



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

✓ GASES CUANTICOS EN $d > 1$ DIMENSIONES APLICADOS A
SUPERCONDUCTIVIDAD DE
ALTA T_c

TESIS QUE PRESENTA

✓ MARCELA DOLORES GREYHER GONZÁLEZ

PARA LA OBTENCIÓN DEL GRADO DE

✓ DOCTOR EN CIENCIAS

MARZO DE 2004 ✓

✓ DIRECTORES DE TESIS:
DR. MANUEL DE LLANO DE LA GARZA
DR. JOSÉ LUIS DEL RÍO CORREA

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA
✓ DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

A la memoria de mi padre el Lic. Ernesto Grether.
Su visión de la vida, su fuerza, su enorme presencia y gran dignidad,
han sido siempre para mi, una fuente de inspiración.

A mi madre Rosaura, su recuerdo siempre estuvo presente.

A Enrique, por todo su cariño y apoyo en todo momento.

A Carlos David, Héctor Hugo y Sandrita que han llenado mi vida con su presencia.

A mis hermanos Rosi, Pati, Ernesto y Jorge, siempre unidos.

A mi cuñado Roberto y a Irma nuestra madrina, por su afecto.

Agradecimientos

Durante el desarrollo de este trabajo he encontrado un gran número de personas que han sido importantes para mí; es difícil mencionar todos los nombres, pero a todos les quedo enormemente agradecida.

Deseo mencionar en primer lugar al Dr. Manuel de Llano quien despertó en mí el deseo y gusto por realizar este trabajo; su entusiasmo, sus enseñanzas, su generosidad al compartir conmigo su conocimiento, han sido una guía y una fuente de inspiración en estos años.

Deseo darle las gracias también al Dr. José Luis del Río, por su influencia e inquietud por el conocimiento, por su interés, tan importantes para mí, por su amistad y paciencia durante el desarrollo de esta tesis.

Al Dr. Miguel Ángel Solís le doy las gracias por estar siempre presente con sus ideas, por su alegría al comunicarme sus conocimientos, por su interés en mi trabajo académico, por sus críticas y consejos, siempre fundamentales en mi trabajo.

Agradezco también a los sinodales

El Dr. Rafael Baquero, el Dr. Salvador Cruz, el Dr. Salvador Godoy y el Dr. Eleuterio Castaño, quienes contribuyeron, en gran medida a este trabajo, al revisar minuciosamente, criticar, comentar y corregir esta tesis.

Hago un reconocimiento al Departamento de Física de la UAM-Iztapalapa y a los Institutos de Investigaciones en Materiales y de Física de la UNAM, donde se llevó a cabo esta investigación. Finalmente, reconozco el apoyo que recibí por parte de mi lugar de trabajo, el Departamento de Física de la Facultad de Ciencias, UNAM.

**Publicaciones realizadas durante el desarrollo de la tesis
de la
M. en C. Marcela D. Grether González**

1. Eur. Phys. J. D **25**, 287-291 (2003). (por **M. Grether**, M. de Llano & M.A. Solís) *Anomalous behavior of ideal Fermi gas below two dimensions.*
2. Eur. Phys. J. D **23**, 117-124 (2003) (por **M. Grether**, M. Fortes, M. de Llano, J.L. del Río, F.J. Sevilla, M.A. Solís & A.A. Valladares) *Harmonically trapped ideal quantum gases.*
3. Cond. Matter Theories **16**, 305-314 (2001) (por **M. Grether**, M. Fortes, F.J. Sevilla, M.A. Solís, M. de Llano, A. Salazar, A.A. Valladares & O. Rojo) *BCS and Bose-Einstein condensates in superconductivity and superfluidity.*
4. Cond. Matter Theories **15**, 425-434 (2000) (por **M. Grether**, M. Fortes, M. de Llano, F.J. Sevilla, M.A. Solís, S. Tapia, A.A. Valladares & V.V. Tolmachev) *Free and trapped Fermi gases: some novel results.*
5. J. Low Temp. Phys. **121**, 281-286 (2000) (por F.J. Sevilla, **M. Grether**, M. de Llano, M. Fortes, O. Rojo, M.A. Solís & A.A. Valladares) *Low-dimensional BEC.*
6. Cond. Matter Theories **14**, 61-65 (2000) (por V.C. Aguilera- Navarro, V. Fuentes, **M. Grether**, M.G. López-Arrieta, M. de Llano, J.J. Valencia, A. Salazar, O. Rojo & M.A. Solís) *Ideal quantum gases with any positive-power dispersion-law in any positive dimension.*
7. Rev. Mex. Fís. **45** Suppl. **1**, 158 -163 (1999) (por V. Fuentes, **M. Grether**, M. de Llano & M.A. Solís) *Superconducting transition-temperature enhancement due to electronic-band-structure density-of-states.*

Índice

	Resumen.....	1
1	Introducción.....	3
2	El gas de Fermi en $d > 0$ dimensiones.....	9
2.1	El potencial termodinámico.....	11
2.2	Potencial químico y densidad de estados.....	13
2.3	Entropía y presión.....	18
2.4	Energía interna.....	19
2.5	Calor específico.....	20
2.6	Velocidades del sonido.....	23
2.6.1	Velocidad del sonido isotérmica.....	25
2.6.2	Velocidad del sonido adiabática.....	28
2.6.2	Relación entre C_V , c_T y c_S	30
2.6	Conclusiones.....	31
3	Gases cuánticos atrapados por potenciales externos.....	32
3.1	El potencial termodinámico generalizado Ω en sistemas atrapados..	34
3.2	Propiedades termodinámicas.....	37
3.3	Mapeo a una dimensión d mayor y masa equivalente.....	40
3.4	Límite termodinámico.....	42
3.5	Gas de fermiones en d -dimensiones atrapado por δ osciladores	

	armónicos ($\delta \leq d$)	43
3.5.1	Casos particulares: fermiones en $d = 3$ atrapados por $\delta = 1, 2$ y 3 osciladores armónicos.....	48
3.6	Bosones atrapados.....	48
3.6.1	Temperatura crítica y fracción del condensado.....	48
3.6.2	Energía interna y salto en el calor específico.....	50
3.6.3	Casos particulares de bosones en 3D atrapados por $\delta = 1, 2$ o 3 osciladores armónicos.....	51
3.7	Conclusiones.....	54
4	Superconductividad en nanoestructuras.....	55
4.1	Superconductividad en nanoestructuras en 2D.....	59
4.2	Temperatura crítica para un gas de bosones libres en ($2 + \epsilon$) dimensiones	62
4.3	Superconductividad en nanoestructuras en 1D.....	66
4.4	Resultados.....	69
4.5	Conclusiones.....	70
5	Temperaturas de transición debido a una densidad de estados electrónicos con estructura.....	72
5.1	Densidades de estados con singularidades tipo Van Hove.....	77
5.2	Densidades de estados con singularidades de potencia asociada a un punto silla extendido.....	78
5.3	Temperatura crítica BEC.....	79

5.4	Temperatura crítica BEC en el escenario de Van Hove.....	82
5.5	Temperatura crítica BEC con una densidad de estados ESP.....	83
5.6	Fórmula exacta T_c ECS en el escenario de Van Hove.....	86
5.6	Fórmula exacta T_c ECS con una singularidad ESP.....	88
5.7	Conclusiones.....	90
Conclusiones.....		91
Apéndice A	Solución del problema de una partícula en una caja de longitud L con condiciones a la frontera de Bohr.....	97
Apéndice B	Relación de dispersión de pares de Coóper.....	99
Apéndice C	Temperaturas de transición estimadas.....	105
Lista de Figuras.....		108
Lista de Tablas.....		112
Referencias.....		112

Resumen

Mediante un estudio detallado del comportamiento de un gas ideal de Fermi en $d > 0$ dimensiones mostramos que en el potencial químico, el calor específico y la velocidad isotérmica del sonido, existe una *estructura* anómala si $d < 2$. Lo anterior contrasta con el comportamiento del gas ideal de Bose donde la *estructura* se encuentra si $d > 2$ y significa un cambio de fase.

Resolvemos el problema de un gas de Bose o de Fermi en $d > 0$ atrapado por $\delta \leq d$ potenciales de oscilador armónico mutuamente perpendiculares para simular una trampa magneto-óptica. Partiendo del potencial termodinámico, o gran potencial, asociado al ensemble estadístico del gran canónico se calculan las funciones termodinámicas del sistema. Se encuentra que el gas de Bose exhibe una condensación de Bose-Einstein (BEC por sus siglas en inglés), representada por una cúspide en el calor específico si y sólo si $d + \delta > 2$, y un salto discontinuo si y sólo si $d + \delta > 4$. Los calores específicos de ambos tipos de gases (Bose y de Fermi) coinciden si $d + \delta = 2$. Para $d = 3$ y $\delta = 3$, se calculan las temperaturas críticas T_c de varios gases monoatómicos atrapados utilizando los parámetros (frecuencias y número de partículas) de los experimentos con nubes de átomos atrapados para los cuales se han encontrado un condensado de Bose-Einstein. Las T_c calculadas concuerdan satisfactoriamente con los resultados experimentales.

Para modelar los superconductores orgánicos de cupratos *casi-bidimensionales*, se considera un gas confinado dentro de un conjunto infinito de planos paralelos entre sí y equidistantes, perpendiculares a la dirección z y con una separación c entre planos adyacentes. Extendemos el problema para considerar bosones con una relación de dispersión generalizada $\varepsilon_k = C_s k^s$, $s > 0$, donde k es la magnitud del vector de onda, en lugar de la relación de dispersión cuadrática $\hbar^2 k^2 / 2m$ común, donde m es la masa del

bosón. Generalizamos aún más estudiando un espectro de energías que corresponde a un conjunto infinito de alambres con una separación c entre alambres adyacentes para así modelar a los superconductores orgánico-metálicos *casi-unidimensionales*.

Finalmente, consideramos un modelo estadístico simple de una mezcla de fermiones no apareados junto con pares de Cooper bosónicos que satisfacen una relación de dispersión lineal, que permite una condensación de Bose-Einstein (BE) en dimensiones mayores que la unidad, en vez de $d > 2$ como ocurre en el caso donde la relación de dispersión es cuadrática. Usando el modelo de interacción de Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS), calculamos la T_c de una BEC para la mezcla y encontramos que es mayor que la T_c calculada con la teoría estadística familiar BCS. Calculamos también T_c considerando densidades de estado (DOS, por sus siglas en inglés), que reflejan la estructura de bandas electrónicas de los planos de cobre-oxígeno características de los cupratos superconductores. Las DOS consideradas aquí son la del escenario de Van Hove, que contiene una singularidad logarítmica, y la DOS con una singularidad de potencia asociada con un punto silla extendido (extended saddle point) en la curva de energía *vs.* momento.

Capítulo 1

Introducción

La superconductividad es una propiedad de la materia descubierta en 1911 por K. Onnes [1] en el mercurio Hg y luego para un número muy limitado de elementos a muy bajas temperaturas. Sin embargo, durante los últimos 17 años se han encontrado varios nuevos materiales compuestos, entre ellos, las cerámicas cuyas temperaturas críticas T_c superan la temperatura de liquefacción del nitrógeno (77K) que marca la frontera entre superconductores de baja y alta T_c . La T_c es la temperatura por debajo de la cual hay que mantener un superconductor dado para que conduzca una corriente eléctrica sin las pérdidas energéticas asociadas a la resistencia del material. Los superconductores de alta T_c abren una nueva perspectiva de aplicación casi ilimitada para la creación y uso de nuevos dispositivos con aplicaciones técnicas insospechadas, ya que al conducir la electricidad sin pérdida de energía pueden utilizarse en lugar de los conductores para ahorrar energía. Por debajo de T_c el superconductor se vuelve completamente diamagnético, es decir, todo campo magnético aplicado externamente es expulsado de su interior. Este fenómeno es conocido como el efecto Meissner, en honor de quien lo descubrió en 1933 [2]. Otra propiedad interesante de los superconductores es el efecto Josephson el cual está basado en el efecto túnel entre dos superconductores unidos por una delgada barrera de aislante. Este efecto puede emplearse en circuitos de computadoras, y para detectar campos magnéticos muy débiles.

Todas estas propiedades de los superconductores abren muchas puertas al desarrollo tecnológico, ya que los dispositivos actuales pueden ser mejorados en eficiencia, sensibilidad y rapidez.

Después de 15 años de estancamiento a T_c de 23K, en los superconductores conocidos hasta entonces, en 1986 se dio un salto notable con el descubrimiento realizado por Bednorz y Müller [3] quienes reportaron el primer superconductor de alta T_c , basado en el cuprato con lantano y bario (LaBaCuO), con una temperatura crítica de 30K. En 1987 el equipo de C.W. Chu [4] corroboró el hallazgo de Bednorz y Müller y encontraron un nuevo superconductor cuya T_c es de 92K; este es el $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$. En 1993 se llegó a la T_c récord de 164 K en un determinado cuprato con mercurio bajo presión. La estructura laminar de estos superconductores puede ser considerada como *casi*-bidimensional (*casi*-2D) ya que, las anisotropías encontradas en la resistividad, ρ_c/ρ_{ab} , donde c se refiere a la dirección perpendicular a los planos mientras que ab es la dirección de los planos paralelos, pueden ser tan grandes como 10^5 en $\text{Bi}_{2+x}\text{Sr}_{2-y}\text{CuO}_{6+\delta}$ [5], aunque en $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ es de tan sólo 10^2 . Los materiales superconductores a temperatura ambiente podrían llegar a significar una revolución tecnológica comparable a la Revolución Industrial o a la invención del transistor que transformó la sociedad industrial en la sociedad informática en que vivimos.

Por otro lado, en 1980 se descubre por primera vez un superconductor orgánico que puede ser considerado como *casi*-unidimensional (*casi*-1D) este es el $(\text{TMTSF})_2\text{PF}_6$ uno de los llamados organo-metálicos o sales de Bechgaard [6], cuya T_c es de 0.9K. Más tarde se encontró una nueva serie de superconductores de la familia de los $(\text{ET})_2\text{X}$ cuyas T_c alcanzan los 12.8K [7]-[9] que además muestran propiedades electrónicas *casi*-2D.

Estas temperaturas críticas están aún muy por debajo de la temperatura ambiente de 300 K, pese a los enormes y prolongados esfuerzos de investigación y búsqueda por parte de físicos, químicos y metalúrgicos. Sin duda alguna esto se debe a que aún no hay una teoría microscópica predictiva que explique el fenómeno de la superconductividad.

Hasta ahora los superconductores encontrados, han sido descubiertos en el laboratorio sin una teoría.

En 1957, J. Bardeen, L.N. Cooper y J.R. Schrieffer(BCS) presentaron una teoría de la superconductividad [10]-[12], basada en que la interacción entre electrones, resultante del intercambio virtual de fonones, es atractiva cuando la diferencia entre los estados electrónicos involucrados es menor que la energía fonónica $\hbar\omega$, lo que favorece la formación de pares de electrones llamados pares de Cooper, cuando esta interacción atractiva domina la interacción repulsiva Coulombiana. Estos pares pueden ser considerados como partículas bosónicas que, cuando su número es apreciable desde el punto de vista macroscópico, dan lugar a una transición de fase llamada condensación de Bose-Einstein (BEC), la cual surge al enfriar el sistema por debajo de una temperatura crítica en la cual el potencial químico bosónico $\mu(T)$ se hace cero, y los bosones empiezan a ocupar preferentemente el estado base del sistema dando lugar a una fase superconductora. En la teoría BCS se consideran sólo pares de Cooper con un momento total nulo de centro de masa. Una limitación a la teoría BCS es que el valor máximo predicho de T_c es de 30K lo que se conoce como la "barrera fonónica".

En 1998, M. Casas, *etal.* [13], extienden la teoría BCS al considerar pares de electrones con un momento del centro de masa distinto de cero encontrando que la relación de dispersión del par de electrones, bajo la aproximación de acoplamiento débil, es lineal en d dimensiones.

Por otro lado, la BEC de un gas de partículas bosónicas sin interacción constituye una nueva fase de la materia con propiedades de coherencia muy especial. El fenómeno BEC se predijo teóricamente [14] en 1925 para un gas ideal de bosones. Sin embargo, este no fue detectado experimentalmente en forma convincente sino hasta 1995 en un

gas atrapado de rubidio $^{87}_{37}\text{Rb}$ [15] y posteriormente en otros gases $^{23}_{11}\text{Na}$ [16], ^7_3Li [17], ^1_1H [18], $^{85}_{37}\text{Rb}$ [19], ^4_2He [20] y $^{41}_{19}\text{K}$ [21]. La BEC ha sido observada también en bajas dimensiones por Görlitz et al. [22], $^{23}_{11}\text{Na}$ en 1D o 2D; Schreck *et al.* [23], ^7_3Li en 1D y Burger *et al.* [24] estudian las transiciones de fase en una nube de átomos de $^{87}_{37}\text{Rb}$ en casi-2D. Esto representa la evidencia real de lo que durante 70 años se consideró como meras interpretaciones académicas de modelos teóricos de átomos y de partículas.

Teóricamente es bien conocido que el fenómeno de la BEC para un gas ideal de bosones no confinado puede ocurrir sólo en sistemas con dimensión espacial $d > 2$; Por eso la superconductividad en los superconductores orgánicos de estructura casi-1D, no puede ser interpretada como una BEC de un gas ideal de bosones no confinado. El efecto del confinamiento de un gas de bosones/fermiones debe ser tomado en cuenta si uno quiere explicar la superconductividad en los nuevos materiales orgánicos superconductores de alta T_c , vía la BEC. Los avances tecnológicos en el confinamiento de partículas nos permiten considerar experimentalmente sistemas en dos, una y cero dimensiones [25].

El objetivo de esta tesis es explorar bajo que condiciones la teoría BCS vista como una BEC puede extenderse para obtener una concordancia con los datos experimentales reportados de materiales superconductores tales como como los organo-metálicos, los cuales podemos considerar como casi-1D y los cupratos superconductores, considerados éstos como una estructura que podemos considerar casi-2D. Para llevar a cabo nuestro estudio, se considera el efecto de la dimensionalidad y del confinamiento en los pares de Cooper. Como hipótesis de trabajo suponemos que la termodinámica se cumple en espacios de dimensión no necesariamente entera, encontrando que el comportamiento de de las variables termodinámicas de los sistemas estudiados són congruentes con ésta propuesta.

Comenzamos en el capítulo 2 con el estudio estudio de la propiedades termodinámicas

de un gas ideal de fermiones en d -dimensiones, se analizan los resultados para su potencial químico, su capacidad calorífica y se determina la velocidad del sonido tanto isotérmica como adiabática. Las gráficas de las variables termodinámicas para fermiones en dimensiones no necesariamente enteras, muestran que existe una *estructura* en el potencial químico y en el calor específico, como función de la temperatura, si y sólo si $d < 2$. Este resultado contrasta con el del gas ideal de bosones donde existe *estructura* para $d > 2$ [26] y donde también existe un cambio de fase.

En el Capítulo 3 se incluye el efecto de confinar un gas cuántico, al atraparlo con potenciales externos de osciladores armónicos mutuamente perpendiculares, ésto nos permite simular sistemas con una dimensionalidad menor a la dimensión del gas no atrapado. En particular nos interesa el estudio teórico de las T_c de gases cuánticos atrapados ya que de esta forma simulamos los experimentos realizados en trampas opto-magnéticas. Nos interesa también el caso de fermiones en tres dimensiones los cuales se encuentran atrapados en la dirección z e interactúan entre ellos para formar pares de Cooper en las direcciones x, y ; en esta forma restringimos la dimensión de los pares para formar estructuras *casi-2D* que pueden simular las estructuras de los cupratos.

En el Capítulo 4 se investiga un modelo más realista de los superconductores cupratos *casi-2D*. Se considera un gas confinado dentro de un conjunto infinito de canales unidimensionales perpendiculares a una dirección z y con una separación entre planos adyacentes a . La fórmula para la temperatura de transición BEC, para un gas de bosones en un plano calculada por Wen y Kan [27] se generaliza para considerar bosones como pares de Cooper los cuales han sido formados a partir de fermiones y por lo tanto tienen una relación de dispersión lineal. Además, para simular a los superconductores orgánicos *casi-1D* generalizamos aún más el espectro de energía para simular un conjunto

infinito de cadenas de átomos separados por una distancia c .

En el Capítulo 5 se revisa un modelo estadístico simple de *mezcla* de fermiones desapareados más pares de Cooper que satisfacen una relación de dispersión lineal y que les permite llevar a cabo una BEC en dimensiones mayores que la unidad. Se calculan las temperaturas superconductoras críticas T_c en un gas de fermiones en donde al menos algunos de ellos han formado pares de Cooper. Consideramos primero el caso ideal en donde la densidad de estados es la superficie de Fermi esférica. Luego se usan densidades de estado electrónicos procedentes del gas ideal de fermiones sumergido en una red cristalina que se manifiesta como densidades de estado con singularidades tipo van Hove (logarítmicas) o de Abrikosov (de potencia).

En el Capítulo 6 damos nuestras conclusiones.

Capítulo 2

El gas ideal de Fermi en $d > 0$ dimensiones

En este capítulo se revisa el gas ideal de Fermi para cualquier dimensión espacial positiva, $d > 0$. El interés en el comportamiento cuántico del gas ideal de Fermi (iFG por sus siglas en inglés) en cualquier dimensión a temperaturas suficientemente bajas, se ha incrementado en estos sistemas ya que son considerados como posibles precursores de pares de Cooper que a su vez forman condensados de Bose-Einstein. Esto ha sido estudiado experimentalmente en nubes ultra-enfriadas de átomos neutros fermiónicos como el ^6Li en trampas opto-magnéticas [28]-[31], en recientes experimentos en gases diluidos de átomos fermiónicos de ^40K y moléculas de $^6\text{Li}_2$ Ref. [32], se ha observado un condensado fermiónico lo cuál representa la evidencia experimental de la formación en el laboratorio de pares de átomos fermiónico capaces de condensarse. Teóricamente ya ha sido discutido ampliamente por varios autores [33]-[34], sin embargo, un análisis más profundo del papel que juega la dimensión en el sistema no se ha realizado.

Como hipótesis de trabajo suponemos que la termodinámica se cumple en espacios de dimensión no necesariamente entera, consideramos la dimensión como una variable continua obtenida por una interpolación entre los familiares espacios Euclidianos para d entera. Experimentalmente, las anisotropías encontradas en la resistividad en los superconductores cupratos de hasta 5 ordenes de magnitud, [5] y [36]-[38] sugieren la conveniencia de hacer una descripción en dimensiones intermedias entre $d = 2$ y $d = 3$. Se puede demostrar que una razón grande pero finita en la resistividad observada se puede explicar por una situación de dimensionalidad $(2 + \epsilon)D$, o "casi-2D". Por otro lado, en las Refs. [27] y [39] se ha sugerido un valor teórico de $d \simeq 2.03$ para YBCO como más

realista que $d = 2$ ya que esta refleja el acoplamiento entre capas de CuO (o BaO o SrO).

La suposición de que los espacios con dimensión no entera pueden utilizarse como una herramienta analítica en la mecánica cuántica atómica y molecular, y en la mecánica estadística, se sustenta en observaciones tales como el hecho de que el elemento de volumen (hiper)esférico d -dimensional [33]

$$\frac{dV(d)}{dr} = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} r^{d-1}, \quad (2.1)$$

es una función analítica de la variable d , donde $\Gamma(x)$ es la función Gamma de Euler. La suposición implícita, en las diferentes aplicaciones en mecánica cuántica y otras áreas, es que la misma expresión es válida con legitimidad matemática para d no entera.

Es importante distinguir entre estos espacios con d general obtenidos por interpolación para d entera de los llamados conjuntos fractales a los cuales se asocia una dimensión generalmente no entera de Hausdroff [48]. Los últimos son normalmente vistos como un conjunto de puntos contenidos en un espacio Euclidiano huésped, éstos no tienen una invariancia rotacional ni traslacional con respecto al origen siendo por lo tanto, no-isotrópicos y no-uniformes y así, no son espacios Euclidianos.

En este capítulo, calculamos las propiedades termodinámicas de un gas ideal de N fermiones dentro de una caja de volumen $V \equiv L^d$, tal que en el límite termodinámico $N \rightarrow \infty$ y $V \rightarrow \infty$, la densidad de número $n \equiv N/V$ permanece constante. El cálculo se realiza en $d > 0$ con d continua. A partir del potencial termodinámico (o gran potencial) describimos el sistema en cualquier dimensión. Calculamos las propiedades termodinámicas y particularizamos los resultados para el potencial químico, la capacidad

calorífica y se determina la velocidad del sonido tanto isotérmica como adiabática. Las gráficas de las variables termodinámicas en varias dimensiones, no necesariamente enteras, muestran que existe una *estructura* en función de la temperatura en el potencial químico y en el calor específico si y sólo si $d < 2$. Esto contrasta notoriamente con el caso del gas ideal de bosones en donde la *estructura* que identificamos como la BEC existe si y sólo si $d > 2$. Se considera en cada uno de los casos una posible transición de fase.

2.1 El potencial termodinámico

Consideremos un gas ideal de fermiones en una caja de $d > 0$ dimensiones, de masa m , en el vacío. El hamiltoniano que describe al sistema es $H = \sum_{i=1}^d p_i^2/2m$, mientras que sus eigenvalores se encuentran haciendo una generalización a $d > 0$ de la ecuación (A. 9) están dados por

$$\varepsilon_{n_i} = \frac{2\pi^2\hbar^2}{mL^2} \sum_{i=1}^d n_i^2, \quad (2. 2)$$

donde L es el tamaño de la caja y donde $n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Como $k_i \equiv (2\pi/L)n_i$ (ver Apéndice A), (2. 2) puede ser escrita como

$$\varepsilon_{k_i} = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^d k_i^2. \quad (2. 3)$$

Las propiedades termodinámicas de este sistema se encuentran calculando el potencial termodinámico $\Omega(T, L^d, \mu) = U - TS - \mu N$, donde U es la energía interna, T la temperatura absoluta, S la entropía, μ el potencial químico, y N el número de partículas.

$$\Omega(T, L^d, \mu) = -k_B T \sum_{k_i} \ln[1 - e^{-\beta(\varepsilon_{k_i} - \mu)}], \quad (2. 4)$$

con $\beta \equiv 1/(k_B T)$, y k_B la constante de Boltzmann. Usando la expansión logarítmica, $\ln(1+x) = -\sum_{l=1}^{\infty} (-x)^l/l$, válida si $x < 1$, (2. 4) se puede escribir como

$$\begin{aligned}\Omega(T, L^d, \mu) &= k_B T \sum_{k_i} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-e^{-\beta(\epsilon_{k_i} - \mu)})^l}{l} \\ &= k_B T \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-e^{\beta\mu})^l}{l} \sum_{k_i} e^{-\beta l \left[\sum_{i=1}^d (\hbar^2/2m) k_i^2 \right]}\end{aligned}\quad (2. 5)$$

En el límite del continuo, donde el volumen V y el número de partículas N , son grandes, la suma se puede remplazar en (2. 5) por una integral sobre \mathbf{k} , donde \mathbf{k} es un vector d -dimensional.

$$\sum_{k_i} \rightarrow (2s+1)(L/2\pi)^d \int d^d \mathbf{k} \quad (2. 6)$$

con s el espín de la partícula. Así

$$\begin{aligned}\Omega(T, V, \mu) &= k_B T (2s+1)(L/2\pi)^d \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-e^{\beta\mu})^l}{l} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 e^{-\beta l (\hbar^2/2m) k_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 e^{-\beta l (\hbar^2/2m) k_2^2} \\ &\dots \times \int_{-\infty}^{\infty} dk_d e^{-\beta l (\hbar^2/2m) k_d^2}\end{aligned}\quad (2. 7)$$

Integrando, la ecuación (2. 7) resulta ser

$$\Omega = (2s+1) \beta^{-(d/2+1)} \left(\frac{mL^2}{2\pi\hbar^2} \right)^{d/2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-e^{\beta\mu})^l}{l^{d/2+1}} \quad (2. 8)$$

La suma infinita se puede expresar en términos de las llamadas funciones de Fermi $f_\sigma(z)$ (ver Apéndice D de Ref. [33]),

$$f_\sigma(z) \equiv \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^\infty dx \frac{x^{\sigma-1}}{z^{-1}e^x + 1} = - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-z)^l}{l^\sigma}, \quad (2. 9)$$

Definiendo $z \equiv e^{\beta\mu}$ la fugacidad, (2. 8) toma la forma

$$\Omega = - (2s+1) \left(\frac{mL^2}{2\pi\hbar^2} \right)^{d/2} \frac{f_{d/2+1}(z)}{\beta^{d/2+1}} \equiv -A_d \frac{f_{d/2+1}(z)}{\beta^{d/2+1}}, \quad (2. 10)$$

ecuación que define A_d . Partiendo de la Ec. (2. 10) es posible encontrar todas las propiedades termodinámicas de un gas monoatómico usando la relación $d\Omega = -SdT -$

$PdV - Nd\mu$, donde P es la presión. En esta representación, el gran potencial $\Omega(T, V, \mu) = -PV$ es la relación fundamental a partir de la cual se pueden derivar todas las variables termodinámicas del sistema, es decir,

$$S = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} \right)_{V, \mu}, \quad P = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial V} \right)_{T, \mu} = - \frac{\Omega}{V} \quad y \quad N = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right)_{T, V}. \quad (2. 11)$$

2.2 Potencial químico y densidad de estados

El potencial químico $\mu(T)$ como función de la temperatura absoluta T para cualquier dimensión espacial $d > 0$ está dado implícitamente por la ecuación de número, la cual se encuentra sustituyendo (2. 10) en la ecuación correspondiente de (2. 11)

$$N(T, L^d, \mu) = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right)_{T, V} = A_d \frac{f_{d/2}(z)}{\beta^{d/2}} \quad (2. 12)$$

que en forma integral es igual a

$$N(T, L^d, \mu) = \int_0^\infty d\varepsilon g(\varepsilon) n(\varepsilon) = \frac{A_d}{\Gamma(d/2)} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^{d/2-1}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1}, \quad (2. 13)$$

donde $n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1}$ es la distribución de Fermi-Dirac y $g(\varepsilon)$ es la densidad de estados total. De esta expresión se identifica $g(\varepsilon)$ como

$$g(\varepsilon) = \frac{A_d}{\Gamma(d/2)} \varepsilon^{d/2-1} = (2s+1) \left(\frac{mL^2}{2\pi\hbar^2} \right)^{d/2} \frac{\varepsilon^{d/2-1}}{\Gamma(d/2)}, \quad (2. 14)$$

que coincide con la reportada por varios autores [50, 26].

En $T=0$, la función de distribución de Fermi-Dirac $n(\varepsilon) = [e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1]^{-1} = \theta(E_F - \varepsilon)$ es la función escalón y $\mu(T=0) = E_F$, donde $E_F \equiv \hbar^2 k_F^2 / 2m$ es la energía de Fermi donde k_F es el número de onda de Fermi; en este caso, la ecuación (2. 13) se puede escribir como

$$N(T=0, L^d, E_F) = \frac{2A_d}{d\Gamma(d/2)} E_F^{d/2}, \quad (2. 15)$$

sustituyendo A_d en (2. 15) se encuentra la ecuación para la densidad de número

$$n \equiv \frac{N}{L^d} = \frac{2(2s+1)}{d \Gamma(d/2)} \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^{d/2} E_F^{d/2}, \quad (2. 16)$$

de donde recuperamos la expresión obtenida en [50, 51] para la densidad de número fermiónica, con $s = 1/2$, i.e.,

$$n = \frac{k_F^d}{2^{d-2} \pi^{d/2} d \Gamma(d/2)}, \quad (2. 17)$$

la cual se reduce a los resultados familiares $2k_F/\pi$, $k_F^2/2\pi$ y $k_F^3/3\pi^2$ para $d = 1, 2$ y 3 , respectivamente. Igualando las ecuaciones (2. 13) y (2. 15) ya que $N = cte$, obtenemos

$$\int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^{d/2-1}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} = \frac{2}{d} E_F^{d/2}. \quad (2. 18)$$

Definiendo la temperatura de Fermi por la relación $E_F \equiv k_B T_F$, el potencial químico $\mu(T)$ se obtiene numéricamente de la Eq. (2. 18), que puede reexpresarse también en la siguiente forma

$$T^{d/2} \Gamma(d/2) f_{d/2}(e^{\beta\mu}) = (2/d) T_F^{d/2}. \quad (2. 19)$$

La función de Fermi-Dirac [33] se puede escribir, para propósitos de cálculo numérico, en términos de la función "polilogaritmo" [52] como

$$f_{d/2}(z) \equiv -PolyLog[d/2, -z] = 2/d(T/T_F)^{d/2} \Gamma(d/2). \quad (2. 20)$$

$$PolyLog[\sigma, z] \equiv \sum_{l=1}^{\infty} z^l / l^\sigma, \quad \sigma > 0 \quad y \quad 0 \leq z < \infty, \quad (2. 21)$$

Para encontrar $\mu(T)$ se requiere invertir la ecuación (2. 19), debido a la complejidad analítica que representa la inversión de series infinitas, nosotros haremos esta inversión numéricamente para todo valor de T y de d .

