

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**Sobre la aproximación semiclásica de la integral
de trayectoria y función de partición poliméricas
de una partícula en un potencial semirestringido.**

Tesis que presenta:

Ing. Daniel Humberto Orozco Borunda.

Para obtener el grado de
Maestro en Ciencias (Física)



Casa abierta al tiempo

Asesor:

Dr. Hugo Aurelio Morales Técotl.

Jurado Calificador:

Presidente

Dr. Jerónimo Alonso Cortez Quezada

Secretario

Dr. Hugo Aurelio Morales Técotl

Vocal

Dr. Marco Antonio Maceda Santamaría

México, Distrito Federal, 16 de Abril de 2015.

Agradecimientos

Me gustaría agradecer a mis padres, Diana y Daniel, por su comprensión y apoyo incondicional bajo cualquier circunstancia.

Asimismo quisiera agradecer a mi asesor, el Dr. Hugo Morales, por permitirme trabajar con él y por su guía a lo largo de mis estudios de maestría, así como sus valiosos consejos que me han permitido crecer tanto académica como personalmente.

Me gustaría agradecer también a mis compañeros Ernesto, Sergio, Juan, Nestor y Alejandro por las discusiones que tuve con ellos a lo largo de mis estudios, las cuales resultaron muy fructíferas y me permitieron aprender mucho.

El agradecimiento lo extiendo a mis sinodales, el Dr. Jeronimo cortez y el Dr. Marco Maceda, que aparte de dedicar tiempo en la revisión de esta tesis, también fueron mis profesores y me permitieron adquirir algo de su conocimiento.

Por último, agradezco a CONACYT ya que sin su apoyo mis estudios de maestría difícilmente hubieran podido ser llevados a cabo.

Resumen

Las limitaciones de la relatividad general clásica para tener una descripción aceptable de regiones con campos gravitacionales intensos como la vecindad de la gran explosión cósmica o el interior de agujeros negros, y las divergencias de la teoría cuántica de campos a escalas de longitud pequeñas, sugieren la idea de que una teoría de gravitación cuántica podría contribuir a resolver estas problemáticas. En la Gravedad Cuántica por Lazos (GCL) [1], por ejemplo, la estructura del espacio a la escala de Planck: $l_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \sim 10^{-33}cm$, corresponde a una discreta. El espacio-tiempo continuo es sólo una aproximación a escalas de longitud muy grandes comparadas con l_p . En efecto, las singularidades clásicas mencionadas antes desaparecen en este esquema, en los modelos homogéneos [2, 3]. La teoría cuántica de campos en este esquema ciertamente es muy distinta a escala de longitudes pequeñas pero su estudio aún está en desarrollo[4, 5].

La mecánica cuántica polimérica [6, 7] ofrece un esquema de cuantización basado en técnicas usadas en GCL. Ya que este esquema de cuantización es construido para sistemas con un número finito de grados de libertad, permite explorar aspectos técnicos e ideas de GCL en un contexto más simple.

En esta tesis utilizamos la mecánica cuántica polimérica para estudiar sistemas mecánicos no relativistas con un potencial semirestringido, específicamente un potencial cuadrático inverso en la posición, que presenta algunas dificultades técnicas similares a las que se encuentran en las funciones de partición usadas en la termodinámica de agujeros negros [8, 9]. Tales dificultades se resuelven cuando la

aproximación semiclásica de la función de partición se modifica.

Específicamente, para que la aproximación semiclásica de la función de partición esté bien definida ésta tiene que cumplir dos requerimientos: primero, que la acción del sistema evaluada en la trayectoria clásica sea finita y, segundo, que la primera variación de la acción evaluada en esta misma trayectoria se anule para todas las configuraciones del sistema que preservan las condiciones de frontera. Ninguno de estos requerimientos se cumple para el caso de la partícula en el potencial semirestringido, cuando se adopta la integral de trayectoria que está en correspondencia con la cuantización usual de Schrödinger, y es necesario hacer uso del formalismo de Hamilton-Jacobi para cumplir los requerimientos [10]. Sin embargo, en esta tesis mostramos que cuando se aplica a este sistema mecánico el esquema de cuantización polimérico, los requerimientos se cumplen y el formalismo de Hamilton-Jacobi es innecesario.

Por completez consideramos la modificación que los términos de Hamilton-Jacobi producen en la acción efectiva polimérica. Aunque tales modificaciones no son requeridas, es de interés explorar los efectos que inducen en la acción. El resultado es que el carácter finito de la acción evaluada en la trayectoria clásica se mantiene y su primera variación continua anulándose.

A futuro será importante estudiar las consecuencias del tratamiento polimérico aquí considerado para el caso de agujeros negros.

Índice general

1. Introducción	1
2. Integral de trayectoria y función de partición de sistemas mecánicos	7
2.1. Propagador e integral de trayectoria	7
2.2. Ejemplo: Propagador de partícula libre	12
2.3. Relación de la función de partición con la integral de trayectoria de un sistema mecánico	13
2.4. Aproximación semiclásica	15
3. Mecánica cuántica polimérica	17
3.1. Álgebra de Weyl y representación polimérica	17
3.2. Integral de trayectoria polimérica para la partícula libre	24
4. Función de partición semiclásica de una partícula en un potencial cuadrático inverso en la posición	27
4.1. Condiciones de frontera y aproximación semiclásica	27
4.2. Deducción de la acción efectiva polimérica	31
4.3. Función de partición semiclásica polimérica para una partícula en el potencial cuadrático inverso en la posición	34
5. Acción mejorada de una partícula con un potencial cuadrático inverso en la posición	39

5.1. Modelo cuantizado en el esquema de Schrödinger	39
5.2. Acción mejorada polimérica	42
6. Conclusiones, discusión y perspectivas	46
A. Teoría de Hamilton-Jacobi	50
B. Función de partición semiclásica de un agujero negro de Schwarzschild	55

Capítulo 1

Introducción

Dos paradigmas actuales en la física son la relatividad general y la teoría cuántica de campos. A pesar de que ambas son teorías sólidas, presentan problemas importantes. Por ejemplo, cuando se estudia en el contexto de la relatividad general, ya sea agujeros negros o modelos cosmológicos, se encuentran singularidades [11]. La teoría de la relatividad general permite describir un modelo de universo en expansión que sin embargo no puede continuar su dinámica más allá del tiempo correspondiente al big bang [12]; allí, además, la densidad de energía y la curvatura del espacio-tiempo divergen. Lo mismo ocurre para la curvatura del espacio-tiempo en el interior de un agujero negro. Por otro lado, en la teoría cuántica de campos aparecen cantidades físicas, tales como la energía del vacío o amplitudes de probabilidad, que divergen en el régimen de distancias muy cortas. Para resolver este problema se implementa un procedimiento llamado renormalización que permite descartar divergencias de manera sistemática y hacer predicciones físicas. En ambos casos, singularidades gravitacionales y divergencias en teoría cuántica de campos, la naturaleza del espacio-tiempo juega un papel preponderante. De aquí se puede suponer que si ésto cambia ello pueda modificar nuestro entendimiento de estas problemáticas. La presencia de una singularidad indica que la teoría ha sido llevada mas allá de su dominio de aplicabilidad. Cerca de las singularidades es evidente que no se

pueden usar las teorías establecidas hasta ahora. Debido a esto es sensato suponer que una teoría que unifique la teoría cuántica de campos y la relatividad general pueda dar una mejor perspectiva y ayude a eliminar las divergencias mencionadas.

Una propuesta de teoría cuántica de la gravedad es la gravedad cuántica por lazos (GCL) [1]. La característica principal de GCL es el hecho de que modifica la noción de espacio-tiempo continuo para dar lugar a uno de naturaleza discreta. Entre los resultados más notables de GCL están el remover la singularidad encontrada en relatividad general para el caso de los modelos cosmológicos homogéneos [12] y el cálculo de la entropía del agujero negro de Schwarzschild. En el esquema de GCL existen varias situaciones por resolver, una de ellas es el tratar de cubrir la brecha entre los regímenes de altas energías descritos por GCL y los de bajas energías descritos por las teorías de campos habituales. Una línea de investigación ampliamente motivada por este punto es la llamada cuantización polimérica [6], la cual toma su forma más simple cuando se aplica a una partícula no relativista. Esta cuantización puede ser útil para entender diferencias esenciales entre el enfoque independiente de fondo de GCL y el enfoque habitual usado en teorías de campo perturbativas. En el modelo de partícula no relativista la representación usual de Schrödinger juega el papel de la representación de Fock de la teoría cuántica de campos. Por otro lado se construye una representación unitariamente inequivalente a la de Schrödinger, llamada representación polimérica, en la cual los estados son análogos a las excitaciones elementales de GCL. La estructura matemática de esta representación imita varias características de GCL. Estas dos descripciones son bastante diferentes, sin embargo, se puede adoptar el punto de vista de que la representación polimérica es la descripción fundamental, y la representación estándar de Schrödinger corresponde a un sector efectivo, vía una aproximación continua. Este modelo ilustra porqué un punto de vista análogo puede ser viable en la teoría completa: aunque la teoría estándar de bajas energías parece muy diferente a GCL, ésta puede constituir una aproximación de GCL. Este trabajo de tesis está basado en la cuantización polimérica.

Por otro lado, el formalismo de la integral de trayectoria [13, 14, 15] proporciona una perspectiva del carácter cuántico de algunos sistemas en términos de fluctuaciones cuánticas, que modifican las leyes clásicas. En ciertas situaciones, las modificaciones pueden ser pequeñas. Por ejemplo, si un electrón en un átomo está altamente excitado su paquete de ondas rodea el núcleo en casi la misma manera que una partícula clásica. Entonces es relativamente simple calcular con precisión, amplitudes de transición al desarrollarlas alrededor de expresiones clásicas en potencias de las fluctuaciones cuánticas [14].

Notablemente, la perspectiva anterior se puede utilizar en la mecánica de agujeros negros, que implica el estudio de sus propiedades termodinámicas [16]. Ésto se hace a través de la función de partición, la cual puede ser expresada usando una integral de trayectoria, ver apéndice B y [16]. Ahora bien, en algunos modelos de agujeros negros como son los dilatónicos[9], la aproximación semiclásica de la función de partición no está bien definida. Esto sucede porque la acción evaluada en la trayectoria clásica diverge, además de que la primera variación de la acción no se anula para todas las variaciones que preservan las condiciones de frontera. Ambos problemas pueden ser resueltos añadiendo un término de frontera de Hamilton-Jacobi en la acción [10, 9].

Los modelos dilatónicos de agujeros negros en dos dimensiones [8, 9, 17], son descritos por una acción de la forma

$$I = I_1(g, X) + B_{GH}(g), \quad (1.1)$$

donde g es la métrica del espacio-tiempo y X es un campo dilatónico. El término B_{GH} es el término de frontera de Gibbons-Hawking para estos casos, que permite tener un principio variacional bien definido.

Para estudiar la termodinámica de estos modelos se usa la integral de trayectoria euclidiana en la función de partición

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}g \mathcal{D}X \exp\left(-\frac{1}{\hbar} I[g, X]\right). \quad (1.2)$$

Se puede llevar a cabo la aproximación semiclásica de la acción euclidiana en (1.2) de la siguiente manera, siendo g_{cl} y X_{cl} , las soluciones a las correspondientes ecuaciones de movimiento clásicas,

$$I[g_{cl} + \delta g, X_{cl} + \delta X] = I[g_{cl}, X_{cl}] + \delta I[g_{cl}, X_{cl}; \delta g, \delta X] + \frac{1}{2} \delta^2 I[g_{cl}, X_{cl}; \delta g, \delta X] + \dots, \quad (1.3)$$

en donde el término lineal $\delta I[g_{cl}, X_{cl}; \delta g, \delta X]$ debería ser cero en virtud de las ecuaciones de movimiento. Si la contribución principal es finita y la parte cuadrática $\delta^2 I$ es positiva, la aproximación semiclásica de la integral de trayectoria queda como

$$\mathcal{Z} \approx \exp\left(-\frac{1}{\hbar} I[g_{cl}, X_{cl}]\right) \int \mathcal{D}\delta g \mathcal{D}\delta X \exp\left(-\frac{1}{2\hbar} \delta^2 I[g_{cl}, X_{cl}; \delta g, \delta X]\right). \quad (1.4)$$

La ecuación (1.4) se interpreta como la aproximación semiclásica de la función de partición en el ensamble canónico. Sin embargo, para que (1.4) esté bien definida se debe cumplir

- $\exp\left(-\frac{1}{\hbar} I[g_{cl}, X_{cl}]\right) < \infty$ y
- $\delta I[g_{cl}, X_{cl}; \delta g, \delta X] = 0$.

Estos problemas se pueden resolver usando una acción mejorada la cual está relacionada con la primera acción a través de un término de frontera obtenido usando la teoría de Hamilton-Jacobi [9, 17].

Curiosamente existen ciertos sistemas mecánicos, denominados semirestringidos, cuya dinámica corresponde a la de una partícula en la semirecta real, sujeta a un potencial y con una parte asintótica libre, que reproducen de manera análoga las problemáticas técnicas mencionadas relacionadas a los modelos dilatónicos de agujeros negros [10]. En el presente trabajo nos avocamos al estudio de uno de estos modelos sujeto a la cuantización polimérica.

Dado que una característica del esquema de cuantización polimérico es que ha llevado en varios casos a regularizar divergencias, en este trabajo proponemos

cuantizar de manera polimérica un modelo mecánico con la intención de estudiar si las dificultades descritas de la aproximación semiclásica se resuelven sin tener que recurrir a los términos de Hamilton-Jacobi. Eventualmente este estudio podría sugerir modificaciones físicas en los agujeros negros.

Nuestro estudio se desarrolla como sigue. Primero nos enfocamos en la aproximación semiclásica de la función de partición para un sistema mecánico con un potencial semirestringido dentro del esquema de cuantización habitual. Se trata de una partícula no relativista en un potencial repulsivo ubicado en el origen y asintóticamente libre: esto se logra con un potencial cuadrático inverso en la posición. Entonces se analiza el comportamiento de la acción que es el argumento de la exponencial en la función de partición, alrededor de la trayectoria clásica. Se encuentra que el orden dominante, que consiste de la acción evaluada en la trayectoria clásica, diverge. Por otro lado, en el caso de la primera variación de la acción evaluada en la trayectoria clásica, no se anula, debido a que variaciones finitas son permitidas para tiempos y posiciones muy grandes, de hecho infinitos.

Una vez establecido el modelo mecánico en la perspectiva de la cuantización de Schrödinger se considera una acción efectiva polimérica. Dado que usamos la representación de momentos, el potencial cuadrático inverso en la posición resulta modificado en la acción efectiva. El potencial original tiene la característica de que a posiciones muy grandes se comporta como libre. Sin embargo, en el modelo polimérico hay una diferencia notable en relación a este punto ya que el potencial polimerizado, tiene como característica que el punto q análogo al que correspondería a infinito en el potencial original, en este caso corresponde a una posición de valor finito, es decir, en este sentido, regulariza la divergencia que aparece en el modelo original. Esta característica hace que la acción efectiva polimérica evaluada en la trayectoria clásica no diverja. Por otro lado, el problema asociado a la primera variación de la acción, no existe en el potencial polimerizado, pues el punto frontera final ahora está a una distancia finita por lo cual las variaciones arbitrarias permitidas son únicamente las usuales $\delta q|_{t_f} = 0$. Por lo tanto, la primera variación de la

acción se anula para todas las trayectorias que preservan las condiciones de frontera, lo que nos lleva a concluir que en el modelo mecánico polimerizado no hay necesidad de introducir términos de frontera en la acción para tener un desarrollo semiclásico adecuado.

