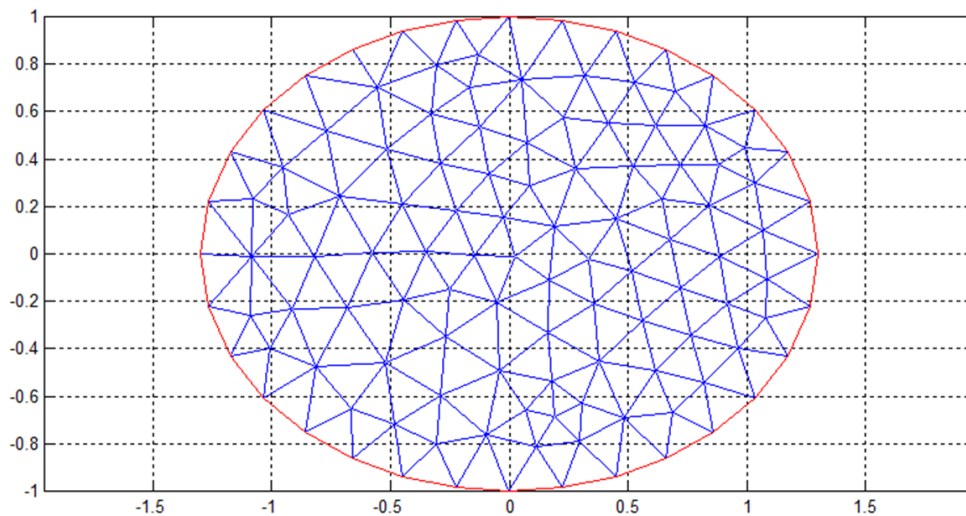


Figura 4.16: Malla inicial MEI con 117 nodos y 200 elementos.

En la tabla 4.5 se muestran los resultados numéricos de los errores relativos de la solución para las mallas mencionadas anteriormente. En la tabla se puede observar que conforme se refina la malla el método converge a la solución.

	Malla EI	Malla RE1	Malla RE2
n	4	2	2
$ER(u_h^n, u)$	1.0023e-1	4.7467e-2	3.1514e-2
$ER(B(f_h^n), \hat{\varphi})$	9.6900e-2	5.3665e-2	3.7652e-2
$ER(f_h^n, f)$	1.3388e-1	1.2796e-1	1.2078e-1

Tabla 4.5: Errores relativos para distintas mallas en una región elíptica para la fuente $f(x, y) = \exp(x) \operatorname{sen}(y)$ donde n representa el número de iteraciones, $k = 10^{20}$, $\varepsilon = 8 \times 10^{-3}$.

En la figura 4.17 se pueden ver las gráficas de la solución 'exacta' u y las aproximadas u_h^n para las diferentes mallas sobre S_1

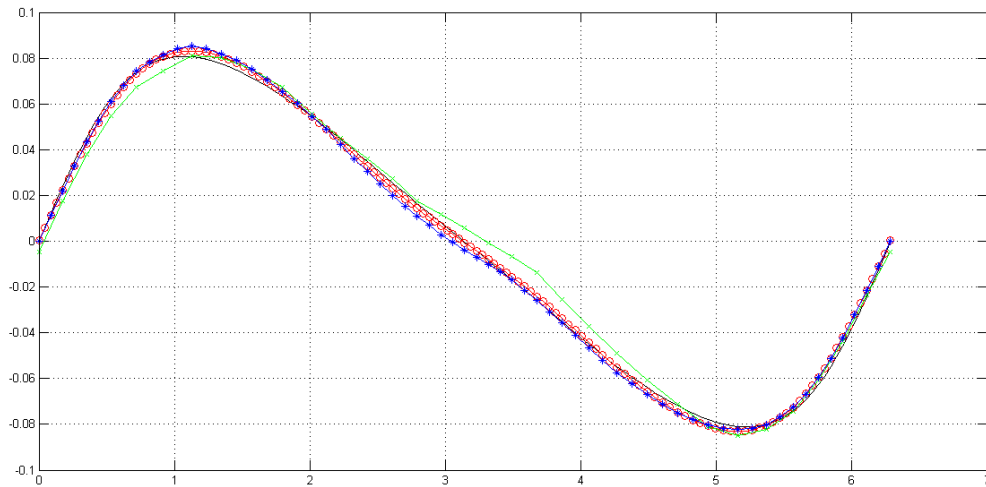


Figura 4.17: Gráficas de la solución exacta y de las soluciones aproximadas sobre S_1 para las mallas EI (x-), RE1 (*-), RE2 (o-), sobre S_1 , de la región elíptica con $f(x, y) = \exp(x) \sin(y)$.

Ahora, para observar la estabilidad del método se perturban los datos obteniendo los resultados numéricos en la tabla 4.6 con los parámetros $k = 10^{20}$ y $\varepsilon = 8 \times 10^{-4}$. Se puede observar en dicha tabla que los errores relativos de la solución 'exacta' u y la aproximada $u_h^{n,\delta}$ son un orden menor o igual que el error que se agrega. De modo que el método también es estable respecto a las perturbaciones en la región elíptica.

δ	0	0.01	0.08	0.16
$ER(\hat{\varphi}_\delta, \hat{\varphi})$	0	1.4238e-2	8.6170e-2	2.0972e-1
n	2	2	3	3
$ER(u_h^{n,\delta}, u)$	3.1514e-2	3.2436e-2	3.3398e-2	4.7592e-2
$ER(B(f_h^{n,\delta}), \hat{\varphi})$	3.7652e-2	3.8734e-2	4.0380e-2	4.9887e-2
$ER(f_h^{n,\delta}, f)$	1.2078e-1	1.2619e-1	1.2798e-1	1.3566e-1

Tabla 4.6: Errores relativos en una región elíptica RE2 para la fuente $f(x, y) = \exp(x) \sin(y)$ con diferentes datos perturbados $\hat{\varphi}_\delta$, n representa el número de iteraciones, $k = 10^{20}$ y $\varepsilon = 8 \times 10^{-4}$.

En la figura 4.18 se puede observar el potencial 'exacto' y los recuperados cuando los datos tiene ruido sobre S_1 .