En el caso particular $d = 2$, el potencial químico tiene una expresión analítica ya que $f_1(z)$ de (2. 9) es la función log así que (2. 19) da

$$f_1(z) = \ln(1 + z) = T_F/T, \quad (2. 22)$$

lo que nos permite obtener la bien conocida fórmula [53]

$$\mu(T)/E_F = T/T_F \ln(e^{T_F/T} - 1) \xrightarrow{T \rightarrow 0} 1, \quad (2. 23)$$

lo que nos da una expresión analítica simple del potencial químico como función de T y que únicamente satisface $\lim_{T \rightarrow 0} \mu(T)/E_F \rightarrow 1$. Sin embargo, para $d \neq 2$, $\mu(T)$ no tiene una forma cerrada explícita en T/T_F y se requiere un análisis numérico para obtenerla.

A continuación encontraremos las expresiones del potencial químico para los valores extremos $T/T_F < 1$ y $T/T_F > 1$ que corresponde al caso clásico.

Para $T/T_F < 1$, z es grande y podemos usar la expansión de Sommerfeld d -dimensional [Ref. 33] p. 510) $f_\sigma(z) \simeq (\ln z)^\sigma / \Gamma(\sigma + 1) + (\pi^2/6)(\sigma - 1)(\ln z)^{\sigma-2} / \Gamma(\sigma) + \dots$; la serie se puede cortar e invertir se encuentra que para cualquier dimensión

$$\mu(T)/E_F \xrightarrow{T/T_F \rightarrow 0} 1 - (d/2 - 1)(\pi^2/6)(T/T_F)^2 + O(T^4). \quad (2. 24)$$

Este resultado ya ha sido reportado en [55] en tres dimensiones y en [50] para cualquier dimensión.

Para $T/T_F > 1$, z es pequeña y en este caso la serie $f_\sigma(z) \simeq z - z^2/2^\sigma + \dots$ se puede cortar en el segundo término y se obtiene que

$$\mu(T)/E_F \xrightarrow{T/T_F \rightarrow \infty} - (T/T_F) \ln \left[\Gamma(d/2) (T/T_F)^{d/2} (d/2) \right], \quad (2. 25)$$

lo que nos da una expresión analítica para T grande o el bien conocido límite clásico.

De (2. 25) vemos que el potencial químico para temperaturas grandes siempre es negativo. Comparando las ecuaciones (2. 24) y (2. 25), y ya que la primera corrección a la unidad de $\mu(T)/E_F$ en la ecuación (2. 24) es positiva para toda $d \leq 2$, encontramos que existe un máximo en el potencial químico como función de la temperatura si $d \leq 2$.

Los valores de $\mu(T)/E_F$ para T intermedia, se obtienen resolviendo numéricamente la ecuación (2. 20). Esto se realizó con el programa *MATHEMATICA* encontrando para cada temperatura, el valor correspondiente de $\mu(T)/E_F$, esto es $\{T/T_F, \mu(T)/E_F\}$. Los resultados se encuentran en la Figura 2.1 para varios valores de d . La gráfica en $d = 2$ y 3 muestra que $\mu(T)$ es una función monótona decreciente de la temperatura, (*decrece*) en T desde la energía de Fermi E_F (la cual sólo depende de la densidad de número y de la masa) a $T = 0$, hasta el valor clásico que diverge logarítmicamente a $-\infty$ cuando $T \rightarrow \infty$. Sin embargo, para $d < 2$, encontramos un comportamiento *novedoso y anómalo* que consiste en que $\mu(T)$ no es monótona decreciente. Primero se incrementa cuadráticamente cuando T se incrementa, después cambia de curvatura, adquiere un máximo y finalmente decrece monótonicamente hacia el valor clásico. Este inesperado incremento en $\mu(T)$ para $d < 2$ al crecer T , representa una *estructura* reportada en [34] para un gas ideal unidimensional $d = 1$ usando una estadística intermedia entre la de Bose-Einstein y la de Fermi-Dirac, llamada paraestadística. Sin embargo no se ha hecho un análisis completo del significado de este comportamiento el cual podría dar origen a una transición de fase. Siguiendo un análisis sustituto al aquí propuesto para $d = 1$, en la Ref. [56] p. 192 se encuentra y grafica el potencial químico para temperaturas bajas pero sin comentarios.

En la figura 2.1 se grafica el potencial químico obtenido resolviendo numéricamente la ecuación (2. 20) como función de la temperatura para un gas ideal de Fermi para $d =$

3.2.1.1 2 y 1/4. En recuadro inferior izquierdo se muestran los valores de los máximos del potencial químico en unidades de $E_F \equiv k_B T_F$, como función de la dimensión, mientras que en el recuadro inferior derecho se muestran los valores de la temperatura T_{\max} en unidades de T_F que corresponden a estos máximos en el potencial químico. Nótese que para $d \geq 2$, $\mu(T)/E_F = 1$, y $T_{\max}/T_F = 0$, recuperando los casos sin anomalía.

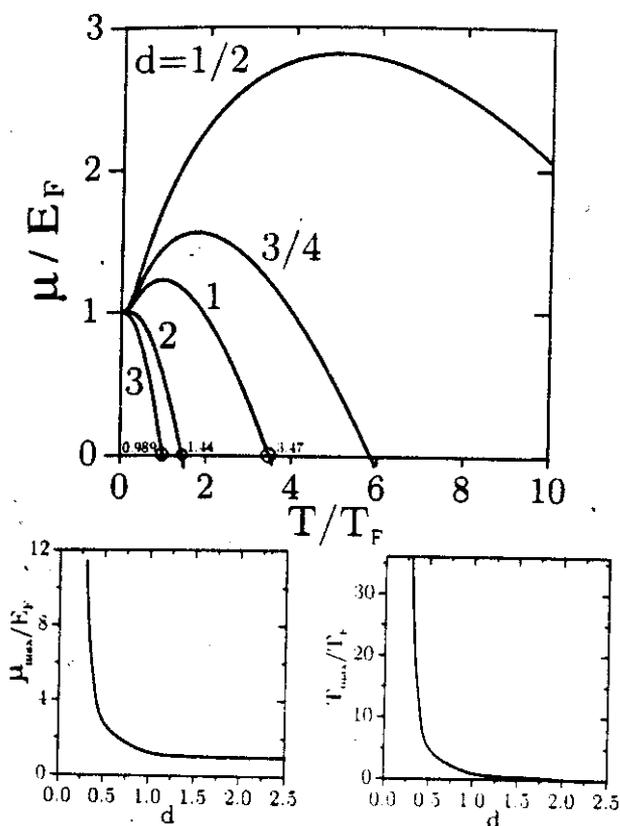


Figura 2.1 Potencial químico resolviendo numéricamente la ecuación (2. 20) como función de la temperatura para un gas ideal de Fermi en $d = 3, 2, 1, 1/2$

2.3 Entropía y presión

De la relación para la entropía $S = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial T}\right)_{V,\mu}$, y de la Ec. (2. 10) obtenemos la siguiente expresión para S

$$S/Nk_B = (d/2 + 1) \frac{f_{d/2+1}(z)}{f_{d/2}(z)} - d/2 \frac{f_{d/2}(z)}{f_{d/2-1}(z)}. \quad (2. 26)$$

El límite $T \rightarrow 0$ se obtiene usando la expansión asintótica en $f_{d/2}(z)$ para z grande, obteniendo

$$S/Nk_B \simeq d \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{k_B T}{E_F} \right) + \dots \xrightarrow{T \rightarrow 0} 0, \quad (2. 27)$$

que claramente cumple con la tercera ley de la termodinámica, ya que cuando $T \rightarrow 0$, la entropía tiende a cero como se muestra en la Figura 2.2

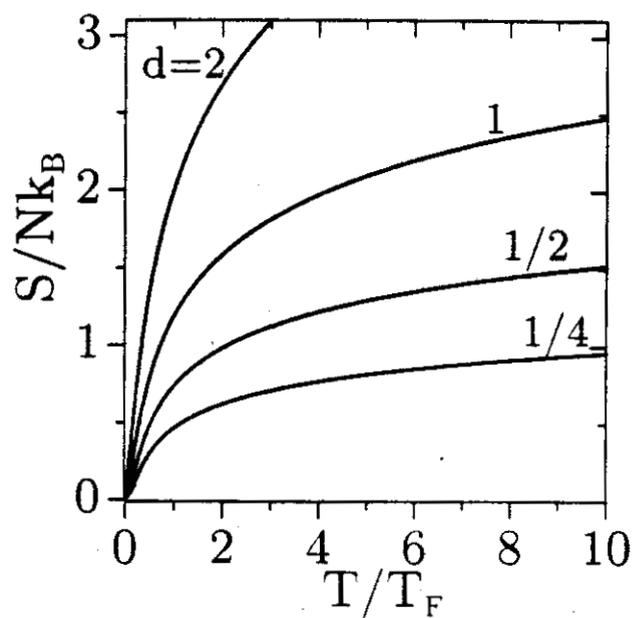


Figura 2.2 Entropía en unidades de Nk_B , como función de la temperatura, para un gas ideal de Fermi:

La figura 2.2 muestra el comportamiento de la entropía como función de la temperatura para diferentes dimensiones, el potencial químico se calcula resolviendo numéricamente

la ecuación (2. 20). Se encuentra que la entropía crece con la dimensión.

La presión termodinámica se encuentra de la relación (2. 10) y de la relación de Euler que implica $\Omega = -PV$, de donde resulta

$$PV = A_d \frac{f_{d/2+1}(z)}{\beta^{d/2+1}} = \frac{N}{\beta} \frac{f_{d/2+1}(z)}{f_{d/2}(z)}. \quad (2. 28)$$

Para $T \rightarrow 0$, usando la expansión asintótica [33] para $f_{d/2}(z)$ se encuentra

$$PV/NE_F \xrightarrow{T \rightarrow 0} \left(\frac{2}{d+2} \right) + \frac{\pi^2}{6} (T/T_F)^2 + \dots \quad (2. 29)$$

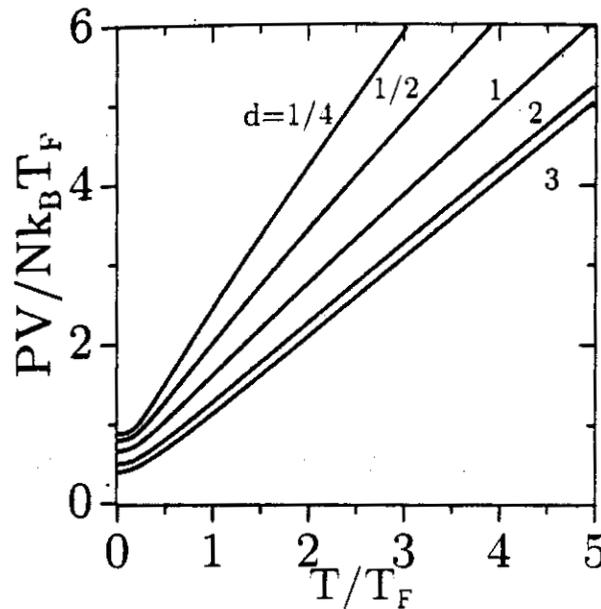


Figura 2.3 Presión termodinámica en unidades de $Nk_B T_F/V$, como función de la temperatura, para un gas ideal de Fermi.

2.4 Energía interna

La energía interna del sistema se puede encontrar si calculamos [33]

$$U(V, T) = -k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\Omega}{k_B T} \right)_{V, \mu} \quad (2. 30)$$

de donde

$$U(V, T) = A_d \Gamma(d/2 + 1) \frac{f_{d/2+1}(z)}{\beta^{d/2+1}}, \quad (2. 31)$$

o, usando la ecuación (2. 12) para N y normalizando con respecto a la energía de Fermi obtenemos

$$U(V, T)/NE_F = \frac{d}{2} (T/T_F) \frac{f_{d/2+1}(z)}{f_{d/2}(z)}. \quad (2. 32)$$

Comparando (2. 32) con (2. 28), obtenemos una generalización de la relación $PV = \frac{2}{3}U$ para un gas ideal de fermiones en el límite no relativista

$$PV = \frac{2}{d}U. \quad (2. 33)$$

Los comportamientos asintóticos para la energía se obtienen de (2. 32). Así, para $T \rightarrow 0$, usando la expansión asintótica [33] para $f_{d/2}(z)$ se encuentra

$$2U(T)/dNE_F \xrightarrow{T \rightarrow 0} \left(\frac{2}{d+2} \right) + \frac{\pi^2}{6} (T/T_F)^2 + \dots, \quad (2. 34)$$

entanto que para altas temperaturas, en el límite clásico $T \rightarrow \infty$, la fugacidad $z \ll 1$ y la función $f_\alpha(z) \simeq z$, de (2. 32) obtenemos

$$U/N \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{d}{2} k_B T, \quad (2. 35)$$

en concordancia con el teorema de equipartición de la energía. En la ecuación (2. 34), la primera corrección del valor de la energía para $T = 0$, es positiva para toda d . Por otra parte, para T grande, la ecuación (2. 35) corresponde al valor clásico.

2.5 Calor específico

El calor específico a volumen constante se puede obtener de la energía interna (2. 32)

como $C(V, T) = (\partial U / \partial T)_V$, quedándonos

$$C(V, T)_V = \frac{d}{2} A_d \left[\left[\frac{d}{2} + 1 \right] k_B \frac{f_{d/2+1}(z)}{\beta^{d/2}} + \frac{(\partial z / \partial T)_V}{\beta z} \frac{f_{d/2}(z)}{\beta^{d/2+1}} \right]. \quad (2. 36)$$

Usando la relación

$$\frac{1}{z} \left(\frac{\partial z}{\partial T} \right)_{N,V} = -k_B \beta (d/2) \frac{f_{d/2}(z)}{f_{d/2-1}(z)}, \quad (2.37)$$

se obtiene de la derivada con respecto a T de la ecuación de número (2.12), sustituyendo (2.12) en la ecuación (2.36) encontramos que

$$\left[\frac{2C(V,T)}{dNk_B} \right]_V = \left[\frac{d}{2} + 1 \right] \frac{f_{d/2+1}(z)}{f_{d/2}(z)} - \left(\frac{d}{2} \right) \frac{f_{d/2}(z)}{f_{d/2-1}(z)}. \quad (2.38)$$

Los límites para z grande, y z pequeña, se obtienen derivando las ecuaciones (2.34) y (2.38) para dejar el calor específico como

$$C_V/Nk_B \xrightarrow{T \rightarrow 0} (d/2) \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{T}{T_F} \right) \quad (2.39)$$

$$2C_V/dNk_B \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 1 + \frac{z}{2^{d/2+1}} (1 - d/2). \quad (2.40)$$

En la Figura 2.4 se muestra la gráfica del calor específico como función de la temperatura en un gas ideal de Fermi para $d = 3, 2, 1, 1/2$ y $1/4$. Se observa que si $d < 2$, el calor específico como función de T se aproxima al límite clásico por arriba, consecuentemente la curva de C_v vs T presenta un máximo que no observamos cuando $d \geq 2$ donde el comportamiento es monótono creciente hacia el valor clásico. En la gráfica abajo a la izquierda se muestran los valores de los máximos en el calor específico como función de la dimensión d . De aquí podemos observar que los máximos tienen un valor máximo cuando $d \simeq 0.4$ donde retornan al valor clásico conforme $d \rightarrow 0$, y que no se van a infinito como pudimos suponer. En la gráfica inferior derecha se muestran los valores de la temperatura T_{\max} en unidades de T_F que corresponden a estos máximos en el calor específico. Este peculiar resultado para el gas ideal de Fermi en $d < 2$ dimensiones, en donde se observa una estructura en forma de un comportamiento no-monotónico en el potencial

químico y en el calor específico, contrasta con el que se obtiene en el gas ideal de Bose donde la *estructura* aparece para toda $d > 2$, (ver Fig. 2.5 de Ref. [26] para d entero, y Fig. 2 de Ref [58] para toda $d > 2$). Como veremos en el siguiente capítulo, en este último caso, la estructura observada es la condensación de Bose-Einstein en donde aparece una cúspide en el calor específico a la temperatura crítica de transición para toda $2 < d \leq 4$, y un salto en su valor para toda $4 < d < \infty$. El comportamiento en μ y C_v ha sido reportado por Souza Vieira [34] para un gas ideal en d -dimensiones usando estadísticas intermedias a las de Bose-Einstein y Fermi-Dirac, ó las llamadas paraestadísticas, utilizan un parámetro p que representa el máximo número de partículas permitidas por estado. Para $p = 1$ se reproduce la estadística de Fermi-Dirac mientras que para $p \rightarrow \infty$ la de Bose-Einstein. Encuentran el potencial químico y el calor específico como función de la temperatura analizando su comportamiento al variar el parámetro p , sin embargo no realizan un estudio del comportamiento termodinámico del sistema con la dimensión d .

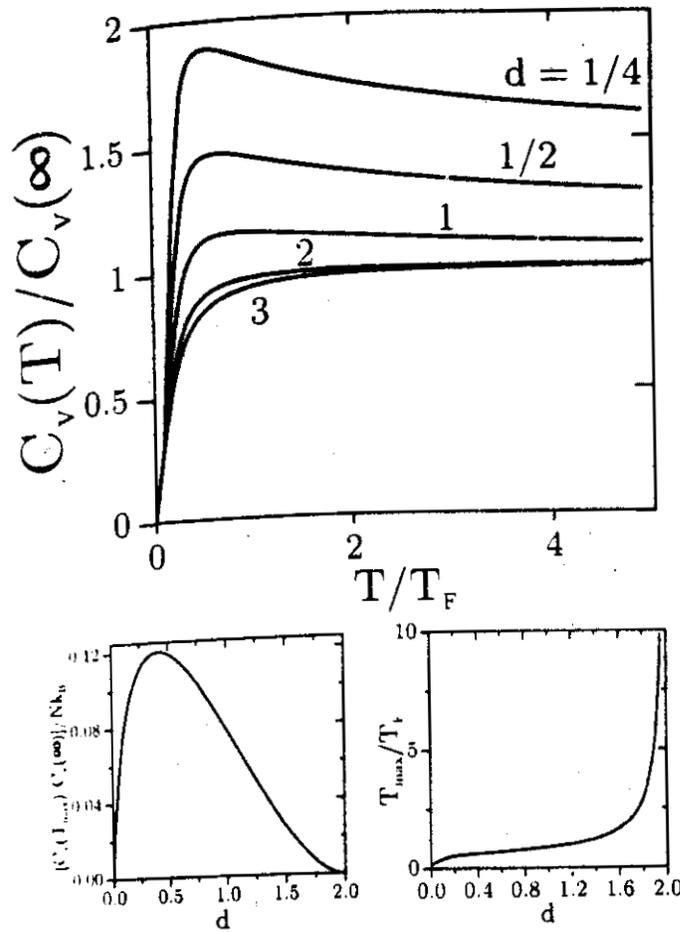


Figura 2.4 Calor específico vs temperatura absoluta, en un gas ideal de Fermi con $l = 3, 2, 1, 1/2$ y $1/4$.

Velocidades del sonido

El comportamiento anómalo en el calor específico se refleja en la velocidad del sonido en estos sistemas. Para exhibirlo hemos calculado las velocidades del sonido adiabática c_{ad} , en $d > 0$ dimensiones para el gas ideal de Fermi.

Como la presión es una función tanto de la densidad ρ como de la temperatura T , antes de que llegue la onda sonora existe un equilibrio a una presión P_0

y una densidad correspondiente ρ_0 . En el sonido, las variaciones de presión respecto al valor de equilibrio son extremadamente pequeñas, la velocidad del sonido en un gas se puede definir como los cambios de la presión con la densidad,

$$c^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right), \quad (2. 41)$$

siendo esencial saber cómo se lleva a cabo este proceso. En la Ref. [35] Feynman deduce la ecuación de onda del sonido encontrando la conexión de la velocidad de la onda con la rapidez de variación de la presión con la densidad, menciona que Newton fue el primero en calcular la velocidad del sonido en un gas suponiendo una compresión isotérmica de manera que

$$mc_T^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)_T \quad (2. 42)$$

donde $n = \rho/m$ es la densidad de número y m la masa de cada partícula, en el aire a 0°C , obtuvo un valor teórico de $c_T = 290 \text{ m/seg}$, el cual no coincide con la velocidad del sonido medida experimentalmente en la atmósfera. Laplace más adelante propone que la presión y la densidad cambian adiabáticamente en una onda sonora. El flujo de calor de la región comprimida a la enrarecida es despreciable mientras que la longitud de onda sea larga respecto al camino libre medio, de esta forma, la velocidad del sonido adiabática se define como

$$mc_S^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)_S \quad (2. 43)$$

obteniendo un valor teórico de $c_S = 331 \text{ m/seg}$ el cual está en concordancia con el reportado experimentalmente en la atmósfera, encuentra que, la velocidad de las ondas sonoras en la atmósfera se transmiten adiabáticamente. La determinación experimental de la velocidad del sonido en gases rarificados es un importante método para obtener valores del calor específico. En esta sección calcularemos la velocidad del sonido isotérmica

c_T , la velocidad del sonido adiabática c_S y la relación que existe entre el calor específico C_V , con c_T y c_S en un gas ideal de Fermi en d dimensiones.

2.6.1 Velocidad del sonido isotérmica

La velocidad del sonido isotérmica se encuentra sustituyendo (2. 28) en (2. 42)

$$mc_T^2 = \frac{(A_d/L^d)}{\beta^{d/2+1}} \left(\frac{\partial f_{d/2+1}(z)}{\partial n} \right)_T = \frac{N}{f_{d/2}(z)} \frac{1}{\beta L^d} \left(\frac{\partial f_{d/2+1}(z)}{\partial n} \right)_T \quad (2. 44)$$

Usando la relación

$$\left(\frac{\partial f_{d/2+1}(z)}{\partial n} \right)_T = \frac{df_{d/2+1}(z)}{dz} \left(\frac{\partial z}{\partial n} \right)_T = \beta f_{d/2}(z) \left(\frac{\partial \mu}{\partial n} \right)_T = \frac{1}{n} \frac{f_{d/2}(z)}{f_{d/2-1}(z)}, \quad (2. 45)$$

de la última igualdad se obtiene de la ecuación de número (2. 12), usando este resultado en (2. 44) obtenemos una expresión para la velocidad del sonido isotérmica en $d > 0$ dimensiones

$$mc_T^2 = k_B T \frac{f_{d/2}(z)}{f_{d/2-1}(z)}. \quad (2. 46)$$

Normalizando con $E_F \equiv mv_F^2/2 = k_B T_F$ (2. 46) tenemos

$$[c_T(T)/v_F]^2 = \frac{1}{2} (T/T_F) \frac{f_{d/2}(z)}{f_{d/2-1}(z)}. \quad (2. 47)$$

A continuación encontraremos las expresiones asintóticas para la velocidad isotérmica.

Usando la expansión asintótica [33] para $f_{d/2}(z)$ cuando $T \rightarrow 0$ encontramos

$$[c_T(T)/v_F]^2 \xrightarrow{T/T_F \rightarrow 0} \mu/(dE_F) + \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{d}{2} - 1 \right) \frac{(T/T_F)^2}{\mu/E_F} + \dots \quad (2. 48)$$

En $T = 0$, $\mu = E_F$ obtenemos de (2. 48)

$$c_T(0) = v_F/\sqrt{d}, \quad (2. 49)$$

Usando este resultado en (2. 47), obtenemos

$$[c_T(T)/c_T(0)]^2 = \frac{d}{2} (T/T_F) \frac{f_{d/2}(z)}{f_{d/2-1}(z)}. \quad (2. 50)$$

Por otra parte, en el límite $T \rightarrow \infty$, z es pequeña y $f_\sigma(z) \simeq z - z^2/2^\sigma + \dots$, de modo que encontramos que

$$[c_T(T)/v_F]^2 \xrightarrow{T/T_F \rightarrow \infty} T/(2T_F), \quad (2. 51)$$

$$c_T^2(T) \xrightarrow{T/T_F \rightarrow \infty} k_B T/m, \quad (2. 52)$$

que corresponde al caso límite del gas ideal clásico. Usando en (2. 42) la ecuación de estado del gas ideal $P = nk_B T$, se sigue (2. 51).

Las expresiones asintóticas para $c_T(T)$ (2. 48) y (2. 51) muestran que para T pequeña comparada con T_F , $[c_T(T)/c_T(0)]^2$ parte de 1 con pendiente negativa si $d < 2$. Al aumentar T cambia su curvatura, adquiere un mínimo, y finalmente se incrementa linealmente como T hasta obtener su valor clásico. En la Figura 2.5 graficamos $c_T^2(T)/c_T^2(0)$ como función de la temperatura T/T_F para $d = 1/4, 1/2, 1, 2$ y 3 . Notemos que c_T desarrolla un mínimo para $d < 2$ el cual se profundiza cuando d decrece. Esto se ve más claramente en la gráfica de abajo a la izquierda donde mostramos los valores de los mínimos en la velocidad del sonido isotérmica $c_T(T_{min})$, comparados con $c_T(0)$, como función de $\text{Log } d$, donde T_{min} son los valores de la temperatura que corresponde a los mínimos en la gráfica de arriba.

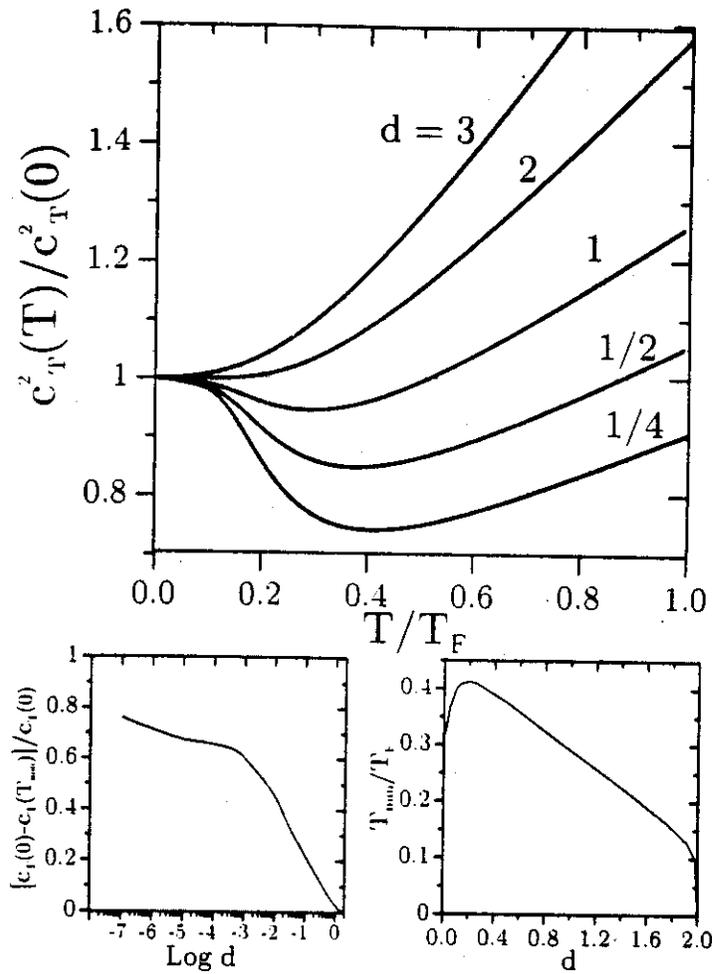


Figura 2.5 $c_T^2(T)/c_T^2(0)$ donde $c_T(T)$ es la velocidad del sonido isotérmica en un IFG como función de la temperatura T/T_F , para $d = 1/4, 1/2, 1, 2$ y 3 . En la gráfica de abajo a la izquierda mostramos los valores de los mínimos en la velocidad del sonido isotérmica comparados con $c_T(0)$ como función de $\text{Log } d$, y en la gráfica de abajo a la derecha los valores de la temperatura T_{\min} que corresponden con los mínimos en la gráfica principal.

2.6.2 Velocidad del sonido adiabática

La velocidad del sonido adiabática c_S en un gas de Fermi, se obtiene de la ecuación de estado adiabática para un gas ideal en d -dimensiones, (Ref. [33], p. 229)

$$PV^\gamma = \text{const} \equiv N^\gamma B, \quad (2.53)$$

donde $\gamma \equiv 1 + 2/d$, N el número de partículas y B alguna constante. De aquí

$$P = n^\gamma B, \quad (2.54)$$

donde $n = N/V$ la densidad de número. La velocidad del sonido adiabática c_S está dada por la ecuación (2.43) la cual usamos junto con la ecuación (2.54) para mostrar que

$$mc_S^2 = \left(\frac{dP}{dn} \right)_S = \frac{\gamma P}{n}. \quad (2.55)$$

Introduciendo γ y (2.54) en (2.55), llegamos a que

$$mc_S^2 = \left(\frac{2}{d} + 1 \right) \frac{P}{n} = \left(\frac{2}{d} + 1 \right) k_B T \frac{f_{d/2+1}(z)}{f_{d/2}(z)}, \quad (2.56)$$

Es de utilizar en el último paso la ecuación (2.28). Normalizando mc_S^2 con la energía de Fermi $E_F = mv_F^2/2$, siendo v_F la velocidad de Fermi, la última ecuación se puede escribir como

$$[c_S(T)/v_F]^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{d} + 1 \right) (T/T_F) \frac{f_{d/2+1}(z)}{f_{d/2}(z)}. \quad (2.57)$$

Usando la expansión asintótica para $f_{d/2}(z)$ cuando $T/T_F \rightarrow 0$ encontramos

$$[c_S(T)/v_F]^2 \xrightarrow{T \rightarrow 0} \mu/(dE_F) + \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{d}{2} + 1 \right) \frac{(T/T_F)^2}{\mu/E_F} + \dots \quad (2.58)$$

Para $T = 0, \mu = E_F$ y obtenemos

$$c_S(0) = v_F/\sqrt{d}, \quad (2. 59)$$

la cual coincide con (2. 49). Tal y como se esperaba, a $T = 0$ las velocidades isotérmica y adiabática coinciden. Usando este resultado en (2. 57), obtenemos

$$[c_S(T)/c_S(0)]^2 = (d/2 + 1) (T/T_F) \frac{f_{d/2+1}(z)}{f_{d/2}(z)}. \quad (2. 60)$$

En el límite clásico $T \gg 1$, z es pequeña en este caso la serie $f_\sigma(z) \simeq z - z^2/2^\sigma + \dots$ se puede cortar en el segundo término obteniendo

$$[c_S(T)/c_S(0)]^2 \xrightarrow{T \rightarrow \infty} (d/2 + 1) (T/T_F). \quad (2. 61)$$

Las ecuaciones (2. 58) y (2. 61) muestran para $[c_S(T)/v_F]^2$ una pendiente positiva en cualquier dimensión y para los dos casos límite de T/T_F . La función $[c_S(T)/v_F]^2$ requiere de un análisis numérico en todo el intervalo de temperaturas. En la Figura 2.6 graficamos $c_S(T)/c_S(0)$ como función de la temperatura T/T_F , para $d = 1/4, 1/2, 1, 2$ y 3 . Notemos que las curvas para $d < 1$, al incrementar la temperatura, se cruzan con las curvas para $d = 1, 2$ y 3 y más adelante tienen un nuevo cruce hasta alcanzar su límite clásico; en el recuadro se muestra este comportamiento.

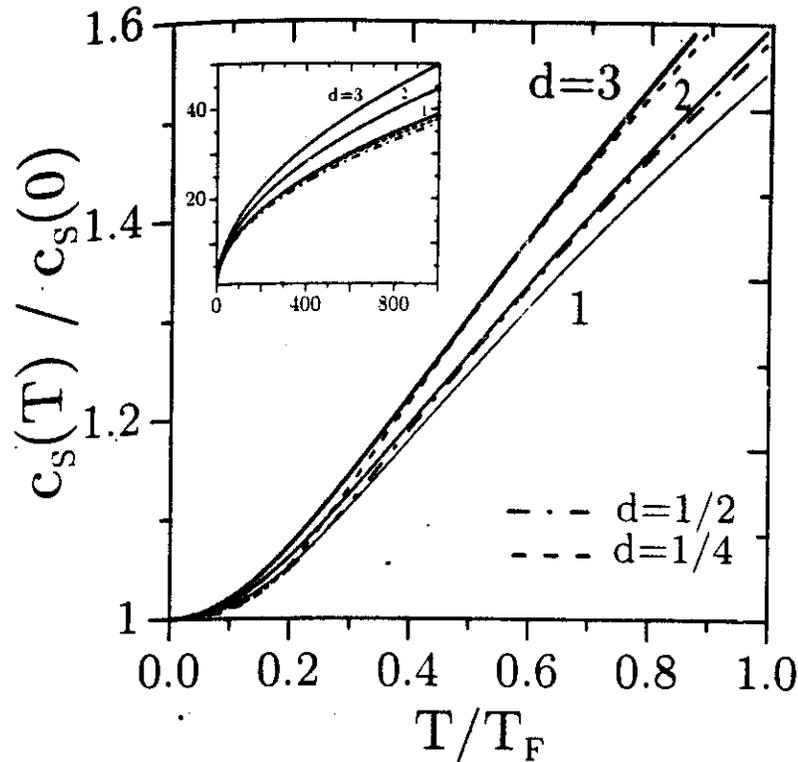


Figura 2.6 Velocidad del sonido adiabática para un gas ideal de Fermi como función de la temperatura T/T_F en $d = 1/4, 1/2, 1, 2$ y 3 . En el recuadro se muestra la gráfica para T/T_F muy grande.

