

“Una introducción al estudio de K –álgebras”

Tesis para obtener el grado académico de

Maestra en Ciencias
(Matemáticas)

Que presenta

Mirian Leon Faro

Matrícula: 2222800091

Correo: mirianlefa@outlook.com

Directora de tesis

Dra. Martha Lizbeth Shaid Sandoval Miranda
Departamento de Matemáticas, UAM-I.

Jurado:

Presidenta: Dra. Silvia Claudia Gavito Ticozzi.
Secretaria: Dra. Janeth Anabelle Magaña Zapata.
Vocal: Dra. Diana Avella Alaminos.

Iztapalapa, Ciudad de México, a 1 de agosto de 2025.

Agradecimientos

Expreso mi más profundo agradecimiento a todas las personas que, de una u otra manera, contribuyeron a la realización de este trabajo.

A la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SE-CIHTI), al Proyecto de Ciencia Básica y de Frontera, CONAHCYT CBF-2023-2024-2630; y a la Dirección de Apoyo a la Investigación UAM. Por la ayuda económica proporcionada en el transcurso de mi formación de maestría.

A mis padres, por su inquebrantable apoyo, paciencia y cariño, así como por cada uno de sus consejos y enseñanzas a lo largo de mi vida. A mi hermano, por estar siempre a mi lado en este camino.

Extiendo mi más sincero agradecimiento a mi asesora Martha Lizbeth Shaid Sandoval Miranda por brindarme la oportunidad de trabajar bajo su guía y por depositar su confianza en mí para la realización de esta tesis. Gracias por su paciencia, apoyo y por compartir conmigo su invaluable conocimiento.

Finalmente, agradezco a cada uno de mis amigos, Ariadna, David, Erick, Jorge, Jessica, Luis y Minerva por su compañía, apoyo y por los momentos inolvidables que compartimos durante la maestría, por su apoyo al preguntarme “¿Y la tesis?”. Su amistad y respaldo en los momentos de alegría y dificultad han sido fundamentales en este proceso y agradezco que estuvieran presentes.

1. Introducción	1
2. Preliminares	5
2.1. Categorías	5
2.2. Categorías abelianas	13
2.3. Funtores	14
2.4. Lema del Cinco y Lema de la Serpiente	17
2.5. Prerradicales en la categoría de módulos	23
2.6. Prerradicales exactos izquierdos y t-radicales	25
2.7. El radical de un módulo	26
3. Algunos Teoremas Clásicos	29
3.1. Módulos artinianos y noetherianos	29
3.2. Módulos simples y semisimples	43
3.3. Teorema de Jordan-Hölder	49
3.4. Anillos Locales	57
3.5. Anillo de Endomorfismos Locales	64
3.6. Teorema de Krull-Schmidt-Remak-Azumaya	80
4. Álgebras y Carcajes	87
4.1. Álgebra de caminos KQ	87
4.2. Propiedad Universal de KQ	102
4.3. Ideales de KQ	113
4.4. Cocientes de álgebras de Caminos	116
4.5. Carcaj de una K -álgebra de dimensión finita.	123
4.6. Teorema de P. Gabriel	125
4.7. Representaciones de Carcajes	126

5. Conclusiones	131
Índice alfabético	133
Bibliografía	135

Introducción

El estudio de las representaciones de álgebras asociadas a quivers (cargajes, en la traducción al español), ha sido un área de gran interés en la álgebra asociativa y teoría de representaciones de álgebras. Para comprender la estructura de estas álgebras, es fundamental recurrir a herramientas de la teoría de módulos y la teoría de anillos. Estas ideas comenzaron a tomar forma en el siglo XIX con los trabajos de Richard Dedekind y Joseph Wedderburn, quienes sentaron las bases del estudio de los anillos y sus módulos. Sin embargo, fue en el siglo XX cuando la teoría avanzó significativamente con la introducción de conceptos clave como los módulos artinianos y noetherianos, fundamentales para el análisis de la estructura de los módulos sobre un anillo proporcionando información clave sobre las condiciones de finitud y estabilidad de estos. Por otro lado, los módulos simples y semi-simples permiten describir la descomposición de los módulos en términos de componentes irreducibles.

Emmy Noether y Emil Artin realizaron contribuciones esenciales a la teoría de anillos y módulos en la primera mitad del siglo XX. Noether formuló las condiciones de finitud, permitiendo un mejor control sobre la estructura de los módulos y anillos, mientras que Artin trabajó en la teoría de anillos semisimples, estableciendo la conexión entre representaciones y módulos simples y semisimples. Estas ideas fueron refinadas posteriormente, influyendo en el estudio de las representaciones de álgebras.

En el estudio de las representaciones de álgebras, uno de los principales resultados que se utilizan es el Teorema de Krull Schmidt. Este tiene su origen en la teoría de grupos, con los trabajos de Joseph Henry Maclagan Wedderburn (1909), quien lo formuló para grupos finitos. Posteriormente, Robert Erich Remak demostró que los factores inescindibles son isomorfos.

Más tarde, Wolfgang Krull y Otto Schmidt extendieron estos resultados a grupos que satisfacen las condiciones de la cadena ascendente (A.C.C.) y descendente (D.C.C.) en subgrupos normales. Robert Erich Remak también presentó una versión del Teorema de Krull-Schmidt para módulos de longitud finita. En 1950, Goro Azumaya amplió el teorema a sumas infinitas de módulos con anillos de endomorfismos locales. En la teoría de representaciones de álgebras sobre módulos finitamente generados, el Teorema de Krull-Schmidt desempeña un papel fundamental, ya que permite identificar la importancia de los módulos inescindibles.

Las K -álgebras de dimensión finita proporcionan ejemplos y un contexto particular dentro del estudio de las K -álgebras de Artin, presentes en la teoría de Auslander-Reiten. En este contexto, los anillos locales también desempeñan un papel importante, ya que muchas álgebras de caminos pueden descomponerse en componentes locales, facilitando su análisis estructural. Las representaciones de quivers ofrecen una manera tanto visual como algebraica de estudiar estas álgebras, lo que ha llevado a numerosos avances en teoría de categorías y teoría de representaciones de álgebras. En la segunda mitad del siglo XX, Peter Gabriel revolucionó la teoría de representaciones al establecer un vínculo entre las representaciones de quivers y las álgebras de dimensión finita. Su famoso teorema proporciona una caracterización de cuándo una álgebra de caminos finita es de tipo finito, permitiendo la clasificación de sus representaciones mediante diagramas de Dynkin. En este sentido, las representaciones de quivers permiten visualizar y estudiar la estructura interna de los módulos sobre álgebras de caminos, facilitando su clasificación en términos de categorías de módulos.

Los prerrequisitos para esta tesis son esencialmente teoría de módulos y teoría de categorías. Esta tesis se divide en tres secciones.

En el capítulo 2 introducimos nociones básicas de teoría de categorías, junto con algunos ejemplos clásicos. Se estudian categorías abelianas, algunas de sus propiedades y como estas nos serán útiles para el estudio en los próximos capítulos. Veremos las demostraciones categóricas de teoremas importantes en sucesiones, como lo son el “Lema de la serpiente” y el “Lema del cinco”. Finalmente, haremos una breve introducción funtorial de los prerradicales en la categoría de módulos.

En el capítulo 3 comenzamos con una introducción a la teoría de módulos presentando las definiciones y propiedades principales de los módulos artinianos y noetherianos para estudiar propiedades de finitud y sucesiones exactas cortas sobre módulos. Esto nos da oportunidad de iniciar el estudio de la teoría de representaciones de módulos semisimples, lo que nos permite demostrar los teoremas clásicos de Jordan-Hölder y Krull-Remak-Schmidt.

En el capítulo 4 comenzamos con el estudio del álgebra de caminos, iniciando con las definiciones de carcajes (quivers) y algunas de sus propiedades. Luego, abordamos la construcción de K -álgebras KQ asociadas a un quiver, haciendo énfasis en la propiedad universal, sus propiedades, ideales

y mostrando diversos ejemplos de K -álgebras, en particular, el álgebra de Kronecker. Analizamos las K -álgebras de dimensión finita y, dada una K -álgebra con ciertas propiedades, veremos cómo se le puede asociar un carcaj finito para finalmente llegar al teorema de Peter Gabriel.

El propósito de este capítulo es presentar un breve recordatorio de los conceptos y teoría básica de la teoría de categorías, enfocándonos al final de este, en teoremas clásicos en categorías de módulos y (sub)funtores aditivos. Las demostraciones, así como un tratamiento más profundo y desarrollado de estos conceptos, pueden ser consultados en [24] [3], [4] y [23].

2.1 Categorías

En este capítulo se presentarán los conceptos básicos de la teoría de categorías, incluyendo la definición formal de categoría, así como algunos ejemplos fundamentales como: las categorías de conjuntos *Sets*, grupos *GR* y módulos *Mod(R)*. También se abordarán ciertos morfismos importantes, como los monomorfismos, epimorfismos, etc.

Definición 2.1.1 Una **categoría** $\mathcal{C}$, consiste en una terna de ingredientes: una clase de objetos $Obj(\mathcal{C})$, un conjunto de morfismos $Hom(A, B)_{\mathcal{C}}$ para cada par de elementos $A, B \in Obj(\mathcal{C})$ y una composición definida de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} \circ_{A,B,C} : Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \times Hom_{\mathcal{C}}(B, C) &\longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(A, C) \\ (f, g) &\longmapsto g \circ f. \end{aligned}$$

Donde se satisfacen las siguientes condiciones:

- c.1) Para cada par de objetos, el conjunto *Hom* es disjunto, esto es: Para $A, B, C, D \in \mathcal{C}$ se tiene que $Hom(A, B)_{\mathcal{C}} \cap Hom(C, D)_{\mathcal{C}} = \emptyset$.

- c.2) Para cualquier $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, existe un único morfismo $1_A \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ tal que para todo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$

$$f \circ 1_A = f \text{ y } 1_B \circ f = f.$$

- c.3) Para $A, B, C, D \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ y para cualesquiera $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ y $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$ se satisface que:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Definición 2.1.2 Una categoría $\mathcal{C}$ es **pequeña** en el caso en que $\text{Obj}(\mathcal{C})$ corresponda a un conjunto.

Definición 2.1.3 Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ categorías. Decimos que $\mathcal{C}'$ es una **subcategoría** de $\mathcal{C}$ si se satisfacen las siguientes condiciones:

- a) Para cada $A \in \text{Obj}(\mathcal{C}')$, se tiene que $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$.
- b) Para cualesquiera $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C}')$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(A, B) \subseteq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.
- c) La composición en $\mathcal{C}'$ es la restricción de la composición en $\mathcal{C}$. Esto es para $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(A, B)$ y $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(B, C)$,

$$g \circ_{\mathcal{C}'} f = g \circ_{\mathcal{C}} f.$$

- d) Para todo $A \in \text{Obj}(\mathcal{C}')$, se cumple que $1'_A = 1_A$.

Definición 2.1.4 Sean $\mathcal{C}$ una categoría y $\mathcal{C}'$ una subcategoría de $\mathcal{C}$. Decimos que $\mathcal{C}'$ es una **subcategoría plena** de $\mathcal{C}$ si se satisface que para cualesquiera $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C}')$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.

Para simplificar notación, en ocasiones escribiremos $g \circ f$ como gf , y denotaremos $A \in \mathcal{C}$ para indicar que $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$.

Ejemplo 2.1.5 En los siguientes incisos, recordamos algunos ejemplos básicos de categorías.

- a) La categoría conjuntos **Sets**: Los objetos son la clase de todos los conjuntos, los morfismos son todas las funciones de A en B y la composición es la composición usual de funciones.
 - b) La categoría de grupos **Grp**, donde los objetos son grupos y los morfismos son homomorfismos de grupos.
 - b.1) Consideremos la categoría de grupos abelianos **Ab**, es una subcategoría plena donde, los objetos son los grupos abelianos y los morfismos son los homomorfismos de grupos.
-

c) La categoría de anillos **RING**: Los objetos son anillos y los morfismos son homomorfismos de anillos. En esta categoría podemos destacar las siguientes subcategorías:

c.1) La categoría de anillos asociativos unitarios **RING₁**.

c.2) La categoría de campos **FIELD**.

c.3) La categoría de anillos conmutativos con identidad **C-RING**.

Notemos que **RING₁** es una subcategoría de **RING** que no es plena.

d) La categoría de espacios vectoriales sobre un campo K dado **Vec(K)**. Los objetos son espacios vectoriales sobre el campo K y los morfismos corresponden a las transformaciones lineales entre K -espacios vectoriales.

e) La categoría de R -módulos izquierdos con R un anillo asociativo con identidad, **R-Mod**. Los objetos son los R -módulos a izquierda; y los morfismos son los homomorfismos de R -módulos a izquierda. En ocasiones, denotaremos esta categoría como **Mod(R)**. En esta categoría podemos considerar las siguientes subcategorías plenas de **Mod(R)**:

e.1) La categoría de R -módulos izquierdos finitamente generados, denotada por **R-mod** o **mod(R)**. Donde los objetos son los R -módulos izquierdos finitamente generados.

e.2) La categoría de Wisbauer $\sigma[M]$ de un módulo dado M , donde los objetos son los módulos subgenerados por M , es decir, dados $M, N \in \text{Mod}(R)$, N es subgenerado por M si N es isomorfo a un submódulo de un módulo generado por M .

De manera análoga, se tiene **Mod-R** la categoría de R -módulos a derecha.

f) La Categoría de conjuntos parcialmente ordenados **POSET**. Los objetos son conjuntos parcialmente ordenados; $(P, \leq)$; donde P es un conjunto no vacío, $\leq \subseteq P \times P$ es una relación de orden parcial y los morfismos son funciones que preservan el orden, esto es, $f: (P, \leq) \rightarrow (Q, \preceq)$ es un morfismo de copos que satisface que para todo $x, y \in P$, tal que $x \leq y$, entonces $f(x) \preceq f(y)$.

Definición 2.1.6 Dada una categoría $\mathcal{C}$ se define la **categoría opuesta** $\mathcal{C}^{op}$ de la siguiente forma:

a) $Obj(\mathcal{C}^{op}) := Obj(\mathcal{C})$.

b) Para cualquier par de objetos $A, B \in \mathcal{C}^{op}$

$$Hom_{\mathcal{C}^{op}}(A, B) := Hom_{\mathcal{C}}(B, A).$$

c) Para cualesquiera $f \in Hom_{\mathcal{C}^{op}}(A, B)$, $g \in Hom_{\mathcal{C}^{op}}(B, C)$, se define la composición como:

$$g \circ_{\mathcal{C}^{op}} f := f^{op} g^{op}.$$

Presentamos un ejemplo donde se puede entender un poco este principio. Consideremos la siguiente propiedad sobre un objeto $A \in \mathcal{C}$:

$P(A)$ = Para cualquier $B \in Obj(\mathcal{C})$, existe un único morfismo $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$

Primero remplacemos todas las afirmaciones en $\mathcal{C}$ en términos de $\mathcal{C}^{op}$:

$P^{op}(X)$ = Para cualquier $B^{op} \in Obj(\mathcal{C}^{op})$, existe un único morfismo $f \in Hom_{\mathcal{C}^{op}}(B^{op}, A^{op})$.

Finalmente traducimos la propiedad $P^{op}(X)$:

$P^{op}(X)$ = Para cualquier $B \in Obj(\mathcal{C})$ existe un único morfismo $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$.

Definición 2.1.7 Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Un objeto $A \in \mathcal{C}$ se considera un **objeto cero**, si se satisfacen las siguientes condiciones:

a) Para todo $X \in \mathcal{C}$ existe un único morfismo $f : A \longrightarrow X$.

b) Para todo $Y \in \mathcal{C}$ existe un único morfismo $g : Y \longrightarrow A$.

Observación 2.1.8 Notemos que si una categoría $\mathcal{C}$ tiene un objeto cero, este es único salvo isomorfismos. En este caso, se denota $\mathbf{0}$.

Observación 2.1.9 En una categoría $\mathcal{C}$ con objeto cero, $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ es llamado **morfismo cero de A en B** si se factoriza a través del objeto cero, esto es, existen $g : A \longrightarrow \mathbf{0}$ y $h : \mathbf{0} \longrightarrow B$ tales que $f = h \circ g$.

A lo largo de este texto, nos interesará trabajar en categorías que tengan al menos objeto cero.

Definición 2.1.10 Sean $\mathcal{C}$ una categoría, $X, Y \in \mathcal{C}$. Un morfismo $h : A \longrightarrow B$ en $\mathcal{C}$ es:

a) **Split-mono**: Si existe un morfismo $g : B \longrightarrow A$ tal que $gh = 1_A$.

b) **Split-epi**: Si existe un morfismo $f : B \longrightarrow A$ tal que $hf = 1_B$.

c) **Isomorfismo:** Si es split-mono y split-epi.

d) **Monomorfismo:** Si satisface que dados cualesquiera $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A)$

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} A \xrightarrow{h} B$$

tales que $hf = hg$, entonces $f = g$.

e) **Epimorfismo:** Si dados cualesquiera $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, Y)$

$$A \xrightarrow{h} B \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} Y$$

tales que $fh = gh$, entonces $f = g$.

f) **Bimorfismo:** Si es monomorfismo y epimorfismo.

Observación 2.1.11 Para cualquier categoría $\mathcal{C}$, todo split-mono (split-epi) es monomorfismo (epimorfismo).

Definición 2.1.12 Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto cero y $f: A \rightarrow B$ morfismo en $\mathcal{C}$, un **núcleo** o **kernel** de f es un objeto $K \in \mathcal{C}$ y un morfismo $\kappa: K \rightarrow A$ tal que

a) $f\kappa = 0$.

b) Si $\kappa': K' \rightarrow A$ es un morfismo tal que $f\kappa' = 0$, entonces existe un único $\alpha: K' \rightarrow K$ tal que $\kappa\alpha = \kappa'$.

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{\kappa} & A & \xrightarrow{f} & B \\ & \nwarrow \alpha & \uparrow \kappa' & & \\ & & K' & & \end{array}$$

Observación 2.1.13 Si $f: A \rightarrow B$ tiene kernel, este es único salvo isomorfismos. Además, $\kappa: K \rightarrow A$ es monomorfismo.

Definición 2.1.14 Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto cero y $f: M \rightarrow N$ morfismo en $\mathcal{C}$. Un **conúcleo** o **cokernel** de f es un objeto $L \in \mathcal{C}$ y un morfismo $l: N \rightarrow L$ tal que:

- a) $lf = 0$.
- b) Si $l': N \rightarrow L'$ es un morfismo tal que $l'f = 0$, entonces existe un único $\gamma: L \rightarrow L'$ tal que $\gamma l = l'$.

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{l} & L \\ & & \downarrow l' & \nearrow \gamma & \\ & & L' & & \end{array}$$

Observación 2.1.15 Si $f: M \rightarrow N$ tiene cokernel este es único salvo isomorfismos.

Definición 2.1.16 Dados $f, g: A \rightarrow B$ morfismos de $\mathcal{C}$, un **igualador** de f y g es un objeto $E \in \mathcal{C}$ y un morfismo $e: E \rightarrow A$ tal que

- a) $fe = ge$.
- b) Si $h: C \rightarrow A$ es tal que $fh = gh$, entonces existe un único morfismo $\alpha: C \rightarrow E$ tal que $e\alpha = h$.

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{e} & A & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} & B \\ & \nearrow \alpha & \uparrow h & & \\ & & C & & \end{array}$$

Observación 2.1.17 Un igualador e es único salvo isomorfismo.

Definición 2.1.18 Dados $f, g: A \rightarrow B$ morfismos de $\mathcal{C}$, un **coigualador** de f y g es un objeto $C \in \mathcal{C}$ y un morfismo $c: B \rightarrow C$ tal que

- a) $cf = cg$.
- b) Si $c': B \rightarrow Y$ es tal que $c'f = c'g$, entonces existe un único morfismo $\gamma: C \rightarrow Y$ tal que $\gamma c = c'$.

$$\begin{array}{ccccc} A & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} & B & \xrightarrow{c} & C \\ & & \downarrow c' & \nearrow \gamma & \\ & & Y & & \end{array}$$

Observación 2.1.19 *Un coigualador c es único salvo isomorfismo.*

Definición 2.1.20 *Dados objetos A y B . Un **producto** de A y B consta de un objeto P y dos morfismos*

$$A \xleftarrow{p} P \xrightarrow{q} B ;$$

proyecciones tal que para cualquier par de morfismos

$$A \xleftarrow{f} X \xrightarrow{g} B .$$

Existe un único morfismo $\alpha: X \longrightarrow P$ tal que $f = p\alpha$ y $g = q\alpha$.

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ f \swarrow & \downarrow \alpha & \searrow g \\ A & \xleftarrow{p} P \xrightarrow{q} & B \end{array}$$

Definición 2.1.21 *Dados objetos A y B . Un **coproducto** de ellos consta de un objeto C y dos morfismos,*

$$A \xrightarrow{i} C \xleftarrow{j} B ;$$

inclusiones tal que para cualquier par de morfismos

$$A \xrightarrow{f} Y \xleftarrow{g} B .$$

Existe un único morfismo $\beta: C \longrightarrow Y$ tal que $f = \beta i$ y $g = \beta j$.

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ i \swarrow & \downarrow \beta & \searrow j \\ A & \xrightarrow{f} Y \xleftarrow{g} & B \end{array}$$

Proposición 2.1.22 *El producto y coproducto son únicos salvo isomorfismos.*

Definición 2.1.23 *Dada una categoría $\mathcal{C}$ y morfismos*

$$A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B .$$

*Un **pull-back** de A y B consta de dos morfismos*

$$A \xleftarrow{p} P \xrightarrow{q} B$$

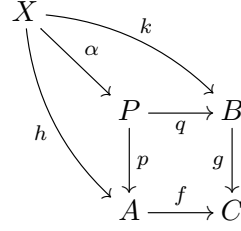
tales que:

a) $fp = gq$.

b) Si

$$A \xleftarrow{h} X \xrightarrow{k} B$$

son morfismos tales que $fh = gk$, entonces existe un único $\alpha: X \rightarrow P$ tal que $p\alpha = h$ y $q\alpha = k$.



Definición 2.1.24 Dada una categoría $\mathcal{C}$ y morfismos

$$A \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g} B.$$

Un **push-out** de ellos consta de morfismos

$$A \xrightarrow{\iota} Q \xleftarrow{j} B$$

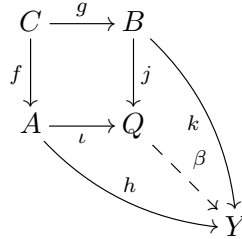
tales que:

a) $\iota f = jg$.

b) Si

$$A \xrightarrow{h} Y \xleftarrow{k} B$$

son morfismos tales que $hf = kg$, entonces existe un único $\beta: Q \rightarrow Y$ tal que $\beta\iota = h$ y $\beta j = k$.



Proposición 2.1.25 Los pull-back y push-out son únicos salvo isomorfismos.

2.2 Categorías abelianas

Las categorías abelianas proporcionan un entorno para estudiar conceptos fundamentales del álgebra homológica. En ellas se pueden definir núcleos, conúcleos.

Definición 2.2.1 Una categoría $\mathcal{A}$ es llamada **aditiva** si satisface las siguientes condiciones:

- a) Para todo $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{A})$, $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ es un grupo abeliano.
- b) La composición de funciones es bilineal. Esto es,

$$\gamma(\alpha + \beta) = \gamma\alpha + \gamma\beta \quad \text{y} \quad (\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma.$$

- c) $\mathcal{A}$ tiene objeto cero.
- d) $\mathcal{A}$ tiene productos y coproductos finitos. Esto es, para todo $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{A})$ existen $A \coprod B, A \sqcup B \in \text{Obj}(\mathcal{A})$, respectivamente.

Definición 2.2.2 Una categoría $\mathcal{A}$ se llama **abeliana** si satisface las siguientes condiciones:

- a) $\mathcal{A}$ es una categoría aditiva.
- b) Todo morfismo tiene un kernel y cokernel.
- c) Todo monomorfismo es un kernel y todo epimorfismo es un cokernel.

Ejemplo 2.2.3 a) Sea R un anillo unitario. Las categorías $R\text{-Mod}$ y $\text{Mod-}R$ son abelianas. En particular, $\mathbb{Z}\text{-Mod} = \text{Ab}$ es abeliana.

- b) Sea $\mathcal{C}'$ la subcategoría plena de Ab que consta de los grupos abelianos finitamente generados de Ab . Entonces $\mathcal{C}'$ es una categoría abeliana.

Proposición 2.2.4 Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana y $f: A \longrightarrow B$ un morfismo en $\mathcal{A}$. Entonces, son equivalentes:

- a) f es monomorfismo.
- b) $\ker(f) = 0$.
- c) $\text{im}(f)$ es isomorfo a A .

Demostración. [14, Proposición 2.3.6].

Observación 2.2.5 Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana, dados $A, B \in \mathcal{A}$, $A \coprod B \cong A \sqcup B$. Dicho objeto también se denotará por $A \oplus B$ (la suma directa de A y B).

2.3 Funtores

Los funtores son aplicaciones entre categorías que respetan la estructura categórica, es decir, preservan objetos, morfismos, identidades y composición. Son herramientas fundamentales para comparar categorías y estudiar cómo se relacionan.

Definición 2.3.1 Dadas dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ un **funtor (covariante)** de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$, $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ consta de dos asignaciones:

- a) $F_o: \text{Obj}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{D})$.
- b) $F_m: \text{mor}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{mor}(\mathcal{D})$ tales que para cualesquiera $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, se tiene $F_m(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_o(A), F_o(B))$ y satisface las siguientes condiciones:
 - b.1) Para cualesquiera $g: A \rightarrow B$ y $h: B \rightarrow C$ morfismos en $\mathcal{C}$, F preserva composiciones, es decir:

$$F(h \circ g) = F(h) \circ F(g).$$

- b.2) Para cada $A \in \mathcal{C}$, F preserva identidades, esto es:

$$F(1_A) = 1_{F(A)}.$$

Observación 2.3.2 En este texto, diremos simplemente ‘funtor’ para referirnos a los funtores covariantes.

Definición 2.3.3 Dadas dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, un funtor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}^{\text{op}}$, será llamado un **funtor contravariante** de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$.

Ejemplo 2.3.4 a) **Functor identidad:** Dada una categoría $\mathcal{C}$ se define el funtor identidad $1_{\mathcal{C}}$, como $1_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ donde a cada objeto $X \in \mathcal{C}$ $1_{\mathcal{C}}(X) = X$ y $1_{\mathcal{C}}(f) = f$ para todo $f \in \text{Hom}(X, Y)$.

- b) **Functor constante:** Dadas dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ y un objeto fijo $D \in \mathcal{D}$. Se puede definir el funtor $K_D: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ tal que $K_D(A) := D$ para toda $A \in \mathcal{C}$ y si $f: A \rightarrow B$ es un morfismo en $\mathcal{C}$, se define $K_D(f) := 1_D$.