Por completez analizamos cómo el método de Hamilton-Jacobi permite obtener una acción mejorada del modelo cuantizado a la Schrödinger. Asimismo el modelo polimérico es tratado similarmente.

Esta tesis está estructurada de la siguiente manera. En el capítulo 2 se describirán aspectos generales de la integral de trayectoria de sistemas mecánicos elementales, su aproximación semiclásica y su relación con la función de partición. En el capítulo 3 se describirán aspectos básicos necesarios de la mecánica cuántica polimérica y la forma que adquiere la polimerización en el formalismo de la integral de trayectoria. En el capítulo 4 se estudiará en detalle el problema que surge en la aproximación semiclásica de la función de partición para potenciales semirestringidos en el esquema polimérico. El capítulo 5 discute el modelo con la acción modificada tanto en la cuantización de Schrödinger como en la polimérica. Por último, en el capítulo 6, se presentarán nuestras conclusiones así como posibles líneas de trabajo futuro.

Capítulo 2

Integral de trayectoria y función de partición de sistemas mecánicos

2.1. Propagador e integral de trayectoria

En esta sección se describe la prescripción de la integral de trayectoria de Feynman para el cálculo del propagador de una partícula en un potencial [13, 15].

La formulación de integral de trayectoria de la mecánica cuántica está basada en la noción de un propagador $K(q_f t_f, q_i t_i)$. Dada una función de onda $\psi(q_i, t_i)$ en un tiempo t_i , el propagador da la función de onda correspondiente a un tiempo posterior t_f está dado de la siguiente manera

$$\psi_{fin}(q_f, t_f) = \int_{\mathbb{R}} K(q_f t_f; q_i t_i) \psi_{in}(q_i, t_i) dq_i, \quad q_f, q_i \in \mathbb{R}, \quad t_f > t_i. \quad (2.1)$$

El propagador $K(q_f t_f, q_i t_i)$ contiene la información de la dinámica del sistema. Ahora, de acuerdo a la interpretación usual de la mecánica cuántica, $\psi(q_f, t_f)$ es la amplitud de probabilidad de que la partícula esté en el punto q_f al tiempo t_f . Entonces $K(q_f t_f; q_i t_i)$ es la amplitud de probabilidad de que la partícula pase de una posición en q_i al tiempo t_i a otra posición q_f al tiempo t_f . La correspondiente probabilidad es

$$P(q_f t_f; q_i t_i) = |K(q_f t_f; q_i t_i)|^2. \quad (2.2)$$

Para continuar con el análisis dividamos el intervalo temporal $t_f - t_i$ en dos partes, con t como tiempo intermedio, y q como punto intermedio en el espacio. La aplicación repetida de (2.1) da

$$\psi_{fin}(q_f, t_f) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} K(q_f t_f; qt) K(qt; q_i t_i) \psi(q_i, t_i) dq_i dq, \quad (2.3)$$

de lo cual se sigue que

$$K(q_f t_f; q_i t_i) = \int_{\mathbb{R}} K(q_f t_f; qt) K(qt; q_i t_i) dq. \quad (2.4)$$

Así, la transición de (q_i, t_i) a (q_f, t_f) puede ser considerada como el resultado de la transición de (q_i, t_i) por todos los puntos intermedios disponibles q , que pueden ocurrir al tiempo t , seguidos por la transición de (q, t) a (q_f, t_f) .

Ahora mostraremos que el propagador $K(q_f t_f, q_i t_i)$ puede escribirse como la amplitud de transición $\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle$. Para ver esto hay que resaltar el hecho de que la función de onda $\psi(q, t)$ es

$$\psi(q, t) = \langle q | \psi t \rangle_S, \quad \hat{q} |q\rangle = q |q\rangle \quad (2.5)$$

donde $|\psi t\rangle_S$ se refiere al vector de estado en el esquema de Schrödinger y está relacionado al vector de estado en el esquema de Heisenberg $|\psi\rangle_H$ por ¹

$$|\psi t\rangle_S = e^{\frac{-iHt}{\hbar}} |\psi\rangle_H. \quad (2.6)$$

Dentro del esquema de Heisenberg se tiene que los operadores son dependientes del tiempo. Por lo tanto, el eigenvector de posición evoluciona de la forma

$$|qt\rangle = e^{\frac{iHt}{\hbar}} |q\rangle, \quad (2.7)$$

de tal manera que

$$\psi(q, t) = \langle qt | \psi \rangle_H. \quad (2.8)$$

¹Esta solución es obtenida resolviendo la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle q | \psi t \rangle_S = \hat{H}(\hat{p}, \hat{q}) \langle q | \psi t \rangle_S$ de la manera $i\hbar \int \frac{\partial \psi(q, t)}{\partial t} \frac{\partial t}{\psi(q, t)} = \int \hat{H} \partial t$, lo que deja como resultado $\langle q | \psi t \rangle_S = e^{-i\hat{H}t/\hbar} \langle q | \psi(0) \rangle_S$.

Por la relación de completitud, $\hat{1} = \int_{\mathbb{R}} dq |q\rangle \langle q|$, se puede escribir

$$\langle q_f t_f | \psi \rangle = \int \langle q_f t_f | q_i t_i \rangle \langle q_i t_i | \psi \rangle dq_i, \quad (2.9)$$

que con la ayuda de la ecuación (2.8) es

$$\psi(q_f, t_f) = \int \langle q_f t_f | q_i t_i \rangle \psi(q_i, t_i) dq_i. \quad (2.10)$$

Comparando (2.10) con (2.1) vemos que

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = K(q_f t_f; q_i t_i). \quad (2.11)$$

El propagador $K(q_f t_f, q_i t_i)$ resume la mecánica cuántica del sistema. En la formulación usual de la mecánica cuántica, dada una función de onda inicial, se puede encontrar la función de onda final al resolver la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo. En el formalismo de Feynman, el propagador determina la solución directamente. Además es posible, para sistemas sencillos, resolver el problema de valores propios y llegar a la fórmula espectral. La idea ahora es expresar $\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle$ como una integral de trayectoria.

Realicemos en el intervalo temporal una partición que por simplicidad tendrá asignados puntos separados uniformemente dados por

$$t_n = t_0 + n\epsilon, \quad t_i = t_0, \quad t_f = t_N, \quad (2.12)$$

en donde $t_f - t_i = N\epsilon$. Explotando la propiedad de composición (2.3) o, equivalentemente, insertando en cada uno de los puntos de la partición $n = 1, \dots, N - 1$, un conjunto completo de estados base $|q_n, t_n\rangle$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \langle q_f t_f | q_i t_i \rangle &= \int_{\mathbb{R}} dq_{N-1} \int_{\mathbb{R}} dq_{N-2} \dots \int_{\mathbb{R}} dq_1 \times \\ &\times \langle q_f t_f | q_{N-1} t_{N-1} \rangle \langle q_{N-1} t_{N-1} | q_{N-2} t_{N-2} \rangle \dots \langle q_1 t_1 | q_i t_i \rangle. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Recordemos que los puntos espacio-temporales inicial y final son fijos (q_i, t_i) y (q_f, t_f) . Para cada subintervalo, entre t_{n-1} y t_n , se debe considerar la amplitud de transición correspondiente, es decir, integramos sobre $q_1, q_2, q_3, \dots, q_{N-1}$. Lo anterior

significa que se debe sumar sobre todas las trayectorias posibles en el plano $q - t$ con los puntos extremos fijos.

Bajo la perspectiva de este esquema, la diferencia básica entre la mecánica clásica y la mecánica cuántica radica en el hecho de que en la primera, una sola trayectoria definida en el plano $q - t$ está asociada con el movimiento de la partícula. En cambio en la mecánica cuántica todas las trayectorias posibles contribuyen, incluyendo aquellas que no son relevantes en la mecánica clásica.

De acuerdo con (2.7) cada uno de los elementos de matriz bajo la integral puede ser escrito como

$$\langle q_{n+1}, t_{n+1} | q_n, t_n \rangle = \langle q_{n+1} | e^{-\frac{i\hat{H}(\hat{p}, \hat{q})\epsilon}{\hbar}} | q_n \rangle. \quad (2.14)$$

La descomposición (2.14) se puede calcular explícitamente si las amplitudes $\langle q_{n+1}, t_{n+1} | q_n, t_n \rangle$ se pueden evaluar, lo cual es el caso para ciertos sistemas. Como $\epsilon \rightarrow 0$ es pequeño entonces el operador de evolución temporal puede ser aproximado por los dos primeros términos de su desarrollo en serie de Taylor

$$\langle q_{n+1}, t_{n+1} | q_n, t_n \rangle = \langle q_{n+1} | 1 - \frac{i\epsilon}{\hbar} \hat{H}(\hat{p}, \hat{q}) | q_n \rangle + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (2.15)$$

Para evaluar los elementos de matriz del hamiltoniano en (2.15) insertamos un conjunto completo de estados de momento, esto es

$$\langle q_{n+1} | \hat{H}(\hat{p}, \hat{q}) | q_n \rangle = \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \langle q_{n+1} | p_n \rangle \langle p_n | \hat{H}(\hat{p}, \hat{q}) | q_n \rangle. \quad (2.16)$$

Como \hat{p} y \hat{q} pueden actuar hacia la izquierda o hacia la derecha en sus respectivos estados propios, los elementos de matriz del operador hamiltoniano son reducidos a la función hamiltoniana clásica

$$\langle p_n | \hat{H}(\hat{p}, \hat{q}) | q_n \rangle = \langle p_n | q_n \rangle H(p_n, q_n). \quad (2.17)$$

Este último paso puede presentar ambigüedades: tiene problemas en general si \hat{H} contiene productos mixtos de operadores \hat{p} y \hat{q} , pues estos no conmutan. Entonces (2.17) supone un cierto ordenamiento: los operadores de momento yacen a la

izquierda de los de posición. Esto es arbitrario y podría convenir una prescripción más simétrica, por ejemplo, el *ordenamiento de Weyl*, que promedia sobre todos los posibles ordenamientos con igual peso.

La elección (2.17) para el operador hamiltoniano implica el reemplazo

$$\langle p_n | \hat{H}(\hat{p}, \hat{q}) | q_n \rangle \rightarrow \langle p_n | q_n \rangle H \left(p_n, \frac{1}{2}(q_{n+1} + q_n) \right). \quad (2.18)$$

Usando $\frac{1}{2}(q_{n+1} + q_n) = \bar{q}_n$, y considerando $\langle q | p \rangle = e^{\frac{ipq}{\hbar}}$, se encuentra que la amplitud de transición infinitesimal se convierte en

$$\langle q_{n+1}, t_{n+1} | q_n, t_n \rangle = \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp \left[ip_n \frac{(q_{n+1} - q_n)}{\hbar} \right] \left(1 - iH(p_n, \bar{q}_n) \frac{\epsilon}{\hbar} \right). \quad (2.19)$$

Ahora el paso esencial, y matemáticamente no trivial, es hacer la partición cada vez mas pequeña y tomar al limite $\epsilon \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$. Con esto la amplitud de transición se convierte en

$$\begin{aligned} \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0} \int \prod_{n=1}^{N-1} dq_n \prod_{n=0}^{N-1} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \times \\ &\times \exp \left(\frac{i\epsilon}{\hbar} \sum_{n=0}^{N-1} p_n \frac{q_{n+1} - q_n}{\epsilon} \right) \prod_{n=0}^{N-1} \left(e^{\frac{i\epsilon}{\hbar} H(p_n, \bar{q}_n)} \right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

lo que lleva a

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0} \int \prod_{n=1}^{N-1} dq_n \prod_{n=0}^{N-1} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp \left(\frac{i\epsilon}{\hbar} \sum_{n=0}^{N-1} p_n \frac{q_{n+1} - q_n}{\epsilon} - H(p_n, q_n) \right). \quad (2.21)$$

En el limite $N \rightarrow \infty$ y $\epsilon \rightarrow 0$ los puntos de la partición q_n y p_n están arbitrariamente cercanos entre sí, así como los p_n correspondientes. Consideremos la siguiente notación

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{n=1}^{N-1} dq_n \rightarrow \int \mathcal{D}q' \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{n=0}^{N-1} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \rightarrow \int \mathcal{D}p, \quad (2.22)$$

donde la prima en la medida de la posición nos recuerda que hay una integración menos en q_n con respecto a la del momento p_n . Realizando la sustitución apropiada para el límite continuo

$$\frac{q_{n+1} - q_n}{\epsilon} \rightarrow \dot{q}(t_n) \quad \epsilon \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) \rightarrow \int_t^{t'} d\tau f(\tau), \quad (2.23)$$

llegamos a

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}q' \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} d\tau (p\dot{x} - H(p, q))}. \quad (2.24)$$

La ecuación (2.24) es conocida como *fórmula de Feynman* en el espacio fase. Cuando es viable realizar la integración en momentos (2.24) se convierte en

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}q e^{\frac{iS[q]}{\hbar}}. \quad (2.25)$$

2.2. Ejemplo: Propagador de partícula libre

A continuación se describe un ejemplo simple de aplicación del esquema de la integral de trayectoria. Se calcula el propagador de la partícula libre con el método de Feynman. De hecho, más que reproducir la fórmula de Feynman aquí obtenemos el propagador de forma explícita. En este sistema se tiene un potencial $W(q)$ nulo, entonces se tiene que

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = \left(\frac{2\pi i \hbar \epsilon}{m} \right)^{-\frac{N}{2}} \prod_{n=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} dq_n \exp \left[\frac{im}{2\hbar \epsilon} \sum_{n=0}^{N-1} (q_{n+1} - q_n)^2 \right]. \quad (2.26)$$

Lo anterior considerando que se llevaron a cabo las integrales en la variable de momento, las cuales sólo pueden ser realizadas si el hamiltoniano tiene la forma estandar $H = \frac{p^2}{2m} + V$ [13]. Para evaluar (2.26) es necesario integrar sucesivamente sobre las variables q_1, \dots, q_{N-1} , por ello es conveniente hacer uso de la integral siguiente

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dq_n \exp [-a(q_n - q_{n-1})^2] \exp [-b(q_{n+1} - q_n)^2] = \\ & \int_{-\infty}^{\infty} dq_n \exp \left[-(a+b) \left(q_n - \frac{aq_{n+1} + bq_{n-1}}{a+b} \right)^2 - \frac{ab}{a+b} (q_{n+1} - q_{n-1})^2 \right] = \\ & \exp \left[-\frac{ab}{a+b} (q_{n+1} - q_{n-1})^2 \right] \sqrt{\frac{\pi}{a+b}}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Para la primer integración en $n = 1$ de (2.27) donde sólo entran los factores dependientes de q_1 se tiene que las constantes a y b son ambas iguales a $a = b = -\frac{im}{2\epsilon}$.

Esto lleva a que la integral (2.27) para $n = 1$ esté dada por

$$\frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \exp \left[\frac{im}{2\hbar \epsilon} (q_1 - q_0)^2 \right] \exp \left[\frac{im}{2\hbar \epsilon} (q_2 - q_1)^2 \right] = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar 2\epsilon}} \exp \left[\frac{im}{2\epsilon 2\hbar} (q_2 - q_0)^2 \right] \quad (2.28)$$

La expresión (2.28) tiene la misma forma que (2.26) excepto que se reemplaza $\epsilon \rightarrow 2\epsilon$.