2.6.3 Relación entre C_V , c_T y c_S

La determinación experimental de la velocidad de sonido en gases de baja densidad es un método importante para obtener el calor específico C_V . A continuación mostramos cómo encontramos la relación entre C_V , c_T y c_S para un gas ideal de fermiones. Reescribiendo las ecuaciones para el calor específico (2.38)

$$\left[\frac{2C(V, T)}{dNk_B} \right]_V = \left[\frac{d}{2} + 1 \right] \frac{f_{d/2-1}(z)}{f_{d/2}(z)} - \left(\frac{d}{2} \right) \frac{f_{d/2}(z)}{f_{d/2-1}(z)},$$

la velocidad del sonido isotérmica (2.46)

$$mc_T^2 = k_B T \frac{f_{d/2}(z)}{f_{d/2-1}(z)},$$

adiabática (2. 56)

$$mc_S^2 = \left(\frac{2}{d} + 1\right) k_B T \frac{f_{d/2+1}(z)}{f_{d/2}(z)},$$

es inmediato llegar a la siguiente relación

$$\left[\frac{2C(V, T)}{dNk_B} \right]_V = \left(\frac{d}{2}\right) \left(\frac{m}{k_B T}\right) (c_S^2 - c_T^2), \quad (2. 62)$$

entre las propiedades térmicas y mecánicas del sistema.

2.7 Conclusiones

En este capítulo hemos calculado, el gran potencial termodinámico en d dimensiones para un gas ideal de fermiones encontrando a partir de él sus propiedades termodinámicas. De los resultados encontrados podemos concluir que en el gas de Fermi en d dimensiones existe una *estructura*—i.e.; el comportamiento anómalo en la forma (no-monotónico) en el potencial químico, el máximo en el calor específico y el mínimo en la velocidad del sonido térmica— si se *reduce* la dimensión desde $d = 2$. Se encuentra que esta *estructura* representa una inestabilidad en el sistema. sin embargo, el estudio general de estas propiedades del gas ideal de fermiones en diferentes dimensiones es relevante ya que estos pueden ser considerados como posibles precursores de pares de Cooper. Se obtiene, a partir de los resultados encontrados, la relación que existe entre C_v , c_T y c_S .

Capítulo 3

Gases cuánticos atrapados por potenciales externos

El comportamiento de los gases cuánticos atrapados por potenciales externos de oscilador armónico (OA) es de nuestro interés porque reproduce el comportamiento de los bosónicos reales atrapados y ultra-enfriados por trampas opto-magnéticas en la región de pequeñas oscilaciones. La condensación de Bose-Einstein ha sido observada en los átomos bosónicos neutros en $^{87}_{37}\text{Rb}$ [15], $^{23}_{11}\text{Na}$ [16], ^7_3Li [17], ^1_1H [18], $^{85}_{37}\text{Rb}$ [19], ^4_2He [20] y $^{40}_{19}\text{K}$ [21], donde los superíndices corresponden al número de nucleones en el isótopo y el subíndice es el número de protones o de electrones atómicos. La BEC ha sido observada en bajas dimensiones. Görlitz et al. [22] reportan BEC de átomos de $^{23}_{11}\text{Na}$ en 1D; Schreck et al. [23] la observan con átomos de ^7_3Li en 1D; y Burger et al. [24] estudian las transiciones de fase en una nube de átomos de $^{87}_{37}\text{Rb}$ en casi-2D.

Los gases cuánticos han sido discutidos en general por varios autores [54]-[71]. El estudio de las propiedades de un gas de Bose en una trampa armónica isotrópica fue realizado por de Groot *et al.* [54]; Kleppner *et al.* [59] reportaron resultados teóricos de las propiedades termodinámicas de un gas de Bose confinado por una potencial armónica con una ley de potencias genérica (relación de dispersión) usando la teoría de perturbaciones; Ketterle *et al.* [60] y Pathria *et al.* [68] consideraron BEC de un gas de partículas confinado con potenciales de oscilador armónico en tres dimensiones (3D); Petrov *et al.* [69] y [70] discuten BEC en gases atrapados casi-2D y sus propiedades de coherencia en 3D. Dalfovo *et al.* [63] hacen una revisión de los gases de Bose diluidos atrapados, Grether *et al.* [67] consideran gases de

Bose, Fermi en d dimensiones atrapados por δ osciladores. El estudio teórico de los gases de fermiones atrapados ha ganado interés como posibles precursores de un condensado de pares de fermiones a bajas temperaturas [72]-[76]. Estos han sido estudiados también experimentalmente en nubes fermiónicas ultraenfriadas de átomos de ^{40}K en trampas opto-magnéticas [28]-[31].

Por otra parte, el descubrimiento de las estructuras casi-2D tales como los cupratos [3]-[4] o las estructuras casi-1D tales como los superconductores organo-metálicos (sales de Bechgaard) [7]-[9] nos ha motivado a investigar el confinamiento de los gases cuánticos y la sensibilidad de éstos a la dimensionalidad espacial como elementos fundamentales en la teoría.

En este capítulo se encuentra una solución exacta y completa para un gas cuántico en d -dimensiones sin interacción atrapado por $\delta \leq d$ potenciales de oscilador-armónico mutuamente perpendiculares, mientras que el gas se mueve libremente en las $(d - \delta)$ direcciones restantes. Se encuentra que este sistema se puede mapear a un gas con una dimensionalidad más alta en donde su comportamiento es el de un gas libre, cuya masa ha sido renormalizada.

El confinamiento con un potencial de oscilador en 1D colapsa al sistema tridimensional a una "lámina" en 2D que simula una pared cuántica, el cual podría describir sistemas de bosones/fermiones altamente correlacionados en casi-2D, tales como los cupratos y los superconductores orgánicos. El confinamiento en dos direcciones ($\delta = 2, d = 3$) simula un sistema casi-1D al que llamaremos "alambre," mientras que un confinamiento en las tres direcciones ($\delta = 3, d = 3$) nos produce un gas casi 0D el cual llamaremos "punto cuántico." Estos tres sistemas atrapados se pueden *mapear* a gases de partículas libres en 4D, 5D y 6D, respectivamente, con una masa renormalizada.

3.1 El potencial termodinámico generalizado Ω en sistemas atrapados

En esta sección, resolvemos el problema general de un gas cuántico sin interacción en d dimensiones, sujeto a un potencial externo de δ osciladores mutuamente perpendiculares. Para obtener las propiedades termodinámicas de nuestro sistema, calculamos los niveles de energía, una vez obtenidos éstos, se encuentra el gran potencial termodinámico $\Omega(T, V, \mu)$ con el que se calculan las propiedades termodinámicas.

El hamiltoniano para un bosón o fermión de masa m es

$$H = \sum_{i=1}^d p_i^2/2m + \frac{1}{2} m \omega^2 \sum_{j=d-\delta+1}^d r_j^2, \quad (3.1)$$

Los valores son

$$\varepsilon_{\{n_i, \nu_j\}} = \frac{2\pi^2 \hbar^2}{mL^2} \sum_{i=1}^{d-\delta} n_i^2 + \hbar\omega \sum_{j=1}^{\delta} (\nu_j + 1/2), \quad (3.2)$$

donde L es el tamaño de la caja asociada a las partículas libres y donde $n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

y $\nu_j = 0, 1, 2, \dots$. Como $k_i \equiv (2\pi/L)n_i$ y $l_j \equiv (\omega/v)\nu_j$, v siendo una velocidad

la ecuación (3.2) puede ser escrita como

$$\varepsilon_{\{k_i, l_j\}} = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^{d-\delta} k_i^2 + \hbar v \sum_{j=1}^{\delta} l_j + \hbar\omega\delta/2 \quad (3.3)$$

de donde se ve que el sistema tiene una relación de dispersión combinada donde la

parte cuadrática mientras que la parte que corresponde al confinamiento es lineal.

En el ensemble gran canónico, el potencial termodinámico $\Omega(T, V, \mu)$ de un

sistema de N partículas sin interacción en d -dimensiones atrapadas por δ osciladores con

energía está dado por (ver p. 134 de [33])

$$\Omega = -TS - \mu N = \delta_{a,-1} \Omega_0 - \frac{k_B T}{a} \sum_{\{k_i, l_j\}} \ln[1 + a e^{-\beta(\varepsilon_{\{k_i, l_j\}} - \mu)}], \quad (3.4)$$

sistema $V \equiv L^{d-\delta} x_0^{2\delta}$ el volumen de confinamiento con $x_0 \equiv \sqrt{\hbar/m\omega}$ el parámetro de longitud del oscilador, U la energía interna, T la temperatura absoluta, S la entropía, μ el potencial químico y N el número de partículas. Aquí $a = -1$ para bosones, $a = +1$ para fermiones y $a = 0$ en el límite clásico, $\beta \equiv 1/k_B T$, y $\Omega_0 \equiv -(k_B T/a) \ln[1 + a e^{-\beta(\hbar\omega\delta/2 - \mu)}]$ corresponde a la contribución del estado base al potencial termodinámico. Éste se ha ignorado de los demás estados pensando en el caso de los gases de bosones donde por el principio de exclusión de Pauli, cada estado, en particular el fundamental, puede tener una ocupación sin límite en el número de partículas. Desarrollando el logaritmo $\ln(1 + ax) = \sum_{l=1}^{\infty} (-ax)^l/l$, y sustituyendo en (3.4), reordenando factores, se obtiene

$$\begin{aligned}
 \Omega(T, V, \mu) &= \delta_{a,-1} \Omega_0 + \frac{k_B T}{a} \sum_{\{k_i, l_j\}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-a e^{-\beta(\varepsilon_{\{k_i, l_j\}} - \mu)})^l}{l} \\
 &= \delta_{a,-1} \Omega_0 + \frac{k_B T}{a} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-a e^{-\beta\mu})^l}{l} \sum_{\{k_i, l_j\}} e^{-\beta l \left[(\hbar^2/2m) \sum_{i=1}^{d-\delta} k_i^2 + \sum_{j=1}^{\delta} l_j + \hbar\omega\delta/2 \right]} \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

La suma sobre k_i y l_j puede ser aproximada por una integral si se considera que los niveles de energía están muy cercanos unos de otros. Esto es, en el límite del continuo el cual se cumple si $\hbar^2/mL^2 \ll k_B T$ y $\hbar\omega \ll k_B T$, las sumas k_i y l_j pueden ser aproximadas por integrales, $\sum_{k_i} \rightarrow (L/2\pi)^{d-\delta} \int d^{d-\delta} k_i$ y $\sum_{l_j} \rightarrow (v/\omega)^\delta \int d^\delta l_j$. Así

$$\begin{aligned}
 \Omega(T, V, \mu) &= \delta_{a,-1} \Omega_0 + \frac{k_B T (2s+1) (L/2\pi)^{d-\delta} (v/\omega)^\delta}{a} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-a e^{-\beta\mu})^l}{l} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 e^{-\beta l (\hbar^2/2m) k_1^2} \\
 &\times \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 e^{-\beta l (\hbar^2/2m) k_2^2} \dots \int_{-\infty}^{\infty} dk_{d-\delta} e^{-\beta l (\hbar^2/2m) k_{d-\delta}^2} \\
 &\times \int_0^{\infty} dl_1 e^{-\beta l \hbar v (l_1 + 1/2)} \dots \int_0^{\infty} dl_\delta e^{-\beta l \hbar v (l_\delta + 1/2)}, \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

El factor $(2s+1)$ se debe a la degeneración de los niveles siendo s el espín de las partículas. Para fermiones se tiene que s es semi-entero mientras que para bosones s es

Las integrales son elementales. Así

$$\Omega(T, V, \mu) = \delta_{a,-1} \Omega_0 + \frac{2s+1}{a} \beta^{-[(d+\delta)/2+1]} \left(\frac{mL^2}{2\pi\hbar^2} \right)^{(d-\delta)/2} (\hbar\omega)^{-\delta} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{[-ae^{3(\mu-\delta\hbar\omega/2)}]^l}{l^{(d+\delta)/2+1}}. \quad (3.7)$$

La suma infinita se puede expresar en términos de la función PolyLog $Li_{\sigma}(z)$ [52]

$$Li_{\sigma}(-az) \equiv \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-az)^l}{l^{\sigma}} = -\frac{1}{a} \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^{\infty} dx \frac{x^{\sigma-1}}{z^{-1}e^x + a}. \quad (3.8)$$

En (3.8) se reduce a la integral de *Bose-Einstein* $g_{\nu}(z)$ cuando $a = -1$, y cuando $a = 1$, siendo $f_{\nu}(z)$ la integral de *Fermi-Dirac* (ver Apéndice D y E donde $z \equiv e^{\beta\mu}$ es la fugacidad. Usando (3.8) en (3.7) se encuentra que el potencial termodinámico es

$$\Omega(T, V, \mu) = \delta_{a,-1} \Omega_0 + \frac{1}{a} \frac{A_{d+\delta}}{\beta^{(d-\delta)/2+1}} Li_{(d+\delta)/2+1}(-az_1), \quad (3.9)$$

$$A_{d+\delta} \equiv \frac{2s+1}{(\hbar\omega)^{\delta}} \left(\frac{mL^2}{2\pi\hbar^2} \right)^{(d-\delta)/2} \quad (3.10)$$

$$z_1 \equiv ze^{-3\delta\hbar\omega/2} = e^{3(\mu-\delta\hbar\omega/2)}. \quad (3.11)$$

Para $\delta = 0$ y $a = +1$, la Ec. (3.9) se reduce a la Ec. (2.10) del gas de d dimensiones. La ecuación (3.9) representa el potencial termodinámico de un gas en d dimensiones atrapado por δ osciladores mutuamente perpendiculares. Cuando las propiedades termodinámicas del sistema se calculan usando las Ecs. (3.9) y (3.11). En las siguientes secciones consideraremos solamente los estados de un gas de bosones será tratado como un caso especial

3.2 Propiedades termodinámicas

Usando (2. 11) y (3. 9) el número de partículas está dado por

$$N = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right)_{T,V} = - \frac{A_{d+\delta}}{a \beta^{(d+\delta)/2}} Li_{(d+\delta)/2}(-az_1), \quad (3. 12)$$

donde se ha usado la relación

$$\left(\frac{\partial Li_{(d+\delta)/2+1}(-az_1)}{\partial \mu} \right)_{T,V} = 3 Li_{(d+\delta)/2}(-az_1). \quad (3. 13)$$

La entropía se obtiene sustituyendo (3. 9) en la segunda ecuación de (2. 11), obteniendo

$$S = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} \right)_{V,\mu} = -k_B [(d+\delta)/2 + 1] \frac{A_{d+\delta}}{a \beta^{(d+\delta)/2}} Li_{(d+\delta)/2+1}(-az_1) - N k_B \ln z_1, \quad (3. 14)$$

donde se ha usado (3. 12) y la relación

$$\left(\frac{\partial Li_{(d+\delta)/2+1}(-az_1)}{\partial T} \right)_{V,\mu} = \frac{1}{z_1} \left(\frac{\partial z_1}{\partial T} \right)_{V,\mu} Li_{(d+\delta)/2}(-az_1). \quad (3. 15)$$

Entonces (3. 14) queda como

$$S/Nk_B = \frac{[(d+\delta)/2 + 1] Li_{(d+\delta)/2+1}(-az_1)}{Li_{(d+\delta)/2}(-az_1)} - \ln z_1. \quad (3. 16)$$

La energía interna se obtiene de la relación (see p. 159 of Ref. [33])

$$U(T, V) = -k_B T^2 \left[\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\Omega}{k_B T} \right) \right]_{V,\mu} \quad (3. 17)$$

donde (3. 9) en (3. 17), encontramos que

$$U(T, V) = N \frac{\hbar \omega \delta}{2} - \frac{d+\delta}{2} \Omega, \quad (3. 18)$$

donde $\Omega = -PV$ entonces

$$PV = \frac{2}{d+\delta} (U - N \hbar \omega \delta / 2). \quad (3. 19)$$

resultado generaliza el ya obtenido en Ref. [51] para un gas ideal de bosones en una d dimensiones ($\delta = 0$), al caso armónicamente confinado. Usando (3. 10) y (3. 17) la energía interna (3. 18) se puede reescribir como

$$\frac{U(T, V)}{Nk_B T} = \left[\beta \frac{\hbar\omega\delta}{2} + \frac{d + \delta}{2} \frac{Li_{(d+\delta)/2+1}(-az_1)}{Li_{(d+\delta)/2}(-az_1)} \right]. \quad (3. 20)$$

El calor específico a volumen constante C_V entonces se obtiene de la relación

$$C_V = \left[\frac{\partial}{\partial T} U(T, V) \right]_{N, V}, \quad (3. 21)$$

$$C_V = \frac{d - \delta}{2} \left[\left(\frac{d + \delta}{2} + 1 \right) \frac{Li_{(d+\delta)/2+1}(-az_1)}{Li_{(d+\delta)/2}(-az_1)} - \frac{d + \delta}{2} \frac{Li_{(d+\delta)/2}(-az_1)}{Li_{(d+\delta)/2-1}(-az_1)} \right], \quad (3. 22)$$

donde se ha usado la relación

$$\frac{1}{z_1} \left(\frac{\partial z_1}{\partial T} \right)_{N, V} = -k_B \beta \frac{d + \delta}{2} \frac{Li_{(d+\delta)/2}(-az_1)}{Li_{(d+\delta)/2-1}(-az_1)}, \quad (3. 23)$$

que puede obtener de la derivada con respecto T de la ecuación de número (3. 12). El caso clásico se obtiene cuando $z_1 \equiv e^{\beta(\mu - \delta\hbar\omega/2)} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$. Sustituyendo los dos primeros términos de la serie (3. 8), es decir, $z_1 + (-az_1)^2/2^\sigma$ en la Ec. (3.22), se encuentra que

$$\frac{C_V}{Nk_B} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{d + \delta}{2} \left[1 + a \frac{z_1}{2^{d-\delta)/2+1}} \left(1 - \frac{d + \delta}{2} \right) \right]. \quad (3. 24)$$

En comparación a la unidad en (3.24) para $d + \delta < 2$ es claramente negativa para $a = -1$ y positiva para fermiones ($a = +1$). Notamos que se llega al valor del límite clásico $d + \delta/2$ en forma diferente; para bosones por debajo de este valor y para fermiones por arriba de él, mientras que para $d + \delta > 2$ se obtiene precisamente lo mismo. Para $\delta = 0$ se recuperan los resultados conocidos para gases ideales mostrados en la Ref. [50] para bosones, y en la Ref. [50] para fermiones).

La ley clásica de Dulong-Petit para cristales se obtiene en el caso de $d = \delta = 3$ cuando $\epsilon \rightarrow \infty$ o $z_1 = 0$, ya que en ésta situación tenemos 6 grados de libertad, 3 traslacionales y 3 vibracionales, mientras que para $\epsilon = 0$ obtenemos el límite clásico para gases ideales de bosones o fermiones.

A continuación, recuperamos como caso especial los resultados obtenidos en las Refs. [79] los cuales tratan con la identidad del calor específico como una función de T de gases ideales de Bose y de Fermi en dos dimensiones. Aquí esta identidad se obtiene en forma más general para $d + \delta = 2$. Si ambos gases están a la misma temperatura y tienen la misma densidad de número $n = n_B$, donde $n_B \equiv N_B/V$ es la densidad de Bose y $n_F \equiv N_F/V$ es la de Fermi, tomando $d + \delta = 2$ en (3. 12) se encuentra

$$n_B = \frac{A_2 Li_1(z_{1B})}{V \beta} = -\frac{A_2 Li_1(-z_{1F})}{V \beta} = n, \quad (3. 25)$$

donde como antes V se definió justamente abajo de (3. 4), $z_{1B} \equiv e^{\beta(\mu_B - \hbar\omega\delta/2)}$ y $z_1 \equiv e^{\beta(\mu - \hbar\omega\delta/2)}$ son las fugacidades con μ_B y μ los potenciales químicos para bosones y fermiones respectivamente. Usando las relaciones de Landen [80] las funciones polilogarítmicas satisfacen $Li_1(x) = -Li_1(y)$ y $Li_2(x) = -Li_2(y) - 1/2 [Li_1(y)]^2$, donde x y y satisfacen la transformación de Euler $y \equiv -x/(1-x)$ con x real < 1 . Sustituyendo estas relaciones en (3. 25), se obtiene

$$z_1 = z_{1B}/(1 - z_{1B}). \quad (3. 26)$$

La energía de un gas de Bose $U(T, V)_B$ se encuentra tomando $a = -1$ en (3. 20) con $\epsilon = 2$. Ésta es

$$\frac{U(T, V)_B}{Nk_B T} = \left[3 \frac{\hbar\omega\delta}{2} + \frac{Li_2(z_{1B})}{Li_1(z_{1B})} \right], \quad (3. 27)$$

Insertando (3. 26) en (3. 27) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{U(T, V)_B}{N} &= \left[\frac{\hbar\omega\delta}{2} + \beta^{-1} \frac{Li_2(-z_1)}{Li_1(-z_1)} + \frac{1}{2}\beta^{-1} Li_1(-z_1) \right] \\ &= \left[\frac{U(T, V)}{N} + \frac{1}{2}\beta^{-1} Li_1(-z_1) \right] \\ &= \left[\frac{U(T, V)}{N} + Vn/2A_2 \right], \end{aligned} \quad (3. 28)$$

Entonces la energía de un gas de Fermi y se ha sustituido (3. 25) en (3. 28): Así, el término del miembro derecho de (3. 28) es proporcional a n e independiente de T . Por lo tanto, se puede concluir que las energías de los gases de Bose y de Fermi difieren solamente por un término independiente de T . Usando (3. 28) en (3. 21) llegamos a que los calores específicos para gases de bosones y fermiones coinciden precisamente cuando $d + \delta = 2$,

$$[C_V(N, T)]_{Bose} = C_V(N, T)_{Fermi}. \quad (3. 29)$$

Tomando el caso especial $d = 2$ y $\delta = 0$ se recupera el resultado obtenido en [79] referente a la identidad del calor específico como una función de T de los gases ideales de Fermi en dos dimensiones.

Mapeo a una dimensión d mayor y masa equivalente

Si con $x \equiv \beta\varepsilon$ y (3. 11), la ecuación (3. 12) se puede escribir como

$$\frac{A_{d+\delta}}{[\Gamma((d+\delta)/2)]} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^{(d+\delta)/2-1}}{z_1^{-1} e^{\beta\varepsilon} + a} = \frac{A_{d+\delta}}{\Gamma((d+\delta)/2)} \int_{\hbar\omega\delta/2}^\infty d\varepsilon \frac{(\varepsilon - \hbar\omega\delta/2)^{(d+\delta)/2-1}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + a} \quad (3. 30)$$

donde $[\Gamma((d+\delta)/2)]^{-1} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^{(d+\delta)/2-1}}{z_1^{-1} e^{\beta\varepsilon} + a}$ es la distribución de BE ($a = -1$) o de FD ($a = +1$), y $A_{d+\delta}$ es la densidad de estados (DOS). Sustituyendo $A_{d+\delta}$ de (3. 10) en (3. 30) podemos

identificar una DOS generalizada $\mathcal{N}(\varepsilon)$ como

$$\mathcal{N}(\varepsilon) = (2s + 1) \left(\frac{2\pi\hbar}{m\omega L^2} \right)^s \left(\frac{mL^2}{2\pi\hbar^2} \right)^{(d+\delta)/2} \frac{(\varepsilon - \hbar\omega\delta/2)^{(d+\delta)/2-1}}{\Gamma([d+\delta]/2)}. \quad (3. 31)$$

Si $\delta = 0$ se recupera la DOS para un gas libre confinado en una "caja" de lados L

$$g(\varepsilon) = (2s + 1) \left(\frac{mL^2}{2\pi\hbar^2} \right)^{d/2} \frac{\varepsilon^{d/2-1}}{\Gamma(d/2)}, \quad (3. 32)$$

ya por la (2. 14). Comparando (3. 31) con (3. 32) en $(d + \delta)$ -dimensiones, es decir,

$$g(\varepsilon) = (2s + 1) \left(\frac{mL^2}{2\pi\hbar^2} \right)^{(d+\delta)/2} \frac{\varepsilon^{(d+\delta)/2-1}}{\Gamma([d+\delta]/2)}, \quad (3. 33)$$

observamos que excepto por la energía del punto cero $\hbar\omega\delta/2$, la cual es despreciable dentro de nuestra aproximación, (3. 31) y (3. 33) son idénticas si en (3. 31) introducimos una masa equivalente m^* definida por

$$m^* = \left(\hbar/\omega L^2 \right)^{2\delta/(d+\delta)} m^{(d-\delta)/(d+\delta)}, \quad (3. 34)$$

entonces

$$\mathcal{N}(\varepsilon) = (2s + 1) \left(\frac{m^* L^2}{2\pi\hbar^2} \right)^{(d+\delta)/2} \frac{\varepsilon^{(d+\delta)/2-1}}{\Gamma([d+\delta]/2)}. \quad (3. 35)$$

En general, hemos encontrado que un gas ideal cuántico atrapado con un potencial externo de oscilador armónico, puede ser considerado como un gas cuántico libre en donde la dimensión se ha incrementado por el número de osciladores $d \rightarrow d + \delta$ y en donde se ha normalizado la masa de las partículas $m \rightarrow m^*$ de acuerdo con (3. 34). Este resultado es muy importante ya que nos permite analizar sistemas atrapados utilizando los resultados ya obtenidos para los gases cuánticos libres en d dimensiones [58, 50], simplemente $m \rightarrow m^*$ y aumentando la dimensión en $d + \delta$. Si describimos la masa efectiva en términos de la longitud característica del potencial armónico $x_0 \equiv (\hbar/m\omega)^{1/2}$, podemos escribir

$$m^* = \left(\frac{x_0 \sqrt{2\pi}}{L} \right)^{4\delta/(d+\delta)} m, \quad (3. 36)$$

de donde podemos hacer los siguientes comentarios. Si $L = \sqrt{2\pi}x_0$, independientemente de d y δ , $m^* = m$. Aquí habría que suponer que L es suficientemente grande para que el resultado (3. 32) se siga satisfaciendo. En este caso $L = \sqrt{2\pi}x_0$, implicaría que x_0 también es muy grande o, en otras palabras, ω muy pequeña. En el límite termodinámico donde (3. 32) es exacta, $L \rightarrow \infty$ implicaría que $\omega \rightarrow 0$ que es otra manera de expresar el límite termodinámico. En los sistemas reales, o de laboratorio, ni $\omega = 0$ ni $L \rightarrow \infty$. En estos casos podemos considerar que la expresión (3. 32) es correcta cuando $\hbar\omega \ll k_B T$ que nos permite aproximar sumas sobre las energías por integrales. Cuando $L \neq \sqrt{2\pi}x_0$ el balance se absorbe en la masa del sistema ideal en la caja de longitud L . Dada una frecuencia $\omega \neq 0$ la x_0 se fija y la masa equivalente de las partículas ideales se va a cero conforme $L \rightarrow \infty$.

3.4 Límite termodinámico

Hasta ahora hemos considerado un sistema físico compuesto de N partículas confinadas en un espacio de volumen V , donde N es un número extremadamente grande. En estos sistemas es importante encontrar el *límite termodinámico* esto es, que cuando $V \rightarrow \infty$, la razón N/V la cual representa la densidad de partículas n , permanece constante. En este límite, las propiedades extensivas del sistema son directamente proporcionales al tamaño del sistema, mientras que las propiedades intensivas del sistema son independientes. Así, la densidad de partículas permanece como un parámetro constante en todas las propiedades físicas del sistema (ver pág. 9 de [33]).

Para encontrar el límite termodinámico adecuado a nuestro sistema, sustituimos el

coeficiente $A_{d+\delta}$ de (3. 10) en (3. 30) encontrando

$$N = (2s + 1) \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^{(d+\delta)/2} \left(\frac{2\pi\hbar}{m\omega} \right)^\delta \frac{x_0^{-2\delta} V}{\Gamma((d+\delta)/2)} \int_{\hbar\omega\delta/2}^{\infty} d\varepsilon \frac{(\varepsilon - \hbar\omega\delta/2)^{(d+\delta)/2-1}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + a}, \quad (3. 37)$$

El volumen V se define justamente abajo de (3. 4). El límite termodinámico adecuado se cumple entonces si $N \rightarrow \infty$, $L \rightarrow \infty$, $\omega \rightarrow 0$ mientras que la razón $N/V = N/L^{d-\delta} x_0^{2\delta} = \text{constante}$. así, sustituyendo $x_0 \equiv \sqrt{\hbar/m\omega}$, se encuentra que el límite termodinámico es

$$N/V = N\omega^\delta/L^{d-\delta} = \text{constante}. \quad (3. 38)$$

Este resultado ya fue obtenido para $d = 3$ y $\delta = 3$ en Ref. [63]. Para un gas libre, i.e. $\delta = 0$, recuperamos el límite termodinámico usual, i.e., $N \rightarrow \infty$, $L \rightarrow \infty$, mientras que $L^d = \text{constante}$.

3.5 Gas de fermiones en d -dimensiones atrapado por δ osciladores armónicos ($\delta \leq d$)

En esta sección consideramos un sistema de N fermiones sin interacción en d dimensiones atrapado por δ ($\leq d$) osciladores armónicos mutuamente perpendiculares y libres en las $d - \delta$ direcciones restantes, en este caso $-Li_\sigma(-z) \equiv f_\sigma(z)$ es la función de Fermi con $\sigma = +1$. De esta forma encontramos de (3. 30) que

$$N = \frac{A_{d+\delta}}{\beta^{\frac{d+\delta}{2}}} f_{\frac{d+\delta}{2}}(z_1) = \frac{A_{d+\delta}}{\Gamma(\frac{d+\delta}{2})} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^{\frac{d+\delta}{2}-1}}{e^{\beta[\varepsilon - (\mu - \hbar\omega\delta/2)]} + 1}, \quad (3. 39)$$

donde f_σ está definida por (3. 10). Ya que $[e^{\beta(\varepsilon - \mu(T))} + 1]^{-1} \xrightarrow{T \rightarrow 0} \theta(E_F - \varepsilon)$, con $\mu(0) \equiv E_F \equiv \hbar^2 k_F^2/2m$ la energía de Fermi, k_F siendo el número de onda de Fermi, de (4.16) se

que

$$N \xrightarrow{T \rightarrow 0} 2A_{d+\delta} / (d + \delta) \Gamma([d + \delta] / 2) (E_F - \hbar\omega\delta/2)^{(d+\delta)/2} \quad (3.40)$$

$$\simeq [2A_{d+\delta} / (d + \delta) \Gamma([d + \delta] / 2)] E_F^{(d+\delta)/2}$$

En el último paso hemos despreciado $\hbar\omega\delta/2$ comparado con E_F . La densidad de fermiones con $s = 1/2$, si $\delta = 0$, se obtiene [50, 51] sustituyendo (3.40) en

$$n \equiv \frac{N}{L^d} = \frac{k_F^d}{2^{d-2} \pi^{d/2} d \Gamma(d/2)} \quad (3.41)$$

que se reduce a los resultados conocidos $n = 2k_F/\pi$, $k_F^2/2\pi$ y $k_F^3/3\pi^2$ para $d = 1, 2$ y 3 , respectivamente. Igualando las ecuaciones (4.16) y (3.40) se encuentra que

$$[2/(d + \delta)] E_F^{(d+\delta)/2} = \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^{\frac{d+\delta}{2}-1}}{e^{\beta\varepsilon - (\mu - \hbar\omega\delta/2)} + 1} \quad (3.42)$$

El potencial químico $\mu(T)$ se encuentra resolviendo numéricamente la ecuación (3.42), los resultados se grafican en la figura 3.1, para $d = 3$ con $\delta = 1, 2$ y 3 , potenciales de Fermi. De la gráfica se observa un comportamiento equivalente al de un gas ideal de fermiones en $d = 4, 5, 6$ dimensiones.

$$\frac{U(T, V)}{Nk_B T} = \left[\beta \frac{\hbar\omega\delta}{2} + \frac{d - \delta}{2} \frac{f_{d-\delta/2+1}(z_1)}{f_{d-\delta/2}(z_1)} \right], \quad (3.43)$$

usando la expansión asintótica para $f_d(z)$ cuando $T \rightarrow 0$ (Ref. [50], Ap. B), se encuentra que

$$\frac{U - N\hbar\omega\delta/2}{Nk_B T} \xrightarrow{T \rightarrow 0} \frac{(d + \delta)}{(d + \delta + 2)} \left[1 - (d + \delta + 2) \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 \right]. \quad (3.44)$$

En la figura 3.2 se muestra su comportamiento para los casos $d = 3$ con $\delta = 1, 2, 3$. Los valores en $T = 0$ son $4/3, 5/7$ y $2/3$, respectivamente, podemos observar

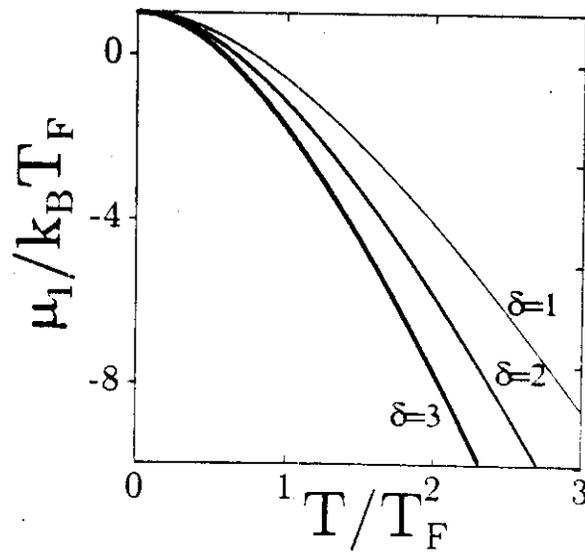


Figura 3.1 Potencial químico como función de la temperatura para un gas de fermiones en 3D atrapados por $\delta = 1, 2, 3$ potenciales de oscilador armónico.