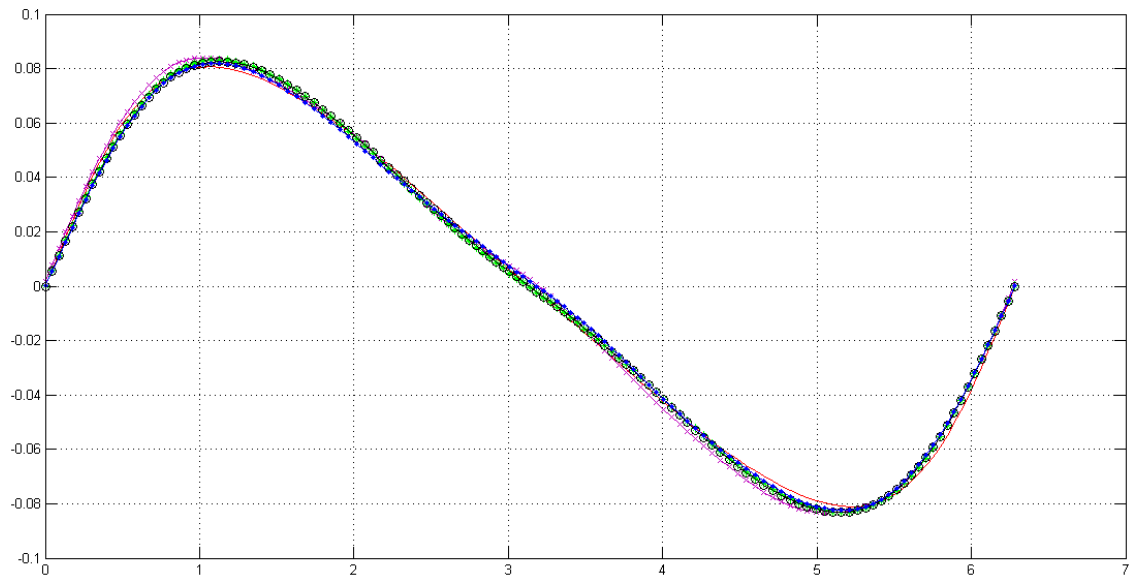


Figura 4.18: Gráfica de la 'solución exacta' $u(\theta)(-)$ y de las soluciones aproximadas $u_h^{n,\delta}(\theta)$ sobre S_1 para $\delta = 0(*-)$, $\delta = 0.01(o-)$, $\delta = 0.08(-)$, $\delta = 0.1(x-)$, $\delta = 0.16(-)$, utilizando la malla R2 en la región elíptica con $f(x, y) = \exp(x) \operatorname{sen}(y)$, $k = 10^{20}$ y $\varepsilon = 8 \times 10^{-4}$.

En la figura 4.19 se muestra la gráfica de $\widehat{\varphi}$ y $\widehat{\varphi}_\delta$ cuando $\delta = 0.16$ y en la figura 4.20 se muestra la solución 'exacta' y la que se recupera con el método sobre S_1 de la región elíptica.

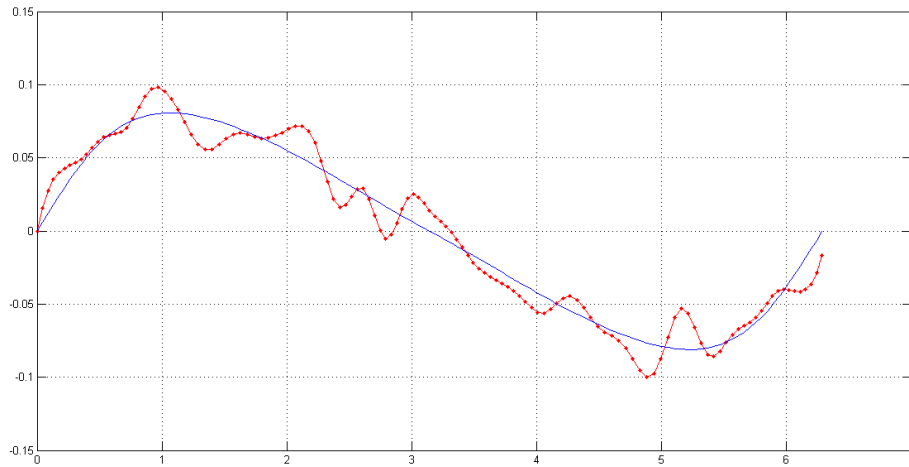


Figura 4.19: Gráficas de la medición exacta $u(\theta)$ (-) y con error $u_h^{n,\delta}(\theta)$ (.-), $\delta = 0.16$, sobre S_1 , para la fuente $f(x, y) = \exp(x) \operatorname{sen}(y)$ sobre el círculo.

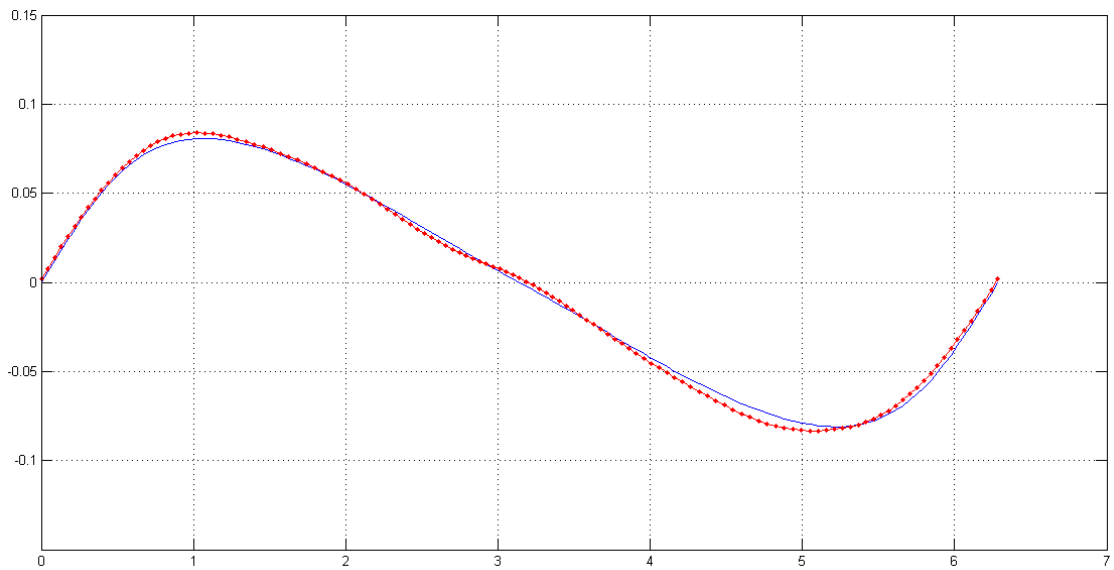


Figura 4.20: Gráfica de la solución 'exacta' $u(\theta)(-)$ y de la solución aproximada $u_h^{n,\delta}(\theta)(-)$ para $\delta = 0.16$ con la fuente $f(x, y) = \exp(x) \sin(y)$ sobre la elipse.

Finalmente, las figuras 4.21 y 4.22 muestran gráficas de la solución 'exacta' u y de la solución aproximada cuando $\delta = 0.16$, así como la fuente exacta f y la que se encuentra con el método, respectivamente.

