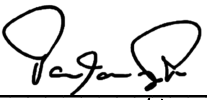


Fluctuaciones cuánticas en espacio-tiempo curvo

Eric Santiago Escobar Aguilar

Tesis para optar por el grado de Doctorado en Ciencias (Física)

Posgrado en Ciencias (Física)




Miembros del jurado:

Dr. José Inés Jiménez Aquino

Dr. Tonatiuh Matos Chassín

Directores de Tesis

Primer lector | Segundo lector | Tercer lector

Iztapalapa, CDMX

14 de enero de 2026

Índice general

Índice de figuras	v
Índice de cuadros	vi
1 Introducción	1
2 Preliminares	6
2.1. Ecuación diferencial estocástica y la ecuación de Fokker-Planck . . .	8
2.1.1. El caso multivariable	10
2.1.2. Ecuación de continuidad para una y varias variables	11
2.2. La relación entre el proceso de Wiener y el ruido blanco gaussiano .	13
2.3. Cálculo de Ito	15
2.4. Mecánica Cuántica	19
3 Mecánica Cuántica Estocástica	24
3.0.1. Operadores diferenciales	28
3.0.1.1. Cálculo de Ito y cambio de variable	28
3.0.1.2. Derivada sistemática y estocástica	29
3.0.2. Ecuaciones dinámicas	31
4 Mecánica Cuántica Estocástica en espacios tiempos curvos	35
4.1. Ecuación de Klein-Gordon en espacio-tiempo curvo	35

4.1.1. Ecuaciones de campo	36
4.2. Mecánica Cuántica Estocástica relativista	39
5 Aplicaciones	55
5.1. Interpretación	55
5.1.1. Interpretación de la función de onda	55
5.1.2. Potencial cuántico y ecuaciones de movimiento	56
5.1.3. Determinismo	57
5.2. Trayectorias estocásticas en métrica de Swarszchild	58
5.3. Trayectorias Estocásticas con la Métrica de Schwarzschild	62
6 Conclusiones	67
Bibliografía	71

Introducción

Innegablemente, la teoría de relatividad general (RG) y la Mecánica Cuántica (MC) son los pilares de la física moderna. Y no es extraño que los esfuerzos de la física teórica, experimental y numérica se enfoquen en generalizar ramas o teorías existentes, o por otro lado explorar o descubrir nuevas aplicaciones y tecnologías que ayuden a entender el universo que habitamos.

Muchas de las preguntas fundamentales de la física siguen sin respuesta, ya sea porque la tecnología actual no es suficiente para poner en marcha todo el mecanismo teórico que se ha creado, o bien, la teoría sigue en un estado de incertidumbre y necesita nuevas formas de responder a dichas preguntas.

No es necesario buscar muy lejos para darnos cuenta de que el estado de una teoría no es suficiente para aclarar completamente lo que busca explicar. La MC deja muchas preguntas abiertas sobre los fundamentos de la misma teoría, así como la interpretación de varias de las entidades utilizadas en la teoría. Por ejemplo, el uso de la teoría de probabilidad en la mecánica cuántica es fundamental para muchas aplicaciones y fenómenos que ésta describe, pero ha sido tema de debate la concepción de este concepto a partir de una teoría fundamental. Independientemente de la interpretación que se tome, se han realizado varios esfuerzos en entender los fenómenos cuánticos, y la maquinaria teórica es suficiente para explicarlos, pero no se responde a la pregunta de por qué funciona.

Extendiendo la línea de pensamiento un poco más, es increíble darnos cuenta de que la relatividad general ha explicado muchas de las preguntas de la cosmogonía, así como los componentes más exóticos del universo, y nos ha acercado mucho a entender aquellos que parecían inexistentes hasta hace unos años. La materia y la energía oscura se han presentado como un reto importante para los científicos, dado que las evidencias y mediciones muestran su influencia en la dinámica cósmica; sin embargo, no hemos sido capaces de responder qué son. Y no es la falta de teoría lo que nos aleja del entendimiento de la naturaleza del universo oscuro; más bien, hacía falta ver hacia otras teorías que nos han ayudado a entender otros entes que escapaban a nuestros ojos.

Siguiendo esta filosofía, encontramos en la literatura científica otra corriente teórica de la mecánica cuántica, conocida como mecánica cuántica estocástica (SQM por sus siglas en inglés), cuyo propósito es tratar de entender o interpretar la MC desde un punto de vista de la teoría de procesos estocásticos. En esta línea de investigación, cabe destacar el trabajo pionero del físico húngaro Imre Fényes, sobre la deducción de la ecuación de Schrödinger usando conceptos de la teoría de los procesos estocásticos [?]. Sin embargo, la teoría de la mecánica cuántica estocástica se atribuye a Edward Nelson, quien descubrió de forma independiente una derivación de la ecuación de Schrödinger mediante una generalización de la segunda ley de Newton, conocida como ecuación diferencial estocástica tipo Langevin del movimiento browniano; mostrando con ello el concepto probabilístico de la teoría cuántica [13]. El trabajo de Nelson dio inicio a otras investigaciones relacionadas con el desarrollo del método de cuantificación estocástica (SQ por sus siglas en inglés), como por ejemplo el enfoque estocástico del espacio-tiempo de Frederic en 1976 y el método de SQ de Parisi y Wu en 1981 para cuantificar teorías de campos mediante un tiempo ficticio. También la SQM ha contribuido al desarrollo de la electrodinámica estocástica como otra herramienta teórica para el entendimiento e interpretación de la MC [9]. La hipótesis esencial de la electrodinámica estocástica es suponer que el sistema cuántico está inmerso en un campo fluctuante de radia-

ción del punto cero (zero-point radiation field, ZPF por sus siglas en inglés), y como consecuencia de la interacción, se pretende obtener las ecuaciones que gobiernan el comportamiento cuántico del sistema.

Otro de los problemas de extraordinaria importancia que aún continúa abierto es la unificación de la MC con la relatividad general (GR, por su siglas en inglés). Hoy en día existen notables esfuerzos por lograr este objetivo; sin embargo, hasta ahora no hay pruebas observacionales de que estas propuestas sean realistas. Mientras tanto, la comunidad científica continúa trabajando y explorando otras alternativas que se complementan entre sí hasta alcanzar el objetivo propuesto. Por ejemplo, en un trabajo relativamente reciente [12], se ha propuesto otra forma alternativa de interpretar la MC en la que se ha logrado establecer la ecuación de Klein-Gordon (KG) en su forma hidrodinámica en espacio-tiempo curvos, permitiendo encontrar un balance de energías e identificar las diferentes contribuciones cuánticas, gravitacionales e incluso electromagnéticas. Bajo esta premisa, surge la idea de generalizar la mecánica cuántica estocástica a espacio-tiempos curvos. Vale la pena comentar que la SQM de Nelson ha podido extender sus alcances a la relatividad especial, en los trabajos reportados por Zastawniak [19] y Lehr [10], en los cuales se logra obtener la ecuación de Klein-Gordon en el espacio de Minkowski a partir de ecuaciones diferenciales estocásticas. Más aún, en uno de sus trabajos [14], Nelson lanza uno de los retos, entre otros, respecto a la posible extensión de su teoría al régimen de la relatividad general.

Hoy en día, las investigaciones sobre SQM continúan su desarrollo en el estudio de sistemas cuánticos abiertos, desarrollando conceptos como las trayectorias cuánticas y las ecuaciones diferenciales estocásticas cuánticas; sin embargo, hasta donde hemos podido investigar, la conexión de la SQM con la relatividad general no ha sido reportada en la literatura actual. El objetivo principal de esta tesis consiste en mostrar que dicha conexión es posible, y nuestra propuesta es la siguiente: como es bien conocido, las ondas gravitacionales o las fluctuaciones del espacio-tiempo permean en todo el universo y han sido producidas desde su inicio. El big-bang, la

inflación, la producción de hoyos negros primordiales, el choque de hoyos negros e incluso el movimiento de los planetas alrededor del sol, de las estrellas alrededor de las galaxias y de las galaxias en la expansión del universo, todo eso produce una enorme cantidad de ondas gravitacionales con diferentes frecuencias y amplitudes. En general, estas son muy pequeñas, pero son capaces de mover pulsares con una masa mayor que la del sol, más de 20 metros, como lo ha medido ya el laboratorio NANOGrav [1]. Entonces, se puede decir que existe un Fondo de Ondas Gravitacionales (GWB, por sus siglas en inglés) en el universo que puede ser medido.

Dicho fondo gravitacional afectará a todas las partículas que vivan en él, pero en particular afecta a aquellas cuyas masas sean pequeñas, haciendo que cada una de ellas realice un movimiento de forma irregular tipo movimiento browniano, cuya dinámica puede ser descrita por una ecuación diferencial estocástica. Es importante destacar que la relatividad general fue formulada sobre una variedad diferenciable suave, es decir, sobre un espacio topológico que localmente es R^4 , se puede pensar que es plano localmente, como una hoja de papel. Sin embargo, si vivimos en un GWB esto ya no es cierto, habrá que tomar en cuenta la perturbación local del espacio-tiempo, y de esta manera pensarlo como una variedad similar a un lago. A este nivel, como los pulsares en la galaxia, las partículas ya no siguen geodésicas, pues estas son alteradas por el movimiento de las oscilaciones que juegan el papel de las fluctuaciones estocásticas. Bajo estas consideraciones, hemos mostrado que es plausible tomar en cuenta las ideas propuestas por Nelson, basadas en una forma alternativa de escribir la ecuación tipo Langevin del movimiento browniano y proponer que las trayectorias de estas partículas tienen la componente geodésica más una componente estocástica. Tomando en cuenta la metodología de la SQM así como los estudios reportados en [12], hemos sido capaces de obtener la ecuación de Klein-Gordon en espacio-tiempo curvos; y por lo consiguiente, damos respuesta a la pregunta formulada por Nelson, sobre la posible extensión de la SQM a la relatividad general. En este esquema mostramos que la ecuación de campo asocia-

da a las partículas brownianas es precisamente la ecuación de Klein-Gordon [6]. Creemos que entre las consecuencias que pueden surgir de nuestra contribución, una de las más relevantes sería la siguiente: en el límite no relativista, la ecuación de KG se reduce a la ecuación de Schrödinger; luego entonces la mecánica cuántica puede ser consecuencia de las fluctuaciones del espacio-tiempo, dejando expuesta nuevamente la intrínseca relación entre la MC y los procesos estocásticos, con implicaciones fundamentales que podrían incluso permitir una reinterpretación distinta de la MC.

El contenido de la tesis está estructurado de la siguiente manera: en el capítulo 2 exploramos los preliminares necesarios para comprender la teoría de la Mecánica de Nelson. En el capítulo 3 realizamos una descripción de la mecánica cuántica estocástica en el régimen no-relativista. El capítulo 4 explora la descripción de la mecánica cuántica estocástica en espacio-tiempos curvos y, finalmente, en el capítulo 5 hablamos sobre la interpretación y aplicaciones del formalismo desarrollado.

Preliminares

En este capítulo, vamos a explorar las principales características de los procesos estocásticos, las generalizaciones realizadas y aquellas conexiones que existen con la mecánica cuántica, las cuales en los siguientes capítulos nos servirán para describir el tema central.

Los procesos estocásticos son fenómenos que presentan un comportamiento no determinista. El origen del movimiento errático de las partículas Brownianas (PB) se debe al ruido, el cual puede tener diferentes fuentes, por ejemplo, un baño térmico, un gas enrarecido, un factor ambiental, o bien, a la aleatoriedad en la que se encuentra el sistema. Por ejemplo, el Proceso de Galton-Watson, modela la evolución de la población donde el número de descendientes de una generación a otra se da de manera aleatoria.

La teoría de los procesos estocásticos nace a partir del estudio del movimiento Browniano. El movimiento Browniano (MB) es un fenómeno físico reportado por el biólogo Robert Brown en 1826, quien observó el movimiento errático de partículas suspendidas en un líquido. Fue hasta 1905 cuando Einstein pudo explicar el movimiento browniano como un proceso de difusión a nivel microscópico, es decir, su idea era obtener la ecuación de difusión para la densidad de probabilidad $P(x, t)$, siendo x la posición y t el tiempo. Einstein pudo obtener la expresión para el desplazamiento cuadrático promedio (DCP), esto es, $\langle (x - x_0)^2 \rangle = 2Dt$, donde

D es el coeficiente de difusión.

Por otra parte, en 1908, el físico francés Paul Langevin propuso un método alternativo más simple para describir el MB basado en la segunda ley de Newton. Debido a que el conglomerado de partículas está inmerso en un fluido, Langevin sugirió que la aceleración que experimenta una sola PB se debe a dos fuerzas: una es la fuerza de fricción de Stokes y la otra es de naturaleza aleatoria o fluctuante en el tiempo, también conocida como ruido estocástico o fuerza estocástica, o simplemente ruido. El origen de las fluctuaciones estocásticas proviene de las constantes colisiones que experimenta la PB con los átomos o moléculas del fluido en el que está inmersa. Por esta razón, la ecuación de Langevin se conoce como una ecuación diferencial estocástica. Mediante un método audaz, Langevin pudo obtener la misma expresión para DCP que había obtenido Einstein en 1905. La ecuación de Langevin describe la dinámica estocástica de la PB: sin embargo, su solución explícita no es posible de obtener, sólo la solución promedio de las cantidades físicas relevantes, siempre y cuando se conozcan las propiedades estadísticas del ruido. En 1930, Ornstein y Uhlenbeck, mostraron que los métodos de Einstein y Langevin son equivalentes; porque lograron demostrar que, dada una ecuación de Langevin es posible obtener la ecuación de Fokker-Planck correspondiente para la densidad de probabilidad. La teoría del MB impulsó el desarrollo de la teoría de los procesos estocásticos, en los que intervinieron destacados matemáticos como: N. Wiener, A. Kolmogorov, P. Lévy, J. Doob, Ito Kiyoshi, etc. quienes contribuyeron significativamente al desarrollo de dicha teoría con aplicaciones hoy en día, en diversas áreas como la física, la química, la biología, medicina e incluso en finanzas, donde destaca la ecuación de Black-Scholes y la modelación de mercados, entre otras.

En la inmensa variedad de los trabajos teóricos publicados en la literatura científica relacionados con el MB, es notoria una descripción en términos de ecuaciones de Langevin o tipo Langevin y de sus correspondientes ecuaciones de Fokker-Planck (EFP) asociadas a la densidad de probabilidad y sus posibles generalizaciones. Y muchos otros sólo en el contexto de ecuaciones diferenciales estocásticas de Lan-

gevin o tipo Langevin. Hoy en día, dichas técnicas se aplican a una variedad de fenómenos en los que las fluctuaciones estocásticas juegan un papel muy relevante. Su incursión en la astrofísica y la cosmología es cada vez más relevante. En la siguiente sección, mostraremos de forma didáctica y sin mucha álgebra que, dada una ecuación de Langevin no relativista, lo más general posible, es posible obtener la EFP para la densidad de probabilidad.

2.1. Ecuación diferencial estocástica y la ecuación de Fokker-Planck

Como hemos mencionado, la ecuación de Langevin es una ecuación diferencial estocástica propuesta como un método alternativo a la metodología desarrollada por Einstein en 1905, para describir la dinámica irregular o azarosa de partículas microscópicas suspendidas en un fluido. Por otro lado, la ecuación diferencial estocástica más general para el caso de una variable estocástica $y(t)$ se puede escribir de la siguiente manera

$$\frac{dy}{dt} = A(y, t) + B(y, t)\xi(t), \quad (2.1)$$

donde la función $A(y, t)$ representa el término de arrastre o término determinista, $B(y, t)$ es el término de difusión y $\xi(t)$ corresponde al término estocástico, también conocido como ruido estocástico o simplemente ruido. Si $B(y, t)$ es constante, entonces se dice que el ruido $\xi(t)$ es aditivo, y si $B(y, t)$ no es constante, entonces el ruido es multiplicativo. Es importante comentar que en el caso del MB, el ruido da cuenta de la interacción de la PB con sus alrededores, mediante las constantes colisiones que la PB experimenta con las moléculas del fluido (baño térmico) en la que está inmersa. Debido al número enorme de grados de libertad de la PB, hasta el momento no se conoce la forma explícita del ruido como función del tiempo y por lo tanto no es posible resolver explícitamente la EDE (2.1) para todo tiempo. En el mejor de los casos es posible resolverla estadísticamente si se conocen las propiedades estadísticas del ruido $\xi(t)$. Las propiedades estadísticas más simples del

ruido fueron establecidas por Ornstein y Uhlenbeck en 1930 [1], cuando abordaron el problema en términos de la ecuación de Langevin para la velocidad de la PB.

Para poder obtener información estadística de la ec. (2.1), es necesario conocer las propiedades estadísticas del ruido $\xi(t)$. En el caso más simple satisface las propiedades estadísticas de un ruido blanco Gaussiano, es decir,

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad (2.2)$$

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2\lambda \delta(t - t'). \quad (2.3)$$

En este caso se dice que el proceso estocástico $y(t)$ es Markoviano debido a que la función de correlación (2.3) es una delta de Dirac, esto significa que para $t \neq t'$ la función de correlación $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 0$, y por tanto el ruido no tiene memoria. El ruido Gaussiano, o blanco, es de vital importancia dado que por el teorema de límite central una cantidad grande de realizaciones tiende a una distribución Gaussiana. Para el caso particular del Movimiento Browniano, se tiene un número muy grande de choques de las moléculas del baño térmico con la partícula Browniana, es por eso que parece adecuado modelar dicha interacción de tal forma.

En principio, a toda EDE le corresponde una Ecuación de Fokker-Planck (EFP) asociada a la densidad de probabilidad condicional (DPC) $P(y, t|y_0, t_0)$, donde y_0 representa el valor inicial de la variable estocástica y al tiempo inicial t_0 , y sin perder generalidad consideramos $t_0 = 0$.