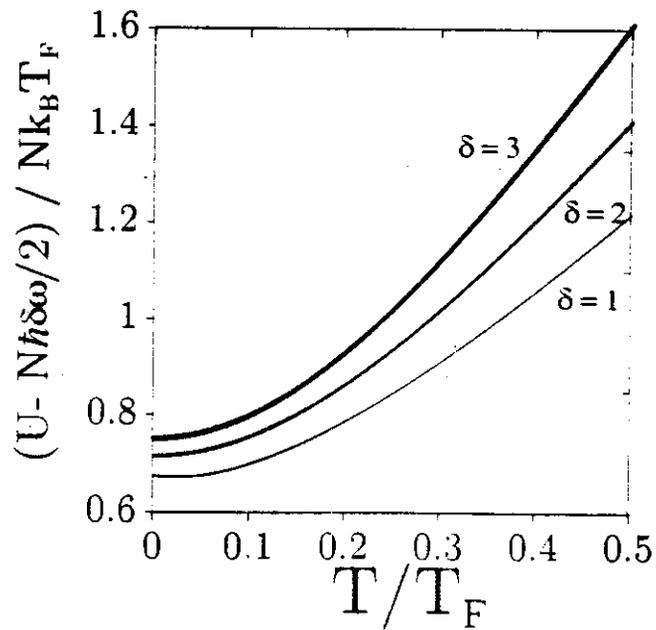


Figura 3.2 Energía interna en un gas de fermiones atrapados por $\delta = 1, 2, 3$ osciladores armónicos.

que al aumentar el número de osciladores la energía interna aumenta para una temperatura fija. Este comportamiento corresponde a lo esperado ya que por cada potencial de confinamiento se aumenta un grado de libertad lo que corresponde a un aumento en la energía.

El calor específico a volumen constante se encuentra de (3. 22) tomando $a = 1$

$$Nk_B = \left(\frac{d+\delta}{2}\right) \left[\left(\frac{d+\delta}{2} + 1\right) \frac{f_{(d+\delta)/2+1}(z_1)}{f_{(d+\delta)/2}(z_1)} - \left(\frac{d+\delta}{2}\right) \left(\frac{f_{(d+\delta)/2}(z_1)}{f_{(d+\delta)/2-1}(z_1)}\right) \right], \quad (3. 45)$$

al cuando $T \rightarrow 0$ tiene el siguiente comportamiento

$$\frac{C_V(T)}{Nk_B} \xrightarrow{T \rightarrow 0} (d+\delta) \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{T}{T_F}\right). \quad (3. 46)$$

En la Figura 3.3 se muestra el comportamiento del calor específico si $d = 3$ con $\delta = 1, 2, 3$ osciladores.

La entropía se encuentra sustituyendo $a = 1$ en la ecuación (3. 47) y al normalizarla a la energía de Fermi, nos queda

$$S/Nk_B = \left(\frac{d+\delta}{2} + 1\right) \left(\frac{T}{T_F}\right) f_{\frac{d+\delta}{2}-1}(z_1) + \frac{\hbar\omega\delta}{2k_B T} f_{\frac{d+\delta}{2}}(z_1). \quad (3. 47)$$

al cuando $T \rightarrow 0$ usando $S = \int_0^T dT C_V(T) / T$ y (3. 46), se encuentra inmediatamente la forma de la entropía en este límite

$$S/Nk_B \xrightarrow{T \rightarrow 0} (d+\delta) \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{T}{T_F}\right) + \dots \quad (3. 48)$$

al se acerca a $T = 0$ como función lineal de T . En la Figura 3.4 se grafica la entropía como función de la temperatura para $d = 3$ con $\delta = 1, 2, 3$ osciladores. Se puede observar que cuando $T \rightarrow 0$, $S \rightarrow 0$ tal como esperabamos según la tercera ley de la termodinámica.

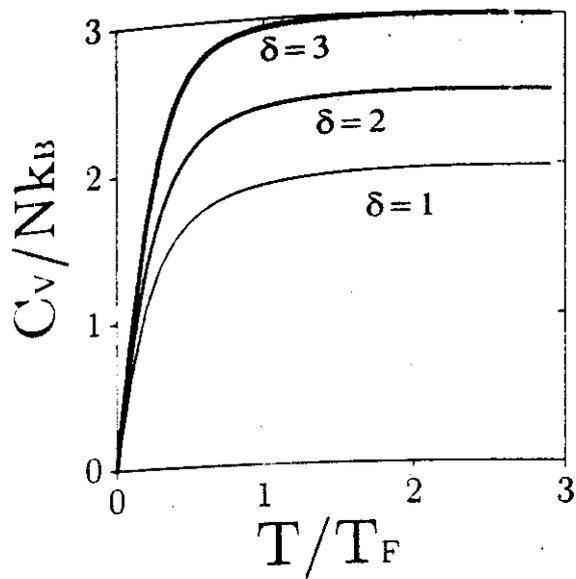


Figura 3.3 Calor específico en un gas de fermiones atrapados por $\delta = 1, 2, 3$ en potenciales armónicos.

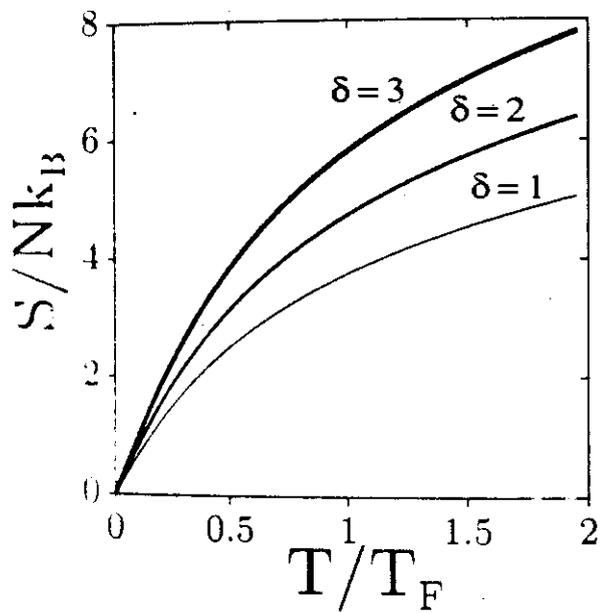


Figura 3.4 Entropía para un gas de fermiones atrapados por $\delta = 1, 2, 3$ en potenciales armónicos.

3.5.1 Casos particulares: fermiones en $d = 3$ atrapados por $\delta = 1, 2$ y 3 osciladores armónicos

La Tabla 3.1 resume los resultados obtenidos para un gas de Fermi en 3D con $\delta = 1, 2$ y 3 osciladores armónicos. Estos son interesantes ya que consideran un gas de Fermi en 3D confinado o atrapado a lo largo de una, dos y tres direcciones mutuamente perpendiculares, éste permanece libre a lo largo de las direcciones restantes y son sistemas análogos a un "punto", un "alambre" o un "pozo" cuánticos. Para el caso $\delta = 3$, recuperamos los resultados obtenidos por ([63]) - ([73]).

δ	3	2	1
N	$\frac{2}{3}(\hbar\omega)^{-3}E_F^3$	$\frac{4}{5}\left(\frac{mL^2}{2\pi\hbar^2}\right)^{1/2}(\hbar\omega)^{-2}E_F^{5/2}$	$\left(\frac{mL^2}{2\pi\hbar^2}\right)(\hbar\omega)^{-1}E_F^2$
$U/Nk_B T$	$\frac{3\hbar\omega}{2k_B T} + \frac{3f_4(z_1)}{f_3(z_1)}$	$\frac{\hbar\omega}{k_B T} + \frac{5f_{7/2}(z_1)}{2f_{3/2}(z_1)}$	$\frac{\hbar\omega}{2k_B T} + \frac{2f_3(z_1)}{f_2(z_1)}$
C_V/Nk_B	$12\frac{f_4(z_1)}{f_3(z_1)} - 9\frac{f_3(z_1)}{f_2(z_1)}$	$\frac{35}{4}\frac{f_{7/2}(z_1)}{f_{3/2}(z_1)} - \frac{25}{4}\frac{f_{5/2}(z_1)}{f_{3/2}(z_1)}$	$6\frac{f_3(z_1)}{f_2(z_1)} - 4\frac{f_2(z_1)}{f_1(z_1)}$
$PV/Nk_B T$	$\frac{f_4(z_1)}{f_3(z_1)}$	$\frac{f_{7/2}(z_1)}{f_{3/2}(z_1)}$	$\frac{f_3(z_1)}{f_2(z_1)}$
S/Nk_B	$\frac{4f_4(z_1)}{f_3(z_1)} - \ln z_1$	$\frac{7f_{7/2}(z_1)}{2f_{3/2}(z_1)} - \ln z_1$	$\frac{f_3(z_1)}{f_2(z_1)} - \ln z_1$

Tabla 3.1 Cantidades termodinámicas, como se definen en el texto, para un gas de fermiones en 3D, atrapado por $\delta = 1, 2, 3$ osciladores armónicos.

3.6 Bosones atrapados

En esta sección estudiaremos un sistema de N bosones sin interacción en d dimensiones atrapado por $\delta (\leq d)$ osciladores mutuamente perpendiculares, y por otro lado libres en las restantes $d - \delta$ direcciones. Sea el número de bosones

$$N = N_0(T) + N_{\mathbf{k}>0}(T) \quad (3.49)$$

3.5.1 Casos particulares: fermiones en $d = 3$ atrapados por $\delta = 1, 2$ y 3 osciladores armónicos

La Tabla 3.1 resume los resultados obtenidos para un gas de Fermi en 3D con $\delta = 1, 2$ y 3 osciladores armónicos. Estos son interesantes ya que consideran un gas de Fermi en 3D confinado o atrapado a lo largo de una, dos y tres direcciones mutuamente perpendiculares, éste permanece libre a lo largo de las direcciones restantes y son sistemas análogos a un "punto", un "alambre" o un "pozo" cuánticos. Para el caso $\delta = 3$, recuperamos los resultados obtenidos por ([63]) - ([73]).

δ	3	2	1
N	$\frac{2}{3}(\hbar\omega)^{-3}E_F^3$	$\frac{4}{5}\left(\frac{mL^2}{2\pi\hbar^2}\right)^{1/2}(\hbar\omega)^{-2}E_F^{5/2}$	$\left(\frac{mL^2}{2\pi\hbar^2}\right)(\hbar\omega)^{-1}E_F^2$
$U/Nk_B T$	$\frac{3\hbar\omega}{2k_B T} + \frac{3f_3(z_1)}{f_3(z_1)}$	$\frac{\hbar\omega}{k_B T} + \frac{5f_{7/2}(z_1)}{2f_{3/2}(z_1)}$	$\frac{\hbar\omega}{2k_B T} + \frac{2f_3(z_1)}{f_2(z_1)}$
C_V/Nk_B	$12\frac{f_4(z_1)}{f_3(z_1)} - 9\frac{f_3(z_1)}{f_2(z_1)}$	$\frac{35}{4}\frac{f_{7/2}(z_1)}{f_{3/2}(z_1)} - \frac{25}{4}\frac{f_{5/2}(z_1)}{f_{3/2}(z_1)}$	$6\frac{f_3(z_1)}{f_2(z_1)} - 4\frac{f_2(z_1)}{f_1(z_1)}$
$PV/Nk_B T$	$\frac{f_4(z_1)}{f_3(z_1)}$	$\frac{f_{7/2}(z_1)}{f_{3/2}(z_1)}$	$\frac{f_3(z_1)}{f_2(z_1)}$
S/Nk_B	$\frac{4f_4(z_1)}{f_3(z_1)} - \ln z_1$	$\frac{7f_{7/2}(z_1)}{2f_{3/2}(z_1)} - \ln z_1$	$\frac{f_3(z_1)}{f_2(z_1)} - \ln z_1$

Tabla 3.1 Cantidades termodinámicas, como se definen en el texto, para un gas de fermiones en 3D, atrapado por $\delta = 1, 2, 3$ osciladores armónicos.

3.6 Bosones atrapados

En esta sección estudiaremos un sistema de N bosones sin interacción en d dimensiones atrapado por $\delta (\leq d)$ osciladores mutuamente perpendiculares, y por otro lado libres en las restantes $d - \delta$ direcciones. Sea el número de bosones

$$N = N_0(T) + N_{k>0}(T) \quad (3.49)$$

$N_0(T) = -(\partial\Omega_0/\partial\mu)_{T,V}$ es el número de bosones en el estado más bajo de energía, definido abajo de (3. 4), mientras que $N_{\mathbf{k}>0}(T)$ está dado por la eq. (3. 12) con

$z_1 = 1$. Así

$$N = N_0(T) + \frac{A_{d+\delta}}{3^{(d+\delta)/2}} g_{(d+\delta)/2}(z_1), \quad (3. 50)$$

hemos escrito la PolyLog (3. 8) como la función de Bose $g_\sigma(z)$ la cual para $z = 1$ es idéntica a la función Zeta de Riemann $\zeta(\sigma)$.

3.6.1 Temperatura crítica y fracción del condensado

Para $T > T_c$, $N_0(T)$ es despreciable comparada con N , mientras que para $T < T_c$, $N_0(T)$ es una fracción apreciable de N . En $T = T_c$, $z_1 = 1$, $N_0(T_c) \simeq 0$, la temperatura crítica se encuentra de la ecuación de número (3. 50) evaluada en T_c

$$N_{\mathbf{k}>0}(T_c, z_1 = 1) \simeq N = \frac{A_{d+\delta}}{3^{(d+\delta)/2}} g_{(d+\delta)/2}(1). \quad (3. 51)$$

Segundo T_c de la ecuación (3. 51) encontramos

$$k_B T_c = \left[\frac{N}{A_{d+\delta} g_{(d+\delta)/2}(1)} \right]^{2/(d+\delta)} \quad (3. 52)$$

Como la serie infinita $g_\sigma(1)$ diverge para $\sigma \leq 1$ Apéndice D de Ref. [33], lo que implica en (3. 52) que BEC puede ocurrir con una temperatura crítica $T_c \neq 0$ si y sólo si $(d+\delta) > 2$. Así, BEC es posible en 2D siempre que $\delta \geq 1$. Para $\delta = 0$ y $d = 3$ con $(d+\delta) = 3$ la eq. (3. 52) se reduce a la fórmula familiar $T_c \simeq 3.31 \hbar^2 n^{2/3} / m k_B$ de BEC conocida, donde $\zeta(3/2) = \zeta(3/2) \simeq 2.612$. Por otra parte, sustituyendo $\delta = 3$ y $d = 3$ en (3. 52) y simplificamos el resultado obtenido en la Ref. [63]

$$k_B T_c \simeq 0.94 \hbar \omega N^{-1/3}. \quad (3. 53)$$

Las ecuaciones (3. 47) encuentran una buena concordancia con el resultado experimental de [77] para un gas de ^{87}Rb en trampas reales con el valor teórico (3. 53).

Con las ecuaciones (3. 50) y (3. 52) podemos obtener la fracción del condensado

$$N_0(T)/N = 1 - N_{k>c}(T)/N(T_c) = 1 - (T/T_c)^{(d+\delta)/2}. \quad (3. 54)$$

Energía interna y salto en el calor específico

La energía interna del sistema para $T > T_c$ se obtiene tomando $a = -1$ en (3. 20) donde se encuentra que

$$U(V, T) = \left[\frac{N\hbar\omega\delta}{2} + \frac{d+\delta}{2} \frac{A_{d+\delta}}{\beta^{(d+\delta)/2+1} g_{(d+\delta)/2+1}(z_1)} \right], \quad (3. 55)$$

Al sustituir $A_{d+\delta}$ de (3. 51) en (3. 55) obtenemos

$$U(T) = N(T_c) \left[\frac{\hbar\omega\delta}{2} + \frac{d+\delta}{2} k_B T \left(\frac{T}{T_c} \right)^{(d+\delta)/2} \frac{g_{(d+\delta)/2+1}(z_1)}{g_{(d+\delta)/2}(1)} \right]. \quad (3. 56)$$

Para $z_1 = 1$ y se encuentra que

$$U(T) = N(T_c) \left[\frac{\hbar\omega\delta}{2} + \frac{d+\delta}{2} k_B T \left(\frac{T}{T_c} \right)^{(d+\delta)/2} \frac{g_{(d+\delta)/2+1}(1)}{g_{(d+\delta)/2}(1)} \right]. \quad (3. 57)$$

El calor específico C_V para $T \leq T_c$, se sigue directamente de (3. 21) y de

$$\frac{C_V}{Nk_B} = \frac{d+\delta}{2} \left(\frac{d+\delta}{2} + 1 \right) (T/T_c)^{(d+\delta)/2} \frac{g_{(d+\delta)/2+1}(1)}{g_{(d+\delta)/2}(1)}. \quad (3. 58)$$

Entonces de (3. 22)

$$\frac{d+\delta}{2} \left[\left(\frac{d+\delta}{2} + 1 \right) \frac{g_{(d+\delta)/2+1}(z_1)}{g_{(d+\delta)/2}(z_1)} - \frac{d+\delta}{2} \frac{g_{(d+\delta)/2}(z_1)}{g_{(d+\delta)/2-1}(z_1)} \right]. \quad (3. 59)$$

El salto del calor específico a T_c es entonces

$$\frac{\Delta C_V}{Nk_B} = \frac{C_V(T_c^-) - C_V(T_c^+)}{Nk_B} = \left(\frac{d+\delta}{2} \right)^2 \frac{g_{(d+\delta)/2}(1)}{g_{(d+\delta)/2-1}(1)}, \quad (3. 60)$$

es diferente de cero si y sólo si $(d + \delta)/2 - 1 > 1$ o $(d + \delta) > 4$, ya que $g_\sigma(1)$ diverge para $\sigma \leq 1$.

Siendo $a = -1$ en (3. 14) y dividiendola entre la ecuación de número (3. 51), obtenemos la entropía en términos de la temperatura crítica T_c

$$S/Nk_B = [(d + \delta)/2 + 1] (T/T_c)^{(d+\delta)/2} \frac{g_{(d+\delta)/2+1}(z_1)}{g_{(d+\delta)/2}(1)} - \ln z_1. \quad (3. 61)$$

En $T = T_c$, $z_1 = 1$, se encuentra que

$$S/Nk_B = [(d + \delta)/2 + 1] (T/T_c)^{(d+\delta)/2} \frac{g_{(d+\delta)/2+1}(1)}{g_{(d+\delta)/2}(1)} \xrightarrow{T \rightarrow 0} 0$$

que cumple con la tercera ley de la termodinámica.

3.3 Casos particulares: bosones en 3D atrapados por 1, 2 o 3 OA

Resumimos nuestros resultados para bosones atrapados en 3D por 1, 2 o 3 osciladores armónicos en la Tabla 3.2. Ya que para $z_1 = 1$ y $\sigma > 1$ la serie $g_\sigma(z_1)$ coincide con $\zeta(\sigma)$, damos los siguientes valores: $\zeta(3/2) \simeq 2.612$, $\zeta(2) = \pi^2/6 \simeq 1.645$, $\zeta(5/2) \simeq 1.341$, $\zeta(3) \simeq 1.202$, $\zeta(7/2) \simeq 1.127$, y $\zeta(4) = \pi^4/90 \simeq 1.082$.

δ	3	2	1
$N(\epsilon)$	$\frac{1}{2}(\hbar\omega)^{-3}(\epsilon - \frac{3}{2}\hbar\omega)^2$	$\frac{2^{3/2}}{3} \frac{L}{\pi x_0} (\hbar\omega)^{-5/2}(\epsilon - \hbar\omega)^{3/2}$	$\frac{L^2}{2\pi x_0^2} (\hbar\omega)^{-2}(\epsilon - \frac{1}{2}\hbar\omega)$
N	$1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^3$	$1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{5/2}$	$1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2$
$\frac{N}{k_B T}$	$\frac{\hbar\omega}{k_B} \left[\frac{N}{\zeta(3)}\right]^{1/3}$	$\frac{\hbar\omega}{k_B} \left[\frac{(2\pi)^{1/2} N x_0}{\zeta(3/2) L}\right]^{2/5}$	$\frac{\hbar\omega}{k_B} \left[\frac{2\pi N x_0^2}{\zeta(2) L^2}\right]^{1/2}$
$\frac{N k_B T}{U}$	$\frac{3}{2} \frac{\hbar\omega}{k_B T} + 3 \left(\frac{T}{T_c}\right)^3 \frac{g_4(z_1)}{\zeta(3)}$	$\frac{\hbar\omega}{k_B T} + \frac{5}{2} \left(\frac{T}{T_c}\right)^{5/2} \frac{g_{7/2}(z_1)}{\zeta(5/2)}$	$\frac{1}{2} \frac{\hbar\omega}{k_B T} + 2 \left(\frac{T}{T_c}\right)^2 \frac{g_{3/2}(z_1)}{\zeta(2)}$
$T < T_c$	$12 \left(\frac{T}{T_c}\right)^3 \frac{\zeta(4)}{\zeta(3)}$	$\frac{35}{4} \left(\frac{T}{T_c}\right)^{5/2} \frac{\zeta(7/2)}{\zeta(3/2)}$	$6 \left(\frac{T}{T_c}\right)^2 \frac{\zeta(3)}{\zeta(2)}$
$T > T_c$	$12 \frac{g_4(z_1)}{g_3(z_1)} - 9 \frac{g_3(z_1)}{g_2(z_1)}$	$\frac{35}{4} \frac{g_{7/2}(z_1)}{g_{5/2}(z_1)} - \frac{25}{4} \frac{g_{5/2}(z_1)}{g_{3/2}(z_1)}$	$6 \frac{g_3(z_1)}{g_2(z_1)} - 4 \frac{g_2(z_1)}{g_1(z_1)}$
$N k_B$	$9 \frac{\zeta(3)}{\zeta(2)} \approx 6.57$	$\frac{25}{4} \frac{\zeta(5/2)}{\zeta(3/2)} \approx 3.20$	0
U	$\frac{1}{3}(U - \frac{3}{2}N\hbar\omega)$	$\frac{2}{5}(U - N\hbar\omega)$	$\frac{1}{2}(U - \frac{1}{2}N\hbar\omega)$
$N k_B$	$4 \left(\frac{T}{T_c}\right)^3 \frac{g_4(z_1)}{\zeta(3)} - \ln z_1$	$\frac{7}{2} \left(\frac{T}{T_c}\right)^{5/2} \frac{g_{7/2}(z_1)}{\zeta(5/2)} - \ln z_1$	$3 \left(\frac{T}{T_c}\right)^2 \frac{g_3(z_1)}{\zeta(2)} - \ln z_1$

Tabla 3.2 Propiedades termodinámicas para un gas de bosones en 3D atra-

do por $\delta = 1, 2, 3$ osciladores armónicos donde se ha definido el parámetro

de longitud del oscilador como $x_0 \equiv (\hbar/m\omega)^{1/2}$.

Estos resultados ya han sido reportados por Sevilla [78], se puede observar de las

dependientes, el comportamiento de las propiedades termodinámicas en estos

casos. Se observa que el calor específico muestra un salto sólo para $d + \delta > 4$ lo que

concuerda con los resultados encontrados en la ecuación (3. 60).

En un gas ideal de Bose en el espacio d -dimensional atrapado por $\delta \leq d$

osciladores armónicos tiene efectivamente su dimensionalidad geométrica reducida. Las

ecuaciones (3. 51) y (3. 52) muestran que BEC puede ocurrir si y sólo

si $d + \delta \geq 4$. De otra forma, el término $g_{(d+\delta)/2}(1)$ diverge forzando a que T_c se haga

infinitamente grande. Es posible en 2D siempre que $\delta \geq 1$.

Experimentos con gases de bosones diluidos confinados en potenciales de confinamiento de trampas opto-magnéticas en la región de pequeñas oscilaciones donde BEC se ha observado, pueden ser visualizadas como un gas de Bose en 3D con $\delta = 3$. La Tabla 3.3 muestra algunos parámetros en sistemas de vapores bosónicos donde la BEC ya ha sido observada. La razón en el último renglón muestra un buen acuerdo entre la T_c experimental y la T_0 calculada con la Ec. (3. 53) donde el buen acuerdo encontrado por Ensher *et al.* [77] para $^{87}_{37}\text{Rb}$ también se obtiene en esta tesis pero además para ^7_3Li , $^{85}_{37}\text{Rb}$, ^4_2He y $^{41}_{19}\text{K}$. Sin embargo, para $^{27}_{11}\text{Na}$ y ^1_1H encontramos sólo un moderado acuerdo.

Bosones	$^{87}_{37}\text{Rb}$	$^{27}_{11}\text{Na}$	^7_3Li	^1_1H	$^{85}_{37}\text{Rb}$	^4_2He	$^{41}_{19}\text{K}$
Año/Ref.	1995 [77]	1995 [16]	1995 [17]	1998 [18]	2000 [19]	2001 [20]	2001 [21]
N	4×10^4	5×10^5	2×10^5	-	-	8×10^6	-
N_c	2×10^3	-	-	10^9	10^4	5×10^5	10^4
T_c (μK)	0.28	2	0.4	50	0.015	4.7	0.16
n (cm^{-3})	-	1.5×10^{14}	2×10^{12}	4.8×10^{15}	1×10^{12}	3.8×10^{13}	6×10^{11}
$\bar{\nu}$ (Hz)	186.5	345.62	145.94	786.97	12.8	515	232.17
T_0 (μK)	0.29	1.4	0.4	36	0.012	4.6	0.12
T_c/T_0	0.97	1.4	1	1.4	1.25	1.02	1.33

Tabla 3.3 Algunos parámetros experimentales asociados con los cinco gases bosónicos atrapados en los cuales la BEC ha sido observada. Aquí, N y N_0 representan el número de átomos en la nube inicial y en el condensado respectivamente, T_c es la temperatura de transición, n la densidad bosónica de número, $\bar{\nu}$ el promedio de las frecuencias reportadas en los experimentos y T_0 la temperatura crítica BEC calculada con (3. 53) para un gas ideal de

bosones sin interacción en una trampa armónica.

3.7 Conclusiones

Después de construir el potencial termodinámico se determinaron las propiedades termodinámicas así como la densidades de estados de un gas ideal de bosones y fermiones en d dimensiones atrapados por δ potenciales de osciladores mutuamente perpendiculares. Se muestra que el confinamiento con un potencial externo de oscilador, mapea al sistema a un gas libre con una nueva dimensionalidad incrementada por el número de potenciales, es decir, $d \rightarrow d + \delta$, y renormaliza las masas $m \rightarrow m^*$ de acuerdo a (3.34). Se discute el límite termodinámico del sistema y en particular, detallamos cómo el gas de fermiones en 3D atrapado por 1, 2 o 3 osciladores armónicos mutuamente perpendiculares, se mapea a un gas libre en 4, 5 y 6 dimensiones, respectivamente. También encontramos que en un gas de bosones atrapado, la condensación de Bose-Einstein con una temperatura crítica $T_c \neq 0$ ocurre si y sólo si $d + \delta > 2$. Así, para $\delta \geq 1$, d no se restringe a $d > 2$ para obtener una BEC como en el caso de un gas de bosones en 3D. Encontramos que el salto en el calor específico a T_c es diferente de cero si y sólo si $d + \delta > 4$ existiendo una discontinuidad en el calor específico en 3D siempre y cuando $d + \delta > 4$. En este caso, la transición de fase asociada a la BEC, es diferente a la del gas de bosones en 3D sin confinamiento armónico en donde la discontinuidad se da en la capacidad calorífica C_V . Para $d = \delta = 3$ las expresiones de la temperatura crítica reproducen los resultados experimentales de ^{87}Rb , ^7Li , ^{85}Rb , ^4He y ^{41}K realmente bien pero sólo en forma teórica para ^{27}Na y ^1H , éstos han sido reportados en la Tabla 3.3.

Capítulo 4

Superconductividad en nanoestructuras

La estructura de los superconductores cupratos de alta T_c como lo son los planos de CuO_2 , puede ser considerada cercanamente laminar o casi-2D, mientras que los superconductores orgánicos presentan una estructura en forma de cadenas que puede ser considerada como 1D. El primer superconductor orgánico, el $(\text{TMTSF})_2\text{PF}_6$ fue descubierto en 1980 por K. Bechgaard et. al. uno de los llamados organo-metálicos o sales de Bechgaard [6] con una temperatura crítica T_c de 0.9K a 12 Kbar de presión. Más tarde se encontró una serie de superconductores orgánicos de la familia de los $(\text{ET})_2\text{X}$ los que llegan a 10K [7]-[9].

Farrell [36] encontró experimentalmente que en un cristal de $(\text{Tl}_2\text{Ba}_2\text{CaCu}_2\text{O}_x)$ con estructura laminar, existe una anisotropía en la masa efectiva en la dirección perpendicular a las láminas del superconductor y que es de casi cinco órdenes de magnitud mayor que los valores observados en las direcciones paralelas a dichas láminas. Por otro lado las anisotropías encontradas experimentalmente en la resistividad, ρ_c/ρ_{ab} , en donde ρ_c es la resistividad en la dirección perpendicular a ab o a los planos $\text{CuO}/\text{BaO}/\text{SrO}$, pueden ser tan grandes como 10^5 en $\text{Bi}_{2+x}\text{Sr}_{2-y}\text{CuO}_{6+\delta}$ [5], aunque en $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ es de tan solo 10^2 . Si se toma la ley de resistividad de Drude de 1900 [97], para el cual se tiene que $\rho = m/ne^2\tau$, donde e es la carga de los portadores de corriente, m es la masa efectiva, n es la densidad de portadores y τ es el promedio del lapso entre una colisión y otra, podemos decir que el sistema está en un límite de $\rho_c/\rho_{ab} = m_c/m_{ab}$ es infinita ya que si la resistividad en los planos es muy pequeña comparada con la resistividad perpendicular a ellos, los portadores de carga se mueven

amente en los planos. Por el contrario, si esta cantidad es unitaria, tendremos el sistema perfectamente isotrópico en 3D. De esta forma, podemos decir que una razón grande en la resistividad observada implica una situación de dimensionalidad $(2 + \epsilon)D$. Para cupratos ha sido sugerida en las Refs. [27] y [39] una dimensión $d \simeq 2.03$ como más realista que $d = 2$ ya que ésta refleja el acoplamiento entre capas (BaO o SrO). Los resultados que hemos encontrado para un gas de bosones y pares de Cooper en la Ref. [98], están muy cercanos a aquellos para $d = 2$ y varía poco con d alrededor de $d = 2$, aunque para un gas ideal de bosones no.