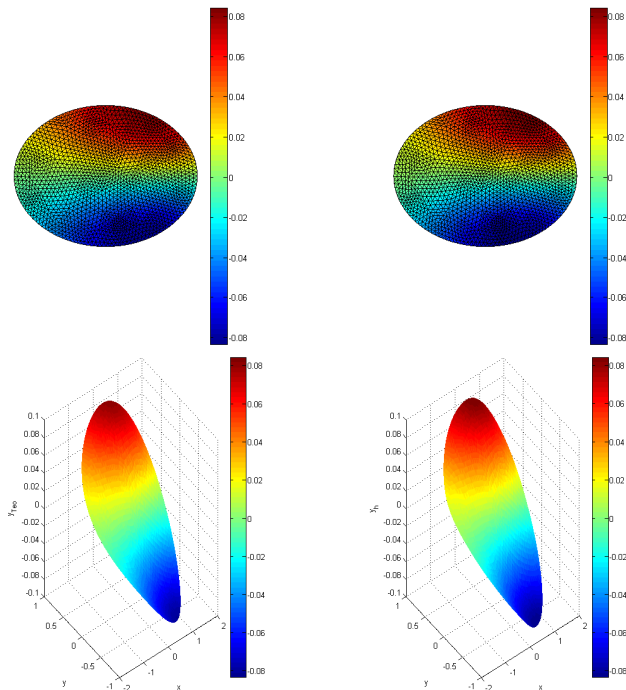


Figura 4.21: Gráfica del potencial exacto (lado izquierdo) y aproximado (lado derecho), en la malla RE2 con $k = 10^{20}$, $\varepsilon = 4 \times 10^{-4}$ y $\delta = 0.16$.

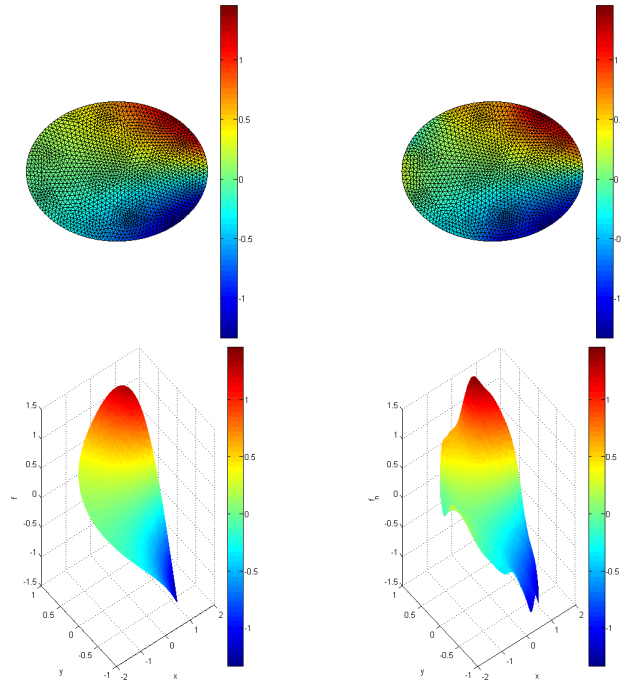


Figura 4.22: Gráfica de la fuente exacta (lado izquierdo) y la aproximada (lado derecho), en la malla RE2 con $k = 10^{20}$, $\varepsilon = 4 \times 10^{-4}$ y $\delta = 0.16$.

Como se pudo observar, en esta región elíptica Ω_1 el método también produce soluciones convergentes que son estables respecto de las perturbaciones en los datos. Además, se pudo notar que la propagación del error en las soluciones es menor o del mismo orden que los errores de las mediciones.

4.2.3. Región irregular.

A continuación se muestran los resultados del ejemplo que se ha venido estudiando pero ahora en una región Ω_1 irregular (poligonal), se consideran tres mallas: una malla inicial MII que consta de 172 nodos y 290 elementos (ver figura 4.23), un primer refinamiento regular RI1 de ésta con 633 nodos y 1160 elementos, y un segundo refinamiento R12 que contiene 2425 nodos y 4640 elementos.

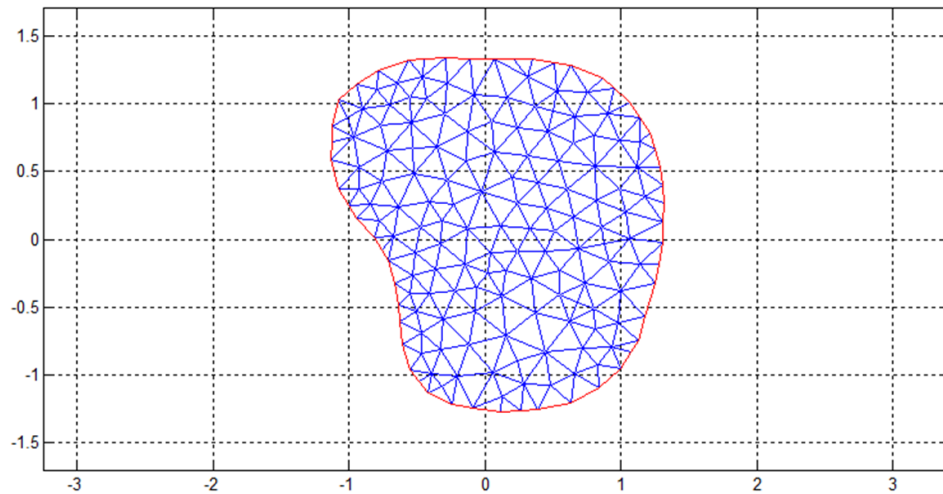


Figura 4.23: Malla inicial irregular MII con 117 nodos y 200 elementos.

La tabla 4.7 muestra los resultados numéricos de convergencia, utilizando las tres mallas que se mencionaron de la región irregular. Para realizar estos cálculos se utilizó una tolerancia ε de 4×10^{-2} y un valor de penalización es $k = 10^{17}$. Se puede observar que los errores relativos disminuyen conforme se refina la malla, lo cual nos indica la convergencia del método.

	Malla MII	Malla RI1	Malla RI2
n	1	1	2
$ER(u_h^n, u)$	2.6315e-1	2.5931e-1	1.1795e-1
$ER(B(f_h^n), \hat{\varphi})$	2.7408e-1	2.7152e-1	1.3038e-1
$ER(f_h^n, f)$	4.7945e-1	4.6344e-1	3.1672e-1

Tabla 4.7: Errores relativos para distintas mallas en una región irregular para la fuente $f(x, y) = \exp(x) \sin(y)$ donde n representa el número de iteraciones, $k = 10^{17}$, $\varepsilon = 4 \times 10^{-2}$.

La figura 4.24 muestra las gráficas de la solución 'exacta' u y las soluciones aproximadas u_h^n en las distintas mallas.