Sin entrar en los detalles matemáticos, es posible mostrar que a partir de la ec. (2.1), se puede obtener la EFP para la densidad de probabilidad condicional $P(y, t|y_0)$, la cual se puede escribir como

$$\frac{\partial P(y, t|y_0)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}[D^{(1)}(y, t)P(y, t|y_0)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}[D^{(2)}(y, t)P(y, t|y_0)], \quad (2.4)$$

sujeto a la condición inicial $P(y, 0|y_0) = \delta(y - y_0)$. El término $D^{(1)}(y, t)$ se conoce como coeficiente de arrastre, mientras que $D^{(2)}(y, t)$ se define como el coeficiente de difusión. La solución de la ec. (2.4) sujeta a la condición inicial anterior se le conoce como solución fundamental de la EFP. Los coeficientes de arrastre y difusión se

relacionan con la ec. (2.1) de la forma

$$D^{(1)}(x, t) = A(x, t) + \lambda B(x, t) \frac{\partial B(x, t)}{\partial x}, \quad (2.5)$$

$$D^{(2)}(x, t) = 2\lambda B^2(x, t). \quad (2.6)$$

Luego entonces, dada una ecuación diferencial estocástica de la forma (2.1), podemos calcular los coeficientes de arrastre (2.5) y difusión (2.6), para después construir su correspondiente EFP dada por la ec. (2.4).

2.1.1. El caso multivariable

La ecuación diferencial estocástica para el vector $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$ se puede escribir de la siguiente manera

$$\frac{dy_i}{dt} = A_i(\mathbf{y}, t) + B_{ij}(\mathbf{y}, t)\xi_j(t), \quad (2.7)$$

donde A_i son las componentes de un vector, B_{ij} los elementos de una matriz y $\xi_j(t)$ las componentes de un ruido vectorial con propiedades estadísticas de un ruido blanco gaussiano tal que:

$$\begin{aligned} \langle \xi_i(t) \rangle &= 0 \\ \langle \xi_i(t)\xi_j(t') \rangle &= 2\lambda \delta_{ij}\delta(t-t'), \end{aligned} \quad (2.8)$$

siendo λ la intensidad del ruido. La EFP correspondiente para la densidad de probabilidad conjunta $P(\mathbf{y}, t|\mathbf{y}_0)$ en el caso multivariable está dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(\mathbf{y}, t|\mathbf{y}_0)}{\partial t} &= - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial y_i} [D_i^{(1)}(\mathbf{y}, t) P(\mathbf{y}, t|\mathbf{y}_0)] \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j}^N \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} [D_{ij}^{(2)}(\mathbf{y}, t) P(\mathbf{y}, t|\mathbf{y}_0)], \end{aligned} \quad (2.9)$$

sujeto a la condición inicial

$$P(\mathbf{y}, 0|\mathbf{y}_0) = \delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0). \quad (2.10)$$

También es posible mostrar que los coeficientes de arrastre y difusión están dados por

$$D_i^{(1)}(\mathbf{y}, t) = A_i(\mathbf{y}, t) + \lambda B_{jk}(\mathbf{y}, t) \frac{\partial B_{jk}(\mathbf{y}, t)}{\partial x_j}, \quad (2.11)$$

$$D_{ij}^{(2)}(\mathbf{y}, t) = 2\lambda B_{ik}(\mathbf{y}, t) B_{jk}(\mathbf{y}, t). \quad (2.12)$$

Por lo tanto, dada el conjunto de ecs. (2.7) podemos construir la EFP tal como lo requiere la ec. (2.9)

2.1.2. Ecuación de continuidad para una y varias variables

La EFP también se puede escribir como una ecuación de continuidad para la densidad de probabilidad, en el caso de una y varias variables.

Se define una corriente probabilidad dada por

$$J(y, t) = D^{(1)}(y, t)P(y, t|y_0) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [D^{(2)}(y, t)P(y, t|y_0)], \quad (2.13)$$

la cual indica la tasa a la cual está fluyendo la probabilidad en un punto y al tiempo t . Usando la definición anterior, podemos escribir la EFP, (2.4), como

$$\frac{\partial P(y, t|y_0)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} J(y, t) = 0, \quad (2.14)$$

la cual es una ecuación de continuidad.

El caso de varias variables se puede generalizar considerando el vector de corriente de probabilidad $\mathbf{J} = (J_1, J_2, \dots, J_N)$, donde en cada punto se define el flujo de probabilidad como

$$J_i(\mathbf{y}, t) = D_i^{(1)}(\mathbf{y}, t)P(\mathbf{y}, t|\mathbf{y}_0) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial y_j} [D_{ij}^{(2)}(\mathbf{y}, t)P(\mathbf{y}, t|\mathbf{y}_0)]. \quad (2.15)$$

Quedando la EFP multivariable, (2.9) como

$$\frac{\partial P(\mathbf{y}, t|\mathbf{y}_0)}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial y_i} J_i(\mathbf{y}, t) = 0. \quad (2.16)$$

En adelante usaremos únicamente D_i y D_{ij} para las cantidades $D_i^{[1]}$ y $D_{ij}^{[2]}$ respectivamente.

Algunos Ejemplos

Veamos ahora algunos ejemplos muy sencillos de cómo construir una EFP a partir de una EDE.

Consideremos la ecuación de Langevin para la variable v dada por

$$m\dot{v} = -\alpha v + \xi(t) \quad (2.17)$$

o bien

$$\dot{v} = -\gamma v + \frac{1}{m}\xi(t) \quad (2.18)$$

,con $\gamma = \alpha/m$. De acuerdo con las ecs. (2.5) y (2.6), podemos verificar que $A(v, t) = -\gamma v$ y $B(v, t) = 1/m$, de modo que $D^{(1)} = -\gamma v$ y $D^{(2)} = 2\lambda/m^2$. De esta manera concluimos que la EFP para la densidad de probabilidad condicional será

$$\frac{\partial P(v, t|v_0)}{\partial t} = \gamma \frac{\partial}{\partial v} [vP(v, t|v_0)] + \frac{\lambda}{m^2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} P(v, t|v_0), \quad (2.19)$$

sujeta a la condición inicial $P(v, 0|v_0) = \delta(v - v_0)$.

Si queremos obtener la EFP para la densidad de probabilidad condicional del espacio fase $P(x, v, t|x_0, v_0)$ para la partícula browniana (PB), debemos construir la ecuación de Langevin en el espacio fase de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -\gamma v + \frac{1}{m}\xi(t), \end{aligned} \quad (2.20)$$

En este caso debemos usar la formulación multivariable anterior, y siguiendo los pasos similares podemos mostrar que la EFP tiene la siguiente forma

$$\frac{\partial P}{\partial t} + v \frac{\partial P}{\partial x} = \gamma \frac{\partial}{\partial v} vP + \frac{\lambda}{m^2} \frac{\partial^2 P}{\partial v^2}, \quad (2.21)$$

sujeta a la condición inicial $P(x, v, 0|x_0, v_0) = \delta(x - x_0)\delta(v - v_0)$.

2.2. La relación entre el proceso de Wiener y el ruido blanco gaussiano

Desde el punto de vista de la teoría de los procesos estocásticos, el proceso de Wiener fue propuesto para describir el movimiento browniano como un proceso estocástico de tiempo continuo y valor real. En matemáticas aplicadas, se utiliza para representar la integral de un Ruido Blanco Gaussiano (RBG), por lo que resulta útil como modelo de ruido en diferentes campos de la ciencia. En física, se emplea para estudiar el movimiento browniano y otros tipos de procesos de difusión.

El proceso de Wiener, definido como $W(t)$, es una función continua de $t \geq 0$, caracterizada por las siguientes propiedades:

- (i) $W(0) = 0$.
- (ii) Todos los incrementos $W(t_1) - W(t_0), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ para $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n$ son independientes.
- (iii) Cada incremento está distribuido normalmente con valor medio $E[W(t_{i+1}) - W(t_i)] = 0$, y varianza $Var[W(t_{i+1}) - W(t_i)] = t_{i+1} - t_i$.

Además, $W(t)$ puede definirse como la integral definida de un RBG $\xi(t)$, de la siguiente forma

$$W(\tau) = \int_0^\tau \xi(t) dt, \quad (2.22)$$

o de manera equivalente, el RBG es la derivada temporal del proceso de Wiener, tal que

$$\frac{dW(t)}{dt} = \xi(t), \quad dW = \xi(t) dt, \quad (2.23)$$

donde $\xi(t)$ es un RBG con valor medio $E[\xi(t)] = 0$ y una función de correlación $E[\xi(t_1)\xi(t_2)] = \delta(t_2 - t_1)$. Como puede verse, la derivada del proceso de Wiener es igual a $\xi(t)$, por lo que se espera que $W'(t)$ también satisfaga las mismas propiedades estadísticas que $\xi(t)$. Para entender por qué esta relación es cierta, definamos

primero la derivada de un proceso estocástico. Así, un proceso estocástico $X(t)$ se dice que es diferenciable en media cuadrática con derivada $X' = dX/dt$, si

$$\frac{X(t+h) - X(t)}{h} \rightarrow X', \quad E \left[\left(\frac{X(t+h) - X(t)}{h} - X' \right)^2 \right] \rightarrow 0, \quad (2.24)$$

cuando $h \rightarrow 0$. Puede verse que la definición es básicamente la misma que en el cálculo regular, excepto que se requiere que la esperanza tienda a cero con una convergencia cuadrática. Puede demostrarse que el valor medio de la derivada es igual a cero, porque

$$\begin{aligned} E[X'] &= E \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{X(t+h) - X(t)}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E[X(t+h) - X(t)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E[X(t+h)] - E[X(t)]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0, \end{aligned} \quad (2.25)$$

De manera similar, la función de correlación de la derivada de un proceso estocástico se define como $C_{X'}(t_1, t_2) \equiv E[X'(t_1)X'(t_2)]$, tal que

$$\begin{aligned} C_{X'}(t_1, t_2) &= E \left[\lim_{k \rightarrow 0} \frac{X(t_1+k) - X(t_1)}{k} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{X(t_2+h) - X(t_2)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} E \left[\frac{(X(t_1+k) - X(t_1))(X(t_2+h) - X(t_2))}{kh} \right] \\ &= \lim_{h, k \rightarrow 0} \left(\frac{C_X[t_1+k, t_2+h] - C_X[t_1, t_2+h]}{k} - \frac{C_X[t_1+k, t_2] - C_X[t_1, t_2]}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{\partial C_X(t_1, t_2+h)}{\partial t_1} - \frac{\partial C_X(t_1, t_2)}{\partial t_1} \right) = \frac{\partial^2 C_X(t_1, t_2)}{\partial t_2 \partial t_1}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Así, se ha demostrado que la función de correlación temporal de la derivada de un proceso estocástico es la derivada parcial mixta de segundo orden. En el caso de $X(t) = W(t)$, es fácil verificar que $E[W'(t)] = 0$ y que la función de correlación es

$$C_W(t_1, t_2) = E[W(t_1)W(t_2)] = \min(t_1, t_2), \quad \text{si } t_1 < t_2 \text{ o } t_2 < t_1, \quad (2.27)$$

de donde concluimos que

$$\frac{\partial \min(t_1, t_2)}{\partial t_1} = \begin{cases} 1 & \text{si } t_1 < t_2 \\ 0 & \text{si } t_2 < t_1 \end{cases}$$

$$= H(t_2 - t_1), \quad (2.28)$$

en todas partes excepto en $t_1 = t_2$, siendo $H(x)$ la función escalón de Heaviside. Pero sabemos que la derivada de esta función escalón es precisamente la delta de Dirac, y por tanto

$$C_{W'}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 \min(t_1, t_2)}{\partial t_2 \partial t_1} = \frac{\partial H(t_2 - t_1)}{\partial t_2} = \delta(t_2 - t_1). \quad (2.29)$$

Por lo tanto, debido a que el valor medio $E[W'(t)] = 0$ y la función de correlación $E[W'(t_1)W'(t_2)] = \delta(t_2 - t_1)$, puede concluirse que la derivada del proceso de Wiener también satisface las mismas propiedades estadísticas que el ruido blanco. Ahora solo falta mostrar que también está distribuida normalmente. Por definición, el proceso estocástico de Wiener tiene derivada $\frac{dW'}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{W(t+h) - W(t)}{h}$, pero como cada incremento del proceso de Wiener está distribuido normalmente e independiente, su derivada también está distribuida normalmente, ya que la diferencia de dos normales independientes es una normal. Esto implica que la derivada del proceso de Wiener es un proceso gaussiano con media cero y correlación temporal delta, que es precisamente la definición estándar de ruido blanco gaussiano.

2.3. Cálculo de Ito

Una característica importante de los procesos con los que estamos trabajando es que las gráficas son funciones continuas pero no diferenciables, como se puede ver en la figura [2.1](#). Esto representa un reto importante dado que el cálculo usual deja de ser adecuado para dichos procesos.

En otras palabras, la derivada

$$\frac{dW(t)}{dt} \quad (2.30)$$

no existe. Sin embargo, al estudiar el movimiento browniano o al usarlo como modelo, con frecuencia debemos estimar el cambio de una función del tipo $f(W(t))$ en un intervalo infinitesimal de tiempo.

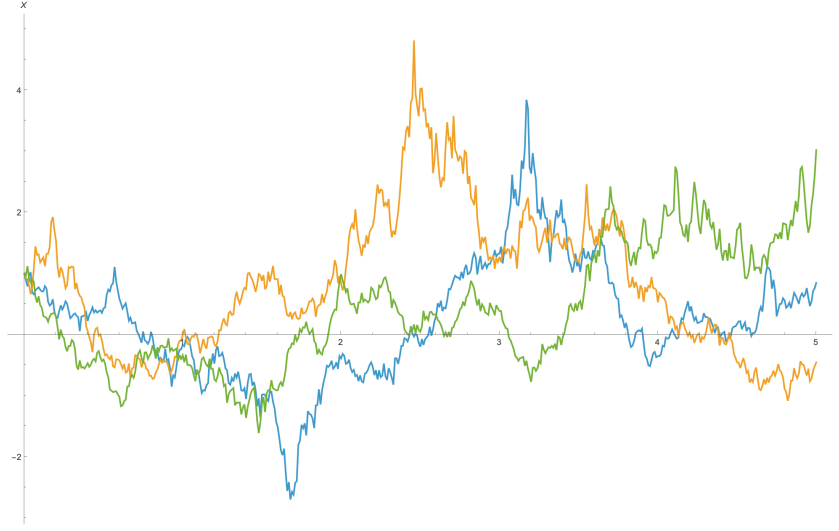


Figura 2.1: Traectorias del proceso $dx(t) = -\cos(t)dt + \sqrt{1+x^2}dW$, con condición inicial $x(0) = 1$.

Si la derivada $\frac{dW(t)}{dt}$ existiera, podríamos aplicar la regla de la cadena:

$$df = \frac{dW(t)}{dt} \cdot f'(W(t)). \quad (2.31)$$

Aunque esta expresión formalmente no tiene sentido, sugiere que podría ser posible describir el cambio df en términos de $dW(t)$, de tal forma que tenemos

$$df = f'(W(t))dW(t), \quad (2.32)$$

dicha expresión tiene más sentido dado que podemos expresar df en términos de los incrementos infinitesimales del proceso de Wiener. A esto se le conoce como Cálculo de Ito.

El desarrollo de Ito parte de analizar qué ocurre al expandir $f(W(t))$ en una serie de Taylor

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x) \Delta x + \frac{1}{2}f''(x)(\Delta x)^2 + \frac{1}{6}f'''(x)(\Delta x)^3 + \dots \quad (2.33)$$

Si sustituimos $x = W(t)$, obtenemos

$$\Delta f = \Delta W(t)f'(W(t)) + \frac{(\Delta W(t))^2}{2}f''(W(t)) + \dots \quad (2.34)$$

Dado que para un movimiento browniano $\langle (\Delta W(t))^2 \rangle = \Delta t$, el segundo término ya no puede ignorarse, pues es del mismo orden que el incremento temporal. La idea esencial del cálculo de Ito es que podemos sustituir:

$$(\Delta W(t))^2 \approx \Delta t, \quad (2.35)$$

y despreciar los términos de orden superior. Así, en forma diferencial,

$$df(W(t)) = f'(W(t)) dW(t) + \frac{1}{2} f''(W(t)) dt. \quad (2.36)$$

Esta es la **fórmula de Ito** o *lema de Ito*, el resultado fundamental del cálculo estocástico.

Es decir, de manera general podemos ver que si $f(t, x)$ es una función suave que depende de t y $W(t)$, de tal forma que $f(t, W(t))$, entonces, aplicando el mismo razonamiento,

$$df(t, W(t)) = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dW(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (dW(t))^2. \quad (2.37)$$

Como $(dW(t))^2 = dt$, tenemos finalmente:

$$df(t, W(t)) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x} dW(t). \quad (2.38)$$

De igual forma se puede generalizar para una función que depende de la variable estocástica $X(t, W(t))$, es decir $f(t, X(t, W))$, donde $X(t)$ es un proceso estocástico que satisface

$$dX_t = A(t) dt + B(t) dW(t), \quad (2.39)$$

donde $W(t)$ es el proceso de Wiener. Entonces:

$$df(t, X_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + A(t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} B(t)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + B(t) \frac{\partial f}{\partial x} dW(t). \quad (2.40)$$

Este es un resultado directo al sustituir $dX(t) \equiv dX_t = A(t)dt + B(t)dW(t)$ en la expansión de Ito truncada a segundo orden

$$df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (dX_t)^2. \quad (2.41)$$

Como $(dX_t)^2 = B(t)^2(dW(t))^2 = B(t)^2 dt$ y se ignoran los términos $dt dW(t)$ y $(dt)^2$, se obtiene la ecuación (2.40).

Por otro lado es posible definir la **integral de Ito** como el proceso inverso a la diferenciación. Decimos que

$$F(t, W(t)) = \int f(t, W(t)) dW(t) + \int g(t, W(t)) dt \quad (2.42)$$

si y sólo si

$$dF = f(t, W(t)) dW(t) + g(t, W(t)) dt. \quad (2.43)$$

Donde podemos considerar la integral como una suma de variables aleatorias lo cual resulta en una variable aleatoria.