- c) **Functor inclusión:** Sea $\mathcal{C}'$ una subcategoría de $\mathcal{C}$ el funtor $I: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ es aquel que $I(A) = A$ para todo $A \in \mathcal{C}'$ y $I(f) = f$ para todo morfismo $f \in \mathcal{C}'$.

En general si $P(f)$ es una propiedad de morfismos y $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ es un funtor, entonces

a) F preserva P si:

$$\forall f \in \text{mor}(\mathcal{A}) \text{ se tiene que } P(f) \Rightarrow P(Ff).$$

b) F refleja P si:

$$\forall f \in \text{mor}(\mathcal{A}) \text{ se tiene que } P(Ff) \Rightarrow P(f).$$

Definición 2.3.5 Dado un funtor $F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, diremos que:

a) F es **fiel** si para cualesquiera $A, A' \in \mathcal{A}$ la función:

$$\phi_{A,A'} : \text{Hom}(A, A') \longrightarrow \text{Hom}(FA, FA')$$

es *inyectiva*.

b) F es **pleno** si para cualesquiera $A, A' \in \mathcal{A}$ la función:

$$\phi_{A,A'} : \text{Hom}(A, A') \longrightarrow \text{Hom}(FA, FA')$$

es *suprayectiva*.

Proposición 2.3.6 Si F es un funtor fiel, entonces preserva monomorfismos, epimorfismos y bimorfismos.

Demostración. [1, Proposición 3.21].

Proposición 2.3.7 Si F es un funtor fiel y pleno, entonces refleja split-monos, split-epi e isomorfismos.

Demostración. [1, Proposición 3.31].

Definición 2.3.8 Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías aditivas. Un funtor $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es llamado **aditivo** si satisface que para todo $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ y $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$

$$F(f + g) = F(f) + F(g).$$

Observación 2.3.9 Si $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es un funtor aditivo, en particular, $F(0) = 0$. para $0 \in \text{Obj}(\mathcal{C})$.

Corolario 2.3.10 Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías aditivas y $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un funtor aditivo, entonces $F(A \oplus B) \cong F(A) \oplus F(B)$ para todo $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$.

Demostración. [2, Proposición 2.12].

Definición 2.3.11 Sean $S, T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ dos funtores covariantes. Definimos una **transformación natural**, $\eta : S \rightarrow T$ como una familia de morfismos

$$\eta = \{\eta_C : S(C) \rightarrow T(C)\}_{C \in \mathcal{C}}$$

en $\mathcal{D}$; tal que para todo morfismo $\alpha : C \rightarrow C'$ en $\mathcal{C}$, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} S(C) & \xrightarrow{\eta_C} & T(C) \\ S(\alpha) \downarrow & & \downarrow T(\alpha) \\ S(C') & \xrightarrow{\eta_{C'}} & T(C') \end{array}$$

Si η_C es un isomorfismo para cada $C \in \mathcal{C}$, decimos que η es una **equivalencia natural**. En este caso, tenemos que existe $\eta^{-1} : T \rightarrow S$ definida como $(\eta^{-1})_C = (\eta_C)^{-1}$. Se denotará $S \cong T$ para decir que S y T son naturalmente equivalentes.

Observación 2.3.12 Si $\eta : S \rightarrow T$ y $\rho : T \rightarrow U$ son transformaciones naturales de funtores. Definimos la composición $\rho\eta : S \rightarrow U$ por $(\rho\eta)_C = \rho_C\eta_C$. Para cualquier funtor T , la transformación natural identidad $1_T : T \rightarrow T$ es por definición $(1_T)_C = 1_{T(C)}$ para toda $C \in \mathcal{A}$.

2.3.1 Categoría de funtores

La categoría de funtores permite estudiar relaciones entre funtores como si fueran objetos matemáticos por derecho propio. Es un tema fundamental en la teoría de categorías, especialmente en contextos de la teoría de representaciones.

Definición 2.3.13 Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos categorías. Consideremos la clase de todos los funtores de $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ denotada como $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ y $[S, T]$ la clase de todas las transformaciones naturales de S a T . Esto es, para $\eta \in [S, T]$ se tiene que $\eta : S \rightarrow T$.

La composición que se considera en 2.3.11 está bien definida, así para que la definición anterior se pueda considerar una categoría donde los objetos son funtores y los morfismos transformaciones naturales, basta ver que $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ es un conjunto.

Proposición 2.3.14 Si $\mathcal{A}$ es una categoría pequeña y $\mathcal{B}$ una categoría arbitraria. Entonces, podemos considerar la categoría de funtores donde:

- a) Los objetos son funtores que van de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ y los morfismos son las transformaciones naturales de dichos funtores.

b) Si $\mathcal{B}$ es pequeña, entonces $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ también lo es.

Demostración. [24, Proposición 2.11.14].

2.4 Lema del Cinco y Lema de la Serpiente

En el estudio del álgebra homológica dentro de categorías abelianas, dos herramientas fundamentales son el *Lema del Cinco* y el *Lema de la Serpiente*. Son lemas esenciales para definir las aplicaciones de conexión en homología. En esta sección se estudiará la versión general en categorías abelianas.

Definición 2.4.1 Sean $\mathcal{A}$ una categoría y X un objeto de $\mathcal{A}$. Un $\mathcal{A}$ -**elemento** de X es un morfismo en $\mathcal{A}$ de la forma $x : Z \rightarrow X$ y lo denotaremos como $x \in_{\mathcal{A}} X$.

Definición 2.4.2 Sean $x \in_{\mathcal{A}} X$ un $\mathcal{A}$ -elemento de X y $f : X \rightarrow Y$ un morfismo en $\mathcal{A}$. Definimos la **imagen de x por f** como un $\mathcal{A}$ -elemento de Y , $f(x) \in_{\mathcal{A}} Y$ está dado por

$$f(x) = f \circ x : Z \rightarrow Y.$$

Observemos que en una categoría abeliana, todo objeto X tiene un morfismo de la forma $0 : 0 \rightarrow X$, y para cada $x \in_{\mathcal{A}} X$ existe el elemento $-x \in_{\mathcal{A}} X$. Y para definirlo utilizaremos la estructura de grupo abeliano de $\text{Hom}(Z, X)$, entonces

$$-x := (-1)x.$$

Si $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana, definimos la siguiente relación de equivalencia: Dados $x, y \in_{\mathcal{A}} X$ de la forma $x : Z \rightarrow X$ e $y : W \rightarrow X$, decimos que $x \equiv y$ si y sólo si existen epimorfismos $p : V \rightarrow Z$ y $q : V \rightarrow W$ tales que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{p} & Z \\ q \downarrow & & \downarrow x \\ W & \xrightarrow{y} & X \end{array}$$

Por lo que dado un morfismo $f : X \rightarrow Y$ en una categoría, si $x, y \in_{\mathcal{A}} X$ son tales que $x \equiv y$, entonces $f(x) \equiv f(y)$.

Proposición 2.4.3 [2] Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana.

- a) Un morfismo $f : X \rightarrow Y$ es monomorfismo si y sólo si, para todo $x, x' \in_{\mathcal{A}} X$, si $f(x) \equiv f(x')$, entonces $x \equiv x'$. Equivalentemente, f es un monomorfismo si y sólo si para todo $x \in X$, si $f(x) \equiv 0$, entonces $x \equiv 0$.

- b) Un morfismo $g : Y \rightarrow Z$ es un epimorfismo si y sólo si, para todo $z \in_{\mathcal{A}} Z$ existe un $y \in_{\mathcal{A}} Y$ tal que $g(y) \equiv z$.
- c) Una sucesión $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ es exacta en Y si y sólo si $g \circ f = 0$ y, para cada $y \in_{\mathcal{A}} Y$ tal que $g(y) \equiv 0$ existe un $x \in_{\mathcal{A}} X$ con $f(x) \equiv y$.
- d) Dado un morfismo $g : Y \rightarrow Z$ y dos $\mathcal{A}$ -elementos $a, b \in_{\mathcal{A}} Y$ tales que $g(a) = g(b)$, existe un $\mathcal{A}$ -elemento $c \in_{\mathcal{A}} Y$ tal que $g(c) \equiv 0$. Además, para cualquier $f : Y \rightarrow W$ con $f(a) \equiv 0$, se tiene que $f(b) \equiv f(c)$ y para cualquier $h : Y \rightarrow V$ con $h(b) \equiv 0$, se tiene que $h(a) \equiv -h(c)$. Denotamos el $\mathcal{A}$ -elemento c como $b -_{\mathcal{A}} a \in_{\mathcal{A}} Y$.

Uno de los teoremas importantes en la teoría de categorías y módulos, son el lema del cinco y el lema de la serpiente. Las siguientes demostraciones son retomadas de [7], [14] y [9].

Lema 2.4.4 (Lema del Cinco) Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en una categoría abeliana $\mathcal{A}$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D & \xrightarrow{k} & E \\
 \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow & & \delta \downarrow & & \epsilon \downarrow \\
 A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & D' & \xrightarrow{k'} & E'
 \end{array}$$

- a) Si β y δ son monomorfismos y α es un epimorfismo, entonces γ es un monomorfismo.
- b) Si β y δ son epimorfismos y ϵ es un monomorfismo, entonces γ es un epimorfismo.

Demostración.

- a) Dado que $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana, podemos considerar $c \in_{\mathcal{A}} C$ tal que $\gamma(c) \equiv_{\mathcal{A}} 0$, donde

$$\delta h(c) \equiv_{\mathcal{A}} h' \gamma(c) \equiv_{\mathcal{A}} h'(0) \equiv_{\mathcal{A}} 0.$$

Entonces, $h(c) \equiv_{\mathcal{A}} 0$ ya que δ es monomorfismo y por exactitud de la primera fila. Existe $b \in_{\mathcal{A}} B$ tal que $g(b) \equiv_{\mathcal{A}} c$, entonces

$$g'(\beta(b)) \equiv_{\mathcal{A}} \gamma(g(b)) \equiv_{\mathcal{A}} \gamma(c) \equiv_{\mathcal{A}} 0.$$

Ahora, por exactitud de la segunda fila, existe $a' \in_{\mathcal{A}} A$ tal que $f'(a') \equiv_{\mathcal{A}} \beta(b)$, al ser α epimorfismo. Existe $a \in_{\mathcal{A}} A$ tal que $\alpha(a) \equiv_{\mathcal{A}} a'$ y por la conmutatividad del diagrama

$$\beta f(a) \equiv_{\mathcal{A}} f' \alpha(a) \equiv_{\mathcal{A}} f'(a') \equiv_{\mathcal{A}} \beta(b).$$

Finalmente, como β es monomorfismo $f(a) \equiv_{\mathcal{A}} b$ de tal manera que

$$c \equiv_{\mathcal{A}} g(b) \equiv_{\mathcal{A}} gf(a) \equiv_{\mathcal{A}} 0$$

y al ser sucesiones exactas, γ es monomorfismo.

- b) Dado $c' \in_{\mathcal{A}} C'$ y δ un epimorfismo, se tiene que existe $d \in D$ tal que $\delta(d) \equiv_{\mathcal{A}} h'(c')$ y por conmutatividad se tiene que $k'\delta(d) \equiv_{\mathcal{A}} \epsilon k(d)$. Además

$$\epsilon(k(d)) \equiv_{\mathcal{A}} k'\delta(d) \equiv_{\mathcal{A}} k'(h'(c')) \equiv_{\mathcal{A}} 0$$

y como ϵ es monomorfismo se concluye que $k(d) \equiv_{\mathcal{A}} 0$. Por exactitud de la primera fila, existe $c \in C$ tal que $h(c) \equiv_{\mathcal{A}} d$. Nuevamente, por conmutatividad del diagrama:

$$h'(\gamma(c)) \equiv_{\mathcal{A}} \delta(h(c)) \equiv_{\mathcal{A}} \delta(d) \equiv_{\mathcal{A}} h'(c').$$

Así, $h'(\gamma(c) - c') \equiv_{\mathcal{A}} 0$. Como la segunda fila es exacta, esto implica que existe $b' \in B'$ tal que $g'(b') \equiv_{\mathcal{A}} \gamma(c) - c'$. Como β es epimorfismo, existe $b \in B$ tal que $\beta(b) \equiv_{\mathcal{A}} b'$. Por exactitud en la primera fila, existe $c_1 \in C$ tal que $g(b) \equiv_{\mathcal{A}} c_1$. Entonces, como el diagrama conmuta:

$$\gamma(c_1) \equiv_{\mathcal{A}} g'(\beta(b)) \equiv_{\mathcal{A}} g'(b') \equiv_{\mathcal{A}} \gamma(c) - c',$$

por lo tanto,

$$\gamma(c - c_1) \equiv_{\mathcal{A}} c'.$$

Así, existe $c - c_1 \in C$ tal que su imagen por γ es c' , lo cual demuestra que γ es epimorfismo.

□

Lema 2.4.5 (Lema de la Serpiente) *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana. Si el siguiente diagrama en $\mathcal{A}$ es conmutativo y exacto.*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v} & C \longrightarrow 0 \\ & & f \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{u'} & B' & \xrightarrow{v'} & C' \longrightarrow 0 \end{array}$$

Entonces, dicho diagrama, induce una sucesión exacta larga en $\mathcal{A}$

$$\begin{aligned} 0 & \longrightarrow \ker(f) \xrightarrow{\bar{u}} \ker(g) \xrightarrow{\bar{v}} \ker(h) \xrightarrow{\delta} \\ & \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker}(f) \xrightarrow{\bar{u}'} \operatorname{coker}(g) \xrightarrow{\bar{v}'} \operatorname{coker}(h) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Demostración. Dado que $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana, se tiene que $\ker(f)$, $\ker(g)$ y $\ker(h)$ existen y de la misma manera para $\operatorname{coker}(f)$, $\operatorname{coker}(g)$ y $\operatorname{coker}(h)$. Por lo que tenemos el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \ker(f) & & \ker(g) & & \ker(h) & \\
 & \downarrow i_f & & \downarrow i_g & & \downarrow i_h & \\
 & A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v} & C & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & \\
 0 & \longrightarrow A' & \xrightarrow{u'} & B' & \xrightarrow{v'} & C' & \\
 & \downarrow p_f & & \downarrow p_g & & \downarrow p_h & \\
 & \operatorname{coker}(f) & & \operatorname{coker}(g) & & \operatorname{coker}(h) &
 \end{array}$$

Como $g \circ u \circ i_f = u' \circ f \circ i_f = 0$, ya que i_f es núcleo de f , entonces por la propiedad universal, existe un único morfismo $\bar{u} : \ker(f) \rightarrow \ker(g)$. De manera análoga para $h \circ v \circ i_g = v' \circ g \circ i_g = 0$, existe un único $\bar{v} : \ker(g) \rightarrow \ker(h)$. Ahora como $p_g \circ u' \circ f = p_g \circ g \circ u = 0$ porque p_g es el conúcleo de g y por la propiedad universal de este, existe $\bar{u}' : \operatorname{coker}(f) \rightarrow \operatorname{coker}(g)$ y de forma similar, existe una única $\bar{v}' : \operatorname{coker}(g) \rightarrow \operatorname{coker}(h)$. Entonces, obtenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \ker(f) & \xrightarrow{\bar{u}} & \ker(g) & \xrightarrow{\bar{v}} & \ker(h) & & \\
 \downarrow i_f & & \downarrow i_g & & \downarrow i_h & & \\
 A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v} & C & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \\
 0 & \longrightarrow A' & \xrightarrow{u'} & B' & \xrightarrow{v'} & C' & \\
 \downarrow p_f & & \downarrow p_g & & \downarrow p_h & & \\
 \operatorname{coker}(f) & \xrightarrow{\bar{u}'} & \operatorname{coker}(g) & \xrightarrow{\bar{v}'} & \operatorname{coker}(h) & &
 \end{array}$$

Observemos que $i_h \circ \bar{v} \circ \bar{u} = v \circ u \circ i_f = 0$, ya que el segundo renglón es exacto. Como i_h es monomorfismo, entonces se tiene que $\bar{v} \circ \bar{u} \equiv_{\mathcal{A}} 0$. Ahora sea $x \in_{\mathcal{A}} \ker \bar{v}$, entonces $v \circ i_g(x) \equiv_{\mathcal{A}} i_h \circ \bar{v}(x) \equiv_{\mathcal{A}} 0$. Por lo que existe $y \in_{\mathcal{A}} A$ tal que $u(y) \equiv_{\mathcal{A}} i_g(y)$.

Además como $u' \circ f(y) \equiv_{\mathcal{A}} g \circ u(y) \equiv_{\mathcal{A}} g \circ i_g(x) \equiv_{\mathcal{A}} 0$ y u' es monomorfismo implica que $f(y) \equiv_{\mathcal{A}} 0$. Por lo que existe $z \in_{\mathcal{A}} \ker(f)$ tal que $i_f(z) \equiv_{\mathcal{A}} y$ pues la primera columna es exacta. Más aún, dado que

$$i_g \circ \bar{u}(z) \equiv_{\mathcal{A}} u \circ i_f(z) \equiv_{\mathcal{A}} u(y) \equiv_{\mathcal{A}} i_g(x)$$

e i_g es monomorfismo, se sigue que $\bar{u}(z) \equiv_{\mathcal{A}} x$. En consecuencia, el primer renglon es exacto, y $\bar{u}$ es monomorfismo, pues $i_g \circ \bar{u} \equiv_{\mathcal{A}} u \circ i_f$ con i_f un monomorfismo. De forma análoga para la sucesión inferior. Y así, obtenemos el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \ker(f) & \xrightarrow{\bar{u}} & \ker(g) & \xrightarrow{\bar{v}} & \ker(h) \\
 & & \downarrow i_f & & \downarrow i_g & & \downarrow i_h \\
 & & A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v} & C \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h \\
 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{u'} & B' & \xrightarrow{v'} & C' \\
 & & \downarrow p_f & & \downarrow p_g & & \downarrow p_h \\
 & & \text{coker}(f) & \xrightarrow{\bar{u}'} & \text{coker}(g) & \xrightarrow{\bar{v}'} & \text{coker}(h) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo donde (I) es un pullback y (II) es un pushout

$$\begin{array}{ccccc}
 & & U_1 & \xrightarrow{k} & \ker(h) \\
 & \nearrow i_k & \downarrow \beta & (I) & \downarrow i_h \\
 A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v} & C \\
 \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h \\
 A' & \xrightarrow{u'} & B' & \xrightarrow{v'} & C' \\
 \downarrow p_f & (II) & \downarrow \alpha & \nearrow p_l & \\
 \text{coker}(f) & \xrightarrow{l} & U_2 & &
 \end{array}$$

A es el kernel de k . En efecto, como $k \circ i_k = 0$. Sea $\phi : D \rightarrow U_1$ tal que $k \circ \phi = 0$, entonces $0 = i_h \circ k \circ \phi = v \circ \beta \circ \phi$ y dado que (A, u) es el kernel de v se sigue que existe un morfismo r tal que $\beta \circ \phi = u \circ r = \beta \circ i_k \circ r$ y por consiguiente $\phi = i_k \circ r$ (pues β es un monomorfismo). Si existiera otro morfismo r' tal que $\phi = i_k \circ r = i_k \circ r'$, entonces $\beta \circ i_k \circ r = \beta \circ i_k \circ r'$, es decir, $u \circ r = u \circ r'$ y, por tanto, $r = r'$ pues u es un monomorfismo.

Por lo tanto, A es el kernel de k . De la misma manera concluimos que C' es el cokernel de l . Definamos $\delta_0 : U_1 \rightarrow U_2$ como $\delta_0 = \alpha \circ g \circ \beta$. Se tiene que:

$$p_l \circ \delta_0 = p_l \circ \alpha \circ g \circ \beta = v' \circ g \circ \beta = h \circ v \circ \beta = h \circ i_h \circ k = 0$$

por la propiedad universal del kernel de h . Y como

$$\delta_0 \circ i_k = \alpha \circ g \circ \beta \circ i_k = \alpha \circ g \circ u = \alpha \circ u' \circ f = l \circ p_f \circ f = 0$$

por la propiedad universal del cokernel de f . Como $p_l \delta_0 = 0$ y l es el kernel de p_l , tenemos que existe $\gamma : U_1 \rightarrow \text{coker}(f)$ tal que $\delta_0 = l\gamma$. Pero $\gamma i_k = \delta_0 i_k = 0$ y como k es el cokernel de i_k , existe $\delta : \ker(h) \rightarrow \text{coker}(f)$ tal que $\gamma = \delta k$. Por lo tanto $\delta k = l\gamma = \delta_0$. Si $z \in {}_{\mathcal{A}} \ker(h)$, como v es un epimorfismo, existe $y \in {}_{\mathcal{A}} B$ tal que $v(y) = i_h(z)$. Ahora como $v' \circ g(y) = h \circ v(y) = h \circ i_h(z) = 0$ se sigue que $g(y) \equiv u'(x)$, para $x \in {}_{\mathcal{A}} A'$, y así, $\delta(z) = p_f(x)$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & z \\
 & & & & \downarrow i_h \\
 & & y & \xrightarrow{v} & i_h(z) \\
 & & \downarrow g & & \downarrow h \\
 x & \xrightarrow{u'} & g(y) & \xrightarrow{v'} & 0 \\
 \downarrow p_f & & & & \\
 p_f(x) & & & &
 \end{array}$$

Para ver la exactitud en $\ker(h)$, veamos que $\delta \circ \bar{v} = 0$. Sea $y' \in {}_{\mathcal{A}} \ker(g)$, entonces

$$i_h \circ \bar{v}(y') = v \circ i_g(y')$$

donde podemos tomar $y = i_g(y')$, entonces $g(y) \equiv 0$, y como u' es monomorfismo implica que $x = 0$, y así, $\delta \circ \bar{v} = 0$.

Ahora, sea $z \in {}_{\mathcal{A}} \ker(h)$ tal que $\delta(z) \equiv 0$, esto es que $p_f(x)$ construido en el diagrama anterior cumple que $p_f(x) \equiv 0$. Por la exactitud de la primera columna, se tiene que existe $x' \in {}_{\mathcal{A}} A$ tal que $f(x') = x$. Por lo tanto, $g \circ u(x') \equiv g(y)$. De esta forma, podemos tomar $y_0 = y - {}_{\mathcal{A}} u(x')$ donde

$$g(y_0) \equiv g(y - {}_{\mathcal{A}} u(x')) \equiv g(y) - {}_{\mathcal{A}} g(u(x')) \equiv g(y) - {}_{\mathcal{A}} g(y) \equiv 0.$$

Por lo tanto, existe $y_1 \in {}_{\mathcal{A}} \ker(g)$ tal que $i_g(y_1) \equiv y_0$ y como $v \circ u = 0$ se tiene que $v(y_0) \equiv v(y) \equiv i_h(z)$. Por lo que obtenemos lo siguiente

$$\begin{array}{ccc}
 y_1 & \xrightarrow{\bar{v}} & i_h(y_1) \\
 \downarrow i_g & & \downarrow i_h \\
 y_0 & \xrightarrow{v} & 0 \\
 \downarrow g & & \\
 0 & &
 \end{array}$$

al ser i_h un monomorfismo, tenemos $\bar{v}(y_1) \equiv z$. Con esto se prueba que si $\delta(z) = 0$, existe $y_1 \in {}_{\mathcal{A}} \ker(g)$ tal que $\bar{v}(y_1) \equiv z$, y de esta manera se muestra la exactitud en $\ker(h)$, de manera dual para $\text{coker}(f)$. □

2.5 Prerradicales en la categoría de módulos

En esta sección recordamos algunos conceptos básicos de la teoría de prerradicales, esto es, de los subfuntores del funtor identidad de la categoría de módulos, $R\text{-Mod}$. Para profundizar ver [3] y [22].

Definición 2.5.1 Sea $r : \text{Mod}(R) \longrightarrow \text{Mod}(R)$ un funtor. Decimos que r es un prerradical en $\text{Mod}(R)$ si es un subfuntor del funtor identidad; esto es, si satisface las siguientes condiciones:

- a) Para todo $M \in \text{Mod}(R)$ se tiene que $r(M) \leq M$.
- b) Para todo morfismo $f : M \longrightarrow N$, $f(r(M)) \leq r(N)$. Esto es, el siguiente diagrama está bien definido y es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} r(M) & \xrightarrow{\iota_{r(M)}} & M \\ f|_{r(M)} \downarrow & & \downarrow f \\ r(N) & \xrightarrow{\iota_{r(N)}} & N \end{array}$$

donde $\iota_{r(M)}$ e $\iota_{r(N)}$ son los morfismos inclusión de $r(M)$ y de $r(N)$ en M , respectivamente.

Proposición 2.5.2 Sean r un prerradical y $M, N \in \text{Mod}(R)$. Entonces,

- a) Si N es submódulo de M , entonces $r(N) \leq r(M)$.
- b) Si $f : M \longrightarrow N$ es monomorfismo, entonces $f|_{r(M)}$ también lo es.

Demostración. [22, Proposición 2.2].

Lema 2.5.3 Sea r es un prerradical y $f : M \longrightarrow N$ un isomorfismo. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen:

- a) $f(r(M)) = r(N)$.
- b) $r(M) = f^{-1}(r(N))$.

Demostración. [22, Lema 2.3].

Definición 2.5.4 Sea $\mathcal{C}$ una subcategoría plena de $\text{Mod}(R)$. Un $\mathcal{C}$ -prerradical es una asignación $\tau : \mathcal{C} \longrightarrow \text{Mod}(R)$ tal que:

- a) Para cada $M \in \mathcal{C}$ se tiene que $\tau(M) \leq M$.
- b) Para cada R -homomorfismo $f : M \longrightarrow N \in \mathcal{C}$, $f(\tau(M)) \leq \tau(N)$.

Proposición 2.5.5 Sea $\mathcal{C}$ una categoría plena de $\text{Mod}(R)$ y τ' un $\mathcal{C}$ -prerradical. Entonces, existe un prerradical τ tal que $\tau(M) = \tau'(M)$ para cada $M \in \mathcal{C}$.

Demostración. [3].

Observación 2.5.6 Si r es un prerradical y $M, N \in \text{Mod}(R)$ son tales que $M \cong N$, entonces $r(M) \cong r(N)$.

Ejemplo 2.5.7 En $\text{Mod}(R)$ tenemos el siguiente par de ejemplos clásicos de prerradicales:

a) **El radical de Jacobson** de un módulo: Definamos el siguiente funtor:

$$\text{rad} : \text{Mod}(R) \longrightarrow \text{Mod}(R)$$

$$\text{rad}(M) := \{N \leq M \mid N \text{ es submódulo máximo de } M\}.$$

Este ejemplo, se abordará con mayor profundidad en la sección 2.7

b) **El soclo de un módulo:**

$$\text{soc} : \text{Mod}(R) \longrightarrow \text{Mod}(R)$$

$$\text{soc}(M) := \sum \{B \leq M \mid B \text{ es simple}\}.$$

Denotamos por $R\text{-pr}$ a la clase de todos los prerradicales sobre $\text{Mod}(R)$ y definimos un orden parcial (copo) en $R\text{-pr}$ de la siguiente forma:

$$r \preceq s \text{ si y sólo si para cada } M \in \text{Mod}(R), r(M) \leq s(M).$$

Definición 2.5.8 Decimos que un prerradical r es:

a) **Idempotente** si para cada $M \in \text{Mod}(R)$ se tiene que $r(r(M)) = r(M)$.

b) **Radical**, si $r(M/r(M)) = 0$, para cada $M \in \text{Mod}(R)$.