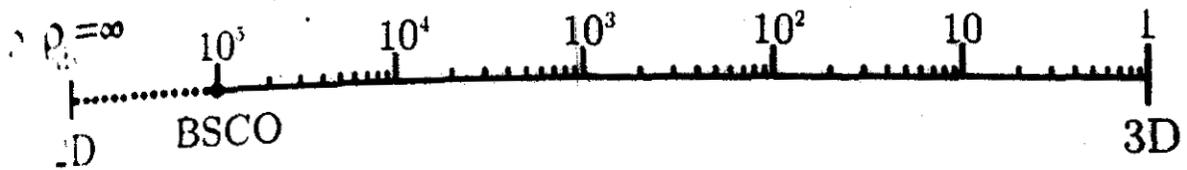


Figura 4.1 Equivalencia de la razón ρ_c/ρ_{ab} con la dimensión d que varía continuamente de 2 a 3. El punto BSCO se refiere al valor experimental encontrado en la resistividad de $\text{Bi}_{2+x}\text{Sr}_{2-y}\text{CuO}_{6+\delta}$ [5].

En el Capítulo 3 se demostró que un gas de bosones confinado por potenciales se puede mapear a un gas de bosones libres en una dimensión mayor que la normalizada. En este capítulo mostraremos cómo el resultado anterior puede aplicarse a otro tipo diferente de potenciales de confinamiento los cuales acotan las coordenadas. Estos resultados serán utilizados en el estudio de los cupratos los cuales se han modelado como una pila de láminas imagi-

narias de espesor variable y separadas entre sí por una distancia c , suponemos que éstas contienen pairones ó pares de electrones con un potencial efectivo que proviene de la interacción entre sí más la electrón-fonón, en éste caso, las energías de los pairones dejan de ser una función cuadrática del momento para ser lineal, este es un resultado encontrado en [13] dentro de la aproximación de acoplamiento débil, ver Apéndice B. Calculamos la temperatura crítica de condensación Bose-Einstein de los pares de electrones considerados como bosones, así como las demás propiedades termodinámicas del sistema. Aplicamos también estos resultados al caso en que el sistema se mueve en una dimensión 1D, en láminas separadas una distancia c y que nos permite simular las estructuras de los superconductores orgánicos.

Este problema fue estudiado inicialmente por Wen y Kan [27] al analizar los mecanismos de superconductividad en el modelo RVB (Ligadura de Valencia Resonante) [99]. En este modelo hay tres clases importantes de excitaciones, los espinones que corresponden a fermiones neutros, los agujeros que son bosones cargados y los electrones. En un superconductor RVB el número de agujeros se conserva siendo capaz de presentar una BEC. El movimiento de los agujeros está constreñido a moverse en capas de Cu separadas una distancia c , comportándose en cada capa como un gas de bosones casi-bidimensional. Los electrones no pueden brincar entre capas y para que se lleve a cabo una transición entre capas requiere que se acoplen con un espinón, dando lugar a una *cuasi-partícula* de masa muy grande en la dirección z perpendicular a las capas. Para las temperaturas bajas a la T_c se satisface que $\hbar^2/M_Bc^2 \ll k_B T$.

En el modelo RVB [27] el espectro de energía por partícula es

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2}{2m_B} (k_x^2 + k_y^2) + \frac{\hbar^2}{M_Bc^2} [1 - \cos k_z c], \quad (4.1)$$

donde $k_i \equiv (2\pi/L)n_i$ con $n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ y L es el período de la función de onda en las direcciones x, y . M_B es la masa efectiva en la dirección z de un agujero acoplado con un espín, m_B es la masa del agujero en los planos y c es la separación entre planos sucesivos.

En esta continuación presentamos un resumen de los resultados encontrados en [27] y posteriormente serán justificados al hacer un estudio más general del problema. Ellos demuestran que la temperatura crítica T_c en que ocurre la BEC está dada por la siguiente ecuación

$$k_B T_c = \frac{2\pi n_{B-3D} \hbar^2 c}{m_B \ln[M_B c^2 k_B T_c \nu(t_c) / \hbar^2]}, \quad (4.2)$$

donde $n_{B-3D} = N/V$ con N el número total de agujeros, $\nu(t)$ es una función de orden $2 + \epsilon$ si $t \ll 1$, siendo $t \equiv \hbar^2 / M_B c^2 k_B T$. Como el confinamiento mapea al sistema a un sistema libre con una nueva dimensionalidad incrementada, Wen y Kan proponen que la T_c encontrada en (4.2) debe ser equivalente a la T_c obtenida en un gas ideal de bosones en $2 + \epsilon$ dimensiones donde se cumple que

$$k_B T_c = \frac{2\pi n_{B-(2+\epsilon)} \hbar^2 c}{m_B g_{(2+\epsilon)/2}(1)}, \quad (4.3)$$

donde $g_{(2+\epsilon)/2}(z)$ la función de Bose, $n_{B-(2+\epsilon)} \equiv N/(\epsilon L^2)$ es la densidad de un gas ideal de bosones en $(2 + \epsilon)D$. Si comparamos la ecuación (4.3) con la ecuación (4.2) ambas serán iguales si se satisface que

$$g_{(2+\epsilon)/2}(1) \simeq \ln[M_B c^2 k_B T_c \nu(t_c) / \hbar^2]. \quad (4.4)$$

Como $g_{(2+\epsilon)/2}(1) \equiv \zeta(1 + \epsilon/2)$ diverge (ver pag.507 de [33]) cuando $\epsilon \rightarrow 0$ y su comportamiento está dado por

$$g_{(2+\epsilon)/2}(1) \simeq 2/\epsilon + \gamma + 0.0364\epsilon + O(\epsilon^2), \quad (4.5)$$

$\gamma \approx 0.57722$ es la constante de Euler. En (4.2) escogen una masa razonablemente grande M_B de manera que $\ln[M_B c^2 k_B T_c \nu(t_c)/\hbar^2] \approx 10$ de tal forma que para ϵ pequeña

se tiene

$$\epsilon \approx 2[\ln(n_{B-3D} M_B c^3/m_B)]^{-1}, \quad (4.6)$$

que se hace cero cuando $M_B c^2 \rightarrow \infty$, que nos da planos infinitamente separados y/o movimiento perfecto en la dirección z en cada plano, en este caso (ver ecuación (4.2)) como se esperaría.

4.1 Superconductividad en nanoestructuras en 2D

En esta sección generalizamos los resultados encontrados por X.G. Wen y R. Kan, [27], al considerar un gas de bosones con una relación de dispersión general propuesta por Aguilera *et al.* [58], $\epsilon_k = C_s k^s$. Calculamos la temperatura crítica de transición BEC usando la misma aproximación de W-K donde $\hbar^2/M_B c^2 \ll k_B T$. El espectro de energía considerado simula un conjunto infinito de planos separados una distancia c

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = C_s (k_x^2 + k_y^2)^{s/2} + \frac{\hbar^2}{M_B c^2} [1 - \cos k_z c], \quad (4.7)$$

para bosones ordinarios de masa m , $s = 2$, $C_2 \equiv \hbar^2/2m_B$ se recupera el modelo de Cooper y se generaliza a pares de Cooper tomando $s = 1$ y $C_1 = a(d)\hbar v_F$ con $v_F \equiv \hbar k_F/m$ la velocidad y el número de onda de Fermi, siendo $a(d) = (7/2 - 6/\pi) + (8/\pi - 1 - 2/\pi)d^2$ una constante que depende de la dimensión ver apéndice B. Cuando $\epsilon_{\mathbf{k}}$ es el espectro de energía toma la forma

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = C_s (k_x^2 + k_y^2)^{s/2} + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2M_B}, \quad (4.8)$$

que tomando $s = 2$, se obtiene el espectro de energía para un gas libre en 3D, con una diferencia en la dirección perpendicular al plano. Otro caso límite se encuentra

lo la masa efectiva en la dirección z satisface que $M_B c^2 \rightarrow \infty$ en cuyo caso

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = C_s (k_x^2 + k_y^2)^{s/2}, \quad (4.9)$$

corresponde a un sistema de partículas libres con una relación de dispersión general en 2D.

Las propiedades termodinámicas del sistema caracterizado por el espectro de energía dado (4.9) se obtienen del potencial termodinámico para un gas de bosones

$$\Omega(T, V, \mu) = k_B T \sum_{\mathbf{k}} \ln[1 - e^{-\beta(\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu)}] \equiv \Omega_0 + k_B T \sum_{\mathbf{k} > 0} \ln[1 - e^{-\beta(\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu)}], \quad (4.10)$$

donde $\beta \equiv 1/k_B T$, $\Omega_0 \equiv k_B T \ln[1 - e^{\beta\mu}]$ corresponde a la contribución del estado base al potencial termodinámico. Expandiendo el logaritmo $\ln(1 + ax) = -\sum_{l=1}^{\infty} (-ax)^l/l$ en potencias de x y tomando el límite del continuo donde

$$\sum_{k_i} \rightarrow V/(2\pi)^3 \int d^3 k_i, \quad (4.11)$$

se tiene

$$\Omega = \Omega_0 - \frac{V}{(2\pi)^3} k_B T \sum_{l=1}^{\infty} \frac{e^{\beta\mu l}}{l} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \exp[-\beta C_s l (k_x^2 + k_y^2)^{s/2}] \times \int_0^{2\pi/c} dk_z \exp[-\beta \hbar^2 l (1 - \cos k_z c)/M_B c^2]. \quad (4.12)$$

Las primeras integrales se pueden realizar llevando a la expresión

$$\frac{V \Gamma(2/s)}{(2\pi)^3 (3C_s)^{2/s}} k_B T \sum_{l=1}^{\infty} \frac{e^{\beta\mu l}}{l^{1+2/s}} \int_0^{2\pi/c} dk_z \exp[-\beta \hbar^2 l (1 - \cos k_z c)/M_B c^2]. \quad (4.13)$$

La integral sobre k_z se puede aproximar ya que el exponente es una función que oscila entre los valores 0 y $2\beta \hbar^2 l/M_B c^2$ y como $\beta \hbar^2/M_B c^2 \ll 1$, podemos sustituir este exponente por su valor medio de manera que

$$\int_0^{2\pi/c} dk_z \exp[-\beta \hbar^2 l (1 - \cos k_z c)/M_B c^2] \simeq (2\pi/c) \exp[-\beta \hbar^2 l/M_B c^2]. \quad (4.14)$$

Usando esta aproximación en (4.13) se obtiene

$$\Omega = \Omega_0 - \frac{V\Gamma(2/s)}{(2\pi)(\beta C_s)^{2/s} c} k_B T \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\exp[-\beta(\hbar^2/M_B c^2 - \mu)l]}{l^{1+2/s}}. \quad (4.15)$$

El número de bosones está dado por $N = -\partial\Omega/\partial\mu$, usando (4.15) encontramos que

$$N = N_0(T) + \frac{V\Gamma(2/s)}{(2\pi)(\beta C_s)^{2/s} c} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\exp[-\beta(\hbar^2/M_B c^2 - \mu)l]}{l^{2/s}}, \quad (4.16)$$

donde $N_0 = -\partial\Omega_0/\partial\mu$ es el número de bosones con momento cero. La suma infinita se puede expresar en términos de las funciones de Bose [33]

$$g_{\sigma}(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(z)^l}{l^{\sigma}} = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^{\infty} dx \frac{x^{\sigma-1}}{z^{-1}e^x - 1},$$

donde $z = \exp[-\beta(\hbar^2/M_B c^2 - \mu)l]$, encontrando que

$$N = N_0(T) + \frac{V\Gamma(2/s)}{(2\pi)(\beta C_s)^{2/s} c} g_{2/s}(e^{-\beta(\hbar^2/M_B c^2 - \mu)}). \quad (4.17)$$

La temperatura de transición crítica T_c es tal que $\mu(T_c) = 0$ y $N_0(T_c) = 0$, así que (4.17)

lleva a que

$$k_B T_c = C_s \left[\frac{2\pi n_{B-3DC}}{\Gamma(2/s) g_{2/s}(e^{-\hbar^2/M_B c^2 k_B T_c})} \right]^{s/2}, \quad (4.18)$$

donde $n = N/V$ la densidad de bosones en 3D.

Este es un resultado original de este trabajo y fue reportado sin llevar a cabo el análisis

estadístico en [98]. Como primer paso la utilizaremos para recuperar los resul-

tados de K. considerando que si $s = 2$, $C_2 = \hbar^2/2m_B$, y ya que $g_1(z) = -\ln[1 - z]$, se

(4.18)

$$k_B T_c = \left(\frac{\hbar^2}{2m_B} \right) \frac{4\pi n_{B-3DC}}{-\ln[1 - e^{-\hbar^2/M_B c^2 k_B T_c}]}, \quad (4.19)$$

redefiniendo $t \equiv \hbar^2/M_B c^2 k_B T$ (4.19) toma la forma

$$k_B T_c = \left(\frac{\hbar^2}{m_B} \right) \frac{2\pi n_{B-3DC}}{\ln[t_c/t]}, \quad (4.20)$$

en $\nu(t) = t_c/(1 - e^{-t_c})$. Claramente, $\nu(t) \rightarrow 1$ si $t \rightarrow 0$ y satisface las condiciones propuestas por W-K por lo que podemos reescribir (4.20) como

$$k_B T_c = \frac{\hbar^2 2\pi n_{B-3DC}}{m_B \ln[\nu(t_c) M_B c^2 k_B T_c / \hbar^2]}, \quad (4.21)$$

produce la ecuación (4.2). Es importante señalar que en esta tesis hemos encontrado la forma de la función $\nu(t)$, consistente con que M_B es muy grande.

La ecuación (4.18) es una ecuación implícita en T_c para toda $s > 0$. Normalizando (4.18) con la energía de Fermi $E_F = k_B T_F$, considerando que la densidad de bosones es $n_B = n/2$ y la densidad de número de fermiones en 2D $n = k_F^2/2\pi$, encontramos que

$$T_c/T_F = C_s \frac{2mk_F^{s-2}}{\hbar^2} \left[s/2g_{2/s} \left(\exp - \frac{Y}{(T_c/T_F)} \right) \right]^{s/2}, \quad (4.22)$$

donde $Y \equiv (m_B/M_B)/(ck_F)^2$ depende de valores experimentales. De este modo, si $Y \rightarrow \infty$ y $Y = 0$, el sistema está en 2D mientras que si por el contrario, $m_B/M_B = 1$, tenemos el caso perfectamente isotrópico en 3D.

2. Temperatura crítica para un gas de bosones libres en $(2 + \epsilon)$ dimensiones

En esta sección vamos a comparar el comportamiento de un gas de bosones al confinarlo en un espacio de $(2 + \epsilon)$ dimensiones con una distancia c , con el del un gas ideal libre moviéndose en $(2 + \epsilon)D$. En esta parte calculamos la temperatura crítica para un gas ideal de bosones de $(2 + \epsilon)D$ dimensiones y con una relación de dispersión generalizada. El espectro de energía de una partícula en este sistema es

$$\epsilon_{k_i} = C_s \sum_{i=1}^d k_i^s \quad (4.23)$$

con $k_i \equiv (2\pi/L)n_i$, donde L es el tamaño de la caja y donde $n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, s > 0$.
En este caso, el potencial termodinámico es

$$\Omega = k_B T \sum_{\mathbf{k}} \ln[1 - e^{-\beta(\epsilon_{\mathbf{k}_i} - \mu)}]. \quad (4.24)$$

Desarrollando el logaritmo $\ln(1 + ax) = -\sum_{l=1}^{\infty} (x)^l/l$ en (4.24), se obtiene

$$\begin{aligned} \Omega(T, V, \mu) &= \Omega_0 - k_B T \sum_{\mathbf{k}_i} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(e^{-\beta(\epsilon_{\mathbf{k}_i} - \mu)})^l}{l} \\ &= \Omega_0 - k_B T \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(e^{-\beta\mu})^l}{l} \sum_{\mathbf{k}_i} (e^{-\beta\epsilon_{\mathbf{k}_i}})^l, \end{aligned} \quad (4.25)$$

con $\Omega_0 \equiv k_B T \ln[1 - e^{\beta\mu}]$ la contribución del estado base al potencial termodinámico. Sustituyendo (4.23) en (4.25) y tomando el límite del continuo (4.11), se obtiene después de integrar

$$\Omega(T, V, \mu) = \Omega_0 - k_B T \frac{L^d \Gamma(d/s)}{2^{d-1} \pi^{d/2} \Gamma(d/2) (\beta C_s)^{d/s}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{e^{\beta\mu l}}{l^{1+d/s}}, \quad (4.26)$$

o, en términos de las funciones de Bose $g_{\sigma}(z)$,

$$\Omega(T, V, \mu) = \Omega_0 - k_B T \frac{L^d \Gamma(d/s)}{2^{d-1} \pi^{d/2} \Gamma(d/2) (\beta C_s)^{d/s}} g_{d/s+1}(e^{\beta\mu}). \quad (4.27)$$

Ya que $N = -\partial\Omega/\partial\mu$, se encuentra que la densidad de bosones excitados $n_B - n_0 \equiv -\frac{1}{L^d} \partial(\Omega - \Omega_0)/\partial\mu$ está dada por

$$n_B - n_0 = \frac{\Gamma(d/s)}{2^{d-1} \pi^{d/2} \Gamma(d/2) (\beta C_s)^{d/s}} g_{d/s}(e^{\beta\mu}), \quad (4.28)$$

donde n_0 corresponde a la densidad de bosones en el estado base. La temperatura crítica T_c se encuentra cuando el número de partículas en el estado base es despreciable comparado con N , por lo que la densidad en el estado base se puede tomar como $n_0 = 0$, mientras que el potencial químico $\mu = 0$, así

$$n_B = \frac{\Gamma(d/s)}{2^{d-1} \pi^{d/2} \Gamma(d/2) (\beta C_s)^{d/s} s} g_{d/s}(1), \quad (4.29)$$

donde aquí que la expresión para la temperatura crítica T_c de un gas de bosones libres en d dimensiones con una relación de dispersión generalizada, es

$$k_B T_c = C_s [n_B 2^{d-1} \pi^{d/2} s \Gamma(d/2) / \Gamma(d/s) g_{d/s}(1)]^{s/d}, \quad (4.30)$$

donde $n_B = N/L^d$ es la densidad de número del gas.

Al sustituir (4.30) con la energía de Fermi $E_F = k_B T_F \equiv \hbar^2 k_F^2 / 2m$, suponiendo que la densidad de bosones n_B es la mitad de la de fermiones $n_B = n/2$ y ya que la densidad de fermiones en d dimensiones es $n = k_F^d / 2^{d-2} \pi^{d/2} \Gamma(d/2) d$, se obtiene

$$T_c/T_F = C_s \frac{2mk_F^{s-2}}{\hbar^2} [s/d \Gamma(d/s) g_{d/s}(1)]^{s/d}. \quad (4.31)$$

Tomando $d = 2 + \epsilon$ se encuentra una expresión para T_c/T_F en $2 + \epsilon$ dimensiones.

$$T_c/T_F = C_s \frac{2mk_F^{s-2}}{\hbar^2} [s/(2 + \epsilon) \Gamma(2/s + \epsilon/s) g_{2/s+\epsilon/s}(1)]^{s/(2+\epsilon)}. \quad (4.32)$$

Los valores de T_c/T_F para el gas de bosones libres, Ec. (4.32) y para el del gas de bosones cuando Ec. (4.22), coinciden si

$$[s/(2 + \epsilon) \Gamma(2/s + \epsilon/s) g_{2/s+\epsilon/s}(1)]^{s/(2+\epsilon)} = \left[s/2 g_{2/s} \left(\exp - \frac{Y}{(T_c/T_F)} \right) \right]^{s/2}, \quad (4.33)$$

donde la expresión pequeña toma la forma:

$$[s/2 \Gamma(2/s) g_{2/s+\epsilon/s}(1)]^{s/2} = \left[s/2 g_{2/s} \left(\exp - \frac{Y}{(T_c/T_F)} \right) \right]^{s/2}, \quad (4.34)$$

donde

$$g_{2/s+\epsilon/s}(1) \simeq g_{2/s}(e^{-Y/(T_c/T_F)}). \quad (4.35)$$

... = 2 la función $g_{2/s+\epsilon/s}(1) = g_{1+\epsilon/2}(1) \equiv \zeta(1 + \epsilon/2)$ y tiene el comportamiento en (4.5) cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Así, para ϵ pequeña, de la ecuación (4.35) se recupera la ecuación (4.6).

De la Ec. (4.22) se obtiene la T_c del sistema la cual sustituimos en la ecuación (4.32) para determinar los valores correspondientes de ϵ . Como (4.22) depende de $Y \equiv (m_B/M_B)/(ck_F)^2$ donde M_B , c y k_F son parámetros experimentales asociados a los superconductores de alta T_c , podemos encontrar los valores de ϵ asociados a los valores de los parámetros experimentales reportados.

En la Figura 4.2 se ha graficado m_B/M_B como una función de la dimensión $d=(2+\epsilon)$, los datos se han calculado sustituyendo T_c de la ecuación (4.22) con los valores de $c = 6 \text{ \AA}$ y 30 \AA , y $k_F = 0.5 \text{ \AA}^{-1}$ tal como son reportados en la Ref. [82], para $s = 2$, en (4.35), en la figura se observa que conforme la asimetría de las masas aumenta ($M_B \gg m_B$), el comportamiento del sistema se acerca más al bidimensional como era de esperarse.

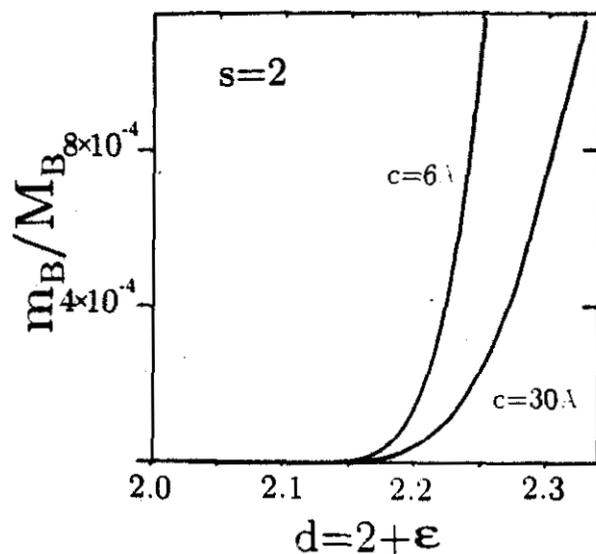


Figura 4.2 Razón m_B/M_B como función de la dimensión d que varía continuamente de 2.0 a 2.3. Los valores de $c = 6 \text{ \AA}$ y 30 \AA son los experimentales reportados para los materiales superconductores orgánicos [82] con $k_F = 0.5 \text{ \AA}$.

4.3 Superconductividad en nanoestructuras en 1D

Los sistemas casi-1D pueden ser modelados por un conjunto infinito de cadenas de átomos paralelas entre sí e igualmente espaciadas. En esta sección generalizamos aún más los resultados de [27] al considerar un gas de bosones con una relación de dispersión general $\varepsilon_{\mathbf{k}} = C_s k^s$, confinado a moverse en un conjunto infinito de cadenas separadas una distancia c . Calculamos la temperatura crítica de transición T_c dentro de la misma aproximación $\hbar^2/M_B c^2 \ll k_B T$. El espectro de energía de este sistema cuando las cadenas están alineadas a lo largo de de eje x , se describe como

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = C_s k_x^s + \frac{\hbar^2}{M_B c^2} [1 - \cos k_y c] + \frac{\hbar^2}{M_B c^2} [1 - \cos k_z c], \quad (4.36)$$

donde hemos supuesto que están igualmente espaciadas en las direcciones y y z .

El potencial termodinámico en este sistema, se encuentra sustituyendo la expresión (4.36) en (4.10), realizando una expansión en serie del logaritmo, en el límite del continuo (4.11) se encuentra que en 3D

$$\begin{aligned} \Omega(T, V, \mu) = & \Omega_0(T, V, \mu) - \frac{V}{(2\pi)^3} k_B T \sum_{l=1}^{\infty} \frac{e^{\beta \mu l}}{l} \int_0^{\infty} dk_x \exp[-\beta C_s k_x^s l] \times \\ & \int_0^{2\pi/c} dk_y \exp[-\beta \hbar^2 l (1 - \cos k_y c) / M_B c^2] \times \\ & \int_0^{2\pi/c} dk_z \exp[-\beta \hbar^2 l (1 - \cos k_z c) / M_B c^2]. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Definiendo $\beta C_s l k_x^s \equiv x$ y ya que $\Gamma(r) = \int_0^{\infty} dx x^{r-1} e^{-x}$, la primer integral resulta ser $\Gamma(1/s) / (\beta C_s l)^{1/s}$ y (4.37) se puede reescribir así

$$\begin{aligned} \Omega(T, V, \mu) = & \Omega_0 - \frac{V \Gamma(1/s)}{(2\pi)^3 (\beta C_s)^{1/s} s} k_B T \sum_{l=1}^{\infty} \frac{e^{\beta \mu l}}{l^{1-1/s}} \int_0^{2\pi/c} dk_y \exp[-\beta \hbar^2 l (1 - \cos k_y c) / M_B c^2] \times \\ & \int_0^{2\pi/c} dk_z \exp[-\beta \hbar^2 l (1 - \cos k_z c) / M_B c^2]. \end{aligned} \quad (4.38)$$

De (4.1) tenemos que

$$\int_0^{2\pi/c} dk \exp[-\beta \hbar^2 l (1 - \cos kc) / M_B c^2] \simeq \frac{2\pi}{c} \exp[-\beta \hbar^2 l / M_B c^2], \quad (4.39)$$

Por lo que el potencial termodinámico (4.38) queda

$$\Omega(T, V, \mu) = \Omega_0 - \frac{V \Gamma(1/s)}{2\pi (\beta C_s)^{1/s} s c^2} k_B T \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\exp[-\beta l (2\hbar^2 / M_B c^2 - \mu)]^2}{l^{1+1/s}}. \quad (4.40)$$

La ecuación (4.40) se puede escribir como

$$\Omega(T, V, \mu) = \Omega_0 - \frac{V \Gamma(1/s)}{2\pi (\beta C_s)^{1/s} s c^2} k_B T g_{1+1/s}(e^{[-\beta(2\hbar^2 / M_B c^2 - \mu)]}), \quad (4.41)$$

donde $g_\sigma(z)$ es la función de Bose. De las expresiones para el número total de bosones $N = -(\partial\Omega/\partial\mu)_{T,V}$ y para el número de bosones con momento cero $N_0 = -\partial\Omega_0/\partial\mu$, con (4.41) se encuentra la densidad de bosones $n(T) \equiv N/V$ en los estados excitados

$$n(T) - n_0(T) = \frac{\Gamma(1/s)}{2\pi (\beta C_s)^{1/s} s c^2} g_{1/s}(e^{[-\beta(2\hbar^2 / M_B c^2 - \mu)]}). \quad (4.42)$$

La temperatura de transición crítica BEC T_c es tal que $\mu(T_c) = 0$ y $N_0(T_c) = 0$, así que

$$k_B T_c = C_s \left[2\pi n_{B-3D} s c^2 / \Gamma(1/s) g_{1/s}(e^{-2\hbar^2 / M_B c^2 k_B T_c}) \right]^s. \quad (4.43)$$

Al igualando con la energía de Fermi $E_F = k_B T_F = \hbar^2 k_F^2 / 2m$ y tomando la densidad de momento $n_{B-3D} c^2 = n_{B-1D}$, considerando que la densidad de bosones es $n_B = n/2$ siendo n la densidad de número de fermiones que en 1D es $n = 2k_F/\pi$, de (4.18) se encuentra

$$T_c/T_F = C_s \frac{2m k_F^{s-2}}{\hbar^2} \left[4s / \Gamma(1/s) g_{1/s} \left(\exp - \frac{2Y}{(T_c/T_F)} \right) \right]^s, \quad (4.44)$$

como antes, $Y \equiv (m_B/M_B) / (ck_F)^2$. Comparando la ecuación (4.44) con (4.30)

con $l = 1 + \epsilon$ con $\epsilon \rightarrow 0$, encontramos que

$$4(1 + \epsilon) \Gamma([1 + \epsilon] / s) g_{1-\epsilon}(1) \simeq g_{1/s}(e^{-2Y/(T_c/T_F)}). \quad (4.45)$$

Tomando $s = 1$, encontramos una ecuación para ϵ

$$4(1 + \epsilon)\Gamma((1 + \epsilon))g_{1+\epsilon}(1) \simeq g_1(e^{-2Y/(T_c/T_F)}). \quad (4.46)$$

La expresión (4.46) puede ser evaluada con los datos experimentales reportados.

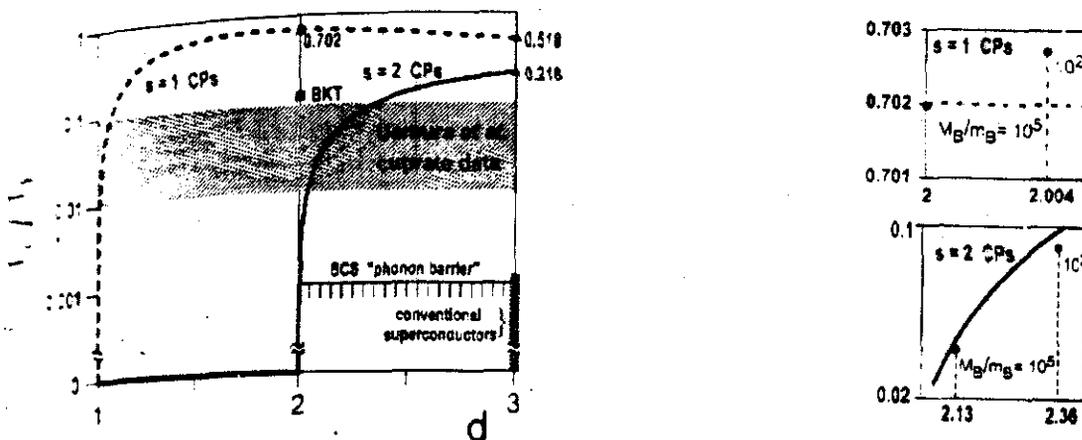


Figura 4.3 Se grafica T_c/T_F del gas libre de bosones como función de la dimensión para $s = 1$ y $s = 2$ de acuerdo a la fórmula (4.32), las áreas sombreadas se refieren a los datos empíricos de la Ref. [100]. A la derecha se muestra una ampliación de la figura donde los puntos se refieren a los resultados de (4.22).

En la Figura 4.3 se muestra la temperatura crítica BEC T_c en unidades de la temperatura de Fermi, como función de la dimensión d , para el gas ideal de bosones, de acuerdo a la ecuación (4.32) cuando $s = 1$ y $s = 2$. En los recuadros a la derecha, se muestra una ampliación de la figura en donde se grafican como puntos los resultados de (4.22) para los valores extremos de $M_B/m_B = 10^2$ y 10^5 si $s = 1$ y para $s = 2$. Se observa que estos puntos están muy poco de los resultados para bosones libres con $s = 2$ o $s = 1$, en $d = 2 + \epsilon$ y $d = 3 - \epsilon$ respectivamente, si ϵ es pequeña. Estos resultados se obtienen directamente de (4.32) que es válida para toda $d > 0$.

4.4 Resultados

Utilizamos las ecuaciones (4.35) para $(2 + \epsilon)D$ y (4.46) para $(1 + \epsilon)D$, para calcular el valor de ϵ , con dos valores extremos [100] de $c = 6 \text{ \AA}$ y $c = 30 \text{ \AA}$, y $k_F = 0.5 \text{ \AA}^{-1}$. Los valores de ϵ se encuentran para $s = 2$ y $C_2 = \hbar^2/2m_B$ y para $s = 1$ y $C_1 = \hbar v_F$. Se calculó la diferencia en porcentajes entre la temperatura crítica de un gas ideal en D (4.30) y la encontrada con nuestro modelo (4.18).

s	$c(\text{\AA})$	M_B/m_B	ϵ	$\frac{T_c[\text{Eq. (4.18)}] - T_c[\text{Eq. (4.30)}]}{T_c[\text{Eq. (4.30)}]} \times 100\%$
2	6	10^2	0.50048	18
		10^4	0.25062	17
	30	10^2	0.29639	18
		10^4	0.18335	15
1	6	10^2	0.01271	-0.71
		10^4	0.00020	-0.01
	30	10^2	0.00072	-0.04
		10^4	0.00001	-0.001

Tabla 4.1 Modelo de infinito número de planos en $(2 + \epsilon)D$

El cuadro muestra los valores de ϵ y de la temperatura crítica calculados con $s = 2$ y los valores extremos de espaciamientos c entre planos reportados y para dos valores de M_B/m_B . En la última columna se muestra que la diferencia porcentual de nuestro modelo de lápidas con el gas ideal en $(2 + \epsilon)D$ es mucho menor si el gas confinado es formado por pares de Cooper con relación de dispersión lineal ($s = 1$) en vez de la cuadrática ($s = 2$).

s	$c(\text{Å})$	M_B/m_B	ϵ	$\frac{T_c[\text{Eq. (4.30)}] - T_c[\text{Eq. (4.44)}]}{T_c[\text{Eq. (4.30)}]} \times 100\%$
1	7	10^2	0.4154	11
		10^4	0.2363	19

Tabla 4.2 Modelo de un infinito número de cadenas en $(1 + \epsilon)D$

En la Tabla 4.2 se enlistan los valores de ϵ en $(1 + \epsilon)D$ encontrados de la Ec. (4.46) para $s = 1$, se han utilizando los valores experimentales reportado en la Ref. [82] de $c = 7 \text{ Å}$ y $k_F = 0.5 \text{ Å}^{-1}$, enlistamos la diferencia en porcentajes entre (4.30) en $(1 + \epsilon)D$ y (4.44), la diferencia es 11% si $s = 1$ y 19% si $s = 2$.

