

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA  
UNIDAD IZTAPALAPA

Posgrado en Ciencias y Tecnologías de la Información

---

**Algoritmo de optimización por forrajeo  
de bacterias mejorado para el problema  
de selección de portafolios con  
restricciones**

---

*Idónea Comunicación de Resultados  
para obtener el grado de  
Maestro en Ciencias y Tecnologías de la Información*

Autor:

Christian Leonardo CAMACHO VILLALÓN

*Asesores:*

Dr. Miguel Ángel GUTIÉRREZ ANDRADE

Dr. Abel GARCÍA NÁJERA

6 de diciembre de 2016



Casa abierta al tiempo

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA**  
Unidad Iztapalapa

Fecha : 12/01/2017  
Página : 1/1

### CONSTANCIA DE PRESENTACION DE EXAMEN DE GRADO

La Universidad Autónoma Metropolitana extiende la presente CONSTANCIA DE PRESENTACION DE EXAMEN DE GRADO de MAESTRO EN CIENCIAS (CIENCIAS Y TECNOLOGIAS DE LA INFORMACION) del alumno CHRISTIAN LEONARDO CAMACHO VILLALON, matrícula 2143805503, quien cumplió con los 132 créditos correspondientes a las unidades de enseñanza aprendizaje del plan de estudio. Con fecha doce de enero del 2017 presentó la DEFENSA de su EXAMEN DE GRADO cuya denominación es:

ALGORITMO DE OPTIMIZACIÓN POR FORRAJEJO DE BACTERIAS MEJORADO PARA EL PROBLEMA DE SELECCIÓN DE PORTAFOLIOS CON RESTRICCIONES

Cabe mencionar que la aprobación tiene un valor de 60 créditos y el programa consta de 192 créditos.

El jurado del examen ha tenido a bien otorgarle la calificación de:

Aprobar

JURADO

Presidente

DR. PEDRO LARA VELAZQUEZ

Secretaría

DR. KATYA RODRIGUEZ VÁZQUEZ

Vocal

DR. ABEL GARCIA NAJERA

## *Resumen*

Este trabajo aborda el problema de la selección de portafolios de inversión óptimos (PSP). Mucha investigación se ha hecho en torno a esta tema, la mayor parte de los trabajos han buscado extender el modelo de Markowitz considerando restricciones realistas (piso-techo, clases y cardinalidad), y/o introduciendo otras medidas de riesgo (semi-varianza, desviación absoluta, valor en riesgo, etc.). En este trabajo presentamos los resultados de un algoritmo de optimización multiobjetivo híbrido basado en la optimización por forrajeo de bacterias (BFO), al cual integramos el enfoque de aprendizaje incremental basado en poblaciones (PBIL). El enfoque de PBIL hace uso de la información estadística recolectada por una población de individuos para guiar el proceso evolutivo. Para mejorar el desempeño del algoritmo BFO implementamos la reinicialización de las bacterias, una función lineal decreciente para el tamaño de los pasos quimiotácticos y comparamos dos esquemas diferentes de asignación de pesos durante la fase de reproducción. Nuestra formulación incluye las restricciones de cardinalidad y piso-techo, dos restricciones realistas que son necesarias en la mayoría de los mercados bursátiles del mundo. Basados en el modelo de media-varianza propuesto por Markowitz, utilizamos la bien conocida formulación de Frontera Eficiente (EF) que integra en un solo objetivo el riesgo y el retorno a través de un parámetro de aversión al riesgo. Con la formulación anterior y empleando un conjunto de datos estándar ampliamente utilizado para probar algoritmos de optimización, llevamos a cabo la evaluación de desempeño del algoritmo calculando el porcentaje de desviación con la frontera eficiente real. Los resultados obtenidos mostraron que nuestro algoritmo es capaz de encontrar soluciones de buena calidad distribuidas uniformemente sobre la frontera eficiente. Más aún, al comparar los resultados observamos que son competitivos con los obtenidos por otras técnicas importantes y recientemente empleadas en el área.

# *Agradecimientos*

A mi mamá y mi papá, ellos me han dado todo y siempre estaré agradecido por lo que han hecho por mí. Mi mamá ha sido un ejemplo de gran fortaleza a lo largo de mi vida y mi papá un ejemplo de absoluta dedicación.

A mis asesores del proyecto, gracias a ellos logré llevar a cabo la investigación y terminar este documento.

A la UAM por la beca obtenida para presentar los resultados preliminares de este trabajo en el Congreso Mexicano de Inteligencia Artificial, COMIA 2016.

Al CONACyT por la beca obtenida para cursar mis estudios de maestría. . .

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>I</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>II</b>
<b>Contenido</b>	<b>III</b>
<b>Listado de Figuras</b>	<b>VI</b>
<b>Listado de Tablas</b>	<b>VII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. El problema de la selección de portafolios de inversión . . . . .	1
1.2. Problemas multiobjetivo . . . . .	2
1.3. Algunas técnicas de optimización multiobjetivo . . . . .	2
1.4. Trabajo previo sobre el problema de selección de portafolios . . . . .	4
1.4.1. Técnicas de optimización empleadas para la selección de portafolios	5
1.5. Objetivos . . . . .	6
1.6. Resultados obtenidos . . . . .	7
1.7. Estructura de la ICR . . . . .	8
<b>2. Teoría moderna de portafolios de inversión</b>	<b>10</b>
2.1. Modelo de media-varianza . . . . .	11
2.1.1. Portafolio de inversión . . . . .	12
2.1.2. Venta en corto . . . . .	13
2.1.3. Dos formulaciones del modelo de media-varianza . . . . .	13
2.1.4. Portafolios eficientes . . . . .	15
2.1.5. Frontera eficiente . . . . .	16
2.1.6. Ilustración numérica del modelo media-varianza . . . . .	16
2.2. Otros modelos de riesgo . . . . .	18
2.2.1. Modelo de media-semivarianza . . . . .	18
2.2.2. Ilustración numérica del modelo media-semivarianza . . . . .	20
2.2.3. Modelo de media-desviación absoluta . . . . .	20
2.2.4. Comparativa de los modelos de media-varianza, media-semivarianza y media-desviación absoluta . . . . .	23
2.2.5. Índice de Sharpe . . . . .	24

---

2.2.6. Valor en riesgo, VaR . . . . .	25
2.3. Resumen . . . . .	26
<b>3. El problema de la optimización de portafolios</b>	<b>27</b>
3.1. Formulación de los problemas multiobjetivo . . . . .	27
3.2. Formas de resolver el problema de optimización de portafolios . . . . .	29
3.3. Restricciones . . . . .	30
3.4. Portafolios futuros . . . . .	33
3.5. Estado del arte . . . . .	35
3.5.1. Estudio de mapeo sistemático . . . . .	35
3.5.2. Revisión de la literatura . . . . .	37
3.5.2.1. Funciones objetivos (tipos de riesgo empleado y restric- ciones) . . . . .	38
3.5.2.2. Codificación o representación . . . . .	40
3.5.2.3. Estrategias de optimización empleadas . . . . .	42
3.5.2.4. Comparativa de las estrategias de optimización . . . . .	50
3.6. Análisis del estado del arte . . . . .	56
3.7. Resumen . . . . .	58
<b>4. Formulación y algoritmo propuesto</b>	<b>60</b>
4.1. Riesgo y retorno del portafolio . . . . .	60
4.2. Índice de Sharpe . . . . .	61
4.3. Índice de Sortino . . . . .	62
4.3.1. Restricción de lotes mínimos . . . . .	64
4.3.2. Restricción de costos de transacción . . . . .	64
4.3.3. Problema formulado con índice de Sortino y restricciones . . . . .	65
4.4. Frontera eficiente . . . . .	66
4.5. Algoritmo híbrido BFO-PBIL . . . . .	68
4.5.1. BFO . . . . .	68
4.5.2. PBIL . . . . .	70
4.5.3. Mejoras al algoritmo BFO . . . . .	70
4.5.4. Algoritmo BFO-PBIL . . . . .	72
4.5.4.1. Tamaño de desplome decreciente . . . . .	73
4.5.4.2. Vector PBIL . . . . .	73
4.5.4.3. Dos esquemas de asignación de pesos . . . . .	75
4.5.4.4. Reinicialización aleatoria . . . . .	75
4.5.5. Manejo de restricciones . . . . .	75
4.6. Resumen . . . . .	76
<b>5. Experimentación y resultados</b>	<b>78</b>
5.1. Conjunto de datos . . . . .	78
5.2. Configuración del algoritmo . . . . .	78
5.3. Método de evaluación de desempeño . . . . .	79
5.4. Resultados . . . . .	80
5.5. Resumen . . . . .	90
<b>6. Conclusiones</b>	<b>94</b>
6.1. Evaluación del trabajo de investigación . . . . .	94

---

6.2. Principales contribuciones . . . . .	95
6.3. Trabajo futuro . . . . .	96
<b>A. Ilustración numérica de los modelos de riesgo</b>	<b>98</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>100</b>

# Índice de figuras

2.1. Frontera eficiente en el análisis de portafolios (tomada de [39]) . . . . .	15
2.2. Frontera eficiente con el modelo media-varianza (tomada de [39]) . . . . .	17
2.3. Frontera eficiente con el modelo media-semivarianza (tomada de [39]) . . . . .	21
2.4. Comparativa de las fronteras eficientes en los tres modelos (tomada de [39]) . . . . .	23
2.5. Proporción de Sharpe (tomada de [11]) . . . . .	25
3.1. Producto cruz de los términos de búsqueda. . . . .	36
3.2. Distribución de los trabajos según la función objetivo y las restricciones consideradas . . . . .	56
3.3. Distribución de los trabajos según el enfoque de optimización utilizado . . . . .	57
5.1. Fronteras eficientes encontradas por BFO-PBIL para el PSP <i>sin restricciones</i> . . . . .	83
5.2. Fronteras eficientes encontradas por BFO-PBIL para el PSP <i>con cardinalidad y piso-techo</i> . . . . .	86
5.3. Comparativa de la configuración original de BFO y la configuración propuesta (PSP <i>con restricciones</i> ) . . . . .	88
5.4. Comparativa de BFO-PBIL con dos esquemas de asignación de pesos (PSP <i>con restricciones</i> ) . . . . .	91

# Índice de tablas

2.1. Precio de cierre mensual, 12 meses (tomada de [39]) . . . . .	16
2.2. Retorno promedio (tomada de [39]) . . . . .	16
2.3. Matriz de covarianza de todas las opciones de inversión (tomada de [39]) .	17
5.1. Portafolios evaluados en BFO-PBIL y BFO original . . . . .	79
5.2. Comparativa de BFO-PBIL y BFO original (PSP <i>sin restricciones</i> ) . . . .	82
5.3. Comparativa de BFO-PBIL y BFO original (PSP <i>con restricciones</i> ) . . .	84
5.4. Comparativa de la configuración original de BFO y la configuración propuesta (PSP <i>con restricciones</i> ) . . . . .	87
5.5. Comparativa de BFO-PBIL con dos esquemas de asignación de pesos (PSP <i>con restricciones</i> ) . . . . .	89
5.6. Comparativa de BFO-PBIL con otros algoritmos de optimización (PSP <i>sin restricciones</i> ) . . . . .	92
5.7. Comparativa de BFO-PBIL con otros algoritmos de optimización (PSP <i>con restricciones</i> ) . . . . .	93

*Para todos aquellos con quienes he compartido mi vida. Para todos aquellos que me han dado su ejemplo, sus palabras, su amistad y su amor. . .*

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. El problema de la selección de portafolios de inversión

La selección de un portafolio de inversión es una práctica muy común que cubre un amplio rango de aplicaciones que pueden variar desde portafolios sencillos en posesión de particulares (conteniendo algunas acciones, inversiones bancarias, bienes raíces, etc), hasta portafolios muy grandes manejados por profesionales para compañías o fondos de pensión (los cuales contienen una gran cantidad de acciones, bonos de deuda, hipotecas, divisas, etc). Un portafolio de inversión incluye dos o más activos proyectados a un cierto tiempo, de los cuales se espera que aumenten su valor y generen una ganancia al inversionista. El problema de la selección de portafolios (también conocido como optimización de portafolios) es un problema de optimización que consta de una parte combinatoria y otra continua. Para resolverlo es necesario seleccionar los activos en el portafolio y determinar qué proporción del capital se debe asignar a cada uno de ellos para que brinden el mayor retorno y el menor riesgo al inversionista.

Harry Markowitz estableció las bases de la teoría moderna de los portafolios (MPT) en el trabajo titulado "Portfolio Selection" [35] en el año de 1952. Antes de este trabajo seminal las inversiones estaban frecuentemente asociadas solo con el retorno esperado (ganancia) y no con el riesgo (variación del retorno esperado) [24]. Sin embargo, Markowitz consideró en su teoría los dos aspectos anteriores, definió la ganancia como el promedio ponderado de todos los activos que integran el portafolio, y al riesgo como la varianza y covarianza del retorno esperado de los activos en el portafolio. Hoy en día, los inversionistas buscan diversificar los activos de inversión (esto es, invertir en diferentes activos) con el objetivo de mitigar el riesgo. Además, los portafolios bien administrados persiguen dos objetivos a la vez: minimizar el riesgo y maximizar el retorno esperado.

## 1.2. Problemas multiobjetivo

Muchos de los problemas en diversos campos del conocimiento pueden ser formulados como problemas de optimización multiobjetivo; el envío de mercancía minimizando el costo y el tiempo (en logística), la liberación de fármacos aumentando su efectividad y disminuyendo los efectos secundarios (en medicina), numerosos procesos que se llevan a cabo en la industria de producción de bienes y servicios, etc. son ejemplos de problemas que se pueden formular de esta manera. Sin embargo, la complejidad de muchos de estos problemas ha llevado al desarrollo de métodos alternativos (soluciones heurísticas y metaheurísticas) que hacen analogía de fenómenos biológicos, sociales y físicos para resolverlos. Los problemas financieros y económicos no son la excepción, la gran mayoría involucran múltiples objetivos que están en conflicto unos con otros y para los cuales no existe un única solución, sino un conjunto de soluciones igualmente buenas entre todos los objetivos del problema.

Las técnicas de optimización multiobjetivo tienen la habilidad de manejar de manera simultánea un conjunto de soluciones las cuales se van mejorando durante un proceso conocido como *optimización*. El conjunto de las mejores soluciones encontradas por una técnica de optimización aplicada a un problema multiobjetivo se les conoce como: soluciones eficientes, óptimos de Pareto, frente de Pareto, o frente no dominado; y tienen como principal característica que ofrecen el mejor compromiso entre los valores objetivo del problema. Una de las principales características que se desea en estos algoritmos (además, de encontrar las soluciones lo más cercanas posibles a la frontera eficiente real del problema) es una distribución uniforme de las soluciones eficientes sobre todo el frente de Pareto (ver sección 3.1), es decir, la técnica debe ofrecer una adecuada exploración y explotación del espacio de búsqueda evitando quedar atrapada en una sola región, mientras más uniforme sea la distribución de las soluciones, mejor se considera el desempeño de la técnica de optimización.

## 1.3. Algunas técnicas de optimización multiobjetivo

Las técnicas de optimización multiobjetivo son numerosas y muy variadas [19]. A continuación se presentan algunas de las técnicas de optimización multiobjetivo que han sido empleadas para resolver el PSP mostrado buenos resultados [41], la revisión de la literatura completa que se llevó a cabo en este trabajo se presenta en el Capítulo 3.

Los algoritmos evolutivos (EA) emulan el mecanismo darwiniano de la supervivencia del más apto, a fin de producir soluciones que tienen una buena aproximación al óptimo global que se quiere lograr. Los EA requieren poca información del dominio del problema

para operar y pueden hacer frente a los espacios de búsqueda de funciones objetivo no convexos y/o discontinuos.

Los algoritmos genéticos (GA) son parte de los EA y representan un método de optimización estocástico basado en los mecanismos de selección natural de la evolución. En estos algoritmos las búsquedas se realizan a través de una población de cromosomas, cada uno de los cuales representa una solución al problema. Para encontrar las mejores soluciones, estos algoritmos emulan los mecanismos evolutivos de selección, cruzamiento (reproducción) y mutación.

La inteligencia de enjambre (SI) se origina por el estudio de colonias o enjambres de organismos sociales. Estudiando el comportamiento social de los organismos (individuos) se han diseñado algoritmos de optimización muy eficientes. El comportamiento de una parvada de aves, la manera como consiguen alimento las hormigas o las abejas representan en sí métodos optimizados para realizar tareas complicadas, donde el enjambre puede lograr eficientemente lo que de manera individual sería muy complicado. En la mayoría de los algoritmos pertenecientes a este enfoque, existe algún tipo de comunicación entre los individuos para guiar el proceso de optimización.

La optimización por enjambre de partículas (PSO) es parte de la inteligencia de enjambre. En esta técnica cada individuo tiene un conocimiento mínimo o nulo, pero a través de la interacción con los individuos a su alrededor son capaces de llevar a cabo tareas muy complejas como grupo. El concepto básico de PSO está en acelerar cada partícula hacia su mejor valor logrado hasta el momento, y hacia el mejor valor que se ha obtenido por cualquier otra partícula del enjambre. En cada iteración, la aceleración se modifica con un valor aleatorio. PSO es similar a otros algoritmos bioinspirados como los GA, que tienen como base una población estocástica, y procedimientos de búsqueda iterativos que se actualizan de acuerdo a la función de aptitud.

La optimización por forrajeo de bacterias (BFO) fue propuesta originalmente por Passino [40] en 2002 y es parte de las técnicas de inteligencia de enjambre (SI). Las bacterias en el algoritmo de BFO implementan un tipo de caminata aleatoria influenciada para encontrar las mejores soluciones. El algoritmo sigue la estrategia de forrajeo (alimentación) de bacterias reales en tres aspectos: dirigirse hacia las regiones donde están las mejores soluciones y permanecer ahí más tiempo, evadir las regiones con las peores soluciones y salir de las regiones donde no se puedan mejorar las soluciones.

Los enfoques híbridos emplean una combinación de técnicas heurísticas y/o metaheurísticas para resolver el problema de optimización. Dentro de los algoritmos que se utilizan están: búsqueda local (LS), recocido simulado (SA), búsqueda tabú (TS), escalando la colina (HC), algoritmos glotones, colonias de hormigas (un tipo de SI), etc.

La utilización de los algoritmos multiobjetivo (MOA) para resolver el problema de optimización de portafolios tiene dos aspectos que son importantes de considerar. Primero, la representación (o codificación) de un portafolio debe considerar por lo menos la restricción básica (presupuesto) y cualquier otra restricción realista impuesta en la formulación del problema. Segundo, debido a que el uso de los MOEA se ha popularizado, es necesario poder establecer una comparativa de la solución propuesta contra otras soluciones empleadas para resolver al problemas de la optimización de portafolios.

#### **1.4. Trabajo previo sobre el problema de selección de portafolios**

A partir del trabajo realizado por Markowitz se han publicado un gran número de artículos extendiendo o modificando el modelo básico en tres direcciones principalmente [1]:

- i La simplificación en el tipo y la cantidad de los datos de entrada.
- ii La introducción de medidas de riesgo alternativas
- iii La incorporación de criterios adicionales y/o restricciones.

Una gran cantidad de los estudios recientes sobre el problema de optimización de portafolios ya no consideran al inversionista estándar, sino al inversionista en busca de un “portafolio adaptado”. Para este tipo de inversionistas es importante el número de activos en el portafolio, la cantidad máxima de recursos invertidos en cada activo, la responsabilidad social, los costos de inversión o transacción, etc. Al extender el modelo original para incluir restricciones prácticas que son relevantes (esto es, hacerlo más realista), se vuelve más complicado de resolver. Si se incluye en la formulación del problema alguna restricción que implique números enteros (como la restricción de cardinalidad o la de lotes mínimos), el problema se transforma de uno de programación cuadrática (QP) a uno de programación entera mixta cuadrática (QMIP), que está probado es de tipo NP-difícil [43]. De igual manera, si hay por lo menos una restricción de tipo cuadrático, es necesario recurrir a técnicas de optimización alternativas.

### 1.4.1. Técnicas de optimización empleadas para la selección de portafolios

Existen diversos métodos matemáticos para resolver el problema de la selección de portafolios [6], sin embargo, la eficacia de estos métodos es limitada al no considerar restricciones realistas a la formulación del problema. El análisis utilizando en estas técnicas generalmente tiene que “adaptar” el problema para que pueda ser resuelto. Al considerar un número grande de activos en el problema las técnicas analíticas se pueden ver rebasadas, además de volverse muy complicadas de emplear al introducir un mayor número de restricciones en el modelo o ser de tipo cuadrático.

Las técnicas que resuelven el problema de manera exacta no pueden encontrar el portafolio óptimo en un tiempo razonable, además tiene limitación en la cantidad de activos que pueden manejar, por lo que no es posible aplicarlas en problemas a gran escala [34]. Las técnicas metaheurísticas pueden hacer frente a estos inconvenientes y encontrar la frontera eficiente con restricciones [56]. Dentro de las técnicas metaheurísticas están el algoritmo de escalando la colina (HCA), recocido simulado (SA), búsqueda tabú (TS). También se han empleado técnicas híbridas basadas en búsqueda local (LS) y algoritmos para programación cuadrática (QP), los cuales han mostrado resultados comparables o superiores a los soluciones matemáticas y los métodos analíticos.

Muchos trabajos han utilizado algoritmos basado en poblaciones estocásticas, dentro de estos los algoritmos genéticos (GA) han mostrado mejores resultados que SA y TS [9]. Una técnica híbrida que utiliza un GA para encontrar el número óptimo de activos y después QP para determinar el peso de cada uno en el portafolio mostró buenos resultados [21]. La optimización de Pareto por colonia de hormigas (ACO) se ha presentado como una metaheurística especialmente efectiva [14], los resultados obtenidos con esta técnica son comparables a los que se obtienen con la optimización de Pareto por recocido simulado y el algoritmo genético de ordenación no dominante (NSGA). El uso de un modelo híbrido de redes neuronales artificial con el algoritmo de optimización por enjambre de partículas (PSO) mostró la flexibilidad de las técnicas híbridas, así como su superioridad en predecir el desempeño del portafolio [56].

Dentro de las técnicas que emplean algoritmos evolutivos multiobjetivo (MOEA) destacan los algoritmos basados en ordenamiento de Pareto NSGA-II, PESA y SPEA2. Algunos MOEA de búsqueda local para soluciones factibles y un enfoque híbrido evolutivo multiobjetivo que combinaba computación evolutiva con programación lineal. Se ha experimentado también con algunas técnicas híbridas novedosas no evolutivas que utilizan un algoritmo glotón de búsqueda local, SA, optimización por colonia de hormigas y un algoritmo que emplea la búsqueda en vecindarios variables [41].

Los enfoques mencionados en el párrafo anterior tiene algunos inconvenientes, por ejemplo, la red neuronal artificial frecuentemente se queda atrapada en mínimos locales. Los GA por su parte requieren de mayor tiempo para converger y encontrar las soluciones adecuadas. La optimización por enjambre de partículas (PSO) ha sido exitosa para encontrar el mínimo global y permitir al usuario obtener el conjunto de soluciones subóptimas (algo muy importante para el problema de selección de portafolio), sin embargo, su eficacia decrece conforme aumenta el número de instancia de prueba [56]. El algoritmo BFO es una de las heurísticas más novedosas en el área de Inteligencia de Enjambre. La técnica ha demostrado un gran potencial para resolver problemas de optimización en diferentes áreas y recientemente se ha empezado a utilizar para resolver el problema de la optimización de portafolios [28].

En el área de portafolios futuros con restricciones existen muy pocos trabajos que empleen técnicas metaheurísticas [38]. Hay técnicas de optimización numérica que incluye activos de corto y largo plazo, y dos trabajos más que están enfocados principalmente a los beneficios de la diversificación y la maximización de la utilidad en los contratos futuros.

El problema de la selección de portafolios ha llamado la atención desde hace tiempo a un gran número de investigadores en el área financiera y de las ciencias de la computación. Para los primeros representa una oportunidad de aumentar el rendimientos de los portafolios y obtener una mayor ganancia, para los segundos representa el reto de diseñar e implementar un algoritmo que mejores los resultados de los trabajos previos.

## 1.5. Objetivos

Hasta el momento se han propuesto diversas técnicas de solución con resultados diversos, además, el problema ha sido extendido para incluir otro tipo de inversiones (portafolios futuros) y restricciones que varían según las características de los inversionistas. Tomando en cuenta lo anterior se plantean los siguientes objetivos para el proyecto.

### Objetivo general

Desarrollar un sistema basado en inteligencia computacional que resuelva el problema multiobjetivo de selección de portafolios integrando restricciones realistas y un tipo de riesgo adecuado.

## Objetivos particulares

Para lograr el objetivo general, se consideran los siguientes objetivos específicos:

- Conocer el estado del arte y determinar las ventajas y desventajas de trabajos previos.
- Formular el PSP como un problema de optimización multiobjetivo con restricciones realistas.
- Diseñar e implementar un algoritmo basados en las técnicas identificadas para resolver el problema.
- Evaluar el desempeño del algoritmo con medidas de desempeño utilizadas en la comunidad.

## 1.6. Resultados obtenidos

Los resultados obtenidos durante el desarrollo de este proyecto fueron presentados en dos foros importantes nacionales.

- 1) **Evento:** 8a Semana de Computación y Matemáticas Aplicadas (30 de octubre 2015).

**Trabajo:** Optimización Multiobjetivo de Portafolios de Inversión

**Resumen:** Este documento aborda el problema de la selección de portafolios de inversión óptimos (PSP). Lo que aquí se presenta es resultado del trabajo llevado a cabo durante el primer trimestre de investigación en el proyecto de tesis. Se propone una formulación del problema que incluye las restricciones de costos de transacción y lotes mínimos, dos restricciones realistas muy poco consideradas a pesar de ser necesarias en la mayoría de los mercados bursátiles del mundo. Como función objetivo a optimizar utilizamos una versión modificada del popular índice de Sharpe que emplea la semivarianza como medida de riesgo (llamada índice de Sortino), la cuál modela más adecuadamente la distribución del retorno de los activos de inversión.

- 2) **Evento:** Congreso Mexicano de Inteligencia Artificial - COMIA 2016 (23 de mayo 2016).

**Trabajo:** Algoritmo de optimización mediante forrajeo de bacterias híbrido para el problema de selección de portafolios con restricción de cardinalidad.

**Publicación:** Por publicarse en Research in Computing Science ISSN 1870-4069

**Resumen:** En este documento presentamos los resultados preliminares de un algoritmo de optimización multiobjetivo híbrido basado en optimización por forrajeo de bacterias (BFO), al cual integramos el enfoque de aprendizaje incremental basado en poblaciones (PBIL). El enfoque de PBIL hace uso de información estadística para guiar el proceso de mejora incremental de las bacterias. Basados en el modelo de media-varianza propuesto por Markowitz, utilizamos la bien conocida formulación de Frontera Eficiente (EF) que integra en un solo objetivo el riesgo y el retorno a través de un parámetro de aversión al riesgo. Con la formulación anterior y utilizando un conjuntos de datos estándar llevamos a cabo la evaluación del desempeño del algoritmo. Los resultados obtenidos mostraron que nuestro algoritmo es capaz encontrar soluciones de buena calidad distribuidas uniformemente sobre la frontera eficiente.

## 1.7. Estructura de la ICR

El resto del documento está estructurado de la siguiente manera. En el Capítulo 2 se describe la teoría moderna de portafolios de inversión a partir del modelo de media-varianza propuesto por Markowitz. En este capítulo se presentan otros modelos empleados para medir el riesgo de los portafolios y una ilustración numérica de cada uno de los enfoques, finalizando con una comparativa entre ellos.

En el Capítulo 3 se describe brevemente en qué consisten los problema de la optimización multiobjetivo y porqué el PSP es un problema de este tipo. Además, se presentan las principales restricciones impuestas a los portafolios de inversión que se deben de incluir en el modelo. Se incluye el estado del arte elaborado para este proyecto y el análisis del mismo, al final del capítulo se identifican los nichos de oportunidad y se describe brevemente la solución propuesta.

En el Capítulo 4 se presenta las dos formulaciones del PSP consideradas en este proyecto incluyendo restricciones realistas, se describe ampliamente el algoritmo BFO y el algoritmo PBIL y la manera como se integraron los dos enfoques junto con las mejoras incluidas.

En el Capítulo 5 se discuten los resultados obtenidos por el algoritmo propuesto para el PSP con y sin restricciones, probado con cinco conjuntos de datos estándar. Se describe

---

además el método de evaluación del desempeño empleado (porcentaje de desviación) y las fronteras eficientes generadas por cada una de las técnicas.

Finalmente, en el Capítulo 6 aparecen las conclusiones y el trabajo futuro que se desprende de esta investigación.

## Capítulo 2

# Teoría moderna de portafolios de inversión

La selección de un portafolio de inversión depende de muchos factores que varían de inversionista a inversionista, sin embargo, en la mayoría de los casos se busca que el portafolio obtenga el mayor retorno para un nivel de riesgo establecido, o el menor riesgo para un nivel de retorno establecido. En este sentido, los mejores portafolio debería estar conformado por el o los activos de inversión que cumplan alguna de las dos características anteriores.

El problema matemático de los portafolios de inversión puede ser formulado de muchas maneras, pero las principales formulaciones son las siguientes:

- i** Minimizar el riesgo para un retorno específico
- ii** Maximizar el retorno para un riesgo específico
- iii** Minimizar el riesgo y maximizar el retorno utilizando un factor de aversión al riesgo específico
- iv** Minimizar el riesgo independientemente del retorno esperado
- v** Maximizar el retorno esperado independientemente del riesgo

La descripción del modelo propuesto por Markowitz en 1952 que se presenta a continuación está tomada del Capítulo 1 de [39] y del trabajo publicado por Markowitz en [35].

## 2.1. Modelo de media-varianza

En 1952 Harry Markowitz hizo la mayor contribución en el área de los portafolios de inversión con la publicación de la teoría de la selección de portafolios [35], también conocida popularmente como la teoría de Markowitz o la teoría moderna de portafolios (MPT). En esta publicación Markowitz da respuesta a la pregunta de ¿cómo debe un inversionista distribuir el capital entre todas las posibles opciones de inversión? Markowitz sugirió que es imposible determinar todas las posibles conclusiones relativas a los portafolios. Sin embargo, concluyó que tanto el retorno esperado (media) y la varianza del retorno esperado (riesgo) son dos criterios comunes para todos los inversionistas. Markowitz asumió que las *creencias* o proyecciones acerca de los activos de inversión (acciones, divisas, etc) siguen las mismas reglas de una variable aleatoria. De esta suposición se obtiene que: i) el retorno esperado del portafolio es un promedio ponderado del retorno esperado de cada uno de los activos; ii) la varianza del retorno esperado del portafolio es una función particular de la varianza y covarianza entre los activos y su peso en el portafolio.

El retorno esperado de un activo de inversión está expresado como el porcentaje de retorno durante un periodo de tiempo, se define como

$$\frac{\left( (PC_{pa}) - (PC_{pp}) + (D_{pa}) \right)}{(PC_{pp})} \quad (2.1)$$

donde  $PC_{pa}$  es el precio de cierre del periodo actual,  $PC_{pp}$  es el precio de cierre del periodo previo y  $D_{pa}$  son los dividendos en el periodo actual.

Si  $R_i$  es una variable aleatoria representando el porcentaje de retorno (por periodo) del  $i$ -ésimo activo ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) y  $x_i$  la proporción del total de fondos que están invertidos en el  $i$ -ésimo activo, el valor  $r_i$  que toma la variable aleatoria  $R_i$  para el  $i$ -ésimo activo, durante un periodo  $t = 1, 2, \dots, T$  está definido como sigue

$$r_{it} = \frac{(p_{it}) - (p_{it-1}) + (d_{it})}{(p_{it-1})} \quad (2.2)$$

donde  $p_{it}$  es el precio de cierre del  $i$ -ésimo activo durante un periodo de tiempo  $t$ ,  $p_{it-1}$  es el precio de cierre durante el periodo  $t - 1$ , y  $d_{it}$  el dividendo del  $i$ -ésimo activo durante el periodo  $t$

### 2.1.1. Portafolio de inversión

Un portafolio de inversión se define propiamente como una colección de dos o más activos de inversión (activos) representados por  $n$ -tuplas ordenadas  $\Theta = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , donde  $x_i$  es la proporción, del total de fondos, que está invertida en el  $i$ -ésimo activo.