Ejemplo:

Consideremos un caso muy simple para reflejar las diferencias entre el cálculo usual y el cálculo de Ito. Consideremos $f(x(t)) = x(t)^2$, y calculamos la relación entre los incrementos de f y los incrementos de $x(t)$

$$\begin{aligned} df &\equiv f(t + dt) - f(t) = x(t + dt)^2 - x(t)^2 \\ &= (x + dx)^2 - x^2 = x^2 + 2x dx + (dx)^2 - x^2 \\ &= 2x dx + (dx)^2. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Si consideramos el caso del cálculo usual el segundo término en la última línea es despreciable, sin embargo cuando $x(t)$ sigue una ecuación diferencial estocástica de la forma

$$dx(t) = A dt + B dW(t), \quad (2.45)$$

entonces tenemos

$$df = 2x dx + (dx)^2 = 2x (A dt + B dW(t)) + B^2 (dW)^2, \quad (2.46)$$

utilizando el lema de Ito tenemos que $(dW)^2 = dt$, quedando

$$df = (2Ax + B^2) dt + 2Bx dW \quad (2.47)$$

por lo que al integrar

$$\int_0^T df = 2AxT + B^2T + \int_0^T 2BxdW \quad (2.48)$$

Este resultado muestra que el teorema fundamental del cálculo no se cumple literalmente en el contexto estocástico.

El cálculo de Ito proporciona el marco fundamental para manejar procesos con trayectorias no diferenciables. Permite definir integrales, diferenciales y ecuaciones estocásticas de una forma coherente con la teoría de martingalas y los modelos de difusión.

Formalizar el cálculo de Ito requiere un conocimiento sólido de teoría de la medida, pero sus resultados son esenciales en física, biología, finanzas y cualquier campo donde los sistemas sean impulsados por ruido gaussiano.

2.4. Mecánica Cuántica

A un siglo del nacimiento y desarrollo de la mecánica cuántica es incuestionable el gran éxito que ha tenido, desde la parte científica, tecnológica, e incluso económica. La descripción de las escalas que corresponden a sus dominios son tan acertadas como complejas, sin embargo es indiscutible la exactitud de sus predicciones y resultados. Dichos resultados en su mayoría se obtienen a partir de la ecuación de Schrödinger.

A pesar de su éxito y de amplia gama de aplicaciones, la ecuación de Schrödinger fue derivada más que postulada desde primeros principios. En 1926, Erwin Schrödinger después de una serie de artículos logró establecer prácticamente toda la estructura de la mecánica cuántica no relativista, combinando las relaciones de Broglie y la ecuación de onda. También la podemos obtener a partir del proceso de equivalencia, donde los operadores $i\hbar\partial_t$ y $-i\hbar\nabla$ son reemplazados para las variables E y $\mathbf{p}$, respectivamente, en la expresión para la energía de una partícula $E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + m\phi$ que actúa para una función de onda Ψ

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi - \left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) \Psi \quad (2.49)$$

Schrödinger probó la equivalencia entre su mecánica de ondas con la mecánica cuántica desarrollada por Heisenberg Y Born.

La interpretación física de la ecuación de Schrödinger ha sido un tema central en la construcción conceptual de la mecánica cuántica desde sus inicios. En su formulación original, Schrödinger introdujo la función de onda ψ como un objeto ondulatorio con significado físico directo. A partir de esta función, definió una densidad

$$\rho(\mathbf{r}, t) = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2, \quad (2.50)$$

y una corriente asociada, mostrando que ambas satisfacen una ecuación local de continuidad. En esta visión, $|\psi|^2$ no representa una probabilidad, sino una densidad distribuida que describe la presencia del electrón en el espacio. Es decir, bajo esta interpretación, la partícula no es un objeto localizado, sino una entidad extendida que se distribuye en proporción a $|\psi|^2$ [17; 18].

Por otro lado, la interpretación estadística propuesta por Born [3]. Born argumentó que la función de onda no describe la distribución física de una partícula extendida, sino la probabilidad de localizarla en un punto del espacio-tiempo. De acuerdo con esta propuesta $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2$ representa la probabilidad de encontrar la partícula en un espacio determinado. Esta reinterpretación marcó un giro fundamental en la teoría cuántica: la naturaleza probabilística del formalismo juega un papel importante.

La aceptación de esta interpretación probabilística no fue universal. Para la escuela de Copenhague, encabezada por Bohr [? ?], la teoría cuántica es *completa* y no requiere la introducción de variables ocultas ni estructuras subyacentes más fundamentales. La función de onda proporciona una descripción exhaustiva del sistema físico, pero únicamente en términos de probabilidades asociadas a resultados experimentales.

Einstein, en contraste, rechazaba esta perspectiva. Consideraba que la teoría cuántica, aunque correcta en sus predicciones, es incompleta. Para él, la función de onda no podía constituir una descripción total del estado físico; debía existir una dinámica subyacente que determinara el comportamiento individual de cada partícula, incluso si la teoría observable solo proporciona distribuciones probabilísticas. Esta postura dio origen a la llamada escuela estadística. Según esta visión, la mecánica cuántica debe ser entendida como una teoría estadística emergente derivada de procesos más fundamentales.

Estas dos visiones antagónicas produjeron un debate filosófico y científico profundo: Bohr defendía que la función de onda constituye el estado físico completo de un sistema cuántico, mientras que Einstein sostenía que tal estado debe incluir variables adicionales que determinen el comportamiento individual del sistema. Entonces surgen teorías que proponen una función efectiva que permita interpretar la mecánica cuántica bajo diferentes condiciones.

Por ejemplo, utilizando la relación entre la función de onda y la acción compleja $\mathcal{S}$

$$\Psi = e^{i\mathcal{S}/\hbar}, \quad (2.51)$$

es posible llegar a la ecuación de Hamilton-Jacobi en el límite semi-clásico, es decir, cuando $\hbar \rightarrow 0$. A esto se le conoce como aproximación WKB, por Wentzel, Brillouin y Kramers, y permite estudiar un sistema cuántico en el régimen semiclásico.

Madelung, propone una transformación similar

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \sqrt{n(\mathbf{x}, t)} e^{iS(\mathbf{x}, t)/\hbar}, \quad (2.52)$$

sustituyendo en la ecuación de Schrödinger compleja y lineal (2.49), se transforma en un par de ecuaciones reales y no lineales para las variables $n(\mathbf{x}, t)$ (la densidad de probabilidad de la posición de una partícula) y $S(\mathbf{x}, t)$ (la acción de la partícula). Dicha forma es conocida como la versión hidrodinámica de la ecuación de Schrödinger, donde las ecuaciones corresponden a la ecuación de continuidad y una ecuación de Euler.

De (2.52) se puede obtener las siguientes relaciones

$$n = |\Psi|^2, \quad (2.53)$$

$$S = -\frac{i\hbar}{2} \ln \left(\frac{\Psi}{\Psi^*} \right), \quad (2.54)$$

junto con el campo de velocidades, definido como

$$\mathbf{v} = \frac{\nabla S}{m}. \quad (2.55)$$

Sustituyendo (2.52) en la ec. de Schrödinger (2.49) y utilizando (2.55), tenemos para la parte imaginaria

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0, \quad (2.56)$$

para la parte real

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\nabla S)^2 + V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 \sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 0. \quad (2.57)$$

La ec. (2.56) es similar a la ecuación de continuidad en hidrodinámica, donde el flujo es $\mathbf{j} = n\mathbf{v}$. La parte real (2.57) puede considerarse como la ecuación de Hamilton-Jacobi, o bien, la ecuación de Bernoulli de la hidrodinámica, más un término extra que corresponde a un potencial cuántico de Bohm, definido por

$$V_Q = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\nabla^2 n}{n} - \frac{(\nabla n)^2}{2n^2} \right] = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 \sqrt{n}}{\sqrt{n}}. \quad (2.58)$$

Esto permite entender la ecuación de Schrödinger, en su versión hidrodinámica, como un fluido perfecto, irrotacional, compresible, con un potencial cuántico. De Broglie interpretaba este potencial asociado a una fuerza cuántica que corresponde a la tensión interna entre las moléculas.

También es bien sabido que tomando el gradiente de la ec. (2.57), obtenemos la ecuación de Euler, en este caso se puede ver que la fuerza cuántica corresponde al gradiente del potencial cuántico

$$F_Q = \nabla V_Q. \quad (2.59)$$

Utilizando la propiedad vectorial

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \nabla(\mathbf{u}^2/2) - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}), \quad (2.60)$$

dado que $\mathbf{v}$ es un campo irrotacional, $\mathbf{v} = \frac{\nabla S}{m}$, entonces se reduce la propiedad vectorial a $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \nabla(\mathbf{v}^2/2)$. Entonces la ecuación de Euler queda como

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = F_V + F_Q, \quad (2.61)$$

con F_V una fuerza externa debido al potencial V .

Finalmente y para consideraciones de la presente tesis consideramos la versión hidrodinámica de la ecuación de Schrödinger como la misma ecuación escrita en variables hidrodinámicas.

Mecánica Cuántica Estocástica

En este capítulo se explora las diferentes teorías que conducen a la mecánica cuántica, en particular se explora la mecánica cuántica estocástica (SQM, por sus siglas en inglés 'Stochastic Quantum Mechanics), la Electrodinámica Estocástica (SED, por Stochastic Electrodynamics) y Relatividad de Escala (SCR, por 'Scale Relativity'). Aunque el objetivo de las diferentes teorías es reproducir la ecuación de Schrödinger, podemos encontrar tanto puntos de conexión así como diferencias entre las diferentes vertientes mismas que desembocan en ecuaciones generalizadas de Schrödinger. Es importante presentar estos resultados porque buscamos generalizar dichos resultados en un espacio-tiempo curvo donde la ecuación de Klein-Gordon generalizada servirá como aquella ecuación de campo obtenida a partir de formalismos estocásticos.

Aunque históricamente la electrodinámica estocástica nació primero, fue en 1966 cuando E. Nelson presenta la mecánica cuántica estocástica, y parece conveniente explorar dicha teoría primero dado que las definiciones usadas pueden reinterpretarse en las otras teorías.

Se consideran las siguientes suposiciones:

- La trayectoria de la partícula cuántica se rige por un movimiento errático, el

cual se representa mediante la ecuación diferencial estocástica:

$$dX(t) = b_f(X(t), t)dt + \sigma dW_f(t). \quad (3.1)$$

Donde $X(t)$ es la posición de la partícula a cada tiempo t , b_f es una función de arrastre (forward), $\sigma = \sqrt{2D}$ es la raíz cuadrada del coeficiente de difusión y dW_f es el proceso de Wiener hacia adelante.

- Al ser un proceso reversible en el tiempo se considera la transformación temporal $\hat{T}$, tal que $\hat{T}f(t) = f(-t)$, es decir considera el paso del tiempo en dirección contraria. Con esto es natural pensar que existe una ecuación diferencial estocástica en dirección contraria (backward)

$$dX(t) = b_b(X(t), t)dt + \sigma dW_b(t). \quad (3.2)$$

- El coeficiente de difusión, σ debe desvanecerse para fenómenos macroscópicos dado que trabajamos con partículas cuánticas. Se considera inversamente proporcional a la masa de las partículas y proporcional a $\hbar$. Expresamos el coeficiente como $\sigma^2 = \hbar/m$.

Por otro lado, para establecer la relación entre el proceso de Wiener forward y backward, tenemos que

$$dW_b(t) = -dW_f(t) \quad (3.3)$$

- Se parte de la posición de las partículas cuánticas y se va construyendo la trayectoria en pasos infinitesimales del tiempo dt . Sin embargo, para conocer la velocidad y aceleración de las partículas es necesario definir una derivada para este tipo de trayectorias que son continuas pero no diferenciables. Se considera la siguiente propuesta, donde el promedio de la trayectoria tiene un papel fundamental

$$D_f X(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} E_t \left[\frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t} \right] \quad (3.4)$$

$$D_b X(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} E_t \left[\frac{X(t) - X(t - \Delta t)}{\Delta t} \right] \quad (3.5)$$

Para curvas diferenciables podemos identificar $D_f X(t) = D_b X(t) = \dot{x}(t) = v(t)$, la velocidad de la partícula.

Para el caso de nuestro interés se tiene que las derivadas estocásticas aplicadas a la posición de la partícula resultan en las funciones de arrastre de las ecuaciones diferenciales estocásticas

$$D_f X(t) = b_f(X(t), t); \quad D_b X(t) = b_b(X(t), t). \quad (3.6)$$

Con dichos operadores diferenciales parece razonable definir la velocidad como los promedio de ambos operadores, es decir

$$v(x, t) = \frac{b_f(x, t) + b_b(x, t)}{2}, \quad (3.7)$$

pero también se debe considerar

$$u(x, t) = \frac{b_f(x, t) - b_b(x, t)}{2}. \quad (3.8)$$

La diferencia entre una velocidad y otra tienen repercusiones fuertes en la teoría presentada, sin embargo por el momento las definiremos como velocidad sistemática (o de corriente o hidrodinámica) y velocidad estocástica (o caótica u osmótica) respectivamente, dichos nombres serán clarificados más adelante.

Para el caso de las aceleraciones ahora se pueden considerar diferentes combinaciones, dado que al tener diferentes operadores diferenciales podríamos considerar diferentes formas de derivar en segundo orden una función. Esto puede verse con mayor detalle en la parte dinámica.

Como se presentó en el capítulo anterior, las ecuaciones diferenciales estocásticas tienen asociadas ecuaciones de Fokker-Planck, las cuales nos permiten establecer ecuaciones diferenciales para la función de distribución de probabilidad $\rho(x, t)$. Para

las ecuaciones diferenciales estocásticas consideradas en este formalismo (3.1) y (3.2) tenemos respectivamente

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [b_f(x, t) \rho(x, t)] + \frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2}, \quad (3.9)$$

y

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [b_b(x, t) \rho(x, t)] - \frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2}. \quad (3.10)$$

Entre las diferentes ventajas que podría presentar estudiar estas ecuaciones, dos resultados sorprendentes son de interés. El primero se da cuando sumamos las ecuaciones (3.9) y (3.10), y sustituyendo las velocidades (3.7) y (3.8), obtenemos la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v(x, t) \rho(x, t)) = 0. \quad (3.11)$$

Para el caso donde se restan ambas ecuaciones de Fokker-Planck, obtenemos la ley de difusión de Fick,

$$u(x, t) = \frac{\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial x} \ln (\rho(x, t)). \quad (3.12)$$

Estos resultados resultan de bastante utilidad, en primer lugar se establece una ecuación de continuidad asociada a la velocidad de corriente v , y por otro lado una forma analítica para la velocidad estocástica se obtiene en términos de la función de densidad de probabilidad.

Podemos expresar las ecuaciones (3.1) y (3.2) en términos de las velocidades $v(x, t)$ y $u(x, t)$,

$$dX(t) = (v(x, t) + u(x, t))dt + \sigma dW_f(t). \quad (3.13)$$

y

$$dX(t) = (v(x, t) - u(x, t))dt - \sigma dW_f(t). \quad (3.14)$$

Con estas ecuaciones podemos determinar expresiones para b_f y b_b de manera explícita, solo falta definir la velocidad de corriente $v(x, t)$. Sin embargo primero es necesario explorar la forma de los operadores diferenciales que se ocuparán en esta teoría.

3.0.1. Operadores diferenciales

3.0.1.1. Cálculo de Ito y cambio de variable

Para estudio de la teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas se utiliza el cálculo de Ito, el cual extiende el cálculo diferencial tradicional para manejar derivadas e integrales que involucran variables aleatorias.

Una de las características clave del cálculo de Ito es que la regla de la cadena tradicional no se aplica de manera directa debido a la naturaleza aleatoria de los procesos. En su lugar, se utiliza la fórmula de Ito para llevar a cabo la diferenciación y la integración de manera coherente en el contexto estocástico.