4.5 Conclusiones.

En este capítulo, se han modelado a los cupratos superconductores de alta T_c cuya conductividad es casi bidimensional, como una pila de láminas imaginarias, de espesor variable y separadas entre sí por una distancia c . Estas contienen electrones interactuando entre sí en donde el potencial efectivo entre los electrones que proviene de la interacción electrón-electrón más la electrón-fonón, genera pares de electrones cuyas energías dejan de ser una función cuadrática del momento para ser lineal. Calculamos la temperatura crítica de condensación Bose-Einstein de los pares de electrones considerados como bosones. Encontramos que el gas de bosones estratificado se comporta termodinámicamente equivalente a un gas ideal de bosones en dimensión $(2 + \epsilon)$, donde $0 < \epsilon < 1$, y con una masa renormalizada que depende de ϵ . Encontramos que el parámetro ϵ se puede asociar con los valores experimentales reportados c , la separación entre capas, ó entre cadenas, k_F el número de Fermi M_B/m_B pudiendo encontrar valores de ϵ que reproducen los valores experimentales. Los nuevos compuestos organo-metálicos $(TMTSF)_2X$ cuya conductividad es casi

dimensional, se han modelado como una extensión del modelo anterior al caso casi-
D. Se encontró que el gas de bosones en este modelo se comporta termodinámicamente
equivalente a un gas ideal de bosones en una dimensión $(1 + \epsilon)$.

Capítulo 5

Temperaturas de transición debido a una densidad de estados electrónicos con estructura

El estado superconductor se puede explicar como un sistema cuántico de muchos bosones donde una fracción apreciable ocupa el estado base del sistema de N cuerpos cuando dicho sistema está por debajo de una cierta temperatura crítica T_c de transición. Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) formularon por primera vez una teoría que explica la superconductividad [10] [12], en ella se supone la formación de pares de electrones (o huecos) dentro del mar de Fermi debido a la interacción atractiva de tipo electrón-fonón en un metal. A través de la interacción con la red, los electrones sienten una atracción débil de uno con otro a pesar de su repulsión coulombiana, formando pares ligados con momentos y espines antialineados, dichos pares son llamados pares de Cooper o pairones.

Estas partículas compuestas o cuasi-partículas, las cuales tienen magnitud de la carga $2e$ pueden ser consideradas como bosones ya que aunque sus operadores de creación y aniquilación no satisfacen las reglas de conmutación de Bose, en el límite termodinámico, ellos obedecen la distribución de BE ya que podemos encontrar un número indefinido de pares con el mismo valor del momento total del par, aunque tengan distintos valores del momento relativo, garantizando que el principio de Pauli se cumple. Así, a diferencia de los fermiones, los pares de Cooper pueden ocupar el estado base sin ninguna limitación de número pudiendo formar un condensado de BE. La energía de amarre de los pares puede obtenerse analíticamente en cualquier número de dimensiones lo que nos permite considerar esta teoría en materiales que pueden ser descritos como casi-bidimensionales

como lo son los superconductores cupratos o los superconductores orgánicos que pueden ser considerados casi-unidimensionales.

Si tomamos en cuenta que la atracción entre electrones es extremadamente débil, la transición de fase superconductor ocurre cuando los electrones tienen una energía cercana a la energía de Fermi $E_F \equiv \hbar^2 k_F^2 / 2m^*$ de los $N-2$ electrones del fondo. A la vez que emiten y absorben un fonón de energía máxima $\hbar\omega_D$, pueden sentir una atracción neta que, en primera aproximación, puede describir el estado superconductor como el de un gas de bosones con una interacción débil capaz de formar un condensado de BE.

El fenómeno de condensación de BE se predijo teóricamente en 1925 para un gas de bosones no interactuantes de masa m . Éste fue detectado experimentalmente en forma convincente hasta 1995 [15]. Por otro lado, es bien conocido que la condensación de BE en un gas ideal de bosones puede ocurrir sólo en sistemas con dimensión espacial $d > 2$ y que matemáticamente se predice que la temperatura crítica de transición T_c está dada

$$T_c \equiv \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B} \left[\frac{n}{\zeta(d/2)} \right]^{2/d} \quad (5.1)$$

donde m es la masa del bosón, n la densidad de número de bosones, $d > 0$ la dimensión del espacio, \hbar y k_B las constantes de Planck y de Boltzmann, respectivamente, y ζ es la función zeta de Riemann $\zeta(\sigma)$ la cual diverge si $\sigma \leq 1$; de aquí que $T_c = 0$ si

esto excluye a los superconductores orgánicos casi-unidimensionales [6] [7]-[9] reportados en los años 1980, de considerar su superconductividad como una BEC. En la teoría BCS se consideran sólo pares de electrones ligados de momento lineal con momento neto de masa cero, sin embargo, Schrieffer [11] cita sin mayores detalles que la relación entre la energía de excitación E_k y el momento $\hbar K$ es lineal cuando $K \rightarrow 0$. De

aquí que a diferencia de los fonones o los fotones, el número de total de pares se conserva, es decir, son partículas permanentes al menos a temperatura absoluta cero.

Fujita *et al.* [13] consideran un gas de fermiones con momentos $\hbar\mathbf{k}_1$ y $\hbar\mathbf{k}_2$, y de momento total (o de centro de masas) (CMM) $\hbar\mathbf{K} \neq \mathbf{0}$, interactuando entre pares vía el modelo de interacción BCS para formar pairones, demuestran que, para $0 < T < T_c$, se forma una mezcla de pairones con $K = 0$ y $K > 0$, donde los pairones con $K = 0$ son pares de Cooper ordinarios. Encuentran que, cuando $K \rightarrow 0$ bajo la aproximación de acoplamiento débil, los pairones en d dimensiones tienen una energía de excitación $(\Delta_K - \Delta_0)$ dada por

$$\epsilon_K \equiv (\Delta_K - \Delta_0) \simeq a(d)\hbar v_F K, \quad (5.2)$$

donde, $a(d) \equiv (7/2 - 6/\pi) + (8/\pi - 13/4)d + (3/4 - 2/\pi)d^2$, es una constante de acoplamiento que para acoplamiento débil vale 1, $2/\pi$ y $1/2$ en $d = 1$, $d = 2$ y $d = 3$ respectivamente, v_F es la velocidad de Fermi de un electrón y $\hbar K$ es el momento del centro de masa del par bosónico. Así, $\epsilon_k \rightarrow a(d)v_F\hbar K$, cuando $K \rightarrow 0$ en vez de $\epsilon_k \equiv \hbar^2 k_k^2/2m = p^2/2m$ que lleva a la fórmula (5.1) para T_c , encuentran que, la relación de dispersión entre la energía y el momento, es lineal pudiendo sufrir una condensación de BE en dos y tres dimensiones, ver apéndice B.

Por otro lado, para temperaturas por debajo de la temperatura de transición, la teoría de BCS predice la existencia de una brecha "gap" energética $\Delta(T)$ la cual se hace cero en $T = T_c$ y aumenta conforme la temperatura decrece. La ecuación para el gap de energía, con una densidad de estados general $g(\epsilon)$ es

$$2/V \equiv \int_{E_F - \hbar\omega_D}^{E_F + \hbar\omega_D} \frac{d\epsilon}{\sqrt{(\epsilon - E_F)^2 + \Delta^2(T)}} g(\epsilon) \tanh \frac{\sqrt{(\epsilon - E_F)^2 + \Delta^2(T)}}{2k_B T}. \quad (5.3)$$

Tomando $\Delta(T_c) = 0$, suponiendo una DOS evaluada en la superficie de Fermi esférica y resolviendo la ecuación anterior encontramos el resultado bien conocido de la fórmula exacta para T_c predicha por la teoría BCS,

$$T_c \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 1.13\Theta_D e^{-1/\lambda}, \quad (5.4)$$

donde $\Theta_D \equiv \hbar\omega_D/k_B$ es la temperatura característica de Debye de un cristal iónico (~300K), ω_D es la frecuencia fonónica de Debye, $\lambda \equiv g(E_F)V$ es una constante de acoplamiento adimensional ($\ll 1$), $g(E_F)$ es la DOS en la superficie de Fermi con energía E_F y V es la fuerza atractiva del modelo de interacción BCS, la cual representa el efecto de atracción. De éste resultado se encuentra una limitación a la teoría BCS ya que λ debería que ser mucho más grande que la máxima frecuencia fonónica de Debye ω_D para predecir temperaturas críticas de transición superconductoras más grandes que 30K que es el valor máximo BCS predicho y algunas veces conocido como la "barrera fonónica". Este hecho es muy notorio en un época en la que la T_c de los superconductores de alta temperatura crítica es del orden de 125K.

En la teoría BCS los efectos de la red cristalina sobre la T_c no se han tomado en cuenta ya que la DOS es una superficie de Fermi esférica, estos pueden ser considerados al modificar la DOS más allá de estas superficies de Fermi. Por otro lado, van Hove [109] muestra la forma de la función de distribución de frecuencias de vibraciones elásticas $g(\nu)$, en la cual determina una parte importante de sus propiedades termodinámicas. Encuentra que en un cristal bidimensional, dicha función de distribución tiene singularidades físicas con picos infinitos que divergen logarítmicamente. En el caso tridimensional, la función de distribución misma es continua mientras que su primera derivada exhibe discontinuidades infinitas.

En 1997, Markiewicz [110] muestra la importancia que tienen las singularidades en la densidad de estados electrónicos en las propiedades termodinámicas de los superconductores cupratos. Demuestra el papel que la singularidad predicha por van Hove tiene en la física de los superconductores cupratos de alta T_c . La razón de ello es que estos superconductores tienen una estructura de capas bidimensionales donde ocurre el fenómeno superconductor, por lo que en este caso no es válido sustituir $g(\varepsilon)$ por $g(E_F)$, como se hace en la teoría de BCS, sino que debe considerarse que $g(\varepsilon)$ presenta una singularidad logarítmica en T_F , además ofrece un estudio sobre la evidencia experimental de las superficies de Fermi de los cupratos y compuestos relacionados.

En este capítulo se estudia un modelo que considera una mezcla de fermiones desapareados más pares de Cooper que satisfacen una relación de dispersión lineal que les permite una BEC en dimensiones mayores que la unidad. Calculamos las temperaturas críticas T_c de BEC considerando una superficie de Fermi esférica en $d > 0$ dimensiones y analizamos los resultados de T_c en 2D y 3D, estos resultados son para electrones con una densidad de estados igual a la de un gas ideal. Los resultados se comparan y contrastan con la T_c calculada a partir de la ecuación para la brecha energética (5.4) de la teoría BCS.

Para tomar en cuenta los efectos de la red cristalina hemos calculado la T_c dentro de estos dos modelos al modificar la densidad de estados más allá de las superficies de Fermi esféricas en un sistema cuántico de fermiones capaces de formar pares de Cooper en un modelo en 2D en donde 1) las densidades de estado presentan singularidades tipo van Hove que contiene una singularidad logarítmica (VHS) y 2) DOS con una singularidad potencial asociada a un punto silla extendido (ESP por sus siglas en inglés).

5.1 Densidades de estado con singularidades tipo van Hove VH

En 1953, van Hove [109] demuestra que para un cristal, bajo la suposición de armonicidad para las fuerzas atómicas y como una consecuencia de la estructura periódica, la función de distribución de frecuencias de vibraciones elásticas tiene singularidades analíticas. En el caso general, la naturaleza de las singularidades depende sólo del número de dimensiones del cristal. Para un cristal bidimensional, la función de distribución tiene picos infinitos que divergen logarítmicamente. En el caso tridimensional, la función de distribución misma es continua mientras que su primera derivada exhibe discontinuidades infinitas. Estos resultados son consecuencias del teorema de Morse acerca de la existencia de puntos silla para funciones definidas en un toro. La discusión presentada por van Hove se aplica a la teoría de Bloch de electrones en redes cristalinas, donde la energía de los electrones toma el lugar del cuadrado de las frecuencias de vibración, que es una función periódica del vector de onda y tiene al menos el número mínimo de los puntos críticos predichos por el teorema de Morse.

La densidad de estados propuesta por van Hove (VHS) en un cristal bidimensional tiene la forma

$$g(\varepsilon) \equiv g(E_F) \ln \left| \frac{E_F}{\varepsilon - E_F} \right|. \quad (5.5)$$

Donde $g(E_F)$ es la densidad de estados de un gas ideal en 2D evaluada en la energía de Fermi E_F , ésta muestra una singularidad logarítmica cuando la energía ε se aproxima a E_F .

5.2 Densidades de estado con singularidades de potencia asociada a un punto silla extendido ESP

Experimentalmente Abrikosov [108] observa que el espectro de energía del $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6.9}$ y el $\text{YBa}_2\text{Cu}_4\text{O}_8$ presentan una singularidad la cual puede ser asociada a un punto silla extendido (ESP por sus siglas en inglés), en el cálculo de la T_c , la estructura cristalina puede ser tomada en cuenta con un DOS que refleje estos resultados.

La densidad de estados ESP está dada por

$$g(\varepsilon) = (N/2E_F)f(x), \quad (5.6)$$

donde la función adimensional $f(x)$ definida por

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^\sigma} \theta(1-x_0-x) + f_0 \theta(x+x_0-1) \theta(1-x), \quad \sigma > 0, \quad (5.7)$$

donde $\theta(y) = 0$ si $y < 0$, $= 1$ si $y > 0$ y $= 1/2$ si $y = 0$.

La curva $f(x)$ crece linealmente desde cero en $x = 0$ y diverge en $x = 1$ con una singularidad de potencia σ . Este incremento se interrumpe en $x = 1 - x_0$ para ser una constante de altura f_0 y anchura x_0 . El valor de f_0 está determinado por

$$\int_0^1 dx f(x) = \int_0^{1-x_0} dx \frac{x}{(1-x)^\sigma} + f_0 \int_{1-x_0}^1 dx = 1, \quad (5.8)$$

donde es una condición de normalización que asegura que el número total de fermiones

es $N = \int_0^\infty d\varepsilon g(\varepsilon) \theta(E_F - \varepsilon)$. De (5.8), f_0 puede ser expresada en términos de

específicamente

$$f_0 = x_0^{-1} - [x_0^{\sigma-1} + x_0(1-\sigma) + (\sigma-2)] / (2-3\sigma+\sigma^2)x_0^{\sigma-1}. \quad (5.9)$$

En (5.6) se encuentra que cuando $\sigma \rightarrow \infty$ y $x_0 \rightarrow 1$ se recupera el caso del gas ideal de Fermi (GIF). Sin embargo, cuando $\sigma \rightarrow 0$ encontramos que existe un valor mínimo

$\sigma \approx 0.3819$ más allá del cual x_0 deja de ser real. El exponente $\sigma = 1/2$ es sugerido en [108].

En la Figura 5.1 mostramos la DOS de van Hove, de ESP y del GIF, normalizadas a la DOS de un gas ideal de fermiones como función de ϵ/E_F , donde $\nu \equiv \hbar\omega_D/E_F = \Theta_D/T_F$.

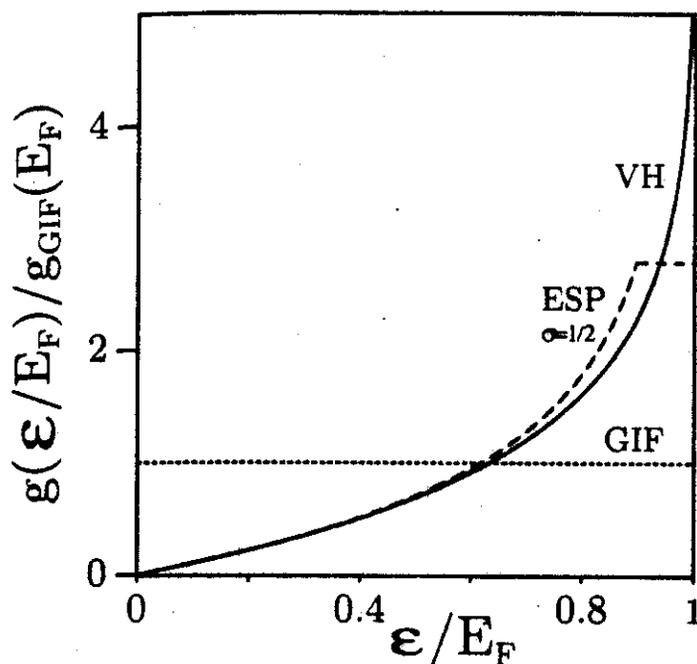


Figura 5.1 Densidad de estados $g(\epsilon)$ normalizada a la DOS de un gas ideal de fermiones como función de ϵ/E_F para $\nu = 0.05$ que representa un valor típico de los cupratos.

5.3 Temperatura crítica T_c BEC

En esta sección se calculan las temperaturas críticas T_c de transición BEC en un (GIF) en d -dimensiones con interacciones atractivas entre fermiones y donde al menos algunos de los fermiones forman pares de Cooper. La teoría BCS de muchos fermiones interactuando

considera que la energía disponible para la interacción, es la energía en el espectro fonónico del sólido $\hbar\omega_D$, donde ω_D es la frecuencia de Debye. Este modelo predice que habrá una energía de interacción atractiva vía la red, diferente de cero, sólo si los electrones están por encima de la energía de Fermi $E_F = \hbar^2 k_F^2 / 2m$ de los $N - 2$ electrones de fondo a la vez que el par de electrones absorbe o emite un fonón con energía máxima $\hbar\omega_D$. Así podemos considerar que tenemos una mezcla de fermiones desapareados más pares de Cooper los cuales satisfacen una relación de dispersión lineal que les permite una condensación BEC en dimensiones mayores que la unidad. A cualquier temperatura T , el número total de fermiones es $N = N_1 + N_2$ donde N_1 es el número de fermiones no apareables y N_2 es el número de fermiones apareables en pares de Cooper. Los fermiones no apareados obedecen la estadística de Fermi-Dirac mientras que los N_2 fermiones apareables son aquellos que están en la capa de energía de interacción de anchura $\hbar\omega_D$, esto es

$$N_2(T) = 2 \int_{\mu - \hbar\omega_D}^{\mu + \hbar\omega_D} d\varepsilon \frac{g(\varepsilon)}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1}, \quad (5.10)$$

en $T = 0$, $[e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1]^{-1} = \theta(E_F - \varepsilon)$ es la función escalón y $\mu(T = 0) = E_F$, donde $E_F = \hbar^2 k_F^2 / 2m$ es la energía de Fermi con k_F el número de onda de Fermi. Considerando que $g(\varepsilon) \simeq g(E_F)$ es la densidad de estados de un gas ideal y es una constante en esta región del espectro, encontramos que

$$N_2(T = 0) \simeq 2g(E_F)\hbar\omega_D. \quad (5.11)$$

El número de pares formados a $T = 0$ es $N_2(0)/2 = N_{B,0}(0)$ que se forman por la interacción BCS es precisamente $g(E_F)\hbar\omega_D$, con $g(\varepsilon)$ dada en la ecuación (2. 14),

$$g(\varepsilon) = \left(\frac{mL^2}{2\pi\hbar^2} \right)^{d/2} \frac{\varepsilon^{d/2-1}}{\Gamma(d/2)},$$

que es la densidad de estados del gas ideal y representa el número de estados de fermiones

con espín para arriba por unidad de energía, los cuales pueden ser considerados como bosones. La ecuación (5.11) es exacta en 2D.

La densidad de número de pares de Cooper $n_{B,0}$ es entonces $n_{B,0}(0) = N_{B,0}(0)/L^d = g(E_F)\hbar\omega_D/L^d$ y si todos los fermiones estuvieran apareados entonces $n_B/n = 1/2$. Sin embargo ya que $n = k_F^d/2^{d-2}\pi^{d/2}d\Gamma(d/2)$ y de (2. 14) se muestra que

$$n_B/n = d\hbar\omega_D/4E_F \equiv \nu d/4, \quad (5.12)$$

donde como antes, $\nu \equiv \hbar\omega_D/E_F = \Theta_D/T_F$, siendo Θ_D la temperatura de Debye y T_F la temperatura de Fermi. Como típicamente $\hbar\omega_D \ll E_F$, lo cual implica que el número de fermiones que se aparean es mucho menor que el número total de fermiones, entonces n_B/n es una fracción mucho menor que 1/2. La ecuación general para T_c en un gas libre está dada por la ecuación (4.30). En un sistema formados por pares de Cooper, la relación de dispersión para acoplamiento débil es lineal $s = 1$ [?] y $C_1 = a(d)\hbar v_F$. Normalizando (4.30) con respecto a la energía de Fermi E_F , podemos reescribirla como

$$\frac{T_c^{GIF}}{T_F} = \frac{a(d)\hbar v_F}{E_F} \left[\frac{2^{d-1}\pi^{d/2}\Gamma(d/2)}{\Gamma(d)g_d(1)} n_B \right]^{1/d}, \quad (5.13)$$

o, en términos de n_B/n

$$\frac{T_c^{GIF}}{T_F} = 2a(d) \left[\frac{2}{d\Gamma(d)\zeta(d)} n_B/n \right]^{1/d} = 2a(d) \left[\frac{\nu}{2\Gamma(d)g_d(1)} \right]^{1/d}. \quad (5.14)$$

En particular, para $d = 2$ $a(2) = 2/\pi$ y $n_B/n = \nu/2$, para $d = 3$, $a(3) = 1/2$ y $n_B/n = 3\nu/4$, (5.14) resulta ser

$$\frac{T_c^{GIF}}{T_F} = \begin{cases} (4\sqrt{6}/\pi^2)\sqrt{n_B/n} = (4\sqrt{3}/\pi^2)\sqrt{\nu} \simeq 0.702\sqrt{\nu} & (2D) \\ (n_B/n)^{1/3}/[3\zeta(3)]^{1/3} = [\nu/4\zeta(3)]^{1/3} \simeq 0.592\nu^{1/3} & (3D). \end{cases} \quad (5.15)$$

Este resultado se cumple para acoplamiento arbitrariamente débil, para acoplamiento mas fuerte [13] se incrementa solo en un .04 para λ tan grande como 1/2, ya sea en 2D y en 3D para $\nu = .05$ y 0.001 respectivamente.

5.4 Temperatura crítica BEC en el escenario de van Hove

En esta sección calculamos la temperatura crítica BEC en 2D considerando que la estructura cristalina modifica la densidad de estados y suponemos que esta presenta una singularidad tipo van Hove. Suponemos que el mar de fermiones presenta una DOS de la forma

$$g(\varepsilon) \equiv g(E_F) \ln \left| \frac{E_F}{\varepsilon - E_F} \right|. \quad (5.16)$$

En 2D la densidad de bosones es $n_B \equiv N_{B,0}(0) = g(E_F)\hbar\omega_D/L^2$, así, en el escenario de VH podemos escribir $N_2(T)_{VH}$ como

$$N_2(T)_{VH} = 2g(E_F) \int_{\mu - \hbar\omega_D}^{\mu + \hbar\omega_D} d\varepsilon \frac{\ln \left| \frac{E_F}{\varepsilon - E_F} \right|}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1}, \quad (5.17)$$

o

$$N_2(T)_{VH} = -2g(E_F) \int_{\mu - \hbar\omega_D}^{\mu + \hbar\omega_D} d\varepsilon \frac{\ln |\varepsilon/E_F - 1|}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1}. \quad (5.18)$$

Introduciendo la nueva variable de interacción $y \equiv \varepsilon/E_F - 1$, encontramos que

$$N_2(T)_{VH} = -2g(E_F)E_F \int_{(\mu - \hbar\omega_D)/E_F - 1}^{(\mu + \hbar\omega_D)/E_F - 1} dy \frac{\ln |y|}{e^{\beta((y+1)E_F - \mu)} + 1}. \quad (5.19)$$

Cuando $T \rightarrow 0, \beta \rightarrow \infty$ y $\mu \rightarrow E_F$ y como antes $\nu \equiv \hbar\omega_D/E_F$ así que (5.19) tiende a

$$\begin{aligned} N_2(0)_{VH} &= -2g(E_F)E_F \int_{-\nu}^{\nu} dy \theta(y) \ln |y| \\ &= -2g(E_F)E_F \int_{-\nu}^0 dy \ln |y| = 2g(E_F)E_F (\nu - \nu \ln \nu). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Consecuentemente, la densidad de bosones se encuentra que es

$$n_B \equiv N_B(0)/L^2 = N_2(0)_{VH}/2 = g(E_F)E_F (\nu - \nu \ln \nu)/L^2. \quad (5.21)$$

Dividiendo entre la densidad de fermiones en 2D $n = k_F^2/2\pi$ y sustituyendo (2. 14) en 2D $g(E_F) = (m/2\pi\hbar^2) L^2$ en (5.21), se encuentra que

$$n_B/n = \frac{mE_F}{\hbar^2 k_F^2} (\nu - \nu \ln \nu) = \frac{\nu}{2} (1 - \ln \nu). \quad (5.22)$$

Finalmente, usando (5.15)

$$\frac{T_c^{VH}}{T_F} = (4\sqrt{3}/\pi^2) \sqrt{n_B/n} = \sqrt{1 - \ln \nu} (2\sqrt{3}/\pi^2) \sqrt{\nu}, \quad (5.23)$$

de donde tomando $\nu = .05$ que corresponde a un valor típico de los cupratos, encontramos que

$$\frac{T_c^{VH}}{T_F} \simeq 2 \frac{T_c^{GIF}}{T_F}. \quad (5.24)$$

De (5.24) encontramos que, al suponer una densidad de estados de van Hove, un incremento en la temperatura crítica T_c de aproximadamente 2 con respecto a la T_c calculada en un gas ideal. Esto refleja la importancia de considerar la estructura cristalina de los superconductores cupratos que modifica la densidad de estados.

5.5 Temperatura crítica BEC con una densidad de estados ESP

En esta sección se calcula la temperatura crítica T_c BEC al considerar una densidad de estados ESP proveniente de una ley de potencias. La T_c se calcula sustituyendo n_B/n , calculada con una DOS ESP en 2D como en la Ec. (5.12), en la Eq. (5.15). Comenzaremos calculando el número de fermiones apareables

$$N_2(T)_{ESP} = 2 \int_{\mu - \hbar\omega_D}^{\mu + \hbar\omega_D} d\varepsilon \frac{g(\varepsilon)}{\exp \beta(\varepsilon - \mu) + 1}, \quad (5.25)$$

donde $g(\varepsilon)$ está definida por (5.6). Tomemos primero el caso $x_0 > \nu$ con $\nu = \hbar\omega_D/E_F$, en este caso, $g(\varepsilon)$ es la constante f_0 dentro del intervalo de integración. Sustituyendo $g(\varepsilon)$ en (5.25) obtenemos

$$N_2(T)_{ESP} = \frac{N f_0}{E_F} \int_{\mu - \hbar\omega_D}^{\mu + \hbar\omega_D} d\varepsilon \frac{1}{\exp \beta(\varepsilon - \mu) + 1}. \quad (5.26)$$

En $T = 0$, la función de distribución de Fermi-Dirac $n(\varepsilon) = [e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1]^{-1} = \theta(E_F - \varepsilon)$ es la función escalón y $\mu(T = 0) = E_F$ de donde el número de bosones en $T = 0$ es justamente

$$N_2(0)_{ESP} = \frac{N f_0}{E_F} \int_{\mu - \hbar\omega_D}^{\mu + \hbar\omega_D} d\varepsilon \theta(E_F - \varepsilon) = \frac{N f_0}{E_F} \int_{E_F - \hbar\omega_D}^{E_F} d\varepsilon = N f_0 \nu, \quad (5.27)$$

el número de bosones formados por los fermiones de la Ec. (5.27) es

$$N_B(0)_{ESP} = \frac{1}{2} N_2(0)_{ESP} = \frac{1}{2} N f_0 \nu, \quad (5.28)$$

ya que $n_B = N_B(0)/L^2$, y $n = N/L^2$, encontramos que

$$\frac{n_B(0)}{n} = \frac{\nu}{2} f_0 \quad (5.29)$$

sustituyendo (5.29) en el primer miembro de la Eq. (5.15), se encuentra que en 2D para $x_0 > \nu$

$$T_c^{ESP}/T_F = \sqrt{f_0} (4\sqrt{3}/\pi^2) \sqrt{\nu} = \sqrt{f_0} T_c^{GIF}/T_F, \quad (5.30)$$

donde la temperatura crítica T_c se incrementa por un factor $\sqrt{f_0}$ al modificar la DOS de un gas ideal de Fermi por una que contiene una singularidad potencial asociada a un punto en la extensión. El valor de f_0 , el cual depende del exponente σ , se obtiene de la condición de normalización dada en la Ec. (5.8).

Por otro lado, si $x_0 < \nu$, $g(\varepsilon)$ consta de dos partes, sustituyendo (5.6) junto con (5.7) en (5.25) podemos calcular $N_2(T)$, que para $T = 0$ se encuentra que es

$$N_2(0) = N \int_{1-\nu}^{1-x_0} dx \frac{x}{(1-x)^\sigma} + N f_0 \int_{1-x_0}^1 dx. \quad (5.31)$$

Así, (5.28) y (5.31) no dejan

$$n_B/n \equiv N_B(0)/N = \frac{1}{2} \int_{1-\nu}^{1-x_0} dx \frac{x}{(1-x)^\sigma} + f_0 x_0/2. \quad (5.32)$$

Finalmente, de (5.30)

$$T_c^{ESP}/T_F = \sqrt{\frac{2 n_B(0)}{\nu n}} (4\sqrt{3}/\pi^2) \sqrt{\nu} = \sqrt{\frac{2 n_B(0)}{\nu n}} T_c^{GIF}/T_F \quad x_0 < \nu, \quad (5.33)$$

con un factor de acrecentamiento de $\sqrt{(2/\nu)(n_B(0)/n)}$, donde $n_B(0)/n$ se debe calcular con la Ec. (5.33).

En la Tabla 5.1 enlistamos algunos valores de x_0 y f_0 para diferentes valores de σ . En la última columna incluimos también la razón T_c^{ESP}/T_c^{IFG} , el factor de incremento para el DOS del ESP. Esto es graficado en la Figura 5.2 para varios valores del exponente σ .

σ	x_0	f_0	T_c^{ESP}/T_c^{GIF}
0.3819	0.0	∞	2.23245
0.4	0.009754	6.31065	2.14177
0.5	0.1038	2.7816	1.66784
1.5	0.486122	1.51615	1.23132
10	0.82775	1.14071	1.06804

Tabla 5.1 Valores encontrados de x_0 , f_0 en (5.7) para algunos valores de σ . En la última columna se da el factor de incremento para el DOS del ESP T_c^{ESP}/T_c^{IFG} .

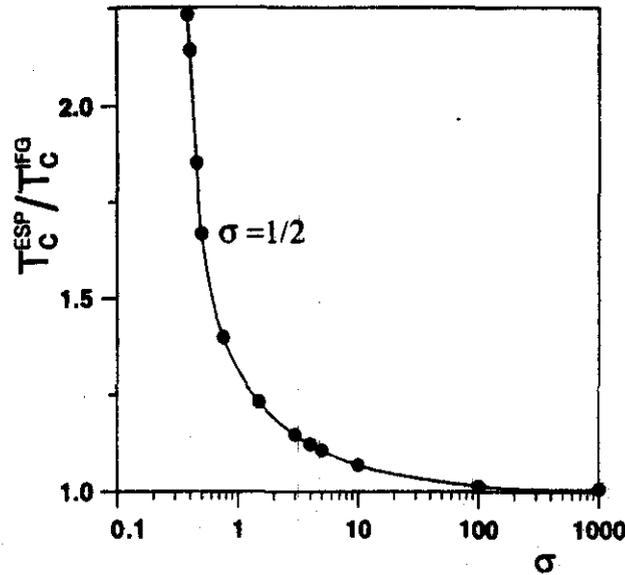


Figura 5.2 Incremento de la T_c BEC usando una DOS ESP normalizada con respecto a la DOS de un gas ideal de fermiones para varios valores del exponente σ en (5.7). El valor de $\sigma = 1/2$ es el sugerido en la Ref. [108].