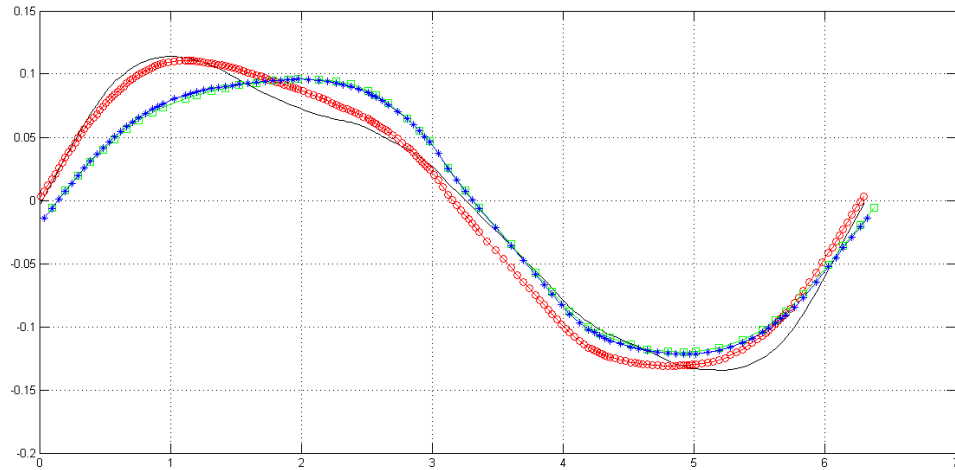


Figura 4.24: Gráficas de la solución exacta(-) y de las soluciones aproximadas para las mallas MII (\square -), RI1 (*-) y RI2 (o-) sobre S_1 de la región irregular con $f(x, y) = \exp(x) \sin(y)$.

Para ver la estabilidad del método se usa la malla RI2 pues es el error relativo de la solución 'exacta' y la aproximada es el menor. Análogamente a la metodología que se ha seguido, se toman diferentes datos perturbados de $\hat{\varphi}_\delta$ con $\delta = 0.01, 0.08$ y 0.16 cuyos valores originan la desviaciones relativas en la tabla 4.8. Se puede observar que el mayor error relativo en la solución respecto a la perturbación, se presenta para el valor de $\delta = 0.01$ aunque sigue siendo proporcional a la perturbación.

δ	0	0.01	0.08	0.16
$ER(\hat{\varphi}_\delta, \hat{\varphi})$	0	3.8140e-2	1.2383e-1	2.0111e-1
n	5	2	2	2
$ER(u_h^{n,\delta}, \hat{u})$	1.1919e-1	1.2228e-1	1.4005e-1	1.5314e-1
$ER(B(f_h^{n,\delta}), \hat{\varphi})$	1.3194e-1	1.3351e-1	1.4972e-1	1.6484e-1
$ER(f_h^{n,\delta}, f)$	3.1949e-1	3.2008e-1	3.2999e-1	3.3632e-1

Tabla 4.8: Errores relativos en una región irregular RI2 para la fuente $f(x, y) = \exp(x) \sin(y)$ con diferentes datos perturbados $\hat{\varphi}_\delta$, n representa el número de iteraciones, $k = 10^{17}$ y $\varepsilon = 6 \times 10^{-3}$.

En la figura 4.25 se muestran las gráficas del potencial 'exacto' u sobre S_1 junto con el recuperado $u_h^{n,\delta}$ cuando los datos tiene ruido.

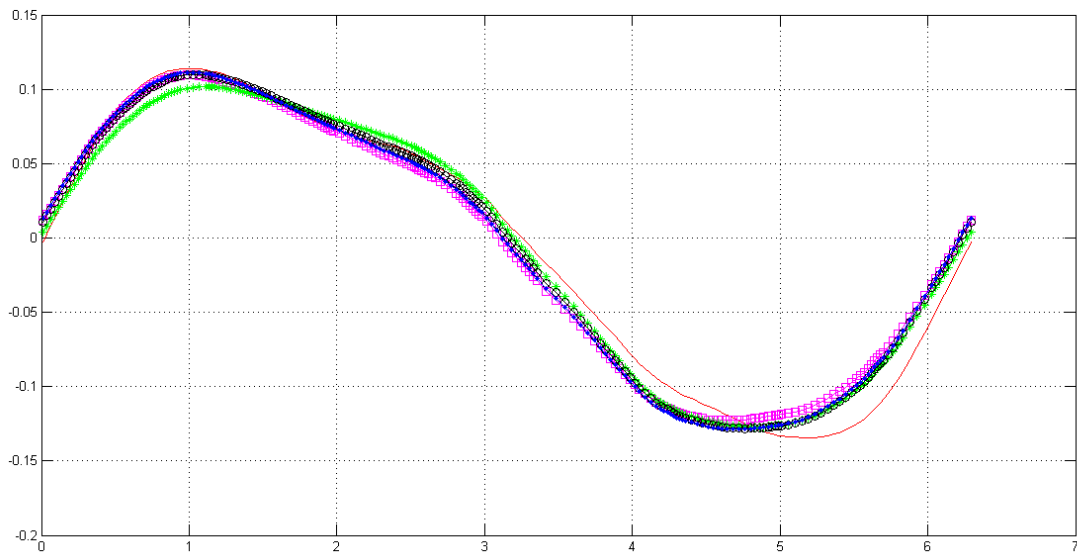


Figura 4.25: Gráfica de la 'solución exacta' $\hat{u}(\theta)(-)$ y de las soluciones aproximadas $\hat{u}_h^{n,\delta}(\theta)$ sobre S_1 para $\delta = 0(*-)$, $\delta = 0.01(o-)$, $\delta = 0.08(.-)$, $\delta = 0.16(\square-)$, utilizando la malla RI2 en la región irregular con $f(x, y) = \exp(x) \sin(y)$, con $k = 10^{17}$ y $\varepsilon = 6 \times 10^{-3}$.

De manera particular, en las figuras 4.26 y 4.27 se muestran los datos perturbados y los que se recuperan con el método, respectivamente.

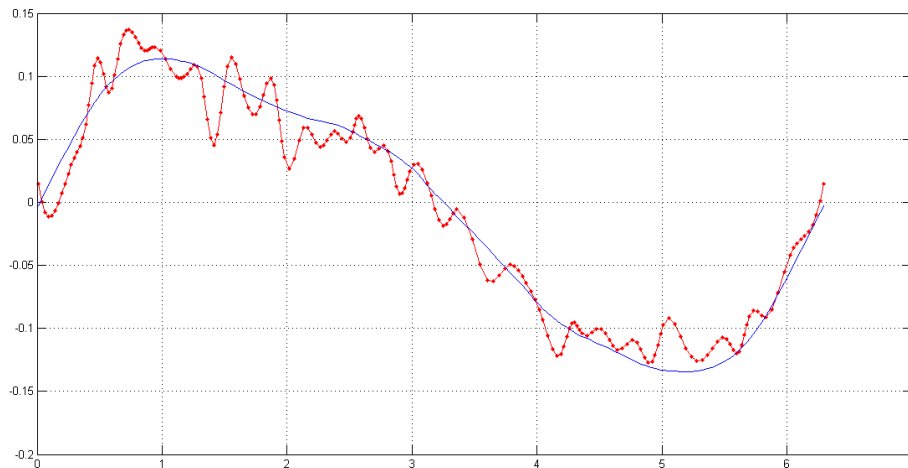


Figura 4.26: Gráficas de la medición exacta $\hat{\varphi}(\theta)(-)$ y con error $\hat{\varphi}_\delta(\theta)(.-)$ con $\delta = 0.16$, para la fuente $f(x, y) = \exp(x) \sin(y)$ sobre la región irregular con la malla RI2, $k = 10^{17}$ y $\varepsilon = 6 \times 10^{-3}$.