El retorno esperado (por periodo) de un portafolio está dado por

$$r(x_1, x_2, \dots, x_n) = E \left[ \sum_{i=1}^n R_i x_i \right] = \sum_{i=1}^n E[R_i] x_i = \sum_{i=1}^n r_i x_i \quad (2.3)$$

donde  $E[R_i]$  representa el valor esperado de la variable aleatoria  $R_i$ , con el cual se aproxima el valor de  $r_i$ . Un inversionista tendrá preferencia por un portafolio cuyo retorno tenga la mínima dispersión/variabilidad. Markowitz sugiere que la varianza, la cual mide la dispersión de un retorno esperado, se puede utilizar para cuantificar el riesgo del portafolio. La varianza del  $i$ -ésimo activo se denota por  $\sigma_i^2$  y se expresa de la siguiente manera

$$\sigma_i^2 = v(R_i) = E \left[ (R_i - E[R_i])^2 \right] = E \left[ (R_i - r_i)^2 \right] \quad (2.4)$$

La varianza de un portafolio está determinada por la varianza de los activos individuales y por la covarianza de todas las posibles parejas de activos. La covarianza  $\sigma_{ij}$  entre el retorno de los activos  $R_i$  y  $R_j$  se expresa como

$$\sigma_{ij} = E \left[ (R_i - E[R_i]) \times (R_j - E[R_j]) \right] \quad (2.5)$$

haciendo uso de hecho de que el valor de que con  $E[R_i]$  se puede aproximar  $r_i$

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_{it} - r_i) \times (r_{jt} - r_j) \quad (2.6)$$

Además, la covarianza se puede expresar en términos del coeficiente de correlación  $\rho_{ij}$  como sigue

$$\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j \quad (2.7)$$

La varianza del retorno de un portafolio de inversión, tomando en cuenta que  $v(R_i) = \sigma_{ii}$ , se puede obtener con

$$v(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij} \quad (2.8)$$

### 2.1.2. Venta en corto

Cuando un inversionista vende un activo antes de terminar el periodo de inversión (anticipándose a la caída del precio) se dice que toma una posición corta. El inversionista no posee el activo en realidad, por lo que matemáticamente esta situación se explica tomando el valor del activo como negativo.

En el análisis de los portafolios del modelo de media-varianza de Markowitz está excluida esta situación, por lo que  $x_i \geq 0$  para todo  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Además, debido a que  $x_i$  es una parte del total de los fondos invertidos se cumple que  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$

### 2.1.3. Dos formulaciones del modelo de media-varianza

De lo discutido en los párrafos anteriores se desprenden los siguientes supuestos como parte de la teoría de Markowitz:

- i** Los precios de todos los activos son estrictamente positivos en todo momento.
- ii** El retorno  $R_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) es una variable aleatoria que toma un número finito de valores.
- iii** Un inversionista puede poseer una fracción de un activo. Este supuesto se conoce como divisibilidad.
- iv** Un activo puede ser comprado o vendido bajo demanda en cualquier cantidad al precio del mercado. Este supuesto se conoce como liquidez.
- v** No hay intermediarios y/o costos de transacción.
- vi** La venta en corto de un activo no está permitida.

Basados en el modelo de media-varianza el problema de la optimización de portafolios se puede formular de dos maneras diferentes considerando los supuestos anteriores.

**Modelo 1:** Modelo de optimización de portafolios para minimizar la varianza y restringir el retorno esperado

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j \\
 &\text{sujeto a} && \sum_{i=1}^n r_i x_i = r_0 \\
 &&& \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\
 &&& x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

donde  $r_0$  es el retorno esperado del portafolio, la función objetivo minimiza el riesgo del portafolio (la varianza). Las restricciones aseguran: i) que el retorno esperado del portafolio al final del periodo sea igual al valor objetivo  $r_0$  (retorno esperado por el inversionista); 2) que la suma de los activos sea igual al total del presupuesto disponible y 3) que no se permita la venta en corto.

Con esta formulación, si el inversionista desea un valor muy alto para  $r_0$  el problema se vuelve infactible. Es por esto, que  $r_0$  siempre está acotado entre un  $r_{max}$  y un  $r_{min}$ , donde  $r_{min}$  el valor de  $r_0$  para el portafolio con menor retorno, y  $r_{max}$  el valor máximo factible para  $r_0$ . Es decir,  $r_{max}$  es el retorno máximo que se puede obtener de entre todos los activos que conforman el portafolio.

**Modelo 2:** Modelo de optimización de portafolios para maximizar el retorno y restringir la varianza

$$\begin{aligned}
 &\text{maximizar} && \sum_{i=1}^n r_i x_i \\
 &\text{sujeto a} && \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j = v_0 \\
 &&& \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\
 &&& x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

donde  $v_0$  es el riesgo (varianza) que el inversionista está dispuesto a asumir. Es posible generar diferentes portafolios considerando los valores  $v_0 \leq v_{max}$ , sin embargo, si el valor de  $v_0$  se establece demasiado pequeño el problema se vuelve infactible.

### 2.1.4. Portafolios eficientes

Un portafolio  $x$  es llamado eficiente si tiene el máximo retorno esperado entre todos los portafolios con la misma varianza, o alternativamente, si tiene la mínima varianza entre todos los portafolios que tiene el mismo retorno esperado. Para ejemplificar lo anterior, consideremos dos portafolios: **A** y **B**, se tendrá preferencia por el portafolio **A** si:

$$E[\mathbf{A}] > E[\mathbf{B}], \quad v(\mathbf{A}) = v(\mathbf{B})$$

o

$$v(\mathbf{A}) < v(\mathbf{B}), \quad E[\mathbf{A}] = E[\mathbf{B}]$$

donde  $E[\ ]$  es el valor de retorno esperado y  $v(\ )$  la varianza o riesgo asociado.

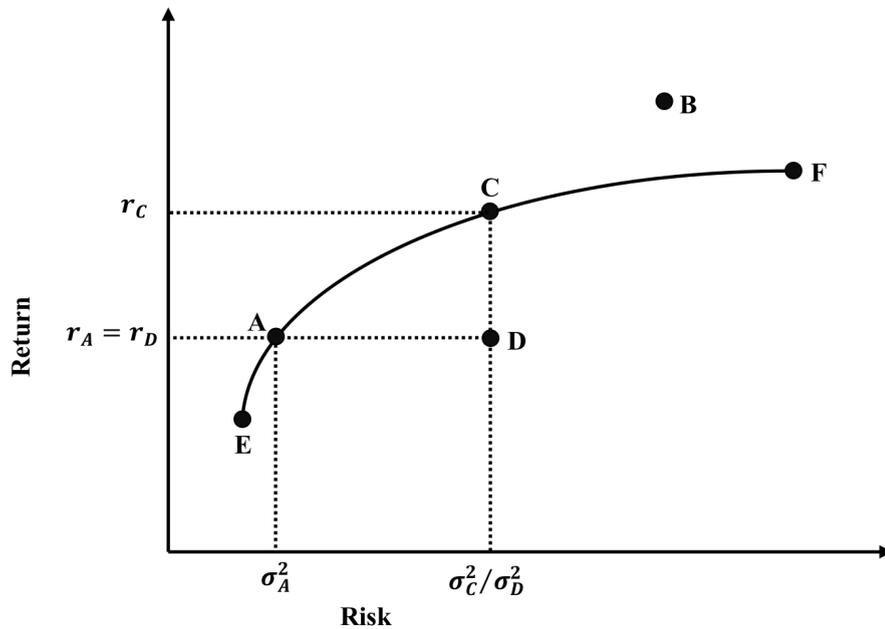


FIGURA 2.1: Frontera eficiente en el análisis de portafolios (tomada de [39])

En la Figura 2.1 (tomada de [39]) se muestran un diagrama de media-varianza donde cada punto representa un portafolio. Todos los puntos debajo de la curva **EF** son una combinación de portafolios factibles, el punto **B** es por lo tanto un combinación de retorno y riesgo que no existe. El punto **E** representa un portafolio de mínima varianza (o menor riesgo) y el punto **F** el portafolio de mayor retorno.

**2.1.5. Frontera eficiente**

La curva obtenida de un conjunto de portafolios eficientes es llamada frontera eficiente, en la Figura 2.1 es la curva formada por los puntos **EF**. Todos los puntos que se encuentran por debajo de la curva se dice que son dominados por la frontera eficiente. Para ejemplificar esto, supongamos que un inversionista está dispuesto a asumir un riesgo de  $\sigma_D^2$  y obtener un retorno de  $r_D$  con el portafolio **D**, sin embargo, el portafolio **C** brinda un retorno de  $r_C$  que es mayor al de portafolio **D**. Se dice entonces que el portafolio **C** domina al portafolio **D** porque da un mayor retorno para el mismo nivel de riesgo.

**2.1.6. Ilustración numérica del modelo media-varianza**

Con el objetivo de mostrar la aplicación y uso del modelo de Markowitz, se presenta a continuación una ilustración numérica del modelo de media-varianza con datos tomados de [39]. En la Tabla 2.1 aparecen los precios de cierre de diez activos a lo largo de doce meses. En la Tabla 2.2 se muestra el retorno esperado promedio para cada uno de los activos calculado con los precios de cierre mensuales utilizando la Ecuación 2.2.

	Retorno mensual											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ABL	0.07200	0.32032	0.29710	0.23600	-0.05161	0.50633	-0.02516	0.90484	0.03214	0.45968	0.22700	-0.87871
ALL	-0.14433	0.19032	0.75032	0.03433	0.33581	0.24700	0.499688	0.27032	-0.32786	0.31968	0.19933	-0.500903
BHL	0.08667	1.05613	0.05516	0.27567	-0.21839	0.49233	1.11516	0.57613	0.17143	0.92258	0.22367	-0.67903
CGL	-0.18567	0.76774	0.16194	0.48663	-0.20710	0.47833	0.25710	0.59484	-0.02321	0.55387	0.07333	-0.11871
HHM	0.18233	0.33000	0.13677	0.46533	-0.12774	0.56067	0.10839	0.00000	0.14321	0.00968	-0.15767	-0.27258
HCC	-0.15700	0.61226	1.23548	0.56067	-0.71065	0.97333	0.32839	0.61581	0.03286	0.49935	-0.03733	-0.59452
KMB	0.18567	0.27806	0.55097	0.02733	-0.46613	0.73333	0.20581	0.17065	-0.05286	0.66710	0.37300	0.08355
MML	0.37533	0.65903	0.19290	0.16533	-0.15226	0.80867	0.39097	0.29000	0.19750	0.21839	0.03100	-0.06548
SIL	-0.10467	0.25516	0.31161	0.43333	-0.31710	1.10400	0.37194	0.73097	0.03321	0.75903	0.09467	-0.44903
UNL	0.26367	0.41581	0.24484	0.12967	-0.08290	0.54000	0.93258	0.61871	0.22750	0.68968	0.65433	0.65258

TABLA 2.1: Precio de cierre mensual, 12 meses (tomada de [39])

Compañía	Retorno promedio
ABL	0.17499
ALL	0.09950
BHL	0.33979
CGL	0.23657
HHM	0.11487
HCC	0.27989
KMB	0.21578
MML	0.25928
SIL	0.26859
UNL	0.44054

TABLA 2.2: Retorno promedio (tomada de [39])

Compañía	ABL	ALL	BHL	CGL	HHM	HCC	KMB	MML	SIL	UNL
ABL	0.16656	0.08967	0.12861	0.08818	0.04405	0.15995	0.06892	0.05360	0.14154	0.00366
ALL	0.08967	0.12562	0.11421	0.06378	0.02641	0.16708	0.08474	0.04011	0.10279	0.03682
BHL	0.12861	0.11421	0.25614	0.12394	0.05332	0.16096	0.08375	0.08739	0.14855	0.06449
CGL	0.08818	0.06378	0.12394	0.10279	0.04060	0.13204	0.05656	0.05247	0.10984	0.02941
HHM	0.04405	0.02641	0.05332	0.04060	0.05677	0.08892	0.03101	0.04920	0.06321	-0.01296
HCC	-0.15995	0.16708	0.16096	0.13204	0.08892	0.32041	0.14144	0.09670	0.20118	0.02667
KMB	0.06892	0.08474	0.08375	0.05656	0.03101	0.14144	0.10648	0.05322	0.10631	0.04434
MML	0.05260	0.04011	0.08739	0.05247	0.04920	0.09670	0.05322	0.06992	0.07734	0.01978
SIL	0.14154	0.10279	0.14855	0.10984	0.06321	0.20118	0.10631	0.07734	0.18959	0.04272
UNL	0.00366	0.03682	0.06449	0.02941	-0.01296	0.02667	0.04434	0.01978	0.04272	0.07689

TABLA 2.3: Matriz de covarianza de todas las opciones de inversión (tomada de [39])

Los datos contenidos en la Tabla 2.3 corresponden a la matriz de covarianza de todas las posibles opciones de inversión (calculadas con la ecuación 2.6). Utilizando el **Modelo 1** (descrito en la ecuación (2.9)) y los datos que aparecen en las Tabla 2.2 y 2.3 se formula el problema como aparece en el Anexo A en la ecuación A.1

Para poder resolver el modelo primero es necesario encontrar el intervalo ( $r_{min}$  y  $r_{max}$ ) en el cual se encuentra  $r_0$ . Para esto se excluye la primer restricción y variando el valor de  $r_0$  en el intervalo comprendido entre  $r_{min}$  y  $r_{max}$  se resuelve el modelo incluyendo todas las restricciones. En la Figura 2.2 se muestra la frontera eficiente de los portafolios obtenidos.

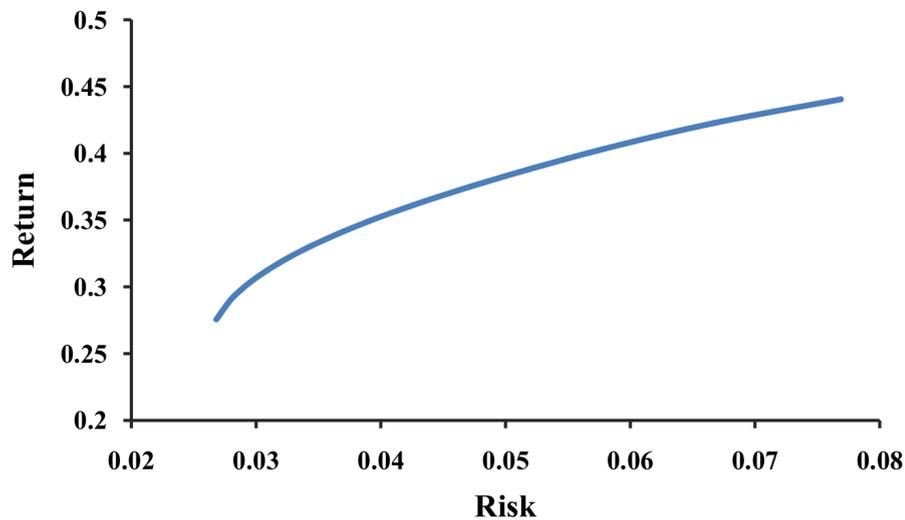


FIGURA 2.2: Frontera eficiente con el modelo media-varianza (tomada de [39])

En este caso, si el inversionista deseara un retorno mayor a  $r_{max}$  (es decir,  $r_0 > r_{max}$ ) el modelo se vuelve infactible, y en el caso contrario, donde el inversionista pudiera desear un retorno menor al mínimo ( $r_0 < r_{min}$ ) el portafolio generado no sería eficiente. Cuando el inversionista conoce el retorno esperado, es posible generar directamente mediante el modelo un portafolio eficiente. Si el inversionista no sabe el retorno que desea, es

posible generar una serie de portafolios eficientes para que escoja uno de acuerdo a sus preferencias.

## 2.2. Otros modelos de riesgo

El modelo de Markowitz presenta dos limitaciones importantes: i) el problema que se genera es un problema de programación cuadrática (QP) de gran escala que resulta difícil de resolver para un número de activos grande (complejidad computacional), y ii) para los mercados de valores reales las matrices de covarianza pueden llegar a ser tremendamente grandes. Muchos autores han tratado de aliviar estas dificultades a través de varios esquemas de aproximación, por ejemplo, el modelo de un solo índice de Sharpe [49] establece que si el problema se pudiera formular como programación lineal tendría una enorme mejora en su aplicación práctica. A continuación se presentan dos modelos de riesgo que están basados en formas alternativas para medir el riesgo.

### 2.2.1. Modelo de media-semivarianza

La varianza es ampliamente aceptada como medida de riesgo, sin embargo, su principal limitación es que penaliza las desviaciones extremas hacia arriba (ganancia) y hacia abajo (pérdida) del retorno esperado. Cuando la distribución de probabilidad de los activos es asimétrica, la varianza se vuelve poco apropiada para medir el riesgo. Esto es a causa de que los portafolios obtenidos pueden tener un potencial de mayor retorno que se está sacrificando, en estos casos conviene utilizar únicamente la parte negativa de la desviación en referencia a un nivel de retorno. La ventaja de usar la semivarianza en lugar de la varianza es que no se consideran los valores más allá de un valor crítico (ganancia) como riesgo. La semivarianza es una medida de riesgo apropiada cuando los inversionistas están preocupados por el subdesempeño del portafolio.

La semivarianza es el valor esperado del cuadrado de la desviación negativa de los posibles resultados del retorno esperado. Está definida de la siguiente manera

$$s(x_1, x_2, \dots, x_n) = E \left[ \left[ \sum_{i=1}^n R_i x_i - E \left[ \sum_{i=1}^n R_i x_i \right] \right]^- \right]^2 \quad (2.11)$$

donde

$$\left[ \sum_{i=1}^n R_i x_i - E \left[ \sum_{i=1}^n R_i x_i \right] \right]^- = \quad (2.12)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n R_i x_i - E \left[ \sum_{i=1}^n R_i x_i \right], & \text{si } \sum_{i=1}^n R_i x_i - E \left[ \sum_{i=1}^n R_i x_i \right] < 0 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para la generación de portafolios no es necesario obtener la matriz de covarianza, pero si es necesario obtener la distribución conjunta de los activos. Esta medida de riesgo trata de minimizar la dispersión (riesgo) del retorno esperado (ganancia), pero solo cuando la primera está por debajo del segundo. Esto implica que si la distribución del retorno de todos los activos son simétricas o tienen el mismo nivel de asimetría, entonces la varianza y la semivarianza producirán el mismo conjunto de portafolios eficientes. El modelo de optimización del portafolio para minimizar las semivarianza restringiendo el retorno esperado está formulado como sigue

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } E \left[ \left[ \sum_{i=1}^n R_i x_i - E \left[ \sum_{i=1}^n R_i x_i \right] \right]^- \right]^2 \\ &\text{sujeto a } \sum_{i=1}^n r_i x_i = r_0, \\ &\quad \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ &\quad x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Utilizando el hecho de que el valor de la variable aleatoria se puede aproximar con la media, la semivarianza se aproxima de la siguiente forma

$$s(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left\{ \left[ \sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i) x_i \right]^- \right\}^2 \tag{2.14}$$

donde

$$\left[ \sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i) x_i \right]^- = \begin{cases} \sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i) x_i, & \text{si } \sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i) x_i < 0 \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases} \quad t = 1, 2, \dots, T. \tag{2.15}$$

utilizando la ecuación 2.15 se logra minimizar el problema, además, es posible transformar la formulación anterior en un problema de programación no lineal de la siguiente manera

$$\text{minimizar } \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T p_t^2 \quad (2.16)$$

$$\text{sujeto a } p_t \geq - \sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i) x_i, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (2.17)$$

$$\sum_{i=1}^n r_i x_i = r_0, \quad (2.18)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1, \quad (2.19)$$

$$p_t \geq 0, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (2.20)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.21)$$

Para entender el modelo anterior consideremos las siguientes dos situaciones. Si para un valor  $t$  en la restricción 2.17, resulta que  $\sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i) x_i \geq 0$ , la restricción 2.17 y 2.20 dejan a la variable  $p_t$  tomar cualquier valor no negativo. Entonces, como se está minimizando la suma de  $p_t^2$ , en cualquier solución óptima tomará valor de 0. Si por el contrario,  $\sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i) x_i < 0$ , en cualquier solución óptima  $p_t$  será igual al valor que se obtiene de la restricción 2.17.

### 2.2.2. Ilustración numérica del modelo media-semivarianza

Utilizando los datos de las Figuras 2.1 y 2.2, la formulación del problema utilizando el modelo de media-semivarianza se hace como aparece en el Anexo A en la ecuación A.2

Para poder resolver el modelo es necesario decidir primero el valor de  $r_0$ . El valor de  $r_{min}$  se obtiene resolviendo el modelo sin considerar la restricción del retorno y con este se calcula  $r_{max}$ . A través de ir variando el valor de  $r_0$  entre  $r_{min}$  y  $r_{max}$  se resuelve el modelo y se obtiene la frontera eficiente que aparece en la Figura 2.3.

### 2.2.3. Modelo de media-desviación absoluta

Para mejorar el modelo de media-varianza de Markowitz se ha propuesto en [30] un modelo de programación lineal que utiliza la desviación absoluta como medida alternativa para el riesgo. Este modelo trata las dificultades asociadas con el modelo de media-varianza manteniendo las ventajas del modelo de media-semivarianza. El modelo

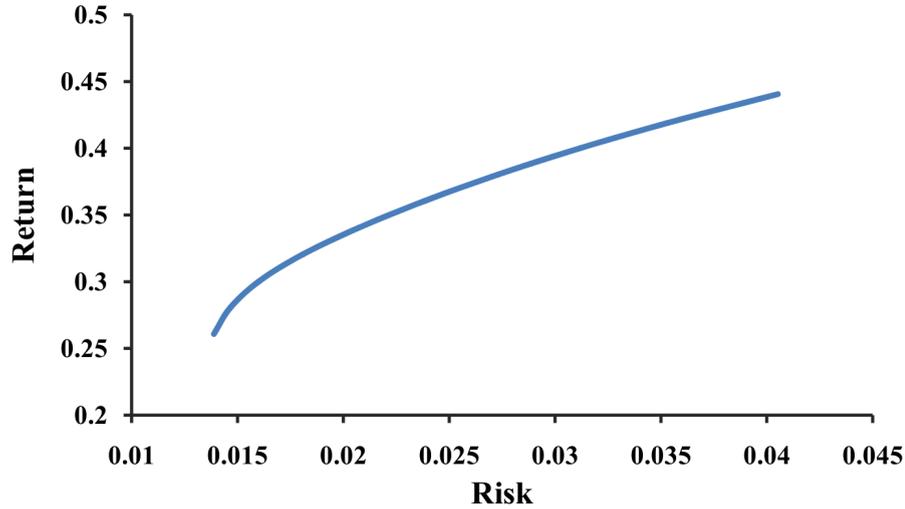


FIGURA 2.3: Frontera eficiente con el modelo media-semivarianza (tomada de [39])

de media-desviación absoluta presenta ventajas en cuanto a simplicidad y costo computacional. Este modelo ha sido aplicado principalmente en problemas con distribuciones asimétricas en el porcentaje de retorno.

La desviación absoluta de una variable aleatoria es el valor absoluto esperado de la diferencia entre la variable aleatoria y su media. El riesgo del portafolio medido como desviación absoluta se expresa de la siguiente manera

$$m(x_1, x_2, \dots, x_n) = E \left[ \left| \sum_{i=1}^n R_i x_i - E \left[ \sum_{i=1}^n R_i x_i \right] \right| \right] \quad (2.22)$$

Utilizando el hecho de que el valor esperado de la variable aleatoria se puede aproximar con la media, es decir,  $r_i = E[R_i] = \sum_{t=1}^T r_{it}/T$

$$m(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left| \sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i) x_i \right| \quad (2.23)$$

El problema de selección de portafolios con minimización del riesgo se formula de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 & \text{minimizar} && \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left| \sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i) x_i \right| \\
 & \text{sujeto a} && \sum_{i=1}^n r_i x_i = r_0, \\
 & && \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\
 & && x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

La formulación del problema anterior no es lineal debido a la presencia del valor absoluto. Para eliminar la función valor absoluto se hace la siguiente transformación

$$\text{minimizar} \quad \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T p_t \tag{2.25}$$

$$\text{sujeto a} \quad p_t \geq - \sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i) x_i, \quad t = 1, 2, \dots, T, \tag{2.26}$$

$$p_t \geq \sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i) x_i, \quad t = 1, 2, \dots, T, \tag{2.27}$$

$$\sum_{i=1}^n r_i x_i = r_0, \tag{2.28}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1, \tag{2.29}$$

$$p_t \geq 0, \quad t = 1, 2, \dots, T, \tag{2.30}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{2.31}$$

donde  $p_t = \left| \sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i) x_i \right| = \max \left( \sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i) x_i, - \sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i) x_i \right)$ . En comparación con el modelo descrito en la ecuación 2.24, este modelo es lineal y se puede resolver eficientemente para una  $n$  grande.

Para entender el rol de  $p_t$  más claramente se hacen las siguientes precisiones. Si para un valor de  $t$  resulta que  $\sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i) x_i \geq 0$  las restricciones 2.26, 2.27 y 2.30 dejan libre a la variable  $p_t$  para tomar cualquier valor no negativo. Como la variable  $p_t$  aparece en la función objetivo con coeficiente de uno positivo (+1), en cualquier solución óptima tomará el valor de cero debido a que se está minimizando la suma de  $p_t$ . Si por el

contrario resulta que  $\sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i)x_i < 0$ , en cualquier solución óptima  $p_t$  será igual a  $\sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i)x_i$ .

#### 2.2.4. Comparativa de los modelos de media-varianza, media-semivarianza y media-desviación absoluta

En la Figura 2.4 se muestra una comparativa de los tres modelos descritos anteriormente. Para cada modelo se obtuvieron los portafolios eficientes y con ellos se graficaron las fronteras eficientes obtenidas.

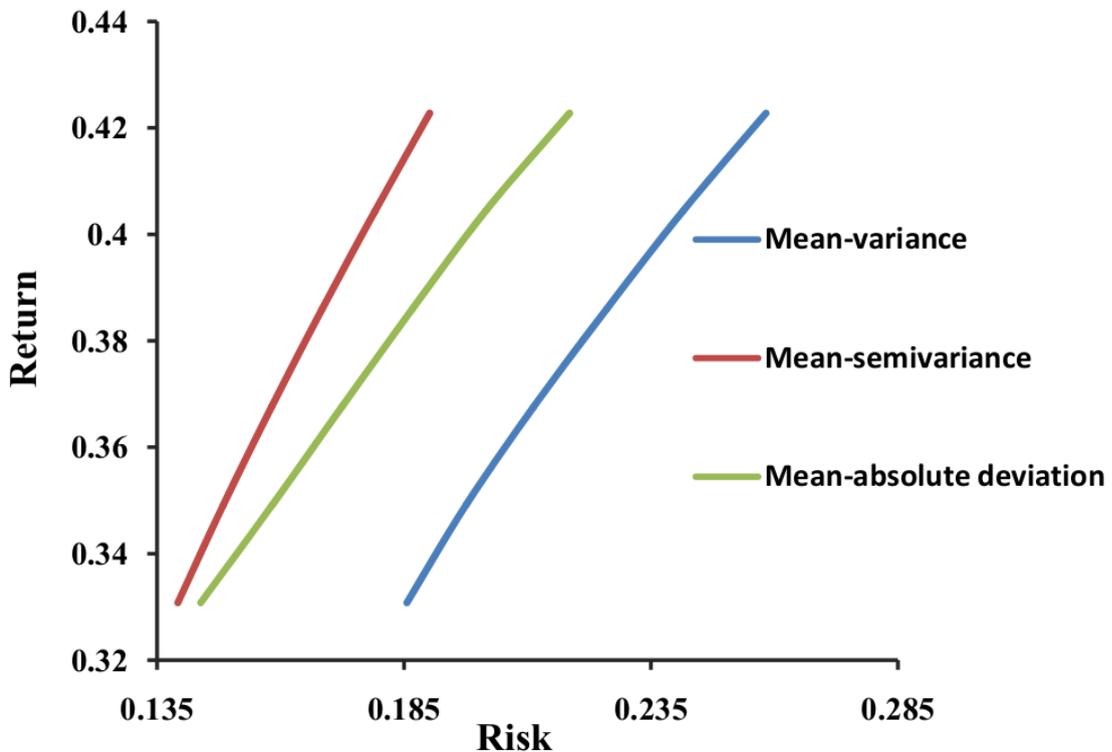


FIGURA 2.4: Comparativa de las fronteras eficientes en los tres modelos (tomada de [39])

Para un mismo retorno esperado los tres modelos muestran valores diferentes para el riesgo. El valor de riesgo utilizando en el modelo de media-varianza siempre es mayor que los otros dos. En particular, con el modelo de media-varianza se obtiene un mayor riesgo que con el modelo de media-desviación absoluta, y este último tiene un valor mayor de riesgo que el modelo de media-semivarianza para cualquier portafolio. Las razones son las siguientes:

- i La varianza como medida de riesgo penaliza demasiado las desviaciones extremas hacia arriba (ganancia) y hacia abajo (pérdida) del retorno esperado. Por otro lado

la semivarianza no considera como riesgo más allá de los valores críticos (esto es, contabiliza únicamente cuando se obtiene un retorno menor que el valor esperado). Es por esto que el modelo de media-varianza provee mayores riesgos que el modelo de media-semivarianza.

- ii En [30] el autor demostró que debido a la relación entre la varianza y la desviación absoluta, el modelo de media-varianza provee un mayor riesgo que el modelo de la media-desviación absoluta
- iii Finalmente, debido a que el riesgo medido con la semivarianza considera únicamente las pérdidas como riesgo y no los valores más allá de este punto, cuando se mide el riesgo utilizando la desviación absoluta sí se consideran estos valores como parte del riesgo. Es por esto que el modelo de media-desviación absoluta provee mayor riesgo que la semivarianza.

### 2.2.5. Índice de Sharpe

El índice de Sharpe (SP) mide el exceso de ganancia por unidad de riesgo que brinda un portafolio y se utiliza comúnmente para evaluar el desempeño de un portafolio. El índice de Sharpe (también conocido como proporción de Sharpe) combina la información de la media y la varianza de un activo de inversión, el modelo es bastante simple y es una medida de *riesgo ajustado* [48] para el retorno promedio del portafolio.

El índice de Sharpe está parametrizado por un valor  $R_f$  que indica el retorno esperado libre de riesgo observado (o deseado) en un portafolio (por ejemplo, la tasa de interés que brindan los bonos del tesoro de EE.UU.<sup>1</sup>). Ajustando el peso de los activos  $x_i$  es posible maximizar el índice de Sharpe del portafolio, es decir, balanceando la relación entre maximizar el retorno esperado y al mismo tiempo minimizar el riesgo.

En la Figura 2.5 (tomada de [11]) el punto  $R_0$  representa el retorno esperado libre de riesgo en el mercado. La línea  $CC$  representa el mercado de capitales, es una línea recta que pasa a través de  $R_0$  y es tangente a la frontera eficiente  $F$ . La intersección de  $F$  y  $CC$  define al portafolio eficiente en el punto  $a$ . Cualquier combinación de los activo libres de riesgo que se pueden conseguir *aumentando* o *restando* al porcentaje de  $R_f$ , permitirá operar en cualquier punto de la línea del mercado de capital sobre la frontera eficiente, resultando en un mayor retorno para una cantidad de riesgo preestablecido que en cualquier otro portafolio óptimo sobre  $F$ .

---

<sup>1</sup>Daily Treasury Bill Rates Data, <http://www.treasury.gov/resource-center/data-chart-center/interest-rates/Pages/TextView.aspx?data=billrates>

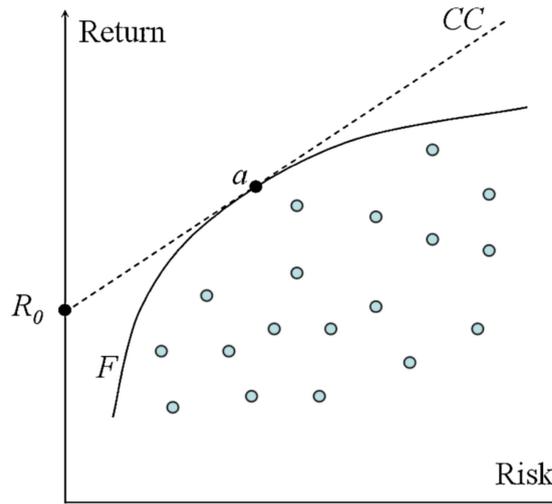


FIGURA 2.5: Proporción de Sharpe (tomada de [11])

Matemáticamente, el portafolio eficiente es el punto en el frente de Pareto que maximiza la proporción de Sharpe de la siguiente manera

$$S_r = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p} \quad (2.32)$$

donde  $R_p$  y  $\sigma_p$  son, respectivamente, el retorno esperado y el riesgo del portafolio  $P$  expresado como la varianza. La maximización de  $S_r$  se obtiene al incrementar la pendiente de la línea  $CC$  (que representa el mercado de capitales) hasta llegar a una posición tangente a la región factible del espacio de soluciones.

El índice de Sharpe puede ser usado tanto como un solo objetivo en el proceso de optimización, o como un objetivo adicional en un proceso multiobjetivo.

### 2.2.6. Valor en riesgo, VaR

El valor en riesgo (VaR) es ampliamente utilizado como medida de riesgo en el mercado financiero, el VaR de un portafolio es la cantidad máxima susceptible de perderse. El uso de VaR como función objetivo en un problema de optimización genera un espacio de búsqueda no convexo y discontinuo.