5.6 Fórmula exacta T_c BCS en el escenario de van Hove

En esta sección evaluamos la temperatura crítica T_c exacta BCS al suponer una DOS de VH [111]. La ecuación a temperatura finita del gap de energía $\Delta(T)$ que predice la teoría BCS de la superconductividad con una densidad de estados general $g(\epsilon)$ es

$$1 - V \equiv \int_{E_F - \hbar\omega_D}^{E_F + \hbar\omega_D} \frac{d\epsilon}{\sqrt{(\epsilon - E_F)^2 + \Delta^2(T)}} g(\epsilon) \tanh \frac{\sqrt{(\epsilon - E_F)^2 + \Delta^2(T)}}{2k_B T}, \quad (5.34)$$

donde V una constante de acoplamiento que representa la interacción electrón-fonón y que es diferente de cero sólo en un cascarón de anchura $2\hbar\omega_D$ centrado sobre la esfera de energía de Fermi. Si suponemos una singularidad de van Hove de la forma dada en (5.16), la temperatura crítica se encuentra al sustituir $\Delta(T_c) = 0$ y (5.16) en (5.34). Definiendo

$\lambda \equiv (\varepsilon - E_F)/2k_B T_c$, $Z \equiv \hbar\omega_D/2k_B T_c = \Theta_D/2T_c$, y $W \equiv E_F/2k_B T_c = T_F/2T_c$ se encuentra

$$1/g(E_F)V = \int_0^Z dx \frac{\tanh x}{x} \ln \frac{W}{x}. \quad (5.35)$$

Integrando por partes se obtiene

$$1/g(E_F)V = \tanh Z \ln Z \ln \frac{W}{Z} + \frac{1}{2} \tanh Z \ln^2 Z - D(Z; W), \quad (5.36)$$

donde

$$D(Z; W) \equiv \int_0^Z dx \left(\ln x \ln \frac{W}{x} + \frac{1}{2} \ln^2 x \right) \operatorname{sech}^2 x, \quad (5.37)$$

multiplicando ambos lados de (5.36) por $2 \coth Z$ y sumando $\ln^2 W/Z$, encontramos

$$2 \coth Z [1/g(E_F)V + D(Z; W)] + \ln^2 \frac{W}{Z} = \ln^2 W, \quad (5.38)$$

de la cual, resolviendo para T_c , se encuentra una fórmula implícita exacta para T_c dada por

$$T_c/T_F = \frac{1}{2} \exp \left\{ - \left[\left(\frac{1}{g(E_F)V} + D \left(\frac{\Theta_D}{2T_c}, \frac{T_F}{2T_c} \right) \right) 2 \coth \frac{\Theta_D}{2T_c} + \ln^2 \frac{T_F}{\Theta_D} \right]^{1/2} \right\}. \quad (5.39)$$

La Figura 5.3 muestra una gráfica de la ecuación (5.39) la cual se ha resuelto numéricamente. Se ha tomado $\lambda \equiv g(E_F)V = 1/2$. La curva señalada con VH muestra un incremento de un orden de magnitud sobre los resultados obtenidos en BCS con el GIF. Se muestra también que si $\lambda \rightarrow 0$, ambos valores de la T_c BCS, con GIF y VHS DOS se separan con diferentes razones.

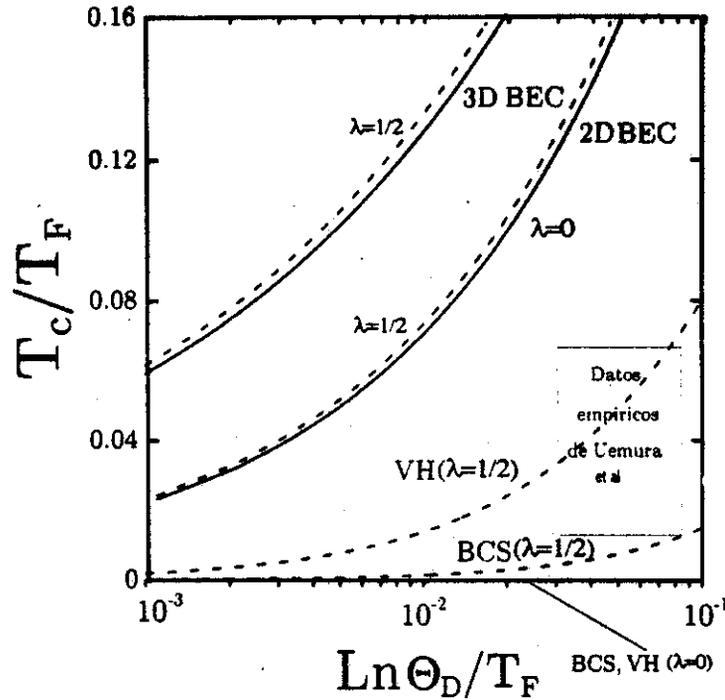


Figura 5.3 Temperatura crítica BEC T_c en unidades de T_F como función de Θ_D/T_F , para un modelo simple de bosón-fermión en 2D y 3D discutido en la ecuación (5.15). Se muestra también el resultado BCS bien conocido $T_c \simeq 1.13 \Theta_D e^{-1/\lambda}$, así como el resultado encontrado usando (5.39) para una DOS de VH y $\lambda = 1/2$. Ambos valores de T_c BCS, con una DOS del GIF y VH, se desvanecen cuando $\lambda \rightarrow 0$. El rectángulo muestra los datos empíricos para los superconductores cupratos en casi-2D [100].

5.7 Fórmula exacta T_c con una singularidad ESP

En esta sección se calcula la temperatura crítica T_c BCS al considerar el gap de energía $\Delta(T)$ (5.34) con una DOS EPS de la forma $g(\epsilon) = (N/2E_F)f(x)$, donde la función adimensionalizada $f(x)$ satisface (5.7) y (5.28). En la Los calculos se realizan con una

DOS con ESP para el caso $\sigma = 1/2$. La ecuación para el gap queda de la forma

$$2/V = N \int_{1-\nu}^{1+\nu} dx \frac{f(x)}{\sqrt{[E_F(x-1)]^2 + \Delta^2(T)}} \tanh \frac{\sqrt{[E_F(x-1)]^2 + \Delta^2(T)}}{2k_B T}, \quad (5.40)$$

donde se ha hecho el cambio de variable $x \equiv \varepsilon/E_F$ y como antes $\nu \equiv \hbar\omega_D/E_F$. Como en $T_c \Delta(T_c) = 0$, entonces de (5.40) se obtiene

$$2/V = N \int_{1-\nu}^{1+\nu} dx \frac{f(x)}{(x-1)} \tanh \frac{(x-1)}{2T_c/T_F}. \quad (5.41)$$

La densidad de estados ESP crece desde energía cero, volviéndose una meseta en $x = 1 - x_0$. Esta meseta para $\sigma = 1/2$, tomando el caso $x_0 > \nu$, $f(x) = f_0$, la constante dada por (5.28). Si introducimos la nueva variable $z \equiv \frac{(x-1)}{2T_c/T_F}$ encontramos que

$$\frac{E_F}{NV f_0} = \int_0^{\nu T_F/2T_c} dz \frac{\tanh z}{z}, \quad (5.42)$$

ya que la integral es par. Integrando por partes encontramos

$$\frac{E_F}{NV f_0} = \ln \frac{\nu T_F}{2T_c} - \int_0^{\nu T_F/2T_c} dz \ln z \operatorname{sech}^2 z. \quad (5.43)$$

Suponiendo que $T_F \gg T_c$, el límite superior puede ser reemplazado por infinito pudiéndose hacer la integral exactamente. En este caso se encuentra

$$\frac{E_F}{NV f_0} \simeq \ln \left(\frac{\nu T_F}{2T_c} \right) + \ln \left(\frac{4e^\gamma}{\pi} \right), \quad (5.44)$$

donde $\gamma = 0.577216$ la constante Gamma de Euler. Ya que en 2D $g_{GIF}(E_F) = L^2 m/2\pi\hbar$, $\nu \equiv \hbar\omega_D/E_F$, $E_F = \hbar^2 k_F^2/2m$ y $n = N/L^2 = k_F^2/2\pi$, se obtiene finalmente la ecuación para T_c

$$T_c \simeq \frac{2\nu e^\gamma}{\pi} e^{-1/\lambda f_0} \simeq 1.13\nu e^{-1/\lambda f_0}. \quad (5.45)$$

La ecuación (5.45) revela sólo un pequeño incremento en T_c para la ESP sobre la encontrada para la DOS del GIF, ya que $f_0 \geq 1$ con la igualdad en el caso del GIF.

5.8 Conclusiones

Al considerar una condensación de Bose-Einstein BEC en el modelo simple bosón-fermión en 2D y 3D con una DOS del gas ideal, hemos encontrado factores de acrecentamiento para la temperatura de transición superconductor T_c , que pueden alcanzar valores sustancialmente más altos para acoplamiento fuerte ($\lambda = 1/2$), sobre el modelo de interacción de la teoría familiar BCS. Para acoplamiento débil ($\lambda \rightarrow 0$), este acrecentamiento diverge lo que significa que BEC puede existir aún para pares de Cooper con acoplamiento arbitrariamente débil. Al comparar con los valores empíricos de T_c de los cupratos, mostrados dentro del rectángulo de la Fig. 5.3, las T_c 's predichas por BEC son demasiado altas.

Hemos considerado densidades de estado más realistas, características de las estructuras de banda electrónicas de los sistemas casi-2D como la de los superconductores cupratos obteniendo, con una DOS de van Hove (VHS) en la imagen BEC de nuestro modelo, un incremento en T_c del orden de 2. Al considerar una DOS ESP con una divergencia de potencia, encontramos un resultado similar al de van Hove. En el modelo de interacción de BCS con una DOS de van Hove tomando $\lambda = 1/2$, Ec. (5.4), encontramos un factor de cerca de 10 sobre el resultado familiar BCS. Utilizando una DOS (ESP), encontramos un incremento mucho más moderado.

Podemos concluir que, modificar las DOS considerando la estructura cristalina de los superconductores en los 2 modelos BCS y BEC estudiados, las temperaturas críticas se incrementan muy moderadamente, para obtener T_c más realistas, se tienen que incluir otros parámetros asociados con el confinamiento del gas así como la interacción entre pares.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo, hemos supuesto que la superconductividad puede entenderse como una condensación de Bose-Einstein (BEC). Modelamos a los superconductores cupratos de alta T_c como un gas de Bose diluido, en el límite termodinámico, de pares de electrones, en potenciales periódicos en la dirección z . Se ha encontrado que la temperatura crítica BEC depende tanto de la relación energía-momento (o de dispersión) de las partículas como de la forma del confinamiento. Éste se refleja en las dimensionalidades en las que se ha observado experimentalmente la superconductividad, desde los superconductores orgánico-metálicos de Bechgaard en $(1+\epsilon)$ dimensiones, pasando por los orgánicos que como los cupratos son materiales en $(2+\epsilon)$ dimensiones, y acabando con los superconductores convencionales en 3 dimensiones.

El comportamiento de un gas ideal de Fermi en d dimensiones ha sido uno de nuestros objetos de investigación ya que en la teoría BCS, la formación de los pares de Cooper a partir del mar de Fermi es el elemento fundamental en la explicación de la superconductividad. Encontramos que el potencial químico, el calor específico y la velocidad del sonido isotérmica, como funciones de la temperatura, muestran una *estructura* si $d < 2$ y coincide con el *gas ideal de Bose* donde se debe incrementar d desde el mismo valor de d para obtener la "estructura" comúnmente conocida como "condensación de Bose-Einstein" (BEC) cuya característica es una "cúspide" en el calor específico que aparece en la temperatura crítica de transición para toda $2 < d < 4$ y un "salto" en estos valores para toda $4 < d < \infty$ [26], [58].

Al resolver el problema general de un gas cuántico en $d > 0$ dimensiones atrapado con

potenciales externos de oscilador, se han modelado particularmente sistemas atrapados:
 en una dimensión que recuerdan los pozos o "wells"; dos dimensiones (*alambres* o "wires");
 y tres dimensiones (*puntos* o "dots"), dados los avances tecnológicos en el confinamiento
 de partículas, los sistemas en dos, una o cero dimensiones son objetos reales tales como
 los conocidos puntos cuánticos (electrones confinados) que se comportan como átomos
 naturales. Encontramos que la densidad de estados en este sistema es idéntica al DOS
 de un gas ideal cuántico en $d + \delta$ dimensiones pero con una masa revestida, de tal forma
 que se puede realizar un mapeo que traslada el problema de un gas atrapado al problema
 más simple y más entendido de un gas libre pero en una dimensión mayor y con una
 nueva masa revestida $m^* = (2\pi\hbar/\omega L^2)^{2\delta/(d+\delta)} m^{(d-\delta)/(d+\delta)}$, ω es la frecuencia del potencial
 externo de oscilador, L es el tamaño de la caja y m es la masa original de la partícula.
 Esta transformación nos da la posibilidad de describir bosones o fermiones atrapados con
 los resultados ya obtenidos para gases de bosones/fermiones libres. Es importante señalar
 que el efecto de confinamiento de los gases cuánticos reduce las dimensiones sobre las
 que éstos se pueden mover pero, al mismo tiempo, sus propiedades son idénticas a las de
 un gas cuántico libre en una dimensión mayor. Resaltamos también que el atrapamiento
 de bosones posibilita que la temperatura crítica de transición T_c se puede obtener para
 dimensiones $d < 2$.

Los resultados reportados fueron obtenidos en el límite termodinámico suponiendo
 que el número N de partículas es muy grande y que están confinadas en un volumen
 también muy grande, pero la densidad $n = N/V$ es finita. Esto corresponde a
 $\hbar \rightarrow \infty$ y $\omega \rightarrow 0$, $L \rightarrow \infty$. Sin embargo, en los experimentos en donde se ha observado
 una condensación de Bose-Einstein, el número de átomos en una muestra típica es del
 orden de $10^3 - 10^6$, los cuales se encuentran en trampas opto-magnéticas con frecuencias

angulares en el rango de $10^2 - 10^3$ Hz. Esto está lejos del límite requerido para que el problema sea tratado como "bulto". Sin embargo, al comparar las curvas experimentales de la fracción del condensado con las curvas teóricas, se observa una buena concordancia de donde se puede concluir que la aproximación bajo la cuál se han realizado los cálculos es adecuada. El cálculo puede realizarse en forma más exacta efectuando las sumas directamente para un número muy grande de partículas.

Por otra parte, y con el objeto de modelar superconductores más realistas cuyo comportamiento se puede interpretar como casi bidimensional o casi unidimensional, tales como los superconductores cupratos o los los nuevos compuestos organo-metálicos $(\text{MTSF})_2\text{X}$, se considera un gas de pares de Cooper confinado a moverse en potenciales periódicos en las direcciones z , y libres en las dirección x y y en el modelo casi-2D ó confinado a moverse libremente sólo en la dirección x en el modelo casi-1D. Se ha calculado la temperatura crítica T_c BEC, y encontramos que estos sistemas se comportan como un gas de bosones libres en $(2+\epsilon)\text{D}$ o $(1+\epsilon)\text{D}$, respectivamente. El valor de ϵ se puede determinar de los valores experimentales de los superconductores orgánicos casi-2D ó casi-1D, lo que nos permite conectar así los resultados teóricos con los valores experimentales.

Finalmente, comparamos y contrastamos los resultados para T_c obtenidos al considerar una BEC en un modelo simple bosón-fermión en 2D y 3D, con la teoría de BCS, introduciendo un factor de acrecentamiento en la temperatura de transición T_c , al suponer un BEC sobre la teoría familiar BCS. Este puede ser tan alto como como un factor de acrecentamiento fuerte ($\lambda = 1/2$) y sin embargo, para acoplamiento débil ($\lambda \rightarrow 0$) el acrecentamiento diverge, lo que significa que BEC puede surgir aún para pares de Cooper con acoplamiento arbitrariamente débil.

Las estructuras de banda electrónicas de los sistemas casi-2D se han considerado al

modificar la densidad de estados a partir de las superficies de Fermi esféricas (o circulares, en 2D). En este caso, obtenemos un incremento mucho más moderado en la imagen BCS o en la de BEC cuando consideramos densidades de estado electrónicas características de las estructuras de banda electrónicas de los sistemas casi-2D como son los superconductores cupratos. Las DOS que hemos analizado son las del escenario de Van Hove (VHS) con una singularidad logarítmica así como también la del ESP con una divergencia de potencia. Encontramos que las temperaturas críticas se incrementan muy moderadamente al tomar en cuenta la estructura cristalina de la manera propuesta por este trabajo, no explicando cuantitativamente las temperaturas encontradas en los superconductores de alta T_c . Podemos concluir que para predecir valores de T_c más realistas en este modelo, mecanismos tales como el confinamiento del gas, la dimensión y la interacción entre partículas tienen que ser consideradas.

En este trabajo hemos encontrado que el confinamiento de las cargas móviles puede alterar el comportamiento físico del gas de electrones inicialmente libre. El estudio del comportamiento físico, en estructuras reales, por medio de modelos en donde solamente algunos parámetros son suficientes para determinar las propiedades estadísticas relevantes de una gran clase de sistemas, es fundamental. Hemos considerado la dimensión y el confinamiento como parámetros relevantes que caracterizan el comportamiento colectivo de cualquier sistema físico, encontrando que los sistemas confinados anisotrópicamente en el espacio real D-dimensional, pueden ser tratados como no confinados en una dimensión efectiva que constituye una medida de la anisotropía del sistema físico real. Hemos descrito la estructura en capas de los superconductores de alta T_c , tri-dimensionales, como un sistema casi-bidimensional en donde la dimensión del espectro de energía tiene valores en $(2+\epsilon)D$ encontrando que ϵ es no entera, se ha calculado la T_c considerando una BEC del gas

de bosones confinado formado por pares de Cooper y encontramos valores de la dimensión asociados a los parámetros experimentales reportados, se extendió el trabajo al considerar superconductores orgánicos de dimensionalidad mas baja o los casi-1D superconductores orgánicos en $(1+\epsilon)D$. Podemos concluir que, la dimensión del espacio real y la del espectro de energía encontrada a partir del confinamiento, son parámetros fundamentales que determinan el valor de la temperatura crítica. Surge entonces, la posibilidad, dados los recientes progresos en la tecnología, de construir sistemas que consistan de capas delgadas de espesor controlado, en donde las T_c se puedan predecir.

La importancia de la dimensión en sistemas anisotrópicos o en sistemas confinados ha cobrado una gran relevancia recientemente, ésta ha sido estudiada en otros sistemas, Xing-Fei He [115] estudia excitones en sólidos anisotrópicos así como las propiedades ópticas asociadas transiciones electrónicas entre bandas en un sólido anisotrópico en donde propone un modelo de espacio de dimensión fraccional que describe estas anisotropías, por otro lado, Matos-Abiague [116] estudia polarones confinados en paredes cuánticas rectangulares y parabólicas dentro la aproximación del espacio de dimensión fraccional mientras que recientemente, Z. Bak realiza un estudio de la superconductividad dentro del esquema de dimensión espectral fraccional [117].

Es importante señalar que existe una nueva área de investigación de los gases cuánticos que se fundamenta en una generalización a la mecánica estadística de Boltzmann-Gibbs, realizada por Tsallis [118], la cual está basada en una nueva definición de entropía inspirada en sistemas con estructura fractal

$$S_q = k_B \frac{1 - \sum p_n^q}{q - 1}, \quad (6.1)$$

donde k_B es la constante de Boltzmann y p_n es un conjunto de probabilidades normal-

izadas. Se puede demostrar que S_q tiene todas las propiedades de entropía de Shannon $S_q = -k_B \sum p_n \ln p_n$ excepto por la aditividad. De aquí que la mecánica estadística de Tsallis es una mecánica estadística no-extensiva que proporciona un sistema de trabajo que trata con las propiedades de no extensividad de ciertos sistema físicos. El parámetro real q es llamado el índice de no-extensividad, la estadística convencional de Boltzmann-Gibbs se recupera en el límite $q \rightarrow 1$. Esta estadística generalizada ha sido usada para discutir sistemas de dos niveles, el modelo de Ising en una dimensión, los gases de Fermi y de Bose [119]. Sin embargo, de estos trabajos surgen varias preguntas: ¿cuál es la interpretación de q ?, ¿en qué clase de sistemas físicos podría ser adecuado presentar esta generalización?, ¿que conexión existe entre el parámetro q y la dimensión?, éstas son preguntas abiertas que nos invitan a explorar nuevos horizontes.

Apéndice A

Relación de dispersión de una partícula en una caja de longitud L con condiciones periódicas de Bohr

Se revisa el problema de una partícula en d -dimensiones sin interacción confinada a moverse en una caja de longitud L . Se resuelve el problema con las condiciones periódicas de Bohr. Se encuentra la relación entre la energía y el momento, esto es, la relación de dispersión.

El Hamiltoniano se puede escribir como $H = p^2/2m = (\hbar/i)^2 \sum_i \partial^2/\partial x_i^2$ siendo m la masa de las partículas y p la magnitud del momento lineal en d dimensiones $p^2 = \sum_i p_i^2$, ($i = 1, 2, \dots, d$).

La ecuación de Schrödinger en este caso es

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi, \quad (\text{A. 2})$$

a la cual proponemos una solución separando la dependencia en la variable temporal de la dependencia espacial, es decir, proponemos

$$\Psi = T(t) \varphi(\vec{r}). \quad (\text{A. 3})$$

Sustituyendo (A. 3) en (A. 2), se encuentra una solución temporal dada por $T(t) = e^{-iEt/\hbar}$ mientras que la ecuación en la parte espacial está dada por

$$H\varphi(\vec{r}) = E\varphi(\vec{r}). \quad (\text{A. 4})$$

Proponemos $\varphi(\vec{r}) = X_1(x_1) X_2(x_2) \dots X_d(x_d)$, la cual sustituimos en (A. 4) y dividiendo entre $\varphi(\vec{r})$, se obtiene una ecuación con las variables separadas

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{\partial X_1} \frac{\partial^2 X_1}{\partial^2 x_1} + \frac{1}{\partial X_2} \frac{\partial^2 X_2}{\partial^2 x_2} + \dots + \frac{1}{\partial X_d} \frac{\partial^2 X_d}{\partial^2 x_d} \right] = \varepsilon. \quad (\text{A. 5})$$

Como cada término es independiente, (A. 5) se reduce al siguiente sistema de ecuaciones desacopladas

$$\frac{1}{\partial X_i} \frac{\partial^2 X_i}{\partial^2 x_i} = -k_i^2, \quad (\text{A. 6})$$

donde los eigenvalores k_i deben satisfacer $\varepsilon = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_i k_i^2$.

Tomando las condiciones periódicas a la frontera de Bohr, esto es, se pide que la función de onda y su derivada sean iguales en las fronteras,

$$\Psi(x = L/2) = \Psi(x = -L/2) \text{ y } \Psi'(x = L/2) = \Psi'(x = -L/2), \quad (\text{A. 7})$$

encontramos que se cumplen si tenemos soluciones del tipo

$$X_i = A \cos k_i x_i + B \sin k_i x_i. \quad (\text{A. 8})$$

Ya que $X_i(x_i = L/2) = X_i(x_i = -L/2)$, $B = 0$ y de la igualdad de las derivadas se encuentra que $\sin(k_i L/2) = 0$ por lo que $k_i L/2 = (0, \pm 1, \pm 2, \dots) \pi$ o, $k_i L/2 = n_i \pi$, de aquí que

$$\varepsilon_{n_1 n_2 \dots n_d} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{2\pi^2}{L^2} \sum_{i=1}^d n_i^2 = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^d k_i^2. \quad (\text{A. 9})$$

La conocida solución al problema de una partícula en una caja de longitud L en $d > 0$ es un ejemplo en donde la relación de dispersión es cuadrática.

Apéndice B

Relación de dispersión de pares de Cooper

En este apéndice, se revisa el trabajo realizado por M. Casas et al. en la Ref. [13] en donde se obtiene la energía de amarre de un par de Cooper formado por fermiones de momentos $\hbar\mathbf{k}_1$ y $\hbar\mathbf{k}_2$, y de momento total (o de centro de masas) (CMM) $\hbar\mathbf{K} \neq 0$. La energía de amarre del modelo se puede obtener analíticamente en cualquier número de dimensiones. Además de la energía en reposo, la energía total E_K de un par de Cooper [12] de fermiones de momentos $\hbar\mathbf{k}_1$ y $\hbar\mathbf{k}_2$, y de momento total (o de centro de masas) (CMM) $\hbar\mathbf{K}$ interactuando por parejas e inmersas en un fondo inerte de $N-2$ fermiones en una superficie esférica de Fermi de radio k_F se obtiene como sigue. Sean las coordenadas relativas y de centro de masa $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ y $\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$ respectivamente. Los correspondientes vectores de onda están relacionados

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \quad \mathbf{k} = \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2), \quad (\text{B. 1})$$

Se definen los operadores de energía cinética

$$\hat{T}_i = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla_i^2; \quad \hat{T}_1 + \hat{T}_2 = \hat{T}_r + \hat{T}_R = -\frac{\hbar^2}{m^*} \nabla_r^2 - \frac{\hbar^2}{4m^*} \nabla_R^2, \quad (\text{B. 2})$$

con m^* la masa fermiónica efectiva. La ecuación de eigenvalores para la energía total E_K es entonces

$$(\hat{T}_r + \hat{T}_R + \hat{V}_K)\Psi_K = E_K\Psi_K \quad (\text{B. 3})$$

donde

$$\Psi_K = \psi(\mathbf{r})\Phi_K(\mathbf{R}) \quad (\text{B. 4})$$

$$\Phi_K(\mathbf{R}) = e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}} \quad (\text{B. 5})$$

$$\hat{V}_K \Psi_K = \int d\mathbf{r}' V_K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') \Phi_K(\mathbf{R}) \quad (\text{B. 6})$$

con $V_K(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ una interacción general no-local entre pares. Si se expande $\psi(\mathbf{r})$ en un conjunto completo de estados de ondas planas,

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (\text{B. 7})$$

con

$$C_{\mathbf{k}} = 0 \quad \text{para toda } k_1, k_2 < k_F \quad \text{o} \quad |\mathbf{k} \pm \frac{1}{2}\mathbf{K}| < k_F. \quad (\text{B. 8})$$

Esta restricción es la que distingue a la ecuación de Cooper de la ecuación de Schrödinger, la cual es para dos partículas en el vacío mientras que el problema de Cooper se refiere a dos partículas en un medio de $N - 2$ fermiones que satisfacen el Principio de Exclusión de Pauli. Combinando (B. 3) con (B. 7) se encuentra que

$$\sum_{\mathbf{k}} \left\{ \left(\frac{\hbar^2}{m^*} k^2 + \frac{\hbar^2}{4m^*} K^2 \right) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \int d\mathbf{r}' V_K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} - E_K e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right\} C_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}} = 0. \quad (\text{B. 9})$$

Tomando $\epsilon_{\ell} \equiv \hbar^2 \ell^2 / 2m^*$, multiplicando (B. 9) por $e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}}$, integrando sobre \mathbf{r} , usando $\int d\mathbf{r} \exp(i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}) = L^d \delta_{\mathbf{Q},0}$ donde L^d es el volumen del sistema en d -dimensiones, y cancelando $e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}}$, se encuentra que

$$(2\epsilon_{\mathbf{k}'} + \frac{1}{2}\epsilon_K) C_{\mathbf{k}'} + \sum_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^K C_{\mathbf{k}} = E_K C_{\mathbf{k}'}, \quad (\text{B. 10})$$

de

$$V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^K \equiv \frac{1}{L^d} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} V_K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'}, \quad (\text{B. 11})$$

es la doble transformada espacial de Fourier de la interacción del par de fermiones. El modelo de interacción BCS usado, supone que

$$V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^K = \begin{cases} -V \theta(2\sqrt{k_F^2 + k_D^2} - K) & \text{si } k_F < |\mathbf{k} \pm \frac{1}{2}\mathbf{K}|, |\mathbf{k}' \pm \frac{1}{2}\mathbf{K}| < \sqrt{k_F^2 + k_D^2} \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases} \quad (\text{B. 12})$$

Con $V > 0$ la constante de acoplamiento la cual representa el efecto neto de interacción electrón-fonón la cual apantalla a la interacción repulsiva de Coulomb, $\hbar\omega_D \equiv \hbar^2 k_D^2 / 2m^*$ es la energía máxima de un fonón de la red y $\theta(2\sqrt{k_F^2 + k_D^2} - K)$ es la función escalón que refleja el hecho de que la interacción opera sólo si $0 \leq K \leq 2\sqrt{k_F^2 + k_D^2}$. Esto significa que dos fermiones interactúan con una atracción constante $-V$ cuando el extremo de sus vectores de onda relativos \mathbf{k} apunta a cualquier lugar dentro del volumen de traslape en el espacio k de las dos capas esféricas.

Usando (B. 12), (B. 10) se simplifica a

$$[2\epsilon_{\mathbf{k}} - E_K + \hbar^2 K^2 / 4m^*] C_{\mathbf{k}} = V \theta(2\sqrt{k_F^2 + k_D^2} - K) \sum'_{\mathbf{k}'} C_{\mathbf{k}'} \equiv -A_K, \quad (\text{B. 13})$$

donde la prima en el signo de suma denota la restricción sobre \mathbf{k} en (B. 12). Resolviendo para $C_{\mathbf{k}}$ se encuentra que

$$C_{\mathbf{k}} = \frac{-A_K}{2\epsilon_{\mathbf{k}} - E_K + \hbar^2 K^2 / 4m^*}. \quad (\text{B. 14})$$

Multiplicando por $V \theta(2\sqrt{k_F^2 + k_D^2} - K)$ y sumando sobre \mathbf{k} , con la restricción como en (B. 12), se encuentra que

$$1 = V \theta(2\sqrt{k_F^2 + k_D^2} - K) \sum'_{\mathbf{k}} (2\epsilon_{\mathbf{k}} - E_K + \hbar^2 K^2 / 4m^*)^{-1}. \quad (\text{B. 15})$$

Tomando el eigenvalor total de la energía como $E_K \equiv 2E_F - \Delta_K$, la energía del par está acotada si $\Delta_K > 0$ y (B. 15) se convierte en una ecuación de eigenvalores para la energía de amarre (positiva) del par Δ_K .

Para $K = 0$ se obtiene

$$1 = V \sum_k' [2\varepsilon_k - 2E_F + \Delta_0]^{-1} = V \int_{E_F}^{E_F + \hbar\omega_D} \frac{g(\varepsilon)d\varepsilon}{2\varepsilon - 2E_F + \Delta_0}, \quad (\text{B. 16})$$

siendo $g(\varepsilon)$ la densidad de estados del sistema. Considerando que la densidad de estados entre la banda E_F y $E_F + \hbar\omega_D$ difícilmente cambia, podemos aproximar $g(\varepsilon) \approx g(E_F)$. Integrando la ecuación (B. 16) y resolviendola para la energía de amarre del par Δ_0 , se obtiene el resultado familiar

$$\Delta_0 = \frac{2\hbar\omega_D}{e^{2/\lambda} - 1} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 2\hbar\omega_D e^{-2/\lambda}, \quad (\text{B. 17})$$

$\lambda \equiv g(E_F)V$ es una constante de acoplamiento adimensional, $2\hbar\omega_D \equiv \hbar^2 k_D^2/m$ es la anchura alrededor de la esfera de Fermi en la cual la interacción de apareamiento es diferente de cero y $g(E_F)$ es la densidad de estados fermiónica para cada superficie de Fermi evaluada. La igualdad en (B. 17) es *exacta* en 2D para todo acoplamiento, ya que $g(\varepsilon)$ es constante en 2D, mientras que para 1D o 3D lo es mientras $\hbar\omega_D \ll E_F$ lo que permite aproximar $g(\varepsilon) \simeq g(E_F)$ a una constante que se puede sacar de la integral en (B. 16).

Para $K \neq 0$ ya que $E_K \equiv 2E_F - \Delta_K$, la ecuación (B. 15) se puede escribir en d -dimensiones como

$$1 = V \left(\frac{L}{2\pi}\right)^d \int' \frac{d\mathbf{k}}{\hbar^2(k^2 - k_F^2)/m^* + \Delta_K + \hbar^2 K^2/4m^*} \quad (\text{B. 18})$$

donde la prima en la integral denota nuevamente la restricción en (B. 12). Estas restricciones son idénticas en dos y tres dimensiones, y se pueden escribir como

$$k_F^2 < |\mathbf{k} - \frac{1}{2}\mathbf{K}|^2 = k^2 - kK \cos \phi + \frac{1}{4}K^2 \quad (\text{B. 19})$$

$$k_F^2 + k_D^2 > |\mathbf{k} + \frac{1}{2}\mathbf{K}|^2 = k^2 + kK \cos \phi + \frac{1}{4}K^2 \quad (\text{B. 20})$$

con ϕ el ángulo entre \mathbf{k} y \mathbf{K} , el cual está limitado a valores entre 0 y $\pi/2$ debido a la simetría. Manipulando (B. 19) y (B. 20) obtenemos

$$k^2 - kK \cos \phi + \frac{1}{4}K^2 - k_F^2 > 0, \quad (\text{B. 21})$$

$$k^2 + kK \cos \phi + \frac{1}{4}K^2 - k_F^2 - k_D^2 < 0. \quad (\text{B. 22})$$

Estas condiciones pueden ser estudiadas separadamente pero se deben satisfacer simultáneamente.