Proposición 2.5.9 Sean r un prerradical en $\text{Mod}(R)$, $M \in \text{Mod}(R)$ y $N \leq M$. Entonces, se satisfacen las siguientes condiciones:

a) $r(N) \leq N \cap r(M)$.

b) $(r(M) + N)/N \leq r(M/N)$.

c) Si $r(N) = N$, entonces $N \leq r(M)$.

d) Si $r(M/N) = 0$, entonces $r(M) \leq N$.

Demostración. [22, Proposición 2.1.1].

Observación 2.5.10 *Se puede probar que a todo prerradical r se le puede asociar el siguiente funtor*

$$1/r : \text{Mod}(R) \longrightarrow \text{Mod}(R)$$

$$M \mapsto M/r(M).$$

a este, se le llama **co-prerradical asociado a r** . Consultar [22] para más detalles

Lema 2.5.11 *Sean r un prerradical y $f : M \longrightarrow N$ un morfismo. Si f es epimorfismo, entonces $(1/r)(f)$ es epimorfismo.*

Demostración.[22, Lema 2.10].

Proposición 2.5.12 *Sean r un prerradical y $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia de módulos. Entonces,*

$$a) \ r \left(\prod_{i \in I} M_i \right) \leq \prod_{i \in I} r(M_i).$$

$$b) \ r \left(\bigoplus_{i \in I} M_i \right) = \bigoplus_{i \in I} r(M_i).$$

Demostración. [22, Proposición 2.1.2].

2.6 Prerradicales exactos izquierdos y t-radicales

Definición 2.6.1 *Sea r un prerradical. Decimos que r es:*

- a) **Exacto izquierdo (o hereditario)** *si para cada $M \in \text{Mod}(R)$ y para cada N submódulo de M , $r(N) = N \cap r(M)$.*
- b) **t-radical (o cohereditario)** *si para cada $M \in \text{Mod}(R)$ se satisface que $r(M) = r(R)M$.*

Definición 2.6.2 *Sea r un prerradical en $\text{Mod}(R)$. Se definen:*

- a) $T_r = \{M \in \text{Mod}(R) \mid r(M) = M\}$, *la clase de pretorsión asociada a r .*
- b) $F_r = \{M \in \text{Mod}(R) \mid r(M) = 0\}$, *la clase de libre de torsión asociada a r .*

A los elementos en T_r se les llama también módulos de r -torión; y respectivamente, a los módulos en F_r , se les suele llamar libres de r -torsión.

Proposición 2.6.3 *Sea r un prerradical, las siguientes condiciones son equivalentes.*

- a) r es exacto izquierdo.
- b) r es hereditario.
- c) r es idempotente y T_r es una clase de módulos cerrada bajo isomorfismos, submódulos, cocientes y sumas directas.

Demostración.[22, Proposición 3.1.1].

2.7 El radical de un módulo

El radical es útil para estudiar la estructura de composición de un módulo M y aparece frecuentemente en contextos como la teoría de representaciones. Puedes consultar: [13], [19] y [16].

Definición 2.7.1 Sean $M \in \text{Mod}(R)$ y

$$\mathcal{M}_M := \{X \leq M \mid X \text{ es máximo en } M\}$$

El radical de Jacobson de M , se define como:

$$\text{rad}(M) := \bigcap_{X \in \mathcal{M}_M} X.$$

Observación 2.7.2 Notemos que si $\mathcal{M}_M = \emptyset$, entonces $\text{rad}(M) = M$. En efecto, ya que para cada $X \in \mathcal{M}_M$, se satisface que $\text{rad}(M) \leq X \leq M$ y como $\mathcal{M}_M$ es vacío, el único elemento que satisface esta condición es M por lo que $\text{rad}(M) = M$.

Denotaremos por $\mathcal{L}(M)$ a la familia de R -submódulos (izquierdos) de M . Se puede demostrar que con el orden inducido por la relación de ser submódulo, este resulta ser un copo (conjunto parcialmente ordenado). Más aún, $\mathcal{L}(M)$ es una retícula completa, modular y superiormente continua [4].

Lema 2.7.3 Sean M un módulo y $N \leq M$. El módulo $\frac{M}{N}$ es simple si y sólo si $N \leq M$ es máximo.

Demostración.

Recordemos que $\mathcal{L}_R\left(\frac{M}{N}\right)$ denota el conjunto de submódulos de $\frac{M}{N}$, y por el *Lema de la Correspondencia para módulos*, se tiene un isomorfismo:

$$\mathcal{L}_R\left(\frac{M}{N}\right) \cong \frac{\mathcal{L}(M)}{N},$$

donde $\frac{\mathcal{L}(M)}{N} = \left\{ \frac{L}{N} \mid N \leq L \leq M \right\}$. Por lo que para cualquier submódulo $\bar{L} \leq \frac{M}{N}$, existe $L \leq M$ tal que $N \leq L \leq M$ y se tiene que $\bar{L} \cong \frac{L}{N}$.

Supongamos que $\frac{M}{N}$ es un módulo simple. Esto significa que, para todo $\bar{L} \leq \frac{M}{N}$ (que podemos ver como $\frac{L}{N}$, con $N \leq L \leq M$), debe cumplirse que $L = M$ o $L = N$. En consecuencia, L es un submódulo máximo de M .

Ahora supongamos que N es un submódulo máximo. Entonces, para todo L tal que $N \leq L \leq M$, se tiene que $L = M$ o $L = N$. Por lo tanto, $\mathcal{L}_R\left(\frac{M}{N}\right) = \left\{ \bar{0}, \frac{M}{N} \right\}$ lo cual implica que $\frac{M}{N}$ es un módulo simple. $\square$

Lema 2.7.4 Sean $M \in \text{Mod}(R)$ y $\mathcal{S}$ la clase de todos los módulos simples en $\text{Mod}(R)$. Entonces,

a) $\text{rad}(M/\text{rad}(M)) = 0$.

b) $\text{rad}(M) = \bigcap \{ \ker(\alpha) \mid \alpha \in \text{Hom}_R(M, S) \text{ y } S \in \mathcal{S} \}$.

Más aún, rad , es un radical, de acuerdo con la definición 2.5.8

Demostración.

a) Sea $\mathcal{M}_{\bar{M}} := \{ \bar{X} \leq M/\text{rad}(M) \mid \bar{X} \text{ es máximo en } M/\text{rad}(M) \}$.

a.1) Si $\mathcal{M}_{\bar{M}} = \emptyset$, entonces por la observación 2.7.2

$$M/\text{rad}(M) = \text{rad}(M/\text{rad}(M)), \text{ y así, } \text{rad}(M) = M.$$

a.2) Si $\mathcal{M}_{\bar{M}} \neq \emptyset$. Consideremos la proyección sobre él $\text{rad}(M)$
 $\pi : M \longrightarrow M/\text{rad}(M)$ y

$$\mathcal{L}(M) = \{ N \subseteq M \mid N \text{ es submódulo de } M \}$$

la retícula de submódulos de M . Como

$$\mathcal{L}(M)/\text{rad}(M) \cong \mathcal{L}(M/\text{rad}(M))$$

y por el teorema de la correspondencia existe este isomorfismo

$$\tilde{\pi} : \mathcal{L}(M)/\text{rad}(M) \longrightarrow \mathcal{L}(M/\text{rad}(M))$$

$$\text{rad}(M) \subseteq X \mapsto X/\text{rad}(M)$$

Veamos que $\mathcal{M}_M \subseteq \mathcal{L}(M)/\text{rad}(M)$. En efecto, como

$$\text{rad}(M) \subseteq X \subsetneq M \text{ para todo } X \in \mathcal{M}_M$$

de donde $\tilde{\pi}(\mathcal{M}_M) = \mathcal{M}_M/\text{rad}(M) = \mathcal{M}_{\overline{M}}$, entonces

$$\begin{aligned} \text{rad}(M/\text{rad}(M)) &= \bigcap_{\overline{X} \in \mathcal{M}_{\overline{M}}} \overline{X} \\ &= \bigcap_{Z \in \mathcal{M}_M} \tilde{\pi}(Z) \\ &= \tilde{\pi}\left(\bigcap_{Z \in \mathcal{M}_M} Z\right) \\ &= \tilde{\pi}(\text{rad}(M)) \\ &= \text{rad}(M)/\text{rad}(M) \\ &= \overline{0}_M. \end{aligned}$$

b) Realicemos esta demostración por contenciones.

$\subseteq$) Sean $x \in \text{rad}(M)$ y $f: M \rightarrow S$ un morfismo con S simple.

Consideremos $\ker(f)$.

Si $f = 0$, entonces $\ker(f) = M$ y claramente $x \in M$.

Si $f \neq 0$, como $f(M) \leq M$ y S es simple se tiene que f es suprayectivo.

Por el primer teorema de isomorfismo de Noether $M/\ker(f) \cong S$, luego $\ker(f)$ es un submódulo máximo. Como $x \in \text{rad}(M)$ y $\text{rad}(M)$ está contenido en todos los submódulos máximos, se sigue que $x \in \ker(f)$.

$\supseteq$) Supongamos que $x \notin \text{rad}(M)$. Entonces, existe un submódulo maximaximo $N \subset M$ tal que $x \notin N$.

Sea $\pi: M \rightarrow M/N$ la proyección canónica. Como M/N es simple y $\pi(x) \neq 0$ (pues $x \notin N$), se tiene que $x \notin \ker(\pi)$. Pero π es un morfismo $M \rightarrow S$ con $S = M/N$ simple, lo que contradice que x pertenezca a la intersección de todos los $\ker(f)$. Por tanto, $x \in \text{rad}(M)$.

□

Algunos Teoremas Clásicos

En la teoría de representaciones de K -álgebras y de módulos (finitamente generados) sobre estas, se presentan los siguientes teoremas fundamentales para el desarrollo de la teoría, tales como *Teorema de Jordan-Hölder-Schreier*; *Teorema de Krull-Remak-Schmidt*. En este capítulo abordaremos algunos de ellos, así como de nociones básicas de módulos artinianos y noetherianos. Para un estudio más profundo de ello, se sugiere consultar: [4], [6], [19], [16], [13], [15] y [11].

3.1 Módulos artinianos y noetherianos

En esta sección abordaremos algunas nociones básicas de la teoría concerniente a los anillos y módulos artinianos y noetherianos; mencionando algunos de los teoremas importantes que nos serán de utilidad más adelante en el texto. Al escribir ${}_R M$ nos referiremos a R -módulos a izquierda con R un anillo con unidad. Por simplicidad, escribiremos únicamente M , cuando no haya lugar a confusión.

Definición 3.1.1 *Decimos que un módulo ${}_R M$ satisface la **condición de cadena descendente** (D.C.C.), si para toda cadena descendente de submódulos de M*

$$\varepsilon: \quad \cdots \subseteq M_{i+1} \subseteq M_i \subseteq \cdots \subseteq M_2 \subseteq M_1$$

existe $n \in \mathbb{N}^+$ tal que $M_n = M_i$, para cada $i \geq n$.

Definición 3.1.2 Sean ${}_R M$ y $N \leq M$ un submódulo. Decimos que N es un **submódulo mínimo** en M satisface las siguientes condiciones:

- a) $N \neq 0$; y
- b) Para cada $0 \leq L \leq N$ implica que $L = N$ o $L = 0$.

Ejemplo 3.1.3 Sea V un K -espacio vectorial tal que $\dim_K(V) = n$. Sea $u \in V$ con $u \neq 0$. Consideremos $W = \langle u \rangle$, el subespacio generado por u . Notemos que W es un subespacio vectorial mínimo de V . En efecto, $W \neq 0$ ya que $u \neq 0$, y si $L \leq W$ es un subespacio vectorial de V tal que $0 \leq L \leq W$ entonces tenemos que:

$$0 = \dim_K(0) \leq \dim_K(L) \leq \dim_K(W) = 1$$

Dado que $\dim_K(L) \in \mathbb{N}$, entonces $\dim_K(L) = 0$ o $\dim_K(L) = 1$, concluyendo que $L = 0$ o $L = W$.

Definición 3.1.4 Decimos que un módulo ${}_R M$ satisface la **condición mínima** si cada familia de submódulos de M tiene un elemento mínimo con respecto a la inclusión.

Ejemplo 3.1.5 Sean K un campo y V un K -espacio vectorial de dimensión finita. Consideremos $\{W_i\}_{i \in \mathbb{N}^+}$ una cadena descendente de subespacios vectoriales de V .

$$\varepsilon: \quad \cdots \subseteq W_{i+1} \subseteq W_i \subseteq \cdots \subseteq W_2 \subseteq W_1$$

al ser $\dim_K(V) = n$. Entonces,

$$\varepsilon_1 \cdots \leq \dim_K(W_i) \leq \cdots \leq \dim_K(W_2) \leq \dim_K(W_1) \leq \dim_K(V) = n$$

ε_1 es una cadena descendente de números naturales. Sea $k = \min\{\dim_K(W_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ como se cumple que $\dim_K(W_{i+1}) \leq \dim_K(W_i) = k$, entonces como k es el elemento mínimo. Se sigue que $\dim_K(W_r) = \dim_K(W_i)$ para $r \geq i$. Por lo tanto, V satisface D.C.C.

Proposición 3.1.6 Sea ${}_R M$ un módulo, las siguientes condiciones son equivalentes:

- a) La familia de todos los submódulos de M satisfacen D.C.C.
 - b) Cualquier familia no vacía de submódulos de M tiene un elemento mínimo.
-

Demostración. $b \Rightarrow a$) Consideremos una cadena descendente de submódulos de M ,

$$\varepsilon : \cdots \subset M_{i+1} \subset M_i \subset \cdots \subset M_2 \subset M_1$$

y $F = \{M_i\}_{i \in \mathbb{N}^+}$ una familia de submódulos de M . Por hipótesis, F tiene un elemento mínimo. Entonces, existe $M_j \in F$ tal que $M_j \leq M_i$ para todo $i \geq j$. Por lo tanto, F satisface D.C.C.

$a \Rightarrow b$) Sea $S = \{S_i\}_{i \in \mathbb{N}^+}$ una familia no vacía de submódulos de M sin elemento mínimo. Sea $S_1 \in S$ un elemento arbitrario, como S no tiene elemento mínimo, existe $S_2 \in S$ tal que $S_2 \subset S_1$. Luego, como S_2 no es elemento mínimo, existe $S_3 \in S$ tal que $S_3 \subset S_2 \subset S_1$. Siguiendo este argumento, obtenemos la siguiente cadena descendente infinita de submódulos de M .

$$\cdots \subset S_{i+1} \subset S_i \subset \cdots \subset S_3 \subset S_2 \subset S_1$$

Por lo tanto, M no satisface la condición de cadena descendente D.C.C. $\square$

Definición 3.1.7 Sea ${}_R M$ un módulo. Se dice que M es **artiniano** si satisface las condiciones equivalentes de la proposición 3.1.6.

De forma dual se tiene la siguiente definición.

Definición 3.1.8 Decimos que un ${}_R M$ satisface la **condición de cadena ascendente** (A.C.C.) si para toda cadena ascendente de submódulos de M

$$\gamma : M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \cdots \subseteq M_i \subseteq M_{i+1} \subseteq \cdots$$

existe $n \in \mathbb{N}^+$ tal que $M_n = M_i$ para cada $i \geq n$.

Definición 3.1.9 Sea ${}_R M$ un módulo y $N \leq M$ un submódulo. Decimos que N es **máximo** si $N \neq M$ y, para todo L tal que $N \leq L \leq M$, se cumple que $L = N$ o $L = M$.

Definición 3.1.10 Decimos que un módulo ${}_R M$ satisface la **condición máxima** si para cada familia de submódulos de M tiene un elemento máximo con respecto a la inclusión.

Proposición 3.1.11 Sea ${}_R M$ un módulo, las siguientes condiciones son equivalentes:

- a) La familia de todos los submódulos de M satisface A.C.C.
- b) Cualquier familia no vacía de submódulos de M tiene un elemento máximo.

Demostración. $a \Rightarrow b$) Sea $F = \{M_i\}_{i \in \mathbb{N}^+}$ una familia no vacía de submódulos de M , tal que F no tiene un elemento máximo.

Sea $M_1 \in F$ un elemento arbitrario, como F no tiene un elemento máximo, existe $M_2 \in F$ tal que $M_1 \subset M_2$. Como M_2 no es elemento máximo, existe M_3 tal que $M_1 \subset M_2 \subset M_3$. Siguiendo el mismo procedimiento tenemos una cadena ascendente infinita que no se detiene, por lo tanto, F no tiene elemento máximo.

$b \Rightarrow a$) Consideremos γ una cadena ascendente de submódulos de M

$$\gamma: \quad M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \cdots \subseteq M_i \subseteq M_{i+1} \subseteq \cdots$$

y $F = \{M_i\}_{i \in \mathbb{N}^+}$ una familia de submódulos de M . Como F tiene un elemento máximo, existe $N \in F$ tal que para todo $M_i \in F$ se tiene que $M_i \subseteq N$. Como $N \in F$ existe $k \in \mathbb{N}^+$ tal que $N = M_k$. En particular, $M_{k+1} \subseteq M_k$ pero por hipótesis $M_k \subseteq M_{k+1}$, en consecuencia, $M_k = M_i$ para toda $i \geq k$. Por lo tanto, F satisface A.C.C. $\square$

Definición 3.1.12 Un ${}_R M$ se llama **noetheriano** si satisface las condiciones equivalentes de la proposición 3.1.11.

A continuación mostramos algunos ejemplos particulares sobre módulos noetherianos y artinianos.

Ejemplo 3.1.13 Consideremos $M = \mathbb{R}[x]$ y $R = \mathbb{R}$. M no es un R -módulo artiniiano ni noetheriano. Comencemos mostrando que M no es noetheriano. Consideremos $\beta = \{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots\}$ una base de $\mathbb{R}[x]$. Consideremos la cadena ascendente ξ siguiente:

$$\xi: \quad \langle 1 \rangle \subset \langle 1, x \rangle \subset \langle 1, x, x^2 \rangle \subset \langle 1, x, x^2, x^3 \rangle \subset \cdots$$

si ξ se estacionara, existiría $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\langle 1, x, x^2, \dots, x^n \rangle = \langle 1, x, x^2, \dots, x^n, x^{n+1} \rangle$$

Entonces, se tiene que $x^{n+1} \in \langle 1, x, x^2, \dots, x^n \rangle$, es decir:

$$x^{n+1} = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i \text{ con } \alpha_i \in \mathbb{R}$$

lo que contradice que $\deg(x^{n+1}) \neq \deg(x^i)$ con $i \in \{0, \dots, n\}$, por lo tanto, $\mathbb{R}[x]$ no es noetheriano.

¹Donde $\deg(p(x))$ se define como es el mayor exponente de x con coeficiente distinto de cero.

Ahora veamos que M no es artiniiano. Consideremos la cadena descendente δ . Denotando $\beta_i = \beta \setminus \{1, x, \dots, x^i\}$

$$\delta: \quad \langle \beta_0 \rangle \supset \langle \beta_1 \rangle \supset \langle \beta_2 \rangle \supset \langle \beta_3 \rangle \supset \dots$$

observemos que δ no se estaciona, ya que en caso de hacerlo, existiría $m \in \mathbb{N}$ tal que $\langle \beta_m \rangle = \langle \beta_{m+1} \rangle$. En particular, notemos que $x^{m+1} \in \langle \beta_m \rangle = \langle \beta_{m+1} \rangle$ lo que significa que

$$x^{m+1} = \sum_{i=m+1}^{\infty} a_i x^i = \sum_{m+2}^{\infty} b_i x^i \text{ con } a_i, b_i \in \mathbb{R}.$$

Entonces,

$$\sum_{m+2}^{\infty} b_i x^i - \sum_{i=m+1}^{\infty} a_i x^i = \sum_{i=m+2}^{\infty} (b_i - a_i) x^i - a_{m+1} x^{m+1} = 0$$

es una combinación lineal de elementos linealmente independientes, donde $a_{m+1} \neq 0$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\mathbb{R}[x]$ no es artiniiano visto como R -módulo.

Ejemplo 3.1.14 Consideremos $M = {}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$. Veamos que ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ es noetheriano pero no artiniiano.

Dado que $\mathbb{Z}$ es DIP², cada uno de sus ideales es finitamente generado, por lo que

$$\mathcal{L}({}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}) = \{\langle n \rangle \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{n\mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Sea ϵ una cadena ascendente de submódulos de ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$

$$\epsilon: \quad I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots \subseteq I_j \subseteq I_{j+1} \subseteq \dots$$

como $I_j = \langle n_j \rangle$, para todo $j \in \mathbb{N}$ y para algún $n_j \in \mathbb{N}$. Entonces, la cadena es de la siguiente forma:

$$\epsilon: \quad \langle n_1 \rangle \subseteq \langle n_2 \rangle \subseteq \langle n_3 \rangle \subseteq \dots \subseteq \langle n_j \rangle \subseteq \langle n_{j+1} \rangle \subseteq \dots$$

como $\langle n_j \rangle \subseteq \langle n_{j+1} \rangle$ se tiene que $n_{j+1} \mid n_j$ y además como $n_{j+1} \leq n_j$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Esto induce una cadena descendente de números naturales.

$$\dots \leq n_{j+1} \leq n_j \leq \dots \leq n_3 \leq n_2 \leq n_1$$

y por el principio del buen orden se tiene un elemento mínimo $k \in \mathbb{N}$. De forma que $n_k = n_{l+1}$ para todo $l \geq k$. Por lo tanto, la cadena ϵ se estaciona

²DIP= Dominio de ideales principales

y ${}_Z\mathbb{Z}$ es noetheriano.

Consideremos la siguiente cadena descendente de ideales de $\mathbb{Z}$

$$\delta: \quad \cdots \subset \langle p^{j+1} \rangle \subset \langle p^j \rangle \subset \cdots \subset \langle p^2 \rangle \subset \langle p \rangle$$

para p un número primo. La cadena δ no se estaciona, ya que obtendríamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\langle p^n \rangle = \langle p^i \rangle$ para todo $i \geq n$ lo cual es una contradicción.

Proposición 3.1.15 Sean ${}_R M$ un módulo y $N \leq M$ submódulo de M . Entonces,

a) M es artiniano $\Leftrightarrow \frac{M}{N}, N$ son artinianos.

b) M es noetheriano $\Leftrightarrow \frac{M}{N}, N$ son noetherianos.

Demostración. Para esta prueba realizaremos solo el inciso a) ya que el segundo se realiza de forma análoga.

$\Rightarrow$) Supongamos que M es artiniano,

a.1) Primero mostremos que N es artiniano: Consideremos ϵ_N una cadena descendente de submódulos de N

$$\epsilon_N: \quad N_1 \supseteq N_2 \supseteq N_3 \supseteq \cdots \supseteq N_j \supseteq N_{j+1} \supseteq \cdots$$

como N es submódulo de M , la cadena de ϵ_N también es una cadena de M . Al ser M artiniano existe $m \in \mathbb{N}^+$ tal que $N_m = N_i$ para toda $i \geq m$.

a.2) Ahora mostremos que $\frac{M}{N}$ es artiniano: Consideremos $\pi_N: M \rightarrow \frac{M}{N}$ la proyección canónica sobre N y una cadena descendente de $\frac{M}{N}$.

$$\epsilon_{\frac{M}{N}}: \quad \overline{M_1} \supseteq \overline{M_2} \supseteq \overline{M_3} \supseteq \cdots \supseteq \overline{M_j} \supseteq \overline{M_{j+1}} \supseteq \cdots$$

Y por el Teorema de correspondencia, obtenemos

$$\epsilon_M: \pi^{-1}(\overline{M_1}) \supseteq \pi^{-1}(\overline{M_2}) \supseteq \pi^{-1}(\overline{M_3}) \supseteq \cdots \supseteq \pi^{-1}(\overline{M_j}) \supseteq \pi^{-1}(\overline{M_{j+1}}) \supseteq \cdots$$

una cadena descendente de submódulos de M que es artiniano, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\pi^{-1}(\overline{M_n}) = \pi^{-1}(\overline{M_i})$ para todo $i \geq n$, entonces

$$\overline{M_n} = \pi(\pi^{-1}(\overline{M_n})) = \pi(\pi^{-1}(\overline{M_i})) = \overline{M_i}.$$

Por lo tanto, la cadena $\epsilon_{\frac{M}{N}}$ se estaciona y $\frac{M}{N}$ es artiniano.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\frac{M}{N}$ y N son módulos artinianos. Sea

$$\gamma_M: \quad M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \cdots \supseteq M_j \supseteq M_{j+1} \supseteq \cdots$$

una cadena descendente de submódulos de M . Como

$$\gamma_N: \quad M_1 \cap N \supseteq M_2 \cap N \supseteq M_3 \cap N \supseteq \cdots \supseteq M_j \cap N \supseteq M_{j+1} \cap N \supseteq \cdots$$

es una cadena descendente de submódulos de N , por hipótesis existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $M_r \cap N = M_i \cap N$ para todo $i \geq r$.

$$\gamma_{\frac{M}{N}}: \quad \frac{M_1 + N}{N} \supseteq \frac{M_2 + N}{N} \supseteq \cdots \supseteq \frac{M_j + N}{N} \supseteq \frac{M_{j+1} + N}{N} \supseteq \cdots$$

$\gamma_{\frac{M}{N}}$ es una cadena descendente de submódulos de $\frac{M}{N}$, existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{M_t + N}{N} = \frac{M_j + N}{N}$ para todo $j \geq t$. Tomando $n = \max\{r, t\}$, obtenemos:

$$M_n \cap N = M_i \cap N \quad \forall i \geq n \quad (3.1)$$

$$\frac{M_n + N}{N} = \frac{M_i + N}{N} \quad \forall i \geq n \quad (3.2)$$

de la ecuación (3.1) y que $M_n \supset M_i \supset M_{i+1}$ tenemos:

$$\begin{aligned} M_n &= M_n \cap (M_n + N) \\ &= M_n \cap (M_i + N) \quad \text{Por la ecuación 3.1} \\ &= M_i + (N \cap M_n) \quad \text{Por la ley modular.} \\ &= M_i + (N \cap M_i) \quad \text{Por la ecuación 3.1} \\ &= M_i \cap (M_i + N) \quad \text{Por la ley modular.} \\ &= M_i. \end{aligned}$$

De esta forma concluimos que la cadena ϵ_M se estaciona, es decir, M es artiniiano. □

Corolario 3.1.16 *Si*

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M_2 \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de R -módulos. Entonces, M es artiniiano si y solo si M_1 y M_2 son artinianos.