VaR pertenece al conjunto de medidas de riesgo a la baja (esto es, consideran la desviación negativa únicamente), y está definido como la pérdida esperada máxima de una inversión en un horizonte de tiempo específico y con un nivel de confianza de  $1 - \alpha$ , la formulación matemática de VaR es como sigue

$$g(w) = VaR_\alpha(w) = \inf \left\{ r_v \mid Prob(r_p > r_v) \geq 1 - \alpha \right\} \quad (2.33)$$

donde  $r_p$  es el valor inicial de portafolio y  $r_v$  el valor final, la función  $\inf\{x\}$  regresa el valor del extremo inferior (ínfimo, o cota máxima inferior). Usualmente, el valor de  $\alpha$  se fija en 5% ó 1% y se considera que el retorno esperado diario es cero (o un valor muy cercano a cero). VaR se puede estimar asumiendo que los datos del retorno esperado pertenece a una distribución específica, sin embargo, este enfoque presenta varios inconvenientes (por ejemplo, los datos pueden no ajustar adecuadamente en la cola de la distribución). Una forma de superar estos inconvenientes es calcular VaR a través de información histórica, de esta manera no importa la distribución subyacente.

### 2.3. Resumen

En este capítulo se expone el modelo de optimización de portafolios propuesto por Harry Markowitz en 1952, el cual está formulado a través de la media y la varianza de todas las posibles opciones de inversión. El modelo de media-varianza considera únicamente la asignación de pesos positivos en los activos de inversión (venta en corto no permitida), lo que implica que la suma de los pesos es igual a uno. Además del modelo de media-varianza, se presentan otros que miden el riesgo de los portafolios haciendo frente a la distribución asimétrica del retorno de los activos, entre estas se mencionan a la semivarianza, la desviación absoluta, el índice de Sharpe y el valor en riesgo (VaR).

Mediante una ilustración numérica de los modelos mencionados en el párrafo anterior se hace una comparativa que permite identificar medidas de riesgo que se ajustan más a la realidad financiera. Vale la pena mencionar que la selección de un portafolio depende de muchos factores como son el tipo de inversionista, las casas de bolsa, regulaciones nacionales e internacionales, etc. Lo que ha llevado a incluir restricciones que vuelvan más realista el modelo. Finalmente, se puede concluir que los inversionistas buscan generalmente que el portafolio seleccionado brinde el mayor retorno y el menor riesgo al mismo tiempo.

## Capítulo 3

# El problema de la optimización de portafolios

El modelo clásico de media-varianza de Markowitz como aparece en el Capítulo (2) busca de manera simultánea la minimización del riesgo y la maximización del retorno esperado, la formulación matemática de este problema para  $N$  activos es:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \text{Riesgo} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i \sigma_{ij} x_j , \\ \text{maximizar} \quad & \text{Retorno} = \sum_{i=1}^N x_i r_i , \\ \text{sujeto a} \quad & \sum_{i=1}^N x_i = 1 , \\ & 0 \leq x_i \leq 1 , \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde  $x_i$  es el peso asignado al activo  $i$ ,  $r_i$  es el retorno esperado y  $\sigma_{ij}$  son los elementos de la matriz de covarianza de todas las alternativas de inversión. Las últimas dos restricciones imponen, respectivamente, que la suma de los pesos de todos los activos debe ser igual a uno (restricción de presupuesto) y que todos los pesos deben ser no negativos (restricción de venta en corto).

### 3.1. Formulación de los problemas multiobjetivo

La formulación más común de los problemas de optimización con restricciones es la siguiente:

$$\text{minimizar } \vec{f}(\vec{x}) := [f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_k(\vec{x})] \quad (3.2)$$

$$\text{sujeto a } g_i(\vec{x}) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.3)$$

$$h_i(\vec{x}) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (3.4)$$

donde  $\vec{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  es el vector de variables de decisión,  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, k$  son las funciones objetivo, y  $g_i, h_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$  y  $j = 1, \dots, p$  son las funciones de restricción del problema.

Para describir el concepto de óptimo en el que estamos interesados es necesario introducir las siguientes definiciones:

**Definición 3.1.** Dados dos vectores  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^k$ , decimos que  $\vec{f}(\vec{x}) \leq \vec{f}(\vec{y})$  si  $f_i(\vec{x}) \leq f_i(\vec{y})$  para  $i = 1, \dots, k$ , y que  $\vec{x}$  domina  $\vec{y}$  (denotado por  $\vec{x} \prec \vec{y}$ ) si  $\vec{f}(\vec{x}) \leq \vec{f}(\vec{y})$  y  $f_i(\vec{x}) \neq f_i(\vec{y})$

**Definición 3.2.** Decimos que el vector de variables de decisión  $\vec{x} \in X \subset \mathbb{R}^n$  es no dominado respecto a  $X$ , si no existe otro  $\vec{x}' \in X$  tal que  $\vec{f}_i(\vec{x}') \prec \vec{f}_i(\vec{x})$

**Definición 3.3.** Decimos que un vector de variables de decisión  $\vec{x}^* \in F \subset \mathbb{R}^n$  ( $F$  es la región factible) es óptimo de Pareto si es no dominado respecto a  $F$ .

**Definición 3.4.** El conjunto de óptimos de Pareto  $P^*$  está definido como  $P^* = \{\vec{x} \in F | \vec{x}$  es un óptimo de Pareto }

**Definición 3.5.** El frente de Pareto  $PF^*$  está definido como  $PF^* = \{\vec{f}(\vec{x}) \in \mathbf{R}^k | \vec{x} \in P^*\}$

Buscamos determinar el conjunto de óptimos de Pareto del conjunto  $F$  de todos los vectores de variables de decisión que satisfacen las ecuaciones 3.3 y 3.4. El proceso usual de optimización multiobjetivo consiste en encontrar todas las *soluciones no dominadas o Pareto óptimas* del problema, es decir, cada solución en la cual no se pueda mejorar una objetivo sin deteriorar otro.

El *conjunto de óptimos de Pareto* (o conjunto no dominado) está constituido por todas las soluciones que son no dominados por cualquier otra solución en el conjunto factible. La imagen de las soluciones óptimas de Pareto en el espacio objetivo define el *frente de Pareto* (o frente no dominado).

### 3.2. Formas de resolver el problema de optimización de portafolios

Existen diversas formas de resolver los problemas de optimización multiobjetivo. Uno de los métodos consiste en transferir el problema multiobjetivo a un problema de optimización de un solo objetivo. Este método se puede dividir en dos tipos.

- i) El primer tipo consiste en seleccionar como función objetivo a uno de los objetivos importantes y el resto definirlos como condiciones de restricción. El modelo de media-varianza de Markowitz pertenece a este primer tipo. De acuerdo con la ecuación 2.9, en el modelo de media-varianza se considera como función objetivo la minimización del riesgo del portafolio, y el retorno esperado se define como una restricción del modelo.
- ii) La segunda alternativa es construir una sola función objetivo para optimizar ponderando las múltiples funciones objetivo. El modelo de frontera eficiente (EF) es de este tipo, en la formulación de este modelo hay una sola función objetivo para la que es posible encontrar diferentes valores variando el retorno esperado deseado  $R^*$ . La forma más común del EF emplea un factor de aversión al riesgo  $\lambda \in [0, 1]$ , con este parámetro ( $\lambda$ ) el modelo puede ser descrito a través de una sola función objetivo.

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar } \lambda \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sigma_{ij} \right] - (1 - \lambda) \left[ \sum_{i=1}^N x_i r_i \right] \\
 &\text{sujeto a } \sum_{i=1}^N x_i = 1, \\
 &0 \leq x_i \leq 1; \quad i = 1, 2, \dots, N.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Cuando  $\lambda$  es cero, el modelo maximiza el retorno esperado del portafolio sin considerar la varianza (riesgo). En contraste, cuando  $\lambda$  es igual a uno, el modelo minimiza el riesgo del portafolio sin tomar en cuenta el retorno esperado. La sensibilidad del inversionista al riesgo se incrementa al incrementarse  $\lambda$ .

Para diferentes valores de  $\lambda$  se obtienen diferentes valores de la función objetivo. Si se traza la intersección entre el valor del retorno esperado y la varianza para los diferentes valores de  $\lambda$  se obtiene la frontera eficiente, cada punto sobre la curva de la frontera eficiente indica un valor óptimo de Pareto.

Los problemas de optimización multiobjetivo no tienen una única solución, sino *un conjunto de soluciones igualmente óptimas que definen la frontera eficiente* (o frente de Pareto). Por otro lado, las técnicas de optimización basadas en poblaciones estocásticas aplicadas a problemas de un solo objetivo, evalúan la aptitud de los individuos de acuerdo a que tan bien resuelven el problema, y mientras mejor sea el valor de aptitud del individuo mayores oportunidades tendrá de producir un hijo para la próxima generación. Sin embargo, para estas mismas técnicas aplicadas a los problemas multiobjetivo el concepto de aptitud cambia y se vuelve una función del número de individuos que domina y por cuantos es dominado.

### 3.3. Restricciones

El modelo original de Markowitz considera inicialmente solo una restricción fuerte, establecer que la suma de todos los activos debe ser igual a uno. Sin embargo, en la mayoría de los mercados bursátiles este modelo no se puede aplicar directamente debido a una serie de simplificaciones y suposiciones irreales. Por ejemplo, asume un mercado bursátil perfecto en donde no hay impuestos, costos de transacción y la venta en corto no está permitida, también asume que los activos se pueden dividir de manera infinita para su comercialización en cualquier momento. Las bolsas de valores pueden tener diferentes políticas y/o regulaciones especiales que se imponen a lo inversionistas <sup>1</sup> y que implican nuevas restricciones al modelo [17], necesarias de considerar para encontrar los portafolios óptimos o de mejor calidad. Debido a lo anterior, el modelo de media-varianza original no tiene un uso práctico en la realidad [34] y ha sido extendido para incluir restricciones prácticas que son relevantes. En general mientras más realista es el modelo más complicado se vuelve resolverlo y en ocasiones es incluso imposible de resolver de manera exacta.

A partir del trabajo realizado por Markowitz se han publicado un gran número de artículos extendiendo o modificando el modelo básico [1] en tres direcciones principalmente:

- i** La simplificación en el tipo y la cantidad de los datos de entrada.
- ii** La introducción de medidas de riesgo alternativas
- iii** La incorporación de criterios adicionales y/o restricciones.

El punto (i) queda fuera del alcance de este proyecto. El punto número (ii) que hace referencia a las medidas de riesgo alternativas está descrito brevemente en el capítulo anterior (Capítulo 2). El punto número (iii) se describe a continuación.

---

<sup>1</sup>En el año 2011 la venta en corto se prohibió parcialmente en algunos países europeos

Las restricciones realistas que más frecuentemente se han utilizado para el problema de optimización de portafolios de inversión son las siguientes:

a) **Piso-techo:**

Esta restricción impone un límite inferior y/o superior para el peso de los activos en lugar de utilizar cero (mínimo) y uno (máximo). Por lo tanto, un activo no puede representar menos o más de cierta proporción del total del capital a invertir, este requerimiento se fundamenta en dos aspectos: 1) el límite inferior ( $l_i$ ) busca evitar que se asignen porcentajes muy pequeños del capital a muchos activos, lo que puede resultar en costos de transacción muy altos; 2) respecto al límite superior ( $u_i$ ), si se asigna un porcentaje muy grande del capital a un solo activo aumenta el riesgo. La expresión matemática de las restricciones de piso-techo es la siguiente:

$$\forall i = 1, \dots, N; \quad l_i \leq x_i \leq u_i \quad (3.6)$$

b) **Clases de activos:**

Esta restricción es muy similar a la de piso-techo y establece límites en el total del capital asignado a una clase o sector de activos (por ejemplo, los bonos en la industria del acero pueden representar un sector). De la misma manera que se asignan límites al peso de cada activo en la restricción piso-techo, la suma de los pesos asignados a los bonos de un mismo sector son restringidos dentro un límite determinado. En este enfoque muchas veces se ordena de mayor a menor a todos los sectores de acuerdo a su capitalización en el mercado.

c) **Cardinalidad:**

Esta restricción obliga a que el número de activos seleccionados en el portafolio sea igual a un número determinado. Existen dos versiones de esta restricción. La primera versión (exacta) impone que el número de bonos seleccionados sea igual a un valor  $K$ . La segunda versión (suave) imponen los límites inferior y superior ( $Z_L, Z_U$ ) para este valor. En la formulación de esta restricción se incluye una variable binaria  $z_i$  para indicar la presencia o no del activo  $i$  en el portafolio:  $z_i = 1$  si  $x_i > 0$ , y  $z_i = 0$  en cualquier otro caso. La formulación de la versión suave es la siguiente:

$$Z_L \leq \sum_{i=1}^N z_i \leq Z_U \quad (3.7)$$

Es importante mencionar que la restricción de cardinalidad impide que el problema se pueda resolver de manera exacta utilizando alguna técnica de programación cuadrática (QP), de hecho, no se conoce un método exacto para la resolución del problema con esta restricción. La forma más común de integrar la restricción de cardinalidad a un algoritmo evolutivo (EA) es a través de funciones de penalización, reglas basadas en dominación, entre otras. Es común también el uso de algún *mecanismo de reparación* para ajustar los pesos de los activos al llegar a una solución infactible para hacerla cumplir con la restricción de cardinalidad. Una forma de evaluar el mecanismo de reparación es conservar o no la solución reparada, esta técnica de evaluación se conoce como Lamarckismo.

d) **Lotes mínimos:**

En muchas aplicaciones realistas, la cantidad invertida en un bono debe ser un múltiplo del lote de transacción mínimo, el cual representa la cantidad mínima del bono(s) que se puede poseer. En este caso el peso del activo  $x_i$  en el portafolio deja de ser una variable de decisión, y se tiene que calcular a través de un precio de comprar por lote ( $c_i$ ) y un número entero de los lotes que se van a comprar ( $x_i$ ) como sigue

$$\forall i = 1, \dots, N; \quad w_i = \frac{x_i c_i}{\sum_{i=1}^N x_i c_i} \quad (3.8)$$

e) **Rotación:**

Algunos autores consideran como restricción cambiar el peso que tienen los activos dentro del portafolio, de acuerdo a una selección previa de los pesos. Este formalismo es especialmente útil cuando se consideran múltiples periodos de inversión. En [31], la diferencia entre la asignación actual  $x$  y la asignación previa  $x'$  debe ser mayor a cierto umbral (si hay un cambio en la asignación de los pesos) como sigue:

$$\forall i = 1, \dots, N, \quad \left| x_i - x'_i \right| \geq \Delta_i \quad \text{o} \quad \left| x_i - x'_i \right| = 0 \quad (3.9)$$

Adicionalmente, la suma del valor absoluto del cambio de la selección anterior debe ser más pequeña que la proporción máxima de rotación ( $TR$ )

$$\sum_{i=1}^N \left| x_i - x'_i \right| \leq TR \quad (3.10)$$

De manera similar se proponen las restricciones de compra o venta en [23].

$$\forall i = 1, \dots, N, \quad \max(x_i - x'_i, 0) \leq \overline{B}_i \quad \text{y} \quad \max(x'_i - x_i, 0) \leq \overline{S}_i \quad (3.11)$$

así como las restricciones de comercialización

$$\forall i = 1, \dots, N, w_i = w'_i o w_i \geq w'_i + \underline{B}_i o w_i \leq w'_i - \underline{S}_i \quad (3.12)$$

donde  $\underline{B}_i$  y  $\overline{B}_i$  representan el umbral de compra mínimo y máximo respectivamente (esto es,  $w_i > w'_i$ ), y  $\underline{S}_i$  y  $\overline{S}_i$  representa el umbral de venta mínimo y máximo respectivamente (esto es,  $w'_i > w_i$ ).

f) **Costos de transacción:**

Son extremadamente raros los casos en que un inversionista no tiene que pagar algún tipo de cargo y/o impuestos por una inversión. Los costos transacción están divididos en costos fijos ( $f_j$ ) y costos proporcionales ( $d_j x_j$ ). El costo fijo se refiere a la cantidad pagada a un corredor de bolsa para invertir el dinero en la bolsa de valores, incluye el costo del corredor, impuestos, costo de procesamiento de la información, etc. El costo proporcional se incluye aumentando un porcentaje en el costo del activo. Cada activo  $j$  está sujeto a un costo proporcional dependiendo de los efectos de la demanda que tenga en los mercados, si la cantidad que se desea comprar del activo  $x_j$  es grande y la demanda es alta, el costo proporcional se incrementa.

El costo de transacción asociado al activo  $j$  está definido como  $C_j(x_j)$ . El costo del portafolio está definida como la suma del costo fijo y del costo proporcional y se obtiene con  $\sum_{j=1}^n C_j(x_j)$ . El costo fijo del portafolio se representa por

$$\sum_{j=1}^n f_j z_j \quad \text{donde} \quad z_j = \begin{cases} 1, & \text{si } x_j > 0 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad \text{y el costo proporcional del portafolio es } \sum_{j=1}^n d_j^i x_j c_j.$$

Si el inversionista no considera los costos de transacción es posible que el modelo utilizado para seleccionar el portafolio produzca resultados erróneos [3].

### 3.4. Portafolios futuros

Con el objetivo de mostrar el problema de la optimización de portafolio de manera completa y considerando el amplio uso que se le ha dado al modelo de media-varianza

de Markowitz, se describen a continuación los llamados portafolios futuros.

El mercado de futuros forma parte de los llamadas mercados financieros de derivados. Los *futuros* pueden ser utilizados como instrumentos para la formación eficiente de precios en el mercado (por parte de empresas en distintos ramos), y como un medio de protección y cobertura contra riesgos de especulación o de inversión. En el mercado de futuros los activos que se negocian son contratos futuros, en dicho contrato dos contrapartes se obligan a vender o comprar un activo real o financiero en una fecha determinada. El intercambio que se realiza a través de este tipo de contratos da a las dos partes la seguridad de que el contrato va a ser respetado. Además, los contratos futuros se encuentran estandarizados, por lo que todos los contratos futuros que se negocian corresponden a la misma cantidad, calidad y fecha, y lo único negociable es el precio [55].

Un *contrato futuro* es entonces, un acuerdo para vender o comprar una cantidad específica de mercancías o activos de inversión (tales como: índices bursátiles, divisas, bonos, acciones, etc) en una fecha determinada y a un precio determinado en el futuro. El contrato futuro establece el precio de compra el cual es conocido como *precio futuro*. Los contratos futuros solo pueden ser vendidos o comprados en la Bolsa de futuros (o Mercado de futuros). Al inversionista que *compra un contrato futuro* se dice que toma una *posición larga* y al inversionista que *vende un contrato futuro* se dice que toma una *posición corta*. En el mercado de futuros los inversionistas pueden tomar posiciones en contra del riesgo (conocidos como *cercadores*) transfiriéndolo a otros inversionistas que están dispuestos a aceptar esos riesgos a cambio una ganancia potencial (conocidos como *especuladores*).

La diversificación y el proceso de distribución son técnicas ampliamente utilizadas dentro del mercado de futuros para disminuir el riesgo. La primera se logra invirtiendo en distintos mercados y diferentes activos, de esta forma se minimiza el riesgo financiero ya que el portafolio queda compuesto por diferentes activos de diferentes clases que se comportan de diferente manera. La segunda está basada en la *presupuestación del capital* que tiene que ver con la manera como se distribuye el dinero a invertir entre los diferentes activos que conforman el portafolio. Otra técnica para aminorar el riesgo es la *presupuestación del riesgo* que se enfoca en como se distribuye el riesgo entre diversos activos o entre las diferentes clases de activos del portafolio. Finalmente, una adecuada mezcla de posiciones largas y cortas sobre los activos futuros juega un rol muy importante en la adecuada administración del riesgo.

En el mercado de futuros un inversionista puede elegir entre dos opciones: 1) un *portafolio completamente invertido* donde virtualmente todo el capital está invertido en el portafolio (sin una reserva en efectivo); 2) un *portafolio sobreinvertido*, en el cual se

considera como parte del capital de inversión la posible ganancia futura. Un portafolio sobreinvertido o uno completamente invertido pueden generar una pérdida financiera importante si el mercado no se comporta de la manera esperada.

El objetivo es obtener el *portafolio futuro óptimo*, es decir, un portafolio que esté bien diversificado, completamente invertido, y con una mezcla de posiciones largas y cortas sobre los activos, además de incluir presupuestación de riesgo y restricciones de clase. El portafolio futuro óptimo indicará al inversionista que proporción de su capital debe invertir en que activos para obtener una mínima varianza (riesgo) en el portafolio futuro. La principal medida de desempeño para la diversificación del portafolio es el índice Herfindahl, esta medida ha sido utilizada únicamente en portafolios irregulares de posición larga, es decir, portafolios donde el peso de los activos es estrictamente positivo.

El problema de encontrar el *portafolio futuro óptimo* es un problema no lineal, multiobjetivo y con restricciones, el cual es muy difícil (sino imposible) de resolver con un método analítico.

## 3.5. Estado del arte

### 3.5.1. Estudio de mapeo sistemático

El estudio de mapeo sistemático (SMS) es una metodología diseñada para obtener un panorama general amplio sobre la investigación realizada en un área en particular. En esta sección se presenta de manera muy breve la metodología que se utilizó en la revisión bibliográfica, la cual está basada en SMS.

#### Preguntas de investigación

1. ¿Cómo se formula el problema de selección de portafolio (PSP) como un problema de optimización multiobjetivo?
2. ¿Qué técnicas se utilizan para resolver los problemas de optimización multiobjetivo?
3. ¿Es posible conocer e integrar en la formulación del PSP restricciones realistas?

#### Población

- Palabras principales: PORTFOLIO, INVESTMENT, STOCK, ASSET

- Palabras complementarias: ALLOCATION, OPTIMIZATION, DIVERSIFICATION, MANAGEMENT, OPTIMAL, SELECTION

### Intervención

Palabras para hacer la búsqueda más específica (subtema): OBJECTIVE, MULTIOBJECTIVE, EVOLUTIONARY, HEURISTIC, META-HEURISTIC, ALGORITHM, COMPUTATIONAL INTELLIGENCE, SOFT COMPUTING

### Resultados relevantes

Con las palabras identificadas como parte de la Población e Intervención del dominio del problema se generó el producto cruz que aparece en la Figura 3.1.

"portfolio allocation"	"investment allocation"		
"portfolio optimization"	"investment optimization"	"stock allocation"	"asset allocation"
"portfolio diversification"	"investment diversification"	"stock optimization"	"asset optimization"
"portfolio management"	"investment management"	"stock diversification"	"asset diversification"
"optimal portfolio"	"optimal investment"	"stock management"	"asset management"
"portfolio selection"	"investment selection"	"optimal stock"	"optimal asset"
		"stock selection"	"asset selection"
		"stock management"	

FIGURA 3.1: Producto cruz de los términos de búsqueda.

### Selección de los términos relevantes

Del conjunto completo de términos se seleccionaron a los que brindaron mejores resultados durante las búsquedas. Los términos que se muestran a continuación son lo que más se utilizan dentro la comunidad que se ha dedicado a trabajar sobre el problema en cuestión.

- portfolio allocation
- portfolio optimization

- portfolio diversification
- portfolio management
- optimal portfolio
- portfolio selection
- optimal stock
- stock selection

### **Búsqueda en los resultados primarios**

Selección de motores de búsqueda:

- IEEE Xplore Digital Library  
Disponibile en: <http://ieeexplore.ieee.org/>
- ACM Digital Library  
Disponibile en: <http://dl.acm.org/>
- Springer Link  
Disponibile en: <http://link.springer.com/>
- Scopus  
Disponibile en: <http://www.scopus.com/>

### **3.5.2. Revisión de la literatura**

Para la presentación del material seleccionado en esta revisión bibliográfica del problema de selección de portafolios (PSP) se empleo la taxonomía adoptada en [41]. Los trabajos revisados se analizaron considerando tres aspectos: 1) Funciones objetivos (tipos de riesgo empleado y restricciones); 2) Codificación o representación; 3) Estrategias de optimización empleadas. La revisión del estado del arte consiste en una extensión del trabajo: *Revisión de los estudios sobre los algoritmos evolutivos multiobjetivos para la resolución del PSP y otros problemas financieros y económicos* de Ponsich *et al.* [41], de donde se tomaron los trabajos más relevantes. La revisión bibliográfica que se presenta a continuación incluye dichos trabajos y los artículos derivados de la búsqueda SMS, para este último caso se consideró el impacto del trabajo y la fecha de publicación (posteriores a [41]) del documento.

### 3.5.2.1. Funciones objetivos (tipos de riesgo empleado y restricciones)

La estrategia de maximizar el retorno esperado y minimizar el riesgo es común en todos los casos, sin embargo, algunos aspectos (como la manera de calcular el riesgo) han generado críticas al modelo: 1) el retorno esperado no se distribuye normalmente, en la mayoría de los casos es asimétrico; 2) los inversionistas individuales usualmente prefieren portafolios que están por debajo de la frontera eficiente; 3) considerar la varianza como medida de riesgo implica que las desviaciones hacia arriba y hacia abajo se contabilizan de igual manera, sin embargo, la mayoría de los inversionistas ven como riesgo no alcanzar el retorno esperado que tienen como meta y no el obtener una mayor ganancia; 4) no considerar la posibilidad de que un portafolio pierda una cantidad significativa de su valor debido a eventos catastróficos o de muy baja probabilidad [26].

Los aspectos anteriores han llevado al uso de estimadores parciales. En [47] adoptaron el uso de la desviación hacia abajo de la distribución del retorno, llamada propiamente *riesgo a la baja*. El uso del riesgo a la baja vuelve el problema más difícil de resolver, debido a que la forma del espacio de solución generalmente no es convexa, por lo que no se puede utilizar algún método de QP para encontrar una solución exacta.

Otra forma de medir el riesgo, utilizada en [33] y [3] es el *valor en riesgo* (VaR), el cual está definido como el  $\alpha$ -cuantil (típicamente  $\alpha = 5\%$ ) de la distribución de pérdidas del portafolio. VaR representa la pérdida máxima esperada del portafolio con cierto nivel de confianza  $100(1 - \alpha)$ , en cierto intervalo de tiempo. VaR es una medida de riesgo no convexa que se volvió popular al ser utilizada (y recomendada) por el Banco de Pagos Internacionales de E.U. y por diversas agencias regulatorias de dicho país.

En [18] los autores hicieron una extensión del modelo de Markowitz a través del diseño de cinco nuevos objetivos para maximizar: 1) el desempeño de un activo en un periodo de doce meses; 2) el desempeño de un activo en un periodo de tres años; 3) el dividendo anual del portafolio; 4) la posición del activo en la lista de clasificación de la agencia clasificadora de riesgo Standard and Poor's (S&P); y 5) la volatilidad.

En [10] se propone como medidas de riesgo (y tercer objetivo en modelo utilizado) la semivarianza, la desviación media absoluta, y la varianza asimétrica. La asimetría representa el hecho de que la distribución del precio de los activos puede no ser simétrica. La maximización de la asimetría genera un sesgo de la distribución del retorno esperado hacia las ganancias, en lugar de hacia las pérdidas.

En [1], los autores decidieron añadir el número de activos que integran el portafolio como objetivo. Consideran que en la optimización multiobjetivo, una restricción debe ser considerada como un objetivo del problema si no es posible establecer un valor para

el *lado derecho de la restricción* sin conocer los niveles de los otros objetivos. De esta manera, la formulación del problema comprende tres objetivos: maximizar el retorno esperado, minimizar el riesgo, y minimizar el número de activos en el portafolio. El algoritmo provisto mostró una buena aproximación al frente de Pareto del modelo de media-varianza para diferentes valores del número de activos. La estrategia utilizada en este trabajo permite que al inversionista conozca los portafolios que no tiene una media-varianza eficiente, y al ser soluciones obtenidas con el menor número posible de activos son soluciones no dominadas.

En [16] se comparó la eficiencia de varios MOEA con la formulación de media-varianza. Se identificó el punto más cercano al portafolio eficiente en la frontera eficiente producida por cada MOEA, se comparó además la solución generada por un algoritmo evolutivo de un solo objetivo (SOEA) que utilizaba el índice de Sharpe como función objetivo. El SOEA tuvo mejor desempeño que cualquier MOEA. Con base en lo anterior, se comparó el frente de Pareto generado por los MOEA utilizando como población inicial el conjunto de resultados producto de varias ejecuciones del SOEA para diferentes valores de  $R_f$ . Bajo esta última configuración el SOEA tuvo un desempeño menor que los MOEA, sin embargo, no fue un mal desempeño.

En [56] se formuló el problema utilizando el índice de Sharpe como medida de riesgo y objetivo a optimizar. Los autores buscaron maximizar el índice de Sharpe de los portafolios para encontrar la frontera eficiente, el modelo se probó con y sin la restricción de venta en corto.

En [34] se propone un algoritmo híbrido que considera el modelo de media-varianza de Markowitz extendido con las restricciones de cardinalidad y de piso-techo. La formulación empleada es vista como dos subproblemas: seleccionar los activos que conforman el portafolio y determinar la proporción del capital que se designará a cada uno. Los autores adoptaron la técnica de mutación parcialmente guiada y una estrategia de elitismo para promover la calidad de las soluciones.

En [28] Se utilizó la formulación de frontera eficiente que integra la varianza y la media en un solo objetivo a través de un parámetro  $\lambda$  que varía entre cero y uno. El problema se formuló con tres restricciones: presupuesto, piso-techo y cardinalidad.

En [46] Los autores buscaron optimizar un portafolio de *carry trades*<sup>23</sup> diversificado,

---

<sup>23</sup>El carry trade consiste en apuestas especulativas que hacen los inversionistas consiguiendo préstamos en divisas (fondeo) a una tasa de interés relativamente baja, que después prestan a una tasa de interés relativamente alta. Los carry trades funcionan bajo el supuesto de que los pagos que recibirá el inversionista serán mayores que los que tiene que hacer para conseguir las divisas. El inversionista obtiene como ganancia el diferencial en las tasas de interés, sin embargo, los carry trade están expuestos a la variación en el tipo de cambio.

los cuales, debido a su naturaleza riesgosa necesitan estrategias adicionales a la diversificación para mitigar adecuadamente el riesgo. Los autores mostraron que al utilizar técnicas de optimización metaheurísticas mejora significativamente el retorno del portafolio restringiendo el nivel de riesgo. En la formulación del problema emplearon el índice de Sharpe como función objetivo y las restricciones de costos de transacción, venta en corto, capital y piso-techo. Además, compararon tres técnicas para pronosticar el tipo de cambios esperado de las divisas que conforman el portafolio de carry trades.

En [38] se propone una solución metaheurística al problema la optimización de portafolios futuros, el cual estriba en obtener un portafolio futuro bien diversificado que combine distintas clases de activos como son: índices bursátiles, bonos y divisas. El portafolio está sujeto además a las restricciones de capital, piso-techo y clases. Se utilizó el índice de Herfindahl como función objetivo a optimizar y como medida de diversificación del portafolio (posiciones largas y cortas). Adicionalmente, se incluyeron como objetivos el minimizar la violación a las restricciones de clase y de riesgo presupuestado para las diferentes clases de activos. Los autores encontraron que hay muy pocos trabajos sobre técnicas metaheurísticas aplicadas al problema de portafolios futuros óptimos. En la formulación del problema, el riesgo ( $\sigma_p$ ) y el retorno esperado ( $r_p$ ) del portafolio se calculan de acuerdo el modelo de Markowitz.

### 3.5.2.2. Codificación o representación

Una representación directa utilizando variables de decisión para representar los pesos de los activos no funciona bien. La razón es que este tipo de representación producirá frecuentemente soluciones que son infactibles, en las cuales la suma de los pesos de los activos no será igual a uno, lo cual es una de las restricciones básicas del problema. Algo importante a considerar para definir el tipo de codificación es la posición que se tomará sobre los activos que integren el portafolio. Cuando se posee un activo durante todo un periodo de inversión se dice que se tomó una *posición larga* del activo, contrariamente, a un activo que se vende antes de terminar el periodo de inversión se le denomina de *posición corta*. De acuerdo a lo anterior, un portafolio se considera “restringido” cuando no está permitido que los activos que lo integren sean de posición corta.

En Streichert *et al.* [52] se experimentó con una codificación combinada, binaria y de números reales. Los autores notaron las similitudes del problema de selección de activos, con el problema unidimensional binario de la mochila que ha sido resuelto con EA. Los autores adoptaron la codificación utilizada en el problema de la mochila adicional a los vectores de variables de decisión para los pesos. Cada cromosoma se dividió en dos segmentos; en el primero cada bit indica si un activo está o no presente en el portafolio (1

si está presente y 0 si no lo está), en el segundo segmento se indican los pesos con números reales. Los autores consideraron diferentes restricciones además del efecto que producía el uso del lamarkismo. Para evaluar el desempeño de su propuesta emplearon como medida el hipervolumen (la región del espacio objetivo dominado por la aproximación obtenida) del frente de Pareto. Los autores encontraron que cuando se utilizaba el lamarkismo y la restricción básica únicamente, el uso de la codificación de la mochila mejoraba las soluciones obtenidas en comparación con un GA estándar. Cuando se utilizaron restricciones de cardinalidad en el problema y se utilizó el lamarkismo los resultados del GA estándar fueron mejores. En los demás casos los resultados fueron muy similares.