Para esto consideremos una ecuación diferencial estocástica escrita de forma general

$$dx = f dt + g dW, \quad (3.15)$$

con $f = f(x, t)$ y $g = g(x, t)$ funciones cualesquiera, la primera determina el comportamiento determinista de la variable x , mientras que la segunda actúa como el coeficiente de difusión para la parte aleatoria. Consideramos dW incrementos Gaussianos, donde es importante el resultado, conocido como la regla de Ito

$$(dW)^2 = dt. \quad (3.16)$$

Dicho resultado tiene implicaciones fuertes al momento de realizar un cambio de variable. Para ejemplificar lo anterior consideremos una función $y = h(x)$, en una dimensión, el caso a dimensiones extra es directo, y realizamos un desarrollo en series de Taylor hasta segundo orden

$$dy = h'(x)dx + \frac{1}{2}h''(x)(dx)^2, \quad (3.17)$$

donde $h'(x) = \frac{dh}{dx}$. Sustituyendo la ec. (3.15) tenemos

$$dy = h'(x) (f dt + g dW) + \frac{1}{2} h''(x) (f dt + g dW)^2 \quad (3.18)$$

$$= h'(x) (f dt + g dW) + \frac{1}{2} h''(x) (g dW)^2 \quad (3.19)$$

$$= \left(h'(x) f + \frac{1}{2} h''(x) g^2 \right) dt + g h'(x) dW. \quad (3.20)$$

Donde en la segunda línea diferenciales de segundo orden son anulados y en la tercer línea se usa la regla de Ito. Podemos entonces determinar una ecuación diferencial estocástica para la variable y

$$dy = \left(h'(x) f + \frac{1}{2} h''(x) g^2 \right) dt + g h'(x) dW. \quad (3.21)$$

3.0.1.2. Derivada sistemática y estocástica

Si aplicamos esta regla de cambio de variable con las ecuaciones diferenciales (3.1) y (3.2) tenemos el siguiente resultado para la ecuación Forward

$$dg(x) = \left[(v + u) g'(x) + \frac{\sigma^2}{2} g''(x) \right] dt + \sigma g'(x) dW_f, \quad (3.22)$$

y para el caso Backward

$$dg(x) = \left[(v - u) g'(x) + \frac{\sigma^2}{2} g''(x) \right] dt - \sigma g'(x) dW_f, \quad (3.23)$$

cualquier función $g(x)$. El caso en varias dimensiones resulta en las siguiente expresión, dependiendo de si es el proceso Forward o backward entonces tenemos

$$dg(x) = \left[(\mathbf{v} \pm \mathbf{u}) \cdot \nabla + \frac{\sigma^2}{2} \nabla^2 \right] g dt \pm \sigma \nabla g dW. \quad (3.24)$$

Donde usamos la ec. (3.3) y definimos $dW = dW_b = -dW_f$. Si consideramos solamente las diferenciales promedio, y tomando en cuenta que $\langle dW \rangle = 0$, tenemos entonces que en promedio el diferencial de una función estocástica es

$$Dg(x) = \left[(\mathbf{v} \pm \mathbf{u}) \cdot \nabla + \frac{\sigma^2}{2} \nabla^2 \right] g. \quad (3.25)$$

Considerando que la función $g(x, t)$ también puede tener dependencia temporal, entonces definimos una diferencial hacia delante (caso Forward) D_f y una diferencial hacia atrás (caso Backward) D_b , definidas respectivamente como

$$D_f g(x) = \left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} + \mathbf{u}) \cdot \nabla + \frac{\sigma^2}{2} \nabla^2 \right] g(x, t). \quad (3.26)$$

y

$$D_b g(x) = \left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot \nabla - \frac{\sigma^2}{2} \nabla^2 \right] g(x, t). \quad (3.27)$$

Dichas expresiones resultan de gran utilidad, dado que muestran los operadores diferenciales completos de una función $g(\mathbf{x}, t)$. Sin embargo, la diferencia de signos resultan de considerar el sentido temporal en una dirección u otra. Par tener operadores independientes de los cambios temporales consideraremos los operadores diferenciales sistemático

$$D_c = \frac{D_f + D_b}{2}, \quad (3.28)$$

y estocástico

$$D_s = \frac{D_f - D_b}{2}. \quad (3.29)$$

Con esto los operadores diferenciales se mantienen invariantes antes transformadas temporales, quedando para la derivada sistemática

$$D_c = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla, \quad (3.30)$$

y para la derivada estocástica

$$D_s = \mathbf{u} \cdot \nabla + \frac{\sigma^2}{2} \nabla^2. \quad (3.31)$$

Es notable el resultado anterior, dado que el operador diferencial sistemático coincide con la derivada hidrodinámica, entonces si se aplica a la posición de la partícula recuperamos la velocidad hidrodinámica, o sistemática, es decir

$$D_c \mathbf{x} = \mathbf{v}. \quad (3.32)$$

Por otro lado, cuando aplicamos la derivada estocástica a la posición de la partícula obtenemos la velocidad caótica, o estocástica

$$D_s \mathbf{x} = \mathbf{u}. \quad (3.33)$$

Con esto ya quedan definidas las velocidades, ¿qué pasa con las aceleraciones?

3.0.2. Ecuaciones dinámicas

Una vez más, al tener diferentes tipos de derivadas resulta en diferentes aceleraciones debido a las diferentes formas en las que tenemos una segunda derivada, es decir

$$\mathbf{a}_{cc} = D_c D_c \mathbf{x} \quad (3.34)$$

$$\mathbf{a}_{ss} = D_s D_s \mathbf{x} \quad (3.35)$$

$$\mathbf{a}_{cs} = D_c D_s \mathbf{x} \quad (3.36)$$

$$\mathbf{a}_{sc} = D_s D_c \mathbf{x}. \quad (3.37)$$

Podemos considerar una aceleración total como la combinación lineal de todas las aceleraciones

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{a}_{cc} + \alpha_2 \mathbf{a}_{ss} + \alpha_3 \mathbf{a}_{cs} + \alpha_4 \mathbf{a}_{sc}, \quad (3.38)$$

donde los coeficientes quedarán determinados más adelante.

Ahora, si partimos de la segunda ley de Newton

$$\mathbf{f} = m\mathbf{a} \quad (3.39)$$

donde la fuerza neta podemos descomponerla de la forma $\mathbf{f} = \mathbf{f}_+ + \mathbf{f}_-$, donde $\mathbf{f}_+$ y $\mathbf{f}_-$ son tales que cambian o no cambian de signo respectivamente ante el operador temporal $\hat{T}$. Es decir

$$\hat{T}\mathbf{f} = \hat{T}(\mathbf{f}_+ + \mathbf{f}_-) = -\mathbf{f}_+ + \mathbf{f}_-, \quad (3.40)$$

dicha consideración resulta importante porque de manera general existen fuerzas invariantes ante transformaciones temporales, debido a que $\mathbf{v}$ cambia de signo mientras que $\mathbf{u}$ se mantiene invariante.

Entonces podemos separar la ec. (3.39) en la parte que se mantiene invariante ante transformaciones temporales y aquellas que cambian su signo, quedando

$$\mathbf{f}_+ = \alpha_1 \mathbf{a}_{cc} + \alpha_2 \mathbf{a}_{ss} \quad (3.41)$$

$$\mathbf{f}_- = \alpha_3 \mathbf{a}_{cs} + \alpha_4 \mathbf{a}_{sc} \quad (3.42)$$

De acuerdo a lo reportado en diferentes análisis, únicamente un parámetro es suficiente para las ecuaciones anteriores $\lambda = -\alpha_1/\alpha_2$, y $\alpha_3 = \alpha_4 = 1$, de tal forma que coinciden con los resultados que se presentan más adelante. Por lo tanto tenemos

$$\mathbf{f}_+ = D_c \mathbf{v} - \lambda D_s \mathbf{u}, \quad (3.43)$$

$$\mathbf{f}_- = D_c \mathbf{u} + D_s \mathbf{v}. \quad (3.44)$$

O bien, definiendo el parámetro $\kappa = \sqrt{-\lambda}$, es posible escribir ambas ecuaciones en una sola, con las siguientes cantidades

$$\mathbf{p}_\kappa = m\omega_\kappa = m(\mathbf{v} + \kappa \mathbf{u}), \quad (3.45)$$

$$\mathbf{f}_\kappa = \mathbf{f}_+ + \kappa \mathbf{f}_-, \quad (3.46)$$

$$D_\kappa = D_c + \kappa D_s. \quad (3.47)$$

Quedando la segunda ley de Newton como

$$D_\kappa \mathbf{p}_\kappa = \mathbf{f}_\kappa. \quad (3.48)$$

Para recuperar las ecuaciones anteriores se considera $\lambda = -1$, entonces $\kappa = -i$ y separando las cantidades imaginarias, correspondientes a la parte invariante ante transformaciones temporales, y la parte real, correspondiente a aquellas cantidades que cambian de signo.

Escrito de esta forma se ve claramente ver la relación entre aceleraciones y fuerzas, separadas en la parte real

$$m(D_c \mathbf{v} - D_s \mathbf{u}) = f_+ \quad (3.49)$$

y parte imaginaria

$$m(D_c \mathbf{u} + D_s \mathbf{v}) = f_-. \quad (3.50)$$

O bien, escritas en términos de los operadores diferenciales (3.30) y (3.31) tenemos

$$m \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \frac{\sigma^2}{2} \nabla^2 \mathbf{u} \right) = f_+ \quad (3.51)$$

y

$$m \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{\sigma^2}{2} \nabla^2 \mathbf{v} \right) = f_- \quad (3.52)$$

Para determinar la velocidad sistemática $\mathbf{v}$, se considera una descomposición vectorial general dada por

$$\mathbf{v} = \lambda \nabla S + \mathbf{b}, \quad (3.53)$$

con λ una constante, $S(\mathbf{x}, t)$ una función real y el vector $\mathbf{b}$ que contiene cualquier contribución rotacional de $\mathbf{v}$. Si $\lambda = 2\sigma$ y $\mathbf{b} = -\frac{e}{mc}\mathbf{A}$ es el vector del potencial electromagnético tenemos

$$\mathbf{v} = 2\sigma \nabla S + -\frac{e}{mc}\mathbf{A}. \quad (3.54)$$

Utilizando la definición anterior, y la propiedad vectorial para cualquier vector $\mathbf{V}$,

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \frac{1}{2} \nabla V^2 - \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}), \quad (3.55)$$

entonces la ec. (3.51) queda como

$$D_c \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \left(2\sigma \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) + \frac{e}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}), \quad (3.56)$$

donde se puede identificar los últimos dos términos como la fuerza de Lorentz

$$\mathbf{F}_{EM} = -\frac{e}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}). \quad (3.57)$$

Por lo tanto,

$$D_c \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \left(2\sigma \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) - \mathbf{F}_{EM}. \quad (3.58)$$

Para el siguiente término, utilizando la definición de la velocidad estocástica (3.12) se obtiene

$$D_s \mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\sigma^2}{2} \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + \frac{\sigma^2}{2} \nabla \mathbf{u} \right) = \nabla \left(2\sigma^2 \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right), \quad (3.59)$$

podemos identificar el término dentro del paréntesis en la última igualdad como el potencial cuántico de Bohm,

$$V_Q = 2\sigma^2 \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}. \quad (3.60)$$

Por lo tanto, la ec. (3.51) queda como

$$m(D_c \mathbf{v} - D_s \mathbf{u}) = \nabla \left(2\sigma \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) - \mathbf{F}_{EM} + \nabla V_Q = \mathbf{f}_+, \quad (3.61)$$

si se considera la fuerza de manera general, como $\mathbf{f}_+ = \mathbf{F} + \nabla V$, donde V es un potencial arbitrario, y $\mathbf{F}$ es una fuerza externa. Si consideramos la fuerza de Lorentz, $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{EM}$, entonces tenemos

$$\nabla \left(2\sigma \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + V_Q + V \right) = 0, \quad (3.62)$$

o bien,

$$2\sigma \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + V_Q + V = C, \quad (3.63)$$

con C una constante de integración. Esta ecuación corresponde a la ecuación de Hamilton-Jacobi asociada al sistema.

Para la ecuación (3.50) se realiza un procedimiento similar, utilizamos la identidad

$$\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{u}), \quad (3.64)$$

junto con la definición de (3.12) obtenemos la ecuación

$$mD\nabla \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \right) \right] = \mathbf{f}_- + m\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + mDu\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}), \quad (3.65)$$

donde podemos reconocer el lado izquierdo de la ecuación como la ecuación de continuidad. Para determinar $\mathbf{f}_-$, utilizando (3.7), y la norma de Coulomb ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$), obtenemos

$$\mathbf{f}_- = \frac{e}{c} \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \frac{De}{c} \nabla^2 \mathbf{A}, \quad (3.66)$$

interpretada como aquellas fuerzas que no son invariantes ante inversiones temporales.

Los resultados más importantes de esta sección es que a partir de un formalismo estocástico es posible establecer un par de ecuaciones de interés: la ecuación de continuidad (3.11) y una ecuación de Hamilton-Jacobi (3.63). En la siguiente sección podemos ver que están asociadas a la forma hidrodinámica de la ecuación de Schrödinger.

Mecánica Cuántica Estocástica en espacios tiempos curvos

4.1. Ecuación de Klein-Gordon en espacio-tiempo curvo

En el ámbito de la física teórica y la mecánica cuántica relativista, la ecuación de Klein-Gordon emerge como una piedra angular en la descripción de partículas escalares. Esta ecuación, formulada inicialmente por Oskar Klein y Walter Gordon en la década de 1920, representa una extensión natural de la ecuación de Schrödinger, adaptada para incorporar los principios de la relatividad especial de Einstein.

La necesidad de una ecuación como la de Klein-Gordon surge al intentar conciliar la mecánica cuántica con la relatividad especial. La ecuación de Schrödinger, fundamental en la mecánica cuántica no relativista, no es invariante bajo transformaciones de Lorentz, lo que limita su aplicabilidad a velocidades cercanas a la velocidad de la luz. En contraste, la ecuación de Klein-Gordon satisface esta invariancia, ofreciendo una descripción más adecuada para partículas relativistas sin espín.

En la sección anterior, exploramos dos teorías no relativistas que conducen a la ecuación de Schrödinger, la característica importante es que, dada una transforma-

ción de Madelung para la función de onda, es posible obtener las mismas ecuaciones que las que comienzan a partir de un formalismo estocástico. Con esto en mente, presentamos el formalismo publicado en [12], en el que una versión hidrodinámica de la ecuación de KG se introduce mediante los efectos de una transformación generalizada de Madelung.

4.1.1. Ecuaciones de campo

En el contexto de la relatividad general, la descripción de campos cuánticos requiere una reformulación de las ecuaciones de campo que incorporen la curvatura del espacio-tiempo. La ecuación de Klein-Gordon, inicialmente formulada en el espacio-tiempo plano, puede ser generalizada para describir campos escalares en un marco de espacio-tiempo curvo. Esta extensión es esencial para estudiar fenómenos cuánticos en presencia de campos gravitacionales intensos, como los que se encuentran cerca de agujeros negros o en el universo primordial.

La versión de la ecuación de Klein-Gordon en espacio-tiempo curvo se deriva mediante la sustitución del operador de onda clásico con el operador de d'Alembert generalizado, adaptado para un espacio-tiempo descrito por una métrica arbitraria $g_{\mu\nu}$. Esta formulación asegura que la ecuación respete la invariancia bajo transformaciones generales de coordenadas, una característica fundamental de la relatividad general.

La base para una generalización relativista es la ecuación de Klein-Gordon que rige el campo escalar complejo Φ y su conjugado $\Phi^\dagger$:

$$\square_E \Phi - \frac{dV}{d\Phi^\dagger} = 0, \quad (4.1)$$

donde el operador de d'Alembert es $\square_E = D_\mu D^\mu = (\nabla_\mu + ieA_\mu)(\nabla^\mu + ieA^\mu)$. Consideramos el campo electromagnético mínimamente acoplado, entonces e denota la carga de la partícula, A_μ denota el tetra potencial electromagnético, y ∇^μ representa la derivada covariante asociada a la métrica $g^{\mu\nu}$.

Para la descripción del espacio-tiempo se considerará la métrica dada por el formalismo *ADM* 3+1 (propuesto por R. Arnowitt, S. Deser and C. W. Misner). El formalismo propone que el espacio-tiempo se compone de foliaciones de hipersuperficies espaciales tridimensionales y un parámetro de evolución t . El elemento de línea correspondiente a la métrica es

$$ds^2 = -N^2 d(ct)^2 + \gamma_{ij} \left(dx^i + N^i d(ct) \right) \left(dx^j + N^j d(ct) \right), \quad (4.2)$$

donde γ_{ij} representa la métrica espacial tres-dimensional, N^i refiere a los desplazamientos relativos entre hipersuperficies espaciales, es decir, como cambian las líneas coordenadas, y $d\tau = N(t, x^i) dt$ expresa la evolución temporal entre hipersuperficies.

Este formalismo permite expresar las ecuaciones de campo como un conjunto de ecuaciones de evolución para la métrica en cada hipersuperficie y un conjunto de ecuaciones de restricción que deben satisfacerse en cada punto de cada hipersuperficie [2].

La formulación hidrodinámica de la ecuación de Klein-Gordon parte de suponer un gas de bosones en un espacio-tiempo curvo, donde a pesar de que el espacio-tiempo permanece estático el campo escalar es no-estático. Para permitir soluciones tipo solitón se propone una descomposición armónica del campo escalar de la forma

$$\Phi(x^\mu) = \exp(-i\omega_0 x^0) \Psi(x^\mu), \quad (4.3)$$

con ω_0 un parámetro que representa la masa o la frecuencia de una partícula, x^0 representa el parámetro de evolución asociado a la métrica, en el caso ADM-3+1 $x^0 = ct$. La representación hidrodinámica para la ecuación de Schrödinger fue introducida por Madelung [11], mostrando la equivalencia con las ecuaciones de Euler de un fluido no rotacional con un potencial cuántico.

Dicha transformación descompone la amplitud en densidad de partículas $n(x^\mu)$, y una fase $S(x^\mu)$ que contiene la geometría y la evolución de la solución de onda, quedando $\Psi(x^\mu) = \sqrt{n(x^\mu)} \exp(iS(x^\mu))$.

Bajo las consideraciones anteriores podemos escribir la función de onda como

$$\Phi(x^\mu) = \sqrt{n} e^{i(S - \omega_0 t)}. \quad (4.4)$$

Esta descomposición permite la definición de la velocidad generalizada, π_α , expresada como

$$\pi^\mu = \frac{1}{m} (\nabla^\mu \theta + e A^\mu) = v^\mu - \frac{\omega_0}{m} \nabla^\mu t. \quad (4.5)$$

Donde $v^\mu \equiv \frac{1}{m} (\nabla^\mu S + e A^\mu)$ representa la velocidad de la partícula, y se ha acoplado el campo electromagnético mínimamente a través del cuatrovector de potencial electromagnético A^μ .

Utilizando la transformación de Madelung no estacionaria (4.4), y la velocidad generalizada (4.5) en la ecuación de Klein-Gordon (4.1) obtenemos una expresión con parte real y con parte imaginaria. La parte imaginaria resulta en una ecuación de continuidad generalizada

$$\nabla_\mu (n v^\mu) - \frac{\omega_0}{m} (\nabla^0 n + n \square t) = 0, \quad (4.6)$$

mientras que la parte real se entiende como una ecuación de Hamilton-Jacobi

$$v_\mu v^\mu - 2 \frac{\omega_0}{m} v^0 - \frac{\omega_0^2}{m^2 N^2} + 2\mathcal{A} - \frac{\square \sqrt{n}}{m^2 \sqrt{n}} = 0, \quad (4.7)$$

donde $V^Q = \frac{\square \sqrt{n}}{m^2 \sqrt{n}}$, es el potencial cuántico generalizado (ver el apéndice A para ver la deducción completa). Estas dos ecuaciones junto con la ecuación de Bernoulli representan la versión hidrodinámica de Klein-Gordon escrita en las variables de Madelung (o hidrodinámicas) n y v^μ .

Finalmente para introducir el formalismo estocástico las ecuaciones (4.6) y (4.7) pueden ser escritas en términos de la velocidad generalizada π^α y n , quedando:

$$\nabla_\alpha (n \pi^\alpha) = 0 \quad (4.8)$$

para la ecuación de continuidad, y

$$\frac{1}{2} \pi_\alpha \pi^\alpha + \mathcal{A} - \frac{1}{2m^2} \frac{\square \sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 0, \quad (4.9)$$

para la ecuación de Hamilton-Jacobi. Podemos concluir esta sección mencionando que estas dos ecuaciones representan la ecuación de Klein-Gordon, escrita en su versión hidrodinámica en espacio-tiempo curvado.