El procedimiento se puede repetir para (2.27) con $n = 2$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar 2\epsilon}} \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} dq_2 \exp \left[\frac{im}{2\hbar 2\epsilon} (q_2 - q_0)^2 \right] \exp \left[\frac{im}{2\hbar \epsilon} (q_3 - q_2)^2 \right] = \\ \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar 3\epsilon}} \exp \left[\frac{im}{\epsilon \hbar 3,2} (q_3 - q_0)^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Estudiando la recurrencia de las últimas dos integrales se puede observar que cuando el número de integrales es n el factor que va multiplicado a ϵ es $n + 1$. Entonces después de $N - 1$ integraciones se tiene que

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar N \epsilon}} e^{\frac{im}{N \epsilon 2\hbar} (q_N - q_0)^2}, \quad (2.30)$$

que es igual a

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t_f - t_i)}} e^{\frac{im}{(t_f - t_i) 2\hbar} (q_f - q_i)^2}. \quad (2.31)$$

Este es el propagador de la partícula libre no relativista. En general, es conveniente usar un esquema de aproximación para el cálculo de los propagadores, en particular para sistemas más complicados. En la siguiente sección consideramos unas de estas aproximaciones.

2.3. Relación de la función de partición con la integral de trayectoria de un sistema mecánico

En mecánica estadística cuántica, se tiene que la función de partición $Z(T)$ está dada por:

$$Z(T) = Tr \left(\exp \left(-\frac{\hat{H}}{K_B T} \right) \right), \quad \hat{H} = \hat{H}(\hat{q}, \hat{p}), \quad (2.32)$$

donde \hat{H} es el hamiltoniano del sistema, K_B la constante de Boltzmann y T la temperatura.

La función de partición cuántica, $Z_{QM}(t_b, t_a)$, está relacionada de manera muy sencilla con el operador de evolución de la mecánica cuántica. Para entender mejor esta relación se define a la traza de este operador como la función de partición de mecánica cuántica:

$$Z_{QM}(t_b, t_a) := Tr \left(\hat{U}(t_b, t_a) \right) = Tr \left(e^{-\frac{i(t_b-t_a)\hat{H}}{\hbar}} \right) = \int dq \langle q, t_b | q, t_a \rangle. \quad (2.33)$$

La función de partición estadística-cuántica $Z(T)$ puede ser obtenida de la mecánico-cuántica al continuar analíticamente el intervalo $t_b - t_a$ de la siguiente manera

$$t_b - t_a = \frac{-i\hbar}{K_B T} =: -i\hbar\beta. \quad (2.34)$$

Esta simple relación formal muestra que la traza del operador de evolución contiene toda la información de las propiedades termodinámicas en equilibrio de un sistema cuántico. Evaluando la traza en los vectores propios de la energía $|n\rangle$ se encuentra

$$Z(t_f - t_i) = \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar}(t_f-t_i)E_n}. \quad (2.35)$$

Ahora, evaluando la traza en los vectores propios de la posición $|q\rangle$ obtenemos

$$Z(t_f, t_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle q | \hat{U}(t_f, t_i) | q \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dq K(q, q, ; t_f - t_i). \quad (2.36)$$

Esto significa que ahora en la ecuación discretizada (2.21) para la amplitud de transición, el numero de integrales en el momento y en la posición son el mismo. Por otro lado, esto mismo significa que en el límite continuo se está integrando no en todas las trayectorias, sino en todas las trayectorias cerradas en q . De esta manera tenemos entonces que la función de partición puede ser expresada como

$$Z(t_f, t_i) = \int_{q(t_f)=q(t_i)} \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar}S[q]}. \quad (2.37)$$

En el capítulo 4 haremos uso de la aproximación semiclásica, que expondremos en el siguiente capítulo, en la función de partición (2.37) para el caso de una partícula en un potencial cuadrático inverso en la posición. Esto tanto en la cuantización de Schrödinger como en la polimérica.

2.4. Aproximación semiclásica

En esta sección se describirá la aproximación semiclásica de un propagador en la perspectiva de la integral de trayectoria de Feynman.

Consideramos la amplitud de transición

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = \int \mathcal{D}q e^{\frac{iS(q, \dot{q})}{\hbar}}, \quad (2.38)$$

y que la constante de Planck \hbar es un parámetro muy pequeño comparado con los valores típicos de la acción. Con \hbar apareciendo en el denominador del argumento de una exponente imaginaria se ve que en el límite $\hbar \rightarrow 0$, la integral de trayectoria se convierte en una suma de términos que oscilan rápidamente y en esta aproximación se cancelarán muchos, unos con otros. Este fenómeno es conocido de integrales ordinarias

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{\sqrt{2\pi i \hbar}} e^{i \frac{a(q)}{\hbar}}, \quad (2.39)$$

las cuales se sabe que convergen a cero para $\hbar \rightarrow 0$. El comportamiento preciso de (2.39) en este límite está determinado por la aproximación semiclásica.

En el límite $\hbar \rightarrow 0$, la integral (2.39) es dominada por el extremo de la función $a(q)$, específicamente, por el valor absoluto más pequeño al que se etiqueta como q_{cl} , donde

$$a'(q_{cl}) = 0. \quad (2.40)$$

En la integral de trayectoria, el punto q_{cl} corresponde a la órbita clásica para la cual la derivada funcional se anula. Para q cerca del extremo, las oscilaciones del integrando son muy débiles. El comportamiento oscilatorio dominante está dado por

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{\sqrt{2\pi i \hbar}} e^{\frac{ia(q)}{\hbar}} \sim const \times e^{\frac{ia(q_{cl})}{\hbar}}, \quad (2.41)$$

con una constante de proporcionalidad independiente de \hbar . Esto puede ser calculado desarrollando $a(q)$ alrededor de su extremo

$$a(x) = a(q_{cl}) + a'(q_{cl})\delta q + \frac{1}{2}a''(q_{cl})(\delta q)^2 + \frac{1}{3!}a^{(3)}(q_{cl})(\delta q)^3 + \dots, \quad (2.42)$$

donde $\delta q \equiv q - q_{cl}$ es la desviación respecto a q_{cl} y δq se puede ver como una fluctuación cuántica. Por la ecuación (2.40) el término lineal δq no contribuye al desarrollo (2.42). Si $a''(q_{cl}) \neq 0$ y las derivadas de orden superior son despreciables, la integral es una integral de tipo Fresnel y puede ser llevada a cabo dando

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{\sqrt{2\pi i\hbar}} e^{\frac{ia(q)}{\hbar}} \rightarrow e^{\frac{ia(q_{cl})}{\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\delta q}{\sqrt{2\pi i\hbar}} e^{\frac{ia''(q_{cl})(\delta q)^2}{2\hbar}} = \frac{e^{\frac{ia(q_{cl})}{\hbar}}}{\sqrt{a''(q_{cl})}}. \quad (2.43)$$

El lado derecho de la ecuación es la aproximación punto silla de la integral (2.39).

Capítulo 3

Mecánica cuántica polimérica

3.1. Álgebra de Weyl y representación polimérica

En este capítulo revisamos la cuantización polimérica [6, 7] que mimifica algunos aspectos de la cuantización por lazos de la relatividad general. En la primera sección introducimos los elementos básicos necesarios en el esquema hamiltoniano, mientras que en la segunda extendemos las ideas al esquema de integral de trayectoria .

Una manera de entender cómo surge la representación polimérica, es trabajando con las versiones exponenciadas de los operadores de posición y momento, \hat{q} y \hat{p} ,

$$\hat{U}_\mu := e^{i\mu\hat{q}} \quad \hat{V}_\lambda := e^{i\lambda\hat{p}}. \quad (3.1)$$

donde λ y μ son parámetros reales. En el esquema de Schrödinger la acción de los operadores \hat{U}_μ y \hat{V}_λ en un estado $\psi(q)$ está dada por

$$\hat{U}_\mu\psi(q) = e^{i\mu q}\psi(q) \quad \hat{V}_\lambda\psi(q) = \psi(q + \lambda). \quad (3.2)$$

A diferencia de \hat{q} y \hat{p} , \hat{U}_μ y \hat{V}_λ son operadores bien definidos en todo el espacio de Hilbert de la representación de Schrödinger $\mathcal{H}_{Sch} = L^2(dq, \mathbb{R})$, al actuar sobre cualquier función de cuadrado integrable y dando lugar a otra función de cuadrado integrable.

Actuando en un estado arbitrario se puede ver que \hat{U}_μ y \hat{V}_λ satisfacen las reglas de composición:

$$\hat{U}_{\mu_1}\hat{U}_{\mu_2} = \hat{U}_{\mu_1+\mu_2} \quad \hat{V}_{\lambda_1}\hat{V}_{\lambda_2} = \hat{V}_{\lambda_1+\lambda_2} \quad \hat{U}_\mu\hat{V}_\lambda = e^{-i\mu\lambda}\hat{V}_\lambda\hat{U}_\mu, \quad (3.3)$$

y las condiciones de realidad

$$\hat{U}_\mu^\dagger = \hat{U}_{-\mu} \quad \hat{V}_\lambda^\dagger = \hat{V}_{-\lambda}. \quad (3.4)$$

En la representación de Schrödinger, estas relaciones son equivalentes a las relaciones canónicas de conmutación, y definen el álgebra de Weyl. De acuerdo con el teorema de Stone-Von Neuman [18] todas las representaciones que cumplen ciertas condiciones de regularidad e irreducibilidad son unitariamente equivalentes.

Sin embargo, motivados por la gravedad cuántica por lazos [1], se puede optar por relajar uno o más de los requerimientos del teorema de unicidad de Stone-Von Neuman y aun así contar con un espacio de Hilbert. Esto es justo lo que sucede en la descripción polimérica.

La representación polimérica del álgebra de Weyl no es equivalente a la representación de Schrödinger ya que viola una de las condiciones del teorema de Stone-von Neumann. Específicamente el operador \hat{V}_λ no es débilmente continuo en λ , como se muestra mas adelante, debido a la estructura discreta del espacio de configuración. Lo anterior implica que no existe un operador auto-adjunto \hat{p} que cumpla $\hat{V}_\lambda := e^{\frac{i}{\hbar}\lambda\hat{p}}$. Es decir, el operador \hat{V}_λ no está relacionado con un operador hermitiano como un generador infinitesimal en la representación polimérica. Esta última relación es válida sólo en un espacio de configuración continuo con $\hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dq}$.

En la representación polimérica el espacio de Hilbert \mathcal{H}_{poly} no es separable. Éste es un espacio con bases ortonormales no numerables caracterizadas por kets abstractos $|q_j\rangle$, etiquetados por números reales q_j y tal que su producto interno está definido como

$$\langle q_i | q_j \rangle = \delta_{q_i, q_j} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{T}}^{\frac{\pi\hbar}{T}} dp_i e^{\frac{i}{\hbar}p_i(q_i - q_j)}. \quad (3.5)$$

Los operadores básicos \hat{U}_μ y \hat{V}_λ actúan en los vectores base como:

$$\hat{U}_\mu |q_j\rangle = e^{i\mu q_j} |q_j\rangle \quad \hat{V}_\lambda |q_j\rangle = |q_j - \lambda\rangle. \quad (3.6)$$

Usando (3.6) podemos ver que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \langle q | \hat{V}_\lambda | q \rangle = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \langle q | q - \lambda \rangle = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \delta_{q, q-\lambda} = 0. \quad (3.7)$$

Pero, por otro lado, tenemos que

$$\hat{V}_{\lambda=0} = \hat{1} \rightarrow \langle q | \hat{V}_{\lambda=0} | q \rangle = \delta_{q,q} = 1, \quad (3.8)$$

y comparando (3.8) con (3.7) vemos la falta de continuidad del operador \hat{V}_λ .

En analogía con (3.2), \hat{U}_μ y \hat{V}_λ son operadores unitarios bien definidos en todo \mathcal{H}_{poli} y de hecho satisfacen (3.3). El operador de posición \hat{q} actúa por multiplicación como en el caso de Schrödinger. Sin embargo, como ya se mencionó anteriormente, una diferencia sensible es el hecho de que en el espacio de Hilbert polimérico \mathcal{H}_{poli} no existe un operador hermitiano \hat{p} tal que (3.1) sea satisfecha, es decir, el operador de momento \hat{p} no está definido en \mathcal{H}_{poli} .

Para definir un operador que se asemeje al generador de traslaciones en la representación polimérica uno se puede apoyar en la descripción clásica del sistema. Clásicamente $V_\lambda = e^{\frac{i}{\hbar}\lambda p}$, y considerando $\frac{\lambda}{\hbar}p \ll 1$ se propone

$$k_\lambda := \frac{\hbar}{\lambda} \sin\left(\frac{\lambda p}{\hbar}\right) \sim p + \mathcal{O}(p^3), \quad (3.9)$$

y de esta manera se define un operador como de momento

$$\hat{k}_\lambda := \frac{\hbar}{\lambda} \frac{\hat{V}_\lambda - \hat{V}_\lambda^\dagger}{2i}. \quad (3.10)$$

Ahora, considerando que

$$e^{\frac{i\lambda p}{\hbar}} + e^{-\frac{i\lambda p}{\hbar}} \sim 2 - \frac{\lambda^2 p^2}{\hbar^2}, \quad (3.11)$$

el reemplazo del operador de momento al cuadrado está dado por

$$\hat{K}_\lambda = \frac{\hbar^2}{\lambda^2} \left(2 - \hat{V}_\lambda - \hat{V}_{-\lambda}\right). \quad (3.12)$$

Para completar nuestra discusión consideremos el caso de la partícula libre. Mientras que en la cuantización de Schrödinger el hamiltoniano es

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m}, \quad (3.13)$$

en el caso polimérico tenemos

$$\hat{H}_{poli,0} = \frac{\hbar^2}{2m\lambda^2}(2 - \hat{V}_\lambda - \hat{V}_{-\lambda}) := \frac{1}{2m}\hat{K}_\lambda. \quad (3.14)$$

La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

$$\langle q_j | \hat{H}_{poli,0} | \psi \rangle = E\psi(q_j) \quad (3.15)$$

toma la forma de una ecuación en diferencias

$$\frac{\hbar^2}{2m\lambda^2} [2\psi(q_j) - \psi(q_j + \lambda) - \psi(q_j - \lambda)] = E\psi(q_j). \quad (3.16)$$

Esta última ecuación sugiere una descomposición del espacio de Hilbert polimérico en sectores superselectos

$$\mathcal{H}_{poli} = \bigoplus_{0 < r \leq \lambda} \mathcal{H}_r, \quad (3.17)$$

donde \mathcal{H}_r está formado por los vectores base correspondientes a una red regular con paso μ_0 y que pasa por el punto situado a una distancia r desde el origen. La presencia del parámetro continuo r hace manifiesta la no separabilidad de \mathcal{H}_{poli} , no obstante cada \mathcal{H}_r es separable, pues tiene asociada una base numerable.

Nos restringimos ahora al caso \mathcal{H}_0 que corresponde a $r = 0$, y que contiene como uno de sus elementos al origen, $|q = 0\rangle$. La ecuación (3.16) está ahora definida sobre una red regular y está dada por

$$2\psi(j) - \psi(j - 1) - \psi(j + 1) = \frac{2m\mu_0^2 E}{\hbar^2} \psi(j) \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (3.18)$$

donde $\psi(j) := \psi(q_j = j\mu_0)$. La solución de esta ecuación fue estudiada en [7]. A saber, el espectro y soluciones respectivas son

$$E = \frac{\hbar^2}{m\lambda^2} [1 - \cos(k\lambda)] \quad (3.19)$$

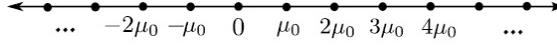


Figura 3.1: Representación del espacio de Hilbert polimérico $\{|q_j\rangle = |j\mu_0\rangle, j \in Z\}$.

y

$$\psi_E(j) = a_1 e^{iq_j k} + a_2 e^{-iq_j k}. \quad (3.20)$$

En este punto conviene considerar la relación de completéz asociada con el espacio de Hilbert \mathcal{H}_0 . Esta será útil más adelante también para implementar la integral de trayectoria polimérica.