En Chiam *et al.* [11] se propone un esquema de representación híbrida y su operador genético asociado. El cromosoma se divide en dos partes: la primera es un vector de permutación que contiene las etiquetas de identidad de los activos disponibles; en la segunda parte se almacenan los pesos correspondientes a cada uno de los activos. Los activos se integran al portafolio en el orden en que aparecen en el vector de permutación hasta que la suma de los pesos exceda uno. La normalización de los pesos en el portafolio se hace a través de dos procesos de reparación, el primero ajusta los pesos de acuerdo a las restricciones de piso-techo y el segundo de acuerdo a las restricciones de cardinalidad. La población inicial se genera a través de tres posibles técnicas de inicialización (resultando en tres MOEA distintos): 1) sin ninguna restricción en el peso de los activos; 2) con un peso máximo por activo de 0.1; y 3) con un peso máximo variable para los activos. El propósito era cambiar la diversidad (en términos del número de activos) de la población inicial. Los tres MOEA se compararon contra un MOEA clásico con codificación de número reales. El criterio de comparación fue la distancia entre el conjunto aproximado de Pareto y el frente de Pareto real (llamada “distancia generacional”), y la diversidad del conjunto aproximado de Pareto. Para el problema sin restricciones el MOEA con pesos máximos variables fue el que mostró mejores resultados. Para los problemas con restricciones este último MOEA mostró también un resultado muy cercano al frente de Pareto verdadero. Los autores resaltaron la influencia que generan las restricciones en el tamaño asociado al portafolio, así como el lugar en que se encuentran en el frente de Pareto. Los portafolios que se ubican en la región de bajo riesgo-bajo retorno tiene muchos activos (la diversificación disminuye el riesgo), en cambio los portafolios con mayor retorno (y riesgo) tienen menos activos.

En Aranha e Iba [2] adoptaron un esquema de codificación del portafolio basado en árboles. Los nodos terminales (hojas) identifican a un activo, mientras que los nodos padre se usan para determinar el peso de cada subárbol a la derecha. Esta técnica produce únicamente portafolios factibles cuyo peso está implícitamente normalizado, además impone un límite en la profundidad del árbol. La mutación se lleva a cabo reemplazando un subárbol seleccionado por uno nuevo creado de forma aleatoria. En

el cruzamiento los subárboles de dos padres son intercambiados de acuerdo al valor de aptitud asociado a cada uno. El mecanismo de cruzamiento produce un hijo combinando los dos mejores hijos de cada subárbol. La técnica de representación basada en árboles aumenta la velocidad de la convergencia. La técnica fue comparada con un esquema de representación basado en arreglos, en ambas técnicas las mejores soluciones fueron similares, sin embargo, el número de activos seleccionados fue mucho menor en el que utilizaba la codificación basada en árboles.

En Anagnostopoulos y Mamanis [1] el problema se formuló con restricciones de clase. Utilizaron una representación de los cromosomas basado en vectores de números reales. Cuando un cromosoma no contenía un activo de alguna clase específica, un mecanismo de reparación le añadía aleatoriamente un activo de dicha clase.

En Zhu *et al.* [56] formularon el problema buscando maximizar el índice de Sharpe utilizando la técnica de optimización por enjambre de partículas. Cada solución es representada por una partícula en el espacio de búsqueda mediante arreglos de números reales donde se indica la velocidad y el valor de aptitud de cada partícula.

En Baixauli-Soler *et al.* [3] el modelo se implementó con el algoritmo evolutivo de fuerza de Pareto, SPEA2. Este algoritmo es una versión mejorada del algoritmo SPEA que incorpora una estrategia de asignación de aptitud de granulación fina, una técnica de estimación de densidad y un método mejorado de truncado de archivos.

En Lwin y Qu [34] y Kao *et al.* [28] los autores formularon el problema empleando un factor de aversión al riesgo. La codificación de los cromosomas en [34] y de las bacterias en [28] se hizo mediante codificación mixta de enteros y número reales en un vector de tamaño  $2K$ , los primeros  $K$  elementos del vector se utilizan para indicar si el activo está o no presente en la solución, el resto se utiliza para indicar el pesos de los activos presentes en el portafolio.

### 3.5.2.3. Estrategias de optimización empleadas

Un enfoque típico para hacer frente a los problemas multiobjetivo es reducir el número de criterios hasta obtener un problema de un solo objetivo. Los métodos más utilizados para lograr lo anterior son la ponderación de objetivos a través de funciones lineales y la estrategia de  $\epsilon$ -restricción.

La ponderación de cada uno de los objetivos dirige la búsqueda hacia una región específica del frente de Pareto, por lo que para poder obtener una buena aproximación a todo el frente es necesario realizar múltiples ejecuciones variando el peso asociado a cada objetivo. Adicionalmente, al utilizar la ponderación de objetivos no es posible construir

el frente de Pareto completo cuando el espacio de búsqueda del problema no es convexo. El uso de un factor de aversión al riesgo es un ejemplo de esta técnica aplicada al PSP. Por otro lado, la estrategia de  $\epsilon$ -restricción solo considera una función objetivo dentro del modelo, por lo que los demás objetivos se vuelven restricciones para las cuales se fija un valor extremo aceptable (*RHS term*). Al utilizar la técnica de  $\epsilon$ -restricción se necesita realizar varias ejecuciones (variando el valor del *RHS term*) para determinar el frente de Pareto completo.

Función de agregación lineal ponderada: En [9] se propone un GA de estado estacionario con una selección de torneo binaria, cruzamiento uniforme, y un operador de mutación acotado. El objetivo es hacer frente a un procedimiento de reparación simple que transformara las soluciones infactible en factibles. Los autores experimentaron con búsqueda tabú (TS) [22] y con recocido simulado (SA) [29] utilizando la misma función de agregación lineal. Para hacer un estudio comparativo de las soluciones se utilizó una versión sin restricciones del problema resuelto mediante QP; el GA tuvo el mejor resultado de los tres. Al considerar las restricciones de cardinalidad las tres técnicas mostraron resultados similares. En lo que respecta a qué tanto contribuyó cada algoritmo a la construcción del conjunto de óptimos de Pareto, el GA fue el que más contribuyó, después TS y al final SA.

En [56], [34] y [28] los autores emplearon la misma función de agregación lineal que en [9]. La formulación es conocida como de frontera eficiente y utiliza un factor de aversión al riesgo para ponderar los objetivos de retorno promedio y riesgo. En todos los casos los autores probaron los algoritmos propuestos para el problema formulado con restricciones de presupuesto, cardinalidad y piso-techo, y también para el problema sin restricciones.

Estrategia de  $\epsilon$ -restricción: En [37] el problema multiobjetivo se redujo a uno de un solo objetivo (minimizar el riesgo) y los demás objetivos se consideraron restricciones. El GA propuesto utilizaba codificación binaria, cruzamiento uniforme, selección de ruleta, y evaluación de aptitud a través de distancia de aglomeración. Para cinco activos, el GA obtuvo un frente de Pareto de 55 soluciones.

En [50] se consideró el retorno esperado como restricción y minimizar la varianza como objetivo. El GA propuesto utilizaba un mecanismo de selección determinista (la mitad más apta de la población sobrevivía) y un mecanismo de cruzamiento de reacomodamiento aleatorio para completar la otra mitad de la población. Los autores compararon el resultado del GA contra los resultados obtenidos con el software LINGO (que utiliza métodos de programación matemática) para nueve acciones. Los resultados del GA estuvieron entre 0.45 % y 7.77 % alejadas del óptimo encontrado por LINGO. Para treinta acciones LINGO fue incapaz de resolver el problema en 24hrs de ejecución. El GA mostró

resultado de buena calidad para 500 y 2000 activos (generados aleatoriamente) en un tiempo menor a 7min.

En Ehrgott *et al.* [18] se definieron cinco objetivos diferentes y se incorporaron funciones de utilidad (específicas y globales) para definir las preferencias del inversionista. Las funciones a optimizar fueron las funciones de utilidad globales. Los autores utilizaron una base de datos de fondos de inversión para comparar cuatro técnicas de optimización: 1) búsqueda local en dos fases, 2) SA, 3) búsqueda tabú, y 4) GA. Los resultados obtenidos mostraron que el GA fue el de mejor desempeño, seguido de SA. En pruebas posteriores con datos generados de manera aleatoria el mejor fue el algoritmo de búsqueda local (LS) en dos fases, seguido del GA.

En Fieldsend *et al.* [20] el MOEA propuesto mantiene un conjunto de frentes de Pareto con diferentes restricciones de cardinalidad, cada una inicializada con un portafolio aleatorio. El algoritmo selecciona (en cada iteración) de manera aleatoria un archivo con cardinalidad  $k$  en el cual copia un portafolio. El portafolio copiado es ajustado en peso o dimensión (número de activos), y evaluado (en términos de retorno-riesgo) contra todos los portafolios previos para saber si no dominado. Todos los portafolios dominados son eliminados del archivo. El MOEA fue comparado contra QP y mostró niveles de retorno muy cercanos pero con un menor número de activos seleccionados.

En Subbu *et al.* [53] se utilizó un algoritmo híbrido de optimización multiobjetivo que combina un EA con programación lineal. El EA propuesto es un algoritmo evolutivo de ordenación de Pareto (PSEA), el cual utiliza una población inicial pequeña y retiene en un archivo las mejores soluciones encontradas. La población inicial para el PSEA se obtiene con un algoritmo de programación lineal, el cual obtiene una muestra de los límites del espacio de búsqueda resolviendo miles de programaciones lineales de forma aleatoria. Además se incluyó un *filtro de dominación* para identificar las soluciones no dominadas, las cuales se dividieron en pequeños subconjuntos. La búsqueda de los portafolios óptimos se hizo a través del algoritmo genético objetivo destino (TOGA). Este último busca las soluciones que estén más cerca de un objetivo particular (previamente definido) para uno o más objetivos.

Por su parte Branke *et al.* [8] proponen un algoritmo híbrido para obtener un frente de Pareto continuo, combinando un MOEA (NSGA-II) y el algoritmo de línea crítica. NSGA-II se encarga de manejar las variables de permutación que determinan que activos serán incluidos en el portafolio y se utiliza además para definir subespacios de soluciones convexos del espacio original. El algoritmo de línea crítica opera sobre cada subconjunto convexo para formar el frente de Pareto completo.

Cada solución en el MOEA es entonces un frente parcial (ya no un punto) del espacio de media-varianza, llamado por lo autores “envoltura”. Muchas envolturas pueden ser agregadas para determinar el frente completo. A través de un procedimiento las soluciones no dominadas son ordenadas para determinar cuál es el mejor frente del que participa cada solución. Se calcula además la distancia de aglomeración para saber la proporción del frente en la que contribuye cada solución.

Se utilizó una codificación de permutaciones para que el algoritmo de línea crítica brindara retroalimentación al MOEA; un activo con un peso grande (promediado del número de soluciones eficientes en las que aparece) sería incorporado más rápidamente en las permutaciones.

Se propuso también una técnica para eliminar a las soluciones cuya frontera estuviera cubierta o formara parte de otras soluciones. Se utilizó, además, una población de tamaño variable con objeto de incrementar el número de individuos cuando el primer frente agregado estuviera constituido por un número de soluciones mayor que el tamaño actual de la población.

El algoritmo propuesto se comparó contra NSGA-II sin el algoritmo de línea crítica, el primero necesitó una población inicial mucho más pequeña que el clásico NSGA-II. Se comparó el área obtenida por el frente de Pareto del algoritmo propuesto y el frente de Pareto ideal (esto es, el frente de Pareto del problema resuelto sin restricciones y en un espacio convexo), el algoritmo propuesto mostró ser superior en su aproximación al frente de Pareto ideal y una convergencia más rápida. El algoritmo propuesto tiene la enorme ventaja de que produce un frente de Pareto continuo.

En Krink y Paterlini [32] se utilizaron tres modelos con diferente función objetivo cada uno. El criterio del retorno esperado se combinó con el de varianza, con el de VaR, y con el de déficit esperado (MES). La técnica de solución está inspirada en varios algoritmos. Primero, los operadores fueron tomados de la evolución diferencial (DE) [42], en la versión empleada ( $\text{rand}/1/\text{exp}$ ) los individuos involucrados en el paso de mutación son seleccionados aleatoriamente y combinados en solo una diferenciación, el paso de cruzamiento está basado en una distribución exponencial. Para el paso de selección se adoptó el ordenamiento de soluciones no dominadas de NSGA-II, al igual que las reglas basadas en multiobjetivo y la distancia de aglomeración para escoger la unión de padres y la mutación de hijos descendientes. Finalmente se utilizó GENOCOP para manejar las restricciones lineales del problema. A diferencia de la técnica empleada por DE, todos los individuos mutados son comparados con sus padres para reemplazar a los peores en la siguiente generación. El algoritmo resultante (evolución diferencial para la optimización de portafolios multiobjetivo, DEMPO) fue comparado contra NSGA-II para resolver seis problemas matemáticos multiobjetivo, NSGA-II superó a DEMPO en los problemas más

sencillos, este último superó a NSGA-II para los más complejos. DEMPO fue tres veces más rápido que NSGA-II. Para el problema de portafolio DEMPO tuvo mejor desempeño que NSGA-II y brindó un frente de Pareto muy cercano al frente de Pareto verdadero generado por QP. Los autores mostraron la gran eficiencia de la DE en problemas de optimización continuos y el método de manejo de restricciones empleado por GENOCOP para problema de igualdad de restricciones.

En el trabajo de Drezewsky y Siwik [15] se enfatizan la necesidad de procedimientos que preserven la diversidad de la población para evitar la convergencia en una región limitada del frente de Pareto o para evitar quedar atrapado en un falso frente de Pareto. Los autores emplearon el enfoque de la coevolución (co-ES) para lograr esto último. La coevolución está definida como la interacción mutua prolongada entre dos (o más especies) la cual puede ser positiva o negativa de acuerdo a las especies consideradas. Uno de los esquemas dentro de la co-ES (el utilizado en el artículo) es el de depredador-presa, en el cual el mecanismo de selección está basado en la circulación cerrada de recursos dentro del sistema. El esquema mencionado utilizó un conjunto de “entidades virtuales” llamadas agentes, cada uno de los cuales está asignado a un perfil (sexo, acciones, relaciones) y una estrategia para lograr una meta (definida en los términos de una solución a mejorar). Los sistemas multiagente coevolutivos (CoEMAS) consisten en evolucionar una población a través de una población de agentes, divididos en varias especies. Los experimentos computacionales mostraron que CoEMAS no fue capaz de generar una buena diversidad de soluciones sobre el frente de Pareto (la principal justificación para usar la coevolución); CoEMAS solo identificó un conjunto pequeño restringido de soluciones sobre el frente de Pareto localizadas en la región de bajo riesgo y bajo retorno. Lo cual se volvió más evidente al aumentar el número de iteraciones.

En Zhu *et al.* [56] se utilizó el enfoque de optimización por enjambre de partículas (PSO), donde cada solución está representada por una partícula en el espacio de búsqueda. La representación se hizo de forma directa, con un vector de número reales para indicar el peso de los activos que integran el portafolio. Las partículas tienen asociada una posición, una velocidad y un valor de aptitud (evaluado mediante el índice de Sharpe). En cada iteración, la aceleración de la partícula se modifica con un valor aleatorio, dependiendo la velocidad anterior y la velocidad actual. Cada partícula se mueve hacia el *Pbest*, que es el mejor valor que ha logrado la partícula hasta el momento, y hacia el *Gbest*, que es el mejor valor que se ha obtenido por cualquier partícula. El proceso de actualización con PSO fue con una condición de terminación de 100 pasos y utilizando 100 partículas.

En Baixauli-Soler *et al.* [3] la implementación del modelo se hizo con el algoritmo evolutivo de fuerza de Pareto, SPEA2. Este algoritmo es una versión mejorada del algoritmo SPEA que incorpora una estrategia de asignación de aptitud de granulación fina, una

técnica de estimación de densidad y un método mejorado de truncado de archivos. Los parámetros de control utilizados para el GA fueron: selección por torneo de tamaño siete y probabilidad de uno y mutación con probabilidad de 0.05. Un tamaño de población de 500 individuos y un archivo 100 individuos, el proceso evolutivo fue de 100 generaciones. Cada individuo está codificado con un cromosoma de tamaño variable de 0 a 99, donde cada elemento representa el porcentaje del capital invertido en ese activo en particular.

Para cumplir la restricción de capital cada cromosoma es normalizado dividiendo la proporción de cada activo entre la suma de los pesos totales. En el caso de la restricción de lotes mínimos se utilizó un mecanismo que consiste en multiplicar el peso de cada activo ( $x_i$ ) por el capital ( $b$ ), después dividirlo entre el precio del activo ( $c_i$ ) y redondearlo al próximo valor entero superior. Aún con la técnica anterior puede existir un valor residual  $\epsilon$  del capital sin invertir, por lo que dos técnicas diferentes se utilizaron para distribuirlo: 1) el capital residual se invierte en el activo que más peso tiene en el portafolio y así se continua hasta que el valor de  $\epsilon$  es menor al precio del activo más barato; 2) se calcula la preferencia de inversión en un activo según el peso que tiene en el portafolio, una vez que se invierte en el activo con mayor preferencia se actualiza su valor y las unidades extras que se han invertido en dicho activo.

En Lwin y Qu [34] se propone un enfoque híbrido llamado PBILDE y es una combinación del enfoque de aprendizaje incremental basado en una población (PBIL) y la evolución diferencial (DE). PBIL está basado en la idea evolutiva de una población de individuos que emplea información estadística recolectada durante el proceso evolutivo. Asumiendo que no hay dependencia entre las variables (esto es, la selección de los activo en el portafolio son eventos independiente), PBIL utiliza un vector de probabilidad para representar la distribución de todos los individuos. El vector de probabilidad adquiere aprendizaje hacia el vector que representa la mejor solución y se utiliza para generar la siguiente generación de individuos. La evolución diferencial es una técnica muy exitosa dentro de los algoritmos evolutivos (EA) para la optimización de problemas continuos. DE utiliza una población inicial generada de manera aleatoria que va mejorando en iteraciones posteriores a través de las operaciones de mutación, cruzamiento y recombinación.

La población de cromosomas que mantiene PBILDE permite representar soluciones potenciales al problema. En cada iteración el vector de probabilidades se utiliza para determinar que activos estarán o no presentes en la soluciones generadas, y el esquema de generación de DE para determinar la proporción del capital sobre los activos. El vector de probabilidades se actualiza en cada proceso evolutivo tomando información de las mejores soluciones generadas en la población, inicialmente el vector de probabilidades da igual oportunidad a todos los activos con probabilidad de 0.5, la proporción del capital inicial para cada uno de los activos se genera de manera aleatoria de acuerdo

a una distribución normal acotada entre el límite superior e inferior definidos para la restricción de piso-techo.

La actualización del vector de probabilidades se realiza de acuerdo a un porcentaje de aprendizaje que puede ser positivo ( $LR$ ) o negativo ( $NEG_{LR}$ ). El porcentaje utilizado no solo controla la velocidad a la que vector cambia para parecerse a la mejor solución, sino también la cantidad del espacio de búsqueda que será explorado. El uso de aprendizaje positivo y negativo tiene como objetivo aumentar la probabilidad de seleccionar un activo que contribuye a generar una buena solución y alejarse de los que no lo hacen.

En cada iteración del proceso evolutivo, cada dimensión del vector de probabilidad se muta con una cierta probabilidad (MP) mediante la técnica de mutación parcialmente guiada (PGM). Esta técnica muta el vector de probabilidades ya sea de manera aleatoria o basada en la mejor solución global de acuerdo a un porcentaje de mutación previamente establecido, ambas opciones tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

En Kao *et al.* [28] utilizaron la optimización por farrajeo de bacterias (BFO) que utiliza tres operaciones básicas: quimiotaxis, reproducción y eliminación-dispersión.

Para producir nuevas soluciones, las bacterias realizan una serie de movimientos quimiotácticos en los cuales se incrementa y decrementan el peso de los activos presentes en el portafolio (a través de nado y desplome). Cada nueva solución es evaluada por el algoritmo, si la solución nueva es mejor que la solución actual, esta última es reemplazada en el población de bacterias.

La reproducción se realiza ordenando las bacterias de mayor a menor según su valor de aptitud y dividiendo en dos partes el enjambre, la primera mitad se reproduce generando dos bacterias ubicadas en la misma vecindad del padre, mientras que la segunda mitad es eliminada.

Una vez alcanzado el límite de pasos reproductivos el algoritmo realiza un paso de eliminación-dispersión. Con una cierta probabilidad se selecciona un activo del portafolio y se sustituye por otro no incluido previamente, la nueva solución generada es evaluada y reparada en caso de violar alguna restricción. El algoritmo BFO se ejecuta hasta alcanzar el número máximo de ciclos de eliminación-dispersión.

Para cumplir con las restricciones los autores emplearon dos métodos de reparación que se ejecutan al terminar un paso quimiotáctico o uno de eliminación-dispersión. Para la restricción de cardinalidad se utiliza un parámetro que mide la proporción de retorno-riesgo de un activo, mientras mayor sea el valor del parámetro mejor desempeño se considera que tiene el activo en el portafolio. Cuando es necesario completar un activo en el portafolio se añade en la mitad de las veces los que tienen un mayor valor, en la

otra mitad se agrega un activo seleccionado aleatoriamente. Para satisfacer la restricción de piso-techo se utilizó un enfoque simplificado que ajusta los pesos que rebasan el límite superior y distribuye el excedente entre los que no cumplen con el límite inferior y/o los que aún tienen espacio disponible.

En Reid et al. [46] adaptaron el algoritmo de optimización por enjambre de partículas (PSO) con las siguientes mejoras: 1) para mejorar la habilidad de exploración del enjambre, las partículas que convergían en la mejor posición global se reinicializaban de manera aleatoria con una velocidad inicial de cero, los autores utilizaron una función de similitud con un umbral de  $(10^{-5})$  sobre el promedio de los pesos entre dos partículas; 2) para mejorar la habilidad de explotación de las partículas, la mejor posición global se reemplazaba por vecindarios variables cercano a esta posición mediante un proceso de mutación, en dicho proceso el peso de cada partícula en el vecindario era modificado aleatoriamente por un valor entre -0.01 y 0.01. Además de las técnicas anteriores, los autores mejoraron el tiempo de ejecución del algoritmo añadiendo la posición de cada partícula en un hilo concurrente. Con la técnica de *memoización* se mejoró el desempeño mediante funciones que evitaban rehacer cálculos previamente realizados.

Para el manejo de restricciones utilizaron tres métodos de reparación encargados de convertir una solución infactible a una factible. Para la restricción de piso, el método consiste en aumentar al valor absoluto de cada peso el límite inferior. Para satisfacer la restricción de capital (100 % del capital invertido) cada peso es ajustado proporcionalmente según el total de los pesos. Finalmente, para la cumplir con la restricción de techo, el peso de los activos que exceden el límite superior se distribuye entre los demás activos.

Pai y Michel [38] utilizaron dos técnicas de optimización metaheurísticas: una estrategia evolutiva multiobjetivo (MOES) y la evolución diferencial multiobjetivo (MODE).

La MOES utilizada en este trabajo es una variante de la estrategia evolutiva  $(\mu + \lambda)$  aplicable a poblaciones de gran tamaño que hacen uso de los operadores de *cruzamiento de punto variable aritmético* y *mutación uniforme de números reales*. El operador de cruzamiento de punto variable aritmético utiliza una variable aleatoria  $a$ , la cual se utiliza para determinar en que proporción el valor de cada gen de los padres es transmitidos a los hijos, este operador está asociado a un porcentaje de cruzamiento  $\rho$  previamente establecido. El operador de mutación uniforme de números reales (utilizado para mantener la diversidad) está asociado a un porcentaje de mutación  $\tau$ , y se encarga de alterar un gen escogido de manera aleatoria de acuerdo a la fórmula  $gene_{min} + b \times (gene_{max} - gene_{min})$ , donde  $b$  es un número aleatorio,  $gene_{min}$  y  $gene_{max}$  son los límites impuestos en la restricción de piso-techo. El operador de mutación se aplica en todas las generaciones sobre

cada gen de cada individuo de la población, pero la modificación del gen se da de acuerdo a la probabilidad de mutación uniforme previamente establecida.

La MODE utilizado en este trabajo es el de *RAND5/Dir4/Bin*, donde *RAND5/Dir4* es el operador diferencial que se construye sobre cinco individuos seleccionados aleatoriamente en cuatro direcciones diferentes del espacio de búsqueda. El operador asegura la explotación del espacio de búsqueda haciendo uso de la información representada por las funciones objetivo y guía la dirección de los descendientes. *Bin* se refiere al operador de cruzamiento que es binomial, los puntos de cruzamiento son seleccionados de manera aleatoria según la longitud del vector del individuo, el cruzamiento se realiza cuando el valor de una variable aleatoria (que sigue una distribución de probabilidad binomial) es menor a un valor  $p_r$  previamente establecido. Para generar la población de descendientes se aplica el operador *RAND5/Dir4* sobre la población aleatoria inicial y se genera un *vector muestra* el cual está constituido por los vectores (cromosomas) de cuatro individuos seleccionados aleatoriamente, la población de descendientes es resultado del cruzamiento y mutación de cada uno de los padres con el vector muestra. Para construir la siguiente generación de descendientes se seleccionan los mejores individuos tanto de los padres como de los hijos de acuerdo a la función de aptitud.

Las restricciones de piso-techo se manejaron mediante un procedimiento de reparación que ajusta los pesos de los activos de tal forma que los límites de piso-techo y las restricciones básicas se cumplan. Algo muy importante de este trabajo, es que los mecanismos de estandarización utilizados para garantizar que la población de individuos representan soluciones perfectamente factibles. Los procedimientos de estandarización de pesos se aplican a los padres e hijos de cada generación para lograr una rápida convergencia.

#### 3.5.2.4. Comparativa de las estrategias de optimización

1. Radziukyniene y Zilinskas [45]: Compararon cuatro algoritmos sobre dos formulaciones distintas del problema de selección de portafolios: la primera consideró la restricción básica, y en la segunda se incluyó el criterio del dividiendo anual producido. Los algoritmos a comparar fueron FastPGA, MOCeLL, AbYSS, y NSGA-II. Los algoritmos se compararon de acuerdo a cinco criterios (juntando las soluciones óptimas de Pareto producidas por los algoritmos se construyó un frente verdadero de referencia): distancia generacional (GD), distancia generacional invertida (IGD), hipervolumen (HV), propagación (S), y tiempo computacional. GD e IGD representan, respectivamente, que tan lejos están la aproximación del frente de Pareto verdadero y que tan lejos están los elementos en el conjunto de óptimos de Pareto del conjunto aproximado. Para el problema con la restricción básica MOCeLL (para GD, IGD y HV) y AbySS (para S y tiempo computacional) fueron

los más competitivos. Para la formulación de tres objetivos MOCeLL fue el mejor en todos los aspectos, menos en tiempo computación (donde el más rápido fue NSGA-II).

2. Duran *et al.* [16]: Compararon tres MOEA y un SOEA, los criterios de comparación fueron: la eficiencia del algoritmo para conseguir un frente de Pareto de buena calidad (con la restricción básica), y el desempeño del algoritmo en localizar el portafolio eficiente utilizando el índice de Sharpe. El SOEA utilizó el índice Sharpe como único objetivo, y generó la aproximación al frente de Pareto a través de múltiples ejecuciones.

Los MOEA comparados fueron NSGA-II, SPEA2 e IBEA, el frente generado por cada uno de los algoritmos fue comparado de acuerdo a su hipervolumen y a las medidas de desempeño  $R_2$  [57], la cuales estiman la extensión en la que un frente aproxima a otro. Los tres MOEA mostraron resultados similares, sin embargo, IBEA mostró un desempeño mejor en términos de los criterios antes mencionados. El SOEA no pudo lograr una cobertura suficientes del frente. Enfocado en el índice de Sharpe, el SOEA identificó con mayor precisión el mejor portafolio respecto al valor del índice de Sharpe.

3. Diosan [13]: Dentro de la formulación del modelo de media-varianza los autores compararon el desempeño de tres MOEA: PESA, NSGA-II y SPEA2. Para los tres algoritmos utilizaron una codificación de números reales, y un proceso de reparación normalizado con objeto de satisfacer la restricción del capital disponible. Se utilizaron dos medidas: medida  $S$  (es la porción del espacio objetivo dominado por la aproximación del frente de Pareto generado por el MOEA) y medida  $\delta$  (la uniformidad de la distribución de los puntos a lo largo del frente de Pareto). Adicionalmente, se utilizó la cobertura de conjunto binario [58], esta medida compara los conjuntos de Pareto producidos por cualesquiera dos algoritmos y mide la proporción de soluciones no dominadas producidas por cada uno. PESA tuvo mejor desempeño que los otros dos algoritmos para la medida  $S$  y la cobertura. NSGA-II tuvo el mejor desempeño en la medida  $\delta$ .
4. Anagnostopoulos y Mamanis [1]: Los autores resolvieron una variación del modelo de Markowitz con tres objetivos: retorno, riesgo y número de activos en el portafolio. Se compararon NSGA-II, PESA y SPEA2. Las medidas de desempeño utilizadas en la evaluación fueron el hipervolumen y el indicador  $\epsilon$ . SPEA2 fue el mejor para el problema con y sin restricciones.
5. Zhu *et al.* [56]: La experimentación se llevó a cabo en tres tipos de portafolios con y sin la restricción de capital, cada uno con 8 activos, 15 activos y 49 activos.

Los autores compararon su técnica contra un GA y un solucionador tradicional desarrollado en Visual Basic for Applications (VBA). Los resultados mostraron en todos los casos que los portafolios obtenidos con el PSO fueron mejores que el GA y el solucionador en VBA. Para el caso del GA, los autores notaron que la convergencia del proceso evolutivo fue mejor en el caso sin restricción, debido a que la función de aptitud evaluó menos condiciones, además, mientras mayor es el número de activos, la convergencia al mejor valor de aptitud se vuelve más lenta. Los autores sugieren que sin importar la técnica que se utilice y si tiene o no restricción el portafolio, es necesario seleccionar a lo más quince activos para que el algoritmo se comporte de forma estable y eficiente. En las pruebas que realizaron con 49 activos sin restricción, el número de partículas que convergieron al mismo valor de aptitud fue menor.

Las fronteras eficientes obtenidas con PSO están más arriba en prácticamente todos los casos en comparación con el GA y el VBA. Comparando el GA con el solucionador VBA, cuando el número de activos fue de ocho, el VBA mostró mejores valores que el GA. Cuando se trató de 49 activos el GA obtuvo valores significativamente mejores que el VBA.

6. Baixauli-Soler *et al.* [3]: El GA propuesto se utilizó para resolver el problema con las restricciones básicas y los resultados se compararon contra los obtenidos mediante QP. De los portafolios óptimos obtenidos se calculó el error medio cuadrado y el error absoluto promedio y en ambos casos fue muy cercano a cero. Los autores mostraron que hay una pérdida de eficiencia cuando la restricción de costos de transacción no está incluida en el proceso de optimización y se aplica después sobre los portafolio óptimos obtenidos.

Los datos utilizados están compuestos por los precios de cierre diarios de cincuenta activos a lo largo de cinco años. El retorno promedio diario de los datos es cercano a cero (lo cual se asumen en VaR), y la distribución de los datos muestra una severa torcedura (asimetría) por lo que no se puede esperar una distribución normal de los datos. Con objeto de mostrar las diferencias entre el uso de VaR y la desviación estándar como medidas de riesgo los autores obtuvieron todos los posibles portafolios compuestos por dos activos utilizando ambas medidas. VaR mostró una clara irregularidad en comparación con la desviación estándar, esta última converge a un mínimo global y VaR al no ser una función convexa presenta varios mínimos locales.

7. Lwin y Qu [34]: El algoritmo propuesto PBILDE se comparó contra PBIL y DE para el problema con y sin restricciones, se utilizaron datos de cinco mercados diferentes con 31, 85, 89, 98 y 225 activos respectivamente. Los valores para el

parámetro  $\lambda$  se fijaron de la siguiente forma:  $\lambda_i = (i - 1)/49$  donde  $i = 1, 2, \dots, 50$ , para cada valor de  $\lambda$  cada uno de los algoritmos se ejecutó veinte veces. Para el problema sin restricciones utilizaron un archivo para mantener las mejores soluciones ( $V$ ) obtenidas para cada valor de  $\lambda$  y calcularon el porcentaje de desviación de cada uno de los portafolios en  $V$  con respecto a la frontera eficiente. Para el problema con restricciones se utilizó además un archivo  $H$  para almacenar todos los portafolios no dominados durante el proceso evolutivo y poder calcular los errores de desviación porcentual. El método de evaluación de los errores de desviación porcentual [9] mide la distancia a la frontera eficiente de cada uno de los portafolios en el conjunto  $H$  y  $V$ .