4.2. Mecánica Cuántica Estocástica relativista

Para generalizar el formalismo propuesto por Nelson tenemos que considerar un fondo estocástico que actúe como baño térmico para las partículas cuánticas que describirán trayectorias estocásticas. Consideramos las siguientes hipótesis que nos permitirán llevar a cabo la descripción relativista de la mecánica cuántica estocástica en espacio-tiempo curvado.

1) Las partículas cuánticas tienen interacción con un fondo estocástico de espacio-tiempo, análogo al movimiento Browniano en mecánica clásica, dicho fondo estocástico puede deberse a las ondas gravitacionales de diferentes fuentes. La interacción no se describe como una perturbación, afecta a las trayectorias que a su vez juegan un papel importante para el comportamiento cuántico. Se entiende un fondo de espacio-tiempo causante de la estocasticidad en las partículas debido a que es aplicable universalmente a todas las partículas y campos, a diferencia de la electrodinámica estocástica por ejemplo, donde la aplicación se ve limitada. El espacio tiempo lo describimos con una métrica determinista, de tal forma que el formalismo es compatible con los principios relativistas, mientras que la estocasticidad se establece a nivel partícula. Describimos las partículas en dicho fondo, siendo solamente las partículas suficientemente pequeñas aquellas que se ven afectadas por las pequeñas perturbaciones que tiene la métrica. Dichas consideraciones evitan complicaciones matemáticas como resolver las ecuaciones de Eintein-Langevin propuestas cuando se trabaja con una métrica estocástica.

2) Debido a la complejidad del fondo estocástico, la interacción entre la partícula cuántica y el fondo de ondas gravitacionales es desconocido. Se realiza una descripción estadística similar a las de movimiento Browniano, por lo que las con-

sideraciones aunque son generales parecen suficientes para describir la dinámica de las partículas, y en consecuencia la manifestación del fenómeno cuántico.

La propuesta comienza con la definición de la cuatro-velocidad $\mathcal{U}^\mu$, pero consideramos un término estocástico sumado a la definición.

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = \mathcal{U}^\mu + \sqrt{2\sigma} \xi^\mu(\tau), \quad (4.10)$$

donde x^μ es la cuatro-posición de la partícula, τ es el tiempo propio, y el segundo término es el término estocástico representado como una variable aleatoria donde σ es la intensidad del ruido y $\xi^\mu(\tau)$ es una variable aleatoria con propiedades estadísticas del ruido blanco Gaussiano. Dichas propiedades básicamente se resumen a tener un valor medio igual a cero $\langle \xi^\mu(\tau) \rangle = 0$, y una función de correlación $\langle \xi^\mu(\tau_1) \xi^\nu(\tau_2) \rangle = \delta^{\mu\nu} \delta(\tau_2 - \tau_1)$. The stochastic term causes particles to deviate from classical deterministic paths, resulting in erratic (Brownian-like) motion.

En el contexto de la teoría de procesos estocásticos es común encontrar ecuaciones diferenciales como ecuaciones en diferenciales [8], por lo que la ecuación Eq. (4.10) en la notación de diferenciales queda como

$$dx^\mu = \mathcal{U}^\mu d\tau + \sqrt{2\sigma} d\hat{W}^\mu(\tau), \quad (4.11)$$

donde $\hat{W}^\mu(\tau)$ es el proceso de Wiener, y está definido de tal forma que

$$d\hat{W}^\mu(\tau) \approx \xi^\mu(\tau + d\tau) - \xi^\mu(\tau) \approx \xi^\mu(\tau) d\tau, \quad (4.12)$$

por lo que cumple las mismas propiedades estadísticas de ruido blanco Gaussiano que cumple la variable aleatoria $\xi^\mu(\tau)$ (en el apéndice B se deduce la definición del proceso de Wiener en relación con el ruido blanco Gaussiano). Las propiedades estadísticas escritas para las formas en diferenciales generalizadas son las siguientes

$$\langle d\hat{W}^\mu(\tau) \rangle = 0, \quad (4.13)$$

para el promedio, y para la varianza

$$\langle d\hat{W}^\mu(\tau) d\hat{W}^\nu(\tau') \rangle = \delta^{\mu\nu} \delta(\tau - \tau') d\tau d\tau'. \quad (4.14)$$

La función $\delta(\tau - \tau')$ representa la propiedad Markoviana, la cual establece que procesos a diferentes tiempo son independientes, es decir que el presente formalismo no tiene memoria. Sin embargo para el caso en el que $\tau = \tau'$ la varianza queda como $\langle (d\hat{W}^\mu(\tau))d\hat{W}^\nu(\tau) \rangle = \delta^{\mu\nu}d\tau$, es decir que bajo dichas consideraciones el proceso de Wiener es un proceso estocástico Markoviano y Gaussiano, por lo que las variables dinámicas $x^\mu(\tau)$ dada por la ecuación (4.11), heredan las mismas propiedades estocásticas. Es importante mencionar que en el marco de referencia de la partícula podemos establencer la relación del tiempo propio de tal forma que, $d\tau = N(t, x^i)dt$, donde $N(t, x^i)$ está dada segun la métrica considerada de la forma (4.2).

Análogo al modelo de Nelson, la simetría temporal es tratada como dos procesos Markovianos: uno representando la evolución temporal hacia adelante (forward), dado por el proceso $\hat{W}_+^\mu(\tau)$, y el otro proceso representa la evolucion temporal hacia atrás (backward) $\hat{W}_-^\mu(\tau)$. Dicha formulación matemática nos permite hacer predicciones en estados futuros o pasados a partir del estado actual, por lo cual es necesario definir dos ecuaciones diferenciales estocásticas generalizadas, les llamaremos forward y backward, y parten de la ecuación (4.11), de tal forma que ahora tenemos

$$dx_+^\mu = \mathcal{U}_f^\mu d\tau + \sqrt{2\sigma}d\hat{W}_+^\mu(\tau), \quad (4.15)$$

$$dx_-^\mu = \mathcal{U}_b^\mu d\tau + \sqrt{2\sigma}d\hat{W}_-^\mu(\tau). \quad (4.16)$$

Donde $d\hat{W}_+^\mu(\tau)$ y $d\hat{W}_-^\mu(\tau)$ siguen satisfaciendo las propiedades del ruido Gaussiano de ruido blanco descritas anteriormente, de tal forma que se tiene un valor medio cero

$$\langle d\hat{W}_+^\mu(\tau) \rangle = \langle d\hat{W}_-^\mu(\tau) \rangle = 0, \quad (4.17)$$

y la función de correlación

$$\langle d\hat{W}_\pm^\mu(\tau)d\hat{W}_\pm^\nu(\tau') \rangle = \pm d\tau d\tau' \delta(\tau - \tau') \delta^{\mu\nu}. \quad (4.18)$$

La parte determinista de las ecuaciones (4.15) y (4.16) representan funciones de arrastre dada por la cuatro-velocidad forward y backward, similar al movimiento

Browniano es el arrastre de la partícula dentro del baño térmico. Sin embargo, al tener velocidades en ambas direcciones es importante determinar una velocidad generalizada que englobe ambas contribuciones. Definimos la velocidad de corriente generalizada como el promedio "forward" de ambos arrastres dado por

$$\pi^\mu = \frac{\mathcal{U}_f^\mu + \mathcal{U}_b^\mu}{2}, \quad (4.19)$$

y adicionalmente definimos la velocidad estocástica (o caótica) que corresponde al promedio "backward" del arrastre, obteniendo

$$u^\mu = \frac{\mathcal{U}_f^\mu - \mathcal{U}_b^\mu}{2}. \quad (4.20)$$

Dichas velocidades deben de ser determinadas y estar asociadas a la función de onda, solución no-estática a la ecuación de Klein-Gordon. Para obtener la forma explícita de ambas velocidades comenzamos con la transformación de Madelung considerada anteriormente (con las unidades apropiadas),

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = \sqrt{n} e^{\frac{i}{\hbar} (S - \frac{\omega_0 \hbar}{c} x^0)}, \quad (4.21)$$

donde considerando la coordenada temporal $x^0 = ct$, la transformación coincide con la propuesta en (4.4) sin embargo ya no se considerarán unidades naturales. Bajo esta propuesta la interpretación que toma la función de onda es diferente a la mecánica cuántica convencional, no representa un partícula Bosónica o un campo escalar, Φ representa una función de onda solución al espacio tiempo en el que estemos trabajando. En la siguiente sección podemos ver como se puede entender este formalismo aplicado a un agujero negro, utilizando la métrica de Schwarzschild.

Si consideramos la función de onda en su forma WKB, tenemos

$$\Phi = e^{i\mathcal{S}/\hbar}, \quad (4.22)$$

con $\mathcal{S}$ una acción compleja. Dado que la acción puede escribirse en términos de la función de onda de la forma $\mathcal{S} = -i\hbar \ln \Phi$, entonces podemos definir el momento complejo como $\mathcal{P} = mw^\mu$, y el campo de velocidad complejo $w^\mu = \frac{\nabla^\mu \mathcal{S}}{m}$. En terminos de la función de onda en su forma WKB (4.22) tenemos el momento de la

forma

$$\mathcal{P} = -i\hbar \nabla^\mu \ln \Phi, \quad (4.23)$$

y para la velocidad

$$w^\mu = -\frac{i\hbar}{m} \nabla^\mu (\ln \Phi). \quad (4.24)$$

Ahora, para la representación de Madelung (4.21), tenemos lo siguiente

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = \sqrt{n} e^{\frac{i}{\hbar} (S - \frac{\omega_0 \hbar}{c} x^0)} = e^{\frac{i}{\hbar} (S - \omega_0 \hbar t - \frac{i\hbar}{2} \ln n)}, \quad (4.25)$$

por lo que la acción compleja la podemos asociar a la fase y la densidad de probabilidad de la transformación de Madelung de tal forma que

$$\mathcal{S} = S - \omega_0 \hbar t - \frac{i\hbar}{2} \ln n, \quad (4.26)$$

quedando la velocidad generalizada en términos de las variables de Madelung

$$w^\mu = \frac{\nabla^\mu \mathcal{S}}{m} = \frac{1}{m} \left(\nabla^\mu S - \omega_0 \hbar \nabla^\mu t - \frac{i\hbar}{2} \nabla^\mu (\ln n) \right). \quad (4.27)$$

Podemos identificar las velocidades como aquellas que dependen de la fase, y la asociamos a la velocidad de corriente

$$\pi^\mu = \frac{\nabla^\mu S}{m} - \frac{\omega_0 \hbar}{m} \nabla^\mu t, \quad (4.28)$$

mientras que la segunda velocidad, dependiente de la amplitud, la asociamos a la velocidad estocástica definida por

$$u^\mu = \frac{\hbar}{2m} \nabla^\mu (\ln n). \quad (4.29)$$

Con esto logramos escribir las velocidades π^μ y u^μ en términos de las variables de Madelung, asociadas a la función de onda solución a Klein-Gordon. Si consideramos el campo electromagnético mínimamente acoplado, podemos agregar el vector de norma, asociado al cuatro-potencial de Maxwell, a la velocidad π^μ , de tal forma que recuperamos

$$\pi^\mu = \frac{\nabla^\mu S}{m} + \frac{eA^\mu}{m} - \frac{\omega_0 \hbar}{m} \nabla^\mu t = v^\mu - \frac{\omega_0 \hbar}{m} \nabla^\mu t, \quad (4.30)$$

donde $v^\mu = \frac{1}{m} (\nabla^\mu S + eA^\mu)$ es igual a la utilizada en la sección anterior para escribir la ecuación de Klein-Gordon en su forma hidrodinámica. Finalmente la velocidad total generalizada (4.27) puede ser reescrita como

$$w^\mu = \pi^\mu - iu^\mu, \quad (4.31)$$

dicha velocidad ha sido reportada por [5] bajo el formalismo de relatividad de escala, y por [19] en el caso del formalismo de Nelson relativista en espacios planos.

Otro resultado de relevancia es que bajo esta deducción podemos establecer la forma de la constante de difusión

$$\sigma = \frac{\hbar}{2m}, \quad (4.32)$$

dado que $u^\mu \equiv \sigma \nabla^\mu (\ln n)$. Vale la pena señalar que esta constante es propuesta de tal forma que obtengamos la ecuación de Klein-Gordon. Sin embargo, es consistente dado que dada las ecuaciones (4.15) y (4.16), el ruido solamente lo afecta a las partículas suficientemente pequeñas por lo que debe ser inversamente proporcional a la masa de la partícula y proporcional a $\hbar$.

De igual forma resulta útil escribir las ecuaciones diferenciales estocásticas (forward and backward) en términos de las velocidades π^μ y u^μ , dado que contienen información de la función de onda, y se pueden establecer utilizando las relaciones dadas en (4.19) y (4.20), de tal forma que

$$\mathcal{U}_f^\mu = \pi^\mu + u^\mu, \quad \text{y} \quad \mathcal{U}_b^\mu = \pi^\mu - u^\mu, \quad (4.33)$$

quedando las ecuaciones (4.15) y (4.16) de la forma

$$dx_+^\mu = (\pi^\mu + u^\mu) d\tau + \sqrt{2\sigma} d\hat{W}_+^\mu(\tau), \quad (4.34)$$

$$dx_-^\mu = (\pi^\mu - u^\mu) d\tau + \sqrt{2\sigma} d\hat{W}_-^\mu(\tau). \quad (4.35)$$

Estas representaciones resultan útiles para obtener simulaciones numéricas similares a las reportadas en [4], pero en espacio-tiempo curvado, mismas que se utilizarán en el siguiente capítulo.

Por otro lado, dadas las ecuaciones diferenciales estocásticas es directo establecer la ecuación de Fokker-Planck para la densidad de probabilidad n . En el caso de las ecuaciones diferenciales estocásticas (4.34) y (4.35), las ecuaciones de Fokker-Planck correspondientes están dadas por

$$\nabla_\mu [(\pi^\mu + u^\mu)n] - \sigma \nabla_\mu \nabla^\mu n = 0, \quad (4.36)$$

y

$$\nabla_\mu [(\pi^\mu - u^\mu)n] + \sigma \nabla_\mu \nabla^\mu n = 0, \quad (4.37)$$

de tal forma que ambos procesos refieren a la misma densidad de probabilidad, dado que $\Phi\Phi^\dagger = n$.

La equivalencia entre formulación dada por la ecuación de Fokker-Planck y la ecuación diferencial estocástica queda en evidencia cuando consideramos las resta de las ecuaciones (4.36) y (4.37), de tal forma que tenemos

$$2\nabla_\mu [(u^\mu)n] - 2\sigma \nabla_\mu \nabla^\mu n = 0, \quad (4.38)$$

integrando esta última ecuación recuperamos la velocidad estocástica (4.29)

$$u^\mu = \sigma \frac{\nabla^\mu n}{n}, \quad (4.39)$$

relacionando la velocidad estocástica con la densidad de partículas o con la densidad de probabilidad n . Por otra parte, cuando las ecuaciones son sumadas recuperamos una expresión únicamente para la velocidad de corriente (o sistemática)

$$2\nabla_\mu (\pi^\mu n) = 0, \quad (4.40)$$

sustituyendo (4.30) obtenemos la ecuación de continuidad (4.6)

$$\nabla_\mu (nv^\mu) - \frac{\omega_0}{m} (\nabla^0 n + n\Box t) = 0, \quad (4.41)$$

sin embargo ahora fue obtenida a partir de formalismos estocásticos.

Para recuperar tanto la ecuación de Bernoulli y la ecuación de Hamilton-Jacobi, es necesario establecer la dinámica estocástica de las partículas, es decir, necesitamos

obtener las fuerzas y aceleraciones responsables del movimiento errático de dichas partículas. Esto representa un reto importante, dado que a partir de la velocidad generalizada es posible encontrar la ecuación de movimiento para las partículas estocásticas estableciendo la aceleración total de tal forma que

$$ma^\mu \equiv m \frac{dw^\mu}{d\tau} = f^\mu. \quad (4.42)$$

donde la contribución electromagnética a través de la velocidad π^μ es considerada, y f^μ es una fuerza generalizada. Sin embargo, al tratar con trayectorias estocásticas donde se cumple con continuidad, pero no es derivable tenemos que definir operadores diferenciales adecuados que nos permitan obtener la aceleración de las partículas. Dado que las trayectorias cumplen una ecuación diferencial estocástica necesitamos considerar el cálculo de Ito, y la regla de Ito [8].