Recordemos que por el carácter completo de la base se cumple lo siguiente

$$|\psi\rangle = \sum_{k \in Z} a_k |q_k\rangle. \quad (3.21)$$

Usando la condición de ortonormalidad de la base

$$\langle q_l | \psi \rangle = \sum_{k \in Z} a_k \langle q_l | q_k \rangle = \sum_{k \in Z} a_k \delta_{lk} = a_l. \quad (3.22)$$

Insertando (3.22) en (3.21) vemos que

$$|\psi\rangle = \sum_{k \in Z} |q_k\rangle \langle q_k | \psi \rangle \quad (3.23)$$

de donde obtenemos la relación de completéz polimérica en base de coordenadas

$$\sum_{k \in Z} |q_k\rangle \langle q_k| = \hat{1}. \quad (3.24)$$

Es natural ahora plantearse la forma de la relación de completéz en el análogo de la base de momentos, es decir, aquella donde

$$\hat{V}_\lambda |p\rangle = e^{\frac{i\lambda p}{\hbar}} |p\rangle. \quad (3.25)$$

Para tal fin notamos que proyectando (3.21) en $\langle p|$ se llega a

$$\langle p | \psi \rangle =: \psi(p) = \sum_{k \in Z} a_k \langle p | q_k \rangle =: \sum_{k \in Z} a_k \phi_k(p). \quad (3.26)$$

Para obtener $\phi_k(p)$ usamos el siguiente argumento,

$$\langle q_k | \hat{V}_\lambda | p \rangle = e^{i\frac{\lambda p}{\hbar}} \langle q_k | p \rangle \quad (3.27)$$

$$\langle q_k - \lambda | p \rangle = e^{i\frac{\lambda p}{\hbar}} \langle q_k | p \rangle \quad (3.28)$$

$$\phi_{k-1}(p) = e^{i\frac{\lambda p}{\hbar}} \phi_k(p). \quad (3.29)$$

La solución de (3.29) toma la forma

$$\phi_k(p) = A e^{-i\frac{q_k p}{\hbar}}, \quad (3.30)$$

con A una constante de normalización. Las funciones (3.30) tienen periodo $\frac{2\pi\hbar}{\lambda}$ y así entonces los estados $\psi(p)$ como podemos ver de (3.26). Elegiremos el intervalo $-\frac{\pi\hbar}{\lambda} \leq p \leq \frac{\pi\hbar}{\lambda}$, de modo que para normalizar (3.30) requerimos que

$$\delta_{kl} = \langle q_k | q_l \rangle = \int_{-\frac{\pi\hbar}{\lambda}}^{\frac{\pi\hbar}{\lambda}} dp \phi_k^*(p) \phi_l(p) = |A|^2 \int_{-\frac{\pi\hbar}{\lambda}}^{\frac{\pi\hbar}{\lambda}} dp e^{i(k-l)\lambda p/\hbar} = |A|^2 \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \delta_{kl}. \quad (3.31)$$

Esto nos permite definir

$$A = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi\hbar}}. \quad (3.32)$$

A la luz de (3.21) y (3.26) tenemos que

$$|\psi\rangle = \int_{-\frac{\pi\hbar}{\lambda}}^{\frac{\pi\hbar}{\lambda}} dp b(p) |p\rangle, \quad (3.33)$$

$$b(p) = \langle p | \psi \rangle. \quad (3.34)$$

Entonces

$$|\psi\rangle = \int_{-\frac{\pi\hbar}{\lambda}}^{\frac{\pi\hbar}{\lambda}} dp |p\rangle \langle p | \psi \rangle, \quad (3.35)$$

y de esta manera la relación de completitud en base de momentos es

$$\int_{-\frac{\pi\hbar}{\lambda}}^{\frac{\pi\hbar}{\lambda}} dp |p\rangle \langle p| = \hat{1}. \quad (3.36)$$

Tenemos pues que el sector separable de $\mathcal{H}_{poli,0}$ la representación de coordenadas tiene las siguientes características:

- la acción del operador de posición está dada por multiplicación $\hat{U}_\lambda |q_j\rangle = e^{i\lambda q_j} |q_j\rangle$,
- el operador \hat{V}_λ actúa por traslaciones como $\hat{V}_\lambda |q_j\rangle = |q_j - \lambda\rangle$ y no existe \hat{p} tal que $\hat{V}_\lambda := e^{i\lambda\hat{p}}$.
- se tiene un producto interno definido por $\langle q_i | q_j \rangle = \delta_{q_i, q_j}$.
- la posición está discretizada, $q_j = j\lambda$, $j \in \mathbb{Z}$.
- la variable tipo momento está acotada: si $\hat{V}_\lambda |p\rangle = e^{i\lambda p/\hbar} |p\rangle$, $-\frac{\pi\hbar}{\lambda} \leq p \leq \frac{\pi\hbar}{\lambda}$.

Bajo un análisis similar al anterior, se puede ver que en la representación polimérica de momentos se tiene que:

- el operador \hat{V}_λ actúa por multiplicación $\hat{V}_\lambda |p_j\rangle = e^{i\lambda p} |p_j\rangle$,
- la acción del operador \hat{U}_{p_0} está dado por $\hat{U}_{p_0} |p_j\rangle = |p_j - p_0\rangle$ y no existe \hat{q} .
- se tiene un producto interno definido por $\langle p_i | p_j \rangle = \delta_{p_i, p_j}$.

En este caso

- el momento está discretizado, $p_j = jp_0$, $j \in \mathbb{Z}$
- la variable análoga a la posición está acotada: si $\hat{U}_{p_0} |q\rangle = e^{ip_0 q/\hbar} |q\rangle$, $-\frac{\pi\hbar}{p_0} \leq q \leq \frac{\pi\hbar}{p_0}$.

Cabe mencionar que a diferencia del esquema de cuantización de Schrödinger, donde la formulación de momentos y posiciones están relacionadas de manera sencilla por una transformación de Fourier, en el esquema de cuantización polimérico, las formulaciones de posiciones y momentos no son equivalentes [19].

3.2. Integral de trayectoria polimérica para la partícula libre

Pasamos ahora a formular el esquema de cuantización polimérico en la integral de trayectoria, usaremos por simplicidad el caso de la partícula libre. Consideraremos una partición del intervalo $t_f - t_i$ e introduciremos entre cada punto común entre subintervalos, $[t_n, t_{n-1}]$ un relación de completez $\sum_n |q_n\rangle \langle q_n| = \hat{1}$. La amplitud de transición para la partícula libre polimérica en representación de coordenadas toma la forma

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0} \left(\prod_{n=1}^{N-1} \sum_{q_n} \right) \left(\prod_{n=1}^N \langle q_n, t_n | q_{n-1}, t_{n-1} \rangle \right), \quad (3.37)$$

donde

$$\langle q_n, t_n | q_{n-1}, t_{n-1} \rangle = \langle q_n | e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon \hat{H}_{poli,0}} | q_{n-1} \rangle \quad (3.38)$$

y

$$\hat{H}_{poli,0} = \frac{\hbar^2}{2m\mu_0^2} \left(2 - \hat{V}_{\mu_0} - \hat{V}_{\mu_0} \right). \quad (3.39)$$

Haciendo uso de la cinemática polimérica se obtiene

$$\langle q_n, t_n | q_{n-1}, t_{n-1} \rangle = \frac{\mu_0}{2\pi\hbar} \int_{\frac{-\pi\hbar}{\mu_0}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu_0}} dp_n e^{\frac{i}{\hbar} p_n (q_n - q_{n-1}) - \frac{2i\epsilon\hbar}{m\mu_0^2} \sin^2 \left[\frac{\mu_0 p_n}{\hbar} \right]}. \quad (3.40)$$

La amplitud (3.37) se convierte en

$$\begin{aligned} \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0} \left(\prod_{n=1}^{N-1} \sum_{q_n} \right) \left(\prod_{n=1}^N \frac{\mu_0}{2\pi\hbar} \int_{\frac{-\pi\hbar}{\mu_0}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu_0}} dp_n \right) e^{\sum_{n=1}^N \frac{i}{\hbar} p_n (q_n - q_{n-1}) - \frac{2i\epsilon\hbar}{m\mu_0^2} \sin^2 \left[\frac{\mu_0 p_n}{\hbar} \right]} \\ &= \int \mathcal{D}'q \mathcal{D}p \quad e^{\frac{i}{\hbar} S_{ef}}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Aquí para llegar a la acción efectiva hay algunas sutilezas debido a la naturaleza discreta de q . La primera, es que en el límite de $N \rightarrow \infty$ el término $\frac{q_n - q_{n-1}}{\epsilon}$ no se

puede interpretar como una derivada de la posición respecto al tiempo pues los q_n son discretos, para esto reescribamos la suma que aparece en (3.41)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^N p_n \frac{q_n - q_{n-1}}{\epsilon} &= \frac{1}{\epsilon} \left(\sum_{n=1}^N p_n q_n - \sum_{n=1}^N p_n q_{n-1} \right) \\
&= \frac{1}{\epsilon} \left(\sum_{n=1}^N p_n q_n - \sum_{m=0}^{N-1} p_{m+1} q_m \right) \\
&= \frac{1}{\epsilon} \left[\sum_{n=1}^{N-1} p_n q_n + p_N q_N - \sum_{m=1}^{N-1} p_{m+1} q_m - q_1 q_0 \right] \\
&= \frac{1}{\epsilon} \left[\sum_{n=1}^{N-1} p_n q_n - \sum_{n=1}^{N-1} p_{n+1} q_n + p_N q_N - p_1 q_0 \right], \quad (3.42)
\end{aligned}$$

con esto (3.41) queda como

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\prod_{n=1}^{N-1} \sum_{q_n} \right) \left(\prod_{n=1}^N \frac{\mu_0}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu_0}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu_0}} dp_n \right) e^{\sum_{n=1}^{N-1} -\frac{i}{\hbar} [(p_{n+1} - p_n) q_n] + p_N q_N - p_1 q_0 - \frac{2i\epsilon\hbar}{m\mu_0^2} \sin^2 \left[\frac{\mu_0 p_n}{\hbar} \right]}. \quad (3.43)$$

Para poder pasar de una variable discreta q_j a una variable continua q en la integral de trayectoria, usamos la identidad [14, 20]

$$\sum_{q_j} \int_0^{2\pi} dp f(p, q_j) e^{iq_j p} = \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dp f(p, q) e^{iqp}. \quad (3.44)$$

La ecuación (3.44) es valida para cualquier función continua $f(p, q)$ con un periodo 2π y convierte la suma discreta sobre j a una integral continua en q . Con lo anterior (3.43) queda como

$$\begin{aligned}
\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0} \left(\prod_{n=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} dq_n \right) \left(\prod_{n=1}^{N-1} \frac{\mu_0}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{\pi\hbar}{\mu_0}}^{\frac{\pi\hbar}{\mu_0}} dp_N \int_{-\infty}^{\infty} dp_n \right) \quad (3.45) \\
&\times e^{\sum_{n=1}^{N-1} -\frac{i}{\hbar} [(p_{n+1} - p_n) q_n] + p_N q_N - p_1 q_0 - \frac{2i\epsilon\hbar}{m\mu_0^2} \sin^2 \left[\frac{\mu_0 p_n}{\hbar} \right]}. \quad (3.46)
\end{aligned}$$

De esta manera tenemos una integral de trayectoria habitual y en el límite continuo obtenemos la acción efectiva

$$S_{ef} = \int dt \left(p\dot{q} - \frac{\hbar^2}{2m\mu_0^2} \sin^2 \left[\frac{p\mu_0}{\hbar} \right] \right). \quad (3.47)$$

Si se compara (3.47) con la acción clásica

$$S_{cl} = \int dt \left(p\dot{q} - \frac{p^2}{2m} \right), \quad (3.48)$$

se tiene que la integral de trayectoria polimérica conlleva al cambio

$$p \rightarrow \frac{\hbar}{\mu_0} \sin \left[\frac{p\mu_0}{\hbar} \right], \quad (3.49)$$

en la acción efectiva, donde μ_0 es el parámetro asociado con el carácter discreto de la cuantización polimérica.

Si se lleva a cabo un procedimiento similar en la formulación de momentos para un hamiltoniano, por ejemplo, del tipo armónico $\hat{H}_{poli} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + k\frac{\hbar^2}{p_0^2}(2 - \hat{U}_{p_0} - \hat{U}_{-p_0})$, sucederá algo análogo en la acción efectiva salvo que esta vez la variable fundamental que se modifica es evidentemente la posición, es decir,

$$q \rightarrow \frac{\hbar}{p_0} \sin \left[\frac{qp_0}{\hbar} \right]. \quad (3.50)$$

Donde p_0 es el parámetro asociado a la discretez del momento. Entonces el hamiltoniano efectivo será

$$H_{ef} = \frac{p^2}{2m} + \frac{k\hbar^2}{p_0^2} \sin^2 \left(\frac{qp_0}{\hbar} \right). \quad (3.51)$$

Tendremos oportunidad en el siguiente capítulo de explorar un sistema similar a este.

Capítulo 4

Función de partición semiclásica de una partícula en un potencial cuadrático inverso en la posición

En este capítulo abordamos primero las dificultades de la implementación de las condiciones de frontera para el potencial cuadrático inverso en la posición en el marco de la aproximación semiclásica de la correspondiente función de partición. Enseguida proponemos una construcción de la acción efectiva para finalmente reanalizar las dificultades mencionadas, ahora en el contexto polimérico.

4.1. Condiciones de frontera y aproximación semiclásica

En esta sección describimos la aproximación semiclásica de la función de partición de una partícula sujeta a un potencial cuadrático inverso en la posición cuantizado a la Schrödinger [10]. Consideremos el hamiltoniano,

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + W(q), \quad W(q) = \frac{k}{q^2} \quad (4.1)$$

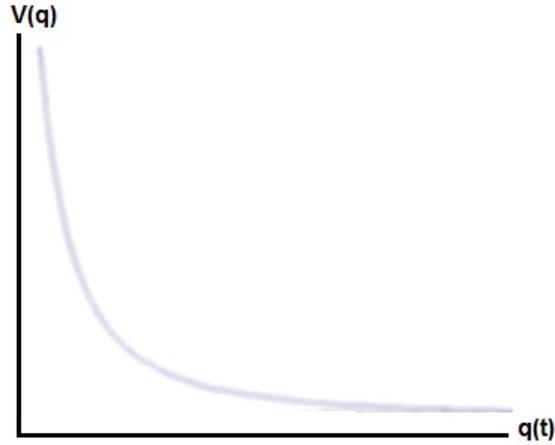


Figura 4.1: Potencial semirestringido $W = \frac{k}{q^2}$.

donde q está restringida a valores positivos y k es una constante. Para q pequeña el hamiltoniano crece indefinidamente. Si q es grande, el potencial es despreciable y la dinámica asintótica básicamente es propagación libre. Dado el hamiltoniano (4.1) la función de partición (2.37) toma la forma

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}q e^{iS[q]/\hbar}, \quad (4.2)$$

siendo S la acción

$$S[q] = \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\frac{\dot{q}^2}{2} - \frac{k}{q^2} \right). \quad (4.3)$$

Haciendo una rotación de wick de la forma

$$t \rightarrow -it,$$

tenemos que

$$S[q] = i \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\frac{\dot{q}^2}{2} + \frac{k}{q^2} \right). \quad (4.4)$$

Entonces la función de partición euclidiana se ve como

$$\mathcal{Z}_E = \int \mathcal{D}q e^{-\frac{1}{\hbar}I[q]}, \quad (4.5)$$

siendo $I[q]$ la acción euclidiana del sistema, dada por

$$I[q] = \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{k}{q^2} \right). \quad (4.6)$$

El caso de interés en el presente trabajo es el que considera el límite $t_f \rightarrow \infty$, el cual implica que $q|_{t=t_f} \rightarrow \infty$ es la condición de frontera asintótica apropiada. Para el tiempo inicial se usa el valor cero sin pérdida de generalidad, es decir, $t_i = 0$.