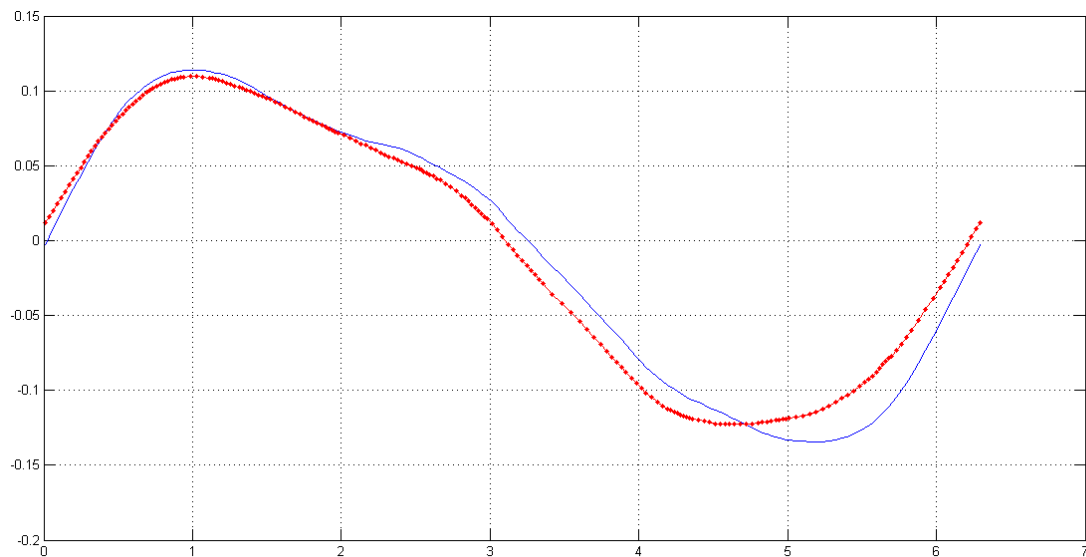


Figura 4.27: Gráfica de la 'solución exacta' $u(\theta)(-)$ y de la solución aproximada $u_h^{n,\delta}(\theta)(-)$ sobre S_1 para $\delta = 0.16$ con la fuente $f(x, y) = \exp(x) \sin(y)$ sobre la región irregular con la malla RI2, con $k = 10^{17}$ y $\varepsilon = 6 \times 10^{-3}$.

Finalmente, las figuras 4.28 y 4.29 muestran gráficas de la solución 'exacta' u y de la aproximada numéricamente cuando $\delta = 0.16$, así como la fuente exacta f y la que se recupera con el método, respectivamente.

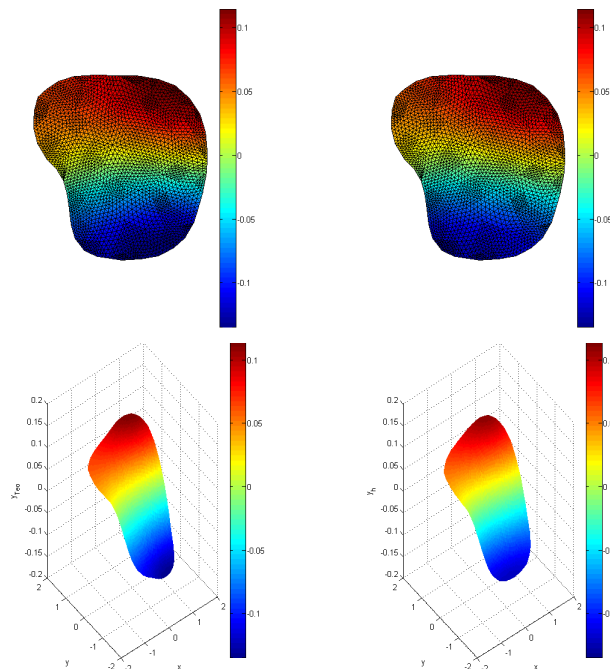


Figura 4.28: Gráfica del potencial exacto (lado izquierdo) y aproximado (lado derecho), en la malla RI2 con $k = 10^{17}$, $\varepsilon = 6 \times 10^{-3}$ y $\delta = 0.16$.

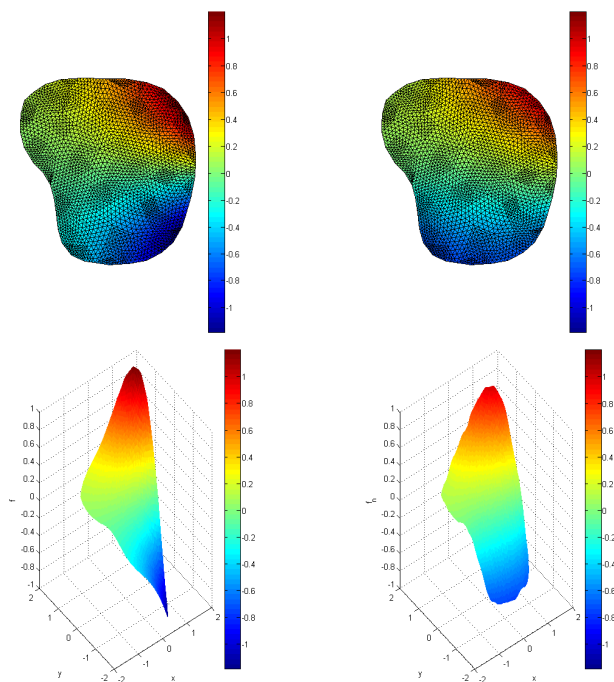


Figura 4.29: Gráfica de la fuente exacta (lado izquierdo) y la aproximada (lado derecho), en la malla RI2 con $k = 10^{17}$, $\varepsilon = 6 \times 10^{-3}$ y $\delta = 0.16$.

De este modo, se puede concluir que para la región irregular el método también proporciona soluciones convergentes y estables respecto a la perturbación en los datos. Por lo tanto, ha quedado validado el método de solución para el problema de detección de la fuente volumétrica que ha sido propuesto en este trabajo.

Conclusiones

Al estudiar el problema de detección de fuentes volumétricas (PDFV) como un problema de control distribuido se lograron obtener soluciones en forma estable para tres regiones diferentes. Se empleó un método iterativo de gradiente conjugado para minimizar el funcional propuesto y el método de elementos finitos para resolver numéricamente los subproblemas de contorno en cada iteración. La eficiencia del método propuesto se muestra con su aplicación a dos problemas con dos fuentes: una para una región circular y la otra en tres regiones distintas: circular, elíptica e irregular. Los resultados numéricos que se obtienen indican que el método es convergente y estable. Además cuando se agrega ruido a los datos $\hat{\varphi}$ sobre la frontera, las soluciones numéricas que se obtienen difieren de la 'exacta' por una magnitud proporcional a dichas perturbaciones.