Para obtener los operadores diferenciales apropiados para este tipo de trayectorias consideramos una expansión en series de Taylor de una función $g(x)$ truncada a segundo orden

$$dg(x) = \nabla_\mu g(x) dx^\mu + \frac{1}{2} \nabla_\mu \nabla_\nu g(x) dx^\mu dx^\nu \quad (4.43)$$

donde ∇_μ es la derivada total, es decir la derivada covariante. Para la aproximación anterior consideramos la ecuación diferencial estocástica dada por (4.15) obteniendo

$$\begin{aligned} d_+ g(x^\mu) = & \nabla_\mu g(x^\mu) \left[(\pi^\mu + u^\mu) d\tau + \sqrt{2\sigma} d\hat{W}_+^\mu(\tau) \right] \\ & + \frac{1}{2} \nabla_\mu \nabla_\nu g(x^\mu) \left[(\pi^\mu + u^\mu) d\tau + \sqrt{2\sigma} d\hat{W}_+^\mu(\tau) \right] \left[(\pi^\nu + u^\nu) d\tau + \sqrt{2\sigma} d\hat{W}_+^\nu(\tau) \right], \end{aligned} \quad (4.44)$$

Es aquí donde toman relevancia los resultados de procesos estocásticos, usualmente todos los incrementos infinitesimales a segundo orden son considerados nulos, sin embargo dada la regla de Ito para procesos de Wiener independientes, $\langle (d\hat{W}^\mu(\tau)) d\hat{W}^\nu(\tau) \rangle = \delta^{\mu\nu} d\tau$; debemos conservar el término $d\hat{W}_+^\mu(\tau) d\hat{W}_+^\nu(\tau)$ (el resto de los términos sí pueden ser considerados nulos $d\tau d\hat{W}_+^\mu$ and $(d\tau)^2$). Enton-

ces tenemos

$$\begin{aligned} d_+g(x^\mu) &= [(\pi^\mu + u^\mu)\nabla_\mu g(x^\mu)d\tau] + \sqrt{2\sigma}\nabla_\mu g(x^\mu)d\hat{W}_+^\mu(\tau) \\ &\quad + \sigma\nabla_\mu\nabla_\nu g(x^\mu)d\hat{W}_+^\mu(\tau)d\hat{W}_+^\nu(\tau) \end{aligned} \quad (4.45)$$

Una vez más, dado que trabajamos con la ecuación diferencial forward, tenemos que definir un operador diferencial forward dado por el valor esperado sobre todas las posibles realizaciones o eventos [13] del fondo aleatorio caracterizado por el término de ruido $\xi^\mu(\tau)$. En consecuencia, utilizando el promedio sobre el ensamble de partículas que reproducen todas las posibles trayectorias, además de las propiedades estadísticas previamente mencionadas para el proceso de Wiener y la regla de Ito, tenemos

$$\hat{D}_+g(x^\mu) = \left\langle \frac{d_+}{d\tau}g(x^\mu) \right\rangle \quad (4.46)$$

$$= [(\pi^\mu + u^\mu)\nabla_\mu + \sigma\nabla_\mu\nabla^\mu]g(x^\mu). \quad (4.47)$$

Cuando se considera el proceso estocástico backward (4.16), el operador diferencial backward es definido de manera similar, utilizando las propiedades estadísticas del proceso de Wiener backward, obteniendo

$$\hat{D}_-g(x^\mu) = \left\langle \frac{d_-}{d\tau}g(x^\mu) \right\rangle \quad (4.48)$$

$$= [(\pi^\mu - u^\mu)\nabla_\mu - \sigma\nabla_\mu\nabla^\mu]g(x^\mu), \quad (4.49)$$

Es útil establecer operadores diferenciales en términos únicamente de π^μ o u^μ , esto se logra promediando ambos operadores obteniendo la derivada sistemática

$$\hat{D}_c = \frac{\hat{D}_+ + \hat{D}_-}{2} = \pi^\mu\nabla_\mu, \quad (4.50)$$

y la derivada estocástica de manera similar dada por

$$\hat{D}_s = \frac{\hat{D}_+ - \hat{D}_-}{2} = u^\mu\nabla_\mu + \sigma\nabla^\mu\nabla_\mu. \quad (4.51)$$

Dado que estamos trabajando con el movimiento de partículas cuánticas, o suficientemente pequeñas, hay una región en la vecindad en el espacio-tiempo de la

partícula que es localmente plana, de tal forma que $\nabla_\nu x^\mu = \delta_\nu^\mu$, por lo que es directo ver que

$$\hat{D}_c x^\mu = \pi^\mu, \quad (4.52)$$

y

$$\hat{D}_s x^\mu = u^\mu, \quad (4.53)$$

quedando fundamentada la relación entre velocidad y posición a través de los operadores diferenciales obtenidos.

Es posible establecer un operador diferencial general, para lo cual consideramos una combinación lineal de los operadores diferenciales obteniendo

$$\hat{\mathcal{D}} = \hat{D}_c + \kappa \hat{D}_s, \quad (4.54)$$

donde κ es un valor arbitrario por determinar. Si aplicamos $\hat{\mathcal{D}}$ a la posición x^μ , recuperamos una velocidad total ω^μ dada por

$$\hat{\mathcal{D}} x^\mu = (\hat{D}_c - i \hat{D}_s) x^\mu = \pi^\mu - i u^\mu = \omega^\mu. \quad (4.55)$$

Comparando la ecuación (4.55) con la obtenida previamente (4.31), se observa que para que ambas velocidades sean iguales es necesario fijar $\kappa = -i$.

Con los operadores diferenciales obtenidos es posible establecer la aceleración total dada por

$$a^\mu = \hat{\mathcal{D}} \omega^\mu = (\hat{D}_c - i \hat{D}_s)(\pi^\mu - i u^\mu) = \hat{D}_c \pi^\mu - \hat{D}_s u^\mu - i(\hat{D}_c u^\mu + \hat{D}_s \pi^\mu), \quad (4.56)$$

donde podemos reconocer diferentes aceleraciones, definidas como la combinación de los diferentes operadores diferenciales aplicadas tanto a las velocidades estocásticas y sistemáticas, de tal forma que

$$a_{cc}^\mu = \hat{D}_c \hat{D}_c x^\mu = \hat{D}_c \pi^\mu, \quad a_{ss}^\mu = \hat{D}_s \hat{D}_s x^\mu = \hat{D}_s u^\mu, \quad (4.57)$$

$$a_{cs}^\mu = \hat{D}_c \hat{D}_s x^\mu = \hat{D}_c u^\mu, \quad a_{sc}^\mu = \hat{D}_s \hat{D}_c x^\mu = \hat{D}_s \pi^\mu. \quad (4.58)$$

La forma explícita de dichas aceleraciones pueden ser obtenidas utilizando la siguiente identidad

$$\nabla_\alpha \pi^\mu = \nabla^\mu \pi_\alpha + \frac{e}{m} F_\alpha^\mu, \quad (4.59)$$

con el tensor de Maxwell definido por

$$F_{\alpha}^{\mu} = \nabla^{\mu} A_{\alpha} - \nabla_{\alpha} A^{\mu}. \quad (4.60)$$

Entonces podemos escribir las aceleraciones en t

$$a_{cc}^{\mu} = \hat{D}_c \pi^{\mu} = \frac{1}{2} \nabla^{\mu} (\pi_{\alpha} \pi^{\alpha}) + \frac{e}{m} F^{\mu\alpha} \pi_{\alpha}, \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned} a_{sc}^{\mu} = \hat{D}_s \pi^{\mu} &= \sigma \left(\nabla^{\mu} \nabla_{\alpha} \pi^{\alpha} + \frac{\nabla_{\alpha} n}{n} \nabla^{\mu} \pi^{\alpha} \right) \\ &+ \frac{e}{m} (F^{\mu\alpha} u_{\alpha} + \sigma \nabla_{\alpha} F^{\mu\alpha}) \end{aligned} \quad (4.62)$$

y de la misma forma

$$a_{cs}^{\mu} = \hat{D}_c u^{\mu} = \sigma \pi_{\alpha} \nabla^{\alpha} \left(\frac{\nabla^{\mu} n}{n} \right) \quad (4.63)$$

$$a_{ss}^{\mu} = \hat{D}_s u^{\mu} = 2\sigma^2 \nabla^{\mu} \left(\frac{\square \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \right). \quad (4.64)$$

Identificar las aceleraciones como estocásticas o sistemáticas resultarán relevante en los siguientes resultados, ya que podremos identificar cada fuerza causante de la dinámica estocástica y determinar si es de origen estocástico o determinista.

La ecuación (4.56) contiene toda la información que causa la dinámica de las partículas, incluyendo las fuerzas responsables de las trayectorias estocásticas. Dado que la aceleración total contiene términos imaginarios, es necesario descomponer la fuerza total neta f^{μ} de tal forma que $f^{\mu} = f_{+}^{\mu} + i f_{-}^{\mu}$. Tomando en cuenta la linealidad entre las fuerzas y las aceleraciones podemos separar la parte real y la parte imaginaria quedando dos ecuaciones dadas por

$$m(\hat{D}_c \pi^{\mu} - \hat{D}_s u^{\mu}) = f_{+}, \quad (4.65)$$

$$-m(\hat{D}_c u^{\mu} + \hat{D}_s \pi^{\mu}) = f_{-}. \quad (4.66)$$

Para la primer ecuación (4.65), tenemos la contribución de la aceleración completamente determinista $a_{cc} = \hat{D}_c \pi^{\mu}$ y la contribución puramente estocástica $a_{ss} = \hat{D}_s u^{\mu}$, usando las definiciones correspondientes, (4.61) y (4.64) respectivamente, tenemos

$$\frac{1}{2} \nabla^{\mu} (\pi_{\alpha} \pi^{\alpha}) + \frac{e}{m} F^{\mu\alpha} \pi_{\alpha} - 2\sigma^2 \nabla^{\mu} \left(\frac{\square \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \right) = \frac{1}{m} f_{+}^{\mu}. \quad (4.67)$$

Podemos identificar f_+ como fuerzas externas que actúan sobre la partícula, es decir $f_+ = F^\mu + F_E^\mu$, donde $F_E^\mu = eF^{\alpha\mu}\pi_\alpha$ se refiere a la fuerza de Lorentz debido a un potencial electromagnético externo A^μ , y $F^\mu = -m\nabla^\mu \mathcal{A}(n)$ es una fuerza que mide las variaciones de la densidad del campo escalar, dado que esta asociado a un potencial arbitrario de la forma $V = 2m^2 \mathcal{A}n$.

Es importante notar que si omitimos cualquier fuerza externa $f_+ = 0$, incluyendo la contribución electromagnética a través de la velocidad π_μ , y la contribución estocástica en la ecuación (4.65) entonces tenemos

$$\hat{D}_c \pi^\mu = \pi_\alpha \nabla^\alpha \pi^\mu = \nabla_\pi \pi^\mu = 0 \quad (4.68)$$

recuperando la definición del vector π^α cuya curva integral es una geodésica. Esto es adecuado para el formalismo propuesto dado que tenemos trayectorias, que sin considerar el comportamiento estocástico, se mueven en las geodésicas. Mientras que si tenemos contribución estocástica se mueven alrededor de las geodésicas.

Desarrollando el lado izquierdo, debido a la identidad (4.59) la fuerza de Lorentz queda de ambos lados de la ecuación (4.67), por lo que se cancela y tenemos

$$\nabla^\mu \left[\frac{1}{2} (\pi_\alpha \pi^\alpha) - 2\sigma^2 \left(\frac{\square \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \right) + \mathcal{A} \right] = 0, \quad (4.69)$$

Integrando la ecuación (4.69) obtenemos

$$\frac{1}{2} \pi_\alpha \pi^\alpha + \mathcal{A} + C - 2\sigma^2 \frac{\square \sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 0 \quad (4.70)$$

la cual podemos identificar como la ecuación de Hamilton-Jacobi (4.9), con una constante de integración C . Esta ecuación junto con la ecuación de continuidad son la representación hidrodinámica de Klein-Gordon en espacio-tiempo curvo, solo falta encontrar la ecuación de continuidad.

Para la parte imaginaria (4.66), utilizando (4.63) y (4.62), tenemos la siguiente expresión

$$\nabla^\mu [\sigma \nabla_\alpha \pi^\alpha + u_\alpha \pi^\alpha] + \frac{e}{m} (F^{\mu\alpha} u_\alpha + \sigma \nabla_\alpha F^{\mu\alpha}) = \frac{f_-}{m}. \quad (4.71)$$

Para el término dentro de los brackets utilizando la definición de la velocidad estocástica (4.29) y de la velocidad sistemática (4.30,) recuperamos la ecuación de continuidad

$$\sigma \nabla_\alpha \pi^\alpha + u_\alpha \pi^\alpha = \sigma n \nabla_\alpha \pi^\alpha + \sigma \pi^\alpha \nabla_\alpha n = \frac{\sigma}{n} \nabla_\alpha (n \pi^\alpha) = 0. \quad (4.72)$$

Entonces podemos determinar la fuerza f_- de la forma $f_- = e(\sigma \nabla_\alpha F^{\alpha\mu} + u_\alpha F^{\mu\alpha}) = \frac{e}{n} \nabla_\alpha (n F^{\alpha\mu})$, en el caso no relativista esta fuerza se asocia a aquellas que no son invariantes ante la inversión temporal, podemos identificar la fuerza de Lorentz actuando sobre la velocidad estocástica y otro término que podría entenderse como un término de norma. En el caso en que el término electromagnético sea cero, entonces $f_- = 0$, y la ecuación (4.66) solo representa la ecuación de continuidad.

Con esto queda evidente que las ecuaciones de campo de una partícula cuántica inmersa en un espacio-tiempo curvado fluctuante es precisamente la de Klein-Gordon. Con esto logramos recuperar la forma hidrodinámica de Klein-Gordon a partir de un formalismo estocástico, mostrando que los procesos estocásticos juegan un papel fundamental en la naturaleza cuántica.

Para obtener la ecuación de Euler partimos de la fuerza $f_+ = F^\mu + F_E^\mu$, y escribimos la ecuación (4.67) en términos de la velocidad v^μ , utilizando una vez más la propiedad (4.59) tenemos

$$\begin{aligned} v_\mu \nabla^\mu v_\alpha - \frac{\omega_0 \hbar}{m} \nabla^0 v_\alpha - \frac{\omega_0^2 \hbar^2}{2m^2} \nabla_\alpha \left(\frac{1}{N^2} \right) - \frac{\hbar^2}{2m^2} \nabla_\alpha \left(\frac{\square \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \right) \\ = -\nabla_\alpha \mathcal{A} - \frac{e}{m} \left(F_\alpha^\mu v_\mu - \frac{\omega_0 \hbar}{m} F_\alpha^0 \right). \end{aligned} \quad (4.73)$$

Dicha ecuación coincide con la ecuación reportada en [12], sin embargo en el presente trabajo no utilizamos unidades naturales. Una vez que integramos y utilizamos la propiedad de Leibniz recuperamos la ecuación de Hamilton-Jacobi (4.7). Por lo que todas las ecuaciones de la versión hidrodinámica de Klein-Gordon son obtenidas a partir de procesos estocásticos, concluyendo que la dinámica estocástica es inherente a las partículas cuánticas.

La ecuación de Euler (4.73) resulta de gran importancia, dado que podemos reescribirla como una relación entre aceleraciones y fuerzas de la forma

$$v_\mu \nabla^\mu v_\alpha - \frac{\omega_0 \hbar}{m} \nabla^0 v_\alpha = F_\alpha^E + F_\alpha^Q + F_\alpha^G + F_\alpha^n, \quad (4.74)$$

donde el lado izquierdo representa la aceleración y el lado derecho las fuerzas responsables de la dinámica aleatoria de las partículas. Dichas fuerzas contienen contribuciones gravitacionales dadas por

$$F_\alpha^G = \nabla_\alpha \left(\frac{\omega_0^2 \hbar^2}{2m^2 N^2} \right), \quad (4.75)$$

contiene una fuerza cuántica, dada por el gradiente de el potencial cuántico de Bohm generalizado

$$F_\alpha^Q = \frac{\hbar^2}{2m^2} \nabla_\alpha \left(\frac{\square \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \right), \quad (4.76)$$

si se considera un campo electromagnético, entonces la fuerza de Lorentz también contribuye a la dinámica estocástica

$$F_\alpha^E = -\frac{e}{m} (\nabla^\mu A_\alpha - \nabla_\alpha A^\mu) \pi_\mu, \quad (4.77)$$

y finalmente, también se encuentra una fuerza que se debe al gradiente de un potencial de auto-interacción $\mathcal{A}$, asociado al potencial $V(\Phi, \Phi^\dagger)$ de la ecuación de Klein-Gordon

$$F_\alpha^n = -\nabla_\alpha \mathcal{A}. \quad (4.78)$$

Debemos entender a $\mathcal{A}$ como una parametrización del potencial V , dicha consideración resulta útil para poder medir las variaciones espaciales y temporales de n debido al potencial de auto-interacción que queramos considerar. Por ejemplo, cuando se considera el potencial para una partícula con masa de una partícula escalar, de tal forma que se considera el término cuadrático del potencial $V(\Phi) = m^2 \Phi \Phi^\dagger$, entonces la parametrización correspondiente está dada por $\mathcal{A} = 1$, y la fuerza asociada es nula $F_\alpha^n = 0$. En el artículo [12] el potencial presentado considera la auto-interacción escalar utilizando un potencial cuártico (Mexican-hat) dado por $V = m^2 \Phi \Phi^\dagger + \frac{\lambda}{2} (\Phi \Phi^\dagger)^2$, para este caso la parametrización correspondiente está

dada por $\mathcal{A} = 1 + \frac{\lambda}{2m^2}n$, y la fuerza es de la forma $F_\alpha^n = -\nabla_\alpha \frac{\lambda n}{2m^2}$, misma que es reportada en el artículo en cuestión.

El hecho de que las fuerzas descritas surgen únicamente de las aceleraciones generalizadas, sin necesidad de considerarlas o colocarlas a mano como en la formulación no-relativista, sustenta la presente teoría de acuerdo a relatividad general, donde las fuerzas actúan modificando el espacio-tiempo. Dichas modificaciones son obtenidas de la función Φ y heredadas a las ecuaciones diferenciales estocásticas a través de las velocidades π^μ y u^μ .

Naturalmente al trabajar con un espacio-tiempo arbitrario podemos considerar aquel correspondiente a bajas energías y campo gravitacional débil, de tal forma que la misma teoría contiene la ecuación de Schrödinger. Para probarlo partimos de la transformación

$$\Phi = \Psi e^{i \frac{m}{\hbar c} x^0}, \quad (4.79)$$

sustituyendo en la ecuación de Klein-Gordon, donde $\Psi = \Psi(x^\mu)$ es una función compleja y $x^0 = ct$ es el parámetro de evolución correspondiente en la métrica ADM, consideramos el término electromagnético nulo, de tal forma que el operador D'Alembertiano queda simplificado a $\square = \nabla_\mu \nabla^\mu$. Con esta transformación es fácil ver que la ecuación de Klein-Gordon (4.1) queda como

$$ic \nabla^0 \Psi - \frac{\hbar}{2m} \square \Psi + \frac{ic^2}{2} \square t \Psi + \frac{m}{\hbar} \mathcal{A} \Psi - \frac{m}{2\hbar} \left(\frac{1}{N^2} \right) \Psi = 0, \quad (4.80)$$

esta ecuación es una generalización de la ecuación de Gross-Pitaevskii en espacio-tiempo curvado.