La función de partición euclidiana (4.5) involucra contribuciones de todas las trayectorias consistentes con las condiciones de frontera. Pasamos ahora a la aproximación semiclásica de (4.5). Para esto se considera el desarrollo semiclásico de (4.6)

$$I[q_{cl} + \delta q] = I[q_{cl}] + I'[q_{cl}]\delta q + \mathcal{O}(\delta q^2), \quad (4.7)$$

que lleva, con $I'[q_{cl}] = 0$, a

$$\mathcal{Z}_E \approx \exp\left(-\frac{1}{\hbar}I[q_{cl}]\right) \int \mathcal{D}\delta q \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\mathcal{O}(\delta q^2)\right). \quad (4.8)$$

La aproximación semiclásica (4.5) está bien definida sólo si la acción evaluada en las soluciones clásicas es acotada $I[q_{cl}] < \infty$ y si la primera variación de la acción se anula al ser evaluada en las soluciones clásicas, $\delta I[q_{cl}] = 0$, para todas las configuraciones que preservan las condiciones de frontera. Ninguna de estas dos condiciones se cumplen para (4.8) como se verá ahora.

La acción evaluada en las soluciones clásicas diverge porque asintóticamente la propagación es libre, es decir, cuando $t_f \rightarrow \infty$. Desarrollando explícitamente la acción (4.6) evaluada en las soluciones clásicas se obtiene

$$I[q_{cl}] = \int_{t_i=0}^{t_f \rightarrow \infty} \frac{m}{2} \dot{q}_{cl} \dot{q}_{cl} dt + \int_{t_i=0}^{t_f \rightarrow \infty} \frac{k}{q_{cl}^2} dt, \quad (4.9)$$

que implica

$$I[q_{cl}] = \frac{m}{2} q_{cl} \dot{q}_{cl} \Big|_0^\infty - \frac{m}{2} \int_0^\infty q_{cl} \ddot{q}_{cl} dt + \int_0^\infty \frac{k}{q_{cl}^2} dt. \quad (4.10)$$

Considerando el cambio de signo generado por la rotación de Wick la ecuación de

movimiento correspondiente queda como

$$\begin{aligned} m\ddot{q} &= \frac{\partial W}{\partial q} \\ &= -\frac{2k}{q^3} \end{aligned} \quad (4.11)$$

el segundo y tercer términos de (4.10) se suman de modo que el remanente toma la forma

$$I[q_{cl}] = \frac{m}{2} q_{cl} \dot{q}_{cl} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{2k}{q_{cl}^2} dt. \quad (4.12)$$

Es claro que la ecuación (4.12) diverge ya que $t_f \rightarrow \infty$ implica $q_{cl}(t_f) \rightarrow \infty$ y $\dot{q}_{cl} = cte.$, mientras que el segundo término

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{1}{q^2} dt = -\frac{\sqrt{m} \text{ArcTanh} \left[\frac{\sqrt{m} C_1 (t+C_2)}{\sqrt{2k}} \right]}{\sqrt{2k}} \Big|_{t_i}^{t_f} < \infty. \quad (4.13)$$

En cuanto al segundo problema, se tiene que la primera variación de la acción evaluada en las soluciones clásicas está dada por

$$\begin{aligned} \delta I [q_{cl}] &= \int_0^\infty \delta L(q, \dot{q}) dt, \\ &= \int_0^\infty dt \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right] = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_0^\infty + \int_0^\infty dt \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] \delta q \\ &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_0^\infty + \int_0^\infty dt (EDM) \delta q = (m\dot{q} \delta q)_{t_f \rightarrow \infty} - (m\dot{q} \delta q)_{t_i=0}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

El segundo término de la ecuación (4.14) no contribuye porque la trayectoria clásica satisface las ecuaciones de movimiento. El último término en (4.14) estará sujeto a $\delta q |_{t_i=0} = 0$, i.e variaciones nulas y es aceptable.

El caso de interés surge con $\delta q |_{t_f \rightarrow \infty} \neq 0$. Esencialmente, como $\delta q = q - q_{cl}$, ambas, q y q_{cl} , crecen sin límite en $t_f \rightarrow \infty$ pero su diferencia puede ser finita; un reminiscente de la indeterminación $a = \infty - \infty$, $a < \infty$. Esta es obviamente una condición de frontera admisible. Por esta razón tenemos que

$$\delta I [q_{cl}] = (m\dot{q}_{cl} \delta q) |_{t_f \rightarrow \infty} \neq 0. \quad (4.15)$$

Esto muestra que la primera variación de la acción en la aproximación semiclásica de la función de partición para el potencial semirestringido $W(q) = \frac{k}{q^2}$ no se anula.

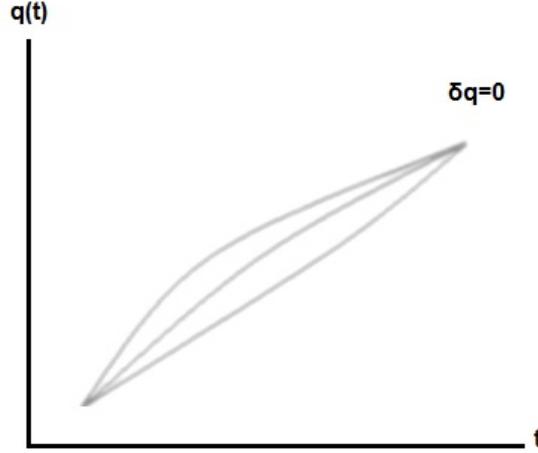


Figura 4.2: En la integral de trayectoria usual las condiciones de frontera estándares implican la misma variación final e inicial, $\delta q|_{t_f} = \delta q|_{t_i} = 0$.

4.2. Deducción de la acción efectiva polimérica

Antes de llevar a cabo un estudio del modelo mecánico presentado desde la perspectiva de la cuantización polimérica, veamos cómo se puede obtener la acción efectiva polimérica de este modelo.

Aquí llevaremos a cabo el desarrollo de la fórmula de Feynman, en la representación polimérica de momentos. En este caso los operadores básicos son

$$\hat{V}_\lambda |p_j\rangle := e^{i\lambda p_j} |p_j\rangle \quad \hat{U}_{p_0} |p_j\rangle = |p_j - p_0\rangle. \quad (4.16)$$

De acuerdo con nuestra discusión en la sección 3.1, el momento está discretizado en pasos de p_0 , con $p_j = jp_0$, $j \in Z$, mientras que la posición está acotada $-\frac{\pi\hbar}{p_0} \leq q \leq \frac{\pi\hbar}{p_0}$. Como el operador de posición no existe en esta representación, construimos el análogo polimérico del operador de posición al cuadrado, al que llamamos \hat{R} , basándonos en la descripción clásica donde $U_{p_0} := e^{ip_0q/\hbar}$. Usamos la expresión

$$e^{\frac{ip_0q}{\hbar}} + e^{-\frac{ip_0q}{\hbar}} \sim 2 - \frac{p_0^2 q^2}{\hbar^2}, \quad q \ll \frac{\hbar}{p_0}, \quad (4.17)$$

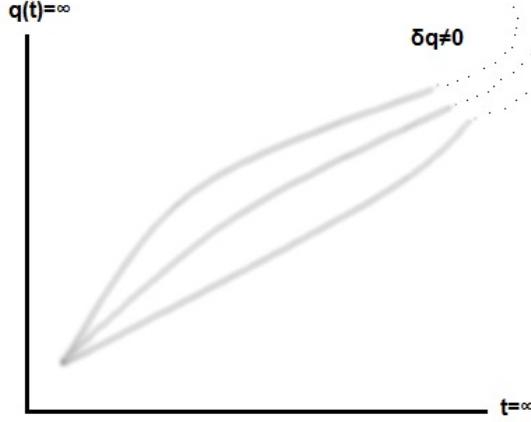


Figura 4.3: Para el potencial semirestringido $W = \frac{k}{q^2}$, en $t_f \rightarrow \infty$, $q_f \rightarrow \infty$ las variaciones finitas, $\delta q|_{t_f \rightarrow \infty} \neq 0$, son admisibles.

para despejar q^2 y cuantizar directamente

$$\hat{R} := \frac{\hbar^2}{p_0^2} \left(2 - \hat{U}_{p_0} - \hat{U}_{p_0} \right). \quad (4.18)$$

Ahora procedemos a calcular la acción del operador \hat{R} en el ket $|q\rangle$ en la polarización de momentos polimérica. Usando la relación de completitud $\sum_n |p_n\rangle \langle p_n| = \hat{1}$ vemos que

$$|q\rangle = \sum_n |p_n\rangle \langle p_n | q\rangle = \sqrt{\frac{p_0}{2\pi\hbar}} \sum_n |p_n\rangle e^{\frac{ip_n q}{\hbar}}, \quad (4.19)$$

donde $\langle p_n | q\rangle = \sqrt{\frac{p_0}{2\pi\hbar}} e^{\frac{ip_n q}{\hbar}} = \gamma e^{\frac{ip_n q}{\hbar}}$. Realizando un corrimiento en (4.19)

$$|q\rangle = \sum_n |p_n + p_0\rangle \langle p_n + p_0 | q\rangle = \sqrt{\frac{p_0}{2\pi\hbar}} \sum_n |p_n + p_0\rangle e^{\frac{ip_n q}{\hbar}} e^{\frac{ip_0 q}{\hbar}} \quad (4.20)$$

y, análogamente,

$$|q\rangle = \sum_n |p_n - p_0\rangle \langle p_n - p_0 | q\rangle = \sqrt{\frac{p_0}{2\pi\hbar}} \sum_n |p_n - p_0\rangle e^{\frac{ip_n q}{\hbar}} e^{-\frac{ip_0 q}{\hbar}}. \quad (4.21)$$

Usando (4.18) combinada con (4.20) y (4.21) llegamos a

$$\hat{R}|q\rangle = \frac{\hbar^2}{p_0^2} \left(2|q\rangle - \hat{U}_{p_0} \gamma \sum_n |p_n + p_0\rangle e^{\frac{ip_n q}{\hbar}} e^{\frac{ip_0 q}{\hbar}} - \hat{U}_{-p_0} \gamma \sum_n |p_n - p_0\rangle e^{\frac{ip_n q}{\hbar}} e^{-\frac{ip_0 q}{\hbar}} \right), \quad (4.22)$$

que implica

$$\hat{R}|q\rangle = \frac{\hbar^2}{p_0^2} \left(2|q\rangle - \gamma \sum_n |p_n\rangle e^{\frac{ip_n q}{\hbar}} e^{\frac{ip_0 q}{\hbar}} - \gamma \sum_n |p_n\rangle e^{\frac{ip_n q}{\hbar}} e^{\frac{-ip_0 q}{\hbar}} \right) \quad (4.23)$$

rearrreglando términos en (4.23)

$$\begin{aligned} \hat{R}|q\rangle &= \frac{\hbar^2}{p_0^2} \left(2|q\rangle - |q\rangle e^{\frac{ip_0 q}{\hbar}} - |q\rangle e^{\frac{-ip_0 q}{\hbar}} \right) \\ &= \frac{\hbar^2}{\mu^2} \sin^2 \left[\frac{p_0 q}{\hbar} \right] |q\rangle. \end{aligned} \quad (4.24)$$

La propuesta de operador inverso es entonces

$$\frac{\hat{1}}{R}|q\rangle = \frac{\mu^2}{\hbar^2} \csc^2 \left[\frac{p_0 q}{\hbar} \right] |q\rangle. \quad (4.25)$$

Ahora pasamos al formalismo de integral de trayectoria. Tenemos que la amplitud de transición puede escribirse como

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \left(\prod_{n=1}^{N-1} \int dq_n \right) \left(\prod_{n=1}^N \langle q_n, t_n | q_{n-1}, t_{n-1} \rangle \right). \quad (4.26)$$

Ahora calculemos la amplitud de transición en un subintervalo de la partición

$$\langle q_n, t_n | q_{n-1}, t_{n-1} \rangle = \langle q_n | e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon \hat{H}_{poli}} | q_{n-1} \rangle, \quad (4.27)$$

con $\hat{H}_{poli} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{\hat{1}}{R}$. De (4.27) podemos desarrollar

$$\langle q_n | e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon \hat{H}_{poli}} | q_{n-1} \rangle \approx \langle q_n | 1 - \frac{i}{\hbar} \epsilon \hat{H}_{poly} + \mathcal{O}(\epsilon^2) | q_{n-1} \rangle, \quad (4.28)$$

de esto se sigue

$$\begin{aligned} \langle q_n | e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon \hat{H}_{poly}} | q_{n-1} \rangle &\approx \\ &\sum_j \langle q_n | p_j \rangle \langle p_j | q_{n-1} \rangle - \sum_j \langle q_n | p_j \rangle \langle p_j | q_{n-1} \rangle \frac{i\epsilon}{2m\hbar} p_j^2 \\ &\quad - \sum_j \langle q_n | p_j \rangle \langle p_j | q_{n-1} \rangle \frac{i\epsilon\mu^2}{\hbar^3} \csc^2 \left[\frac{\mu q_{n-1}}{\hbar} \right], \end{aligned} \quad (4.29)$$

que implica

$$\langle q_n | e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon\hat{H}_{poly}} | q_{n-1} \rangle \approx \sum_j \langle q_n | p_j \rangle \langle p_j | q_{n-1} \rangle \left(1 - \frac{i\epsilon}{\hbar} \left\{ \frac{p_j^2}{2m} + \frac{\mu^2}{\hbar^2} \csc^2 \left[\frac{\mu q_{n-1}}{\hbar} \right] \right\} \right) \quad (4.30)$$

y por lo tanto

$$\langle q_n | e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon\hat{H}_{poli}} | q_{n-1} \rangle = \gamma^2 \sum_j e^{\frac{i\epsilon}{\hbar} \left(p_j \frac{q_n - q_{n-1}}{\epsilon} - H_{ef} \right)}, \quad (4.31)$$

con $H_{ef} = \frac{p_n^2}{2m} + \frac{\mu^2}{\hbar^2} \csc^2 \left[\frac{\mu q_{n-1}}{\hbar} \right]$. Sustituyendo lo anterior en (4.26) y llevando un análisis similar al de (3.44) obtenemos

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \left(\prod_{n=1}^{N-1} \int dq_n \right) \left(\gamma^2 \prod_{n=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} dp_n \right) e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N \epsilon \left(p_n \frac{q_n - q_{n-1}}{\epsilon} - H \right)}, \quad (4.32)$$

que es la formula de Feynman a partir de la cual se puede leer la acción efectiva una vez llevados a cabo los límites $N \rightarrow \infty$ y $\epsilon \rightarrow \infty$. De interés para nosotros es la acción efectiva polimérica

$$S_{ef} = \int dt \left[p\dot{q} - \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{\hbar^2}{\mu^2} \csc^2 \left[\frac{q\mu}{\hbar} \right] \right) \right]. \quad (4.33)$$

La ecuación (4.33) sugiere que, en el esquema de cuantización polimérico en su formulación de momentos, la acción efectiva para una potencial $W(q) = \frac{1}{q^2}$ sufre un cambio del tipo

$$\frac{1}{q^2} \rightarrow \frac{p_0^2}{\hbar^2} \csc^2 \left[\frac{qp_0}{\hbar} \right]. \quad (4.34)$$

4.3. Función de partición semiclásica polimérica para una partícula en el potencial cuadrático inverso en la posición

En esta sección se estudiará el modelo mecánico usando la integral de trayectoria polimérica.