Los resultados mostraron que PBILDE fue el algoritmo más eficiente y en segundo lugar DE. Los autores compararon su algoritmo contra tres técnicas propuestas en [9] (algoritmo genético, búsqueda tabú y recocido simulado), y tres más en [44] (algoritmo genético, optimización por enjambre de partículas y PBIL). En la comparación con los enfoques anteriores PBILDE obtuvo mejores resultados. El algoritmo PBILDE se probó con y sin las técnicas de mutación parcialmente guiada (PGM), los resultados mostraron que el uso de la PGM en PBILDE contribuye a encontrar soluciones de mejor calidad. PBILDE superó a DE y PBIL en prácticamente todos los casos. El algoritmo se comparó contra el GA propuesto en [9] y PBIL\_CCPS propuesto en [44], cada uno reportado como la mejor solución por sus autores y formulado de manera similar. PBILDE tuvo mejor desempeño que el GA y PBIL\_CCPS en la mayoría de las instancias, generando en todos los casos un mayor número de portafolios eficientes. Finalmente el algoritmo propuesto PBILDE se comparó contra dos algoritmos más: 1) una técnica híbrida que combina la metaheurística de búsqueda local y un procedimiento de programación cuadrática y 2) una red neuronal que fue tomada como base para desarrollar la técnica anterior. En esta última comparación PBILDE fue superado por la red neuronal en tres de cinco instancias, sin embargo, PBILDE obtuvo un menor error porcentual promedio en todas las instancias.

8. Kao *et al.* [28]: Los autores compararon su técnica contra la frontera eficiente real generada mediante QP y los resultados obtenidos por [9] quien utilizó tres heurísticas diferentes. Además, generaron la frontera eficiente comparativa y contrastaron el desempeño de acuerdo a las siguientes medidas: distancia euclidiana promedio (MED), porcentaje de error de la varianza (VRE) y porcentaje de error del retorno (MRE). Los resultados obtenidos en la primera parte mostraron que la técnica BFO obtuvo mejores resultados promedio en las tres medidas utilizadas para los diferentes conjuntos de datos. BFO tuvo el mejor desempeño para los dos conjuntos más grandes con una frontera eficiente que coincide prácticamente

con la frontera eficientes estándar comparativa. GA y PSO produjeron las peores soluciones para los conjuntos de datos grandes.

Para la segunda parte, los autores compararon cada técnica con la frontera eficiente que se obtiene al combinar las mejores soluciones de cada uno de los algoritmos (llamada frontera eficiente combinada). Cada heurística se comparó contra la frontera eficiente combinada de acuerdo a cuatro medidas: número de puntos (NP), número de puntos sobrevivientes (NSP), porcentaje de puntos sobrevivientes (SPP) y porcentaje de contribución (CP). BFO obtuvo los mejores valores para NS y NSP, lo que está asociado a una adecuada exploración del espacio de búsqueda. Para la medida de SPP los mejores valores los obtuvieron TS y BFO. Finalmente, BFO tuvo el mayor valor de CP lo que significa que las soluciones generadas por el algoritmo se distribuyen uniformemente sobre la frontera eficiente. Los autores sugieren que ajustando los valores del tamaño de los pasos quimiotácticos (nado y desplome) es posible obtener mejores resultados.

9. Reid *et al.* [46]: Los autores utilizaron los datos de 22 divisas para un periodo de 12 años. Los resultados obtenidos son datos promedio de 30 ejecuciones del algoritmo configurado de la siguiente manera: población de 30 partículas, coeficientes de aceleración social 1.4961 y coeficiente de de aceleración cognitivo 1.4961. Los autores compararon los portafolios optimizados con su técnica contra los que generaron otras cinco técnicas, dos que denominaron *desinformadas* y tres denominadas *informadas*. En las técnicas desinformadas los pesos se establecieron de manera igualmente proporcional para todos los activos, o de manera aleatoria. Para las técnicas informadas se ordenaron los activos de mayor a menor de acuerdo al retorno esperado y se asignaron los pesos de la siguiente manera: exponencial decreciente, proporcional al valor esperado, y exponencial decreciente según al nivel del valor esperado.

Los indicadores de desempeño para los portafolios fueron: porcentaje de acierto, retorno total, retorno promedio, varianza, desviación estándar, desviación estándar negativa, caída máxima respecto al valor máximo alcanzado, aumento máximo respecto al valor mínimo obtenido, índice de Sharpe, varianza del índice de Sharpe, índice de Sharpe promedio, índice de Sortino y tasa de crecimiento anual ponderada.

Las pruebas realizadas fueron de retroceso para cada uno de los portafolios. Se simuló el desempeño histórico según la estrategia utilizada. Los resultados obtenidos mostraron que sin importar la técnica empleada todos los portafolios obtuvieron ganancias a lo largo de 12 años. Sin embargo, los que utilizaron las técnicas “informadas” tuvieron mucho mejor desempeño que las “no informadas”, de las cuales PSO fue la mejor y pesos aleatorios la peor. Las monedas que mostraron un mayor

diferencial respecto a la tasa interés de fondeo conformaron en mayor medida los portafolios. Se probó el algoritmo con y sin la restricción de costos de transacción, la versión sin restricción tuvo un desempeño ligeramente menor, por lo que concluyeron que hacer cambios de moneda frecuentemente no generaba necesariamente una mayor ganancia. Finalmente, los autores resaltan que al utilizar el movimiento browniano geométrico para modelar la distribución de probabilidad del tipo de cambio, a la par de una buena heurística para optimizar el portafolio, se obtiene una ganancia considerablemente mayor a largo plazo.

10. Pai y Michel [38]: Los autores resaltan la diferencia de su técnica comparada con las de otros MOEA basados en dominación de Pareto. En este sentido, el manejar el espacio de búsqueda a través de soluciones factibles y no a través de la incorporación de elaboradas estrategias de reparación, supone un proceso de búsqueda más fácil de desarrollar, entender y probar mediante una aplicación. La mayoría de las MOEA se mueven por el espacio de búsqueda a través de soluciones candidatas y después utilizan mecanismos para separar las soluciones factibles de las no factibles y así guiar el proceso de búsqueda.

Los resultados obtenidos para las dos técnicas utilizadas mostraron una consistencia en su desempeño después de varias ejecuciones. Los autores realizaron pruebas paramétricas y no paramétricas (prueba de hipótesis) de las dos soluciones y concluyeron que no había diferencia significativa en el desempeño de las dos técnicas para un intervalo de confianza del 95 %.

Como medida para la convergencia utilizaron el criterio de *número de generaciones* asociado al *criterio basado en distribución*. Este criterio llamado *medida de población* o *medida P* mide la diversidad utilizando la distancia euclidiana entre el centro de la población y el individuo más alejado de este punto. La medida P permite determinar el número de de ejecuciones necesarias antes de detener la ejecución del algoritmo. Los resultados obtenidos mostraron que eran necesarias menos de 100 generaciones, lo que permite concluir que la convergencia sucede rápidamente. Los autores atribuyen este hecho a que el algoritmo maniobra siempre un espacio de soluciones factibles en lugar de soluciones candidatas.

Debido a que los portafolio futuros ponen especial énfasis en la administración del riesgo, los autores implementaron la prueba en retroceso (back testing) para juzgar la efectividad de su estrategia. La prueba en retroceso consiste en probar los algoritmos suponiendo periodos de tiempo anteriores y alimentar el algoritmo con datos pasados. La prueba en retroceso es una medida para saber que tan buena (o mala) es la técnica empleada y sirve como medida de confiabilidad. Los resultados mostraron que las estrategias propuestas por los autores son robustas y generan portafolios confiables.

### 3.6. Análisis del estado del arte

El estado del arte se realizó considerando tres tipos de estrategias de optimización diferentes: algoritmo evolutivos (EA), inteligencia de enjambre (SI) y algoritmos híbridos. Aplicando la taxonomía propuesta por Ponsich *et al.* en [41] se incluye también la técnica de optimización por forrajeo de bacteria (BFO) que ha empezado a ser utilizada para resolver el PSP recientemente. En la Figura 3.2 se muestra como están distribuidas las soluciones revisadas en este trabajo en dos aspectos: restricciones y función objetivo. Empleamos círculos de diferentes tamaños según del número de trabajos que incluían cada uno de los aspectos mencionados, un círculo de tamaño grande indica que aparece en un gran cantidad de trabajos y viceversa.

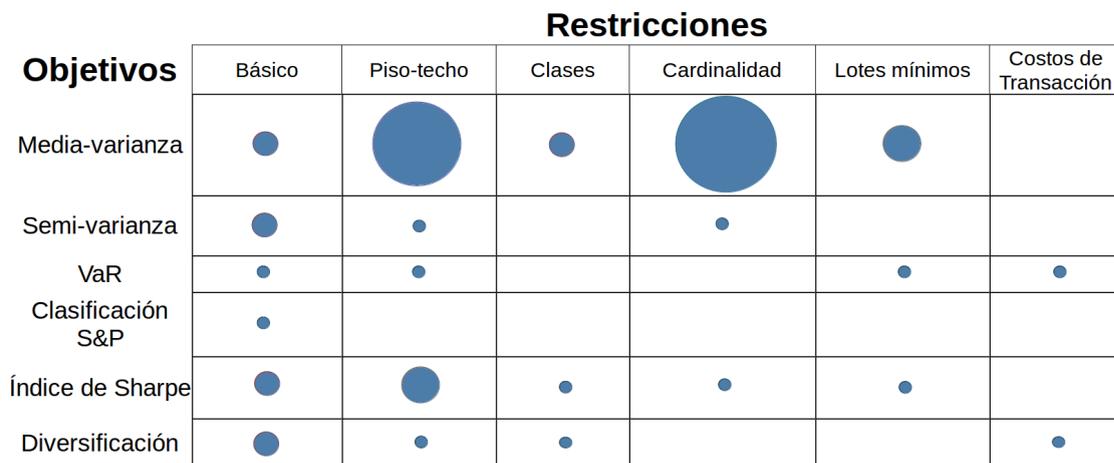


FIGURA 3.2: Distribución de los trabajos según la función objetivo y las restricciones consideradas

Es posible observar que la mayoría de los trabajos utilizan como función objetivo el modelo de media-varianza de Markowitz junto con las restricciones de piso-techo y cardinalidad. Aunque las desventajas de este modelo son conocidas, una de las posibles causas de que siga siendo tan ampliamente utilizado es la siguiente: En *Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation* publicado en el año 2000 por Chang *et al.* [9] los autores pusieron disponible en línea cinco conjuntos de datos con su respectiva frontera eficiente real obtenida mediante QP, cada conjunto tiene un número diferente de instancias y datos reales de los principales índices bursátiles del mundo [27]. Además, los autores propusieron un método de evaluación y publicaron los resultados obtenidos para tres heurísticas diferentes: GA, TS y SA. Creemos que la importancia de este trabajo trascendió de tal manera que inclusive las instancias de datos son reconocidas actualmente como el conjunto de datos estándar para probar los algoritmos de optimización

para el PSP. Este trabajo brinda una manera justa de comparar los algoritmos siempre que se emplee la misma formulación y el mismo método de evaluación.

En diversos trabajos se menciona la importancia de las restricciones de piso-techo y cardinalidad, sin embargo, las restricciones de lotes mínimos y de costos de transacción son más fáciles de justificar al momento de considerarlas en el modelo. Por un lado, la restricción de lotes mínimos considera que los activos se adquieren como múltiplo entero del lote de transacción mínimo, es decir, no todos los activos se pueden dividir de manera infinita para su comercialización. Por su parte, la restricción de costos de transacción implica que los inversionistas pagan impuestos, pagan por utilizar la información de la casa de bolsa, pagan al agente que administra el portafolio, además de un costo variable que depende de la oferta y la demanda de los activos al momento de su compra. En prácticamente todos los casos estas dos restricciones son perfectamente razonables.

El modelo más empleado para formular el PSP sigue siendo el de Markowitz, sobre el cual hay un consenso prácticamente unánime en la estrategia de maximizar el retorno promedio de los activos. Sin embargo, observamos que hay un buen número de trabajos que buscan otras formas de medir el riesgo, como se vio en el Capítulo 2 una manera adecuada de hacer frente a las asimetrías que se presentan en la distribución del retorno de los activos es con la semivarianza. El puro análisis sobre el riesgo de los portafolios y la manera medirlo adecuadamente constituyen un área muy vasta que excede los límites de este trabajo.



FIGURA 3.3: Distribución de los trabajos según el enfoque de optimización utilizado

En la Figura 3.3 aparecen agrupados los trabajos según la técnica de optimización empleada por los autores. Dentro de las estrategias de optimización existen un gran número de trabajos que emplean algoritmos genéticos, estrategias evolutivas y evolución diferencial. Los algoritmo genéticos (GA) son los más empleados y han sido probados en un gran número de trabajos para resolver el PSP y muchos otros problemas de optimización ([9], [52], [37], [18], [13], [50], [16], [1], [3]), además, constituyen una de las técnicas mejor probadas y con mayor consenso respecto a los valores de configuración y ejecución del algoritmo. La evolución diferencial (DE) por su parte se ha presentando como una estrategia exitosa que sobrepasa los resultados de un buen número de GA y

otras técnicas evolutivas, en los trabajos más recientes que se han publicado en el área los resultados son realmente buenos ([11], [31], [32], [34], [38]). Por otro lado, dentro de la inteligencia de enjambre (SI) la técnica más popular que se ha aplicado al PSP es la optimización por enjambre de partículas ([56], [46]) y recientemente la optimización por forrajeo de bacterias ([28], [36], [54]) ha sido aplicada con buenos resultados. Finalmente, los algoritmos híbridos han mostrados resultados diversos al integrar alguna técnica en un enfoque determinado ([52], [11], [34], [53], [8], [32], [15]), el objetivo que persiguen es hacer frente a limitaciones o desventaja de los enfoques tradicionales, un buen número de los trabajos aquí revisados se pueden considerar híbridos.

Con base en el estado del arte hemos decidido utilizar en este trabajo el algoritmo de optimización por forrajeo de bacterias (BFO). La técnica de BFO [40] es una de las heurísticas más novedosas en el área de SI y una de las menos exploradas en su aplicación al PSP. Las bacterias son organismos simples que han sido muy exitosos para sobrevivir desde su aparición en el planeta hace millones de años. Dentro de todas las actividades que llevan a cabo la alimentación es una de las más importantes y como la mayoría de los organismos vivos han generado una alta especialización en esta actividad primordial. El algoritmo imita el comportamiento de una población de bacterias que busca alejarse de las regiones peligrosas y permanecer en las lugares donde la cantidad de alimento es mayor. Para las bacterias, esta actividad constituye un proceso de búsqueda muy eficiente en el que no existe ningún tipo de comunicación (algo inusual dentro de la SI). El pequeño número de trabajos donde se ha aplicado esta técnica representa un nicho de oportunidad para resolver el problema de selección de portafolios.

Además de la técnica de BFO encontramos que el algoritmo de aprendizaje incremental basado en poblaciones (PBIL) [4] brinda muy buenos resultados para guiar un proceso evolutivo empleando únicamente información estadística recolectada a través de las mejores soluciones. Esta técnica considera que para llegar al óptimo global en principio todas las opciones que definen una solución son igualmente probables, la probabilidad de incluir o no una opción se actualiza en un vector de probabilidad de acuerdo a las mejores soluciones encontradas hasta el momento. En PBIL encontramos la posibilidad de incorporar un componente de comunicación a las bacterias de BFO para guiar a la población hacia las regiones con mayor concentración de alimento. El desarrollo del algoritmo propuesto aparece en el Capítulo 4 y está basado en estas dos técnicas.

### 3.7. Resumen

En este capítulo se describe la manera como se formulan formalmente los problemas de optimización multiobjetivo y se introducen los conceptos de soluciones no dominadas,

frente de Pareto, función objetivo, y función de restricción. Los problemas de optimización multiobjetivo no tienen una única solución, sino un conjunto de soluciones igualmente óptimas que definen la frontera eficiente, el objetivo es encontrar el conjunto de soluciones que representan el mejor compromiso entre todos los objetivos del problema (soluciones no dominadas).

Al formular el PSP como problema de optimización multiobjetivo se incluyen restricciones realistas empleadas en el mundo financiero. Dentro de las principales restricciones encontradas en la literatura se encuentran: piso-techo, cardinalidad, costos de transacción, clases de activos y rotación, siendo piso-techo y cardinalidad las consideradas con mayor frecuencia. Aunado al PSP se describe en qué consiste el problema de optimización de los portafolios futuros que emplean el modelo de media-varianza, sin embargo, los portafolios futuros quedan fuera del alcance de este trabajo.

En el estado del arte se empleó la taxonomía adoptada por Ponsich *et al.* en [41] que analiza las funciones objetivo (tipos de riesgo empleado y restricciones), la codificación o representación y la estrategia de optimización. En [41] se analizan los algoritmos de optimización evolutivos (EA), sin embargo, para conocer el estado del arte de manera más amplia incluimos las técnicas que aparecieron en los trabajos seleccionados mediante la búsqueda SMS. La inteligencia de enjambre (SI) y los algoritmos híbridos han sido aplicados al PSP con buenos resultados, los trabajos que aquí se presentan como una extensión de [41] pertenecen a estos dos grupos. Para finalizar el capítulo se hace un breve análisis de los trabajos revisados que justifican e introducen al lector a la solución propuesta en este documento en el capítulo 4.

## Capítulo 4

# Formulación y algoritmo propuesto

### 4.1. Riesgo y retorno del portafolio

La pregunta fundamental para un inversionista que desea adquirir un portafolio de inversión es ¿cómo elegir entre todas las posibles opciones que conformarán el portafolio, para obtener la mayor ganancia posible con el nivel de riesgo que está dispuesto a aceptar? Se debe escoger, entonces, de un universo de activos de inversión  $N$  un subconjunto  $P \subset N$  asignando a cada activo  $x \in P$  la parte de capital que más convenga ( $x_i$ ). En otras palabras, el inversionista tiene que elegir los activos que maximicen la ganancia del portafolio (el retorno esperado) y a la vez minimicen el riesgo (dispersión del retorno esperado) de acuerdo a sus preferencias.

Actualmente, hay consenso respecto a la estrategia de maximizar el retorno esperado según el modelo de Markowitz, sin embargo, para minimizar el riesgo se han propuesto distintas medidas que difieren principalmente en la manera como manejan el cambio en el riesgo [7]. Por un lado, varían en términos del periodo de muestra histórico que se debe ser considerado, y por otra parte, en el esquema de ponderación que se aplica a las series de tiempo del retorno durante el proceso de optimización del portafolio.

Como se expuso en el Capítulo 2, la manera de medir el riesgo influye directamente en la decisión de un inversionista sobre el portafolio que seleccionará. En este trabajo decidimos analizar (además de las técnicas de optimización de portafolios) cuales eran las medidas de riesgo que mejor modelan el comportamiento de los portafolios, y así poder proponer un trabajo futuro encaminado en este sentido. Entre las medidas de riesgo más populares se encuentra un tipo denominado *riesgo a la baja* [48], las medidas

que pertenecen a este tipo evitan considerar la desviación positiva (mayor ganancia) como riesgo. Es decir, a la mayoría de los inversionista lo que les preocupa es no llegar a la meta que se han propuesto en un periodo determinado, y en general, sobrepasar la meta no es un problema.

En este trabajo presentamos la formulación del índice Sortino aplicada al PSP con restricciones de costos de transacción y lotes mínimos, dos restricciones realistas poco consideradas en la investigación relacionada con el PSP a pesar de ser necesarias en la mayoría de los mercados bursátiles del mundo. El índice de Sortino es una versión modificada del índice de Sharpe que hace uso de la semivarianza para medir la dispersión del retorno en lugar de la varianza. La semivarianza, como se expuso en el Capítulo 2, es una medida de riesgo a la baja que resulta mucho más apropiada para el mundo financiero, donde la distribución del retorno esperado es asimétrica generalmente. El índice de Sortino al igual que el índice de Sharpe incluyen un parámetro para el porcentaje libre de riesgo de los activo. Tanto el índice de Sharpe como el de Sortino son utilizados por profesionales e investigadores del área financiera en todo el mundo para evaluar el desempeño de los portafolio de inversión. El índice de Sortino es una medida adecuada para conocer el riesgo de un portafolio de inversión de manera realista.

## 4.2. Índice de Sharpe

El índice (o proporción) de Sharpe (SP) mide el exceso de ganancia por unidad de riesgo que brinda un portafolio [49], comúnmente es utilizado para evaluar su desempeño. El índice de Sharpe combina la información de la media y la varianza de los activos de inversión de un portafolio en un modelo que es bastante simple y que forma parte de las medidas de *riesgo ajustado* [48].

De acuerdo con el modelo de Sharpe, el portafolio eficiente es el punto en el frente de Pareto que maximiza el índice ( $S_r$ ) de la siguiente manera

$$S_r = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p} \quad (4.1)$$

donde  $R_p$  y  $\sigma_p$  son, respectivamente, el retorno esperado (media) y el riesgo del portafolio  $P$  (expresado como la desviación estándar). El índice de Sharpe está parametrizado por un valor  $R_f$  que indica el retorno esperado libre de riesgo observado (o deseado) en un portafolio. En México el valor para el parámetro  $R_f$  se puede obtener de la Tasa de

Interés Interbancaria de Equilibrio (TIIE) que publica el Banco de México (BanXICO) [12].

La TIIE es una tasa representativa de las operaciones de crédito entre bancos. Es calculada diariamente (para plazos de 28 y 91 días) por el Banco de México con base en cotizaciones presentadas por las instituciones bancarias mediante un mecanismo diseñado para reflejar las condiciones del mercado de dinero en moneda nacional. La TIIE se utiliza como referencia para diversos instrumentos y productos financieros, tales como tarjetas de crédito.

Al restar el porcentaje libre de riesgo  $R_f$  (también conocido como *riesgo premium*) del retorno promedio, es posible aislar el desempeño del portafolio asociado al riesgo que se está dispuesto a aceptar [25]. Del cálculo del índice de Sharpe se puede intuir que una inversión de “riesgo cero”, como puede ser un portafolio conformado únicamente por bonos de deuda gubernamental (de los cuales se espera que su retorno esperado sea precisamente el porcentaje libre de riesgo), tendrá un índice de Sharpe de cero exactamente. En general, mientras más grande es el valor del índice de Sharpe, más atractivo se vuelve el portafolio.

El índice de Sharpe es una de las medidas de riesgo más utilizadas por profesionales e investigadores en el área financiera, sin embargo, su uso presenta dos limitaciones importantes que vale la pena considerar [7]. Por un lado, debido a que emplea como medida de riesgo la varianza, su uso no es apropiado cuando el retorno no se distribuye de manera normal, al analizar la distribución del retorno de los activos de inversión se observa que generalmente se distribuyen de manera asimétrica). Además, tanto el retorno esperado como la desviación estándar son medidas con un error asociado, por lo que el índice está por sí mismo asociado a un error.

### 4.3. Índice de Sortino

Cuando la distribución de probabilidad de los activos es asimétrica la varianza se vuelve poco apropiada para medir el riesgo, debido a que los portafolios obtenidos pueden tener un potencial de mayor retorno que se está sacrificando considerándose como riesgo. En estos casos conviene utilizar únicamente la parte negativa de la desviación en referencia a un nivel de retorno, la ventaja de usar la semivarianza en lugar de la varianza es que no se consideran los valores más allá de un valor crítico (ganancia) como riesgo. La semivarianza es una medida de riesgo apropiada cuando los inversionistas están preocupados por el subdesempeño del portafolio.

La semivarianza esta definida como el valor esperado del cuadrado de la desviación negativa de los posibles resultados del retorno esperado:

$$s(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \left\{ \left[ \sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i) x_i \right]^- \right\}^2 \quad (4.2)$$

donde

$$\left[ \sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i) x_i \right]^- = \begin{cases} \sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i) x_i, & \text{si } \sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i) x_i < 0 \\ 0, & \text{si } \sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i) x_i \geq 0 \end{cases} \quad t = 1, 2, \dots, T. \quad (4.3)$$

El índice de Sortino se puede expresar de la siguiente manera:

$$Sortino_r = \frac{\sum_{i=1}^n r_i x_i - R_f}{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \left\{ \left[ \sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i) x_i \right]^- \right\}^2} \quad (4.4)$$

sin embargo, la formulación del problema anterior se puede transformar en un problema de programación no lineal al igual que en el Problema (2.15). De esta manera, el modelo de optimización del portafolio que maximiza el índice de Sortino es el siguiente:

$$\text{maximizar } \frac{\sum_{i=1}^n r_i x_i - R_f}{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T p_t^2} \quad (4.5)$$

$$\text{sujeto a } p_t \geq - \sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i) x_i, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (4.6)$$

$$p_t \geq 0, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (4.7)$$

Si para algún valor  $t$  en la restricción 4.6 resulta que  $\sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i) x_i \geq 0$  (esto es, el riesgo está por debajo de la ganancia), la restricción 4.6 y 4.7 dejan que la variable  $p_t$  tome cualquier valor no negativo. Como se esta minimizando la suma de  $p_t^2$  (que aparece

en la función objetivo con coeficiente uno positivo), en cualquier solución óptima tomará el valor de 0. Si por el contrario  $\sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i)x_i < 0$  (esto es, el riesgo está por encima de la ganancia), en cualquier solución óptima  $p_t$  será igual al valor que se obtiene de la restricción 4.6. El índice de Sortino se maximiza mientras más pequeño sea el valor de la semivarianza y mayor sea el valor del retorno

### 4.3.1. Restricción de lotes mínimos

En la restricción de lotes mínimos los activos son negociados como un múltiplo del lote de transacción mínimo. Se incluyen en el modelo de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n u_i c_i &\leq b \\ x_i &= \frac{u_i c_i}{\sum_{i=1}^n u_i c_i} \\ u_i &\in \mathbb{Z} \end{aligned} \tag{4.8}$$

donde  $u_i$  es el número de unidades invertidas en el activo  $i$ ,  $c_i$  es el precio de compra del lote mínimo para el activo  $i$ , y  $b$  es el presupuesto disponible. La cantidad mínima de unidades para cada activo es igual a  $c_i = N_i p_i$ , donde  $p_i$  es el precio en el mercado para el activo  $i$  a la fecha de compra del portafolio y  $N_i$  es la cantidad mínima requerida de unidades del activo  $i$ . Si sucede que  $N_i = 1$ , entonces  $c_i = p_i$ .

### 4.3.2. Restricción de costos de transacción

Los costos de transacción están divididos en costos fijos ( $f_i$ ) y costos proporcionales ( $d_i u_i$ ). El costo fijo se refiere a la cantidad pagada a un corredor de bolsa para invertir el dinero en la bolsa de valores, incluye el costo del corredor, impuestos, costo de procesamiento de la información, etc.

El costo proporcional se incluye aumentando un porcentaje en el costo del activo. Cada activo  $i$  está sujeto a un costo proporcional dependiendo de los efectos de la demanda que tenga en los mercados, si la cantidad que se desea comprar del activo  $u_i$  es grande y la demanda es alta, el costo proporcional se incrementa. Está definido de la siguiente manera:

$$d_i^h = \begin{cases} d_i^1 & 0 < x_i \times c_i \leq k_1 \\ d_i^2 & k_1 < x_i \times c_i \leq k_2 \\ \vdots & \vdots \\ d_i^m & k_{m-1} < x_i \times c_i \leq k_m \end{cases}, \text{ donde } k_j \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, m. \quad (4.9)$$

El costo de transacción asociado a un activo se define como  $C_i(u_i)$ , por lo tanto, el costo total del portafolio está definido como la suma del costo fijo y del costo proporcional y se obtiene con  $\sum_{i=1}^n C_i(u_i)$ . El costo fijo del portafolio se representa por  $\sum_{i=1}^n f_i z_i$  donde

$$z_i = \begin{cases} 1, & \text{si } x_i > 0 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad \text{y el costo proporcional del portafolio es } \sum_{i=1}^n d_i^h u_i c_i.$$

### 4.3.3. Problema formulado con índice de Sortino y restricciones

Finalmente, incluyendo las restricciones de lotes mínimos y costos de transacción, la formulación del problema que busca maximizar el índice de Sortino se expresa de la siguiente manera:

$$\text{maximizar } \frac{\left[ \sum_{i=1}^n r_i x_i (1 - \delta_p) \right] - R_f}{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T p_t^2} \quad (4.10)$$

$$\text{sujeto a } p_t \geq - \sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i) x_i, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (4.11)$$

$$p_t \geq 0, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (4.12)$$

$$\sum_{i=1}^n u_i c_i \leq b, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.13)$$

$$x_i = \frac{u_i c_i}{\sum_{i=1}^n u_i c_i} \quad (4.14)$$

$$u_i \in \mathbb{Z} \quad (4.15)$$

donde  $\delta_p = \left( \sum_{i=1}^n C_i(u_i) \right) / b$  denota la proporción del retorno perdida por la restricción de costos de transacción. Las restricciones 4.11 y 4.12 son producto de la transformación no lineal de la ecuación 4.3 que integra la semivarianza al modelo. Las restricciones 4.13, 4.14 y 4.15 aseguran que se cumpla con la restricción de lotes mínimos.

#### 4.4. Frontera eficiente

Como se ha mencionado, el modelo clásico de media-varianza de Markowitz [35] busca de manera simultánea la minimización del riesgo y la maximización del retorno esperado considerando como restricción que la suma de todos los activos debe ser igual a uno. Una de las formulaciones más utilizadas que emplean la formulación clásica de media-varianza es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && \lambda \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sigma_{ij} \right] - (1 - \lambda) \left[ \sum_{i=1}^N x_i r_i \right] \\
 &\text{sujeto a} && \sum_{i=1}^N x_i = 1, \\
 &&& 0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Este modelo integra en un solo objetivo el riesgo y el retorno a través de un factor de aversión al riesgo  $\lambda \in [0, 1]$ . Es posible encontrar diferentes valores para la función objetivo variando el valor de  $\lambda$ , de esta manera se puede describir el modelo de media-varianza a través de una sola función objetivo, para obtener una visión completa del frente de Pareto es necesario realizar múltiples ejecuciones del algoritmo, una para cada valor de  $\lambda$ .

Cuando  $\lambda$  es cero, el modelo busca maximizar el retorno esperado del portafolio sin considerar la varianza (riesgo). En cambio, cuando  $\lambda$  es igual a uno, el modelo busca minimizar el riesgo del portafolio sin tomar en cuenta el retorno esperado. La sensibilidad del inversionista al riesgo se incrementa al incrementarse  $\lambda$ . Para diferentes valores de  $\lambda$  se obtienen diferentes valores de la función objetivo enfocando la búsqueda en diferentes regiones del frente de Pareto, si se traza la intersección entre el valor del retorno esperado y la varianza para los diferentes valores de  $\lambda$  se obtiene una curva continua llamada frontera eficiente (EF), cada punto encontrado sobre la frontera eficiente indica un valor óptimo.

En este proyecto decidimos emplear la formulación de frontera eficiente (EF) como función objetivo del algoritmo propuesto. La principal justificación para esta decisión es la posibilidad de comparar los resultados obtenidos por nuestra técnica de optimización contra otras técnicas importantes y recientes (entre las cuáles se incluyen a las que inspiraron el algoritmo aquí propuesto). Para establecer una comparación justa con otros trabajos, los autores en [9] han provisto la frontera eficiente real (resuelta mediante QP) para cada uno de los conjunto de datos provisto, además de un método de evaluación que se expone en el Capítulo 5. Finalmente, este tipo de formulación no requiere de

conocer las series de tiempo<sup>1</sup> de todos los activos incluidos en el PSP, únicamente se necesita la matriz de covarianza y el precio de cierre de cada uno de los activos.

Las dos restricciones realistas que más frecuentemente se utilizan junto con la formulación de frontera eficientes para el PSP son las siguientes:

- i) *Piso-techo*: Imponen los límites inferiores y/o superiores  $(\epsilon, \delta)$  para el peso de los activos, en lugar de utilizar cero como mínimo y uno como máximo. Por lo tanto, un activo no puede representar menos o más de cierta proporción del total del capital a invertir.
- ii) *Cardinalidad*: Obligan a que el número de activos seleccionados en el portafolio tenga cierto valor. Existen dos versiones de esta restricción. La primera versión (exacta) impone que el número de activos seleccionados sea igual a un valor  $K$ . La segunda versión (suave) imponen los límites inferior y superior  $(Z_L, Z_U)$  para este valor. Esta restricción vuelve el espacio de búsqueda no convexo y/o discontinuo, por lo que habrá regiones del frente de Pareto que pueden no existir.