En el límite Newtoniano la función $N^2 = 1$ contenida en la métrica ADM, e identificamos $\nabla^0 = -1/c \partial / \partial t$ de tal forma que el operador D'Alembertiano se reduce al operador Lapaciano en espacio plano ∇^2 , y dado que la derivada temporal contiene un término $1/c^2$, es decir, $1/c^2 \partial^2 / \partial t^2 \sim 0$, entonces $\square t = 0$. En tal caso, la ecuación anterior se reduce a

$$-i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + m(\mathcal{A} - \frac{1}{2}) \Psi = 0 \quad (4.81)$$

Se puede probar que la parametrización correspondiente al potencial de auto-interacción en este límite es de la forma $\mathcal{A} = V + 1/2$, donde V es un potencial arbitrario. Con esto, la ecuación anterior queda exactamente como la ecuación de Schrödinger usual [7]. Es decir, que la ecuación de Klein-Gordon en los límites adecuados se reduce a Schrödinger, y como se estudió previamente, también existe una relación directa con los procesos estocásticos.

Este capítulo mostró el formalismo necesario para probar que hay una equivalencia entre procesos estocásticos y mecánica cuántica, dejando en claro que si las partículas describen trayectorias erráticas, que pudieran deberse a un fondo de ondas gravitacionales, entonces el fenómeno cuántico nace de manera inherente.

Aplicaciones

Después de haber presentado la teoría dedicamos este capítulo para dar una interpretación de acuerdo a la mecánica cuántica en espaciotiempos curvados, además de dar un par de aplicaciones de amplio interés.

5.1. Interpretación

Como se mencionó en la introducción el enfoque que sigue esta teoría está más apegado a la interpretación estadística de la mecánica cuántica. De hecho comparte similitudes con la Mecánica Bohmiana, una teoría determinista con trayectorias guiadas por la función de onda. En la presente propuesta las trayectorias de las partículas emergen de un fondo estocástico asociado a fluctuaciones gravitacionales. Se discuten similitudes formales, divergencias conceptuales y las implicaciones fundamentales de ambas propuestas.

5.1.1. Interpretación de la función de onda

En la mecánica bohmiana

La función de onda es un campo real definido sobre el espacio de configuración. Es un ente físico fundamental que guía a las partículas. No sufre colapso y conserva

su evolución bajo la ecuación de Schrödinger, o en su defecto de la ecuación de Klein-Gordon.

En el modelo estocástico

La función de onda Φ se introduce como una representación estadística del comportamiento colectivo de las trayectorias estocásticas, la ecuación de Klein-Gordon, bajo el operador $\square = \nabla_\mu \nabla^\mu$ establece como evoluciona la función de onda bajo determinada geometría del espaciotiempo dada por la métrica $g_{\mu\nu}$. Una vez que se establece la ecuación de onda, se resuelve y se identifican las funciones n y S del kernel $\Phi = \sqrt{n}e^{iS/\hbar}$. Ambas teorías utilizan la función de onda como medio para derivar las velocidades y la densidad.

5.1.2. Potencial cuántico y ecuaciones de movimiento

Mecánica Bohmiana

A partir de la descomposición polar de la función de onda, se obtiene el *potencial cuántico*:

$$Q = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R}, \quad (5.1)$$

el cual modifica la ecuación de Hamilton-Jacobi y determina la dinámica no clásica.

Modelo Estocástico

Mediante una transformación de Madelung sobre la ecuación de Klein-Gordon en espaciotiempo curvo, se obtiene un potencial cuántico generalizado:

$$V_Q = \frac{\square \sqrt{n}}{m^2 \sqrt{n}}, \quad (5.2)$$

donde $\square$ es el operador de d'Alembert en una métrica curva. De la misma forma, dicho potencial emerge de la aceleración estocástica es decir $a_{ss} = \hat{D}_s u^\mu$, dejando en

evidencia que dicho potencial es un resultado de la estocasticidad del espaciotiempo, mismo que se manifiesta en las trayectorias estocásticas de las partículas.

Ambos potenciales cumplen un papel análogo, pero su origen difiere: en Bohm, Q se deduce de la función de onda; en la presente teoría V_Q surge del acoplamiento con la geometría fluctuante del espaciotiempo en las trayectorias de las partículas.

5.1.3. Determinismo

- **Mecánica Bohmiana:** Completamente determinista. Toda aleatoriedad proviene de condiciones iniciales desconocidas, sin embargo, las partículas tienen posiciones definidas y siguen trayectorias determinadas por la *ecuación guía* para la k -ésima partícula:

$$\frac{d\mathbf{x}_k}{dt} = \frac{1}{m_k} \nabla_k S, \quad (5.3)$$

donde S es la fase de la función de onda $\psi = Re^{iS/\hbar}$. Esta dinámica es completamente determinista: dados los datos iniciales, el sistema evoluciona sin ambigüedad.

- **Modelo Estocástico:** Intrínsecamente probabilista. La aleatoriedad es una característica fundamental del modelo. Las partículas siguen trayectorias tipo Brownianas, perturbadas por un término aleatorio:

$$dx^\mu = U^\mu d\tau + \sqrt{2\sigma} dW^\mu(\tau), \quad (5.4)$$

donde $W^\mu(\tau)$ es un proceso de Wiener y σ es la intensidad del ruido, finalmente el primer término del lado derecho contiene la información de la ecuación de onda, dado que $U^\mu = \pi^\mu \pm u^\mu$, y las velocidades están dadas por $\pi^\mu = \frac{\nabla^\mu S}{m} - \frac{\omega_0 \hbar}{m} \nabla^\mu x^0$ y $u^\mu = \sigma \frac{\nabla^\mu n}{n}$, donde n , S , y x^0 están dadas por la función de onda $\Phi = \sqrt{n} e^{\frac{i}{\hbar}(S - \frac{\omega_0 \hbar}{c} x^0)}$.

Este ruido modela una interacción física con un fondo gravitacional estocástico.

Ambos modelos postulan trayectorias para las partículas y derivan ecuaciones de continuidad e hidrodinámica cuántica. La diferencia esencial radica en que las trayectorias bohmianas son deterministas, mientras que en el modelo estocástico son probabilísticas debido a la presencia de ruido gaussiano.

5.2. Trayectorias estocásticas en métrica de Swarszchild

El esquema para poder graficar las trayectorias es el siguiente

1. La geometría del espaciotiempo queda determinada por la métrica y el elemento de línea ds^2 . Dicha geometría se manifiesta en la ecuación de Klein-Gordon en el operador diferencial D'Alembertiano dado por

$$\square = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu), \quad (5.5)$$

2. La ecuación de Klein-Gordon se resuelve para Φ , evidentemente este paso no es trivial y solo algunas geometrías tienen soluciones analíticas.
3. Una vez resuelto que se obtenga Φ como solución de la ecuación de Klein-Gordon, se escriben las variables de Madelung S y n . Esto se logra utilizando la transformación de Madelung $\Phi = \sqrt{n} e^{\frac{i}{\hbar}(S - \frac{\omega_0 \hbar}{c} x^0)}$, de donde:

$$n = \Phi \Phi^\dagger, \quad S = \frac{\omega_0 \hbar}{c} x^0 - i \hbar \ln \frac{\Phi}{\sqrt{\Phi \Phi^\dagger}}. \quad (5.6)$$

4. Se calculan las velocidades $\pi^\mu = \frac{\nabla^\mu S}{m} - \frac{\omega_0 \hbar}{m} \nabla^\mu x^0$ y $u^\mu = \sigma \frac{\nabla^\mu n}{n}$, es importante notar que las velocidades son vectores con cuatro componentes dadas por $\pi^\mu = (\pi^{x^0}, \pi^{x^1}, \pi^{x^2}, \pi^{x^3})$, por ejemplo cuando se trabaja en un espacio plano tenemos $\pi^\mu = (\pi^t, \pi^x, \pi^y, \pi^z)$. De manera similar se calcula u^μ .
5. Finalmente se pueden escribir las ecuaciones diferenciales estocásticas dadas por

$$dx^\mu = (\pi^\mu \pm u^\mu) d\tau + \sqrt{2\sigma} dW^\mu(\tau), \quad (5.7)$$

estas ecuaciones pueden ser graficadas utilizando métodos numéricos como Euler-Maruyama, Runge-Kutta estocástico; o bien, utilizando software de graficación como Mathematica Wolfram.

Aplicaremos la metodología presentada al caso particular de la métrica de Schwarzschild. El objetivo es encontrar las trayectorias estocásticas de partículas cuánticas y estudiar cómo éstas son influenciadas por un agujero negro. Para ello, comenzamos resolviendo la ecuación de Klein–Gordon para un campo escalar sin masa en dicha métrica. A partir de estas soluciones derivamos trayectorias estocásticas y analizamos el impacto de parámetros como el momento angular, la frecuencia de la partícula y las condiciones iniciales.

Campo escalar sin masa con métrica de Schwarzschild

El objetivo principal de esta sección es establecer la ecuación de Klein-Gordon utilizando la métrica de un agujero negro de Schwarzschild. Consideramos un campo escalar Φ sin masa, sin autointeracción y acoplado mínimamente a la geometría. Su dinámica está regida por la ecuación de Klein–Gordon

$$\square\Phi(ct, r) = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Phi) = 0, \quad (5.8)$$

donde g es el determinante de la métrica de Schwarzschild, dada por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) d(ct)^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (5.9)$$

con $r_s = 2GM/c^2$ el radio de Schwarzschild.

Es importante mencionar que al trabajar con partículas pequeñas entonces consideramos que la energía del campo escalar es pequeña comparada con la masa del agujero negro, por lo que no modifica la geometría.

Al expandir la ecuación de Klein–Gordon (5.8) se obtiene

$$-\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{1}{r^2} \partial_r \left[r^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta \Phi) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (5.10)$$

Dada la simetría esférica, se propone una solución modal, utilizando separación de variables de la forma

$$\Phi(ct, r, \theta, \varphi) = \frac{\Psi_l(ct, r)}{r} Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (5.11)$$

con $Y_l^m(\theta, \varphi)$ los armónicos esféricos. Para la parte radial tenemos la ecuación

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{r_s}{r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{\partial \Psi}{\partial r} + V_l(r) \Psi = 0, \quad (5.12)$$

donde el potencial efectivo está dado por

$$V_l(r) = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(\frac{r_s}{r^3} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right). \quad (5.13)$$

Dicho potencial presenta una barrera cuyo comportamiento depende de l . Es cero en el horizonte $r = 2GM/c^2$ y decae en el infinito. Para $l = 0$, la barrera es más baja que para $l = 1, 2, \dots$, debido a la curvatura del espaciotiempo. También es importante mencionar que la ecuación radial presenta singularidades en $r = r_s$ y en $r = 0$, correspondientes al horizonte de eventos y al centro del agujero negro correspondientemente.

Coordenadas de Eddington-Finkelstein

La singularidad en $r = r_s$ es una singularidad removible, es decir, podemos tener información de lo que pasa cuando cruzamos el horizonte de eventos. Para evitar la singularidad coordinada en el horizonte $r = r_s$, usamos coordenadas de Eddington-Finkelstein entrantes que implican un transformar las coordenadas $(ct, r) \rightarrow (cv, u)$, dadas por

$$cv = ct + r + r_s \ln \left| \frac{r}{r_s} - 1 \right|, \quad (5.14)$$

$$u = r, \quad (5.15)$$

mientras que la parte angular se mantiene invariables, dado que la simetría esférica se mantiene.

En estas coordenadas, la ecuación radial se transforma en:

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + 2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial cv} + \frac{r_s}{r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{\partial \Psi}{\partial r} - V_l(r) \Psi = 0, \quad (5.16)$$

Para la solución se propone un anast de la forma

$$\Psi(cv, r) = e^{-i\omega cv} R_{\omega l}(r), \quad (5.17)$$

que permite separar las variables obteniendo una ecuación diferencial para $R_{\omega l}(r)$, dada por

$$\frac{d^2 R_{\omega l}}{dr^2} + \frac{r_s - 2i\omega r^2}{r(r - r_s)} \frac{dR_{\omega l}}{dr} - \left[\frac{l(l+1)}{r(r - r_s)} + \frac{r_s}{(r - r_s)} \right] R_{\omega l} = 0. \quad (5.18)$$

Soluciones tipo Heun confluente

La ecuación anterior presenta singularidades regulares en $r = 0$ y $r = r_s$, y una singularidad irregular en $r = \infty$. A partir de esta sección es conveniente utilizar unidades naturales, $G = C = 1$, para estudiar el comportamiento radial de la solución en el horizonte de eventos $r = 1$, se propone el cambio de variable dado por

$$R_{\omega l}(r) = r y_{\omega l}(r), \quad (5.19)$$

con esto obtenemos una ecuación perteneciente a la familia de ecuaciones diferenciales tipo Heun de la forma

$$\frac{d^2 y}{dr^2} + \left[\frac{1}{r} + \frac{1 - 2i\omega}{r - 1} - 2i\omega \right] \frac{dy}{dr} - \left[\frac{2i\omega + l(l+1)}{r - 1} - \frac{l(l+1)}{r} \right] y = 0. \quad (5.20)$$

Esta es precisamente la forma canónica de la ecuación de Heun confluente, con parámetros

$$\gamma = 1, \quad \delta = 1 - 2i\omega, \quad \beta = 2i\omega, \quad \alpha = 1, \quad q = -l(l+1).$$

Dos soluciones linealmente independientes en $r = 1$ se expresan con funciones de Heun:

$$R^I(r) = r \cdot y_{\omega l}^I = r \cdot \text{HeunC}[-q + \alpha\beta, \alpha\beta, \delta, \gamma, \beta, 1 - r], \quad (5.21)$$

$$R^{II}(r) = r \cdot y_{\omega l}^{II} = r(r - 1)^{1-\delta} \cdot \text{HeunC}[-q + \alpha\beta + (\beta - \gamma)(1 - \delta), \quad (5.22)$$

$$\alpha\beta + \beta(1 - \delta), 2 - \delta, \gamma, \beta, 1 - r]. \quad (5.23)$$

La primera solución es regular en el horizonte, mientras que la segunda presenta oscilaciones complejas con fase indefinida. En el apéndice podemos encontrar la función de Heun.

5.3. Trayectorias Estocásticas con la Métrica de Schwarzschild

La sección anterior exploramos la solución para una partícula sin masa en el horizonte de eventos de un agujero negro de Schwarzschild. Ahora podemos acoplar la métrica entrante de Eddington-Finkelstein a las velocidades sistemática y estocástica para resolver las ecuaciones diferenciales estocásticas correspondientes para las coordenadas $x^\mu = (v, r, \theta, \phi)$, y así obtener las trayectorias de las partículas.

Para partículas sin masa, proponemos $\mu = m = \omega_0$, donde ω_0 es la frecuencia de la partícula. A partir de la ecuación (4.8), vemos que en general la función de acción S está dada por:

$$S = \omega_0 x^0 - i \ln \left(\frac{\Phi}{\sqrt{\Phi\Phi^*}} \right), \quad (5.24)$$

donde Φ es la solución de la ecuación de Klein-Gordon. Esta función, junto a $n = \Phi\Phi^*$, sirven para determinar la trayectoria estocástica bajo la influencia del entorno gravitacional. Usando la solución (5.4), expresamos:

$$S = (\omega_0 - \omega)v + \frac{i}{2} \ln \left(\frac{\text{HeunC}}{\text{HeunC}^*} \right) + m\phi, \quad (5.25)$$

donde HeunC representa la función de Heun confluyente, y $m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$ se asocia a los armónicos esféricos.

La velocidad v^μ de una partícula se construye a partir de S , utilizando (4.5), que en el caso sin campo electromagnético tenemos

$$v^\mu = \left[-\frac{i}{2\omega_0} \partial_r \ln \left(\frac{\text{HeunC}}{\text{HeunC}^*} \right), \frac{(\omega_0 - \omega)}{\omega_0} - \frac{i}{2\omega_0} \left(1 - \frac{1}{r} \right) \partial_r \ln \left(\frac{\text{HeunC}}{\text{HeunC}^*} \right), 0, \frac{m}{r^2 \sin^2 \theta \omega_0} \right]. \quad (5.26)$$

A partir de aquí, construimos π^μ (parte sistemática) y u^μ (parte estocástica) de la siguiente manera:

$$\pi^\mu = \frac{1}{2\omega_0} \left[-i \partial_r \ln \left(\frac{\text{HeunC}}{\text{HeunC}^*} \right), i \left(1 - \frac{1}{r} \right) \partial_r \ln \left(\frac{\text{HeunC}}{\text{HeunC}^*} \right) - 2\omega, 0, \frac{2m}{r^2 \sin^2 \theta} \right], \quad (5.27)$$

$$u^\mu = \frac{1}{2\omega_0} \left[\partial_r (\text{HeunC} \cdot \text{HeunC}^*), \left(1 - \frac{1}{r} \right) \partial_r (\text{HeunC} \cdot \text{HeunC}^*), \frac{1}{r^2} \partial_\theta (Y_l^m)^2, 0 \right]. \quad (5.28)$$

Para realizar las simulaciones numéricas para las trayectorias estocásticas utilizamos la ecuación diferencial estocástica (4.15), entonces la velocidad forward es $U^\mu = \pi^\mu + u^\mu$. Dado que las funciones están en términos de la función confluyente de Heun HeunC , utilizamos el software de Mathematica 14.1, donde la función de Heun está disponible, implementando el proceso estocástico mediante *ItoProcess* y *RandomFunction*. Se resolvieron ecuaciones acopladas para $r(\tau)$ y $v(\tau)$.