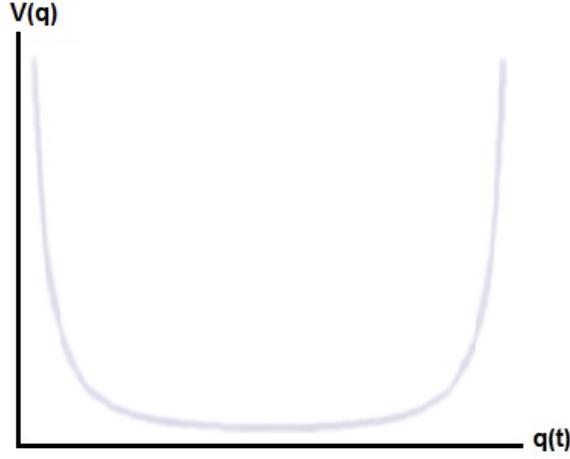


Figura 4.4: Potencial W_{poli} (4.36).

El análisis será llevado a cabo en la representación polimérica de momentos siguiendo la regla heurística

$$q^2 \rightarrow \frac{\hbar^2}{p_0^2} \sin^2 \left[\frac{qp_0}{\hbar} \right], \quad (4.35)$$

inferida del estudio de la integral de trayectoria polimérica del capítulo 3 y la sección 4.2. Usando (4.35) la acción efectiva (4.6) toma la forma

$$I_{Pol} = \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{kp_0^2}{\hbar^2} \csc^2 \left(\frac{qp_0}{\hbar} \right) - k \frac{p_0^2}{\hbar^2} \right]. \quad (4.36)$$

Aquí hemos agregado una fase, el último término en (4.36), para que el mínimo del potencial coincida con el valor cero. Vemos de inmediato que hemos reemplazado el punto en infinito del problema original por uno a una distancia finita. Hacemos notar que en el modelo efectivo, a diferencia del original, el potencial llega a ser nulo aunque no asintóticamente. Por esta razón el límite temporal superior t_f no es infinito. Es decir, el mínimo del potencial polimérico, $q_{f,Pol} = \frac{\pi\hbar}{2p_0}$, corresponde al punto $q_f \rightarrow \infty$ en el modelo (4.6). El tiempo $t_{f,Pol}$ que corresponde a $t_f \rightarrow \infty$ en el modelo original, puede determinarse como sigue. La energía total en el modelo polimérico está dada por

$$E = \frac{m\dot{q}^2}{2} + \left(k \frac{p_o^2}{\hbar^2} \csc^2 \left[\frac{p_o q}{\hbar} \right] - k \frac{p_o^2}{\hbar^2} \right), \quad (4.37)$$

que implica

$$\dot{q} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(-k \frac{p_o^2}{\hbar^2} \csc^2 \left[\frac{p_o q}{\hbar} \right] + k \frac{p_o^2}{\hbar^2} \right) + \frac{2E}{m}} \quad (4.38)$$

y lleva a

$$\int_{q_i}^{q_f} \frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(-k \frac{p_o^2}{\hbar^2} \csc^2 \left[\frac{p_o q}{\hbar} \right] + k \frac{p_o^2}{\hbar^2} \right) + \frac{2E}{m}}} = \int_{t_i}^{t_f} dt. \quad (4.39)$$

Para estimar el valor de t_f en la integral (4.39) se puede hacer un desarrollo en serie del integrando. Considerando $Y := \frac{p_o q}{\hbar} \ll 1$ se tiene que (4.39) queda como

$$\int_{t_i}^{t_f} dt \approx \int_{q_i}^{q_f} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{2k}{mq^2}}} + O[Y]^2 \right) dq, \quad (4.40)$$

y llevando a cabo la integración se obtiene

$$\Delta t = t_f - t_i \approx \left. \frac{mq \sqrt{\frac{-k + Eq^2}{2mq^2}}}{E} \right|_{q_i}^{q_f}. \quad (4.41)$$

Evaluando (4.41) en $q = q_{f, Poly} = \frac{\pi \hbar}{2p_0}$ y truncando al orden dominante en $\frac{1}{p_0}$ tenemos que

$$\Delta t \approx \sqrt{\frac{\pi^2 \hbar^2 m}{8E p_0^2}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \hbar^2 m}{8E}} \frac{1}{p_0}. \quad (4.42)$$

Evidentemente, si la escala de red en el espacio de momentos es pequeña, $p_0 \rightarrow 0$, con energía finita E , recuperamos el tiempo final infinito del modelo original.

Ahora discutiremos el efecto del modelo polimérico sobre los problemas de la aproximación semiclásica para el potencial semirestringido. Para facilidad del análisis consideramos sólo un desarrollo en p_0 y truncamos al primer orden no trivial. Empecemos por determinar si la acción (4.36) es finita o no. Su desarrollo da

$$I_{Poly}[q_{cl}] \approx \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{m \dot{q}^2}{2} + \frac{k}{q^2} + \frac{k p_0^4}{15 \hbar^4} q^2 - \frac{2k p_0^2}{3 \hbar^2} + \mathcal{O}(Y^4) \right]. \quad (4.43)$$

Realizando una integración por partes en el primer término de (4.43) tenemos que

$$I_{poly}[q_{cl}] \approx \frac{m}{2} \dot{q}_{cl} q_{cl} \Big|_{t_i}^{t_f} - \frac{m}{2} \int_{t_i}^{t_f} q_{cl} \ddot{q}_{cl} dt + \int_{t_i}^{t_f} \frac{k}{q_{cl}^2} dt + \int_{t_i}^{t_f} \frac{k p_0^4}{15 \hbar^4} q_{cl}^2 dt - \frac{2k p_0^2 \Delta t}{3 \hbar^2}, \quad (4.44)$$

considerando los mismos argumentos que en la sección 4.1, tenemos la ecuación $m\ddot{q} = \frac{\partial W_{Poly}}{\partial q}$, por lo tanto (4.44) se convierte en

$$I_{poly}[q_{cl}] \approx \frac{m}{2} \dot{q}_{cl} q_{cl} \Big|_{t_i}^{t_f} + 2 \int_{t_i}^{t_f} \frac{k}{q^2} dt - \frac{2kp_0^2 \Delta t}{3\hbar^2}. \quad (4.45)$$

Dado que la integral

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{1}{q^2} dt = -\sqrt{\frac{m}{2k}} \text{ArcTan} \left[e^{-\frac{t+C_2}{15\sqrt{2km}\hbar^4}} - \frac{\sqrt{15}h^2 m C_1}{4k^{3/2} p_0^2} \right] \Big|_{t_i}^{t_f} < \infty \quad (4.46)$$

la acción (4.45) es finita en virtud de que la posición $q_{cl}(t_f) < \infty$ y la velocidad está acotada para una energía finita ya que el subradical en (4.38) debe ser positivo y el último término es evidentemente finito. Concluimos entonces que la acción polimérica (4.36) evaluada en la trayectoria clásica q_{cl} es finita, es decir, el carácter polimérico del modelo resuelve el correspondiente problema de la aproximación semiclásica del potencial cuadrático inverso en la cuantización de Schrödinger semirestringido.

El segundo problema en el modelo original consiste en que la primera variación de la acción alrededor de la trayectoria clásica no se anula para todas las configuraciones consistentes con las condiciones de frontera. La primera variación de I_{poly} lleva a

$$\delta I_{poly}[q_{cl}] = \delta \int_{t_i}^{t_f} \left[\frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{k}{q^2} + \frac{kp_0^4}{15\hbar^4} q^2 - \frac{2kp_0^2}{3\hbar^2} \right] \quad (4.47)$$

que implica

$$\delta I_{poly}[q_{cl}] = m\dot{q}_{cl} \delta q \Big|_{t_i}^{t_f} + EDM. \quad (4.48)$$

Ya que se está evaluando alrededor de la trayectoria clásica, el término EDM representa las ecuaciones de Euler-Lagrange y por lo tanto se anula. De este modo:

$$\delta I_{poly}[q_{cl}] = m\dot{q}_{cl} \delta q \Big|_{t_i}^{t_f}. \quad (4.49)$$

Como efectivamente hemos recorrido el punto que en el modelo original aparecía en infinito a una distancia finita del origen las únicas variaciones admisibles en ambos

extremos son $\delta q = 0$. Por lo tanto, la primera variación de la acción polimérica evaluada en la trayectoria clásica es cero

$$\delta I_{poly}[q_{cl}] = 0. \tag{4.50}$$

Una vez hecho el análisis anterior es posible ver que el esquema de cuantización polimérico en su formulación de momentos hace finita la acción evaluada en la trayectoria clásica. En cuanto al segundo problema tenemos que este esquema de cuantización provoca que el modelo mecánico sea tal que la primera variación de la acción evaluada en la trayectoria clásica sea cero.

Capítulo 5

Acción mejorada de una partícula con un potencial cuadrático inverso en la posición

Es de relevancia ver como la teoría de Hamilton Jacobi ayuda a resolver los problemas descritos para el modelo cuantizado en el esquema de Schrödinger. Por otro lado, también es de interés ver como este método es consistente con el modelo polimérico, ya que es esta técnica la que se utiliza en modelos de agujeros negros para resolver la dificultad de dar sentido a un desarrollo semiclásico de la función de partición.

5.1. Modelo cuantizado en el esquema de Schrödinger

En esta sección se describe como la formulación de Hamilton-Jacobi de la mecánica ayuda a resolver los problemas ya descritos para la función de partición de sistemas mecánicos semirestringidos. Aquí seguimos esencialmente la referencia [10].

Se tiene que se puede construir una acción distinta o *mejorada*, añadiendo un termino de frontera a la acción (4.6), asociado a una transformación canónica, de la manera siguiente

$$\Gamma[q] = \int_0^{t_f} dt \left(\frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{k}{q^2} \right) - G(q, t)|_0^{t_f}. \quad (5.1)$$

La variación de (5.1) toma la forma

$$\delta\Gamma[q_{cl}] = \left(m\dot{q} - \frac{\partial G}{\partial q} \right) \delta q \Big|_0^{t_f} = \left(m\dot{q} - \frac{\partial G}{\partial q} \right) \delta q \Big|_{t=t_f}. \quad (5.2)$$

La primera variación de la acción se anula, si $\frac{\partial G}{\partial q} \Big|_0^{t_f}$ se comporta como $m\dot{q} \Big|_0^{t_f}$, i.e como el momento p . Por otro lado, la función principal de Hamilton es una función con la propiedad $\frac{\partial G}{\partial q} = p$. Por lo tanto es natural conjeturar que G en (5.1) es solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi,

$$H \left(q, \frac{\partial G}{\partial q} \right) + \frac{\partial G}{\partial t} = 0. \quad (5.3)$$

Para resolver la ecuación (5.3) se hace lo siguiente. Se tiene el hamiltoniano euclideo

$$H = m \frac{\dot{q}^2}{2} - \frac{k}{q^2} = E, \quad (5.4)$$

con $p = \frac{\partial G}{\partial q}$, la ecuación (5.3) se lee como

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial G}{\partial q} \right)^2 - \frac{k}{q^2} + \frac{\partial G}{\partial t} = 0. \quad (5.5)$$

Ya que la dependencia explicita de G en t está presente sólo en el último término, la ecuación (A.18) puede ser usada para eliminar el tiempo de la ecuación de Hamilton-Jacobi (5.5) y se obtiene

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial w}{\partial q} \right)^2 - \frac{k}{q^2} = \alpha. \quad (5.6)$$

La constante de integración es entonces identificada con la energía total E . La ecuación (5.6) puede ser integrada de la manera

$$w = \sqrt{2E} \int_{\mathbb{R}^+} dq \sqrt{1 + \frac{1}{Eq^2}}, \quad (5.7)$$

donde por simplicidad se fija $m = k = 1$. Esto junto a la ecuación (A.18) lleva inmediatamente a:

$$G(q, t) = c_0 - Et + \sqrt{2}\sqrt{1 + Eq^2} + \sqrt{2}\log[q] - \sqrt{2}\log[1 + \sqrt{1 + Eq^2}]. \quad (5.8)$$

Ya que $G(q, t)$ es parte de la acción mejorada y por lo tanto no puede depender de las constantes de movimiento, se construye la solución envolvente, es decir, la energía es removida de la ecuación (5.8) resolviendo $\frac{\partial G}{\partial E} = 0$ para E . La constante c_0 es puesta a mano en cero de manera arbitraria aunque se pueden hacer otras elecciones. Se tiene entonces

$$-t(\sqrt{1 + Eq^2} + 1 + Eq^2) + \frac{q^2}{\sqrt{2}}(1 + \sqrt{1 + Eq^2}) + \frac{\sqrt{2}}{q}(\sqrt{1 + Eq^2} + 1 + Eq^2) - \frac{q^2}{\sqrt{2}} = 0. \quad (5.9)$$

De (5.9) obtenemos E que tiene la forma

$$E = \frac{4q + q^4 - 2\sqrt{2}q^2t}{4 - 4\sqrt{2}qt + 2q^2t^2}. \quad (5.10)$$

Haciendo un desarrollo asintótico en q en (5.8) y para ello primero en (5.10) llegamos a

$$E \approx \frac{q^2}{2t^2}, \quad (5.11)$$

luego, con el desarrollo asintótico ya llevado a cabo, tenemos que la función principal está dada por

$$G \approx \frac{q^2}{2t}. \quad (5.12)$$

Una vez calculada la función principal $G(q, t)$ se obtiene la acción mejorada evaluada en la trayectoria clásica alrededor del tiempo final, y está dada por

$$\begin{aligned} \Gamma[q_{cl}] &= \frac{v^2}{2} \int_0^{t_f} dt + \int_{t_i}^{t_f} \frac{k}{q^2} - \frac{q^2}{2t} \Big|_{t_i}^{t_f} \\ &= \int_{t_i}^{t_f} \frac{k}{q^2} < \infty, \end{aligned} \quad (5.13)$$

que es finita.