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que M es artiniiano, primero mostremos que M_1 artiniiano: Sea ϵ_{M_1} una cadena descendente de submódulos de M_1

$$\epsilon_{M_1}: \quad L_1 \supseteq L_2 \supseteq L_3 \supseteq \cdots,$$

entonces

$$\epsilon_{\alpha(M_1)}: \quad \alpha(L_1) \supseteq \alpha(L_2) \supseteq \alpha(L_3) \supseteq \cdots$$

es una cadena descendente de submódulos de M , al ser artiniiano, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha(L_n) = \alpha(L_i)$ para todo $i \geq n$ y como α es inyectiva, $L_n = L_i$ para todo $i \geq n$, por lo tanto, M_1 es artiniiano.

Veamos que M_2 artiniiano: Sea ϵ_{M_2} una cadena descendente de submódulos de M_2

$$\epsilon_{M_2}: \quad U_1 \supseteq U_2 \supseteq U_3 \supseteq \cdots,$$

entonces

$$\epsilon_{\beta^{-1}(M_2)}: \quad \beta^{-1}(U_1) \supseteq \beta^{-1}(U_2) \supseteq \beta^{-1}(U_3) \supseteq \cdots$$

es una cadena descendente de submódulos de M . Por lo que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\beta^{-1}(L_m) = \beta^{-1}(L_i)$ para todo $i \geq m$ y como β es suprayectiva

$$\beta(\beta^{-1}(U_n)) = \beta(\beta^{-1}(U_i)) \text{ implica } U_n = U_i \text{ para todo } i \geq n.$$

Por lo tanto, M_2 es artiniiano.

$\Leftarrow$) Supongamos que M_1 y M_2 son artinianos. Sea

$$\epsilon_M: \quad N_1 \supseteq N_2 \supseteq N_3 \supseteq \cdots$$

una cadena descendente de submódulos de M , entonces

$$\epsilon_{\alpha^{-1}(M)}: \quad \alpha^{-1}(N_1) \supseteq \alpha^{-1}(N_2) \supseteq \alpha^{-1}(N_3) \supseteq \cdots$$

Es una cadena descendente de submódulos de M_1 , por lo que existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha^{-1}(N_r) = \alpha^{-1}(N_i)$ para todo $i \geq r$.

$$\epsilon_{\beta(M)}: \quad \beta(N_1) \supseteq \beta(N_2) \supseteq \beta(N_3) \supseteq \cdots$$

es una cadena descendente de submódulos de M_2 que al ser artiniiano existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $\beta(N_t) = \beta(N_j)$ para toda $j \geq t$. Consideremos $m = \max\{r, t\}$, entonces

$$\alpha^{-1}(N_m) = \alpha^{-1}(N_i) \text{ y } \beta(N_m) = \beta(N_i)$$

como α es monomorfismo y β es epimorfismo, en consecuencia, $N_m = N_i$ para todo $i \geq m$. Por lo tanto, M es artiniiano. □

Corolario 3.1.17 *La suma directa de un número finito de módulos artinianos es un módulo artiniiano si y solo si cualquier sumando es artiniiano.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que

$$M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$$

es un módulo artiniiano. Consideremos $\pi_i : \bigoplus_{i=1}^n M_i \longrightarrow M_i$ el morfismo proyección sobre M_i , entonces

$$\pi^{-1}(M_i) \leq \bigoplus_{i=1}^n M_i$$

y como $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ es artiniiano, por el corolario 3.1.16, $\pi^{-1}(M_i)$ es artiniiano al ser π suprayectivo $\pi(\pi^{-1}(M_i)) = M_i$. Por lo tanto, M_i es artiniiano para toda $i = 1, 2, \dots, n$.

$\Leftarrow$) Para ver esta implicación, realizaremos una demostración por inducción. Sea M_1 y M_2 dos submódulos artiniianos, consideremos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow M_2 \xrightarrow{i_2} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{\pi} M_1 \longrightarrow 0$$

por el corolario 3.1.16 $M_1 \oplus M_2$ es artiniiano.

Supongamos que $\bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i$ es artiniiano. Mostraremos que la siguiente sucesión es exacta.

$$0 \longrightarrow M_n \xrightarrow{i_n} \bigoplus_{i=1}^n M_i \xrightarrow{\pi_{n-1}} \bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i \longrightarrow 0$$

Para ello veamos que $\ker(\pi_{n-1}) = \text{Im}(i_n)$.

($\subseteq$) Sea $\bar{x} = (m_1, \dots, m_{n-1}, m_n) \in \ker(\pi_{n-1})$, entonces $\pi_{n-1}(\bar{x}) = \bar{0}$, en consecuencia,

$$m_1 = m_2 = \dots = m_{n-1} = 0.$$

Y así, $\bar{x} = (0, \dots, 0, m_n) \in \text{Im}(i_n)$.

($\supseteq$) Sea $y \in \text{Im}(i_n)$, entonces existe $m' \in M_n$ tal que

$$i_n(m') = (0, \dots, 0, m') = (m_1, m_2, \dots, m_{n-1}, m_n) = y$$

con $m_i \in M_i$ para $1 \leq i \leq n-1$. Por la igualdad anterior $m' = m_n$ y $m_1 = m_2 = \dots = m_{n-1} = 0$, así

$$\pi_{n-1}(y) = \pi_{n-1}(0, \dots, 0, m_n) = 0.$$

Entonces, $y \in \ker(\pi_{n-1})$

y por el corolario 3.1.16. Se concluye que

$$M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$$

es artinianiano. □

Proposición 3.1.18 *Si M es noetheriano si y solo si cada uno de sus submódulos es finitamente generado.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $N \leq M$ un submódulo de M y

$\mathcal{F} = \{\text{conjunto de submódulos de } N \text{ finitamente generados}\}.$

$\mathcal{F} \neq \emptyset$, ya que $0 \in \mathcal{F}$, entonces tiene un elemento máximo N_0 .

Si $N \neq N_0$, consideremos el módulo $N_0 + \langle x \rangle$ con $x \in N \setminus N_0$ donde $N_0 + \langle x \rangle \in \mathcal{F}$ pero $N_0 \subset N_0 + \langle x \rangle$, lo cual contradice que N_0 sea máximo. Por lo tanto, $N = N_0$, esto es N es finitamente generado.

$\Leftarrow$) Supongamos que cualquier submódulo de M es finitamente generado. Sea

$$\gamma : M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \cdots \subseteq M_i \subseteq M_{i+1} \subseteq \cdots$$

una cadena descendente de submódulos de M . Definamos $N = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ la

unión de submódulos de M , como $N \leq M$ es un submódulo, por hipótesis N es finitamente generado. Sea $\beta = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un conjunto generador de N .

Si $x_i \in M_{n_i}$, consideremos $n = \max\{n_i\}_{i=1}^r$, así, $x_i \in M_n$ para toda i , por lo tanto, $M_n = N$. □

Esta proposición tiene la versión análoga para módulos artinianianos, para ello introducimos la noción dual de un módulo finitamente generado.

Definición 3.1.19 *Un módulo M es **finitamente cogenerado** si para cada familia $\{M_i\}_{i \in I}$ de submódulos de M tal que $\bigcap_{i \in I} M_i = 0$ implica que existe $J \subset I$ finito tal que $\bigcap_{j \in J} M_j = 0$.*

Ejemplo 3.1.20 El módulo $\mathbb{Z}\mathbb{Z}$ no es finitamente cogenerado. Considerando

$$P = \{p \in \mathbb{Z} \mid p \text{ es primo}\}$$

tenemos que $\bigcap_{p \in P} p\mathbb{Z} = 0$, sin embargo para cualquier conjunto finito de pri-

mos $\{p_1, p_2, \dots, p_t\}$ se tiene que $\bigcap_{i=1}^t p_i\mathbb{Z} = r\mathbb{Z}$ donde

$$r = \text{mcm}\{p_1, p_2, \dots, p_t\}.$$

Probemos esta última igualdad:

$\supseteq$) Esta contención se obtiene de manera inmediata, ya que $p_i \mid r$ para todo $i = 1, \dots, t$.

$\subseteq$) Sea $x \in \bigcap_{i=1}^t p_i\mathbb{Z}$ como la intersección finita de submódulos es un submódulo de M , sea $r = \text{mcm}\{p_1, \dots, p_t\}$. Como $x \in \bigcap_{i=1}^t p_i\mathbb{Z}$ para todo $i \in \{1, \dots, t\}$, $p_i \mid x$. Así, x es un múltiplo de $p_1, \dots, p_t$; en consecuencia, es divisible por r . Por lo tanto, $x \in r\mathbb{Z}$.

Proposición 3.1.21 Sea M un módulo es artiniiano si y solo si cada uno de sus submódulos cocientes es finitamente cogenerado.

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que M es un módulo artiniiano. Sea $N \leq M$ submódulo y $\left\{ \frac{M_i}{N} \right\}_{i \in I}$ una familia de submódulos de $\frac{M}{N}$ tal que $\bigcap_{i \in I} \frac{M_i}{N} =$

0. Consideremos

$$\mathcal{F} = \left\{ \bigcap_{J \subseteq I} M_j \mid J \text{ es finito} \right\}$$

notemos que $\mathcal{F} \neq \emptyset$ ya que $0 \in \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F}$ tiene un elemento mínimo. Sea $F \subseteq I$ finito tal que $\bigcap_{f \in F} M_f \in \mathcal{F}$ es el elemento mínimo. Si $\bigcap_{f \in F} M_f \neq N$

tomando $\beta \in I \setminus F$ obtenemos que $\bigcap_{f \in F \cup \beta} M_f \in \mathcal{F} \subseteq \bigcap_{f \in F} M_s$.

Lo que contradice que $\bigcap_{f \in F} M_f$ sea elemento mínimo, en consecuencia,

$\bigcap_{f \in F} M_f = N$, y así,

$$\frac{\bigcap_{f \in F} M_f}{N} = \bigcap_{f \in F} \frac{M_f}{N} = 0.$$

$\Leftarrow$) Sea

$$\epsilon_M: \quad M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \cdots$$

una cadena de submódulos de M y consideremos $N = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} M_i$ como $N \leq M_i$ para todo $i \in I$. Tenemos

$$\epsilon_{\frac{M}{N}}: \quad \frac{M_1}{N} \supset \frac{M_2}{N} \supset \frac{M_3}{N} \cdots$$

es una cadena de submódulos de $\frac{M}{N}$. Notemos que

$$\bigcap_{i \in I} \frac{M_i}{N} = \frac{\bigcap_{i \in I} M_i}{N} = \frac{N}{N} = 0$$

y al ser $\frac{M}{N}$ es finitamente cogenerated existe $J = \{1, 2, \dots, n\} \subseteq I$ tal que $\bigcap_{i \in J} \frac{M_i}{N} = 0$ y así

$$\bigcap_{i \in J} \frac{M_i}{N} = \frac{\bigcap_{i \in J} M_i}{N}.$$

Tomando $M_n = \bigcap_{j=1}^n M_j = N$, entonces en la cadena ϵ se tiene que $M_n \supset M_k$, por lo tanto, $M_n = M_k$ para todo $k \geq n$. □

Proposición 3.1.22 a) *Un endomorfismo ϕ de un módulo artinianiano es un automorfismo si y solo si ϕ es monomorfismo.*

b) *Un endomorfismo ϕ de un módulo noetheriano es automorfismo si y solo si ϕ es epimorfismo.*

Demostración. Primero probemos el inciso a).

$\Rightarrow$) Como ϕ es un automorfismo, en particular es monomorfismo.

$\Leftarrow$) Consideremos $\phi: M \longrightarrow M$ un monomorfismo. Observemos que

$$Im(\phi^{n+1}) \subseteq Im(\phi^n) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

En efecto, si $x \in Im(\phi^{n+1})$, existe $y \in M$ tal que

$$\phi^{n+1}(y) = \phi^n(\phi(y)) = x$$

tomando $y_1 = \phi(y) \in M$, obtenemos

$$\phi^{n+1}(y) = \phi^n(y_1) = x \in Im(\phi^n).$$

Sea ϵ la siguiente cadena:

$$\epsilon: \quad M \supseteq Im(\phi) \supseteq Im(\phi^2) \supseteq Im(\phi^3) \supseteq \dots$$

como M es artinianiano, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $Im(\phi^r) = Im(\phi^k)$ para todo $k \geq r$. Ahora, para cada $m \in M$, notemos que

$$\phi^r(m) = \phi^{r+1}(m_1) = \phi^r(\phi(m_1))$$

como ϕ^r es monomorfismo, se tiene que $m = \phi(m_1)$, es decir, ϕ es suprayectivo.

Para el inciso b).

$\Rightarrow$) Como ϕ es un automorfismo, en particular es epimorfismo.

$\Leftarrow$) Consideremos $\phi: M \longrightarrow M$ un epimorfismo. Sea $m \in ker(\phi^n)$,

$$\phi^{n+1}(m) = \phi(\phi^n(m)) = 0,$$

entonces $m \in ker(\phi^{n+1})$, en consecuencia,

$$ker(\phi^n) \subseteq ker(\phi^{n+1}).$$

Tomando la siguiente cadena de submódulos de M

$$\delta: \quad 0 \subseteq ker(\phi) \subseteq ker(\phi^2) \subseteq ker(\phi^3) \subseteq \dots$$

al ser M noetheriano, existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $ker(\phi^t) = ker(\phi^k)$ para toda $k \leq t$. Tomando $x \in ker(\phi^t)$ y como ϕ^t es epimorfismo, existe $m_1 \in M$ tal que $\phi^t(m_1) = x$. Entonces,

$$\phi^{t+1}(m_1) = \phi^t(\phi(m_1)) = \phi^t(x) = 0$$

Se sigue que $m_1 \in ker(\phi^{t+1}) = ker(\phi^t)$, por lo tanto,

$$x = \phi^t(m_1) = 0,$$

es decir, ϕ es inyectivo.

□

Definición 3.1.23 Un módulo $M \neq 0$ se dice que es **escindible** si existen submódulos $N_1, N_2 \subseteq M$ distintos de cero tal que $M = N_1 \oplus N_2$. Diremos que M es inescindible en caso contrario.

Ejemplo 3.1.24 Sea $V = \mathbb{R}^2$, consideremos los subespacios vectoriales generados por la base canónica $W_1 = \langle (1, 0) \rangle$ y $W_2 = \langle (0, 1) \rangle$, entonces $\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2$.

Ejemplo 3.1.25 Consideremos el espacio vectorial de matrices de tamaño $n \times n$ con entradas reales $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Sea $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, su traspuesta, denotada como A^T , es la matriz de tamaño $n \times n$ que se obtiene de intercambiar renglones por columnas de A . Tomando $T_1 = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$ y $T_2 = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}$, entonces $V = T_1 \oplus T_2$.

Ejemplo 3.1.26 Sean V un espacio vectorial no nulo con producto interno, $W \subseteq V$ un subespacio vectorial. Consideremos el conjunto

$$W^\perp := \{v \in V \mid v \perp w \text{ para todo } w \in W\}.$$

Entonces, $V = W \oplus W^\perp$.

Proposición 3.1.27 (Lema de Fitting) Para cualquier endomorfismo ϕ sobre un módulo M que es artiniiano y noetheriano, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$M = \text{Im}(\phi^n) \oplus \ker(\phi^n).$$

Demostración. Sea δ una cadena de submódulos de M

$$\delta: \quad 0 \subseteq \ker(\phi) \subseteq \ker(\phi^2) \subseteq \ker(\phi^3) \subseteq \dots$$

al ser M es noetheriano, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $\ker(\phi^r) = \ker(\phi^i)$ para toda $r \leq i$. Tomando ϵ la siguiente cadena

$$\epsilon: \quad M \supseteq \text{Im}(\phi) \supseteq \text{Im}(\phi^2) \supseteq \text{Im}(\phi^3) \supseteq \dots$$

como M es artiniiano, existe $t \in \mathbb{N}$ tal $\text{Im}(\phi^t) = \text{Im}(\phi^j)$ para todo $t \leq j$. Tomando $n = \max\{r, t\}$, obtenemos que para todo $m \geq n$

$$\text{Im}(\phi^n) = \text{Im}(\phi^m) \text{ y } \ker(\phi^n) = \ker(\phi^m).$$

Ahora mostraremos que $M = \text{Im}(\phi^n) \oplus \ker(\phi^n)$.

a) $Im(\phi^n) \cap ker(\phi^n) = 0$.

Sea $x \in Im(\phi^n) \cap ker(\phi^n)$, entonces existe $y \in M$ tal que $\phi^n(y) = x$. Además como $x \in ker(\phi^n)$ se tiene que

$$\phi^n(x) = \phi^n(\phi^n(y)) = \phi^{2n}(y) = 0$$

de donde $y \in ker(\phi^{2n}) = ker(\phi^n)$, entonces

$$\phi^{2n}(y) = \phi^n(y) = x = 0.$$

b) $M = Im(\phi^n) + ker(\phi^n)$.

Sea $m \in M$, como $\phi^n(m) = \phi^{2n}(m_1)$, entonces $\phi^n(m) - \phi^{2n}(m_1) = 0$, es decir, $\phi^n(m - \phi^n(m_1)) = 0$ para algún $m_1 \in M$, por lo que $m - \phi^n(m_1) \in ker(\phi^n)$. Entonces, $m \in M$ y se tiene que

$$m = (m - \phi^n(m_1)) + \phi^n(m_1).$$

□

3.2 Módulos simples y semisimples

El estudio de módulos simples y semisimples es una herramienta importante, ya que nos ayudara en el futuro para el analices de teoremas importantes en la teoría de módulos y en representaciones de álgebras. En esta sección denotaremos como $End(M)$ al anillo de endomorfismos de M .

Definición 3.2.1 M es **simple**, si $M \neq 0$ y M no tiene submódulos no triviales.

Ejemplo 3.2.2 a) El campo K visto como un K -módulo es simple.

b) Todo K -espacio vectorial de dimensión 1, es un K -módulo simple.

Corolario 3.2.3 Sea M un módulo que es inescindible, artinian y noetheriano. Entonces, para cualquier endomorfismo de M es un automorfismo o es nilpotente.

Demostración. Sea $\phi \in End(M)$, por el corolario 3.1.27 tenemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $M = Im(\phi^n) \oplus ker(\phi^n)$, al ser M inescindible, tenemos dos casos:

Caso 1: $M = Im(\phi^n)$ y $ker(\phi^n) = \{0\}$.

Como ϕ^n es un isomorfismo y $M = Im(\phi^n) \subseteq Im(\phi) \subseteq M$, entonces $Im(\phi) = M$, es decir, ϕ es suprayectivo y por el primer teorema de isomorfismo de Noether, $\tilde{\phi} : \frac{M}{ker(\phi)} \rightarrow Im(\phi)$ es isomorfismo, pero como $ker(\phi) = \{0\}$, se obtiene que ϕ es monomorfismo, y así, ϕ es un automorfismo.

Caso 2: $Im(\phi^n) = \{0\}$ y $M = ker(\phi^n)$.

Como $ker(\phi^n) = M$, entonces para todo $m \in M$ se tiene que

$$\phi^n(m) = 0, \text{ se sigue que, } \phi^n \equiv 0.$$

Por lo tanto, ϕ es nilpotente.

□

Lema 3.2.4 *Sea M un módulo en el que todo submódulo es sumando directo. Entonces, todo submódulo $U \leq M$, con $U \neq 0$ contiene un módulo simple.*

Demostración. Sean $U \leq M$ con $U \neq 0$ y

$$S = \{V \leq U \mid V \neq U\},$$

$S \neq \emptyset$, ya que $0 < S$. Consideramos S un conjunto ordenado por la inclusión y $\{V_i\}_{i \in I}$ una cadena de submódulos en S .

Definamos $V = \bigcup_{i \in I} V_i$, observemos que $V \leq U$ y $V \neq U$. En efecto, si $V = U$,

tendríamos que $U \leq V_i$ para algún $i \in I$. Lo que contradice que $V_i \in S$, en consecuencia, V es una cota superior para S y por el lema de Zorn, S tiene un elemento máximo, digamos C .

Como $C \leq U \leq M$, por hipótesis, existe $M_1 \leq M$ tal que $M = C \oplus M_1$ y por la ley modular:

$$U = U \cap M = U \cap (C \oplus M_1) = C \oplus (M_1 \cap U),$$

entonces por el tercer teorema de isomorfismo de Noether se tiene que:

$$\frac{U}{C} = \frac{C + (M_1 \cap U)}{C} \cong \frac{M_1 \cap U}{(M_1 \cap U) \cap C} = \frac{M_1 \cap U}{0} = M_1 \cap U.$$

Como C es máximo en U , entonces $\frac{U}{C}$ es simple. Por lo que $M_1 \cap U$ es submódulo simple en U .

□

Lema 3.2.5 Sean M un módulo tal que $M = \sum_{i \in I} M_i$ con M_i simple y $U \leq M$. Entonces,

a) Existe $J \subseteq I$, tal que $M = U \oplus \left(\bigoplus_{i \in J} M_i \right)$.

b) Existe $K \subseteq I$, tal que $U \cong \bigoplus_{i \in K} M_i$.

Demostración.

a) Sea

$$\Gamma = \left\{ L \mid L \subset I \text{ tal que } U + \sum_{i \in L} M_i = U \oplus \left(\bigoplus_{i \in L} M_i \right) \right\}$$

observemos que $\Gamma \neq \emptyset$, ya que $0 = \sum_{i \in \emptyset} M_i$ y así $\emptyset \in \Gamma$.

Considerando Γ ordenado por la contención. Sea $\Lambda \subseteq \Gamma$ un conjunto totalmente ordenado por la inclusión y definamos $L^* = \bigcup_{L \in \Lambda} L$, entonces

L^* es una cota superior de Λ .

a.1) Si $m \in U \cap \left(\sum_{i \in L^*} M_i \right)$, existe $E \subseteq L^*$ finito, donde

$E = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ tal que $m = \sum_{i \in E} M_i$. Además, como Λ es un coto, existe $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $E \subseteq L_{\lambda_m}$, de manera que

$$m \in U \cap \left(\sum_{i \in L_{\lambda_m}} M_i \right) = 0.$$

a.2) Por otro lado, si $i_0 \in \Lambda$ y $m \in M_{i_0} \cap \left(U + \sum_{i \in \Lambda \setminus i_0} M_i \right)$, existe un subconjunto $J \subseteq \Lambda \setminus \{i_0\}$ finito tal que

$$m \in M_{i_0} \cap \left(U + \sum_{i \in J} M_i \right).$$

Si λ_r es tal que $J \cup \{i_0\} \subseteq L_{\lambda_r}$, entonces

$$m \in M_{i_0} \cap \left(U + \sum_{L_{\lambda_r} \setminus \{i_0\}} M_i \right) = 0,$$

como $m \in M_{i_0} \cap \left(U + \sum_{i \in L_{\lambda_r} - \{i_0\}} M_i \right) = 0$ con los índices en Λ se tiene que $L^* \in \Gamma$ y por el lema de Zorn, Γ tiene un elemento máximo. Sea J el elemento máximo y definamos

$$N := U + \left(\sum_{i \in J} M_i \right) = U \oplus \left(\bigoplus_{i \in J} M_i \right),$$

como, $M = \sum_{i \in I} M_i$. Mostraremos que $\forall i \in I \ M_i \subseteq N$.

Sea $i_0 \in I$ y supongamos $M_{i_0} \not\subseteq N$. Al ser M_{i_0} simple implica que $M_{i_0} \cap N = \{0\}$. Como $J \subseteq J \cup \{i_0\}$ contradice el hecho que J es máximo. Se sigue que $M_{i_0} \subseteq N$.

- b) Para $U \leq M$ tenemos que $M = U \oplus P$ para $P \leq M$. Por el inciso (a), existe $K \subseteq I$ tal que

$$M = P \oplus \left(\bigoplus_{i \in K} M_i \right).$$

Entonces, por el tercer teorema de isomorfismo

$$\frac{M}{P} = \frac{U \oplus P}{P} \cong \frac{U}{(U \cap P)} = U$$

y

$$\frac{M}{P} = \frac{P \oplus \left(\bigoplus_{i \in K} M_i \right)}{P} \cong \frac{\bigoplus_{i \in K} M_i}{P \cap \bigoplus_{i \in K} M_i} \cong \bigoplus_{i \in K} M_i.$$

Por lo tanto, $U \cong \bigoplus_{i \in K} M_i$.

□

Teorema 3.2.6 Sea M un R -módulo, las siguientes condiciones son equivalentes:

- a) Todo submódulo de M es una suma de submódulos simples.
- b) M es una suma de submódulos simples.
- c) M es una suma directa de submódulos simples.
- d) Todo submódulo de M es un sumando directo de M .

Demostración.

$a \Rightarrow b$) Supongamos que todo submódulo de M es suma de submódulos simples. Sea $U \leq M$ por hipótesis $U = \sum_{i \in I} M_i$ con M_i simple, en particular $M \leq M$, entonces $M = \sum_{i \in I} M_i$.

$b \Rightarrow c$) Supongamos que M es suma de submódulos simples, por lo que $M = \sum_{i \in I} M_i$ con M_i simple. Para $U \leq M$ por el Lema 3.2.5 tenemos que

$$M = U \oplus \left(\bigoplus_{i \in J} M_i \right) \text{ para } J \subseteq I.$$

Considerando $U = \{0\}$, entonces $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$.

$c \Rightarrow d$) Consecuencia del Lema 3.2.5, inciso a).

$d \Rightarrow a$) Sea $U \leq M$ y definamos

$$U_0 = \sum_{M_i \leq U} M_i \text{ con } M_i \text{ simple.}$$

Observemos que como $U_0 \leq U \leq M$, entonces $M = U_0 \oplus N$ con $N \leq M$ y por la ley modular

$$U = U \cap M = U \cap (U_0 \oplus N) = U_0 \oplus (U \cap N).$$

Tenemos dos casos:

a.1) Si $U \cap N = \{0\} \Rightarrow U = U_0 = \sum_{M_i \leq U} M_i$ con M_i simple.

- a.2) Si $U \cap N \neq \{0\}$. Por el Lema 3.2.5 existe $B \leq U \cap N$ con B simple tal que $B \leq U_0$, entonces

$$B \cap (N \cap U) \leq U_0 \cap (N \cap U) = 0$$

lo que es una contradicción.