La formulación del problema de la selección de portafolios con restricción de cardinalidad (CCPS) y piso-techo es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} \quad \lambda \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sigma_{ij} \right] - (1 - \lambda) \left[ \sum_{i=1}^N x_i r_i \right] \\
 &\text{sujeto a} \quad \sum_{i=1}^N x_i = 1, \\
 &\quad \quad \quad \sum_{i=1}^N z_i = K, \\
 &\quad \quad \quad \epsilon z_i \leq x_i \leq \delta z_i, \quad i = 1, \dots, N, \\
 &\quad \quad \quad z_i \in [0, 1], \quad i = 1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

la variable  $z_i$  es de tipo binario y permite saber si el activo  $i$  está presente en la solución. El problema que resuelve nuestro algoritmo de optimización es el que se encuentra formulado en (4.17).

---

<sup>1</sup>El índice de Sortino que hace uso de la semivarianza necesita las series de tiempo de los activos para poder ser calculado. Además, para la restricción de lotes mínimos es necesario contar con el precio de cierre de los activos, es decir, el último valor de la serie de tiempo.

## 4.5. Algoritmo híbrido BFO-PBIL

Las bacterias son organismos simples que han sido muy exitosos para sobrevivir desde su aparición en el planeta hace millones de años. Dentro de todas las actividades que llevan a cabo la alimentación es una de las más importantes y como la mayoría de los organismos vivos han generado una alta especialización en esta actividad primordial. El algoritmo imita el comportamiento de una población de bacterias que busca alejarse de las regiones peligrosas y permanecer en las lugares donde la cantidad de alimento es mayor. Para las bacterias esta actividad constituye un proceso de búsqueda muy eficiente en el que no existe ningún tipo de comunicación (algo inusual dentro de la SI). A continuación se describe en qué consiste el algoritmo de optimización por forrajeo de bacterias y cómo se integra la técnica de aprendizaje incremental, además de las mejoras propuestas para mejorar el desempeño del algoritmo.

### 4.5.1. BFO

El algoritmo original de optimización por forrajeo de bacterias (BFO) fue propuesto por Kevin M. Passino [40] en 2002 y es uno de los métodos más recientes dentro del área de inteligencia de enjambre (SI) para la optimización de problemas continuos. El algoritmo imita el comportamiento de forrajeo que llevan a cabo las bacterias de *Escherichia coli* (*E. coli*) presentes en el intestino humano. Las bacterias artificiales realizan tres actividades de forrajeo básicas: quimiotaxis, reproducción y eliminación-dispersión. En un movimiento quimiotáctico, el enjambre de bacterias trata de moverse y permanecer en los entornos ricos en nutrientes, abandonar las regiones pobres en nutrientes rápidamente y permanecer alejadas de los lugares peligrosos.

Una bacteria lleva a cabo un movimiento quimiotáctico en dos pasos: *nado* y *desplome*. Las bacterias pueden hacer varios nados en una misma dirección si la concentración de nutrientes se incrementa a su alrededor. Una vez que la bacteria detecta que los nutrientes a su alrededor disminuyen, ejecuta un paso de desplome para cambiar rápidamente la dirección de la búsqueda. Los pasos de nado y desplome se ejecutan de manera alternada, a través del nado las bacterias permanecen por mayor tiempo en las regiones ricas en nutrientes y mediante el desplome son capaces de salir rápidamente de las regiones poco atractivas. La quimiotaxis puede ser vista como una estrategia bacteriana de optimización local cuyo comportamiento móvil se describe mediante la siguiente fórmula:

$$\Theta^i(j+1, k, l) = \Theta^i(j, k, l) + C(i) \times \Phi(j) \quad (4.18)$$

donde  $\Theta^i(j, k, l)$  denota la posición de la bacteria  $i$  en el paso quimiotáctico  $j$ , el paso reproductivo  $k$  y el paso de eliminación-dispersión  $l$ .  $C(i)$  es una constante para el tamaño del paso quimiotáctico de la bacteria  $i$ , el vector  $\Phi(j)$  se utiliza para definir la dirección del movimiento aleatorio de un movimiento de desplome en el paso quimiotáctico  $j$ .

Para producir nuevas soluciones, las bacterias realizan una serie de movimientos quimiotácticos en los cuales se incrementan y decrementan los pesos de los activos presentes en el portafolio (a través de nado y desplome). Cada nueva solución es evaluada por el algoritmo, si la solución nueva es mejor que la solución actual, esta última es reemplazada en la población de bacterias. La ecuación quimiotáctica está definida como sigue

$$nxx_b = xx_b^t + C(j) \times \Delta D_b(j), \forall j \quad (4.19)$$

donde  $nxx_b$  son los nuevos valores obtenidos para la bacteria  $b$ ,  $t$  es el número de la iteración del paso quimiotáctico,  $C(j)$  es una constante que representa el tamaño del movimiento quimiotáctico (controla la distancia del movimiento), y  $\Delta D_b(j)$  es un número aleatorio en el intervalo  $[-1, 1]$  que denota que la magnitud del cambio de dirección en un paso de desplome. Tanto el nado como el desplome utilizan constantes para indicar el tamaño del paso,  $C_d(j)$  indica el valor de  $C(j)$  para el desplome y  $C_n(j)$  el valor de  $C(j)$  para el nado. Un paso quimiotáctico incluye un desplome y un cierto número de nados, el algoritmo incluye un mecanismo de autorevisión que implementa cada bacteria para controlar la ocurrencia de estos pasos.

Después de ejecutar una serie de movimientos quimiotácticos las bacterias intentarán reproducirse para mejorar las probabilidades de supervivencia. Cada una de las bacterias más fuertes se reproduce dividiéndose asexualmente en dos, las bacteria recién creada se ubicarán en una región cerca a la bacteria padre. Al mismo tiempo, las bacterias más débiles mueren dejando el número de bacterias en la población constante en todo momento (este proceso es similar a la selección en los GA).

Finalmente, debido a cambios repentinos o graduales en el entorno local, el evento de eliminación puede suceder de tal manera que una parte de la población de bacterias sea eliminado o forzado a moverse a otro lugar. Si una bacteria es eliminada, una nueva será generada y colocada de manera aleatoria en el espacio de búsqueda (esta operación es similar a la mutación en los GA). El proceso de dispersión se encarga de cambiar de lugar las bacterias existentes a una mejor región. Aunque la probabilidad de que ocurran los eventos de eliminación-dispersión es baja, después de un periodo largo de tiempo,

este proceso se lleva a cabo e incrementa la diversidad de las soluciones mejorando la búsqueda local al evitar que el algoritmo quede atrapado en mínimos locales.

#### 4.5.2. PBIL

El aprendizaje incremental basado poblaciones (PBIL), está inspirado en la idea de evolucionar a los individuos de una población con la información estadística recolectada durante el proceso evolutivo [34]. PBIL busca crear un vector de probabilidad a partir del cuál se pueda establecer la siguiente generación de individuos, para lograrlo, se asume que no hay dependencia entre las variables (esto es, la selección de los activos en el portafolio son eventos independientes), y obtiene como resultado un vector de probabilidad que sirve para representar la distribución de todos los individuos en la población. El vector de probabilidad adquiere aprendizaje hacia el vector que representa la mejor solución, es decir, un prototipo con un valor alto para la función objetivo en el espacio de búsqueda explorado.

La manera fundamental de cómo opera el algoritmo PBIL deriva de la observación simplificada de los algoritmos genéticos [4]. Una de las características clave en los algoritmos de optimización genéticos es el *paralelismo* en la búsqueda; muchos puntos diversos están representados en la población en una sola generación. Para representar la población de un GA en términos del vector de probabilidad, la mayor diversidad se obtiene estableciendo la probabilidad para cada posición en 0.5. De esta manera se especifica que generar un 0 ó un 1 en un bit es completamente aleatorio.

El algoritmo PBIL emplea la representación del vector de probabilidad para definir a la población, en lugar de transformar cada población en un vector de probabilidad y después generar los vectores de solución y recombinarlos, etc. PBIL tiene por objetivo crear un vector de probabilidad de manera activa, el cuál, pueda representar con una gran probabilidad a una población con alto valor de evaluación de los vectores solución, los cuáles irán adquiriendo aprendizaje durante el proceso evolutivo. Aunque las operaciones inherentes a los GA no están definidas en PBIL, es posible llevarla a cabo directamente sobre el vector de probabilidad.

#### 4.5.3. Mejoras al algoritmo BFO

Existen estudios recientes que buscan mejorar algunas características del algoritmo de BFO, con respecto a nuestra técnica de optimización vale la pena discutir brevemente el aporte de estos trabajos. En [54] los autores agregaron un mecanismo de comunicación que emplea la fórmula de actualización de movimiento del algoritmo PSO (*Gbest*). Los

autores buscaron agregar un componen de comunicación con el cuál las bacterias son guiadas hacia la mejor solución en cada iteración. Esta mejora está basada en el hecho de que las técnicas de optimización (como la evolución diferencial y PSO) que hacen uso de la comunicación para aprender de las demás partículas a su alrededor han sido capaces de generar soluciones de muy buena calidad. Además, se ha visto la comunicación entre los individuos mejora significativamente en el desempeño del algoritmos [38], disminuyendo el número menor de ejecuciones para lograr la convergencia en las soluciones óptimas.

Otra propuesta importante aparece en [36], donde los autores utilizaron una función decreciente linealmente para definir el tamaño de los pasos quimiotácticos hasta llegar a un valor fijo. De esta manera, en los primero ciclos quimiotácticos, las bacterias hacen cambios grandes y progresivamente se vuelven más pequeños mientras se llega a las últimas iteración del proceso de optimización por quimiotaxis. Esta mejora también tiene su justificación en el algoritmo de PSO y los coeficientes de aceleración utilizados para actualizar la posición de una partícula. Al igual que PSO, en la técnica propuesta en [36] los valores disminuyen gradualmente de forma lineal, de hecho, la fórmula propuesta por los autores para calcular el tamaño de los pasos quimitácticos es básicamente la misma que se emplea en PSO.

Las dos técnicas anteriores ofrecen al algoritmo BFO original una mejoría notable en los resultados reportados por los autores. Respecto a la primera ([54]), en nuestro algoritmo BFO-PBIL la técnica de PBIL permite hacer uso de la información de las mejores soluciones de una manera muy eficiente sin necesidad de introducir cálculos adicionales para cada una de las bacterias. Es decir, después de un proceso quimiotáctico se identifica a la mejor y peor solución en la población, con esta información se actualiza el vector de probabilidad y se completa la población de bacterias para el siguiente ciclo de optimización por quimiotaxis.

Respecto a la segunda técnica ([36]), en el algoritmo original de BFO el tamaño de los movimiento quimiotácticos de nado y desplome es constante todo el tiempo en todas las iteraciones, sin embargo, se ha visto que si el tamaño de las constantes es demasiado grande las bacterias pueden fallar en encontrar al óptimo global realizando numerosos nados. Por otro lado, si el tamaño de un desplome es muy pequeño es posible que a las bacterias les tome mucho tiempo encontrar el óptimo global. En nuestro algoritmo BFO-PBIL utilizamos este enfoque e implementamos un valor decreciente linealmente para el tamaño de la constante de desplome ( $C_d(j)$ ) de la misma manera que lo hicieron en [36]. El objetivo es que conforme las bacterias se acerquen al óptimo global hagan movimientos cada vez más pequeños que mejoren la posición, en lugar de movimientos grandes que las puedan alejar del óptimo.

#### 4.5.4. Algoritmo BFO-PBIL

El algoritmo de optimización híbrido propuesto BFO-PBIL está inspirado principalmente en tres trabajos importantes y recientes [28], [34] [46].

Definiciones para el algoritmo BFO-PBIL:

$\lambda$  = Factor de aversión al riesgo

$C_{d_{max}}$  = Valor máximo para el tamaño del desplome

$C_{d_{min}}$  = Valor mínimo para el tamaño del desplome

$N_B$  = Número de bacterias en la población

$N$  = Número de activos disponible

$v$  = Vector de probabilidad (PBIL)

$ED_{max}$  = Número de movimientos de eliminación-dispersión

$R_{max}$  = Número de movimientos reproductivos

$Q_{max}$  = Número de movimientos quimiotácticos

$G_{best}$  = La bacteria con mejor valor de aptitud

$G_{worst}$  = La bacteria con el peor valor de aptitud

$Prob_{ED}$  = Probabilidad de eliminación-dispersión de un activo

$PR$  = Probabilidad de seleccionar un activo de la bacteria padre o uno del vector de probabilidad

$Capital$  = Capital disponible para invertir

$\epsilon$  = Límite inferior (restricción de piso-techo)

$\delta$  = Límite superior (restricción piso-techo)

$K$  = Número de activos en el portafolio (restricción cardinalidad)

$LR$  = Porcentaje de aprendizaje positivo

$NEG\_LR$  = Porcentaje de aprendiza negativo

Utilizamos el enfoque propuesto inicialmente por [9] que divide  $\lambda$  en 50 partes iguales. El valor del factor de aversión al riesgo  $\lambda$  en la iteración del algoritmo  $j$  se calcula con:

$$\lambda_j = (j - 1)/49 \quad j = 1, \dots, 50 \quad (4.20)$$

**Algoritmo 1** BFO-PBIL

---

```

1: Inicializa vector de probabilidad incremental en 0.5
2: Inicializa población aleatoria inicial
3: para  $N_{ed} \leftarrow 1$  to  $ED_{max}$  hacer
4:     para  $N_{rep} \leftarrow 1$  to  $R_{max}$  hacer
5:         para  $N_{quim} \leftarrow 1$  to  $Q_{max}$  hacer
6:             para  $b \leftarrow N_B/2$  to  $N_B$  hacer
7:                 Realiza movimientos de desplome y nado {Ec: 4.19}
8:             fin para
9:         fin para
10:        Elimina la mitad de la población según  $f(b)$ ;
11:        Actualiza el vector  $v$  con  $G_{best}$  y  $G_{worst}$  {Ecs: 4.22 y 4.23}
12:        Genera nueva bacteria  $b$  {Alg: 2}
13:    fin para
14:    para  $b \leftarrow 1$  to  $N_B$  hacer
15:        si  $rand[0, 1] \leq Prob_{ED}$  entonces
16:            Elimina el Activo de la bacteria
17:            Selecciona un activo no incluido previamente
18:        fin si
19:    fin para
20: fin para

```

---

**4.5.4.1. Tamaño de desplome decreciente**

La función decreciente linealmente para el tamaño de la constante de desplome se determina con base en un valor inicial máximo ( $C_{d_{max}}$ ) y un valor final mínimo ( $C_{d_{min}}$ ), si  $Q_{max}$  es el número máximo de pasos quimiotácticos y  $Q_{act}$  el número de la iteración actual, para el paso quimiotáctico  $j$  el tamaño de la constante de desplome  $C_d(j)$  está dado por

$$C_d(j) = C_{d_{min}} + \frac{Q_{max} - Q_{act}}{Q_{max}} \times (C_{d_{max}} - C_{d_{min}}) \quad (4.21)$$

**4.5.4.2. Vector PBIL**

El algoritmo que proponemos utiliza el enfoque de [34] para actualizar el vector de probabilidad  $v$ . La actualización se realiza de acuerdo a un porcentaje de aprendizaje que puede ser positivo ( $LR$ ) o negativo ( $NEG\_LR$ ). El porcentaje utilizado no solo controla la velocidad a la que el vector cambia para parecerse a la mejor solución, sino también la cantidad del espacio de búsqueda que será explorado. El uso de aprendizaje positivo y negativo tiene como objetivo aumentar la probabilidad de incluir los activo que contribuye a generar una buena solución y alejarse de los que no lo hacen.

$$v_i = v_i \times (1 - LR) + s_i^{G_{best}} \times LR \quad (4.22)$$

donde  $s_i^{G_{best}}$  es una variable binaria que permite saber si el activo  $i$  está presente en la mejor solución  $G_{best}$ . Si además sucede que el activo  $i$  está presente en  $s_i^{G_{best}}$  y no lo está en la peor solución ( $s_i^{G_{worts}}$ ) entonces:

$$v_i = v_i \times (1 - NEG\_LR) + s_i^{G_{best}} \times NEG\_LR \quad (4.23)$$

En [34] los autores utilizaron el enfoque de mutación parcialmente guiada (PGM), en el cual en cada iteración del proceso evolutivo, cada dimensión del vector de probabilidad se muta con una cierta probabilidad  $MP$ . Si el activo  $i$  es seleccionado se da igual oportunidad de mutarlo según un porcentaje de mutación  $MR$  o con la mejor solución  $s_i^{G_{best}}$ .

En nuestro algoritmo BFO-PBIL no mutamos el vector de probabilidad PBIL que sirve como prototipo de la mejor solución. El vector se actualiza únicamente con los valores de la mejor y peor solución y se reinicializa a 0.5 para cada valor de  $\lambda$ . Al terminar un movimiento quimiotáctico, el vector  $v$  actualiza cada valor y se reproduce con todas la bacterias sobrevivientes para completar la población faltante. Durante la reproducción, la selección de los activos de las nuevas bacterias se lleva a cabo considerando a la bacteria padre y al vector de probabilidad de acuerdo a un porcentaje de reproducción  $PR$ . Según el porcentaje de reproducción  $PR$  se pondera entre los activos incluidos en la bacteria padre y los activos incluidos en el vector de probabilidad. Al seleccionar el activo  $i$  este se incluye en la nueva solución si se cumplen dos condiciones: 1) si se seleccionó de la bacteria padre debe tener un peso positivo, es decir, estar presente en dicha bacteria; y 2) si es seleccionado de  $v$  debe tener un valor mayor a 0.5. Si no se cumplen estas dos condiciones el activo no se incluye en la nueva bacteria y durante el proceso de reparación se agrega un activo de manera aleatoria. Este proceso aparece descrito en el Algoritmo 2.

Bajo este esquema reproductivo se introduce una mejora que guía a las bacterias hacia las mejores regiones del espacio de búsqueda manteniendo la diversidad en la población. Con el objetivo de obtener una adecuada relación entre la *exploración* y *explotación* del espacio de búsqueda se hicieron una serie de mejoras al algoritmo original de BFO-PBIL, las cuáles se presentan a continuación.

**Algoritmo 2** Reproducción con vector de probabilidad y pesos aleatorios

---

```

1: para  $i \leftarrow 1$  to  $N$  hacer
2:     si  $\text{rand}[0,1] < PR$  y  $v_i > 0.5$  entonces
3:          $b_i = \text{rand}[0,1] * \text{Capital}$ 
4:     sino
5:         si  $bp_i > 0$  entonces
6:              $b_i = \text{rand}[0,1] * \text{Capital}$ 
7:         fin si
8:     fin si
9:     Repara la bacteria  $b$  {Sección:4.5.5}
10: fin para

```

---

**4.5.4.3. Dos esquemas de asignación de pesos**

Después de un proceso quimiotáctico viene un proceso de reproducción. En el algoritmo original de BFO cada bacteria se dividen asexualmente haciendo una copia idéntica de si misma, nosotros utilizamos el esquema de reproducción con el vector de probabilidad  $v$  que está descrito en la sección anterior. Sin embargo, en este trabajo probamos dos formas diferentes de distribuir el capital entre los activos de la nueva solución: 1) *Peso aleatorio*: el capital es asignado de manera aleatoria entre todos los activos seleccionados; 2) *Peso de la bacteria padre*: se asigna el mismo peso que tiene el activo en la bacteria padre, si el activo no está presente en la bacteria padre el peso se asigna de manera aleatoria.

**4.5.4.4. Reinicialización aleatoria**

Otra mejora incluida en nuestro algoritmo es la reinicialización de las bacterias después de un proceso quimiotáctico si no modificaron su posición. Cada bacteria es evaluada después de un proceso quimiotáctico para saber si logró modificar su valor de aptitud de manera significativa (con un umbral de  $10^{-5}$ ). La idea es identificar a las bacterias que pueden estar atrapadas en un óptimo local. Si al llegar al número máximo de movimientos quimiotácticos antes de una nueva etapa reproductiva, la bacteria no cambió de posición, esta se reinicializa a una posición nueva aleatoria.

**4.5.5. Manejo de restricciones**

Para cumplir con las restricciones de presupuesto, cardinalidad y piso-techo implementamos una proceso de reparación que evalúa y corrige cada bacteria. Primero, se revisa que la cardinalidad de la solución sea igual a  $K$  según se expresa en el Algoritmo (3).

**Algoritmo 3** Restricción de cardinalidad

---

```

1: para  $b \leftarrow 1$  to  $N_B$  hacer
2:   Ordena  $b$  según  $f(b)$ 
3:   si  $|b| > K$  entonces
4:     repetir
5:       Elimina el activo de menor peso
6:     hasta  $|b| = K$ 
7:   fin si
8:   si  $|b| < K$  entonces
9:     repetir
10:      Agrega un activo aleatoriamente
11:    hasta  $|b| = K$ 
12:   fin si
13: fin para

```

---

Posteriormente, una función disminuye hasta  $\delta$  el peso de los activo que exceden el límite superior y aumenta hasta  $\epsilon$  los que se encuentran por debajo de este valor.

$$x_i = \begin{cases} \delta, & \text{si } x_i > \delta \\ \epsilon, & \text{si } x_i < \epsilon \end{cases} \quad (4.24)$$

Finalmente, una función de normalización de pesos es utilizada para cumplir con la restricción de capital. Esta función hace uso de un acumulador de capital excedente o sobrante en caso de que no sea posible decrementar o incrementar el peso de un activo sin violar la restricción de piso-techo. Después de la normalización se asigna el capital sobrante o faltante a los activos que pueden absorberlo. En la ecuación (4.25) el parámetro *Capital* representa el capital disponible por el inversionista,  $nx_i$  es el nuevo peso asignado al activo.

$$nx_i = \begin{cases} \text{Capital} \times \left( \frac{x_i}{\sum_i^N x_i} \right), & \text{si } \epsilon \leq nx_i \leq \delta \\ x_i, & \text{si } nx_i < \epsilon \text{ ó } nx_i > \delta \end{cases} \quad (4.25)$$

## 4.6. Resumen

Al inicio del capítulo se presentan dos formulaciones distintas para el problema de la selección de portafolios. Por un lado, el índice de Sortino que emplea la semivarianza como medida de riesgo y las restricciones de costos de transacción y lotes mínimos. Esta formulación es más adecuada para conocer el riesgo de un portafolio de manera realista, lo que representa una ventaja sobre la formulación clásica de Markowitz. El

índice de Sortino se puede ver como una variante del índice de Sharpe, ambos incluyen un parámetro para el porcentaje libre de riesgo de los activos y los dos son utilizados por profesionales e investigadores del área financiera en todo el mundo para evaluar el desempeño de los portafolio de inversión. Por otro lado, la formulación de frontera eficiente utiliza el modelo clásico de media-varianza con las restricciones de cardinalidad y piso-techo. La formulación de frontera eficiente incluye un factor de aversión al riesgo que permite hacer diferentes ponderaciones entre el riesgo y el retorno de los portafolios. Esta formulación ha sido muy utilizada en los trabajos que proponen algoritmo de optimización y nos ha permitido establecer una comparativa del desempeño de BFO-PBIL con los resultados obtenidos por otras técnicas.

En este capítulo se presenta el algoritmo propuesto BFO-PBIL que es una versión híbrida de la optimización por forrajeo de bacterias y la técnica de aprendizaje incremental basado en poblaciones. En el algoritmo BFO las bacterias artificiales realizan tres actividades de forrajeo básicas: quimiotaxis, reproducción y eliminación-dispersión. En un movimiento quimiotáctico, la población de bacterias trata de moverse y permanecer en los entornos ricos en nutrientes, abandonar las regiones pobres en nutrientes rápidamente y permanecer alejadas de los lugares peligrosos. Por otro lado, PBIL es una técnica que deriva de la observación simplificada de los algoritmos evolutivos. PBIL utiliza un vector de probabilidad para definir a una población de individuos, conforme la población evoluciona el algoritmo evalúa las soluciones y adquiere conocimiento hacia las mejores soluciones, de esta manera, el vector final resultante es la mejor solución al problema. La manera como se ha implementado el algoritmo BFO junto con la técnica PBIL para resolver la formulación de frontera eficiente con restricciones se describe ampliamente la Sección 4.5.4. En este capítulo se presentan también las mejoras propuestas al algoritmo BFO: tamaño decreciente del paso quimiotáctico y la reinicialización aleatoria. Para finalizar el capítulo se describen dos esquemas reproductivos para las bacterias (uno de pesos aleatorios y otro que copia el peso asignado en la bacteria padre) y el mecanismo de reparación que permite manejar las restricciones incluidas en el modelo de frontera eficiente.

## Capítulo 5

# Experimentación y resultados

### 5.1. Conjunto de datos

Para probar el desempeño del algoritmo utilizamos un conjunto de datos estándar propuesto por [5] y empleados por Chang. et al. en [9], este conjunto de datos ha sido ampliamente utilizado y es reconocido como un marco de comparación para la evaluación de algoritmos de optimización. Los archivos están disponibles en [27] y cada uno está conformado por el número de activos, el retorno promedio y la varianza de cada activo, y el coeficiente de correlación para cada pareja de activos  $i, j$ . Los activos incluidos en los archivos corresponde a los precios de cierre de cinco índices bursátiles: Hang Seng en Hong Kong (31 activos), DAX 100 en Alemania (85 activos), FTSE 100 en Reino Unido (89 activos), S&P 100 en EE.UU. (98 activos) y Nikkei 225 en Japón (225 activos). Finalmente, para cada archivo de datos los autores proveen la frontera eficiente real conformada por dos mil puntos en todos los casos.

### 5.2. Configuración del algoritmo

Los parámetros de configuración del algoritmo se establecieron de la siguiente manera. Para el factor de aversión al riesgo se utilizó un  $Max_{\lambda} = 50$ , los valores máximos y mínimos para el número de movimientos quimiotácticos se fijaron en  $C_{d_{max}} = 0.05$  y  $C_{d_{min}} = 0.001$ , el tamaño de la población  $N_B = 40$ . El número de movimientos de eliminación dispersión fue de  $MAX_{Elim-Disp} = 25$ , el de movimientos reproductivos de  $MAX_{Reprod} = 20$ , y una probabilidad de eliminación dispersión de  $Prob_{ED} = 0.25$ . El número de movimientos quimitácticos se fijo en  $MAX_{Quim} = 30$ , con un número de nados de  $Max_{nados} = 2$  después de cada desplome. Se utilizó un  $Capital = 100,000$ , con un límite inferior  $\epsilon = 0.01$  y superior  $\delta = 1$  para la restricción de piso-techo en cada

activo, para la restricción de cardinalidad el valor de  $K = 10$  según el enfoque utilizado por [9]. Para la técnica de PBIL el porcentaje de aprendizaje positivo fue de  $LR = 0.1$  y de  $NEG.LR = 0.075$  para el aprendizaje negativo. La probabilidad de seleccionar un activo de la bacteria padre durante la reproducción el vector  $v$  de PBIL fue de  $PR = 0.1$ . La configuración del algoritmo fue la misma para cada uno de los conjuntos de datos. El algoritmo BFO-PBIL evalúa para cada valor de  $\lambda$  entre 600,000 y 1,200,000 veces la función objetivo sin considerar el tamaño del conjunto de datos. En el caso del algoritmo BFO original el número de evaluaciones está en función del conjunto de datos. En la Tabla 5.1 aparecen resumidos estos datos para las dos técnicas, para las técnicas en [9] y [34] los autores no presentaron esta información.

TABLA 5.1: Portafolios evaluados en BFO-PBIL y BFO original

$N$		BFO-PBIL	BFO
31	Mín	600,000	31,000
	Max	1,200,000	62,000
85	Mín	600,000	85,000
	Max	1,200,000	170,000
89	Mín	600,000	89,000
	Max	1,200,000	178,000
98	Mín	600,000	98,000
	Max	1,200,000	196,000
225	Mín	600,000	225,000
	Max	1,200,000	450,000

### 5.3. Método de evaluación de desempeño

El método de evaluación empleado en este trabajo fue propuesto por Chang et al. [9] para comparar dos fronteras de óptimos. La calidad de las soluciones se evalúa midiendo la desviación que existe entre la frontera de óptimos encontrada por el algoritmo de optimización y la frontera eficiente real. Una de las ventajas de utilizar el conjuntos de datos estándar es la posibilidad de comparar la técnica propuesta con otras que hacen uso de los mismos datos y medidas de desempeño. En este trabajo comparamos nuestra técnica contra [9], [34] y [28]. Al igual que se propone en [9], evaluamos cuatro medidas de desempeño: *tiempo* de ejecución en segundos, *número de puntos* no dominados, *porcentaje de desviación* de cada punto no dominado con la frontera eficiente real, se presenta la *media* y la *mediana* del porcentaje de desviación de todos los puntos no dominados.

Durante la ejecución del algoritmo se utilizan dos archivos para almacenar los mejores portafolios en términos del riesgo y retorno que ofrece cada uno. El primero de ellos

( $V$ ) guarda la mejor solución encontrada por el algoritmo para cada valor de  $\lambda$ . El segundo archivo ( $H$ ) contiene todas las soluciones que han sido mejoradas durante toda la ejecución del algoritmo sin importar el valor de  $\lambda$ , es decir, almacena cada vez que mejora la posición de las bacterias durante todo el proceso de optimización. Al terminar la ejecución del algoritmo un conjunto muy grande de portafolios está incluido en  $H$ , para eliminar las soluciones dominadas de manera eficiente es necesario ordenar las parejas de riesgo-retorno respecto a alguno de los dos valores. Con los datos ordenados se revisa si para cada uno de los portafolios contenidos existe en  $H$  algún otro que brinde menor riesgo y mayor retorno. Es otras palabras, se buscan y eliminan todos los portafolios que son dominados, al final, el archivo  $H$  contiene únicamente el conjunto de portafolios óptimos encontrados por el algoritmo, estos portafolios conforman la frontera eficiente encontrada por el algoritmo.

Los archivos  $V$  y  $H$  se evalúan con el porcentaje de desviación de cada punto encontrado no dominado con la frontera eficiente real. Los autores en [9] considera dos aspectos importantes de esta medida: 1) cómo calcular la distancia de un portafolio respecto a la frontera eficiente; 2) cómo cuantificar el porcentaje de desviación en el caso de una frontera eficiente linealmente interpolada (esto es, cuando se utilizó QP para obtenerla). Los autores sugieren calcular la distancia vertical y horizontalmente de cada punto respecto a la frontera eficiente y tomar la distancia mínima. Por otro lado, para cuantificar el porcentaje de desviación se obtiene la media del porcentaje de desviación (MPD) y la mediana del porcentaje de desviación (MedPD). De acuerdo con los autores en [9], es insuficiente considerar únicamente el conjunto de punto en  $V$  para evaluar el desempeño del algoritmo para el PSP con restricciones, en las tablas de resultados se presentan uno o los dos archivos. Es importante mencionar que el tiempo de ejecución que aparece en las tablas se excluye el tiempo que toma eliminar de  $H$  las soluciones dominadas.

## 5.4. Resultados

El algoritmo se evaluó considerando el modelo sin restricciones y con restricciones, los cuáles aparecen expresados en el Problema 4.16 y el Problema 4.17 respectivamente, este último incluye las restricción de cardinalidad ( $K = 10$ ) y de piso-techo ( $\epsilon = 0.01$  y  $\delta = 1$ ). Ambos modelos fueron probados con y sin las mejoras propuestas para cada uno de los cinco conjuntos de datos.

El algoritmo BFO-PBIL se comparó con las técnicas de BFO original [28], PBILDE [34] y tres heurísticas propuestas en [9]. En [28] los autores emplearon medidas de desempeño diferentes a las empleadas en este trabajo, por lo que los resultados obtenidos en dicho trabajo (a diferencia de los otros dos) no pudieron ser utilizados directamente en las

tablas de resultados de este documento. La comparativa con la técnica de BFO y los resultados que aquí de la técnica BFO se obtuvieron mediante la codificación y ejecución del algoritmo tal como lo proponen los autores en [28]. Para comparar la técnica propuesta BFO-PBIL con el algoritmo BFO original de manera justa utilizamos durante las pruebas la misma configuración en las dos técnicas (según aparece en la Sección 5.2), la configuración propuesta en este trabajo brindó mejores resultados que la original de BFO. Para resaltar la importancia que tienen los parámetros de configuración del algoritmo BFO-PBIL se evaluó el desempeño utilizando las dos configuraciones. Evaluamos también los dos esquemas de *asignación pesos* que aquí se proponen: aleatoria y bacteria padre. En este trabajo se excluye la evaluación del uso de una función lineal decreciente para el número de pasos quimiotácticos, dicho análisis se puede encontrar en [36].