Por otro lado, para la primera variación de la acción mejorada tenemos

$$\delta\Gamma[q_{cl}] = \left(p - \frac{\partial G}{\partial q} \right) \delta q \Big|_{t=t_f}. \quad (5.14)$$

La derivada respecto de q de la función principal está dada por

$$\frac{\partial G}{\partial q} = \frac{\sqrt{2}}{q} - tE' - \frac{2qE + q^2E'}{\sqrt{2}\sqrt{1+q^2E} \left(1 + \sqrt{1+q^2E} \right)}. \quad (5.15)$$

Ahora, evaluando asintóticamente y considerando $E' = 0$, ya que la energía cinética es un máximo y el potencial evaluado en ese punto es nulo, y $E|_{t_f \rightarrow \infty} = \frac{p^2}{2}$, obtenemos

$$\frac{\partial G}{\partial q} \Big|_{t_f \rightarrow \infty} \approx p, \quad (5.16)$$

por lo tanto, tenemos que la primera variación de la acción mejorada Γ se anula

$$\delta\Gamma[q_{cl}] = 0. \quad (5.17)$$

5.2. Acción mejorada polimérica

La acción mejorada en el modelo polimérico está dada por

$$\Gamma_{poli} = \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{m\dot{q}^2}{2} + W_{poli}(q) \right] - S_{poli}(q, t) \Big|_{t_i}^{t_f}, \quad (5.18)$$

donde $S_{Poly}(q, t)$ es la función principal de Hamilton polimérica. Variando (5.18) alrededor de la trayectoria clásica se obtiene

$$\delta\Gamma_{poly}[q_{cl}] = \left(m\dot{q} - \frac{\partial S_{Polii}}{\partial q} \right) \delta q \Big|_{t_i}^{t_f}, \quad (5.19)$$

de igual manera que en el modelo original, se procede a calcular la función principal de Hamilton, entonces

$$\frac{m\dot{q}^2}{2} - W_{poli}(q) = E, \quad (5.20)$$

que implica

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_{poli}}{\partial q} \right)^2 - W_{poli}(q) + \frac{\partial S_{poli}}{\partial t} = 0. \quad (5.21)$$

Si se considera la ecuación (A.18) se ve que

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W_{poli}}{\partial q} \right)^2 - W_{poli}(q) = E, \quad (5.22)$$

que lleva a

$$W_{poli} = \int dq \sqrt{2mE + 2mW_{poli}(q)}. \quad (5.23)$$

Teniendo en cuenta 4.36 y (A.18) se obtiene

$$S_{poli}(q, t) = -Et - \frac{2H\hbar}{A} \text{Sin} \left[\frac{pq}{\hbar} \right] \left(G\sqrt{k}p - B \text{Log} \left[\sqrt{2}B \text{Cos} \left[\frac{pq}{\hbar} \right] + A \right] \right), \quad (5.24)$$

donde

$$A = \sqrt{\frac{m}{\hbar^2} \left(kp^2 - kp^2 \text{Csc} \left[\frac{pq}{\hbar} \right]^2 + \hbar^2 E \right)},$$

$$B = \sqrt{kp^2 + \hbar^2 E},$$

$$H = \sqrt{\frac{m}{\hbar^2} \left(kp^2 - kp^2 \text{Csc} \left[\frac{pq}{\hbar} \right]^2 + \hbar^2 E \right)},$$

$$G = \text{ArcTanh} \left[\frac{\sqrt{2k}p \text{Cos} \left[\frac{pq}{\hbar} \right]}{A} \right],$$

$$F = \text{Log} \left[\sqrt{2}B \text{Cos} \left[\frac{pq}{\hbar} \right] + A \right], .$$

De acuerdo al método presentado en el modelo original ahora se debe calcular la solución envolvente, lo que implica resolver la ecuación

$$\frac{\partial S_{poly}(q, t)}{\partial E} = 0, \quad (5.25)$$

para E , para luego sustituir E en (5.24). Haciendo esto la función principal de Hamilton debe de cumplir

$$\left. \frac{\partial S_{poly}(q, t)}{\partial q} \right|_{t=t_f} = m\dot{q}, \quad (5.26)$$

ya que esta propiedad de $S_{poly}(q, t)$ es la que permite solucionar el problema relacionado a la primera variación de la acción. Una vez determinada la solución envolvente, se encuentra que la energía queda como función de la posición y el tiempo, $E = E(q, t)$. Esto implica que uno puede escribir la energía total de la siguiente manera

$$E(q, t) = K(q, t) + W_{poli}(q), \quad (5.27)$$

en sus partes cinética y potencial respectivamente. Ahora se procede a derivar

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{poly}(q, t)}{\partial q} = & -E't - \frac{FH\hbar^3}{ABp} \text{Sin} \left[\frac{pq}{\hbar} \right] E' - \frac{2H}{A} \text{Cos} \left[\frac{pq}{\hbar} \right] \left(G\sqrt{kp} - BF \right) \\ & - \frac{m}{AH\hbar p} \left(G\sqrt{kp} - BF \right) \text{Sin} \left[\frac{pq}{\hbar} \right] \left(\frac{2kp^3}{\hbar} \text{Cot} \left[\frac{pq}{\hbar} \right] \text{Csc} \left[\frac{pq}{\hbar} \right]^2 + \hbar^2 E' \right) \\ & - \frac{H\hbar}{A^3 p} \left(G\sqrt{kp} - BF \right) \text{Sin} \left[\frac{pq}{\hbar} \right] \left(4B^2 \hbar p \text{Sin} \left[\frac{2pq}{\hbar} \right] \text{Sin} \left[\frac{pq}{\hbar} \right]^2 E' \right) \\ & \frac{2BH\hbar \text{Sin} \left[\frac{pq}{\hbar} \right] \left(-\frac{\sqrt{2}Bp}{\hbar} \text{Sin} \left[\frac{pq}{\hbar} \right] + \frac{\hbar^2}{\sqrt{2}B} \text{Cos} \left[\frac{pq}{\hbar} \right] E' + \frac{-2B^2 p \text{Sin} \left[\frac{2pq}{\hbar} \right] - \hbar^2 E' + \hbar^2 \text{Cos} \left[\frac{2pq}{\hbar} \right] E'}{2A} \right)}{A^2 p + \sqrt{2}ABp \text{Cos} \left[\frac{pq}{\hbar} \right]} \\ & \frac{4H^2 \sqrt{kp} \hbar^2 \text{Sin} \left[\frac{pq}{\hbar} \right]^2 \left(\frac{\sqrt{2kp^2}}{Ah} \text{Sin} \left[\frac{pq}{\hbar} \right] + \frac{\sqrt{kp} \text{Cos} \left[\frac{pq}{\hbar} \right] \left(-\frac{2B^2 p \text{Sin} \left[\frac{2pq}{\hbar} \right] - \hbar^2 E' + \hbar^2 \text{Cos} \left[\frac{2pq}{\hbar} \right] E'}{\sqrt{2}A^3} \right)}{\sqrt{2}A^3} \right)}{Ap - \frac{2kp^3 \text{Cos} \left[\frac{pq}{\hbar} \right]^2}{A}}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Una vez obtenida la derivada, se evalúa cada elemento de ésta en $t_{f,poli}$ y no es demasiado difícil convencerse de que, en efecto, ésta va como el momento, es decir,

$$\left. \frac{\partial S_{poli}(q, t)}{\partial q} \right|_{t=t_{f,poli}} = m\dot{q}, \quad (5.29)$$

lo cual implica

$$\delta\Gamma_{poli}[q_{cl}] = 0. \quad (5.30)$$

Con lo anterior se puede observar que los problemas ya descritos pueden ser resueltos, y por lo tanto el desarrollo semiclásico de la función de partición puede ser llevado a cabo, aun en el caso polimérico.

Capítulo 6

Conclusiones, discusión y perspectivas

Una propuesta de teoría de gravedad cuántica desarrollada recientemente es la denominada Gravedad Cuántica por Lazos (GCL) [1]. Ésta es de interés pues ha generado evidencia de que en situaciones donde el campo gravitacional es extremadamente intenso, como la gran explosión en modelos cósmicos [12, 21] y el interior del agujero negro de Schwarzschild [22], se elimina la singularidad clásica.

GCL es un tratamiento hamiltoniano de la relatividad general en el que a nivel cuántico los estados gravitacionales resultan estar etiquetados por gráficas formadas por nodos y aristas. La llamada mecánica cuántica polimérica es un esquema de cuantización para sistemas con un número finito de grados de libertad inspirado en GCL, el cual es útil para estudiar de forma más sencilla situaciones de interés físico. En este caso los gráficos son conjuntos numerables de puntos en la recta real.

Una alternativa al tratamiento hamiltoniano de la gravedad cuántica, son los modelos inspirados en la integral de trayectoria de Feynman. Uno de los objetos de estudio de esta tesis, es el cómo se modifica la integral de trayectoria cuando se hace uso de la representación singular polimérica del álgebra de Weyl, dando lugar a una acción efectiva *polimérica* que aparece en la llamada fórmula de Feynman. Esto se

ha mostrado para sistemas como la partícula libre y el oscilador armónico [23], sin embargo, para potenciales singulares este análisis está abierto. Lo anterior puede entenderse estudiando la relación

$$e^{-\frac{i\epsilon\hat{H}}{\hbar}} = e^{-\frac{i\epsilon(\hat{T}+\hat{W})}{\hbar}}, \quad (6.1)$$

con \hat{T} el término cinético y \hat{W} el término asociado al potencial en el hamiltoniano. Este operador de evolución puede ser factorizado a través de la formula de Baker-Campbell-Hausdorff de la manera

$$e^{-\frac{i\epsilon(\hat{T}+\hat{V})}{\hbar}} = e^{-\frac{i\epsilon\hat{V}}{\hbar}} e^{-\frac{i\epsilon\hat{T}}{\hbar}} e^{-\frac{i\epsilon^2\hat{X}}{\hbar^2}}, \quad (6.2)$$

donde el operador \hat{X} es el desarrollo

$$\hat{X} := \frac{i}{2}[\hat{V}, \hat{T}] - \frac{\epsilon}{\hbar} \left(\frac{1}{6}[\hat{V}, [\hat{V}, \hat{T}]] - \frac{1}{3}[[\hat{V}, \hat{T}], \hat{T}] \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (6.3)$$

Para un potencial no singular, como por ejemplo el del oscilador armónico, uno puede despreciar el término $e^{-\frac{i\epsilon^2\hat{X}}{\hbar^2}}$, sin embargo, para potenciales singulares esto no puede llevarse a cabo debido a que los conmutadores (6.3) se hacen singulares. Esta problemática llevó a Kleinert [14] a desarrollar un método para obtener una fórmula de Feynman para algunos de estos potenciales, sin embargo, este método no fue explorado en nuestro trabajo. Nuestra hipótesis de trabajo aquí es que aún en estos casos la acción efectiva puede obtenerse al reemplazar la variable de configuración por el seno trigonométrico de la misma: $q \rightarrow \sin\left(\frac{qp_0}{\hbar}\right)$, donde p_0 es el paso de una red regular en el espacio de momentos discreto.

Por otro lado, la descripción de la termodinámica de agujeros negros hace uso de la aproximación semiclásica de la función de partición correspondiente. Esta aproximación sufre de varios problemas. Dos de ellos son, primero que la acción evaluada en la trayectoria clásica diverge y, segundo, que la primera variación de la acción evaluada en ésta trayectoria no se anula para todas las condiciones de frontera admisibles. Estos problemas pueden resolverse introduciendo un término de frontera en la acción basado en la teoría de Hamilton-Jacobi. Notablemente, Grumiller [10]

mostró que estos problemas surgen igualmente en el estudio de sistemas con un potencial cuadrático inverso en la posición y su solución se basa igualmente en la teoría de Hamilton-Jacobi.

Con esta motivación, en el capítulo 4, estudiamos la aproximación semiclásica de la función de partición, ec. (2.42), para un sistema mecánico con un potencial cuadrático inverso en la posición bajo el esquema de cuantización de Schrödinger. Planteamos la función de partición de tal sistema y estudiamos el desarrollo semiclásico de ésta, ec. (4.7). Procedimos a analizar la acción y su primera variación evaluada en la trayectoria clásica. En el caso de la acción, uno puede apreciar que debido al límite temporal que es tomado en la integral respecto al tiempo del lagrangiano, la acción diverge cuando es evaluada en la trayectoria clásica, ec. (4.12). Por otro lado, en el caso de la primera variación de la acción evaluada en la trayectoria clásica uno ve que ésta no se anula, ec. (4.15), debido a que variaciones finitas son permitidas para tiempo infinito. Posteriormente implementamos la cuantización polimérica para el potencial cuadrático inverso en la posición y obtuvimos una acción efectiva. Con esta analizamos nuevamente la aproximación semiclásica. Finalmente, en el capítulo 5, estudiamos el método de Grumiller [10] para el modelo cuantizado de ambas maneras. En ambos casos se verifica la viabilidad del método, aunque en el último caso no es necesario aplicarla para resolver la problemática de la aproximación semiclásica de la función de partición del modelo de una partícula en un potencial cuadrático inverso en la posición.

Las conclusiones de este trabajo son las siguientes. Para el sistema de una partícula en un potencial cuadrático inverso en la posición el esquema de cuantización polimérico da lugar a una acción finita cuando es evaluada en la trayectoria clásica y por tanto regulariza la divergencia que aparece en la aproximación semiclásica de la función de partición en la cuantización a la Schrödinger. En este caso la primera variación se anula para variaciones consistentes con las condiciones de frontera. En resumen el desarrollo semiclásico polimérico de la función de partición está bien definido sin necesidad de agregar términos de frontera. Cabe hacer

notar que el modelo polimérico contiene al modelo original, en el límite en que la escala de discretez de momento p_0 es pequeña. La posición y el tiempo van a infinito en este límite. Es importante subrayar que el modelo original es considerado porque reproduce ciertas características problemáticas encontradas en el tratamiento de agujeros negros, sin embargo, al polimerizarlo estas ya no aparecen.

El modelo polimérico contiene la condición en infinito del modelo original sólo en forma de límite. Por esta razón la condición de variaciones finitas no nulas en la frontera no son admisibles en el caso polimérico. Puede ser de interés explorar variaciones nulas en frontera y posición finita que se hacen finitas en posición infinita.

Entre las perspectivas de este trabajo está realizar un análisis similar al presentado aquí para el caso de agujeros negros [9, 17]. Es de esperarse que polimerizar agujeros negros en el mismo sentido que se hizo en esta tesis, llevaría a que la termodinámica de éstos contengan correcciones poliméricas, esto debido a que el término de frontera agregado en la acción está directamente relacionado con la termodinámica de estos sistemas [16]. En relación con el modelo polimerizado, es de interés analizarlo en dos direcciones adicionales. Por un lado se le puede aplicar la técnica desarrollada en [14] para potenciales singulares. Por otro, es posible considerar la polarización de coordenadas polimérica donde la coordenada no está acotada. En este caso el potencial singular [24] permite un tratamiento inspirado en lazos [1] y el análisis tipo Hamilton-Jacobi tendría que aplicarse.

Apéndice A

Teoría de Hamilton-Jacobi

En este apéndice se revisa la formulación de Hamilton-Jacobi de la mecánica clásica. Esto, con el fin de resolver los problemas encontrados en la aproximación semiclásica de la función de partición del sistema semirestringido.

Una manera de describir las propiedades de un sistema mecánico está basada en la teoría de Hamilton-Jacobi. En ella uno busca una transformación canónica de las coordenadas y momentos (q, p) , al tiempo t , a un nuevo conjunto de cantidades constantes, las cuales pueden ser los $2n$ valores iniciales, (q_0, p_0) , a tiempo $t = 0$. Con tal transformación, las ecuaciones que relacionan las viejas y nuevas variables canónicas son exactamente la solución deseada al problema mecánico

$$q = q(q_0, p_0, t) \qquad p = p(q_0, p_0, t). \qquad (\text{A.1})$$

Estas dan las coordenadas y momentos como función de sus valores iniciales y el tiempo.