En consecuencia,

$$U = U_0 \oplus (U \cap N) = U_0.$$

□

Definición 3.2.7 *Un módulo M se dice que es **semisimple** si y solo si M satisface las condiciones anteriores.*

Ejemplo 3.2.8 a) *Todo K -espacio vectorial es semisimple.*

- b) *Si V es de dimensión finita, entonces sea $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V , por lo que $V = \sum_{i=1}^n \langle v_i \rangle$.*

- c) *Si V es de dimensión infinita, entonces $V = \sum_{x \in V} \langle x \rangle$.*

- d) $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ no es un submódulo semisimple. Recordemos que los submódulos de $\mathbb{Z}$ son de la forma $n\mathbb{Z}$ con $n \in \mathbb{Z}$. Dado cualquier submódulo de $\mathbb{Z}$ no es simple, ya que se cumple que:

$$\dots \subseteq 4n\mathbb{Z} \subseteq 3n\mathbb{Z} \subseteq 2n\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z}.$$

- e) $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ no es semisimple. Recordemos que un $\mathbb{Z}$ -módulo M se dice **divisible** si para todo $m \in M$ y todo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, existe $x \in M$ tal que $n \cdot x = m$. $\mathbb{Q}$ es $\mathbb{Z}$ -módulo divisible: dado cualquier $q \in \mathbb{Q}$ y cualquier $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, basta tomar $x = \frac{q}{n} \in \mathbb{Q}$, y se tiene que $n \cdot x = q$.

Supongamos que $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ es semisimple, entonces

$$\mathbb{Q} = \bigoplus_{i \in I} S_i,$$

donde cada S_i es un submódulo simple. Recordemos que los $\mathbb{Z}$ -módulos se pueden ver como grupos abelianos, entonces un grupo simple son los grupos cíclicos de orden primo, por lo que se pueden ver de la forma $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ para algún primo $p \in \mathbb{Z}$, sin embargo estos módulos no son divisibles: para $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, no siempre existe una solución x tal que $n \cdot x = \bar{1}$ para un n dado. Por tanto, cada S_i no es divisible. Lo cual es una contradicción a que $\mathbb{Q}$ sea semisimple.

□

3.3 Teorema de Jordan-Hölder

El teorema de Jordan-Hölder afirma que toda serie de composición de un módulo tiene la misma longitud y los mismos factores simples, salvo isomorfismo y orden. Este es un resultado fundamental en teoría de módulos, que permite analizar a estos en sus submódulos simples. En este capítulo veremos las herramientas necesarias para poder abordarlo.

Consideremos cadenas finitas de submódulos de M . Sean

$$B: \quad 0 = B_0 \subset B_1 \subset \cdots \subset B_k = M$$

$$C: \quad 0 = C_0 \subset C_1 \subset \cdots \subset C_l = M$$

Definición 3.3.1 Considerando las cadenas B y C mencionadas anteriormente se tiene que:

- a) La longitud de la cadena B es k .
- b) Los factores de la cadena B son los módulos $\frac{B_i}{B_{i-1}}$ y se le llama el i -ésimo factor de la cadena B .
- c) Las cadenas B y C se dicen que son isomorfas y se denotan $B \cong C$ si y solo si existe una biyección δ entre I , el conjunto de los índices de B , y J el conjunto de índices de C , es decir:

$$\frac{B_i}{B_{i-1}} \cong \frac{C_{\delta(i)}}{C_{\delta(i)-1}} \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

- d) B se llama un refinamiento de C y B es una subcadena de C si y solo si se cumple lo siguiente: $B = C$ (esto se conoce como el refinamiento trivial). o bien, si $B \neq C$, entonces B se obtiene omitiendo algunos C_j de la cadena C .
- e) La cadena B de M se llama serie de composición si y solo si $\forall i = 1, \dots, k$ se tiene que B_{i-1} es un submódulo máximo de B_i , esto es, $\frac{B_i}{B_{i-1}}$ es simple.
- f) El módulo M se dice que es de longitud finita si y solo si $M = 0$ o M tiene una serie de composición.

Lema 3.3.2 Si $B \cong C$ y $B_i = B_{i-1}$ para un i fijo, entonces existe un $j \in J$ tal que si B_i, C_j se omiten, las cadenas resultantes son isomorfas.

Demostración. Como $B \cong C$, entonces existe una biyección δ tal que

$$0 = \frac{B_i}{B_{i-1}} \cong \frac{C_{\delta(i)}}{C_{\delta(i)-1}}, \text{ entonces } \frac{C_{\delta(i)}}{C_{\delta(i)-1}} = 0.$$

Considerando $j = \delta(i)$ obtenemos que $C_j = C_{j-1}$, omitiendo C_j y B_i de las cadenas C y B respectivamente:

$$B^*: \quad 0 = B_0 \subset B_1 \subset \cdots \subset B_{i-1} \subset B_{i+1} \subset \cdots \subset B_k = M$$

$$C^*: \quad 0 = C_0 \subset C_1 \subset \cdots \subset C_{j-1} \subset C_{j+1} \subset \cdots \subset C_l = M.$$

Donde la biyección $\sigma: I \setminus \{i\} \rightarrow J \setminus \{j\}$ definida como $\sigma(j) := \delta(j)$ hace que

$$\frac{C_{\sigma(s)}}{C_{\sigma(s)-1}} = \frac{C_{\delta(s)}}{C_{\delta(s)-1}} \cong \frac{B_s}{B_{s-1}}.$$

□

Ejemplo 3.3.3 a) Sean K un campo y V un K -espacio vectorial de dimensión finita, entonces V tiene una serie de composición.

Como $\dim_K(V) = n < \infty$, sea $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V . Al tomar la siguiente cadena de V

$$B: \quad 0 = \langle 0 \rangle \subset \langle v_1 \rangle \subset \langle v_1 \rangle + \langle v_2 \rangle \subset \cdots \subset \sum_{k=1}^{i-1} \langle v_k \rangle \subset \cdots \subset \sum_{k=1}^n \langle v_k \rangle = V,$$

donde $\langle v_l \rangle \cap \sum_{\substack{i=1 \\ l \neq i}}^k \langle v_i \rangle = 0$. En consecuencia,

$$W_i = \frac{\sum_{k=1}^i \langle v_k \rangle}{\sum_{k=1}^{i-1} \langle v_k \rangle} = \frac{\langle v_1 \rangle + \cdots + \langle v_{i-1} \rangle + \langle v_i \rangle}{\langle v_1 \rangle + \cdots + \langle v_{i-1} \rangle} = \frac{N + \langle v_i \rangle}{N} \cong \frac{\langle v_i \rangle}{N \cap \langle v_i \rangle} = \langle v_i \rangle,$$

considerando $N = \langle v_1 \rangle + \cdots + \langle v_{i-1} \rangle$, como $\langle v_i \rangle$ es simple. Por lo tanto, W_i también lo es, así B es una serie de composición de V .

b) $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ no tiene serie de composición.

Supongamos que $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ tiene una serie de composición de longitud k y su

factor $\frac{B_k}{B_{k-1}}$ es simple. Por el lema 2.7.3, B_{k-1} es máximo en $\mathbb{Z}$, entonces $B_{k-1} = p\mathbb{Z}$ con p un primo.

Para $k = 2$ tenemos que $B_1 \leq p\mathbb{Z}$, entonces $B_1 = p^n\mathbb{Z}$ y al ser una serie de composición, se tendría que

$$\frac{B_1}{B_0} = \frac{p^n\mathbb{Z}}{\langle 0 \rangle} = p^n\mathbb{Z} = B_1$$

es simple, lo cual contradice que B_1 no es un módulo simple. Por lo tanto, $\mathbb{Z}$ no tiene serie de composición.

c) $\mathbb{Q}$ no tiene serie de composición.

Supongamos que $\mathbb{Q}$ tiene una serie de composición de longitud k , como $\frac{B_i}{B_{i-1}}$ es un módulo simple, por el lema 2.7.3, B_{i-1} es un módulo máximo en B_i , en particular B_{k-1} es máximo en $\mathbb{Q} = B_k$. Mostraremos que $\mathbb{Q}$ no tiene módulos máximos. Supongamos que $N < \mathbb{Q}$ es máximo. Tomemos $a \in \mathbb{Q} \setminus N$, entonces

$$N \leq \langle N \cup \{a\} \rangle = N + \langle a \rangle$$

al ser N máximo, se tiene que $\mathbb{Q} = \langle N + \langle a \rangle \rangle$. Sea $S = N \cup \langle a \rangle$ un sistema de generadores de $\mathbb{Q}$, entonces para todo $q \in \mathbb{Q}$

$$q = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i + \alpha_0 a \text{ donde } \alpha_i \in \mathbb{Z} \text{ y } a_i \in N.$$

En particular para $\frac{a}{2} \in \mathbb{Q}$ se tiene:

$$\frac{a}{2} = \alpha_0 a + \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i \text{ donde } \alpha_i, \alpha_0 \in \mathbb{Z} \text{ y } a_i \in N \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Entonces,

$$a = (2\alpha_0)a + \sum_{i=1}^n (2\alpha_i)a_i.$$

De donde

$$am = \sum_{i=1}^n (2\alpha_i a_i),$$

con $m = 1 - 2\alpha_0$, así

$$\frac{a}{m} = a\alpha'_0 + \sum_{i=1}^n \alpha'_i b_i.$$

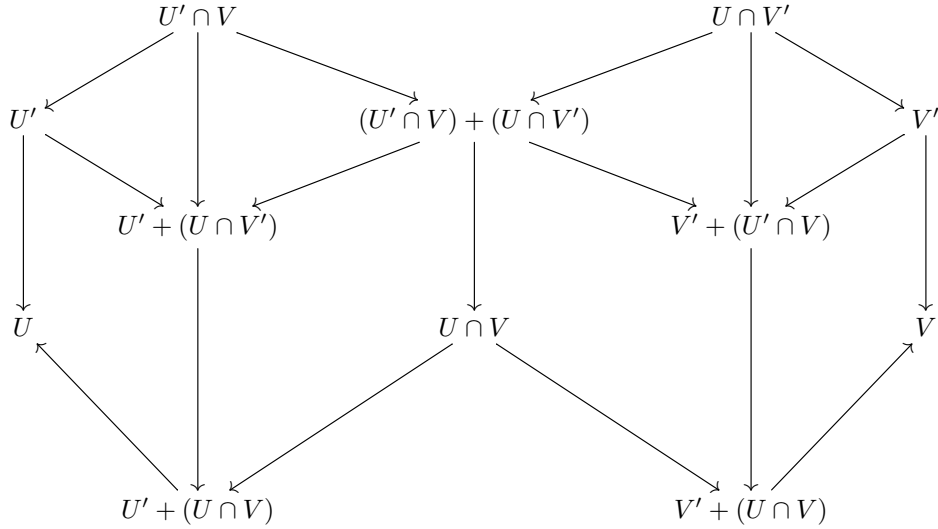
Despejando y sustituyendo tenemos que

$$a = \sum_{i=1}^n (2\alpha_i) a_i + \sum_{i=1}^n \alpha_i \text{ donde } a_i, b_i \in N \text{ y } \alpha_i, \alpha'_i \in \mathbb{Z} \forall i = 1, \dots, n.$$

En consecuencia, $a \in N = \langle S \rangle$, lo cual contradice el hecho de que N es un módulo máximo.

Lema 3.3.4 (Lema de Zassenhaus) Sean $U' \leq U \leq M$ y $V' \leq V \leq M$, entonces

$$\frac{U' + (U \cap V)}{U' + (U \cap V')} \cong \frac{V' + (U \cap V)}{V' + (U' \cap V)}.$$



Demostración. Observemos que $U' + (U \cap V) = (U' \cap V) + (U \cap V)$

$$\begin{aligned} U' + (U \cap V) &= U' + [(U \cap V') + (U \cap V)] \\ &= (U \cap V) + [U' + (U \cap V')] \\ &= (U' \cap (U \cap V)) + [(U \cap V') \cap (U \cap V)] \text{ Por la ley modular.} \\ &= (U' \cap V) + (U \cap V'). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 \frac{U' + (U \cap V)}{U' + (U \cap V')} &= \frac{(U' \cap V) + (U \cap V')}{U' + (U \cap V')} \\
 &= \frac{(U \cap V) + [U' + (U \cap V')]}{U' + (U \cap V')} \\
 &\cong \frac{U \cap V}{[U' + (U \cap V')] \cap (U \cap V)} \\
 &\cong \frac{U \cap V}{(U' \cap V) + (U \cap V')} \\
 &\cong \frac{V' + (U \cap V)}{V' + (U' \cap V)}
 \end{aligned}$$

□

Teorema 3.3.5 (Jordan Hölder-Schreier) *Cualesquiera dos cadenas finitas de un módulo M tienen refinamientos isomorfos.*

Demostración. Consideremos

$$B: \quad 0 = B_0 \subset B_1 \subset \cdots \subset B_k = M$$

$$C: \quad 0 = C_0 \subset C_1 \subset \cdots \subset C_l = M$$

cadenas finitas de M y definamos $B_{ij} = B_i + (B_{i+1} \cap C_j)$ para toda $j = 0, \dots, l$. Observemos que $B_i \leq B_{ij} \leq B_{i+1}$ para toda $j = 0, \dots, l$. En efecto $B_{i0} = B_i$ y $B_{il} = B_i + (B_{i+1} \cap C_l) = B_i + B_{i+1} = B_{i+1}$. De manera similar definamos el módulo $C_{ij} = C_j + (C_{j+1} \cap B_i)$ para toda $i = 0, \dots, k$ que satisface $C_j \leq C_{ij} \leq C_{j+1}$. Por lo que obtenemos los siguientes refinamientos:

$$B^*: \quad B_i = B_{i0} \subset B_{i1} \subset \cdots \subset B_{il} = B_{i+1} \text{ para toda } i = 0, \dots, K$$

$$C^*: \quad C_j = C_{0j} \subset C_{1j} \subset \cdots \subset C_{kj} = C_{j+1} \text{ para toda } j = 0, \dots, l$$

como B^* y C^* tienen la misma longitud kl y

$$\begin{aligned}
 \frac{B_{i,j+1}}{B_{i,j}} &= \frac{B_i + (B_{i+1} \cap C_{j+1})}{B_i + (B_i \cap C_j)} \text{ por el lema 3.3.4} \\
 &\cong \frac{C_j + (C_{j+1} \cap B_{i+1})}{C_j + (C_{j+1} \cap B_i)} \\
 &= \frac{C_{i+1,j}}{C_{i,j}}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $B^* \cong C^*$.

□

Corolario 3.3.6 Sea M un módulo de longitud finita, entonces

a) Toda cadena

$$B: \quad 0 = B_0 \subset B_1 \subset \cdots \subset B_k = M$$

puede ser refinada a una serie de composición.

b) Cualesquiera dos series de composición son isomorfas.

Demostración.

a) Supongamos que M tiene una serie de composición

$$C: \quad 0 = C_0 \subset C_1 \subset \cdots \subset C_k = M.$$

Sea B una cadena finita de M

$$B: \quad 0 = B_0 \subset B_1 \subset \cdots \subset B_l = M$$

por el teorema 3.3.5 existen B^* y C^* refinamientos de B y C respectivamente, tales que $B^* \cong C^*$. Como C es una serie de composición se tiene que $C^* = C$ por lo que existe B' refinamiento de B^* tal que $B' \cong C = C^*$.

b) Supongamos que B y C son series de composición. Por el inciso a) existe B' refinamiento de B tal que $B = B' \cong C$.

□

Definición 3.3.7 Sea M un módulo de longitud finita, la longitud $l(M)$ es la longitud de una serie de composición de M .

Corolario 3.3.8 Sea $N \leq M$ un submódulo de M . Entonces, M es un módulo de longitud finita si y solo si N y $\frac{M}{N}$ son módulos de longitud finita y

$$l(M) = l(N) + l\left(\frac{M}{N}\right).$$

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que M es un módulo de longitud finita. Sea $N \leq M$ submódulo de M .

Si $N = 0$ se tiene que $l(N) = 0$ y $l\left(\frac{M}{N}\right) = l(M)$.

Ahora, si $N = M$ por hipótesis se tiene

$$l(N) = l(M) \text{ y } l\left(\frac{M}{N}\right) = l(0) = 0$$

Supongamos que $N < M$, entonces

$$\epsilon: \quad 0 < N < M$$

es una cadena de submódulos de M y por el corolario 3.3.6, ϵ se puede refinar a una serie de composición

$$\epsilon': \quad 0 = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_k = N \subset N_{k+1} \subset \cdots \subset N_m = M.$$

Sean

$$\epsilon_N: \quad 0 = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_k = N$$

es una serie de composición de N y

$$\epsilon_{\frac{M}{N}}: \quad 0 = \frac{N_k}{N} \subset \frac{N_{k+1}}{N} \subset \cdots \subset \frac{N_m}{N} = \frac{M}{N}$$

una serie de composición de $\frac{M}{N}$. Observemos que

$$\frac{\frac{N_j}{N}}{\frac{N_{j-1}}{N}} = \frac{N_j}{N_{j-1}}$$

es simple, entonces N y $\frac{M}{N}$ son de longitud finita.

Por la construcción $l(N) = k$ y $l\left(\frac{M}{N}\right) = m - k$, esto es

$$l(M) = l(N) + l\left(\frac{M}{N}\right)$$

$\Leftrightarrow$) Supongamos que N y $\frac{M}{N}$ son de longitud finita. Sea

$$\delta_N: \quad 0 = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_k = N$$

una serie de composición de N y

$$\delta': \quad 0 = \overline{B_0} \subset \overline{B_1} \subset \cdots \subset \overline{B_l} = \frac{M}{N}$$

una serie de composición de $\frac{M}{N}$ como $\overline{B_j} = \frac{N_j}{N}$ con $N \leq N_j \leq M$ para toda $j = 0, \dots, l$. Consideremos el morfismo

$$\begin{aligned} \nu: M &\longrightarrow \frac{M}{N} \\ M_i &\mapsto \overline{M_i} = \frac{M_i + N}{N}. \end{aligned}$$

Definamos $B_i = \nu^{-1}(\overline{B_i})$, entonces

$$\frac{\overline{B_i}}{\overline{B_{i-1}}} = \frac{\frac{B_i}{N}}{\frac{B_{i-1}}{N}} \cong \frac{B_i}{B_{i-1}}$$

es un módulo simple. Tomando

$$\eta: 0 = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_k = N = B_0 \subset B_1 \subset \cdots \subset B_l = M$$

se tiene que es una serie de composición de M y así M es de longitud finita. $\square$

Proposición 3.3.9 *Un módulo M es de longitud finita si y solo si M es artinian y noetheriano.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que la longitud de M es $l(M) = n$. Realicemos la demostración por inducción respecto a la longitud del módulo.

Para $n = 1$ se tiene

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset M$$

es una serie de composición de M . Como M_1 es simple, tenemos que M es artinian y $\frac{M}{M_1}$ es simple, por el lema 2.7.3 M_1 es máximo en M , entonces M es noetheriano.

Supongamos que para todo módulo L de longitud $l(L) = n - 1$ se tiene que L es artinian y noetheriano.

Como M es de longitud finita $l(M) = n$, entonces M tiene una serie de composición. sea

$$\epsilon: 0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_{n-1} \subset M_n = M$$

donde

$$\epsilon_{n-1}: 0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_{n-1}$$

es una serie de composición de M_{n-1} y por hipótesis M_{n-1} es artinian y noetheriano. Al ser ϵ una serie de composición de M se tiene que $\frac{M}{M_{n-1}}$ es un módulo simple, entonces $\frac{M}{M_{n-1}}$ es artinian y noetheriano y por la proposición 3.1.15 M es artinian y noetheriano.

$\Leftarrow$) Como M es noetheriano, existe $M_1 < M$ máximo en M , pero M_1 es noetheriano, entonces existe $M_2 < M_1$ máximo en M_1 , siguiendo el procedimiento obtenemos

$$\cdots \subset M_n \subset \cdots \subset M_2 \subset M_1 \subset M$$

como M es artiniiano, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 \subset M_n \subset \cdots \subset M_2 \subset M_1 \subset M$$

es una serie de composición de M . Pues $\frac{M_i}{M_{i-1}}$ es simple, ya que por el lema 2.7.3. Por lo tanto, M es de longitud finita.

□

Si M es de longitud n .

¿Por qué $l(M) = n$ es precisamente el número de módulos simples (salvo isomorfismos) que aparecen en cualquier serie de composición de M ?

Considerando

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_n$$

una serie de composición de M , como $M_i \neq M_j$ para toda $i \neq j$ y $\frac{M_i}{M_{i-1}}$ es un módulo simple, entonces $\frac{M_i}{M_{i-1}} \neq 0$ para toda $i = 1, \dots, n$. En vista de lo anterior, se tienen n cocientes que son isomorfos a un módulo simple.

3.4 Anillos Locales

El estudio de anillos locales es un tema fundamental en la teoría de anillos, en esta sección abordaremos las definiciones básicas y necesarias al igual que resultados importantes en este tema.

Definición 3.4.1 Sea R un anillo no trivial con unidad. Un elemento $r \in R$ se dice que es:

- a) **Invertible por la izquierda**, si existe $r_1 \in R$ tal que $r_1 r = 1$. A r_1 se le llama inverso izquierdo.
- b) **Invertible por la derecha**, si existe $r_2 \in R$ tal que $rr_2 = 1$ donde r_2 es el inverso derecho.
- c) **Invertible**, si $rr' = 1 = r'r$; en tal caso, r' es el inverso de r .

A continuación, presentamos un resultado básico para anillos locales.

Teorema 3.4.2 Sea R un anillo con identidad y A el conjunto de todos los elementos no invertibles de R . Entonces, las siguientes propiedades son equivalentes:

- a) A es cerrado bajo la suma.
- b) A es un ideal bilateral.
- c) A es un ideal derecho máximo.
- d) En R existe un ideal propio derecho máximo.
- e) Para todo $r \in R$ se tiene que r o $1 - r$ es invertible derecho.
- f) Para todo $r \in R$, r o $1 - r$ es invertible.

Demostración.

$a \Rightarrow b)$ Sean $b, b' \in R$ tal que $bb' = 1$, veamos que tenemos los siguientes casos:

Caso 1) Si $b'b \notin A$, esto es $b'b$ es invertible, por lo que existe $s \in R$ tal que

$$(b'b)s = 1 \text{ y } s(b'b) = 1$$

y así:

$$b(b'b)s = b \text{ y } s(b'b)b' = b'$$

por asociatividad de la multiplicación del anillo se tiene que

$$s(b'b)b' = sb'(bb') = sb' = b'.$$

Entonces,

$$b'b = sb'b = 1, \text{ por lo tanto, } b'b = bb' = 1.$$

Caso 2) Si $b'b \in A$. Como A es cerrado bajo la suma, se tiene $1 - b'b \notin A$, por lo que existe $s \in R$ tal que:

$$s(1 - b'b) = 1.$$

Entonces,

$$b' = 1b' = [s(1 - b'b)]b' = s(b' - b'b b') = s(b' - b') = 0$$

y

$$b = b(1 - b'b)s = (b - bb'b)s = (b - b)s = 0$$

lo que contradice que $1 \neq 0$.

Para mostrar que A es un ideal falta ver que para $r \in R$ y $a \in A$, se tiene que $ar \in A$. Sean $r \in R$ y $a \in A$ tal que $ar \notin A$, entonces existe $s \in R$ tal que $ars = 1$ tomando $a = b$ y $rs = b'$ tenemos que $bb' = 1$, entonces $b'b = rsa = 1$ contradice que $a \in A$, por lo tanto, $ar \in A$.

$b \Rightarrow c)$ Como A es un ideal bilateral, tenemos que A es un ideal derecho; por lo que, solo falta mostrar que A es máximo. Al ser A un ideal propio de R , $A \neq R$. Consideremos $B_R \leq R$ un ideal tal que $A \subseteq B \subseteq R$ y para $b \in B$ tenemos dos opciones:

- c.1) Si b no tiene inverso derecho, entonces b no es invertible. Por lo que $b \in A$ y al ser A un ideal, $bR \leq A$. Es decir $B \subseteq A$, por lo tanto, $B = A$.
- c.2) Si b tiene inverso derecho, entonces existe $s \in R$ tal que $bs = 1$ pero B es ideal derecho, lo que implica que $1 \in B$ así $B = R$.

Por lo tanto, A es un ideal derecho máximo.

$c \Rightarrow d)$ A es ideal máximo derecho propio.

$d \Rightarrow e)$ Sean C un ideal propio máximo derecho y $r \in R$. Supongamos que r y $1 - r$ no son invertibles por la derecha, como rR y $(1 - r)R$ son ideales de R y C es ideal máximo, entonces $rR < C$ y $(1 - r)R < C$.

Por lo que $r, 1 - r \in C$, esto es $1 = r + (1 - r) \in C$ lo cual contradice que C sea máximo. Por lo tanto, r o $1 - r$ es invertible.

$e \Rightarrow f)$ Basta ver que para todo elemento invertible derecho; es un elemento invertible. Sea $b \in R$, un elemento invertible derecho, es decir $bb' = 1$.

Caso 1) Si $b'b$ es invertible derecho, entonces existe $s \in R$ tal que $(b'b)s = 1$ como

$$b = b1 = b[(b'b)s] = (bb')bs = bs$$

así

$$(b'b)s = b'(bs) = b'b = 1.$$

Es decir, b es invertible, pues $bb' = 1$ y $b'b = 1$.

Caso 2) $1 - b'b$ es invertible derecho, entonces existe $s \in R$ tal que $(1 - b'b)s = s - b'bs = 1$, entonces

$$b = b1 = b(1 - b'b)s = bs - bb'bs = bs - bs = 0$$

lo cual contradice el hecho que $bb' = 1$.

$f \Rightarrow a)$ Observemos que para $r \in R$ y $a \in A$, ar no es invertible. Supongamos que ar es invertible, entonces existe $s \in R$ tal que $(ar)s = 1$ por la asociatividad del anillo, $a(rs) = 1$ lo cual contradice que $a \in A$.

Ahora veamos que A es cerrado bajo sumas. Sean $a_1, a_2 \in A$ tales que $(a_1 + a_2) \notin A$, es decir, $(a_1 + a_2)$ es invertible, por lo que existe $r \in R$ tal que $(a_1 + a_2)r = 1$. Así

$$a_1r + a_2r = 1 \Rightarrow a_1r = 1 - a_2r.$$

Por la observación tenemos que $a_1r \in A$ y como A es cerrado bajo múltiplos y debido a que $a_2r \in A$, esto implica que $1 \in A$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $a_1 + a_2 \in A$.

□

El teorema 3.4.2 tiene una versión para ideales izquierdos que se enuncia a continuación:

Teorema 3.4.3 *Sea R un anillo con identidad y A el conjunto de todos los elementos no invertibles de R . Entonces, las siguientes propiedades son equivalentes:*

- a) A es cerrado bajo la suma.
- b) A es un ideal bilateral.
- c) A es el único ideal izquierdo máximo.
- d) En R existe un ideal propio izquierdo máximo.
- e) Para todo $r \in R$ se tiene que r o $1 - r$ es invertible izquierdo.
- f) Para todo $r \in R$, r o $1 - r$ es invertible.