La expresión para $d = 2$ con las restricciones (B. 21) y (B. 22), se obtiene finalmente de (B. 18)

$$1 = \frac{4\lambda}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\phi \int_{[1-\kappa^2(1+\nu)\sin^2\phi]^{1/2} + \kappa(1+\nu)^{1/2}\cos\phi}^{[1+\nu-\kappa^2(1+\nu)\sin^2\phi]^{1/2} - \kappa(1+\nu)^{1/2}\cos\phi} d\xi \xi [\bar{\Delta}_\kappa + 2(1+\nu)\kappa^2 - 2 + 2\xi^2]^{-1} \quad (\text{B. 23})$$

donde $g(E_F) \equiv L^2 m^* / 2\pi \hbar^2$ la densidad de estados en 2D; $\xi \equiv k/k_F$; $\kappa \equiv K/2(k_F^2 + k_D^2)^{1/2}$; $\bar{\Delta}_\kappa \equiv \Delta_K/E_F$; y $\nu \equiv \hbar\omega_D/E_F = k_D^2/k_F^2$. Para K pequeña se obtiene analíticamente de (B. 23)

$$\Delta_K \xrightarrow{K \rightarrow 0} \Delta_0 - \frac{2 \cdot [(1+\nu)^{1/2} + e^{2/\lambda}]}{\pi (e^{2/\lambda} - 1)} \hbar v_F K + O(K^2), \quad (\text{B. 24})$$

la cual, para acoplamiento débil $\lambda \rightarrow 0$ se reduce a

$$\Delta_K \xrightarrow{K \rightarrow 0} \Delta_0 - \frac{2}{\pi} \hbar v_F K + O(K^2). \quad (\text{B. 25})$$

con $v_F = \sqrt{2E_F/m}$ la velocidad de Fermi.

En tres dimensiones, suponiendo que $\nu \ll 1$ y ya que la densidad de estados es $g(\varepsilon) = (L^3/\pi^2 \hbar^3) \sqrt{m^* \varepsilon/2} \simeq g(E_F)$, (B. 15) se encuentra que

$$1 = 2\lambda \int_0^{\pi/2} d\phi \sin \phi \int_{[1-\kappa^2(1+\nu)\sin^2\phi]^{1/2} + \kappa(1+\nu)^{1/2}\cos\phi}^{[1+\nu-\kappa^2(1+\nu)\sin^2\phi]^{1/2} - \kappa(1+\nu)^{1/2}\cos\phi} d\xi \xi^2 [\bar{\Delta}_\kappa + 2(1+\nu)\kappa^2 - 2 + 2\xi^2]^{-1} \quad (\text{B. 26})$$

la cual para K pequeña, y suponiendo de (B: 17) la expresión para acoplamiento débil $\Delta_0 \simeq 2\nu e^{-2/\lambda}$ la cual es muy aproximada para los rangos típicos de valores de λ y ν , se encuentra que

$$\Delta_K \xrightarrow{K \rightarrow 0} \Delta_0 - e^{4/\lambda} \frac{\sqrt{1 - \nu e^{-2/\lambda}} (2e^{-2/\lambda} + \nu e^{-2/\lambda} + 1)}{e^{2/\lambda} \nu \{ \ln A + \ln B \} + \nu \ln(AB) + 2e^{2/\lambda} \sqrt{1 - \nu e^{-2/\lambda}}}$$

$$\frac{1}{(e^{2/\lambda} + 1 - \sqrt{1 + \nu})} \hbar \nu_F K + O(K^2) \quad (\text{B. 27})$$

donde $A \equiv \frac{\sqrt{1+\nu} - \sqrt{1-\nu e^{-2/\lambda}}}{\sqrt{1+\nu} + \sqrt{1-\nu e^{-2/\lambda}}}$, y $B \equiv \frac{1 + \sqrt{1-\nu e^{-2/\lambda}}}{1 - \sqrt{1-\nu e^{-2/\lambda}}}$. Para $\nu \ll 1$, $\lambda \rightarrow 0$ y $K \rightarrow 0$ (B. 27) se reduce al resultado citado en [10]

$$\Delta_K \xrightarrow{K \rightarrow 0} \Delta_0 - \frac{1}{2} \hbar \nu_F K + O(K^2). \quad (\text{B. 28})$$

Realizando una interpolación a d continua, se puede demostrar que la relación de dispersión en acoplamiento débil, $(\Delta_K - \Delta_0)$ se comporta como

$$\epsilon_K = (\Delta_K - \Delta_0) \simeq a(d) \hbar \nu_F K, \quad (\text{B. 29})$$

con

$$a(d) \equiv (7/2 - 6/\pi) + (8/\pi - 13/4)d + (3/4 - 2/\pi)d^2. \quad (\text{B. 30})$$

Encontramos la energía de amarre de los pares de Cooper en el modelo BCS con interacción entre pares de fermiones, ésta decrece casi linealmente a cero con el (CMM) del par como se determinó numéricamente para todo acoplamiento desde la ecuación de eigenvalores de los pares de Cooper en dos y tres dimensiones. Este comportamiento lineal contrasta con la relación de dispersión *quadratic* de una partícula compuesta moviéndose en el vacío, restringida a moverse en una caja de longitud L e.g., un deuterón.

Apéndice C

Temperaturas de transición estimadas

La temperatura de transición BEC de un gas ideal de bosones en d -dimensiones se puede estimar si se asocia una longitud de onda λ a las partículas del gas de bosones usando la relación de de Broglie $\lambda_{deB} = h/p$ donde h es la constante de Planck y p el momento asociado a cada partícula de masa m_B .

La λ se puede determinar de dos formás, una usando el teorema de equipartición de la energía en d dimensiones el cual nos dice que $U_{cin} = p^2/2m_B = d(k_B T)/2$ es la energía cinética por bosón, con m_B la masa bosónica, así se encuentra que el momento se puede expresar como $p = \sqrt{dm_B k_B T}$, de donde la longitud de onda térmica $\lambda_{deB}(T)$ asociada al gas de bosones es

$$\lambda_{deB}(T) = h/\sqrt{dm_B k_B T}. \quad (C. 1)$$

Por otro lado, en [33] pag. 157, se define una longitud de onda térmica asociada al sistema de partículas

$$\lambda_{QC} = h/\sqrt{2\pi m k_B T}, \quad (C. 2)$$

donde QC se refiere al gas cuántico de bosones. Si la distancia entre partículas, $r_0 = (V/N)^{1/d}$ en el sistema es del orden o menor que la longitud de onda térmica λ , siendo V el volumen en d -dimensiones asociado, los efectos cuánticos se manifiestan. Así podemos definir una temperatura de transición T^{Trans} del sistema si $\lambda = 2r_0 = 2/n_B^{1/d}$ donde $n_B = N/V$ es la densidad de partículas.

Las temperaturas de transición se comparan con la temperatura crítica BEC T_c exacta para un gas ideal de bosones (3. 52) con $\delta = 0$. El cálculo del volumen se realiza tanto en

coordenadas esféricas como en coordenadas cartesianas, con una longitud de onda térmica asociada $\lambda_{QC}(T) = h/\sqrt{2\pi mk_B T}$ ó $\lambda_{deB}(T) = h/\sqrt{dm_B k_B T}$.

En coordenadas cartesianas $V = r_0^d$ mientras que en coordenadas es esféricas $V = C_d r_0^d$ con $C_d = 2, \pi, 4\pi/3$ para $d = 1, 2, 3$. En coordenada cartesianas se encuentra que:

$$\lambda_{QC}(T) = h/\sqrt{2\pi mk_B T_{QC}^{Trans}} = 2/n_B \quad (C. 3)$$

mientras que en coordenada esféricas, el volumen $V = C_d(r_0/2)^d$:

$$\lambda_{QC}(T) = h/\sqrt{2\pi mk_B T_{QC}^{Trans}} = 4/(C_d n_B)^{1/d} \quad (C. 4)$$

El cálculo se realiza de igual forma con la longitud de onda de de Broglie $\lambda_{deB}(T) = h/\sqrt{dm_B k_B T}$.

Coordenadas	T_{QC}^{Trans}	T_{QC}^{deB}
Esféricas	$(\pi/8)(C_d)^{2/d}(\hbar^2/mk_B)n^{2/d}$	$(\pi^2/4d)(C_d)^{2/d}(\hbar^2/mk_B)n^{2/d}$
Cartesianas	$(\pi/2)(\hbar^2/mk_B)n^{2/d}$	$(\pi^2/d)(\hbar^2/mk_B)n^{2/d}$

Tabla C.1 Temperaturas de transición en d dimensiones en coordenadas esféricas y en coordenadas cartesianas. T_{QC}^{Trans} es la temperatura de transición calculada a partir de de la longitud onda de transición λ_{QC}^{Trans} , T_{QC}^{deB} es la temperatura de transición calculada a partir de de la longitud onda de de Broglie λ_{deB} .

d	T_{QC}^{Trans}	T_{QC}^{deB}	T_c^{BEC}	$\frac{T_c - T_{QC}^{Term}}{T_c}$	$\frac{T_c - T_{QC}^{deB}}{T_c}$
1	1.57	9.87	0	—	—
2			$0 T_{c(s=2)}^{BEC}$		
2	1.57	4.93	$11.1 T_{c(s=1)}^{BEC}$	0.86	0.56
3			$0.89 T_c^{BKT}$		
3			$3.31 T_{c(s=2)}^{BEC}$	0.52	0.006

Tabla C.2 Cálculo de las temperaturas de transición T_{QC}^{Trans} y T_{QC}^{deB} en unidades de $(\hbar^2/mk_B)n^{s/d}$ para $d = 1, 2$ y 3 dimensiones en coordenadas cartesianas. Los resultados se comparan con las temperaturas de transición BEC de un gas de ideal de bosones cuya relación de dispersión es $\epsilon_k = C_s k^s$ con $s = 1$ ó 2 .

d	T_{QC}^{Trans}	T_{QC}^{deB}	T_c	$\frac{T_c - T_{QC}^{Term}}{T_c}$	$\frac{T_c - T_{QC}^{deB}}{T_c}$
1	1.57	9.87	0	—	—
2			$0 T_{c(s=2)}^{BEC}$		
2	1.23	3.88	$11.1 T_{c(s=1)}^{BEC}$	0.89	0.55
			$0.89 T_c^{BKT}$		
3	1.02	2.14	3.31	0.69	0.35

Tabla C.3 Cálculo de las temperaturas de transición T_{QC}^{Trans} y T_{QC}^{deB} en unidades de $(\hbar^2/mk_B)n^{s/d}$ para $d = 1, 2$ y 3 dimensiones en coordenadas esféricas. Los resultados se comparan con las temperaturas de transición BEC de un gas de ideal de bosones cuya relación de dispersión es $\epsilon_k = C_s k^s$ con $s = 1$ ó 2 .

Lista de Figuras

Figura 2.1 Potencial químico resolviendo numéricamente la ecuación (2. 20) como función de la temperatura para un gas ideal de Fermi en $d = 3, 2, 1, 1/2$ y $1/4$.

Figura 2.2 Entropía en unidades de Nk_B , como función de la temperatura para un gas ideal de Fermi.

Figura 2.3 Presión termodinámica en unidades de $Nk_B T_F/V$, como función de la temperatura para, un gas ideal de Fermi.

Figura 2.4 Calor específico *vs* temperatura absoluta, en un gas ideal de Fermi para $d = 3, 2, 1, 1/2$ y $1/4$.

Figura 2.5 $c_T^2(T)/c_T^2(0)$ donde $c_T(T)$ es la velocidad del sonido isotérmica en un IFG como función de la temperatura T/T_F . para $d = 1/4, 1/2, 1, 2$ y 3 . En la gráfica de abajo a la izquierda mostramos los valores de los mínimos en la velocidad del sonido isotérmica comparados con $c_T(0)$ como función de $\text{Log } d$, y en la gráfica de abajo a la derecha los valores de la temperatura T_{\min} que corresponden con los mínimos en la gráfica principal.

Figura 2.6 Velocidad del sonido adiabática para un gas ideal de Fermi como función de la temperatura T/T_F en $d = 1/4, 1/2, 1, 2$ y 3 . En el recuadro se muestra la gráfica para T/T_F muy grande.

Figura 3.1 Potencial químico como función de la temperatura para un gas de fermiones en 3D atrapados por $\delta = 1, 2, 3$, potenciales de oscilador armónico.

Figura 3.2 Energía en un gas de fermiones atrapado por $\delta = 1, 2, 3$ osciladores armónicos.

Figura 3.3 Calor específico a volumen constante para un gas de fermiones atrapado por $\delta = 1, 2, 3$ osciladores armónicos. .

Figura 3.4 Entropía para un gas de fermiones atrapado por $\delta = 1, 2, 3$ osciladores armónicos.

Figura 4.1 Equivalencia de la razón ρ_c/ρ_{ab} con la dimensión d que varía continuamente de 2 a 3. El punto BSCO se refiere al valor experimental encontrado en la resistividad de $\text{Bi}_{2+x}\text{Sr}_{2-y}\text{CuO}_{6+\delta}$ [5].

Figura 4.2 Razón m_B/M_B como función de la dimensión d que varía continuamente de 2.0 a 2.3. Los valores de $c = 6\text{Å}$ y 30Å son los experimentales reportados para los materiales superconductores orgánicos [82] con $k_F = 0.5\text{Å}$.

Figura 4.3 Se grafica T_c/T_F del gas libre de bosones como función de la dimensión para $s = 1$ y $s = 2$ de acuerdo a la fórmula (4.32), las áreas sombreadas se refieren a los datos empíricos de la Ref. [100]. A la derecha se muestra una ampliación de la figura donde los puntos se refieren a los resultados de (4.22).

Figura 5.1 Densidad de estados $g(\epsilon)$ normalizada a la DOS de un gas ideal de fermiones como función de ϵ/E_F para $\nu = 0.05$ que representa un valor típico de los cupratos.

Figura 5.2 Incremento de la T_c BEC usando una DOS ESP normalizada con respecto a la DOS de un gas ideal de fermiones para varios valores del exponente σ en (5.7). El valor de $\sigma = 1/2$ es el sugerido en la Ref. [108].

Figura 5.3 Temperatura crítica BEC T_c en unidades de T_F como función de Θ_D/T_F , para un modelo simple de bosón-fermión en 2D y 3D discutido en la ecuación (5.15). Se muestra también el resultado BCS bien conocido $T_c \simeq 1.13 \Theta_D e^{-1/\lambda}$, así como el

resultado encontrado usando (5.39) para una DOS de VH y $\lambda = 1/2$. Ambos valores de T_c BCS, con una DOS del GIF y VH, se desvanecen cuando $\lambda \rightarrow 0$. El rectángulo muestra los datos empíricos para los superconductores cupratos en casi-2D [100].

References

- [1] H.K. Onnes, Phys. Lab. Univ. Leiden, **119, 120, 122**, (1911).
- [2] W. Meissner & R. Ochsenfeld, Naturwiss, **21**, 787 (1933).
- [3] J. G. Bednorz & K. A. Müller, Z. Phys. B **64**, 189 (1986).
- [4] C.W. Chu, P.H. Hor, R.L. Meng, L.Gao, Z.J. Huang & Y.Q. Wang, Phys. Rev. Lett. **58**, 405 (1987).
- [5] A.T. Fiory, S. Martin, R.M. Fleming, L.F. Schneemeyer, J.V. Waszczak, A.F. Hebard, & S.A. Sunshine, Physica C **162-164**, 1195 (1989).
- [6] K. Bechgaard, K Carneiro & C.S. Jacobsen, Phys. Rev. Lett. **46**, 852 (1981).
- [7] D. Jérôme, Science **252**, 1509(1991).
- [8] J.M. Williams, A.J. Schultz, U. Geiser, K.D. Carlson, A.M. Kini, H.H. Wang, W.K. Kwok, M.H. Whangbo, & J.E. Schirber, Science **252**, 1501(1991).
- [9] H. Hori, Int. J. Mod Phys. B **8**, 1 (1994).
- [10] J. Bardeen, L.N. Cooper, & J.R. Schrieffer, Phys. Rev **108**, 1175 (1957).
- [11] J.R. Schrieffer, *Theory of Superconductivity* (Benjamin, N Y, 1964).
- [12] L.N. Cooper, Phys. Rev. **104**, 1189 (1956).
- [13] M. Casas, S. Fujita, M. de Llano, A. Puente, A. Rigo & M.A. Solís, Physica C **295**, 93 (1998); S. Fujita & S. Godoy, *Quantum Statistical Theory of Superconductivity* (Plenum, NY, 1996).

- [14] A. Einstein, Berl. Ber. **22**, 261 (1924); **23**, 3 (1925).
- [15] M.H. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Wieman, & E.A. Cornell, Science **269**, 198 (1995).
- [16] K.B. Davis, M.O. Mewes, M.R. Andrews, N.J. van Druten, D.S. Durfee, D.M. Kurn, & W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **75**, 3969 (1995).
- [17] C.C. Bradley, C.A. Sackett, J.J. Tollett, & R.G. Hulet, Phys. Rev. Lett. **75**, 1687 (1995).
- [18] D.G. Fried, T.C. Killian, L. Willmann, D. Landhuis, S.C. Moss, D. Kleppner, & T.J. Greytak, Phys. Rev. Lett. **81**, 3811 (1998).
- [19] S.L. Cornish, N.R. Claussen, J.L. Roberts, E.A. Cornell, & C.E. Wieman, Phys. Rev. Lett. **85**, 1795 (2000).
- [20] F. Pereira Dos Santos, J. Léonard, Junmin Wang, C.J. Barrelet, F. Perales, E. Rasel, C.S. Unnikrishnan, M. Leduc, & C. Cohen-Tannoudji, Phys. Rev. Lett. **86**, 3459 (2001).
- [21] G. Mondugno, G. Ferrari, G. Roati, R.J. Brecha, A. Simoni, & M. Inguscio, Science **294**, 1320 (2001).
- [22] A. Görlitz, J.M. Vogels, A.E. Leanhardt, C. Raman, T.L. Gustavson, J.R. Abo-Shaeer, A.P. Chikkatur, S. Gupta, S. Inouye, T. Rosenband, & W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **87**, 130402 (2001).
- [23] F. Schreck, L. Khaykovich, K.L. Corwin, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, & C. Salomon, Phys. Rev. Lett. **87**, 080403 (2001).

- [24] S. Burger, F.S. Cataliotti, C. Fort, P. Maddaloni, F. Minardi, & M. Inguscio, *Europhys. Lett.* **57**, 1 (2002).
- [25] E. Corcoran and G. Zopette, *Sci. Am.* [*Supplement: The Solid-State Century*] (Sept. 1997) p. 25; E. Corcoran, *Sci. Am.* (Nov. 1990) p. 122; C. Weisbuch & B. Vinter, *Quantum Semiconductor Structures* (Academic Press, San Diego, 1991); L.J. Challis, *Contemp. Phys.* **33**, 111 (1992).
- [26] R.M. Ziff, G.E. Uhlenhuth & M. Kac, *Phys. Rev.* **32**, 169 (1977).
- [27] X.G. Wen & R. Kan, *Phys. Rev. B* **37**, 595 (1988).
- [28] B. DeMarco & D.S. Jin, *Phys. Rev. A* **58**, R4267 (1998).
- [29] B. DeMarco & D.S. Jin, *Science* **285**, 1703 (1999).
- [30] B. DeMarco, H. Rohner, & D.S. Jin, *Rev. Sci. Instrum.* **70**, 1967 (1999)
- [31] M. Holland, B. DeMarco, & D.S. Jin, *Phys. Rev. A* **61**, 053610 (2000).
- [32] S. Jochim, M. Bartenstein, A. Altmeyer, G. Hendl, C. Chin, J. Hecker Denschlag, R. Grimm, *Science* **302**, 2101 (2003); C.A. Regal, M. Greiner, and D.S. Jin, *Phys. Rev. Lett* **92**, 040403 (2004).
- [33] R.K. Pathria, *Statistical Mechanics*, 2nd Ed. (Pergamon, Oxford, 1996).
- [34] M.C. de Sousa Vieira & C. Tsallis, *J. Stat. Phys.* **48**, 97 (1987).
- [35] R.P. Feynman, R.B. Leighton & M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, (Fondo Educativo Interamericano S. A., 1971), 1, p. 47-10 .
- [36] D.E. Farrell, R.G. Beck, M.F. Booth, & C.J. Alien, *Phys. Rev. B* **42**, 6758 (1990).

- [37] V. Hardy, A. Maignan, C. Martin, F. Warmont & J. Provost, *Phys. Rev. B* **56**, 130 (1997).
- [38] S. Ono & Yoichi Ando, *Physica C* **388-389**, 321 (2003).
- [39] R.K. Pathak & P.V. Panat, *Phys. Rev. B* **41**, 4749 (1990).
- [40] J.F. Ashmore, *Lettere al Nuovo Cimento* **4** 289 (1972).
- [41] C.G. Bollini & J.J. Giambiagi, *Nuovo Cimento B* **12** 20 (1972).
- [42] G. t'Hooft & M. Veltman, *Nuclear Phys. B* **44** 189 (1972).
- [43] Wilson, K.G., , *Phys. Rev. D* **7**, 2911 (1973).
- [44] F.H. Stillinger, *J. Math. Phys.* **18**, 1224 (1977).
- [45] A. Kirchberg, J.D. Länge, P.A.G. Pisani & A. Wipf, *Annals of Phys.* **303**, 359 (2003).
- [46] H.E. Camblong, L.N. Epele, H. Fanchiotti & C.A. García Canal, *Phys. Rev. Lett* **85**, 1590 (2000).
- [47] K. Andrew, *Am. J. Phys.* **58**, 1177 (1990).
- [48] B.B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature* (W.H. Freeman, San Francisco, 1983).
- [49] A.L. Fetter & J.D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems* (McGraw-Hill, NY, 1971).
- [50] E. Cetina, F. Magaña & A.A. Valladares, *Am. J. Phys.* **45**, 960 (1977).

- [51] M. Casas, A. Rigo, M. de Llano, O. Rojo, & M.A. Solís, *Phys. Lett. A* **245**, 55 (1998).
- [52] S. Wolfram, *The MATHEMATICA Book*, 3a. Ed. (Wolfram Media, IL, 1996) p. 742.
- [53] J.P. McKelvey, *Solid State and Semiconductor Physics* (Harper & Row, NY, 1966) p. 152.
- [54] S.R. de Groot, G.J. Hooyman, & C.A. Ten Seldam, *Proc. Roy. Soc. (London) A* **203**, 266 (1950).
- [55] W. Yourgrau, A. van der Merwe & G. Raw, *Treatise on irreversible and statistical thermofysics* (Dover Publications, Inc, New York, 1982) p. 132.
- [56] C. Kittel & H. Kroemer, *Thermal Physics*, 2nd Ed. (W.H. Freeman and Company, N Y, 1980).
- [57] V.C. Aguilera-Navarro, V. Fuentes, M. Grether, M.G. López-Arrieta, M. de Llano, J.J. Valencia, A. Salazar, O. Rojo & M.A. Solís, *Cond. Matt, Theories* **14**, Ed. D. Ernst (Nova Science Publisher, Inc., N Y, 1998) p. 61.
- [58] V.C. Aguilera-Navarro, M. de Llano & M.A. Solís, *Eur. J. Phys.* **20**, 177 (1999).
- [59] V. Bagnato, D.E. Pritchard, & D. Kleppner, *Phys. Rev. A* **35**, 4354 (1987).
- [60] W. Ketterle & N.J. van Druten, *Phys. Rev. A* **54**, 656 (1996).
- [61] K. Kirsten & D.J. Thoms, *Phys. Rev. A* **54**, 4188 (1996).
- [62] H. Haugerud, T. Haugset, & F. Ravndal, *Phys. Lett. A* **225**, 18 (1997).

- [63] F. Dalfovo, S. Giorgini, L.P. Pitaevskii, & S. Stringari, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999).
- [64] G. Stan, S.M. Gatica, M. Boninsegni, S. Curtarolo & M.W. Cole, *Am. J. Phys.* **67**, 1170 (1999).
- [65] K.K. Das, *Phys. Rev. A* **66**, 053612 (2002).
- [66] M. Grether, M. Fortes, F.J. Sevilla, M.A. Solís, S. Tapia, M. de Llano, A.A. Valladares & V.V. Tolmachev, *Cond. Matt, Theories* **15**, Ed. G.S. Anagnostatos, (Nova Science Publisher, Inc., N Y 2000) p.425.
- [67] M. Grether, M. Fortes, M. de Llano, J.L. del Rio, F.J. Sevilla, M.A. Solís & A. Valladares, *Eur Phys. J. D*, **23**, 117 (2003).
- [68] R.K. Pathria, *Phys. Rev. A* **58**, 1490 (1998).
- [69] D.S. Petrov, M. Holzmann, & G.V. Shlyapnikov, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2551 (2000).
- [70] D.S. Petrov, G.V. Shlyapnikov, & J.T.M. Walraven, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 050404 (2001).
- [71] M. Ligare, *Am. J. Phys.* **66**, 185 (1998).
- [72] D.A. Butts & D.S. Rokhsar, *Phys. Rev. A* **55**, 4346 (1997).
- [73] M. Li, Z. Yan, J. Chen, L. Chen, & Ch. Chen, *Phys. Rev. A* **58**, 1445 (1998).
- [74] J. Schneider & H. Wallis, *Phys. Rev. A* **57**, 1253 (1998).
- [75] G.M. Bruun & K. Burnett, *Phys. Rev. A* **58**, 2427 (1998).

- [76] M. Houbiers & K. H.T.C. Stoof, *Phys. Rev. A* **59**, 1556 (1998).
- [77] J.R. Ensher, D.S. Jin, M.R. Matthews, C.E. Wieman, & E.A. Cornell, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4984 (1996).
- [78] F.J. Sevilla "*Gases de bosones atrapados por potenciales armónicos*," Tesis de Licenciatura, Fac. de Ciencias, UNAM (2000).
- [79] R.M. May, *Phys. Rev.* **135**, A1515 (1964).
- [80] M. Howard Lee, *Phys. Rev. E* **55**, 1518 (1997).
- [81] R.K. Pathria, *Phys. Rev. E* **57**, 2697 (1998).
- [82] C.P. Poole, H.A. Farach & R.J. Creswick, *Superconductivity* (Academic Press, Inc. NY 1995) p. 595.
- [83] V.L. Berezinskii, *Sov. Phys. JETP* **34**, 610 (1972); J.M. Kosterlitz & D.J. Thouless, *J. Phys.* **C6**, 1181 (1973); M. Olvera, "*Teoría de los fenómenos críticos en sistemas bidimensionales*", Tesis de Licenciatura, Fac. de Ciencias UNAM (1980) p.212.
- [84] S.K. Adhikari, M. Casas, A. Puente, A. Rigo, M. Fortes, M.A. Solís, M. de Llano, A.A. Valladares, O. Rojo, *Phys. Rev. B* **62**, 8671 (2000).
- [85] R. Micnas, J. Ranninger & S. Robaszkiewicz, *Rev. Mod. Phys.* **62**, 113 (1990).
- [86] S.I. Shevchenko, *JETP (Sov. Phys.)* **73**, 1009 (1991).
- [87] D.R. Harshman & A. P. Mills, *Phys. Rev. B* **45**, 10684 (1992).
- [88] P.C. Martin, in *Superconductivity* (ed. by R. D. Parks) Vol. 1 (Marcel Dekker, 1969).

- [89] L. Belkhir & M. Randeria, *Phys. Rev. B* **49**, 6829 (1994).
- [90] M. Abramowitz & I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, 1972) p. 253.
- [91] M. Howard Lee, *Phys. Rev. E* **55**, 1518 (1997).
- [92] R. Turton, *The Quantum Dot* (Oxford University Press, 1996).
- [93] L. Jackak, P. Hawrylak & A. Wójs, *Quantum Dots*, (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1998).
- [94] H. B. Rosenstock, (Specific Heat of a Particle in a Box) **38** (1961).
- [95] B.K. Chakraverty, J. Ranninger, & D. Feinberg, *Phys. Rev. Lett* **81**, 433 (1998).
- [96] V.V. Tolmachev, *Phys. Lett. A* **266**, 400 (2000); M. de Llano & V.V. Tolmachev, *Physica A* **317**, 546 (2003).
- [97] N.W. Ashcroft & N.D. Mermin, *Solid State Physics* (Saunders, Philadelphia, PA, 1976) p.7.
- [98] F.J. Sevilla, M. Grether, M. Fortes, M. de Llano, O. Rojo, M.A. Solís & A.A. Valladares, *J. Low Temp. Phys.* **121**, 281 (2000).
- [99] P.W. Anderson, *Science* **235**, 1196 (1987).
- [100] Y.J. Uemura, G.M. Luke, B.J. Sternlieb, J. H. Brewer, J.F. Carolan, W.N. Hardy, R. Cadono, J.R. Kempton, R.F. Kiefl, S.R. Kreitzman, P. Mulhern, T.M. Riseman, D.Ll. Williams, B.X. Yang, S. Uchida, H. Takagi, J. Gopalakrishnan, A.W. Sleight, M.A. Subramanian, C.L. Chien, M.Z. Cieplak, Gang Xiao, V.Y. Lee, V.W. Statt,

- C.E. Stronach, W.J. Kossler, & X.H. Yu, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 2317 (1989); *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2665 (1991); *Nature* **352**, 605 (1991); *Physica B* **186-188**, 223 (1993) & **282**, 194 (1997).
- [101] M. Casas, A. Puente, A. Rigo, N.J. Davidson, R.M. Quick, M. Fortes, M.A. Solís, M. de Llano, O. Navarro, A.A. Valladares, O. Rojo, *Int. J. Mod. Phys. B* **13**, 3489 (1999).
- [102] P. Nozières & S. Schmitt-Rink, *J. Low. Temp. Phys.* **59**, 195 (1985).
- [103] B.S. Deaver, Jr. & W.M. Fairbank, *Phys. Rev. Lett.* **7**, 43 (1961); R. Doll & M. Näbauer, *Phys. Rev. Lett.* **7**, 51 (1961); C.E. Gough *et al.*, *Nature* **326**, 855 (1987).
- [104] K. Miyake, *Prog. Theor. Phys.* **69**, 1794 (1983).
- [105] R. Friedberg, T.D. Lee & H.C. Ren, *Phys. Lett. A* **158**, 417 & 423 (1991).
- [106] M. Casas, N.J. Davidson, S. Fujita, M. de Llano, T.A. Mamedov, A. Puente, R.M. Quick, A. Rigo, M.A. Solís, *Physica A* **295**, 425 (2001).
- [107] V. Fuentes, M. de Llano, M. Grether & M.A. Solís, *Rev. Mex. Fis.* **45**suplemento 1, 158 (1999).
- [108] A.A. Abrikosov, J.C. Campuzano & K. Gofron, *Physica C* **214**, 73 (1993).
- [109] L. van Hove, *Phys. Rev.* **89**, 1189 (1953).
- [110] R.S. Markiewicz, *J. Phys. Chem. Solids* **58**, 1179 (1997).
- [111] J.M. Getino, M. de Llano & H. Rubio, *Phys. Rev. B* **48**, 597 (1993); J.M. Getino, M. de Llano & H. Rubio, *Sol. State Comm.* **83**, 891 (1992).

- [112] M. Casas *etal*, Cond. Matt, Theories **13**, Ed. J. da Providencia (Nova Science Publisher, Inc., N Y, 1998).
- [113] V.C. Aguilera-Navarro *etal*, Cond. Matt, Theories **12**, Ed. R.V. Panat (Nova Science Publisher, Inc., N Y, 1997).
- [114] M. Casas, M. de Llano, A. Puente, A. Rigo & M.A. Solís, Sol. State Comm. **123**, 101 (2002).
- [115] X-F. He, Phys. Rev. B **42**, 11751 (1990); X-F. He, Phys. Rev. B **43**, 2063 (1991).
Matos-Abiague [116]
- [116] A. Matos-Abiague, J. Phys: Cond. Matt **14**, 4543 (2002).
- [117] Z. Bak, Phys. Rev. B **68**, 064511 (2003).
- [118] C. Tsallis, J. Stat. Phys. **52**, 479 (1988).
- [119] S. Martínez, F. Pennini, A. Plastino & M. Portesi, cond-mat/0304672; L. Salasnich, cond-mat/9911453v2; J. Chen, Z. Zhang, G. Su, L. Chen & Y. Shu, Phys Lett A **300** (2002); F Büyükkilic, D. Demirhan, A. GBülec, Phys Lett A **197** (1995); B. Tanatar, Phys. Rev. E **65**, 046105 (2002); M.R. Ubriaco, Phys. Rev. E **60**, 165 (1999); A. Aliano, G. Kaniadakis, E. Miraldi, Physica B **325**, 35 (2003); U. Tirnakli, D.F. Torres, Physica A **268**, 225 (1999).