Se puede asegurar automáticamente que las nuevas variables sean constantes en el tiempo al exigir que el hamiltoniano transformado, K , sea idénticamente cero, por lo que las ecuaciones de movimiento son

$$\frac{\partial K}{\partial P_i} = \dot{Q}_i = 0 \qquad - \frac{\partial K}{\partial Q_i} = \dot{P}_i = 0. \qquad (\text{A.2})$$

Ya que Q_i y P_i son variables canónicas estas, permiten preservar el principio variacio-

nal. Dado esto, es posible ver que K debe de estar relacionado al viejo hamiltoniano a través de una función generadora F por la ecuación

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (\text{A.3})$$

y es cero si F satisface la ecuación

$$H(q, p, t) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \quad (\text{A.4})$$

Es conveniente tomar a F como función de las coordenadas viejas q_i , el nuevo momento constante P_i , y el tiempo, $F(q, P, t)$. Para escribir el hamiltoniano de la ecuación anterior como función de la mismas variables, se puede hacer uso de las ecuaciones de transformacion

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad (\text{A.5})$$

tal que

$$H\left(q_1, \dots, q_n; \frac{\partial F}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial q_n}; t\right) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \quad (\text{A.6})$$

Esta ecuación, es conocida como ecuación de Hamilton-Jacobi y constituye una ecuación diferencial parcial en $(n + 1)$ variables, $q_1, \dots, q_n; t$, para la función generadora deseada. Se denotara la función F , como S , tal y como se denomina a la función principal de Hamilton.

La ecuación (A.6) sólo proporciona la dependencia en las viejas coordenadas y el tiempo; no parece decir como el nuevo momento esta contenido en S . De hecho, el nuevo momento no ha sido especificado aun, excepto que sabemos que debe de ser constante. Sin embargo, la naturaleza de la solución indica cómo los nuevos P_i deben ser seleccionados.

Matemáticamente la ecuación (A.6) tiene la forma de un ecuación diferencial parcial de primer orden en $n + 1$ variables. Hay una solución a la ecuación (A.6) de la forma

$$S = S(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}; t), \quad (\text{A.7})$$

donde las cantidades $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ son $n + 1$ constantes **independientes** de integración. Una de las constantes de integración, sin embargo, es de hecho irrelevante en

solución. Esto se ve porque S no aparece en la ecuación (A.6), sólo sus derivadas parciales respecto a q o t están involucradas. Por lo tanto, si S es alguna solución de la ecuación diferencial, entonces $S + \alpha$, donde α es cualquier constante debe de ser solución también. Una de las $n + 1$ constantes de integración en (A.7) debe por lo tanto aparecer solo como una constante aditiva sumada a S . Pero una constante aditiva no tiene importancia en una función generadora ya que solo derivadas parciales de la función generadora ocurren en las ecuaciones de transformación. Por lo tanto, para nuestros propósitos una solución completa a la ecuación (A.6) puede ser escrita en la forma

$$S = S(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n; t), \quad (\text{A.8})$$

donde ninguna de las constantes es únicamente aditiva. En (A.8), S corresponde exactamente a la forma deseada para una función generadora del tipo $F = F(q, P, t)$, para la ecuación (A.8) se presenta S como función de n coordenadas, el tiempo t , y n cantidades independientes α_i . Por lo tanto se está en libertad de tomar las n constantes de integración como los nuevos (constantes) momentos

$$P_i = \alpha_i. \quad (\text{A.9})$$

Tal elección no contradice la afirmación original de que el nuevo momento está conectado con los valores iniciales de q y p al tiempo t_0 . Las n ecuaciones de transformación para esta función generadora, $p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}$, pueden ser ahora escritas como

$$p_i = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial q_i}, \quad (\text{A.10})$$

donde q, α representan el conjunto completo de cantidades. Al tiempo t_0 , estas constituyen las n ecuaciones relacionando las n α 's con los valores iniciales q y p , lo que permite evaluar las constantes de integración en términos de las condiciones iniciales específicas del problema. La otra mitad de las ecuaciones de transformación para la función generadora del tipo $F = F(q, P, t)$; $Q_i = \frac{\partial F}{\partial P_i}$, que proporcionan las nuevas coordenadas constantes, aparecen como

$$Q_i = \beta_i = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_i}. \quad (\text{A.11})$$

Las constantes β pueden ser obtenidas de forma similar de las condiciones iniciales, simplemente por calcular el valor del lado derecho de la ecuación (A.11) a tiempo $t = t_0$ con los valores iniciales conocidos de q_i . Las ecuaciones (A.11) pueden ser invertidas para representar q_j en términos de α , β , y t

$$q_j = q_j(\alpha, \beta, t), \quad (\text{A.12})$$

lo cual resuelve el problema de dar las coordenadas como funciones del tiempo y las condiciones iniciales. Después de que la diferenciación en las ecuaciones (A.10) ha sido llevada a cabo, las ecuaciones (A.12) pueden ser sustituidas por las q 's, dando por lo tanto el momento p_i como funciones de α , β , y t :

$$p_i = p_i(\alpha, \beta, t). \quad (\text{A.13})$$

Las ecuaciones (A.12) y (A.13) por lo tanto constituyen la solución deseada completa de las ecuaciones de movimiento de Hamilton.

La función principal de Hamilton es por lo tanto el generador de una transformación canónica a coordenadas y momentos constantes; cuando se resuelve la ecuación de Hamilton-Jacobi, se está al mismo tiempo obteniendo una solución al problema mecánico. Hasta cierto punto, la elección de las α 's como nuevo momento es arbitraria. Se puede también escoger cualesquiera n cantidades, γ_i , que sean funciones independientes de las constantes de integración α_i :

$$\gamma_i = \gamma_i(\alpha_i, \dots, \alpha_n). \quad (\text{A.14})$$

La función principal de Hamilton puede ser escrita como una función de q_i , γ_i , y t , y el resto de la derivación no se modifica.

Una mayor comprensión del significado físico de la función principal de Hamilton se obtiene por examinar su derivada total respecto del tiempo

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}, \quad (\text{A.15})$$

ya que los P_i son constantes en el tiempo. Por las ecuaciones (A.10) y (A.6) esta relación también puede ser escrita como

$$\frac{dS}{dt} = p_i \dot{q}_i - H = L, \quad (\text{A.16})$$

tal que la función principal de Hamilton difiere de la integral del lagrangiano en el tiempo a lo más en una constante

$$S = \int L dt + c. \quad (\text{A.17})$$

Cuando el hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo la función principal de Hamilton puede ser escrita de la forma

$$S(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - \alpha t, \quad (\text{A.18})$$

donde $W(q, \alpha)$ es llamada función característica de Hamilton. El significado físico de W puede ser entendido por escribir su derivada temporal total

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial q_i} \dot{q}_i. \quad (\text{A.19})$$

Comparando esta expresión a los resultados de sustituir (A.18) en (A.10) es claro que

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \quad (\text{A.20})$$

y por lo tanto,

$$\frac{dW}{dt} = p_i \dot{q}_i \quad (\text{A.21})$$

esto puede ser integrado para dar

$$W = \int p_i \dot{q}_i dt = \int p_i dq_i \quad (\text{A.22})$$

que se puede interpretar como un trabajo generalizado.

Apéndice B

Función de partición semiclassical de un agujero negro de Schwarzschild

En la perspectiva de la integral de trayectoria para la cuantización de un campo ϕ [16], se expresa la amplitud para ir de una configuración del campo ϕ_1 a un tiempo t_1 a otra configuración ϕ_2 en un tiempo t_2 como

$$\langle \phi_2, t_2 | \phi_1, t_1 \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{iI[\phi]}, \quad (\text{B.1})$$

donde la integral de trayectoria es sobre todas las configuraciones del campo ϕ que toman los valores ϕ_1 a un tiempo t_1 y ϕ_2 a un tiempo t_2 . Pero tenemos

$$\langle \phi_2, t_2 | \phi_1, t_1 \rangle = \langle \phi_2 | e^{-iH(t_2-t_1)} | \phi_1 \rangle, \quad (\text{B.2})$$

donde H es el hamiltoniano. Si uno hace la continuación analítica $t_2 - t_1 = -i\beta$ y $\phi_1 = \phi_2$, y las sumas únicamente sobre ϕ_1 se obtiene

$$\text{Tr} e^{-\beta H} = \int \mathcal{D}\phi e^{iI[\phi]}, \quad (\text{B.3})$$

donde la integral de trayectoria ahora es tomada sobre todos los campos que son periódicos con un periodo β en un tiempo imaginario. El lado izquierdo de (B.3) es

la función de partición Z para el ensemble canónico, que consiste de un campo ϕ a una temperatura $T = \beta^{-1}$. Por lo tanto, se puede expresar la función de partición del sistema en términos de una integral de trayectoria sobre campos periódicos.

También se pueden considerar ensembles gran canónicos en donde se tienen potenciales químicos μ_i asociados con cantidades conservadas C_i . En este caso la función de partición es

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta(H - \sum_i \mu_i C_i)}. \quad (\text{B.4})$$

Por ejemplo, se puede considerar un sistema a una temperatura $T = \beta^{-1}$ con un momento angular J dado y una carga eléctrica Q . Los correspondientes potenciales químicos son en este caso la velocidad angular Ω y el potencial electrostático Φ .

La contribución dominante a la integral de trayectoria viene de las métricas g y campos de materia ϕ que están alrededor de un campo de fondo g_0 y ϕ_0 que hacen extrema la acción, esto es, que son las soluciones de las ecuaciones de campo clásicas. Uno puede expresar g y ϕ como

$$g = g_0 + \tilde{g} \quad (\text{B.5})$$

$$\phi = \phi_0 + \tilde{\phi} \quad (\text{B.6})$$

, y desarrollar la acción en una serie de Taylor respecto los campos clásico, esto es

$$I[q, \phi] = I[g_0, \phi_0] + I_2[\tilde{g}] + I_2[\tilde{\phi}] + \dots, \quad (\text{B.7})$$

donde I_2 son términos cuadráticos en las fluctuaciones \tilde{g} y $\tilde{\phi}$. Si uno desprecia términos de orden superior la función de partición está dada por

$$\log Z = iI[g_0, \phi_0] + \log \int \mathcal{D}\tilde{g} e^{iI_2[\tilde{g}]} + \log \int \mathcal{D}\tilde{\phi} e^{iI_2[\tilde{\phi}]}. \quad (\text{B.8})$$

Ahora, se tiene la relación termodinámica

$$\log Z = -WT^{-1}, \quad (\text{B.9})$$

donde $W = M - TS - \sum_i \mu_i C_i$ es el potencial termodinámico del sistema. Por lo tanto, se puede considerar $iI[g_0, \phi_0]$ como la contribución principal a $-WT^{-1}$ y el

segundo y tercer términos en (B.8) como contribuciones cuánticas que no tomaremos en cuenta ahora.

Se puede aplicar el análisis hecho hasta ahora, por ejemplo, para un agujero negro estacionario con temperatura $T = \frac{k}{2\pi}$. La función de partición de un agujero negro de Schwarzschild está dada por la expresión [16]

$$I \approx i\pi \frac{M}{k}, \quad (\text{B.10})$$

ahora considerando las relaciones

$$\log(Z) \approx iI \quad (\text{B.11})$$

y

$$\log(Z) = -W/T \quad (\text{B.12})$$

obtenemos

$$W = \frac{1}{2}M \quad (\text{B.13})$$

pero

$$W = M - TS \quad (\text{B.14})$$

por lo tanto,

$$\frac{1}{2}M = TS. \quad (\text{B.15})$$

Por la formula de Smarr, que consiste en lo siguiente,

$$\frac{1}{2}M = \kappa(8\pi)^{-1}A, \quad (\text{B.16})$$

se puede deducir

$$S = \frac{1}{4}A. \quad (\text{B.17})$$

Donde S es la entropía del sistema.

Bibliografía

- [1] T. Thiemann, *Introduction to Modern Canonical Quantum General Relativity*, Cambridge University Press, 2007.
- [2] M. Bojowald, *Absence of singularity in loop quantum cosmology*, Physical Review Letters, 5227 (2001).
- [3] A. Ashtekar, A. Corichi, P. Singh, *Robustness of key features of loop quantum cosmology*, Physical Review D, 024046 (2008).
- [4] M. Hossain, V. Hussain, S. Seahra, *The propagator in polymer quantum field theory*, Physical Review D, 124932, (2010).
- [5] A. García, H. Morales, *Polymer Dirac field propagator: A model*, Physical Review D, 065014, (2014).
- [6] A. Ashtekar, S. Fairhurst, J.L. Willis, *Quantum gravity, shadow states and quantum mechanics*, Classical Quantum Gravity, 20, 1031-1061, (2003).
- [7] E. Flores-González, Hugo A. Morales-Tecotl, Juan D. Reyes, *Propagators in Polymer Quantum Mechanics*, Annals of Physics, 2013.
- [8] L. Bergamin, D. Grumiller, R. McNees, R. Meyer, *Black Hole Thermodynamics and Hamilton-Jacobi Counterterm*, arXiv:0710.4140.

- [9] Daniel Grumiller, Robert McNees, *Thermodynamics of black holes in two (and higher) dimensions*, Published by Institute of Physics Publishing for SISSA, 2007.
- [10] Daniel Grumiller, *Path Integral For Half-Binding Potentials as Quantum Mechanical Analog For Black Hole Partition Functions*, <http://arxiv.org/abs/0711.4115v1>.
- [11] S. Hawking, G. Ellis, *The large structure of space-time*, Cambridge university press, 1973.
- [12] M. Bojowald, *Loop quantum cosmology*, Living Reviews in Relativity, 11, (2008).
- [13] Walter Greiner, Joachim Reinhardt, *Field Quantization*, Springer, 1996.
- [14] Hagen Kleinert, *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets*, World Scientific, 2004.
- [15] Lewis H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, 1985.
- [16] G. W. Gibbons, S. W. Hawking, *Action integrals and partition functions in quantum gravity*, Physycal Review D, 15, 1977.
- [17] D. Grumiller, W. Kummer, D. V. Vassilevich, *Physics Reports*, 369, (2002).
- [18] Michael Reed, Barry Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Academic Press, 1980.
- [19] Corichi Alejandro, Vukasinac Tatiana, Zapata Ramirez Jose, *Polymer quantum mechanics and its continuum limit*, Physycal Review D, 76, 2007.
- [20] Abhay Ashtekar, Miguel Campiglia, Adam Henderson, *Path integrals and the WKB approximation in loop quantum cosmology*, Physycal Review D, 82, 2010.
- [21] A. Ashtekar, P. Singh, *Loop Quantum Cosmology: A Status Report*, Classical Quantum Gravity, 28, 213001 (2011).

- [22] A. Ashtekar, Martin Bojowald, *Quantum geometry and the Schwarzschild singularity*, Classical and quantum gravity.
- [23] Parra L. 2014, *Tesis, Facultad de ciencias*, UNAM.
- [24] Gabor Kunstatter, Jorma Louko, Jonathan Ziprick, *Polymer quantization, singularity resolution, and $\frac{1}{r^2}$ potential*, Physical Review A, 79, 032104 (2009).
- [25] D. Grumiller, R. McNees, JHEP, 04 (2007), hep-th/0703230.
- [26] D. Grumiller, R. Meyer, Turk. J. Phys., 30 (2006), hep-th/0604049.
- [27] Viqar Husain, Jorma Louko, Oliver Winkler, *Quantum gravity and the Coulomb potential*, Physical Review D, 76, 084002 (2007).
- [28] R. Jackiw, *Challenges to path integral formulations of quantum theories*, arXiv:0711.1514.
- [29] M. Novello, M. Visser, G. Volovik, eds., *Artificial black holes*. World Scientific, River Edge, USA, 2002.
- [30] T. Regge, C. Teitelboim, Annals of Physics, 88 (1974) 286.
- [31] C. Rovelli, *Black hole entropy from loop quantum gravity*, Physical Review Letters, 77, (1996).