Definición 3.4.4 *Un anillo R que satisface las equivalencias de 3.4.2 o 3.4.3 se llama **anillo local**.*

Ejemplo 3.4.5 *El **anillo de series de potencia formales** sobre un campo K , denotado por $K[[X]]$, está formado por expresiones formales de la forma:*

$$f(x) = f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

donde $a_i \in K$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Dadas dos series

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad y \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

la suma se define:

$$f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)x^n.$$

El producto se define como:

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{donde} \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Los elementos invertibles en $K[[X]]$ son los que tienen término constante distinto de cero. En efecto, si $f, g \in K[[X]]$ se tiene que

$$fg = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad \text{donde} \quad c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j,$$

entonces

$$c_0 = 1 \Rightarrow a_0 b_0 = 1 \Rightarrow a = b_0^{-1}.$$

De esta forma

$$fg = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 1 \Rightarrow c_k = 0 \quad \text{para todo } k \geq 1$$

por lo que f es invertible, si tiene término constante distinto de cero. Luego, el conjunto de elementos no invertibles de este anillo es

$$A = \{f \in K[[X]] : f \text{ no tiene término constante}\}$$

que es cerrado bajo la suma y por el teorema 3.4.2, $K[[X]]$ es un anillo local.

Ejemplo 3.4.6 (La localización de anillos conmutativos en ideales primos)

Sea R un anillo conmutativo con identidad y $\mathcal{P}$ un ideal primo de R . Notamos que $R \setminus \mathcal{P}$ resulta ser un conjunto multiplicativo.

Sea

$$\Gamma = \{ (r, a) : r \in R \text{ y } a \in R \setminus \mathcal{P} \}$$

en Γ se introduce una relación de equivalencia

$$(r_1, a_1) \sim (r_2, a_2) \Leftrightarrow \exists b \in R \setminus \mathcal{P} \text{ tal que } r_1 a_2 b = r_2 a_1 b$$

Veamos que en efecto $\sim$ es una relación de equivalencia:

a) *Reflexiva.*

$(r_1, a_1) \sim (r_1, a_1)$ tomando $b = 1 \in R \setminus \mathcal{P}$ se tiene que $r_1 a_1 1 = r_1 a_1 1$.

b) *Simétrica.*

Como $(r_1, a_1) \sim (r_2, a_2)$, entonces existe $a \in R \setminus \mathcal{P}$ tal que $r_1 a_2 a = r_2 a_1 a$ y como la igualdad es simétrica, entonces $(r_2, a_2) \sim (r_1, a_1)$.

c) *Transitiva.*

Como $(r_1, a_1) \sim (r_2, a_2)$, entonces existe $a \in R \setminus \mathcal{P}$ tal que $r_1 a_2 a = r_2 a_1 a$ y $(r_2, a_2) \sim (r_3, a_3)$, entonces existe $b \in R \setminus \mathcal{P}$ tal que $r_2 a_3 b = r_3 a_2 b$. Así, considerando $r = a_1 a_2 b a$ tenemos que:

$$\begin{aligned} r_1 a_3 r &= r_1 a_3 (a_1 a_2 b a) \\ &= (r_1 a_2 a) a_3 a_1 b \\ &= (r_2 a_1 a) a_3 a_1 b \\ &= (r_2 a_3 b) a_1 a a_1 \\ &= (r_3 a_2 b) a_1 a a_1 \\ &= r_3 a_1 (a_1 a_2 b a) \\ &= r_3 a_1 r. \end{aligned}$$

Sea $R_{\mathcal{P}}$ el conjunto de las clases de equivalencia en Γ

$$R_{\mathcal{P}} = \left\{ \frac{r}{a} \mid r \in R \text{ y } a \in R \setminus \mathcal{P} \right\}$$

donde $\frac{r}{a} := [r, a]$, denota la clase de equivalencia del par (r, a) .

Sean $\frac{s}{a}, \frac{t}{b} \in R_{\mathcal{P}}$. Las operaciones se definen de la siguiente manera:

■ **Suma:**

$$\frac{s}{a} + \frac{t}{b} := \frac{sb + ta}{ab}$$

■ **Multiplicación:**

$$\frac{s}{a} \cdot \frac{t}{b} := \frac{st}{ab}$$

Primero probemos que un elemento $\frac{s}{a} \in R_{\mathcal{P}}$ es invertible si y solo si $s \notin \mathcal{P}$:

$\Rightarrow$) Si $\frac{s}{a}$ es invertible, mostremos que $s \notin \mathcal{P}$: Supongamos que $\frac{s}{a} \in R_{\mathcal{P}}$ es invertible. Entonces, existe $\frac{t}{b} \in R_{\mathcal{P}}$ tal que:

$$\frac{s}{a} \cdot \frac{t}{b} = \frac{st}{ab} = 1.$$

De aquí se deduce que $st \in R \setminus \mathcal{P}$, es decir, $st \notin \mathcal{P}$. Como $\mathcal{P}$ es primo, esto implica que $s \notin \mathcal{P}$, ya que si $s \in \mathcal{P}$, entonces $st \in \mathcal{P}$, lo cual sería una contradicción.

$\Leftarrow$) Si $s \notin \mathcal{P}$, veamos que $\frac{s}{a}$ es invertible. Supongamos que $s \notin \mathcal{P}$ y $a \notin \mathcal{P}$, entonces $a, s \in R \setminus \mathcal{P}$. Como los elementos de $R \setminus \mathcal{P}$ son invertibles en $R_{\mathcal{P}}$, existen $\frac{1}{s}, \frac{1}{a} \in R_{\mathcal{P}}$.

Entonces,

$$\frac{s}{a} \cdot \frac{a}{s} = \frac{sa}{sa} = 1,$$

lo que muestra que $\frac{s}{a}$ es invertible.

Ahora definamos

$$\mathfrak{m}_{\mathcal{P}} = \left\{ \frac{s}{a} \in R_{\mathcal{P}} \mid s \in \mathcal{P}, a \notin \mathcal{P} \right\}$$

el conjunto de los elementos no invertibles en $R_{\mathcal{P}}$, probemos que $\mathfrak{m}_{\mathcal{P}}$ es un ideal bilateral.

Sean $\frac{s}{a}, \frac{t}{b} \in \mathfrak{m}_{\mathcal{P}}$, con $s, t \in \mathcal{P}$ y $a, b \notin \mathcal{P}$. Entonces,

$$\frac{s}{a} + \frac{t}{b} = \frac{sb + ta}{ab}.$$

Como $\mathcal{P}$ es un ideal primo, y se satisface que

$$sb \in \mathcal{P}, \quad ta \in \mathcal{P} \implies sb + ta \in \mathcal{P}.$$

Además, $ab \notin \mathcal{P}$ por lo tanto,

$$\frac{s}{a} + \frac{t}{b} \in \mathfrak{m}_{\mathcal{P}}.$$

Luego, si $\frac{s}{a} \in \mathfrak{m}_{\mathcal{P}}$, entonces

$$-\frac{s}{a} = \frac{-s}{a} \in \mathfrak{m}_{\mathcal{P}},$$

ya que $\mathcal{P}$ es cerrado bajo inversos aditivos. Para ver la cerradura de la multiplicación. Consideremos $\frac{s}{a} \in \mathfrak{m}_{\mathcal{P}}$ y $\frac{t}{b} \in R_{\mathcal{P}}$, con $s \in \mathcal{P}$ y $a, b \notin \mathcal{P}$. Entonces,

$$\frac{s}{a} \cdot \frac{t}{b} = \frac{st}{ab}$$

como $\mathcal{P}$ es un ideal, $ab \in \mathcal{P}$ y $st \notin \mathcal{P}$ por lo que se tiene que,

$$\frac{s}{a} \cdot \frac{t}{b} \in \mathfrak{m}_{\mathcal{P}}.$$

De este modo, $\mathfrak{m}_{\mathcal{P}}$ es un ideal bilateral, y en consecuencia, $R_{\mathcal{P}}$ es un anillo es local.

Corolario 3.4.7 Sean R un anillo local y A el ideal de elementos no invertibles de R , entonces se tiene:

- a) R/A es un anillo con división.
- b) Todo elemento (derecho o izquierdo) invertible de R es invertible.
- c) Todo anillo no trivial, que es la imagen de un anillo local, es local.
En particular: toda imagen isomorfa de un anillo local es local.

Demostración.

- a) Para todo $s \in R/A$ tenemos que $s \notin A$ por lo que s es invertible.
- b) Por el Teorema 3.4.2.
- c) Sea $\sigma: R \rightarrow S$ un homomorfismo de anillos suprayectivo, por el teorema 3.4.2, basta ver que para todo $s \in S$ se tienen que: s o $1 - s$ es invertible. Puesto que R es local, satisface que, para toda $r \in R$; r o $1 - r$ es invertible, supongamos que r es invertible. Sea $s \in S$, entonces existe $r \in R$ tal que $\sigma(r) = s$. Luego,

$$\sigma(1 - r) = \sigma(1) - \sigma(r) = 1 - s.$$

Si r es invertible, entonces $\sigma(r^{-1})$ es el inverso de s ; ya que existe r^{-1} tal que $rr^{-1} = r^{-1}r = 1$. De donde,

$$\sigma(1) = \sigma(rr^{-1}) = \sigma(r)\sigma(r^{-1}) = s\sigma(r^{-1}) = 1.$$

Análogamente, si $1 - r$ es invertible, entonces $\sigma((1 - r)^{-1})$ es el inverso de $1 - s$.

□

3.5 Anillo de Endomorfismos Locales

En la sección anterior vimos la definición de anillos locales. En este capítulo nos centraremos cuando es el anillo de endomorfismos de un módulo dado, analizando que propiedades se pueden obtener cuando este es un anillo local.

Definición 3.5.1 Sean R un anillo y $r \in R$. Las siguientes condiciones se satisfacen.

- a) r es **nilpotente** si y solo si $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $r^n = 0$.
 - b) r es **idempotente** si y solo si $r^2 = r$.
-

Corolario 3.5.2 Sean R un anillo y $r \in R$. Las siguientes condiciones se satisfacen.

- a) Si r es nilpotente, entonces r no es invertible y $1 - r$ sí lo es.
- b) Si r es idempotente, entonces $1 - r$ también lo es.
- c) Si r es idempotente e invertible, entonces $r = 1$.

Demostración.

- a) Supongamos que r es invertible, entonces existe $s \in R$ tal que $rs = 1$ y como r es nilpotente, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $r^n = 0$. Sea m el mínimo natural tal que $r^m = 0$ y $r^{m-1} \neq 0$, entonces

$$r^{m-1} = r^{m-1}1 = r^{m-1}(rs) = (r^{m-1}r)s = r^m s = 0.$$

Lo que contradice que m sea el mínimo natural tal que $r^m = 0$, en consecuencia, r no es invertible.

- b) Sea r un elemento idempotente,

$$(1 - r)^2 = 1 - 2r + r^2 = 1 - 2r + r = 1 - r$$

es decir, $1 - r$ es idempotente.

- c) Sea r un elemento idempotente e invertible. Esto es $r^2 = r$ y existe $s \in R$ tal que $rs = 1$, entonces

$$r = r1 = r(rs) = r^2 s = rs = 1.$$

□

Ejemplo 3.5.3 Sea $R = \text{Mat}_{2 \times 2}(K)$. Si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$$

con $b \neq 0$, A es nilpotente de orden 2, $B = \text{Id}_2$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ son matrices idempotentes.

Sea K un campo y G un grupo finito de orden n . Definimos KG el **Álgebra de Grupo** como el conjunto de sumas finitas de la forma

$$u = \sum_{g \in G} \lambda_g g = \lambda_1 e + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_n g_n \text{ con } \lambda_g \in K$$

donde $e \in G$ es el elemento neutro del grupo y $g_i \in G$ es un elemento de grupo con $g_i \neq e$ para todo $i = 2, \dots, n$. Definimos dos operaciones en KG , la suma

$$+ : KG \times KG \longrightarrow KG$$

$$\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g, \sum_{g \in G} \mu_g g \right) \longmapsto \sum_{g \in G} (\lambda_g + \mu_g) g$$

y el producto

$$\bullet : KG \times KG \longrightarrow KG$$

$$\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g, \sum_{h \in G} \mu_h h \right) \longmapsto \sum_{g, h \in G} \gamma_{gh} gh$$

donde $\gamma_f = \sum_{f=gh} \lambda_g \mu_h$. Y así $(KG, +, \bullet)$ es un anillo con 1, donde $1 \in KG$ es:

$$1 = \sum_{g \in G} \lambda_g g = 1e.$$

Definiendo la siguiente acción:

$$* : K \times KG \longrightarrow KG$$

$$\left(\lambda, \sum_{g \in G} \mu_g g \right) \longmapsto \sum_{g \in G} (\lambda \mu_g) g.$$

Se tiene que $(KG, *)$ es una K -álgebra. Consideremos ι la inmersión de G en KG

$$\iota : G \longrightarrow KG$$

$$g \longmapsto 1 * g$$

Por lo que a G se puede considerar como un subconjunto de KG . Ahora si consideramos el morfismo

$$\nu : K \longrightarrow KG$$

$$r \longmapsto r * e$$

ν es monomorfismo de anillos.

a) ν es un morfismo de anillos. Para $r_1, r_2 \in K$ se tiene que:

$$\text{a.1)} \quad \nu(r_1 + r_2) = (r_1 + r_2)e = r_1e + r_2e = \nu(r_1) + \nu(r_2)$$

$$\text{a.2)} \quad \nu(r_1)\nu(r_2) = (r_1e)(r_2e) = (r_1r_2)e = \nu(r_1r_2)$$

b) ν es monomorfismo de anillos. Sean $r_1, r_2 \in K$ tal que $\nu(r_1) = \nu(r_2)$, entonces

$$\begin{aligned} r_1e &= r_2e \\ \Rightarrow r_1e - r_2e &= 0 \\ \Rightarrow (r_1 - r_2)e &= 0 \\ \Rightarrow (r_1 - r_2) &= 0 \\ \therefore r_1 &= r_2 \end{aligned}$$

c) Para $u, v \in KG$ si $u = v$ si y solo si $\lambda_g = \mu_g$ para todo $g \in G$

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} \lambda_g g &= \sum_{g \in G} \mu_g g \\ \sum_{g \in G} \lambda_g g - \sum_{g \in G} \mu_g g &= 0 \\ \sum_{g \in G} (\lambda_g - \mu_g)g &= 0 \\ (\lambda_g - \mu_g) &= 0 \text{ para todo } g \in G. \\ \therefore \lambda_g &= \mu_g \text{ para todo } g \in G. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.5.4 Sean K un campo y $G = \langle g \rangle$ un grupo cíclico de orden n , entonces para toda $h \in G$ se tiene que $h = g^i$ para alguna $i \in \mathbb{N}$. Luego, los elementos de KG son de la forma

$$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i g^i \quad \lambda_i \in K.$$

Consideremos el morfismo suprayectivo de K -álgebras.

$$\begin{aligned} \phi: K[x] &\longrightarrow KG \\ x^k &\mapsto g^k \text{ para todo } k \geq 0. \end{aligned}$$

Veamos que ϕ , en efecto, es un morfismo suprayectivo cuyo núcleo es $\langle x^n + 1 \rangle$.

a) Sea $f, g \in K[x]$, entonces $f = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i$ y $g = \sum_{j=0}^m \gamma_j x^j$, supongamos que $n < m$,

$$\begin{aligned}
 \phi(f+g) &= \phi\left(\sum_{i=0}^m (\alpha_i + \gamma_i) x^i\right) \\
 &= \sum_{i=0}^m (\alpha_i + \gamma_i) g^i \\
 &= \sum_{i=0}^m \alpha_i g^i + \sum_{i=0}^m \gamma_i g^i \\
 &= \sum_{i=0}^n \alpha_i g^i + \sum_{i=0}^m \gamma_i g^i \\
 &= \phi(f) + \phi(g).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \phi(f)\phi(g) &= \phi\left(\sum_{i=0}^n \alpha_i x^i\right) \phi\left(\sum_{j=0}^m \gamma_j x^j\right) \\
 &= \left(\sum_{i=0}^n \alpha_i g^i\right) \left(\sum_{j=0}^m \gamma_j g^j\right) \\
 &= \sum_{k=0}^{n+m} c_k g^k \text{ donde } c_k = \sum_{k=i+j} \alpha_i \gamma_j.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \phi(\lambda f) &= \sum_{i=0}^n \lambda \alpha_i g^i \\
 &= \lambda \sum_{i=0}^n \alpha_i g^i \\
 &= \lambda \phi(f).
 \end{aligned}$$

b) Para todo $u \in KG$ se tiene $u = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i g^i$. Considerando

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i x^i, \text{ se tiene que } \phi(f) = u.$$

c) Ahora veamos que $\ker(\phi) = \langle x^n - 1 \rangle$.

$$\subseteq) \text{ Sea } f = \sum_{i=0}^m \alpha_i x^i \in K[x] \text{ tal que } \phi(f) = \sum_{i=0}^m \alpha_i g^i = 0$$

1. Si $m < n$, existe j tal que $n - j = m$, así:

$$\sum_{i=0}^{n-j} \alpha_i g^i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, n - j,$$

en consecuencia, $f(x) = 0$ y así $f(x) \in \langle x^n - 1 \rangle$.

2. Si $m \geq n$, tenemos que $f(x) = (x^n - 1)q(x) + r(x)$ con $q(x), r(x) \in K[x]$ y $\text{gr}(r(x)) < n$ o $r(x)$ nulo. Tenemos

$$\begin{aligned} \phi(f) &= \phi((x^n - 1)q(x) + r(x)) \\ &= \phi(x^n - 1)\phi(q(x)) + \phi(r(x)) \\ &= (g^n - e)\phi(q(x)) + \phi(r(x)) \\ &= \phi(r(x)) = 0. \end{aligned}$$

Por el caso 1) $r(x) \in \langle x^n - 1 \rangle$, así que, $f(x) \in \langle x^n - 1 \rangle$.

$\supseteq)$ Sea $g \in \langle x^n - 1 \rangle$ entonces, $g = (x^n - 1)p(x)$ con $p(x) \in K[x]$

$$\begin{aligned} \phi(g) &= \phi((x^n - 1)p(x)) \\ &= \phi(x^n - 1)\phi(p(x)) \\ &= [\phi(x^n) - \phi(1)]\phi(p(x)) \\ &= \phi(x^n)\phi(p(x)) - \phi(1)\phi(p(x)) \\ &= e * \phi(p(x)) - e * \phi(p(x)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

por lo que $g \in \ker(\phi)$.

Y por el primer teorema de isomorfismo de Noether se tiene que

$$\frac{K[x]}{\langle x^n - 1 \rangle} \cong KG.$$

Considerando KG el álgebra de grupo, de un grupo cíclico. Sea $\gamma \in KG$ como $\gamma = \sum_{g \in G} g$ para cada $h \in G$, observemos que

$$\gamma h = \left(\sum_{g \in G} g \right) h = \sum_{g \in G} gh = \sum_{g \in G} g = \gamma.$$

Como G es finito, podemos considerar $\gamma = \sum_{i=0}^{n-1} g^i$, entonces

$$\begin{aligned}\gamma^2 &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} g^i \right) \left(\sum_{i=0}^{n-1} g^i \right) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} g^i \right) e + \left(\sum_{i=0}^{n-1} g^i \right) g + \cdots + \left(\sum_{i=0}^{n-1} g^i \right) g^{n-1} \\ &= \gamma + \gamma + \cdots + \gamma \\ &= n\gamma.\end{aligned}$$

Denotemos por $\text{char}(K)$, a la característica del campo K . Se tienen dos casos:

- a) Si $\text{char}(K) = m$ y $m|n$. Veamos que como $m|n$ existe $d \in \mathbb{Z}$ tal que $n = dm$. De este modo,

$$\gamma^2 = n\gamma = (dm)\gamma = 0$$

esto es γ es nilpotente de orden 2.

- b) $\text{char}(K) = m$ y $m \nmid n$, tenemos que para $\frac{\gamma}{n} := n\gamma^{-1}$

$$\left(\frac{\gamma}{n} \right)^2 = (n\gamma^{-1})^2 = n^2(\gamma^2)^{-1} = n^2(n\gamma)^{-1} = \frac{\gamma}{n},$$

por lo tanto, $\frac{\gamma}{n}$ es idempotente.

Definición 3.5.5 Sea R un anillo:

- a) Sean $e_1, e_2 \in R$ idempotentes, decimos que e_1 es **ortogonal** a e_2 si

$$e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0.$$

- b) Sea $\{e_i\}_{i=1}^n$ una **familia de elementos idempotentes**, decimos que es **completa** si

$$\sum_{i=1}^n e_i = 1.$$

- c) Sea $e \in R$ idempotente, decimos que e es **primitivo** si no se descompone como suma de dos elementos idempotentes ortogonales, es decir, si $e = e_1 + e_2$, entonces $e_1 = 0$ o $e_2 = 0$.
-

Ejemplo 3.5.6 Sea $R = \mathbb{M}_n(K)$, consideremos I_n la matriz identidad y B_i para $i = 1, 2, \dots, n$ la matriz definida de la siguiente forma

$$B_i = (b_{ij}) = \begin{matrix} & & j \\ i & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

donde para cada $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$ La familia $\{B_i\}_{i=1}^n$ es una familia completa de idempotentes ortogonales y primitivos.

Lema 3.5.7 Sea R un anillo y $R_R = \bigoplus_{i \in I} A_i$, con A_i un ideal. Entonces,

a) El conjunto $I_0 = \{i \mid i \in I, A_i \neq 0\}$ es finito, y en consecuencia,

$$R_R = \bigoplus_{i \in I_0} A_i.$$

b) Existe $\{e_i\}_{i \in I_0}$ una familia completa de idempotentes ortogonales tal que $A_i = e_i R$ para todo $i \in I_0$.

c) Si A_i con $i \in I_0$ es un ideal bilateral, se tiene que $e_i \in Z(R)$ ³.

d) Si $\{e_i\}_{i=1}^n$ es una familia completa de idempotentes ortogonales, se sigue que

$$R = \bigoplus_{i=1}^n e_i R.$$

y si $e_i \in Z(R)$ se obtiene que $e_i R$ es un ideal bilateral.

³El centro de R , denotado por $Z(R)$, es el conjunto de todos los elementos $z \in R$ que conmutan con todos los elementos de R , es decir: $Z(R) = \{z \in R \mid zr = rz \text{ para todo } r \in R\}$

Demostración.

Mostraremos *a)* y *b)* en este primer inciso.

Dado que $R_R = \bigoplus_{i \in I} A_i$ tenemos que $1 = \sum_{i=1}^n e_i$ y $e_i \neq 0$ con $e_i \in A_i$ para $i \in \{1, \dots, n\}$ y se sigue que $A_i \neq 0$.

Consideremos $a_j \in A_j$ para algún $j \in I$, observemos que

$$a_j = 1a_j = \left(\sum_{i=1}^n e_i \right) a_j = \sum_{i=1}^n e_i a_j \in R. \quad (3.3)$$

como $e_i a_j \in A_i$ por ser A_i un ideal, se tienen los siguientes casos:

Caso 1) Si $j \notin \{1, \dots, n\}$. Por la descomposición en suma directa sabemos que

$$A_j \cap \left(\sum_{i \neq j} A_i \right) = \{0\} \quad (3.4)$$

y por 3.3

$$a_j = \sum_{i=1}^n e_i a_j \in \sum_{i=1}^n A_i \subseteq \sum_{i \neq j} A_i.$$

De lo anterior y por la ecuación 3.4 se sigue que $a_j = 0$, esto es $A_j = 0$. Así se tiene que

$$I_0 = \{i \mid i = 1, \dots, n \text{ y } A_i \neq 0\}$$

es finito, y

$$R_R = \bigoplus_{i \in I} A_i = \bigoplus_{i=1}^n A_i.$$

y así queda demostrado *a)*.

Caso 2) Si $j \in \{1, \dots, n\}$ entonces $e_j \neq 0$, retomando la ecuación 3.3 y por la unicidad de la suma

$$a_j = \sum_{i=1}^n e_i a_j = \begin{cases} a_j & \text{si } i = j \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De esta forma, se obtiene que

$$A_j = e_j A_j < e_j R < A_j$$

por lo que $A_j = e_j R$. Ahora veamos que para todo par $i, j \in \{1, \dots, n\}$ donde $i \neq j$ se tiene que $e_i a_j = 0$.

Considerando $e_j = a_j$ obtenemos que

$$e_j^2 = a_j e_j = a_j = e_j$$

y $e_j e_i = 0$. En consecuencia, $\{e_i\}_{i=1}^n$ es una familia completa de elementos idempotentes ortogonales, además $A_i = e_i R$ para todo $i \in I_0$ por lo que queda demostrado b).

c) Si A_i es un ideal bilateral. Sea $r \in R$, como

$$r = 1r = \left(\sum_{i \in I_0} e_i \right) r = \sum_{i \in I_0} e_i r$$

y

$$r = r1 = r \left(\sum_{i \in I_0} e_i \right) = \sum_{i \in I_0} r e_i$$

Se sigue, que para todo $i \in I_0$, $e_i r, r e_i \in A_i$ y por unicidad de la suma directa $e_i r = r e_i$. De este modo $e_i \in Z(R)$.

d) Por hipótesis $\sum_{i=1}^n e_i = 1$, implica que

$$R = 1R = \left(\sum_{i=1}^n e_i \right) R = \sum_{i=1}^n e_i R.$$

Veamos que $e_j R \cap \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n e_i R \right) = \{0\}$. Si $r \in e_j R \cap \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n e_i R \right)$ se tiene que

$$r = e_j r_j \tag{3.5}$$

y

$$r = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n e_i r_i. \tag{3.6}$$

De este modo por las ecuaciones 3.5 y 3.6 implica que:

$$r = 1r = \left(\sum_{i=1}^n e_i \right) r = \sum_{i=1}^n e_i r = \sum_{i=1}^n e_i (e_j r) = \sum_{i=1}^n (e_i e_j) r = e_j e_j r = e_j r.$$

Luego

$$r = e_j r = e_j \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n e_i r_i \right) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n e_j e_i r = 0.$$

Se concluye que $r \in e_j R \cap \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n e_i R \right) = \{0\}$. Y así,

$$R = \bigoplus_{i=1}^n e_i R$$

Si $e_i \in Z(R)$, entonces $r(e_i R) = (r e_i) R = (e_i r) R = e_i R$. Concluimos que $e_i R$ es bilateral.

□

Corolario 3.5.8 *Los siguientes enunciados son equivalentes para un anillo R .*

- a) R_R es inescindible.
- b) ${}_R R$ es inescindible.
- c) 0 y 1 son los únicos elementos idempotentes de R .

Demostración. Probemos solo $a \Leftrightarrow c$, ya que $b \Leftrightarrow c$ se realiza de forma similar.