Otra contribución fue el estudio del algoritmo de solución para el problema de Cauchy. Además se propuso otra alternativa de solución para el problema de detección de la fuente como un problema con condiciones Dirichlet.

La metodología usada para resolver el PDFV es un método novedoso y una extensión del estudio realizado en [2]. Asimismo es posible acoplar el PDFV con el problema de Cauchy y así resolver numéricamente el problema inverso electroencefalográfico para fuentes volumétricas.

La forma en que se resolvió este problema tiene la ventaja de poder estudiarlo en regiones tridimensionales usando la metodología que se propone en este trabajo.

Apéndice A. El Método de Elemento Finito (MEF)

Considérese el siguiente problema

$$\alpha u - \gamma \Delta u = f, \quad \text{en } \Omega \quad (3)$$

$$u = g_0, \quad \text{sobre } \Gamma_0, \quad (4)$$

$$\gamma \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} = g_1, \quad \text{sobre } \Gamma_1, \quad (5)$$

donde $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$.

La formulación variacional asociada a este problema es: encontrar $u \in V_g$ tal que

$$\int_{\Omega} \alpha u v d\Omega + \int_{\Omega} \gamma \nabla u \cdot \nabla v d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega + \int_{\Gamma_1} g_1 v d\Gamma, \quad (6)$$

para todo $v \in V_0$ y donde

$$V_0 = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_0\} \quad (7)$$

el espacio de funciones de prueba y

$$V_g = \{v \in H^1(\Omega) : v = g_0 \quad \text{sobre } \Gamma_0\} \quad (8)$$

el espacio afín.

A continuación, se discretiza el dominio Ω por medio de elementos con el objetivo de aproximar el espacio de funciones de prueba V_0 y el espacio afín V_g por medio de espacios de funciones de dimensión finita y así poder encontrar soluciones aproximadas de tipo Galerkin. Las funciones base asociadas consistirán de funciones polinomiales por tramos sobre subregiones de Ω llamadas elementos finitos.

Discretización del dominio

Dado el dominio Ω , hay varias formas de subdividirlo en elementos. Para simplificar el estudio se supone que Ω es poligonal y se escogen triángulos como elementos de discretización. Así, se define

$$\tau_h := \text{conjunto de triángulos } T \text{ en la triangulación de } \Omega,$$

donde h es el diámetro máximo de los elementos de la malla.

La triangulación debe satisfacer las propiedades que se describen a continuación para asegurar una aproximación correcta de las funciones en V_0 y V_g .

- El conjunto de todos los triángulos forma el dominio y sus fronteras, esto es, $\cup_{T \in \tau_h} T = \overline{\Omega}$.
- Dos triángulos T y T' en τ_h satisfacen sólo una de las siguientes propiedades:
 - No se intersectan, $T \cap T' = \emptyset$.
 - Si se intersectan, lo hacen en un vértice común ó en una arista común.
- En la interface entre la frontera de Dirichlet Γ_0 y la frontera de Neumann Γ_1 debe encontrarse un vértice de la triangulación.

Con esta triangulación se construye la aproximación al espacio $H^1(\Omega)$ que consiste de funciones continuas que son lineales sobre cada triángulo,

$$V_h = \{v_h \in \mathcal{C}(\Omega) : v_h|_T \in \mathbb{P}_1, \forall T \in \tau_h\},$$

donde el parámetro de discretización h se refiere al diámetro máximo de los triángulos, $\mathcal{C}(\Omega)$ indica el conjunto de funciones continuas en Ω y \mathbb{P}_1 denota el conjunto de polinomios de primer grado en \mathbb{R}^2 .

Se denotara por ϑ_h al conjunto de vértices de la triangulación. Es decir, $P = (x_1, x_2)$ está en ϑ_h si P es vértice de algún triángulo T de τ_h . Así, el conjunto de vértices de la triangulación más el conjunto de triángulos constituyen la malla triangular del elemento finito: $\vartheta_h + \tau_h$.

Dado un vértice $P \in \vartheta_h$ se define la función piramidal como aquella función $\varphi_P \in V_h$ tal que

$$\varphi_P = \delta_{PQ},$$

y su soporte es el conjunto de triángulos que tienen a P como vértice. Estas funciones forman una base del espacio de funciones V_h que aproxima $H^1(\Omega)$ y que se denotara por

$$\beta_h = \{\varphi_P : P \in \vartheta_h\}.$$

Por lo tanto, V_h es un espacio de funciones de dimensión finita y su dimensión, $\dim V_h$, es la cardinalidad de ϑ_h que consiste del número de vértices de la triangulación.

De esta manera, dada cualquier $u_h \in V_h$, ésta se puede escribir en forma única como

$$u_h(x) = \sum_{P \in \vartheta_h} u_h(P) \varphi_P(x). \tag{9}$$

Aproximación de la formulación variacional

Para encontrar una solución aproximada del problema variacional (6), se busca una aproximación del espacio de funciones de prueba (7). Para esto se introduce la siguiente notación

$N \equiv$ número de vértices de la triangulación.

$N_I \equiv$ número de vértices interiores, son los vértices que no se encuentran en la frontera de Dirichlet.

$\vartheta_h \equiv$ conjunto de vértices de la triangulación, $\{P_i\}_{i=1}^N$.

$\vartheta_I \equiv$ conjunto de vértices interiores, $\{P_i\}_{i=1}^{N_I}$.

$\vartheta_D \equiv$ conjunto de vértices en la frontera de Dirichlet Γ_0 , $\{P_i\}_{i=N_I+1}^N$.

El conjunto de funciones en V_h que aproxima el espacio V_0 en (7) se define como

$$V_{0h} = \text{gen}\{\varphi_P : P \in \vartheta_I\}.$$

Con estos fundamentos se puede formular el problema variacional discreto asociado al problema variacional (6):

Encontrar $u_h \in V_h$ con $u_h(P) = g_0(P)$ para todo $P \in \vartheta_D$ tal que

$$\int_{\Omega} \alpha u_h v_h d\Omega + \int_{\Omega} \gamma \nabla u_h \cdot \nabla v_h d\Omega = \int_{\Omega} f v_h d\Omega + \int_{\Gamma_1} g_1 v_h d\Gamma, \quad (10)$$

para todo $v_h \in V_{0h}$. En términos de las funciones base, se tiene

$$\int_{\Omega} \alpha u_h \varphi_P d\Omega + \int_{\Omega} \gamma \nabla u_h \cdot \nabla \varphi_P d\Omega = \int_{\Omega} f \varphi_P d\Omega + \int_{\Gamma_1} g_1 \varphi_P d\Gamma,$$

para todo $P \in \vartheta_I$. Como $u_h \in V_h$ se puede escribir

$$u_h(x) = \sum_{P \in \vartheta} u_h(P) \varphi_P(x) = \sum_{P \in \vartheta_I} u_h(P) \varphi_P(x) + \sum_{P \in \vartheta_D} u_h(P) \varphi_P(x)$$

y considerando que $u_h(P) = g_0(P)$ para todo $P \in \vartheta_D$,

$$u_h(x) = \sum_{P \in \vartheta_I} u_h(P) \varphi_P(x) + \sum_{P \in \vartheta_D} g_0(P) \varphi_P(x). \quad (11)$$