La simulación numérica es muy similar a una integración numérica tales como Euler o Runge-Kutta, sin embargo se añade una componente estocástica proporcional a Δt . Es decir, a cada paso temporal existe una contribución determinista (similar a la solución a una ecuación diferencial usual), y añade una contribución estocástica. Por lo que lo que necesitamos una condición inicial para la posición inicial, y la información de la partícula está dada por la intensidad del ruido $\sigma = \hbar/\omega_0$

A continuación, se muestran gráficas de las trayectorias para diferentes condiciones iniciales de $r(0)$, l y ω_0 , incluyendo:

- Trayectorias radiales y temporales para $r(0) = 1,05r_s$ y $r(0) = 1,5r_s$. Con r_s el radio de Schwarzschild del agujero negro

- Comparación paramétrica de $r(\tau)$ y $v(\tau)$ vs τ . Al seguir considerando coordenadas de Eddington-Finkelstein estas gráficas corresponden a la evolución de las coordenadas de cada trayectoria respecto al tiempo propio de la partícula
- Por otro lado, se muestran gráficas paramétricas de $r(\tau)$ vs $v(\tau)$, que corresponden a las trayectorias de las partículas en tiempo propio. Es decir corresponden a trayectorias que muestran como las partículas entran en el agujero negro en el tiempo propio de la partícula.
- Por último, se muestra la gráfica que corresponde a las trayectorias $r(\tau)$ vs t . Es decir, en el tiempo de un observador externo se observan las trayectorias de las partículas conforme llegan al agujero negro.

Para la **figura (5.1)**, podemos observar en la fila superior que a mayor momento angular las partículas tardan más en llegar al agujero negro. Respecto a las gráficas mostradas en la **figura (5.2)** podemos observar que las gráficas con σ más grande se tiene una menor estocasticidad, esto se debe a que dado que la intensidad del ruido es inversamente proporcional a la frecuencia de la partícula $\sigma = \hbar/\omega_0$, por lo que para frecuencias grandes corresponden a partículas no cuánticas y gobierna la parte determinista. Para todas las partículas mostradas es evidente que conforme avanza el tiempo propio se distingue un proceso de difusión, debido que a tiempos mayores se tiene que gobierna las contribuciones estocásticas [8; 16].

Las gráficas que observamos en la parte inferior en ambos bloques corresponden al cambio entre el tiempo propio τ y el tiempo de laboratorio t (observador externo). Se tiene un comportamiento de acuerdo a lo esperado en relatividad general, lo que podemos ver es que todas las partículas tienen un comportamiento asintótico al horizonte de eventos y que tardan un tiempo suficientemente largo para entrar al horizonte de eventos. Con lo cual podemos deducir que el formalismo es suficientemente consistente con relatividad general.

Por otro lado, es interesante la relación entre la segunda fila y la última. La fila intermedia corresponde a trayectorias en el tiempo de la partícula, mientras que

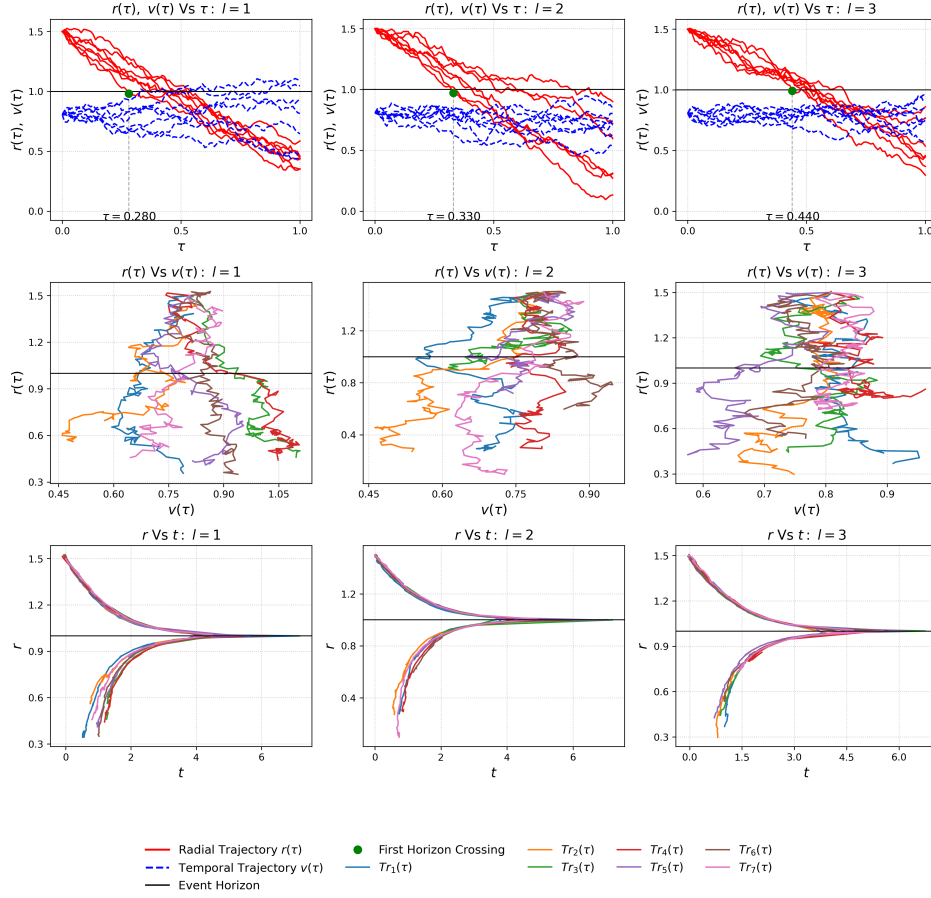


Figura 5.1: Visualización multipanel de siete realizaciones de trayectorias estocásticas correspondientes a diferente momento angular $l = 1, 2, 3$. En todas las gráficas podemos identificar el horizonte de eventos en $r = 1$. **Fila superior:** Coordenada $r(\tau)$ (roja) y coordenada $v(\tau)$ (azul) en función del tiempo propio τ . **Fila intermedia:** Trayectorias paramétricas $r(\tau)$ vs $v(\tau)$. **Fila inferior:** Coordenada radial r vs t

la última son aquellas trayectorias que ven observadores externos a la partícula en un tiempo diferente al de la trayectoria. Al ser sientte trayectorias lo que podemos interpretar es que son diferentes partículas en la misma condición inicial y sus correspondientes trayectorias estocásticas. Sin embargo, al ser una teoría a nivel de partícula podemos pensar que es una sola partícula y las diferentes trayectorias son posibles trayectorias y son diferentes debido a la naturaleza cuántica. Lo que veríamos en la fila inferior de los bloques es como todas las posibles trayectorias van cayendo a una sola, que es lo que mide un observador externo, esto podría ser una explicación del colapso de onda debido a campos gravitacionales fuertes.

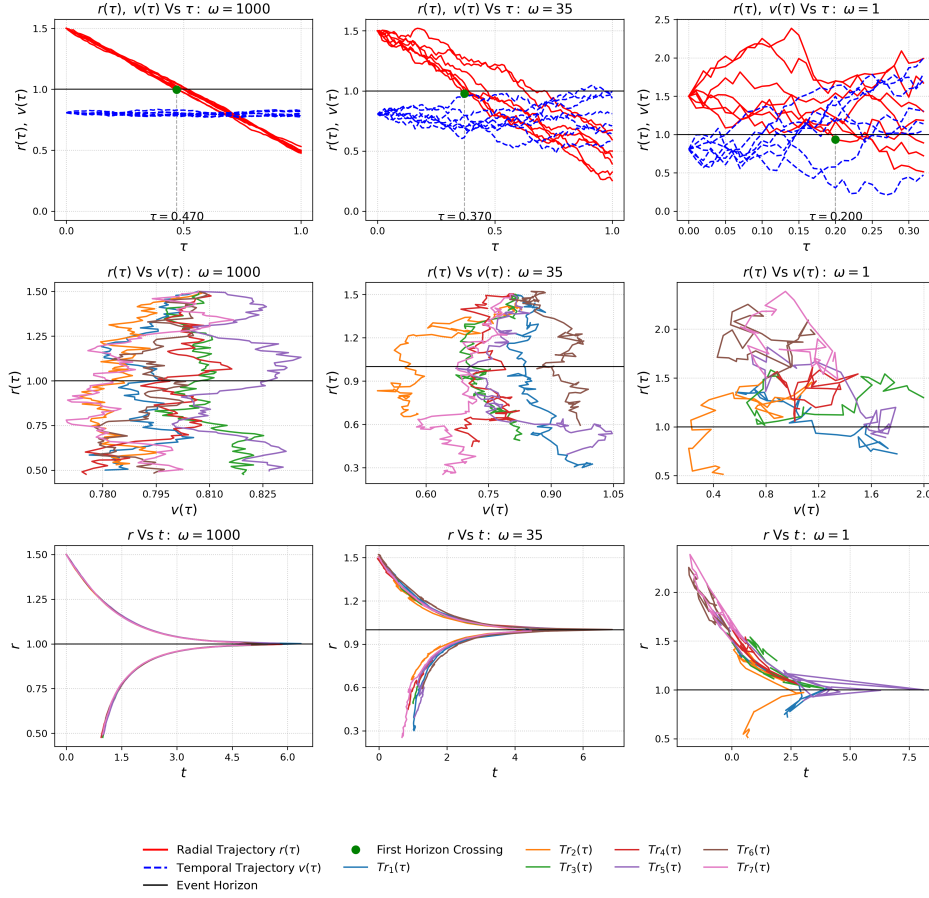


Figura 5.2: Visualización multipanel de siete realizaciones de trayectorias estocásticas correspondientes a diferentes frecuencias para las partículas $\omega_0 = 1000$ 35 1. **Fila superior:** Coordenada $r(\tau)$ (roja) y coordenada $v(\tau)$ (azul) en función del tiempo propio τ . **Fila intermedia:** Trayectorias paramétricas $r(\tau)$ vs $v(\tau)$. **Fila inferior:** Coordenada radial r vs t

Se concluye que las trayectorias estocásticas en la métrica de Schwarzschild, guiadas por funciones de Heun, reflejan adecuadamente la interacción entre campos cuánticos y gravedad, y ofrecen una representación rica y consistente del colapso hacia un agujero negro.

Conclusiones

A pesar del éxito de la mecánica cuántica quedan algunos conceptos sin tener una explicación universalmente aceptada. El presente trabajo constituye un esfuerzo por fundamentar la mecánica cuántica desde un proceso físico fundamental, como lo son los procesos estocásticos.

El trabajo original de Nelson de la mecánica cuántica estocástica representa un hito desde el punto de vista fundamental [13], debido a que al utilizar un proceso estadístico hereda de manera natural a la mecánica cuántica sus características probabilísticas. Y durante la investigación subsecuente se plantea como uno de los mayores retos llevar su extensión a un formalismo covariante [15]. Este objetivo se ve completado en la presente tesis, dado que logramos reproducir el formalismo presentado por Nelson en el régimen de relatividad general, y se recuperan los resultados previamente obtenidos en relatividad especial [10; 19].

La importancia de tener un formalismo como el presentado en la tesis radica en la posibilidad de explicar la naturaleza de la mecánica cuántica a partir de un fenómeno completamente gravitacional. Es decir, dado que tanto partículas relativistas como no-relativistas se ven afectadas por un fondo gravitacional que como hipótesis nosotros consideramos fluctuante, entonces las ecuaciones de campo que gobiernan la mecánica cuántica se pueden obtener desde trayectorias estocásticas de partículas. Aunque en el presente trabajo se presenta el caso Markoviano y considera ruido

blanco Gaussiano, es suficiente para poder deducir las ecuaciones que gobiernan la mecánica cuántica desde un proceso físico.

Como aplicación del presente formalismo se presentan las trayectorias de las partículas cuánticas cerca de un agujero negro, dejando en evidencia que el formalismo es consistente con los resultados de relatividad general, permitiendo que las partículas entren al horizonte de eventos en un tiempo largo para observadores externos. Sin embargo, podemos notar que las trayectorias en su tiempo propio entran al horizonte de eventos. Esto representa el mayor resultado de la presente tesis, es posible estudiar fenómenos cuánticos en sistemas astrofísicos o gravitacionales a nivel partículas.

A manera de conclusión global podemos decir que el hecho de que las partículas se encuentran en un fondo estocástico da nacimiento a los fenómenos cuánticos, y dichos efectos se dan desde la universalidad de la gravedad. Y la relación entre procesos estocásticos y mecánica cuántica queda en evidencia en un formalismo covariante.

Apéndice. Ecuaciones de Heun y Funciones de Heun

Las ecuaciones de Heun constituyen una familia de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden con singularidades regulares e irregulares, que generalizan a la ecuación hipergeométrica. Su importancia radica en que aparecen de forma natural al resolver problemas de física en geometrías curvas o con potenciales complejos, como en el caso de la ecuación de Klein–Gordon o de Dirac en métricas de agujero negro.

La ecuación de Heun general presenta cuatro singularidades regulares y puede escribirse en la forma:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{\epsilon}{z-a} \right) \frac{dy}{dz} + \frac{\alpha\beta z - q}{z(z-1)(z-a)} y = 0, \quad (1)$$

donde $a \neq 0, 1$ es un parámetro complejo, y $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, q$ son parámetros que determinan el comportamiento de la solución. Estos parámetros satisfacen la relación de Fuchs:

$$\gamma + \delta + \epsilon = \alpha + \beta + 1. \quad (2)$$

Ecuación de Heun Confluente

Cuando dos de las singularidades regulares de la ecuación de Heun general confluyen, se obtiene la ecuación de Heun ínfimamente confluyente o simplemente *Heun confluyente*. Esta presenta dos singularidades regulares (en $z = 0$ y $z = 1$) y una singularidad irregular en el infinito:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \left(\alpha + \frac{\beta+1}{z} + \frac{\gamma+1}{z-1} \right) \frac{dy}{dz} + \left(\frac{\mu}{z} + \frac{\nu}{z-1} \right) y = 0. \quad (3)$$

En notación estándar, tal como se implementa en software como Mathematica, la ecuación de Heun confluyente se expresa como:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \left(\alpha + \frac{\beta+1}{z} + \frac{\gamma+1}{z-1} \right) \frac{dy}{dz} + \left(\frac{\eta}{z} + \frac{\xi}{z-1} \right) y = 0, \quad (4)$$

donde la relación entre (η, ξ) y $(\alpha, \beta, \gamma, q)$ depende de la forma de parametrización adoptada.

Soluciones y Propiedades

La solución general de la ecuación de Heun confluyente se denota como:

$$y(z) = \text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, z), \quad (5)$$

la cual está normalizada de forma que $y(0) = 1$.

Algunas propiedades importantes son:

- Presenta un desarrollo en serie alrededor de $z = 0$ dado por:

$$\text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad (6)$$

donde los coeficientes c_n satisfacen una relación de recurrencia de tres términos.

- Para ciertos valores de los parámetros, la serie se trunca, obteniéndose polinomios de Heun.
- En límites especiales (por ejemplo, $\alpha \rightarrow 0$ y con ajuste de los parámetros), la ecuación de Heun confluyente se reduce a la ecuación hipergeométrica confluyente, cuyas soluciones son las funciones de Kummer M y U .
- Las soluciones pueden presentar comportamiento oscilatorio o exponencial dependiendo de la parte imaginaria de los parámetros y de la región del plano complejo.

Las funciones de Heun aparecen en numerosos problemas de física teórica, incluyendo: Ondas escalares y espinoriales en fondos de agujeros negros (Schwarzschild, Kerr, Reissner–Nordström, en sistemas atómicos en campos gravitacionales externos intensos.

En particular, en el contexto de esta tesis, las funciones de Heun confluentes surgen de la separación de variables de la ecuación de Klein–Gordon en coordenadas de Eddington–Finkelstein para la métrica de Schwarzschild, proporcionando la base analítica para el cálculo de trayectorias estocásticas.

Bibliografía

- [1] Gabriella Agazie and collaboration = "NANOGrav.others". The nanograv 15 yr data set: Evidence for a gravitational-wave background. *Astrophys. J. Lett.*, 951(1):L8, 2023.
- [2] Miguel Alcubierre. *Introduction to 3+1 Numerical Relativity*, volume 140. Oxford University Press, apr 2008.
- [3] Max Born. Physical aspects of quantum mechanics. *Nature*, 119:354, 1927.
- [4] Andrea Carosso. Simulating nelsonian quantum field theory. *Foundations of Physics*, 54(3), May 2024.
- [5] Pierre-Henri Chavanis. Derivation of a generalized schrödinger equation from the theory of scale relativity. *The European Physical Journal Plus*, 132:1–48, 2017.
- [6] Eric S Escobar-Aguilar, Tonatiuh Matos, and JI Jiménez-Aquino. Fundamental klein-gordon equation from stochastic mechanics in curved spacetime. *Foundations of Physics*, 55(4):1–19, 2025.
- [7] Omar Gallegos and Tonatiuh Matos. Weak gravitational quantum effects in boson particles. *Gen. Rel. Grav.*, 53(4):50, 2021.

- [8] Kurt Jacobs. *Stochastic processes for physicists: understanding noisy systems*. Cambridge University Press, 2010.
- [9] L. De la Peña, A. M. Cetto, and Andrea Valdés. *The Emerging Quantum*. Springer, 1 edition, 2015.
- [10] William Lehr and James L. Park. A stochastic derivation of the klein–gordon equation. *Journal of Mathematical Physics*, 18:1235–1240, 1977.
- [11] E Mandelung. Quantentheorie in hydrodynamischer form. *Z. Phys*, 40:322–326, 1927.
- [12] Tonatiuh Matos, Ana Avilez, Tula Bernal, and Pierre-Henri Chavanis. Energy balance of a bose gas in a curved space-time. *General Relativity and Gravitation*, 51(12), nov 2019.
- [13] Edward Nelson. Derivation of the schrödinger equation from newtonian mechanics. *Physical Review*, 150(4):1079–1085, oct 1966.
- [14] Edward Nelson. Review of stochastic mechanics. *Journal of Physics: Conference Series*, 361(1):012011, may 2012.
- [15] Edward Nelson. *Dynamical theories of Brownian motion*, volume 101. Princeton university press, 2020.
- [16] Hannes Risken. *Fokker-planck equation*. Springer, 1996.
- [17] E Schrodinger. Quantization as a problem of eigenvalue. *Ann. Phys*, 81:109, 1926.
- [18] Erwin Schrödinger. An undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules. *Physical Review*, 28:1049–1070, 1926.
- [19] T Zastawniak. A relativistic version of nelson’s stochastic mechanics. *Europhysics Letters*, 13(1):13, 1990.