Como se menciona en la Sección 5.3 las medidas de desempeño que se emplearon para evaluar el algoritmo son las siguientes: el porcentaje de desviación promedio (MDP), la mediana del porcentaje de desviación (MedPD), el tiempo de ejecución del algoritmo en segundos (Tiempo) y el número de punto no dominados encontrados (Núm. puntos). Para esta última medida se excluye el tiempo que toma obtener el conjunto de puntos no dominados y el cálculo del porcentaje de desviación, es decir, se considera únicamente el tiempo de ejecución del algoritmo como aparece descrito en la Sección 4.5.4. Los resultados que aparecen en las tablas presentadas en esta sección son el promedio de cinco ejecuciones del algoritmo en todos los casos. Si se observa la Tabla 5.2 la primera columna ( $N$ ) indica el número de instancias de prueba, es decir, el tamaño del conjunto de datos, en la segunda columna se especifica la medida de desempeño (*Medida*) y en las columnas siguientes los resultados obtenidos por el algoritmo para el archivo  $V$  o  $H$  según sea el caso (ver Sección 5.3). Al observar el primer registro de la Tabla 5.2 donde  $N = 31$ , el promedio de los resultados obtenidos en las cinco ejecuciones arrojó un porcentaje de desviación promedio MPD(%) de 0.397590, una mediana del porcentaje de desviación MedPD(%) de 1.045684 y un tiempo de ejecución del algoritmo de 5585 segundos, las Tablas 5.2 y 5.6 siguen esta estructura en todas las instancias de prueba. En las Tablas 5.3, 5.4, 5.5 y 5.7 se incluye además el parámetro de número de puntos no dominados encontrados por el algoritmo (Núm. puntos). Este parámetro se muestra cuando se resuelve el PSP con restricciones, en estos casos el archivo  $V$  no es suficiente para evaluar el desempeño del algoritmo y se emplea también el archivo  $H$ . Como se puede observar en el primer registro de la Tabla 5.3 (donde  $N = 31$ ) el promedio de puntos no dominados para las cinco ejecuciones del algoritmo es de 3804 para *BFO-PBIL* y de 1027 para *BFO*. Al final de cada tabla se presentan el promedio del valor obtenido para cada medida de desempeño en las cinco instancias de prueba (Prom.).

Para el PSP sin restricciones (Tabla 5.2) el algoritmo BFO-PBIL obtuvo una media del porcentaje de desviación significativamente menor en todos los casos, sin embargo, el

TABLA 5.2: Comparativa de BFO-PBIL y BFO original (PSP *sin restricciones*)

$N$	<i>Medida</i>	BFO-PBIL	BFO
		$V$	$V$
31	MPD(%)	<b>0.397590</b>	2.895005
	MedPD(%)	1.045684	<b>0.295488</b>
	Tiempo(s)	5585	<b>3342</b>
85	MPD(%)	<b>1.022405</b>	8.064518
	MedPD(%)	0.000104	<b>0.000006</b>
	Tiempo(s)	10054	<b>5512</b>
89	MPD(%)	<b>2.202536</b>	5.171113
	MedPD(%)	<b>0.044253</b>	0.099031
	Tiempo(s)	10600	<b>5758</b>
98	MPD(%)	<b>2.844275</b>	10.539563
	MedPD(%)	<b>0.261179</b>	0.565004
	Tiempo(s)	11244	<b>7069</b>
225	MPD(%)	<b>3.267883</b>	9.235914
	MedPD(%)	2.565573	<b>0.147955</b>
	Tiempo(s)	21582	<b>11660</b>
Prom.	MPD(%)	<b>1.946937</b>	7.181222
	MedPD(%)	0.783358	<b>0.221496</b>
	Tiempo(s)	11813	<b>6668</b>

tiempo computacional de BFO-PBIL es mayor para todas las instancias. Considerando los resultados promedio de las cinco instancias, se puede observar que en BFO-PBIL la mediana de los datos presentan valores cercanos a la media, en cambio, para BFO la media presenta valores grandes en comparación con la mediana. La cercanía entre estos dos parámetros estadísticos (media y mediana) es un indicador de la distribución de los portafolios encontrados por el algoritmo sobre la frontera eficiente. En promedio, el algoritmo BFO-PBIL pudo encontrar portafolios que se encuentran desviados de la frontera eficiente real en 1.946937 por ciento.

En este trabajo se probó el algoritmo BFO-PBIL con una configuración de los parámetros que brindó buenos resultados en todas las instancias de prueba. Sin embargo, dicha configuración mantiene valores fijos para la población de bacterias, el número de pasos quimiotácticos, el número de pasos reproductivos y el número de pasos de eliminación-dispersión. Es posible observar un aumento en el porcentaje de desviación de los resultados respecto a la frontera eficiente real al aumentar el número de activos en las instancias de prueba. Creemos que el algoritmo falla en encontrar el óptimo global debido a que los parámetros antes mencionados se mantienen constantes y no están en función del número de activos en las instancias de prueba.

En la Figuras 5.1 se muestra la frontera eficiente encontrada por BFO-PBIL y la frontera eficiente real (FER) resuelta por un método de programación cuadrática para el PSP

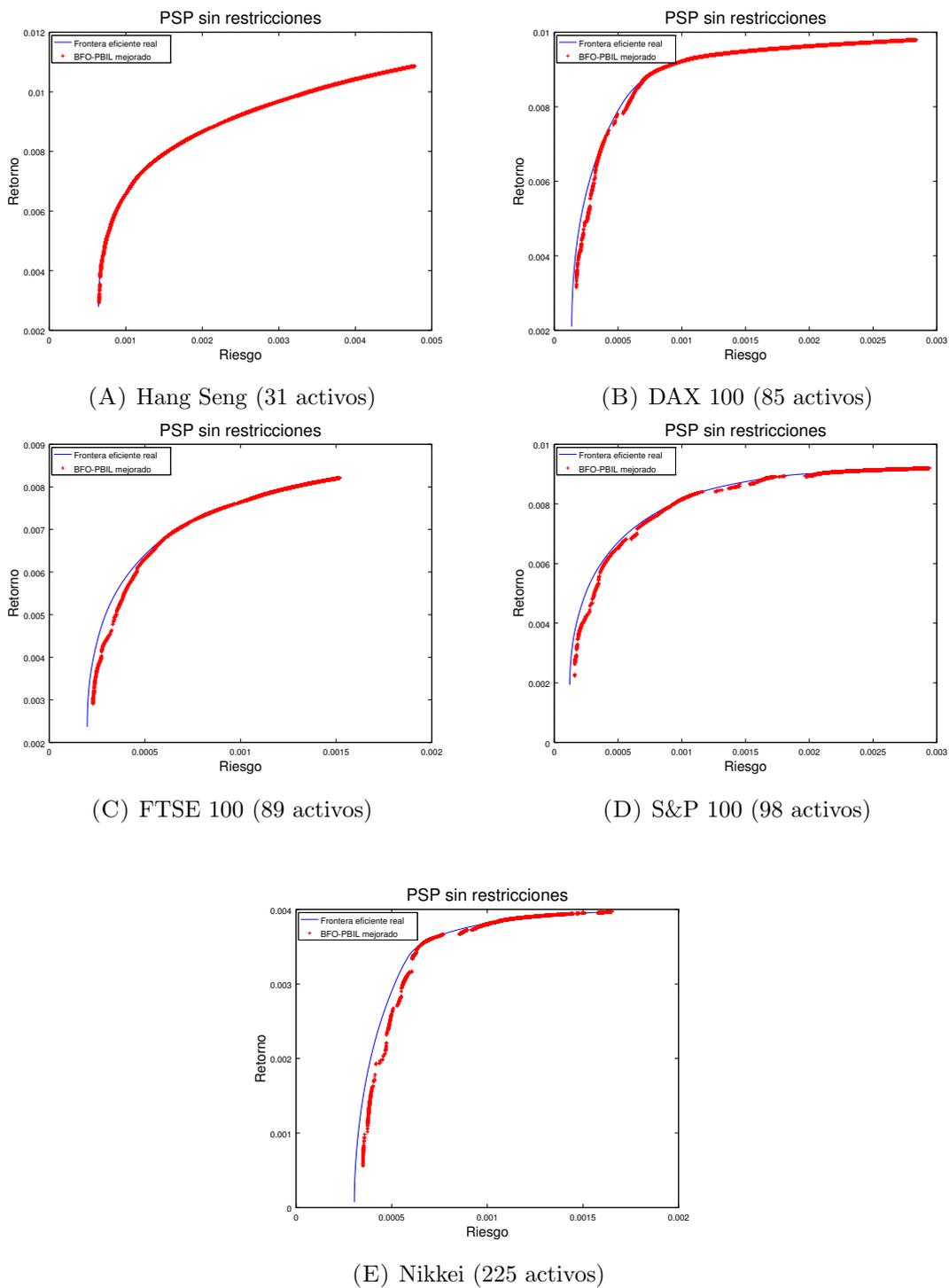


FIGURA 5.1: Fronteras eficientes encontradas por BFO-PBIL para el PSP *sin restricciones*

sin restricciones. El algoritmo de optimización tiene dos objetivos principales: 1) que todas las soluciones generadas no dominadas se encuentren lo más cercano posible de la frontera eficiente real; 2) que las soluciones estén distribuidas de manera uniforme sobre toda la extensión de la FER. Para las cinco instancias se aprecia una buena distribución de las soluciones sobre la frontera eficiente, en la Figura 5.1A Hang Seng (31 activos) BFO-PBIL obtuvo portafolios con las dos características deseadas. Para las demás instancias se aprecia una buena aproximación y distribución de las soluciones, sin embargo, se observan partes de la frontera eficiente real donde el algoritmo falla en llegar al óptimo real y/o presenta discontinuidades. La técnica de BFO-PBIL disminuye su precisión al aumentar el número de activos incluidos en las instancias de prueba.

TABLA 5.3: Comparativa de BFO-PBIL y BFO original (PSP con restricciones)

<i>N</i>	<i>Medida</i>	BFO-PBIL		BFO	
		<i>V</i>	<i>H</i>	<i>V</i>	<i>H</i>
31	MPD(%)	<b>1.1527707</b>	<b>1.129696</b>	2.566284	2.500908
	MedPD(%)	<b>0.666785</b>	<b>1.404797</b>	1.144279	3.030371
	Tiempo(s)	7298		<b>7130</b>	
	Núm. puntos	<b>3804</b>		1027	
85	MPD(%)	<b>2.576508</b>	<b>2.766687</b>	8.253565	7.665615
	MedPD(%)	5.025707	<b>0.454181</b>	<b>3.212609</b>	5.954988
	Tiempo	12901		<b>12784</b>	
	Núm. puntos	<b>2129</b>		544	
89	MPD(%)	<b>1.506205</b>	<b>1.626812</b>	4.614365	4.771880
	MedPD(%)	<b>0.432927</b>	<b>0.354277</b>	3.497769	1.207582
	Tiempo	13540		<b>13233</b>	
	Núm. puntos	<b>2833</b>		726	
98	MPD(%)	<b>3.156703</b>	<b>4.278703</b>	9.362066	9.848822
	MedPD(%)	<b>1.655066</b>	<b>0.175657</b>	14.92343	5.439142
	Tiempo	<b>12904</b>		16467	
	Núm. puntos	<b>2862</b>		873	
225	MPD(%)	<b>2.821441</b>	<b>3.166647</b>	10.500284	11.186729
	MedPD(%)	<b>4.153679</b>	<b>1.347825</b>	16.496430	4.8725861
	Tiempo	<b>26581</b>		31778	
	Núm. puntos	<b>1985</b>	-	412	
Prom.	MPD(%)	<b>2.242725</b>	<b>2.593709</b>	7.059312	7.194790
	MedPD(%)	<b>2.386832</b>	<b>0.747347</b>	7.854903	4.100933
	Tiempo	<b>14644</b>		16278	
	Núm. puntos	<b>2722</b>	-	716	

Para resolver el problema con restricciones (Tabla 5.3) el algoritmo BFO-PBIL brindó en todos los casos mejores resultados para la media y la mediana del porcentaje de desviación, a excepción de la segunda instancia DAX 100 (85 activos) donde la mediana obtenida por BFO fue menor para este conjunto de datos. Sin embargo, en los valores promedio para las cinco instancias BFO-PBIL obtuvo mejores resultados en todas las

medidas de desempeño. En lo que respecta al tiempo computacional ambos algoritmo obtuvieron tiempos similares, el algoritmo BFO-PBIL tardó más en las tres primeras instancias y menos en las dos últimas (S&P100 98 activos y Nikkei 225 activos). BFO-PBIL obtuvo en todos los casos un número de portafolios no dominados mucho mayor que BFO.

En las Figuras 5.2 se muestran las fronteras eficientes obtenidas para el PSP con restricciones, a diferencia del problema sin restricciones en este caso el espacio de soluciones del problema es no conexo y/o discontinuo, por lo que existen regiones con portafolios óptimos que no es posible alcanzar. Esta situación se puede observar claramente en la Figura 5.2B DAX 100 (85 activos), el área de mayor retorno y mayor riesgo se vuelve infactible con las restricciones del problema, por lo que las soluciones óptimas se aprecian alejadas de la frontera eficiente real.

Es posible observar que el tiempo computacional que le toma al algoritmo resolver el PSP sin restricciones es mayor que el tiempo necesario para resolver el problema con restricciones. Los anterior se explica de la siguiente manera: Al incluir la restricción de cardinalidad todas las soluciones generadas incluyen exactamente diez activos con pesos positivo, al resto de los activos no se les asigna ningún peso por lo que no son considerados para obtener el valor de la función objetivo. Por otro lado, en el problema sin restricciones el número de activos en el portafolio puede ser del mismo tamaño que el número de activos en la instancia de prueba, esto implica que será necesario un mayor número de cálculos para obtener el valor de la función objetivo. Aunque el PSP con la restricción de cardinalidad vuelve un espacio de soluciones no convexo y/o discontinuo, esto no representa necesariamente un número mayor de cálculos para la ejecución del algoritmo.

Un aspecto importante en el algoritmo de optimización BFO es la configuración de los parámetros que determinarán el comportamiento de las bacterias. En los artículos consultados en este trabajo ([40], [28], [54] y [36]) se emplean criterios diversos para seleccionar estos valores. Por ejemplo, en [40] (algoritmo original de BFO) el autor propone  $N_B = 50$ ,  $MAX_{Quim} = 100$ ,  $Max_{nados} = 4$ ,  $R_{max} = 4$  y  $ED_{max} = 2$ , motivado por las observaciones biológicas de las bacterias. Por otro lado, en [28] los autores determinan el tamaño de la población en función del número de activos con la fórmula  $N_B = 10 \times \sqrt{N}$ , para el número de movimientos quimiotácticos utilizan  $MAX_{Quim} = 250 \times N/N_B$  y para el tamaño del paso de desplome  $C_{d_{max}} = 0.03$  (este último parámetro permanece constante durante la ejecución del algoritmo), los valores anteriores se obtuvieron a través de una serie de pruebas de las cuales los autores seleccionaron los que mejor resultado dieron.

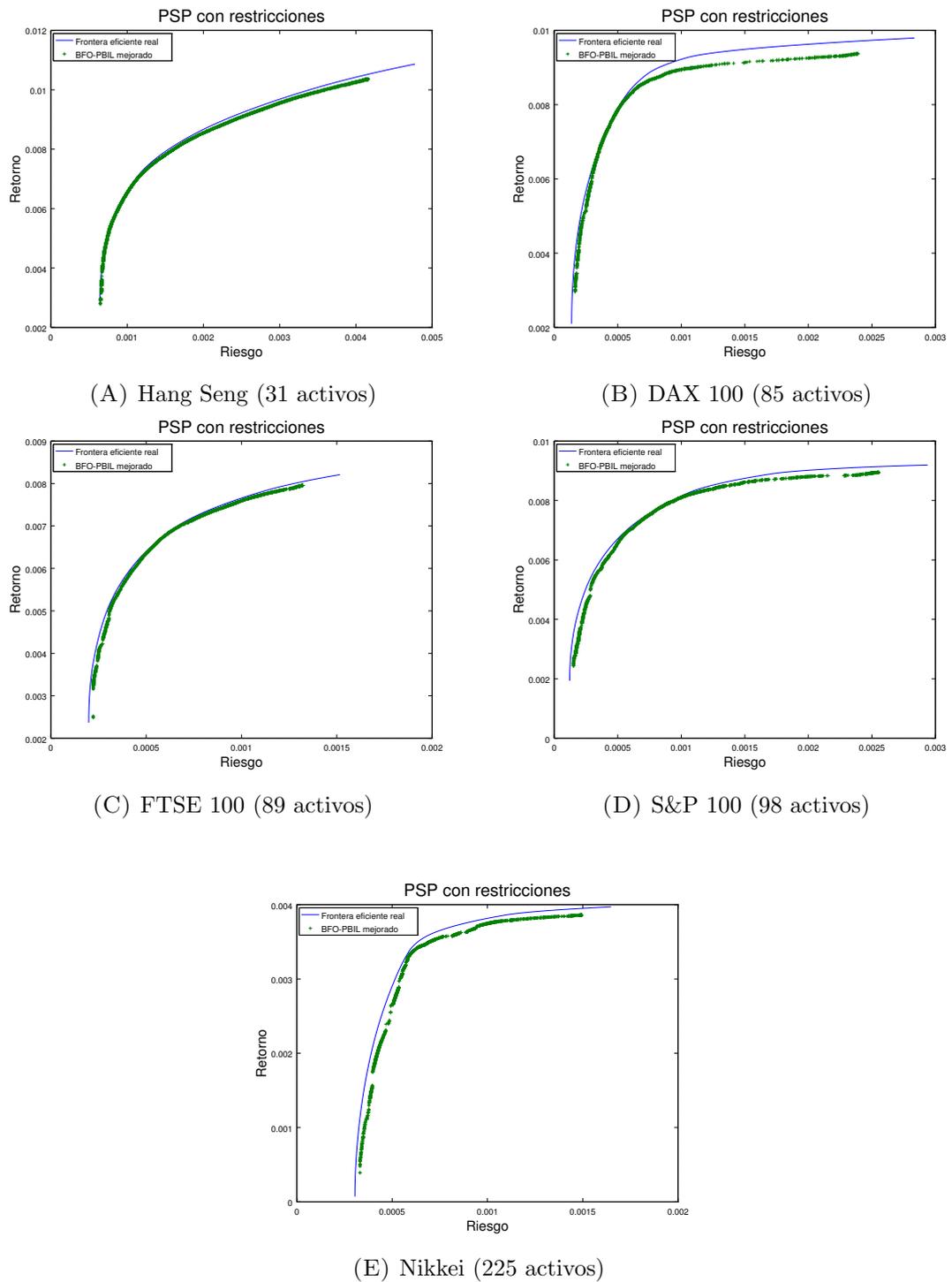


FIGURA 5.2: Fronteras eficientes encontradas por BFO-PBIL para el PSP *con cardinalidad y piso-techo*

TABLA 5.4: Comparativa de la configuración original de BFO y la configuración propuesta (PSP con restricciones)

$N$	<i>Medida</i>	Original		Propuesta	
		$V$	$H$	$V$	$H$
31	MPD(%)	8.639793	7.684852	<b>1.1527707</b>	<b>1.129696</b>
	MedPD(%)	2.984169	5.860823	<b>0.666785</b>	<b>1.404797</b>
	Tiempo(s)	<b>678</b>		7298	
	Núm. puntos	412		<b>3804</b>	
85	MPD(%)	16.925181	21.283002	<b>2.576508</b>	<b>2.766687</b>
	MedPD(%)	6.806807	12.349255	<b>5.025707</b>	<b>0.454181</b>
	Tiempo(s)	<b>3272</b>		12901	
	Núm. puntos	372		<b>2129</b>	
89	MPD(%)	12.832912	10.311597	<b>1.506205</b>	<b>1.626812</b>
	MedPD(%)	4.467560	3.371556	<b>0.432927</b>	<b>0.354277</b>
	Tiempo(s)	<b>3504</b>		13540	
	Núm. puntos	330		<b>2833</b>	
98	MPD(%)	16.702676	9.848822	<b>3.156703</b>	<b>4.278703</b>
	MedPD(%)	12.102449	5.439142	<b>1.655066</b>	<b>0.175657</b>
	Tiempo(s)	<b>4050</b>		12904	
	Núm. puntos	518		<b>2862</b>	
225	MPD(%)	16.585345	18.128959	<b>2.821441</b>	<b>3.166647</b>
	MedPD(%)	21.386752	20.222093	<b>4.153679</b>	<b>1.347825</b>
	Tiempo(s)	<b>16824</b>		26581	
	Núm. puntos	291		<b>1985</b>	
Prom.	MPD(%)	14.337181	13.451446	<b>2.242725</b>	<b>2.593709</b>
	MedPD(%)	9.549547	9.448573	<b>2.386832</b>	<b>0.747347</b>
	Tiempo(s)	<b>5665</b>		14644	
	Núm. puntos	384		<b>2722</b>	

En la Tabla 5.4 se puede apreciar que el número de portafolios no dominados encontrados utilizando la configuración propuesta es mucho mayor que empleando la configuración de [28], a la vez que se observa una disminución muy significativa en la media del porcentaje de desviación.

En las Figuras 5.3 se muestran los resultados obtenidos por BFO con la configuración propuesta en este trabajo y con la configuración original propuesta en [28]. Las comparativas de las configuraciones se llevó a cabo sobre el algoritmo de BFO sin incluir ninguna de las mejoras propuestas en este documento. En todos los casos la configuración aquí propuesta brindó mejores resultados para las medidas de desempeño MDP, MedPD y número de puntos, sin embargo, el tiempo computacional fue más grande en todos los casos.

En este trabajo probamos dos formas diferentes de distribuir el capital entre los activos después de un pasos reproductivo: 1) *Peso aleatorio*: el capital es asignado de manera aleatoria entre todos los activos seleccionados; 2) *Peso de la bacteria padre*: se asigna el

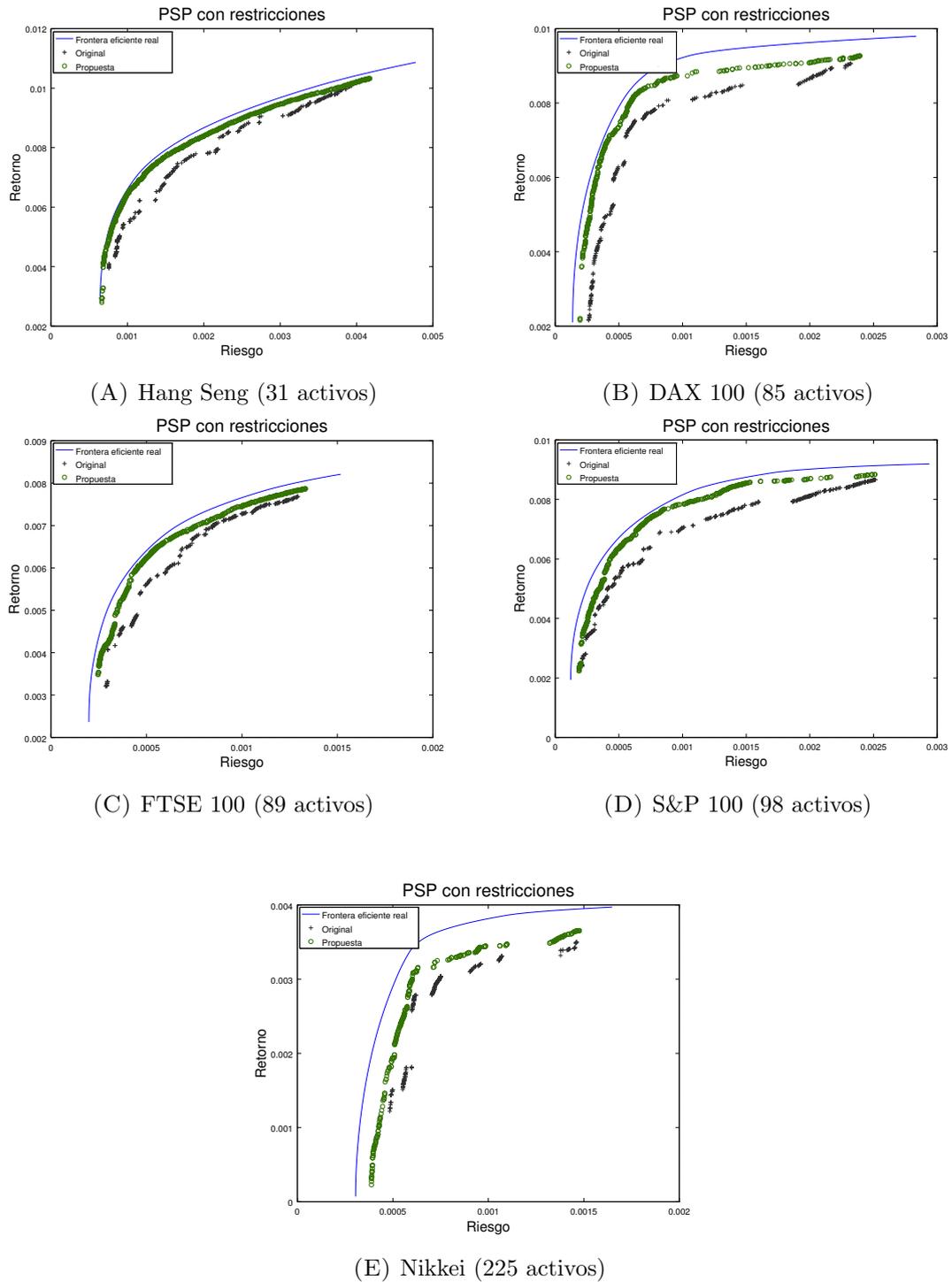


FIGURA 5.3: Comparativa de la configuración original de BFO y la configuración propuesta (PSP con restricciones)

mismo peso que tiene el activo en la bacteria padre, si el activo no está presente en la bacteria padre el peso se asigna de manera aleatoria.

TABLA 5.5: Comparativa de BFO-PBIL con dos esquemas de asignación de pesos (PSP con restricciones)

$N$	Medida	Aleatoria		Bacteria padre	
		$V$	$H$	$V$	$H$
31	MPD(%)	<b>2.280147</b>	<b>1.805755</b>	5.348369	4.245352
	MedPD(%)	<b>2.403856</b>	<b>1.717626</b>	4.499572	3.387338
	Tiempo(s)	11614		<b>11322</b>	
	Núm. puntos	<b>1430</b>		518	
85	MPD(%)	<b>6.950892</b>	<b>8.559229</b>	13.432245	12.615682
	MedPD(%)	<b>6.420602</b>	<b>3.101685</b>	8.837139	11.705867
	Tiempo(s)	<b>20239</b>		20538	
	Núm. puntos	<b>1132</b>		334	
89	MPD(%)	<b>3.792115</b>	<b>4.184477</b>	7.317083	6.965727
	MedPD(%)	<b>2.555348</b>	<b>0.995304</b>	9.910898	6.317819
	Tiempo(s)	20675		<b>20476</b>	
	Núm. puntos	<b>1190</b>		387	
98	MPD(%)	<b>6.898579</b>	<b>7.932549</b>	10.658641	10.772999
	MedPD(%)	5.205376	<b>5.713173</b>	<b>2.739377</b>	9.2490203
	Tiempo(s)	<b>21989</b>		22313	
	Núm. puntos	<b>1353</b>		497	
225	MPD(%)	<b>6.280476</b>	<b>6.048795</b>	12.947520	15.084063
	MedPD(%)	<b>3.271970</b>	<b>4.807535</b>	12.200503	7.067815
	Tiempo(s)	<b>49484</b>		50019	
	Núm. puntos	<b>712</b>		202	
Prom.	MPD(%)	<b>5.240441</b>	<b>5.706161</b>	9.940771	9.936764
	MedPD(%)	<b>3.971430</b>	<b>3.267064</b>	7.637497	7.545571
	Tiempo(s)	<b>24800</b>		24933	
	Núm. puntos	<b>1163</b>		387	

Como se observa en la Tabla 5.5 la técnica de pesos aleatorios brindó mejores resultados, una mayor diversidad de las soluciones y una mejor distribución sobre toda la frontera eficiente. Sin embargo, esta técnica no es adecuada para todo el proceso de optimización porque pone mayor énfasis en la exploración del espacio de búsqueda y no en la explotación. Mientras más cercana se encuentra una bacteria de la frontera eficiente cambios menores en los pesos de los activos son necesarios para llegar al óptimo real (esta misma característica es la que justifica el uso de la función lineal decreciente para el tamaño de los pasos quimiotácticos). Al utilizar pesos aleatorios en cada paso reproductivo el algoritmo falla en encontrar el óptimo global. Aún con la desventaja anterior, la técnica de pesos aleatorios sobrepasa por mucho los resultados obtenidos por la técnica de asignar el mismo peso que en la bacteria padre en los resultados promedio de todas las medidas de desempeño utilizadas. Las fronteras eficientes obtenidas para cada conjunto de datos con los dos esquemas de asignación de pesos aparecen en las Figuras 5.4.

En las Tablas 5.6 y 5.7 aparecen los resultados obtenidos por BFO-PBIL, por el algoritmo PBILDE [34] que utiliza la técnica de evolución diferencial y las tres heurísticas propuestas en [9] que incluyen un algoritmo genético, búsqueda tabú y recocido simulado. En ningún caso nuestro algoritmo obtuvo mejores resultados que en la técnica de PBILDE que inspiró este trabajo, sin embargo, los resultados obtenidos muestran que el algoritmo BFO-PBIL es capaz de obtener muy buenos resultados considerando la configuración utilizada y la técnica de pesos aleatorios durante todo el proceso de optimización.

La evolución diferencial [51] es una técnica muy exitosa dentro de los algoritmos evolutivos para la optimización de problemas continuos. DE utiliza una población inicial generada de manera aleatoria que va mejorando de manera iterativa mediante las operaciones de mutación, cruzamiento y recombinación. En DE se muta un vector padre en la población utilizando un factor de escala de algún otro individuo seleccionado de manera aleatoria. El cruzamiento se realiza con el vector resultante de la mutación para generar la población de descendientes. Al integrar la técnica de PBIL a la evolución diferencial los autores obtuvieron los mejores resultados en la comparativa que llevamos a cabo en este trabajo.

Para el problema sin restricciones, el algoritmo BFO-PBIL brindó mejores resultados que la técnica de búsqueda tabú propuesta por Chang et al. en [9], comparado con las otras tres técnicas los resultados fueron pobres. Es notable que el GA propuesto por Chang et al. obtuvo los mejores resultados para la medida MPD con la instancia de datos más grande (Nikkei, 225 activos), en general, para esta medida los resultados del GA son consistentes sin importar el tamaño de las instancias de prueba.

Resultados similares se observan para el PSP con restricciones respecto al algoritmo BFO-PBIL que falla consistentemente en alcanzar al óptimo global, sin embargo, el número de portafolios no dominados es más grande en BFO-PBIL que en los algoritmos propuestos por Chang et al. y menor que en PBILDE. Los resultados obtenidos para BFO-PBIL muestran que el algoritmo es competitivo con las otras técnicas aquí revisadas, sin embargo, los resultados tienen un mayor tiempo computacional y menor precisión que las técnicas de PBILDE, GA y SA.