$a \Rightarrow c$) Sea $e \in R$ un elemento idempotente, por el corolario 3.5.2 se tiene que $e, e - 1$ son idempotentes ortogonales donde $e + (1 - e) = 1$ y por el lema 3.5.7 se sigue que, $R = eR \oplus (1 - e)R$. Luego, por ser R inescindible:

- c.1) si $eR = 0$, implica que $e = 0$.
- c.2) si $eR = R$, resulta que $R - eR = 0$, es decir, $(1 - e)R = 0$. Por lo tanto, $1 - e = 0$ y $e = 1$.

$c \Rightarrow a$) Supongamos que $R = A \oplus B$. Por el lema 3.5.7, existe un elemento idempotente $e \in R$ tal que $A = eR$, por lo que:

- a.1) si $e = 0$, se obtiene que $A = 0$ y $B = R$.
- a.2) si $e = 1$, se deduce que $A = R$ y $B = 0$.

□

Teorema 3.5.9 Sea $S = \text{End}(M_R)$. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:

- a) M_R es inescindible.
- b) S_S es inescindible.
- c) ${}_S S$ es inescindible.
- d) 0 y 1 son los únicos idempotentes de S .

Demostración. Por el corolario 3.5.8 solo queda mostrar que M_R es inescindible si y solo si los morfismos 0 y 1 son los únicos elementos idempotentes de S .

$a \Rightarrow d$) Sea $e \in S$ un elemento idempotente. Como $e \in \text{End}(M)$ se tiene que $eM = \text{Im}(e)$ y $(1 - e)M = \text{Im}(1 - e)$. Mostremos que

$$M = eM \oplus (1 - e)M.$$

Primero observemos que para todo $m \in M$ se tiene que

$$m = e(m) + (1 - e)(m)$$

Luego, sea $x \in eM \cap (1 - e)M$, entonces existe $m_1, m_2 \in M$ tal que $x = e(m_1) = (1 - e)(m_2)$, así,

$$x = e(m_1) = e(e(m_1)) = e((1 - e)m_2) = 0$$

por lo que $M = eM \oplus (1 - e)M$ y como M es inescindible, se sigue que

- d.1) Si $eM = 0$, se concluye que $e \equiv 0$.
- d.2) Si $eM = M$, resulta que $M - eM = (1 - e)M \equiv 0$, lo cual implica que $(1 - e) \equiv 0$. Por lo tanto, $e \equiv 1$.

$d \Rightarrow a$) Supongamos que $M = A \oplus B$ y consideremos $\pi_A : M \rightarrow M$.

Como $m = a + b \in M$, evaluando en π_A^2 , obtenemos

$$\pi_A^2(m) = \pi(\pi(a + b)) = \pi(a) = a = \pi(m)$$

y por hipótesis

- 1) Si $\pi_A \equiv 0$, al tener que $\pi(M) = A$, se concluye que $A = 0$.
- 2) Si $\pi_A \equiv 1$, es inmediato que $A = M$.

Por lo tanto, M es inescindible.

□

Corolario 3.5.10 *Sea $S = \text{End}(M)$ es local, entonces M_R es inescindible.*

Demostración. Sea A el conjunto de elementos no invertibles de S . Por el teorema 3.5.9 solo queda mostrar que 0, 1 son los únicos elementos idempotentes de S .

Sea $e \in S$ un elemento idempotente, por el corolario 3.5.2 inciso b), tenemos que $(1-e)$ es un elemento idempotente en S . Supongamos que $e \neq 0$ y $e \neq 1$, entonces tenemos que $1-e \neq 0$ y $1-e \neq 1$. En consecuencia, por el corolario 3.5.2 inciso c), se sigue que $e, (1-e)$ no son invertibles. Y así, $e \in A$, y como A es un ideal por el teorema 3.4.3, se sigue que $1 = e + (1-e) \in A$; lo cual contradice que A sea un ideal máximo. Por lo tanto, $e = 0$ o $e = 1$. $\square$

Sin embargo, el inverso de este enunciado no se satisface. Consideremos el grupo inescindible $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$. Observemos que $\text{End}(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ dado el siguiente morfismo de anillos:

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{Z} &\longrightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) \\ \phi(n) &= f_n : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ f_n(m) &= mn\end{aligned}$$

Sin embargo, $\mathbb{Z}$ no es un anillo local, debido a que para cada $p \in \mathbb{Z}$ con p un primo, $p\mathbb{Z}$ es un ideal máximo, por lo tanto, $\text{End}(\mathbb{Z})$ no es local.

Teorema 3.5.11 *Sea $M \neq 0$ inescindible de longitud finita, entonces $\text{End}(M)$ es local y los elementos no invertibles son los elementos nilpotentes.*

Demostración. Sea $\phi : M \longrightarrow M$. Por la proposición 3.3.9, M es un módulo artinian y noetheriano. Luego, por el lema 3.1.27, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$M = \text{Im}(\phi^n) \oplus \ker(\phi^n).$$

Ahora, como M es inescindible, se cumple alguno de los siguientes casos:

- a) $\ker(\phi^n) = 0$.
Como $0 \subset \ker(\phi) \subset \ker(\phi^n) = 0$ se sigue que $\ker(\phi) = 0$, es decir, ϕ es monomorfismo. Y por la proposición 3.1.22 ϕ es isomorfismo, por lo tanto, ϕ es invertible.
- b) $\text{Im}(\phi^n) = 0$.
Se tiene $\phi^n \equiv 0$, es claro que ϕ es nilpotente y por el corolario 3.5.2, $1-\phi$ es invertible. Finalmente, por el teorema 3.4.2 se tiene que $\text{End}(M)$ es local.

Por el inciso b) los elementos no invertibles son nilpotentes, por lo que se tiene que

$$\{\text{elementos no invertibles}\} \subseteq \{\text{elementos nilpotentes}\}.$$

Si $\phi \in \text{End}(M)$ es un elemento nilpotente; sea n el mínimo natural tal que $\phi^n = 0$.

Supongamos que ϕ es invertible, entonces existe $\gamma \in \text{End}(M)$ tal que $\gamma\phi = 1$, de modo que

$$\phi^{n-1} = 1\phi^{n-1} = \gamma\phi\phi^{n-1} = \gamma\phi^n = 0$$

lo que contradice que ϕ es nilpotente de orden n . Por lo tanto,

$$\{\text{elementos no invertibles}\} = \{\text{elementos nilpotentes}\}.$$

□

Definición 3.5.12 Sea $U \leq M$. M se llama irreducible sobre U si y solo si para cada par de submódulos arbitrarios $A, B \leq M$ con $U \leq A$ y $U \leq B$, se tiene que $U \neq A \cap B$.

Diremos que M es irreducible si es irreducible sobre 0 .

Teorema 3.5.13 Sea Q un módulo inyectivo inescindible, entonces $\text{End}(Q)$ es local.

Demostración. Sea $\phi : Q \rightarrow Q$ un monomorfismo, así $\phi' : Q \rightarrow \text{Im}(\phi)$ es un isomorfismo. Al ser Q inyectivo, se tiene que $\text{Im}(\phi)$ es un módulo inyectivo. Consideremos

$$0 \longrightarrow Q \xrightarrow{\phi} Q \xrightarrow{f} \frac{Q}{\text{Im}(\phi)} \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta que se escinde. Esto implica que, $Q = \text{Im}(\phi) \oplus \text{Im}(f)$ al ser Q inescindible, si $\text{Im}(\phi) = Q$ se tiene que ϕ es un automorfismo. Por lo tanto, ϕ es invertible.

Sea $\phi_1, \phi_2 \in \text{End}(Q)$ no invertibles, como Q es irreducible e inescindible, se sigue

$$0 \neq \ker(\phi_1) \cap \ker(\phi_2) \subseteq \ker(\phi_1 + \phi_2).$$

Por lo tanto, $\phi_1 + \phi_2$ es no invertible y así $\text{End}(Q)$ es local.

□

Observación 3.5.14 Sea M un módulo artiniiano. Consideremos

$$\Gamma_1 = \{B \leq M \mid B \text{ es sumando directo de } M \text{ y } B \neq 0\}$$

Como $M \neq 0$ y $M = M \oplus 0$ se tiene $M \in \Gamma_1$, entonces Γ_1 tiene elemento mínimo. Sea B_0 el elemento mínimo de Γ_1 y se satisface que B_0 es inescindible. En efecto, si $B_0 = B_{01} \oplus B_{02}$, en particular $B_{01} \subset B_0 \subset M$ lo cual contradice que B_0 sea elemento mínimo.

Observación 3.5.15 Sea M es noetheriano. Consideremos

$$\Gamma_2 = \{A \leq M \mid A \text{ es sumando directo de } M \text{ y } \frac{M}{A} \neq 0\}$$

Como $M = M \oplus 0$ se tiene $0 \in \Gamma_2$. Entonces, Γ_2 tiene elemento máximo. Sea A_0 el elemento máximo en Γ_2 , de este modo $M = A_0 \oplus B_0$.

Veamos que B_0 es inescindible, ya que si $B_0 = B_{01} \oplus B_{02}$, se sigue que $M = A_0 \oplus B_{01} \oplus B_{02}$ donde $A_0 \oplus B_{01} \in \Gamma_2$, pues

$$B_{02} = \frac{B_{02}}{(A_0 + B_{01}) \cap B_{02}} \cong \frac{(A_0 + B_{01}) + B_{02}}{A_0 + B_{01}} \cong \frac{M}{A_0 + B_{01}} \neq 0$$

y $A_0 \subset A_0 + B_{01}$ contradice que A_0 sea elemento máximo.

Teorema 3.5.16 Sea $M_R \neq 0$

- a) Si M_R es artiniiano (o noetheriano), entonces existen submódulos inescindibles $M_1, M_2, \dots, M_n$ de M con

$$M = \bigoplus_{i=1}^n M_i.$$

- b) Si M_R es de longitud finita, entonces existen submódulos inescindibles $M_1, M_2, \dots, M_n$ de M tal que

$$M = \bigoplus_{i=1}^n M_i \text{ donde } \text{End}(M_i) \text{ es local } \forall i = 1, \dots, n.$$

Demostración.

- a.1) Sea M un módulo artiniiano. Consideremos el conjunto

$$\Lambda_1 = \{C \leq M \mid \exists B_i \leq M \text{ para } i = 1, \dots, l \text{ inescindibles tales que } M = \bigoplus_{i=1}^l B_i \oplus C\}$$

Por la observación 3.5.14 el elemento $B_0 \neq 0$, entonces existe $B \leq M$ tal que $M = B_0 \oplus B$. Se sigue que $B \in \Lambda_1$, por lo que Λ_1 tiene un elemento mínimo, sea C_0 . Lo anterior nos lleva que existen $B_j \leq M$ con $j = 1, \dots, n$ tal que

$$M = \left(\bigoplus_{i=1}^n B_i \right) \oplus C_0$$

Veamos que $C_0 = 0$. En efecto, si $C_0 \neq 0$ y puesto que $C_0 \leq M$, y M es artiniiano. Se sigue que C_0 es artiniiano. Y por la observación 3.5.14 existe $C'_0 \leq C_0$ inescindible, de tal que $C_0 = C'_0 \oplus D$, entonces $D \in \Gamma_1$ y como $D \leq C_0$ contradice que C_0 sea el elemento mínimo.

a.2) Sea M un módulo noetheriano. Consideremos el conjunto

$$\Lambda_2 = \{C \leq M \mid M = C \oplus D \text{ y } C = \bigoplus_{i=1}^n C_i \text{ con } C_i \text{ inescindibles}\}$$

Como $0 \in \Lambda_2$ y M es noetheriano, entonces Λ_2 tienen un elemento máximo. Sea C_0 el elemento máximo en Λ_2 , entonces

$$M = C_0 \oplus D = \left(\bigoplus_{i=1}^n C_i \right) \oplus D$$

Si $D \neq 0$ y al ser $D \leq M$, entonces D es noetheriano y por 3.5.15 existe $D_1 \neq D$ tal que $D = D_1 \oplus D_2$, entonces si D_1 es inescindible, se tiene que

$$M = \left(\bigoplus_{i=1}^n C_i \right) \oplus D = \left(\bigoplus_{i=1}^n C_i \right) \oplus (D_1 \oplus D_2) = \left(\bigoplus_{i=1}^n C_i \oplus D_1 \right) \oplus D_2$$

como $C_0 \leq \bigoplus_{i=1}^n C_i \oplus D_1$ contradice que C_0 sea máximo.

b) Por 3.3.9 y por el inciso a).

$$M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$$

con M_i módulos inescindibles, al ser $M_i \leq M$ tenemos que M_i es de longitud finita. En consecuencia, de 3.5.11 se tiene $End(M_i)$ es local.

□

3.6 Teorema de Krull-Schmidt-Remak-Azumaya

En esta sección se presenta un teorema de suma importancia en la teoría de módulos y, en particular, en la teoría de representaciones. Este teorema establece que todo módulo finitamente generado se descompone de manera única (salvo isomorfismo) en una suma directa de módulos inescindibles. Para probar este resultado, se requieren algunos lemas que se formulan y prueban a continuación.

Lema 3.6.1 Sean $M_R = \bigoplus_{i \in I} M_i$ donde $\text{End}(M_i)$ es local para toda $i \in I$ y $\sigma, \tau \in \text{End}(M)$ con $1_M = \sigma + \tau$. Entonces, para toda $j \in I$ existe $U_j \leq M$ y un isomorfismo $\phi_j : M_j \rightarrow U_j$ inducido por σ, τ tal que

$$M = U_j \oplus \left(\bigoplus_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} M_i \right)$$

Demostración. Consideremos $\pi_j : M \rightarrow M_j$ la proyección sobre M_j y $\iota_{M_j}^M : M_j \rightarrow M$ la inclusión de M_j , $1_M := \sigma + \tau : M \rightarrow M$. Consideremos la composición $\pi_j \circ 1_M \circ \iota_{M_j}^M : M_j \rightarrow M_j$ donde

$$\pi_j \circ 1_M \circ \iota_{M_j}^M = \pi_j \circ (\sigma + \tau) \circ \iota_{M_j}^M = \pi_j \circ \sigma \circ \iota_{M_j}^M + \pi_j \circ \tau \circ \iota_{M_j}^M.$$

Como $\text{End}(M_j)$ es local y 1_{M_j} es invertible, entonces $\pi_j \circ \sigma \circ \iota_{M_j}^M \circ \pi_j \circ \tau \circ \iota_{M_j}^M$ es invertible. Supongamos que $\pi_j \circ \sigma \circ \iota_{M_j}^M$ es invertible, definamos

$$U_j := \sigma \circ \iota_{M_j}^M [M_j] = \sigma[M_j] \leq M$$

y consideremos

$$\phi_j : M_j \rightarrow U_j$$

definida como $\phi_j(x) = \sigma(x)$. Notemos que ϕ_j es un epimorfismo por definición de U_j . Considerando el siguiente cuadro se tiene

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\sigma} & M \\ \uparrow i_j & \nearrow \phi_j & \uparrow \iota_{U_j}^M \\ & U_j & \\ \downarrow \pi_j & \nwarrow \phi_j & \downarrow \pi_j \\ M_j & \xrightarrow{1_{M_j}} & M_j \end{array}$$

Sea $m_j \in M_j$, entonces $\iota_{U_j}^M \circ \phi_j(m_j) = \iota_{U_j}^M(\sigma(m_j)) = \sigma(m_j)$ y $\sigma \circ i_j(m_j) = \sigma(m_j)$, por lo tanto, el triángulo superior conmuta. Observemos que

$$\pi_j \circ \iota_{U_j}^M \circ \phi_j(m_j) = \pi_j \circ \iota_{U_j}^M(\sigma(m_j)) = \pi_j(\sigma(m_j)) = m_j,$$

por lo tanto, el triángulo inferior conmuta. Entonces, se tiene que

$$\text{Im}(\iota_{U_j}^M \circ \phi_j) + \ker(\pi_j) = \pi^{-1}[\text{Im}(1_{M_j})]$$

y

$$\text{Im}(\iota_{U_j}^M \circ \phi_j) \cap \ker(\pi_j) = \iota_{U_j}^M \circ \phi_j(\ker(1_{M_j})).$$

Como 1_{M_j} es isomorfismo, se tiene que

$$\text{Im}(\iota_{U_j}^M \circ \phi_j) \oplus \ker(\pi_j) = M$$

donde

$$\text{Im}(\iota_{U_j}^M \circ \phi_j) = \iota_{U_j}^M(\text{Im}(\phi_j)) = \iota_{U_j}^M(\sigma[M_j]) = \iota_{U_j}^M(U_j) = U_j$$

y

$$\ker(\pi_j) = \pi^{-1}[M_j] = \bigoplus_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} M_i.$$

Por lo tanto,

$$M = \text{Im}(\iota_{U_j}^M \circ \phi_j) \oplus \ker(\pi_j) = U_j \oplus \left(\bigoplus_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} M_i \right).$$

□

Lema 3.6.2 Sea $M_R = \bigoplus_{i \in I} M_i$ donde $\text{End}(M_i)$ es local para toda $i \in I$ y

$\sigma, \tau \in \text{End}(M)$, $1_M = \sigma + \tau$. Para $E = \{i_1, i_2, \dots, i_t\} \subset I$ existen $C_{i_j} \leq M$ y un isomorfismo $\phi_{i_j} : M_{i_j} \rightarrow C_{i_j}$ inducido por σ o τ para $j = 1, 2, \dots, t$ tal que

$$M = C_{i_1} \oplus C_{i_2} \oplus \dots \oplus C_{i_t} \oplus \left(\bigoplus_{i \in I/E} M_i \right)$$

Demostración. Por el lema 3.6.1 y tomando $j = i_1$, entonces $C_{i_1} = U_{i_1} = U_j$, entonces

$$M = U_j \oplus \left(\bigoplus_{i \neq j} M_i \right) = C_{i_1} \oplus \left(\bigoplus_{i \neq j} M_i \right)$$

Definamos $\phi_{i_1}: M_{i_1} \rightarrow C_{i_1}$ como $m_{i_1} \mapsto \sigma(m_{i_1})$ isomorfismo, entonces $M_{i_1} \cong C_{i_1}$, entonces $\text{End}(C_{i_1})$ es local.

Ahora para i_2 definamos $j' = i_2$ y así $C_{i_2} = U_{i_2} = U_{j'}$ y por el lema 3.6.1

$$\begin{aligned} M &= U_{j'} \oplus C_{i_1} \oplus \left(\bigoplus_{i \in I \setminus \{i_1, j'\}} M_i \right) \\ &= C_{i_2} \oplus C_{i_1} \oplus \left(\bigoplus_{i \in I \setminus \{i_1, j'\}} M_i \right) \end{aligned}$$

donde $\phi_{i_2}: M_{i_2} \rightarrow C_{i_2}$ es isomorfismo, entonces $\text{End}(C_{i_2})$ es local. Siguiendo el mismo argumento para $j = 3, \dots, t$ se tiene que

$$M = C_{i_1} \oplus \dots \oplus C_{i_t} \oplus \left(\bigoplus_{i \in I \setminus E} M_i \right).$$

□

Lema 3.6.3 Si $M_R = \bigoplus_{i \in I} M_i$ donde $\text{End}(M_i)$ es local para toda $i \in I$ y

$M = A \oplus B$ donde $A \neq 0$ e inescindible. Entonces, existe $k \in I$ tal que la proyección $\pi_A: M \rightarrow A$ induce un isomorfismo de M_k en A y $M = M_k \oplus B$.

Demostración. Consideremos π_A la proyección sobre A e ι_A^M la inclusión de A en M . Definamos $\alpha := \iota_A^M \circ \pi_A: M \rightarrow M$ donde $1_M = \alpha + (1_M - \alpha) \in \text{End}(M)$. Tomando $\sigma = \alpha$ y $\tau = 1_M - \alpha$ por el lema 3.6.1 existe $U_j < M$ tal que $\phi_j: M_j \rightarrow U_j$ es un isomorfismo inducido por σ o τ y

$$M = U_j \oplus \left(\bigoplus_{i \neq j} M_i \right).$$

Como $A \neq 0$, existe $0 \neq a \in A$ tal que $\alpha(a) = \iota_A^M \circ \pi_A(a) = \iota_A^M(a) = a$, entonces $\tau(a) = 0$. Como $a \in M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, entonces existe una representación

única

$$a = \sum_{j=1}^t m_{i_j} \text{ con } m_{i_j} \in M_{i_j}. \text{ Considerando } E = \{i_1, \dots, i_t\} \subseteq I \text{ y por el}$$

lema 3.6.2 existe $C_{i_j} = \sigma(M_j) = \text{Im}(\sigma \circ \iota_{M_j}^M) \leq M$ para $j = 1, \dots, t$ y $\gamma_{i_j}: M_{i_j} \longrightarrow C_{i_j}$ isomorfismo inducido por σ o τ , tal que

$$M = C_{i_1} \oplus \dots \oplus C_{i_t} \left(\bigoplus_{i \in I \setminus E} M_i \right)$$

Si γ_{i_j} es inducido por τ se tiene que

$$\gamma_{i_j}(a) = \tau(a) = 0.$$

Entonces, $a = 0$ lo cual contradice que $a \neq 0$. Por lo tanto, γ_{i_j} es inducido por σ y existe al menos un $m_{i_j} \neq 0$. Fijando $i_j = k$ se tiene que

$$\begin{aligned} \gamma_k: M_k &\longrightarrow C_k \\ m_k &\mapsto \sigma(m_k) \end{aligned}$$

es un isomorfismo. Entonces, $M = C_k \oplus L$ donde

$$\begin{aligned} C_k &= \gamma[M_k] \\ &= \sigma[M_k] \\ &= \alpha[M_k] \\ &= \iota_A^M \circ \pi_A[M_k] \\ &= \pi_A[M_K] \leq \pi[M] = A \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} A &= M \cap A \\ &= (C_k \oplus L) \cap A \\ &= C_k \oplus (L \cap A) \end{aligned}$$

y como A es inescindible y $C_k \neq 0$ ya que $M_k \neq 0$, entonces $L \cap A = 0$, por lo tanto, $A = C_k$. Así,

$$M = \text{Im}(\iota_{M_k}^M) \oplus \ker(\pi) = M_K \oplus B.$$

□

A continuación, presentamos la demostración del Teorema de Krull–Remak–Azumaya. Para ello, haremos uso de los tres lemas previamente demostrados.

Teorema 3.6.4 (Krull-Remak-Azumaya) *Sea*

$$M_R = \bigoplus_{i \in I} M_i \text{ donde } \text{End}(M_i) \text{ es local para toda } i \in I$$

y $M_R = \bigoplus_{j \in J} N_j$ con $N_j \neq 0$ inescindible para toda $j \in J$.

Existe una biyección $\beta: I \longrightarrow J$ tal que $M_i \cong N_{\beta(i)}$ para toda $i \in I$.

Demostración. Observemos que, como

$$M = \bigoplus_{j \in J} N_j = N_{j_1} \oplus \left(\bigoplus_{j \in J \setminus j_1} N_j \right)$$

como N_{j_1} es inescindible por el lema 3.6.3, $N_{j_1} \cong M_i$ para algún $i \in I$ con $\text{End}(N_{j_1})$ local. Introduciendo la siguiente relación de equivalencia en I y J :

$$\begin{aligned} i_1 \sim i_2 &\Leftrightarrow M_{i_1} \cong M_{i_2} \text{ para } i_1, i_2 \in I \\ j_1 \sim j_2 &\Leftrightarrow N_{j_1} \cong N_{j_2} \text{ para } j_1, j_2 \in J \end{aligned}$$

Definimos $\Phi : \bar{I} \longrightarrow \bar{J}$ como $\Phi(\bar{i}) = \bar{j}$ si $M_i \cong N_j$. Φ está bien definida por la observación previa. Para probar que existe $\beta : I \longrightarrow J$ se mostrará que existe una biyección $\beta_i : \bar{i} \longrightarrow \Phi(\bar{i})$ y esto será una consecuencia del Teorema de Cantor-Berstein⁴ para esto, solo basta mostrar que existe una función inyectiva entre $\bar{i}$ y $\phi(\bar{i})$ y de manera análoga para $\phi(\bar{i})$ y $\bar{i}$.

a) Si $\bar{i}$ es finito.

Supongamos que $|\bar{i}| = t$, definimos $E = \{i_1, \dots, i_s\} \subset J$. Por los lemas 3.6.2 y 3.6.3 se tiene que para $l = 1, \dots, s$

$$M = M_{i_1} \oplus \dots \oplus M_{i_s} \oplus \left(\bigoplus_{j \in I \setminus E} N_j \right).$$

con $M_{i_l} \cong N_{i_k}$. Al ser una suma directa se tiene que $M_{i_l} \neq M_{i_k}$ para $i_l \neq i_k$. Concluimos que existe $s \leq t$ de esta forma $|\Phi(\bar{i})| \leq t = |\bar{i}|$, entonces existe una función inyectiva entre $\bar{i}$ y $\phi(\bar{i})$.

b) $\bar{i}$ es infinito.

Consideremos $\pi_j : M \longrightarrow N_j$ la proyección sobre N_j y para cada $k \in I$ definamos

$$E(k) = \{j \in J \mid \pi_j|_{M_k} : M_k \longrightarrow N_j \text{ es isomorfismo}\}.$$

Por el lema 3.6.3 $E(k) \neq \emptyset$, además $E(k)$ es finito. Al ser $\pi_j|_{M_k}$ un isomorfismo se tiene que para $0 \neq m \in M_k$, $\pi_j(m) \neq 0$. Fijando este elemento, entonces para todo $j \in E(k)$, $\pi_j|_{M_k}(m) \neq 0$. Como

$$m \in M_k \subseteq M = \bigoplus_{j \in J} N_j,$$

⁴**Teorema de Cantor-Berstein:** Sean X e Y dos conjuntos tales que existen aplicaciones inyectivas $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow X$. Existe $h : X \longrightarrow Y$ biyectiva. La demostración de este teorema puede consultarse en [18].

entonces

$$m = \sum_{i=1}^t n_{j_i}$$

con $i_l \in \bar{J}$ para $j \notin \{i_1, \dots, i_t\}$ se tiene que $\pi_j(m) = 0$, entonces $\pi_j|_{M_k}$ no puede ser isomorfismo, por lo tanto, $j \in \{i_1, \dots, i_t\}$. Veamos que $\phi(\bar{i}) = \bigcup_{k \in \bar{i}} E(k)$.

$\subseteq$) Sea $j \in \phi(\bar{i})$, entonces existe $i_1 \in \bar{i}$ tal que $M_{i_1} \cong N_j$ y por el lema 3.6.3 existe $k \in I$ tal que $M_k \cong N_j$ y por transitividad $M_k \cong M_{i_1}$, de donde $k \in \bar{i}_1$, y por lo tanto, $j \in E(k)$.

$\supseteq$) Sea $r \in \bigcup_{k \in \bar{i}} E(k)$, entonces existe $k \in \bar{i}$ tal que $r \in E(k)$. Luego

$M_k \cong M_i$ y $M_k \cong N_r$ y, por lo tanto, por transitividad $j \in \phi(\bar{i})$ y $\phi(\bar{i}) = \bigcup_{k \in \bar{i}} E(k)$.