De este modo, sustituyendo (11) y $v_h = \varphi_Q$ para cada $Q \in \vartheta_I$ en el problema variacional discreto (10), éste se puede replantear como:

Encontrar los valores $u_j = u_h(P_j)$, $j = 1, \dots, N_I$, tales que

$$\sum_{j=1}^{N_I} a_{ij} u_j = f_i, \quad 1 \leq i \leq N_I, \quad (12)$$

donde

$$a_{ij} = \alpha \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dx + \gamma \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx, \quad (13)$$

y

$$f_i = \int_{\Omega} f \varphi_i dx + \int_{\Gamma_1} g_1 \varphi_i d\Gamma - \alpha \int_{\Omega} g_0 \varphi_i dx - \gamma \int_{\Omega} \nabla g_0 \cdot \nabla \varphi_i dx. \quad (14)$$

Nótese que la relación (12) constituye un sistema de N_I ecuaciones con N_I incógnitas, que en forma matricial se puede expresar como:

$$A_h U_h = f_h, \quad (15)$$

donde

$$A_h = \{a_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq N_I}, \quad U_h = \{u_h(P_j)\}_{1 \leq j \leq N_I}, \quad f_h = \{f_i\}_{1 \leq i \leq N_I}.$$

A la matriz A_h se le llama matriz de rigidez y a f_h se le conoce como vector de carga.

La matriz A_h tiene ciertas propiedades que se enuncian a continuación.

Propiedades de la matriz de rigidez

Desde el punto de vista teórico, las propiedades más importantes de la matriz de rigidez A_h son que es simétrica y definida positiva. Estas propiedades implican que el sistema de ecuaciones (15) tiene solución única. De modo que la solución del sistema (15) tiene solución única U_h y por lo tanto el problema discreto (10) que aproxima el problema variacional (6) tiene solución única

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{N_I} u_j(P) \varphi_j(x) + \sum_{j=N_I+1}^N g_0(P_j) \varphi_j(x).$$

Simetría. Es obvio que la matriz A_h es simétrica, pues

$$a_{ij} = \alpha \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dx + \gamma \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx = \alpha \int_{\Omega} \varphi_j \varphi_i dx + \gamma \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i dx = a_{ji}$$

Positividad. Para demostrar que A_h es definida positiva, se denotará a la i -ésima componente de $A_h U_h$ por

$$(A_h U_h)_i = \sum_{j=1}^{N_I} a_{ij} u_j,$$

y supóngase que $\alpha \geq \alpha_0 \geq 0$ y $\gamma \geq \gamma_0 \geq 0$.

Entonces

$$\begin{aligned}
 U_h^T A_h U_h &= \sum_{i=1}^{N_I} u_i (A_h U_h)_i \\
 &= \sum_{i=1}^{N_I} \sum_{j=1}^{N_I} a_{ij} u_i u_j \\
 &= \sum_{i=1}^{N_I} \sum_{j=1}^{N_I} \left(\alpha \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dx + \gamma \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx \right) u_i u_j \\
 &= \sum_{i=1}^{N_I} u_i \sum_{j=1}^{N_I} \left(\alpha \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dx \right) u_j + \sum_{i=1}^{N_I} u_i \sum_{j=1}^{N_I} \left(\gamma \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx \right) u_j \\
 &= \sum_{i=1}^{N_I} u_i \alpha \int_{\Omega} \varphi_i \left(\sum_{j=1}^{N_I} u_j \varphi_j \right) dx + \sum_{i=1}^{N_I} u_i \gamma \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \left(\sum_{j=1}^{N_I} u_j \varphi_j \right) dx \\
 &= \sum_{i=1}^{N_I} u_i \alpha \int_{\Omega} \varphi_i \bar{u}_h(x) dx + \sum_{i=1}^{N_I} u_i \gamma \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \bar{u}_h(x) dx, \quad \text{con } \bar{u}_h(x) = \sum_{j=1}^{N_I} u_j \varphi_j \\
 &= \alpha \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{N_I} u_i \varphi_i \right) \bar{u}_h(x) dx + \gamma \int_{\Omega} \nabla \left(\sum_{i=1}^{N_I} u_i \varphi_i \right) \cdot \nabla \bar{u}_h(x) dx, \quad \text{con } \bar{u}_h(x) = \sum_{j=1}^{N_I} u_j \varphi_j \\
 &= \alpha \int_{\Omega} \bar{u}_h(x) \bar{u}_h(x) dx + \gamma \int_{\Omega} \nabla \bar{u}_h(x) \cdot \nabla \bar{u}_h(x) dx, \quad \text{con } \bar{u}_h(x) = \sum_{j=1}^{N_I} u_j \varphi_j \\
 &= \alpha \int_{\Omega} |\bar{u}_h(x)|^2 dx + \gamma \int_{\Omega} \|\nabla \bar{u}_h(x)\|^2 dx, \quad \text{con } \bar{u}_h(x) = \sum_{j=1}^{N_I} u_j \varphi_j \\
 &\geq \alpha_0 \int_{\Omega} |\bar{u}_h(x)|^2 dx + \gamma_0 \int_{\Omega} \|\nabla \bar{u}_h(x)\|^2 dx, \quad \text{con } \bar{u}_h(x) = \sum_{j=1}^{N_I} u_j \varphi_j \\
 &\geq 0.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, A_h es semidefinida positiva.

Para completar la prueba se debe verificar que

$$\int_{\Omega} |\bar{u}_h(x)|^2 dx = 0 \tag{16}$$

y

$$\int_{\Omega} \|\nabla \bar{u}_h(x)\|^2 dx = 0 \tag{17}$$

implica que $\bar{u}_h(x) \equiv 0$.

Supóngase que se cumplen (16) y (17) entonces se sigue que \bar{u}_h es constante en Ω casi en todas partes. Pero dado que $\bar{u}_h(P_j) = 0$ para $P_j \in \Gamma_0$ se concluye que $\bar{u}_h \equiv 0$.

Sumabilidad. La matriz de rigidez, posee la propiedad de sumabilidad:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \alpha \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dx + \gamma \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx \\ &= \sum_{T \in \tau_h} \left(\alpha \int_T \varphi_i \varphi_j dx + \gamma \int_T \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx \right) \\ &= \sum_{T \in \tau_h} a_{ij}^T, \end{aligned}$$

donde

$$a_{ij}^T = \alpha \int_T \varphi_i \varphi_j dx + \gamma \int_T \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx.$$

Esta propiedad es muy importante en el método de elemento finito, pues se usa para ensamblar la matriz de rigidez de manera eficiente, desde el punto de vista computacional, así como para simplificar cálculos.