## 5.5. Resumen

En este capítulo se presenta la evaluación del desempeño del algoritmo BFO-PBIL y los resultados obtenidos. La evaluación se hizo sobre las mejoras propuestas al algoritmo BFO-PBIL resolviendo el PSP con y sin restricciones y los resultados obtenidos se compararon con otras técnicas de optimización recientes e importantes en el área. Al inicio

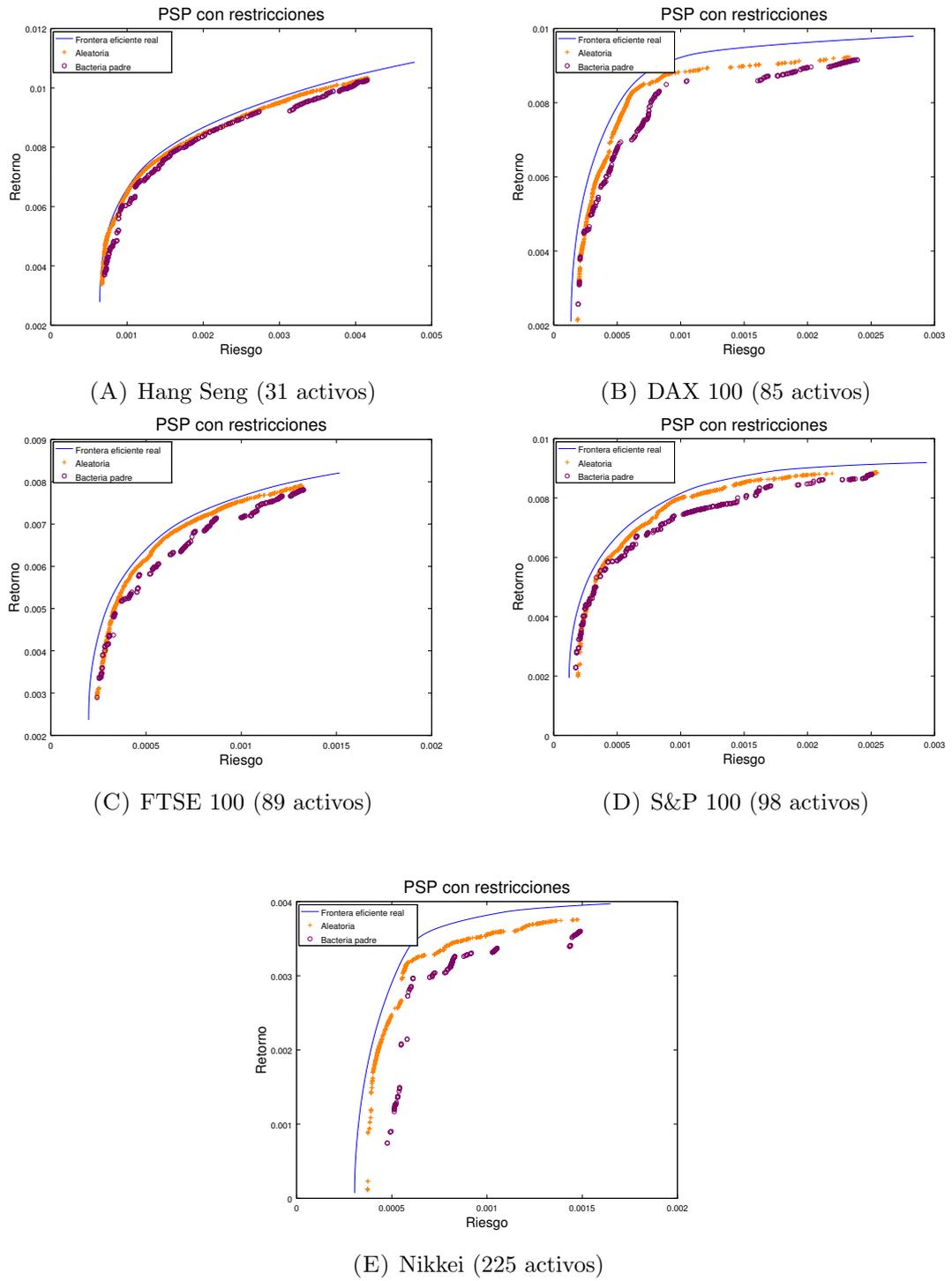


FIGURA 5.4: Comparativa de BFO-PBIL con dos esquemas de asignación de pesos (PSP *con restricciones*)

TABLA 5.6: Comparativa de BFO-PBIL con otros algoritmos de optimización (PSP *sin restricciones*)

N	Medida	BFO-PBIL	PBIL-DE	Chang-GA	Chang-TS	Chang-SA
		$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
31	MPD(%)	0.397590	<b>0.0002</b>	0.0202	0.8973	0.1129
	MedPD(%)	1.045684	<b>2.63e-06</b>	0.0165	1.0718	0.016
	Tiempo(s)	5585	<b>109</b>	621	469	476
85	MPD(%)	1.022405	<b>0.0052</b>	0.0136	3.5645	0.0394
	MedPD(%)	0.000104	<b>2.11e-05</b>	0.0123	2.7816	0.0033
	Tiempo(s)	10054	<b>1445</b>	10332	9546	9412
89	MPD(%)	2.202536	<b>0.0059</b>	0.0063	3.2731	0.2012
	MedPD(%)	0.044253	<b>2.11e-06</b>	0.0029	3.0238	0.0426
	Tiempo(s)	10600	<b>1643</b>	11672	10698	10928
98	MPD(%)	2.844275	<b>0.0078</b>	0.0084	4.428	0.2158
	MedPD(%)	0.261179	<b>3.54e-06</b>	0.0085	4.278	0.0142
	Tiempo(s)	11244	<b>2094</b>	15879	14517	14367
225	MPD(%)	3.267883	0.2733	<b>0.0085</b>	15.9163	1.7681
	MedPD(%)	2.565573	<b>2.25e-05</b>	0.0084	14.2668	0.8107
	Tiempo(s)	<b>21582</b>	24823	227220	210929	281588
Prom.	MPD(%)	1.946937	0.05848	<b>0.0114</b>	5.61584	0.46748
	MedPD(%)	0.783358	<b>1.04e-05</b>	0.00972	5.0844	0.17736
	Tiempo(s)	12706	<b>6022</b>	53144	49231	63354

del capítulo se describe el conjunto de datos de prueba y el número de instancias con que cuenta cada uno, el conjunto de datos utilizado tiene la característica de ser reconocido como un marco de comparación para la evaluación de algoritmos de optimización. En este capítulo se describe también la configuración de los parámetros del algoritmo BFO-PBIL y el método de evaluación de desempeño que mide el porcentaje de desviación de la frontera de óptimos encontrados con la frontera eficiente real. Las medidas de desempeño que se presentan en este capítulo son: el porcentaje de desviación promedio (MDP), la mediana del porcentaje de desviación (MedPD), el tiempo de ejecución del algoritmo en segundos (Tiempo) y el número de punto no dominados encontrados (Núm. puntos).

Los resultados mostraron que el algoritmo BFO-PBIL produce mejores resultados que el algoritmo BFO original. Al comparar la configuración original empleada en [28] con la configuración aquí propuesta (descrita en 5.2) el algoritmo BFO obtuvo mejores resultados con nuestra configuración. Se compararon también dos esquemas diferentes de asignación de pesos para los activos (aleatorio y bacteria padre), el esquema de asignación de pesos aleatorio produjo mejores resultados y una mejor distribución de las soluciones. Para finalizar, el algoritmo BFO-PBIL se comparó contra otros cuatro enfoques que incluyen un algoritmo híbrido basado en evolución diferencial (PBILDE), un

TABLA 5.7: Comparativa de BFO-PBIL con otros algoritmos de optimización (PSP con restricciones)

N	Medida	BFO-PBIL	PBIL-DE	Chang-GA	Chang-TS	Chang-SA
		<i>H</i>	<i>H</i>	<i>H</i>	<i>H</i>	<i>H</i>
31	MPD(%)	1.1527707	<b>0.6196</b>	0.9457	0.9908	0.9892
	MedPD(%)	0.666785	<b>0.4712</b>	1.1819	1.1992	1.2082
	Tiempo(s)	7298	113	172	<b>74</b>	79
	Núm. puntos	3804	<b>6367</b>	1317	1268	1003
85	MPD(%)	2.576508	<b>1.5433</b>	1.9515	3.0635	2.4299
	MedPD(%)	5.025707	<b>1.0986</b>	2.1262	2.5383	2.4675
	Tiempo(s)	12901	1358	544	<b>199</b>	210
	Núm. puntos	2129	<b>3378</b>	1270	1467	1135
89	MPD(%)	1.506205	<b>0.8234</b>	0.8784	1.3908	1.1341
	MedPD(%)	<b>0.432927</b>	0.5134	0.5938	0.6361	0.7137
	Tiempo(s)	13540	1358	573	246	<b>215</b>
	Núm. puntos	2833	<b>2957</b>	1482	1301	1183
98	MPD(%)	3.156703	<b>1.3902</b>	1.7157	3.1678	2.6970
	MedPD(%)	1.655066	<b>0.7303</b>	1.1447	1.1487	1.1288
	Tiempo(s)	12904	1901	638	<b>225</b>	242
	Núm. puntos	2862	<b>4570</b>	1560	1587	1284
225	MPD(%)	2.821441	<b>0.3996</b>	0.6431	0.8981	0.6370
	MedPD(%)	4.153679	<b>0.4619</b>	0.6062	0.5914	0.6292
	Tiempo(s)	26581	14918	1964	<b>545</b>	553
	Núm. puntos	1985	<b>4000</b>	1823	1701	1655
Prom.	MPD(%)	2.242725	<b>0.9552</b>	1.22688	1.9022	1.57744
	MedPD(%)	2.386832	<b>0.6551</b>	1.13056	1.22274	1.22948
	Tiempo(s)	14644	3929	1964	<b>257</b>	259
	Núm. puntos	2722	<b>4254</b>	1490	1498	1252

algoritmo genético, búsqueda tabú y recocido simulado. En ningún caso nuestro algoritmo fue capaz de mejorar los resultados de PBILDE, sin embargo, produjo resultados de buena calidad que son competitivos con los cuatro enfoques.

# Capítulo 6

## Conclusiones

### 6.1. Evaluación del trabajo de investigación

El problema de la selección de portafolios busca identificar cuáles son los activos que se deben incluir en el portafolio y la proporción del capital que se debe asignar a cada uno de ellos, de tal manera que se obtenga el mayor retorno y el menor riesgo al mismo tiempo. Una gran cantidad de investigación se ha hecho en torno a este problema a raíz del trabajo de Markowitz publicado en 1952, el tipo de riesgo a emplear, las restricciones incluidas en el modelo y la técnica de optimización son los principales aspectos a considerar al hablar del PSP.

Realizamos una amplia descripción del modelo de optimización de portafolios propuesto por Harry Markowitz que emplea el retorno promedio para determinar la ganancia y la varianza de los activos para medir el riesgo. El PSP tal como lo formuló Markowitz es un problema de programación cuadrática de gran escala. Al considerar otros modelos de riesgo, la semivarianza se presenta como una de las mejores alternativas para hacer frente a la distribución asimétrica del retorno de los activos. Aunque es imposible determinar todas las características que puede desear un inversionista para seleccionar un portafolio, es posible afirmar que generalmente se busca que el portafolio seleccionado brinde el mayor retorno y el menor riesgo al mismo tiempo. La formulación extendida del PSP como problema de optimización multiobjetivo incluyen restricciones realistas empleadas en el mundo financiero. Dentro de las principales restricciones encontradas en la literatura la de piso-techo y la de cardinalidad son las más utilizadas, los costos de transacción y lotes mínimos aparecen poco en la literatura a pesar de ser necesarias en prácticamente todos los casos.

Presentamos dos formulaciones distintas para el problema de la selección de portafolios, el índice de Sortino y la frontera eficiente. El índice de Sortino se presenta como una

función objetivo mucho más adecuada para evaluar los portafolios encontrados. Sin embargo, para probar el algoritmo propuesto empleamos la formulación de frontera eficiente que ha sido muy utilizada en los trabajos que proponen algoritmos de optimización, esta formulación nos ha permitido establecer una comparativa del desempeño de BFO-PBIL con los resultados obtenidos por otras técnicas.

El algoritmo BFO es una de las heurísticas más novedosas en el área de inteligencia de enjambre. La técnica ha demostrado un gran potencial para resolver problemas de optimización en diferentes áreas y recientemente se ha empezado a utilizar para resolver el problema de la optimización de portafolios de inversión. El algoritmo BFO-PBIL que proponemos es una versión híbrida de la optimización por forrajeo de bacterias y la técnica de aprendizaje incremental basado en poblaciones. Junto a la versión híbrida del algoritmo incluimos una serie de mejoras que brindan mejores resultados que el algoritmo original BFO, además, al comparar el desempeño del algoritmo con otras técnicas de optimización obtuvimos buenos resultados que son competitivos con los obtenidos por estas técnicas.

## 6.2. Principales contribuciones

La revisión bibliográfica que se llevó a cabo permite conocer de manera más amplia las técnicas que aparecieron en los trabajos seleccionados mediante la búsqueda SMS. Empleamos la taxonomía adoptada por Ponsich *et al.* en [41] para analizar los trabajos según las funciones objetivos (tipos de riesgo empleado y restricciones), la codificación o representación y la estrategia de optimización. Los trabajos seleccionados en el estado del arte extienden la revisión de los trabajos de [41] considerando otros enfoques exitosos de optimización multiobjetivo aplicados al PSP: algoritmos genéticos, la inteligencia de enjambre y los algoritmos híbrido.

Al analizar el estado de arte pudimos concluir que la mayoría de los trabajos utilizan como función objetivo el modelo de media-varianza de Markowitz junto con las restricciones de piso-techo y cardinalidad. Aunque las desventajas de este modelo son conocidas, una de las posibles causas de que siga siendo tan ampliamente utilizado se debe a la posibilidad de comparar los resultados con un buen número de trabajos y a que es posible evaluar el porcentaje de desviación con la frontera eficiente real según lo propone Chang *et al.* [9]. Además, identificamos que la técnica de optimización más empleada para resolver el PSP son los algoritmos genéticos, después los algoritmos híbridos y al final la técnica de PSO y BFO con igual número de artículos encontrados. Los pocos trabajos referentes al PSP empleando la técnica de BFO y lo novedoso del algoritmo suponen un nicho de oportunidad para esta técnica de optimización.

En este trabajo presentamos la formulación del índice de Sortino que emplea la semivarianza como medida de riesgo y las restricciones de costos de transacción y lotes mínimos. Esta formulación es más adecuada para conocer el riesgo de un portafolio de manera realista, lo que representa una ventaja sobre la formulación clásica de Markowitz. El solo análisis de riesgo sobre los portafolios de inversión es un tema muy vasto que podría ser motivo de la investigación de este trabajo. Sin embargo, creemos que la formulación aquí presentada del índice de Sortino es una aportación al problema del PSP porque no aparece en ninguno de los trabajos que se revisaron en el estado del arte.

En este trabajo hemos modificado el algoritmo original de BFO propuesto por Passino para mejorar algunas de las limitaciones que presentaba. Al incluir mejoras como una función lineal decreciente para el tamaño de los pasos quimiotácticos, reinicialización de las bacterias y asignación de pesos aleatorios durante el fase de reproducción hemos visto una mejora significativa en el desempeño del algoritmo. Además, hemos integrado y adaptado la técnica de aprendizaje incremental PBIL a BFO de manera exitosa agregando un componente de comunicación que guía a las bacterias hacia buenas regiones con una adecuada exploración y explotación del espacio de búsqueda. Los resultados obtenidos mostraron el enorme potencial del algoritmo BFO-PBIL para encontrar soluciones de muy buena calidad que son competitivas con otros algoritmos de optimización.

### 6.3. Trabajo futuro

Además de los resultados presentados en el Capítulo 5 se analizaron diferentes formulaciones del PSP y diferentes restricciones realistas. En la Sección 4.3 presentamos una formulación que emplea la semivarianza para cuantificar el riesgo e incluye las restricciones de lotes mínimos y costos de transacción, dos restricciones realistas que aparecen poco en la literatura y que son necesarias en la mayoría de los casos. De acuerdo con [3], si el inversionista no considera los costos de transacción es posible que se produzcan resultados erróneos aplicando una función de costos de transacción sobre los portafolios eficientes encontrados.

Por otro lado, para el algoritmo BFO-PBIL no hay consenso respecto al número de iteraciones que puede ser adecuada para obtener buenos resultados. Como se mostró en el Capítulo 5 la configuración del algoritmo y la selección de los parámetros es vital para obtener buenos resultados. Es necesario llevar a cabo un estudio adecuado de los parámetros de configuración con distintos valores para el número de iteraciones de los pasos de eliminación-dispersión ( $MAX_{Elim-Disp}$ ), reproductivos ( $MAX_{Reprod}$ ), quimiotácticos ( $MAX_{Quim}$ ) y número de nados ( $Max_{nados}$ ), además de los parámetros que deben de estar en función del número de activos en las instancias de prueba. Notamos

que al integrar la técnica de PBIL al algoritmo BFO es necesario aumentar el número de pasos reproductivos para dar tiempo al vector ( $v$ ) de obtener un aprendizaje significativo de las soluciones más prometedoras lo cual produce en un aumento del tiempo de ejecución del algoritmo. Si el número de pasos reproductivos es pequeño en BFO-PBIL, las nuevas bacterias no tienen tiempo de ser guiadas hacia las mejores regiones y obtener buenos resultados.

Para finalizar, creemos que una mejora al algoritmo BFO-PBIL está en utilizar los dos esquemas de asignación de peso en momentos diferentes de la ejecución del algoritmo. Al principio del proceso de optimización es más conveniente utilizar la asignación aleatoria de pesos y conforme las bacterias se acercan al óptimo global es más adecuado asignar el peso considerando a la bacteria padre. De esta manera el algoritmo obtienen un adecuado compromiso entre la exploración y la explotación del espacio de búsqueda.

# Apéndice A

## Ilustración numérica de los modelos de riesgo

Formulación del problema de selección de portafolios utilizando el modelo de media-varianza

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & 0.16656x_1x_1 + 0.12562x_2x_2 + 0.25614x_3x_3 + 0.10279x_4x_4 \\ & + 0.05677x_5x_5 + 0.32041x_6x_6 + 0.10648x_7x_7 + 0.06992x_8x_8 \\ & + 0.18959x_9x_9 + 0.07689x_{10}x_{10} + 0.17934x_1x_2 + 0.25722x_1x_3 \\ & + 0.17363x_1x_4 + 0.08810x_1x_5 + 0.31991x_1x_6 + 0.13785x_1x_7 \\ & + 0.10520x_1x_8 + 0.28308x_1x_9 + 0.00732x_1x_{10} + 0.22842x_2x_3 \\ & + 0.12756x_2x_4 + 0.05282x_2x_5 + 0.33415x_2x_6 + 0.16949x_2x_7 \\ & + 0.08022x_2x_8 + 0.20558x_2x_9 + 0.07364x_2x_{10} + 0.24788x_3x_4 \\ & + 0.10665x_3x_5 + 0.32192x_3x_6 + 0.16751x_3x_7 + 0.17479x_3x_8 \\ & + 0.29710x_3x_9 + 0.12898x_3x_{10} + 0.08120x_4x_5 + 0.26409x_4x_6 \\ & + 0.11311x_4x_7 + 0.10494x_4x_8 + 0.21969x_4x_9 + 0.05881x_4x_{10} \\ & + 0.17784x_5x_6 + 0.06202x_5x_7 + 0.09840x_5x_8 + 0.12642x_5x_9 \\ & - 0.02591x_5x_{10} + 0.28287x_6x_7 + 0.19339x_6x_8 + 0.40237x_6x_9 \\ & + 0.05333x_6x_{10} + 0.10643x_7x_8 + 0.21261x_7x_9 + 0.08868x_7x_{10} \\ & + 0.15467x_8x_9 + 0.03957x_8x_{10} + 0.08543x_9x_{10} \\ \text{sujeto a} \quad & 0.17499x_1 + 0.09950x_2 + 0.33979x_3 + 0.23657x_4 + 0.11487x_5 + 0.27989x_6 \\ & + 0.21578x_7 + 0.25928x_8 + 0.26859x_9 + 0.44054x_{10} = r_0, \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 1, \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 10. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Formulación del problema de selección de portafolios utilizando el modelo de media-semivarianza

$$\begin{aligned}
 & \text{minimizar} \quad \frac{1}{12} * (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2 + p_7^2 + p_8^2 + p_9^2 + p_{10}^2 + p_{11}^2 + p_{12}^2) \\
 & \text{sujeto a} \\
 & p_1 - 0.10299x_1 - 0.24383x_2 - 0.25313x_3 - 0.42223x_4 + 0.06747x_5 - 0.43689x_6 \\
 & \quad - 0.03011x_7 + 0.11605x_8 - 0.37326x_9 - 0.17687x_{10} \geq 0, \\
 & p_2 + 0.14533x_1 + 0.09083x_2 + 0.71634x_3 + 0.53118x_4 + 0.21513x_5 + 0.33237x_6 \\
 & \quad + 0.06228x_7 + 0.39975x_8 - 0.01343x_9 - 0.02473x_{10} \geq 0, \\
 & p_3 + 0.12210x_1 + 0.65083x_2 - 0.28463x_3 - 0.07463x_4 + 0.02191x_5 + 0.95560x_6 \\
 & \quad + 0.33519x_7 - 0.06638x_8 + 0.04302x_9 - 0.19570x_{10} \geq 0, \\
 & p_4 + 0.06101x_1 - 0.06516x_2 - 0.06413x_3 + 0.24977x_4 + 0.35047x_5 + 0.28078x_6 \\
 & \quad - 0.18845x_7 - 0.09395x_8 + 0.16474x_9 - 0.31087x_{10} \geq 0, \\
 & p_5 - 0.22661x_1 - 0.43530x_2 - 0.55818x_3 - 0.44366x_4 - 0.24261x_5 - 0.99053x_6 \\
 & \quad - 0.68191x_7 - 0.41154x_8 - 0.58569x_9 - 0.52344x_{10} \geq 0, \\
 & p_6 + 0.33134x_1 + 0.14750x_2 + 0.15254x_3 + 0.24177x_4 + 0.44580x_5 + 0.69345x_6 \\
 & \quad + 0.51755x_7 + 0.54938x_8 + 0.83541x_9 + 0.09946x_{10} \geq 0, \\
 & p_7 - 0.20016x_1 + 0.40018x_2 + 0.77537x_3 + 0.02053x_4 - 0.00648x_5 + 0.04850x_6 \\
 & \quad - 0.00998x_7 + 0.13169x_8 + 0.10334x_9 + 0.49204x_{10} \geq 0, \\
 & p_8 + 0.72984x_1 + 0.17083x_2 + 0.23634x_3 + 0.35827x_4 - 0.11487x_5 + 0.33592x_6 \\
 & \quad - 0.04514x_7 + 0.03072x_8 + 0.46237x_9 + 0.17817x_{10} \geq 0, \\
 & p_9 - 0.14285x_1 - 0.42735x_2 - 0.16836x_3 - 0.25978x_4 + 0.02835x_5 - 0.24703x_6 \\
 & \quad - 0.26864x_7 - 0.06178x_8 - 0.23538x_9 - 0.21304x_{10} \geq 0, \\
 & p_{10} + 0.28468x_1 + 0.22018x_2 + 0.58279x_3 + 0.31730x_4 - 0.10519x_5 + 0.21947x_6 \\
 & \quad + 0.45132x_7 - 0.04089x_8 + 0.49044x_9 + 0.24914x_{10} \geq 0, \\
 & p_{11} + 0.05201x_1 + 0.09984x_2 - 0.11613x_3 - 0.16323x_4 - 0.27253x_5 - 0.31722x_6 \\
 & \quad + 0.15722x_7 - 0.22828x_8 - 0.17393x_9 + 0.21380x_{10} \geq 0, \\
 & p_{12} - 1.05370x_1 - 0.60853x_2 - 1.01882x_3 - 0.35528x_4 - 0.38745x_5 - 0.87440x_6 \\
 & \quad - 0.29933x_7 - 0.32477x_8 - 0.71763x_9 + 0.21204x_{10} \geq 0, \\
 & 0.17499x_1 + 0.09950x_2 + 0.33979x_3 + 0.23657x_4 + 0.11487x_5 + 0.27989x_6 \\
 & \quad + 0.21578x_7 + 0.25928x_8 + 0.26859x_9 + 0.44054x_{10} = r_0, \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 1, \\
 & p_t \geq 0, \quad t = 1, 2, \dots, 12, \\
 & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 10.
 \end{aligned}
 \tag{A.2}$$

# Bibliografía

- [1] K. Anagnostopoulos and G. Mamanis. A portfolio optimization model with three objectives and discrete variables. *Computers & Operations Research*, 37(7):1285–1297, 2010.
- [2] C. C. Aranha and H. Iba. A tree-based ga representation for the portfolio optimization problem. In *Proceedings of the 10th annual conference on Genetic and evolutionary computation*, pages 873–880. ACM, 2008.
- [3] J. S. Baixauli-Soler, E. Alfaro-Cid, and M. O. Fernandez-Blanco. Mean-var portfolio selection under real constraints. *Computational Economics*, 37(2):113–131, 2011.
- [4] S. Baluja. Population-based incremental learning. a method for integrating genetic search based function optimization and competitive learning. Technical report, DTIC Document, 1994.
- [5] J. E. Beasley. Or-library: distributing test problems by electronic mail. *Journal of the operational research society*, 41(11):1069–1072, 1990.
- [6] V. Bevilacqua, V. Pacelli, and S. Saladino. A novel multi objective genetic algorithm for the portfolio optimization. In *Advanced Intelligent Computing*, pages 186–193. Springer, 2012.
- [7] R. Bramante and G. Gabbi. An asset allocation model based on a semi variance adjusted sharpe ratio. *Available at SSRN 1459634*, 2009.
- [8] J. Branke, B. Scheckenbach, M. Stein, K. Deb, and H. Schmeck. Portfolio optimization with an envelope-based multi-objective evolutionary algorithm. *European Journal of Operational Research*, 199(3):684–693, 2009.
- [9] T.-J. Chang, N. Meade, J. E. Beasley, and Y. M. Sharaiha. Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation. *Computers & Operations Research*, 27(13):1271–1302, 2000.

- 
- [10] T.-J. Chang, S.-C. Yang, and K.-J. Chang. Portfolio optimization problems in different risk measures using genetic algorithm. *Expert Systems with Applications*, 36(7):10529–10537, 2009.
- [11] S. Chiam, K. Tan, and A. Al Mamum. Evolutionary multi-objective portfolio optimization in practical context. *International Journal of Automation and Computing*, 5(1):67–80, 2008.
- [12] B. de México. Banxico - cf101 - tasas de interés del mercado de dinero, Junio 2016. [Última visita; 3-October-2016].
- [13] L. Diosan. A multi-objective evolutionary approach to the portfolio optimization problem. In *Computational Intelligence for Modelling, Control and Automation, 2005 and International Conference on Intelligent Agents, Web Technologies and Internet Commerce, International Conference on*, volume 2, pages 183–187. IEEE, 2005.
- [14] K. Doerner, W. J. Gutjahr, R. F. Hartl, C. Strauss, and C. Stummer. Pareto ant colony optimization: A metaheuristic approach to multiobjective portfolio selection. *Annals of Operations Research*, 131(1-4):79–99, 2004.
- [15] R. Dreżewski and L. Siwik. Co-evolutionary multi-agent system for portfolio optimization. In *Natural Computing in Computational Finance*, pages 271–299. Springer, 2008.
- [16] F. Duran, C. Cotta, and A. Fernandez. On the use of sharpe’s index in evolutionary portfolio optimization under markowitz’s model. *Proceedings of the Conception on Adaptive and Emergent Behaviour and Complex Systems*, 2009.
- [17] E. economista. ¿qué es una venta en corto?, Agosto 2011. [Última visita; 3-October-2016].
- [18] M. Ehrgott, K. Klamroth, and C. Schwehm. An mcdm approach to portfolio optimization. *European Journal of Operational Research*, 155(3):752–770, 2004.
- [19] A. P. Engelbrecht. *Computational intelligence: an introduction*. John Wiley & Sons, 2007.
- [20] J. E. Fieldsend, J. Matatko, and M. Peng. Cardinality constrained portfolio optimisation. In *Intelligent Data Engineering and Automated Learning–IDEAL 2004*, pages 788–793. Springer, 2004.
- [21] L. D. Gaspero, G. D. Tollo, A. Roli, and A. Schaerf. Hybrid metaheuristics for constrained portfolio selection problems. *Quantitative Finance*, 11(10):1473–1487, 2011.

- [22] F. Glover. Tabu search-part i. *ORSA Journal on computing*, 1(3):190–206, 1989.
- [23] M. A. Gomez, C. X. Flores, and M. A. Osorio. Hybrid search for cardinality constrained portfolio optimization. In *Proceedings of the 8th annual conference on Genetic and Evolutionary Computation*, pages 1865–1866. ACM, 2006.
- [24] J. Guerard. *Handbook of portfolio construction: Contemporary applications of Markowitz techniques*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [25] Investopedia. Sortino ratio, Junio 2016. [Última visita; 3-October-2016].
- [26] C. Isidore. Jack ma loses \$1.4 billion in a day, Enero 2015. [Última visita: 3-October-2016].
- [27] B. JE. Or library dataset, Octubre 2015. [Última visita; 3-October-2016].
- [28] Y. Kao and H.-T. Cheng. Bacterial foraging optimization approach to portfolio optimization. *Computational Economics*, 42(4):453–470, 2013.
- [29] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt, and M. P. Vecchi. Optimization by simulated annealing. *science*, 220(4598):671–680, 1983.
- [30] H. Konno and H. Yamazaki. Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to tokyo stock market. *Management science*, 37(5):519–531, 1991.
- [31] T. Krink and S. Paterlini. Differential evolution for multiobjective portfolio optimization. *Center for Economic Research (RECent)*, 21, 2008.
- [32] T. Krink and S. Paterlini. Multiobjective optimization using differential evolution for real-world portfolio optimization. *Computational Management Science*, 8(1-2):157–179, 2011.
- [33] P.-C. Lin and P.-C. Ko. Portfolio value-at-risk forecasting with ga-based extreme value theory. *Expert Systems with Applications*, 36(2):2503–2512, 2009.
- [34] K. Lwin and R. Qu. A hybrid algorithm for constrained portfolio selection problems. *Applied intelligence*, 39(2):251–266, 2013.
- [35] H. Markowitz. Portfolio selection. *The journal of finance*, 1(7):77–91, 1952.
- [36] B. Niu, H. Xiao, L. Tan, L. Li, and J. Rao. Modified bacterial foraging optimizer for liquidity risk portfolio optimization. In *Life System Modeling and Intelligent Computing*, pages 16–22. Springer, 2010.
- [37] C.-S. Ong, J.-J. Huang, and G.-H. Tzeng. A novel hybrid model for portfolio selection. *Applied Mathematics and computation*, 169(2):1195–1210, 2005.

- [38] G. V. Pai and T. Michel. Metaheuristic multi-objective optimization of constrained futures portfolios for effective risk management. *Swarm and Evolutionary Computation*, 19:1–14, 2014.
- [39] M. I. Pankaj Gupta, Mukesh Kumar Mehlawat. *Fuzzy Portfolio Optimization: Advances in Hybrid Multi-criteria Methodologies*. Springer, Studies in Fuzziness and Soft Computing, 2014.
- [40] K. M. Passino. Biomimicry of bacterial foraging for distributed optimization and control. *Control Systems, IEEE*, 22(3):52–67, 2002.
- [41] A. Ponsich, A. L. Jaimes, and C. Coello. A survey on multiobjective evolutionary algorithms for the solution of the portfolio optimization problem and other finance and economics applications. *Evolutionary Computation, IEEE Transactions on*, 17(3):321–344, 2013.
- [42] K. Price, R. M. Storn, and J. A. Lampinen. *Differential evolution: a practical approach to global optimization*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [43] R. R.-T. y. A. S. R. Moral-Escudero. Selection of optimal investment portfolios with cardinality constraints. In *En: Evolutionary computation. IEEE congress on CEC*, pages 2382–2388. IEEE, 2006.
- [44] O. L. y. R. H. R. Xu, J. Zhang. An estimation of distribution algorithm based portfolio selection approach. In *2010 International conference on technologies and applications of artificial intelligence. IEEE, New York*, pages 305–313. IEEE, 2010.
- [45] I. Radziukyniene and A. Zilinskas. Approximation of pareto set in multi objective portfolio optimization. In *Advances in Electrical Engineering and Computational Science*, pages 551–562. Springer, 2009.
- [46] S. G. Reid, K. M. Malan, and A. P. Engelbrecht. Carry trade portfolio optimization using particle swarm optimization. In *Evolutionary Computation (CEC), 2014 IEEE Congress on*, pages 3051–3058. IEEE, 2014.
- [47] A. L. S. Arnone and A. Tettamanzi. A genetic approach to portfolio selection. *Neural Netw. World*, 3.
- [48] M. Schulmerich, Y.-M. Leporcher, and C.-H. Eu. *Applied Asset and Risk Management: A Guide to Modern Portfolio Management and Behavior-Driven Markets*. Springer, 2014.
- [49] W. F. Sharpe. A simplified model for portfolio analysis. *Management science*, 9(2):277–293, 1963.

- 
- [50] H. Soleimani, H. R. Golmakani, and M. H. Salimi. Markowitz-based portfolio selection with minimum transaction lots, cardinality constraints and regarding sector capitalization using genetic algorithm. *Expert Systems with Applications*, 36(3):5058–5063, 2009.
- [51] R. Storn and K. Price. *Differential evolution, a simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces*, volume 3. ICSI Berkeley, 1995.
- [52] F. Streichert, H. Ulmer, and A. Zell. Comparing discrete and continuous genotypes on the constrained portfolio selection problem. In *Genetic and Evolutionary Computation—GECCO 2004*, pages 1239–1250. Springer, 2004.
- [53] R. Subbu, P. P. Bonissone, N. Eklund, S. Bollapragada, and K. Chalermkraivuth. Multiobjective financial portfolio design: a hybrid evolutionary approach. In *Evolutionary Computation, 2005. The 2005 IEEE Congress on*, volume 2, pages 1722–1729. IEEE, 2005.
- [54] L. Tan, B. Niu, H. Wang, H. Huang, and Q. Duan. Bacterial foraging optimization with neighborhood learning for dynamic portfolio selection. In *Intelligent Computing in Bioinformatics*, pages 413–423. Springer, 2014.
- [55] J. D. Tinoco and F. H. Trillo. *Futuros y opciones financieras: una introducción*. Editorial Limusa, 2002.
- [56] H. Zhu, Y. Wang, K. Wang, and Y. Chen. Particle swarm optimization (pso) for the constrained portfolio optimization problem. *Expert Systems with Applications*, 38(8):10161–10169, 2011.
- [57] E. Zitzler, J. Knowles, and L. Thiele. Quality assessment of pareto set approximations. In *Multiobjective Optimization*, pages 373–404. Springer, 2008.
- [58] E. Zitzler and L. Thiele. Multiobjective evolutionary algorithms: a comparative case study and the strength pareto approach. *evolutionary computation, IEEE transactions on*, 3(4):257–271, 1999.