Escasez de coeficientes distintos de cero. La matriz de rigidez es una matriz rala y los coeficientes distintos de cero dependerán de la triangulación y de como se enumeren los nodos en la malla, puesto que si $a_{ij} \neq 0$ sólo si P_i y P_j son vértices adyacentes en la malla triangular.

Cálculo de los coeficientes a_{ij} y f_i

Para hallar los coeficientes a_{ij} se deben calcular los dos términos integrales en (13) como se verá a continuación. Antes, se introduce la siguiente notación:

ne : número de elementos (triángulos) en τ_h

T_e : elemento e -ésimo con $e = 1, 2, \dots, ne$.

Cálculo de $\int_{\Omega} \gamma(x) \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx$

Por la propiedad de sumabilidad,

$$\int_{\Omega} \gamma(x) \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx = \sum_{e=1}^{ne} \int_{T_e} \gamma(x) \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx. \quad (18)$$

De modo que todo se reduce al cálculo de las integrales por elemento.

Si $\gamma(x)$ es constante, y como φ_i restringida a cada triángulo T_e es un polinomio de primer grado se tiene que $\nabla \varphi_i$ es una función vectorial constante sobre cada triángulo T_e , entonces

$$\int_{T_e} \gamma(x) \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx = \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j|_{T_e} \int_{T_e} \gamma(x) dx = \gamma(x) \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j|_{T_e} |T_e|,$$

donde $|T_e|$ representa el área del elemento e y $\nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j|_{T_e}$ denota el valor del $\nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j$ sobre cada triángulo T_e , el cual es constante. Por lo tanto, en este caso,

$$\int_{\Omega} \gamma(x) \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx = \gamma(x) \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j |_{T_e} |T_e|$$

Si $\gamma(x)$ no es constante entonces la integral $\int_{T_e} \gamma(x) dx$ no se puede calcular analíticamente y se debe recurrir a la integración numérica. En este caso, se usa la regla de Simpson ya que es exacta dado que las funciones base son lineales, de modo que

$$\int_{T_e} \gamma(x) dx = \frac{|T_e|}{3} \sum_{k=1}^3 \gamma(M_{ke}) + \mathcal{O}(h^4),$$

donde M_{ke} es el punto medio de las aristas del elemento e .

Cálculo de $\int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dx$

Por la propiedad de sumabilidad

$$\int \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dx = \sum_{e=1}^{ne} \int \int_{T_e} \varphi_i \varphi_j dx.$$

Sea $i = g(e, \lambda)$ e $i = g(e, \mu)$ la numeración global de los nodos donde e es el elemento y λ, μ son el número de nodo local. Entonces

$$\int \int_{T_e} \varphi_i \varphi_j dx = \int \int_{T_e} \varphi_{\lambda}^e \varphi_{\mu}^e dx,$$

donde φ_{λ}^e y φ_{μ}^e son las funciones base del elemento e con nodos locales λ y μ . Como puede notarse, esta última integral puede calcularse directamente en los elementos T_e utilizando las coordenadas de sus vértices.

Cálculo de $\int_{\Omega} \nabla g_0 \cdot \nabla \varphi_i dx$

El cálculo de esta integral es análoga al cálculo de la integral en (18) excepto que en este caso la función g_0 se extiende a la frontera.

Cálculo de $\int_{\Omega} f \varphi_i dx$

Usando la regla de Simpson se puede aproximar la integral de la siguiente forma

$$\int_{\Omega} f \varphi_i dx \approx \frac{|T_e|}{3} \sum_{k=1}^3 f(M_{ke}) \varphi_i(M_{ke}).$$

Análogamente a esta integral se calcula $\int_{\Omega} g_0 \varphi_i dx$.



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Iztapalapa

Fecha : 26/11/2015
Página : 1/1

CONSTANCIA DE PRESENTACION DE EXAMEN DE GRADO

La Universidad Autónoma Metropolitana extiende la presente CONSTANCIA DE PRESENTACION DE EXAMEN DE GRADO de MAESTRA EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS APLICADAS E INDUSTRIALES) de la alumna BELEM ISABEL ROJAS RAMIREZ, matrícula 2133802705, quien cumplió con los 147 créditos correspondientes a las unidades de enseñanza aprendizaje del plan de estudio. Con fecha primero de diciembre del 2015 presentó la DEFENSA de su EXAMEN DE GRADO cuya denominación es:

PROBLEMA INVERSO ELECTROENCEFALOGRAFICO: ESTUDIO NUMERICO DEL SUBPROBLEMA DE DETECCION DE FUENTES VOLUMETRICAS.

Cabe mencionar que la aprobación tiene un valor de 60 créditos y el programa consta de 207 créditos.

El jurado del examen ha tenido a bien otorgarle la calificación de:

APROBAR

JURADO

Presidente

DR. MIGUEL ANGEL MORELES VAZQUEZ

Secretario

DR. JOSE HECTOR MORALES BARCENAS

Vocal

DR. LORENZO HECTOR JUAREZ VALENCIA

Vocal

DR. JOSE JACOBO OLIVEROS OLIVEROS

Bibliografía

- [1] Berntsson F., Lars E. *Numerical solution of the Cauchy Problem for the Laplace Equation*. Inverse Problems Vol. 17, pp. 839-853, 2001.
- [2] Conde M. J. *El problema inverso electroencefalográfico para fuentes volumétricas y su desarrollo numérico en geometrías simples*. Tesis de Doctorado en Ciencias Matemáticas. Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Junio del 2013.
- [3] Dinh N. H., Lesnic D. *The Cauchy problem for Laplace's equation via the conjugate gradient method*. IMA Journal of Applied Mathematics Vol. 65, pp. 199-217, 2003.
- [4] Heller L., *Return current in encephalography*. *Variational Principles* Biophysical Journal, 1990; 5: 601-607.
- [5] Loret de Nó R., *A study of never physiology*. *Studies from the Rockefeller Institute* Vol. 132. Ch 16. New York: Rockefeller Institute; 1947.
- [6] Mijailov V. P., *Partial Differential Equations*. Editorial Mir, Mosú, 1982.
- [7] Morín M., Conde J., Oliveros J., Fraguera A., Gutiérrez M., Flores E., *Simplificación del problema inverso electroencefalográfico a una sola región homogénea con condición de Neumann nula*. *Revista Mexicana de Ingeniería Biomédica*, ISSN: 0188-9532.
- [8] Nuñez P.L., *Electric Field of the Brain* New York, Oxford Univ. Press, 1981.
- [9] Plonsey R., *The nature of the source of bioelectric and biomagnetic fields*. *Biophys J*. 1982; 39: 309-312.
- [10] Plonsey R., Fleming D. G., *Bioelectric Phenomena*. N. Y., Mc. Graw-Hill 1969.