Considerando $\bigsqcup_{k \in \bar{i}} E(k) = \bigcup_{k \in \bar{i}} E(k) \times \{k\}$ la diferencia simétrica.

Definamos $\xi : \phi(\bar{i}) \longrightarrow \bigsqcup_{k \in \bar{i}} E(k)$. Para $j \in \phi(\bar{i}) = \bigcup_{k \in \bar{i}} E(k)$ se tiene que

existe $k' \in \bar{i}$ tal que $j \in E(k')$, entonces definimos $\xi(j) = (j, k')$.

Observemos que ξ es inyectiva. En efecto, supongamos que $\xi(j) = \xi(j')$, entonces

$$\begin{aligned} \xi(j) &= \xi(j') \\ (j, k') &= (j', k'') \\ j &= j' \end{aligned}$$

como los $E(k)$ son finitos, entonces $E(k) = \{j_1, j_2, \dots, j_t\}$ y considerando

$$\begin{aligned} \gamma_i : E(k) &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (j_r) &\mapsto r \end{aligned}$$

tenemos que es una función inyectiva y definimos

$$\begin{aligned} \gamma : \bigsqcup_{k \in \bar{i}} E(k) &\longrightarrow \bar{i} \times \mathbb{N} \\ (x, i) &\mapsto (i, \gamma_{\bar{i}}(x)) \end{aligned}$$

Supongamos que $\gamma(x, i) = \gamma(y, i')$. Entonces, $(i, \gamma_{\bar{i}}(x)) = (i', \gamma_{\bar{i}'}(y))$. Como $i = i'$, se sigue que $\gamma_{\bar{i}} = \gamma_{\bar{i}'}$ y, así, $\gamma_{\bar{i}}(x) = \gamma_{\bar{i}}(y)$. Al ser $\gamma_{\bar{i}}$

inyectiva se tiene que $x = y$ y γ es inyectiva. Se tiene la siguiente sucesión

$$\phi(\bar{i}) = \bigcup_{k \in \bar{i}} E(k) \xrightarrow{\xi} \bigsqcup_{k \in \bar{i}} E(k) \xrightarrow{\gamma} \bar{i} \times \mathbb{N} \xrightarrow{\theta} \bar{i}$$

utilizando el resultado de conjuntos de que para X un conjunto infinito se tiene que $|X| = |X \times \mathbb{N}|$ como ξ , γ y θ son inyectivas, $\beta_{\bar{i}} = \theta \circ \gamma \circ \xi$ es inyectiva. Finalmente definiendo $\beta: J \longrightarrow I$ como $\beta = \bigcup_{i \in I} \beta_{\bar{i}}$ se tiene

que es inyectiva. De forma análoga, se prueba la afirmación anterior para definir una función inyectiva $I \longrightarrow J$, de donde, por el teorema de Cantor-Berstein β es biyectiva.

□

El álgebra de caminos constituye un vínculo fundamental entre la teoría de carcajes y la teoría de módulos, permitiendo interpretar todas las representaciones como módulos sobre una K -álgebra. A lo largo de esta sección, se supone que K es un campo algebraicamente cerrado.

A continuación, se define el álgebra asociada a un carcaj, la cual se denomina álgebra de caminos. Esta construcción permite obtener caracterizaciones importantes dentro de la teoría de representaciones. Además, bajo ciertas condiciones, cualquier álgebra puede ser vista como un álgebra de caminos; en tal caso, a cada álgebra (bajo dichas condiciones) le corresponde un carcaj asociado.

Se introducen los conceptos fundamentales de la teoría de representaciones de carcajes y se concluye con una equivalencia categórica que evidencia la utilidad del estudio de estas representaciones. El desarrollo aquí presentado se basa principalmente en [13], [21], [15], [8], [10].

4.1 Álgebra de caminos KQ

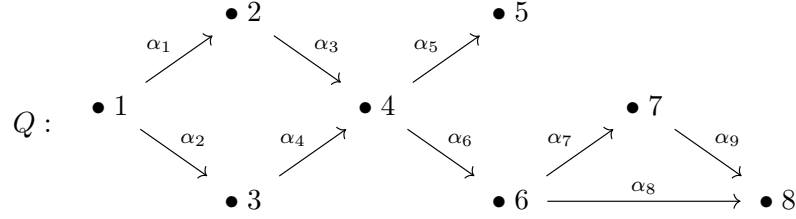
En esta sección abordaremos las definiciones principales como lo son: un carcaj, caminos, y la construcción y propiedades del álgebra asociada a un carcaj.

Definición 4.1.1 *Un carcaj Q es una terna (Q_0, Q_1, d) donde:*

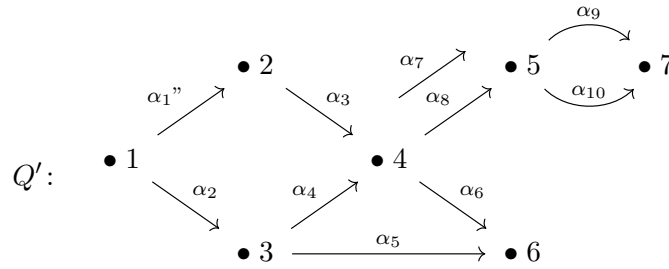
- a) Q_0 es el conjunto de objetos llamados vértices de Q .*
- b) Q_1 es el conjunto de objetos llamados flechas de Q .*

c) d es la asignación $d: Q_1 \longrightarrow Q_0 \times Q_0$ donde $d(\alpha) = (o(\alpha), t(\alpha))$ donde $o(\alpha)$ es el origen de la flecha y $t(\alpha)$ es el extremo final, es decir, $o(\alpha) \xrightarrow{\alpha} t(\alpha)$.

Ejemplo 4.1.2 A continuación, se presentan algunos ejemplos de carcajes:



Donde $Q_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ y $Q_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_9\}$.



Se tiene que $Q'_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y $Q'_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{10}\}$.

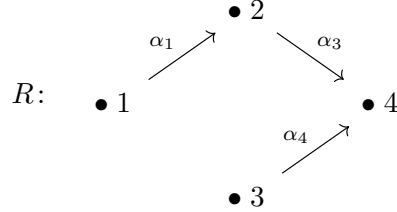
Definición 4.1.3 Sea Q un carcaj, decimos que:

- a) Q es finito si $|Q_0 \cup Q_1| < \infty$.
- b) Q es conexo si la gráfica (no orientada) subyacente $\overline{Q} \subseteq Q$ es conexa.¹
- c) $Q' = (Q'_0, Q'_1, d')$ es un subcarcaj de Q si $Q'_0 \subseteq Q_0$, $Q'_1 \subseteq Q_1$ y $d' = d|_{Q'_1}$.
- d) Q' es un subcarcaj pleno de Q si Q' es un subcarcaj de Q tal que

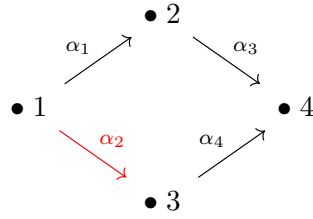
$$Q'_1 = \{\alpha \in Q_1 \mid o(\alpha), t(\alpha) \in Q'_0\}.$$

¹Una gráfica es conexa si para cualesquiera dos vértices en ella existe un camino entre ellos.

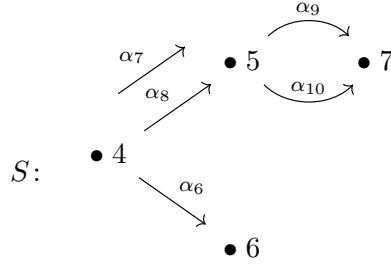
Ejemplo 4.1.4 Enseguida, se exhiben ejemplos de subcarcajes. Considerando el carcaj Q del ejemplo 4.1.2 y el subcarcaj R de este mismo,



observemos que este carcaj no es pleno, ya que hace falta la arista α_2 .



Ahora, considerando el subcarcaj S del carcaj Q' del ejemplo 4.1.2, este es un subcarcaj pleno.



Definición 4.1.5 Dado un carcaj Q , se tienen los siguientes tipos de caminos:

- Los vértices $i \in Q_0$ se les conoce como caminos de longitud cero y se denotan por $\epsilon_i = (i || i)$ para cada $i \in Q_0$.
- Los caminos de longitud $n \geq 1$ son de la forma:

$$\alpha: i \xrightarrow{\alpha_1} t(\alpha_1) \xrightarrow{\alpha_2} t(\alpha_2) \xrightarrow{\alpha_3} \dots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} o(\alpha_n) \xrightarrow{\alpha_n} j.$$

Dicho camino se denota por

$$\alpha := (i | \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n | j)$$

o bien

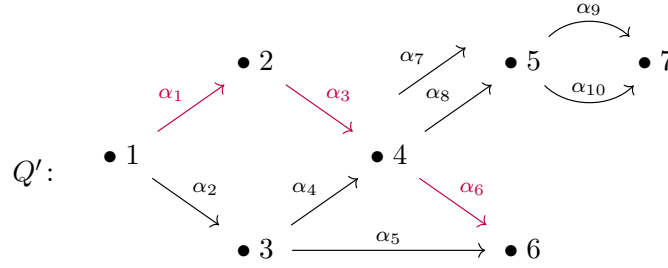
$$\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n.$$

Denotaremos por Q_n con $n \in \mathbb{N}$, al conjunto de todos los caminos en Q de longitud n .

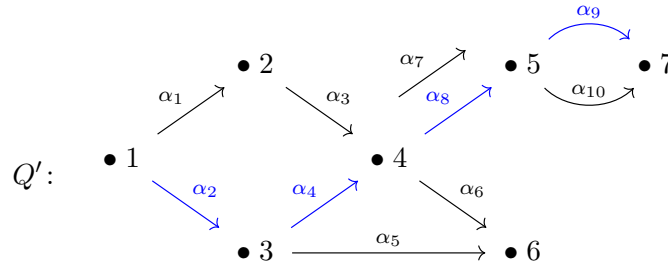
Definición 4.1.6 Sea Q un carcaj. Decimos que:

- a) $\alpha \in Q_n$ es un ciclo si $n \geq 1$ y $o(\alpha) = t(\alpha)$. Un lazo es un ciclo de longitud 1.
- b) Q es acíclico si Q no contiene ciclos orientados.

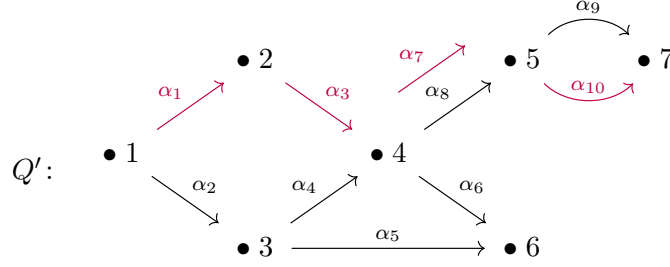
Ejemplo 4.1.7 Ejemplos de Caminos A continuación se muestran algunos ejemplos de caminos en un carcaj.



$$\alpha = (1 | \alpha_1 \alpha_3 \alpha_6 | 6) = \alpha_1 \alpha_3 \alpha_6.$$



$$\beta = (1 | \alpha_2 \alpha_4 \alpha_8 \alpha_9 | 7) = \alpha_2 \alpha_4 \alpha_8 \alpha_9.$$



$$\gamma = (1 \mid \alpha_1 \alpha_3 \alpha_7 \alpha_{10} \mid 7) = \alpha_1 \alpha_3 \alpha_7 \alpha_{10}.$$

Definición 4.1.8 Sea Q un carcaj. Denotaremos por

a) KQ_n al K -espacio vectorial cuya base es Q_n .

b) $KQ := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} KQ_n$, es decir, KQ es el espacio vectorial cuya base es

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n.$$

Ejemplo 4.1.9 A continuación se presentan ejemplos de espacios vectoriales KQ con Q un carcaj.

$$a) \ Q: \quad \bullet 1 \quad \bullet 2 \quad \bullet 3$$

$$\text{Donde } KQ = K\epsilon_1 \oplus K\epsilon_2 \oplus K\epsilon_3.$$

$$b) \ Q: \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \gamma \\ \bullet 1 \end{array}$$

$$\text{Donde: } KQ = K\epsilon_1 \oplus K\gamma \oplus K\gamma^2 \oplus \cdots = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} K\gamma^n.$$

Definición 4.1.10 Sea Q un carcaj. La concatenación de caminos en Q es una función

$$Q_n \times Q_m \longrightarrow Q_{n+m}$$

definida para cada par $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, como:

$$(\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta := \begin{cases} (o(\alpha) | \alpha\beta | t(\beta)) & \text{si } t(\alpha) = o(\beta) \\ 0 & \text{si } t(\alpha) \neq o(\beta) \end{cases}.$$

La concatenación de caminos en Q , se extiende K -bilinealmente a un producto

$$KQ \times KQ \longrightarrow KQ$$

de la siguiente forma:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \alpha_i, \sum_{j=1}^m b_j \beta_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j \alpha_i \beta_j.$$

A este producto en KQ se le conoce como el inducido por **la concatenación de caminos**.

En la siguiente proposición se muestra que dado un carcaj Q , KQ tiene estructura de K -álgebra.

Proposición 4.1.11 Sea Q un carcaj. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen:

- a) El K -espacio vectorial KQ , junto con el producto inducido por la concatenación de caminos, induce una estructura de K -álgebra (posiblemente sin unidad) en KQ .
 - b) KQ tiene unidad si y sólo si $|Q_0| < \infty$. En tal caso $\{\epsilon_i \mid i \in Q_0\}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales en KQ .
 - c) $\dim_K(KQ) < \infty$ si y sólo si Q es finito y acíclico.
-

Demostración. Probemos que KQ es una K -álgebra. En efecto, se verifican las siguientes propiedades:

a.1) Sea $\alpha \in Q_n$, $\beta \in Q_m$ y $\gamma \in Q_s$. $(n, m, s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, como:

$$\begin{aligned} (\alpha\beta)\gamma &= \begin{cases} (o(\alpha\beta) \mid (\alpha\beta)\gamma \mid t(\gamma)) & \text{si } t(\alpha\beta) = o(\gamma) \\ 0 & \text{si } t(\alpha\beta) \neq o(\gamma) \end{cases} \\ &= \begin{cases} (o(\alpha) \mid \alpha\beta\gamma \mid t(\gamma)) & \text{si } t(\beta) = o(\gamma) \\ 0 & \text{si } t(\beta) \neq o(\gamma) \end{cases} \\ &= \begin{cases} (o(\alpha) \mid \alpha(\beta\gamma) \mid t(\beta\gamma)) & \text{si } t(\alpha) = o(\beta\gamma) \\ 0 & \text{si } t(\alpha) \neq o(\beta\gamma) \end{cases} \\ &= \alpha(\beta\gamma). \end{aligned}$$

a.2) Sea $k_1, k_2 \in K$ y $\gamma \in KQ$, entonces

$$k_1(k_2\gamma) = k_1k_2\gamma = (k_1k_2)\gamma.$$

a.3) Sea $k_1 \in K$ y $\gamma\psi \in KQ$,

$$\begin{aligned} k_1(\gamma\psi) &= k_1 \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j \gamma_i \psi_j \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m k_1(a_i b_j) \gamma_i \psi_j \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (k_1 a_i) b_j \gamma_i \psi_j \right) = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i (k_1 b_j) \gamma_i \psi_j \right) \\ &= (k_1 \gamma) \psi = \gamma(k_1 \psi). \end{aligned}$$

a.4) Sea $\alpha, \gamma, \psi \in KQ$,

$$\begin{aligned}
 \alpha\gamma + \alpha\psi &= \left(\sum_{i=1}^n a_i \alpha_i \right) \gamma + \left(\sum_{i=1}^n a_i \alpha_i \right) \psi \\
 &= \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i \gamma + \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i \psi \\
 &= \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i \gamma + a_i \alpha_i \psi \\
 &= \sum_{i=1}^n a_i (\alpha_i \gamma + \alpha_i \psi) \\
 &= \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i (\gamma + \psi) \\
 &= \alpha(\gamma + \psi).
 \end{aligned}$$

b.1) Ahora probemos que los caminos de longitud cero forman un conjunto completo de idempotentes ortogonales en KQ .

Si $i = j$ entonces $\epsilon_i \epsilon_i = (i || i)(i || i) = (i || i) = \epsilon_i$.

Si $i \neq j$ entonces $\epsilon_i \epsilon_j = (i || i)(j || j) = 0$.

Veamos que si γ es un camino en el carcaj, se cumple lo siguiente:

$$\epsilon_i \gamma = \begin{cases} \gamma & \text{si } o(\gamma) = i \\ 0 & \text{si } o(\gamma) \neq i \end{cases} \quad \text{y} \quad \gamma \epsilon_i = \begin{cases} \gamma & \text{si } t(\gamma) = i \\ 0 & \text{si } t(\gamma) \neq i. \end{cases}$$

b.2) Enseguida demostraremos que KQ tiene identidad si y solo si el conjunto de vértices de Q es finito.

$\Rightarrow$) Supongamos que KQ tiene identidad, como $1_{KQ} \in KQ$, entonces

$$1_{KQ} = \sum_{i=1}^n a_i \gamma_i, \quad \text{con } \gamma_i \in Q_i$$

Consideremos

$$Q'_0 = \{ o(\gamma_i) \mid 1 \leq i \leq n \} \quad \text{donde } Q'_0 \text{ es finito.}$$

Supongamos que $|Q_0| = \infty$, entonces existe $j \in Q_0 \setminus Q'_0$. Consideremos el elemento ϵ_j , donde

$$\epsilon_j = \epsilon_j 1_{KQ} = \epsilon_j \sum_{i=1}^n a_i \gamma_i = \sum_{i=1}^n a_i \epsilon_j \gamma_i = 0 \quad \text{por la observación anterior.}$$

Lo cual contradice que $\epsilon_j \neq 0$, y así $|Q_0| < \infty$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $|Q_0| < \infty$. Sean $1_{KQ} = \sum_{i=1}^n \epsilon_i$, y $\gamma \in KQ$ donde

$$1_{KQ}\gamma = \left(\sum_{i=1}^n \epsilon_i\right)\gamma = \sum_{i=1}^n \epsilon_i\gamma = \epsilon_{o(\gamma)}\gamma = \gamma.$$

$$\gamma 1_{KQ} = \gamma \left(\sum_{i=1}^n \epsilon_i\right) = \sum_{i=1}^n \gamma\epsilon_i = \gamma\epsilon_{t(\gamma)} = \gamma.$$

Por lo tanto, $\{\epsilon_i\}_{i=1}^n$ es una familia completa de idempotentes ortogonales.

c) $\Rightarrow$) Si $\dim_K(KQ) < \infty$. Como $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} KQ_n$ es una base, entonces

$$\left| \bigcup_{n \in \mathbb{N}} KQ_n \right| = n < \infty$$

donde $Q_0 \cup Q_1 \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} KQ_n$, por lo tanto, $|Q_0 \cup Q_1| < \infty$, esto es Q es finito. Para ver que Q es acíclico, supongamos que Q tiene un ciclo de longitud n , $\gamma \in Q_n$, lo que lleva que $\gamma^m \in Q_{nm}$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Consideremos $\beta = \{\gamma^m \mid m \in \mathbb{N}\} \subseteq \left| \bigcup_{n \in \mathbb{N}} KQ_n \right|$ como β es linealmente independiente e infinito, contradice que KQ sea de dimensión finita, por lo tanto, Q es acíclico.

($\Leftarrow$) Si Q es finito y acíclico, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para toda $m \geq n$, $Q_m = \emptyset$. En consecuencia

$$\dim_K(KQ) = \left| \bigcup_{i=0}^{m-1} Q_i \right| < \infty.$$

□

Ejemplo 4.1.12 Consideremos el carcaj

$$Q: \bullet 1 \quad \bullet 2 \quad \bullet 3$$

El K -espacio vectorial asociado al carcaj es:

$$KQ = \langle \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \rangle = K\epsilon_1 \oplus K\epsilon_2 \oplus K\epsilon_3.$$

Ejemplo 4.1.13 Consideremos el carcaj

$$Q: \bullet 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} \bullet 2$$

El K -espacio vectorial asociado al carcaj es:

$$KQ = \langle \epsilon_1, \epsilon_2, \alpha, \beta \rangle = K\epsilon_1 \oplus K\epsilon_2 \oplus K\epsilon_3 \oplus K\alpha \oplus K\beta.$$

Ejemplo 4.1.14 Consideremos el carcaj

$$Q: \bullet 1 \begin{array}{c} \curvearrowright \gamma \\ \curvearrowleft \end{array}$$

Por lo que, el K -espacio vectorial asociado al carcaj es:

$$KQ = \langle \epsilon_1, \gamma, \gamma^2, \dots \rangle = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} K\gamma^i = K\epsilon_1 \oplus K\gamma \oplus K\gamma^2 \oplus K\gamma^3 \oplus \dots$$

Definición 4.1.15 Sea Λ un anillo. Decimos que Λ es conexo si $\{0, 1\}$ son los únicos elementos idempotentes centrales en Λ .

Lema 4.1.16 Sea Λ un anillo. Entonces, Λ es conexo si y sólo si Λ no se puede escribir como el producto de anillos $\Lambda = R \times S$ donde R y S son anillos no triviales.

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que Λ es conexo, entonces sus únicos elementos idempotentes son $\{0, 1\}$, lo cual es una familia completa de idempotentes ortogonales primitivos, por el lema 3.5.7, sin pérdida de generalidad, se obtiene $\Lambda = R \times S = 0R \times 1R$.

$\Leftarrow$) Sea $d \in Z(\Lambda)$ elemento idempotente. Entonces, $1 - d \in Z(\Lambda)$ ya que para todo $r \in \Lambda$

$$r(1 - d) = r - rd = r - dr = (1 - d)r.$$

Entonces, $\Lambda = d\Lambda \oplus (1-d)\Lambda$ y al ser inescindible $d = 0$ o $d = 1$.

Lema 4.1.17 Sean Λ un anillo y $e \in \Lambda$ un elemento idempotente. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen:

a) La correspondencia

$$\rho: e\Lambda e \longrightarrow \text{End}_K(\Lambda e)^{op}$$

$$e\lambda e \longmapsto (\lambda'e)(\rho(e\lambda e)) = \lambda'e\lambda e$$

dada por la multiplicación a derecha, es un isomorfismo de anillos.

- b) El idempotente e es primitivo si y solo si $e\Lambda e \neq 0$ y para todo $\tau \in e\Lambda e$ con $\tau^2 = \tau$, se tiene que $\tau = e$ o $\tau = 0$.

Demostración.

- a) Observemos que

$$\begin{aligned} \rho: e\Lambda e &\longrightarrow \text{End}_K(\Lambda e)^{\text{op}} \\ e\lambda e &\mapsto \phi(e\lambda e): \Lambda e \longrightarrow \Lambda e \\ (re) &\mapsto re\lambda e \end{aligned}$$

es un isomorfismo de anillos:

- a.1) Sea $ere, er_1e \in e\Lambda e$, entonces $\phi(ere + er_1e): \Lambda e \longrightarrow \Lambda e$

$$\begin{aligned} (se)\phi(ere + er_1e) &= (se)\phi(e(r + r_1)e) \\ &= se(r + r_1)e \\ &= sere + ser_1e \\ &= (se)\phi(ere) + (se)\phi(er_1e). \end{aligned}$$

- a.2) Sea $ere, er_1e \in e\Lambda e$. Veamos que $\phi((ere)(er_1e)) = \phi(e(rer_1)e)$, primero notemos que para $se \in \Lambda e$ se tiene que $(se)\phi(e(rer_1)e) = serer_1e$. Luego

$$\begin{aligned} (se)(\phi(ere)\phi(er_1e)) &= [(se)(\phi(ere))]\phi(er_1e) \\ &= [sere]\phi(er_1e) \\ &= serer_1e. \end{aligned}$$

Notemos que $\rho(e) = 1_{\Lambda e}$. En efecto, $\rho(e) = \phi(e)\Lambda e \longrightarrow \Lambda e$ donde

$$(se)\phi(e) = see = se.$$

- a.3) Sea $ere \in \ker(\rho)$, entonces $\phi(ere) \equiv 0$

$$(se)\phi(ere) = sere = 0 \quad \forall se \in \Lambda e,$$

en particular:

$$(e)\phi(ere) = ere = 0,$$

por lo tanto, $\ker(\rho) = \{0\}$.

- a.4) Para $\lambda \in \text{End}(\Lambda e)^{\text{op}}$. Consideremos $e(e)\lambda \in e\Lambda e$ de esta forma se tiene que:

$$\rho(e(e)\lambda) = \phi(e(e)\lambda)$$

y para todo $se \in \Lambda e$

$$(se)\phi(e(e)\lambda) = se(e)\lambda = (se)\lambda.$$

De esta forma ρ es un isomorfismo de anillos.

- b) $\Rightarrow$) Como e es idempotente primitivo, entonces ${}_{\Lambda}\Lambda e$ es inescindible. Se sigue por el teorema 3.5.9 que $\text{End}(\Lambda e)^{op}$ solo tiene a $\{0, id\}$ elementos idempotentes y por el inciso a) $\text{End}(\Lambda e)^{op} \cong e\Lambda e$. Por lo tanto, $e\Lambda e \neq 0$ y para $\tau \in e\Lambda e$ tal que $\tau^2 = \tau$ se sigue que $\tau = 0$ o $\tau = e$.
 $\Leftarrow$) Como $e\Lambda e \neq 0$ y $1_{e\Lambda e} = e \in e\Lambda e$ se concluye que e es primitivo.

□

Lema 4.1.18 Sea Λ un anillo y $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una familia completa de idempotentes ortogonales de Λ . Entonces, se tiene que Λ no es conexo si y solo si existe una partición no trivial $\{1, \dots, n\} = I \uplus J$ tal que $e_i\Lambda e_j = 0 = e_j\Lambda e_i$ para todo $i \in I$ y para toda $j \in J$.

Demostración. $\Rightarrow$) Como Λ no es conexo, existe $c \in Z(\Lambda)$ elemento idempotente con $c \neq 0$ y $c \neq 1$. Definamos $c_i = e_i c e_i \in e\Lambda e$ para toda $i = 1, \dots, n$ y consideremos el conjunto

$$I = \{i \mid c_i = 0\} \text{ y } J = \{j \mid c_j = e_j\}$$

donde

$$c_i^2 = (e_i c e_i)(e_i c e_i) = e_i c^2 e_i = e_i c e_i = c_i.$$

Por el lema 4.1.17 inciso b) se tiene que $c_i = 0$ o $c_i = e_i$, por lo tanto, $I \neq \emptyset, J \neq \emptyset$.

Veamos que $\forall i \in I$ y $\forall j \in J$ se tiene que $e_i c = c e_i = 0$ y $e_j c = c e_j = e_j$. Observemos que

$$\begin{aligned} c = 1c1 &= \left(\sum_{i=1}^n e_i \right) c \left(\sum_{i=1}^n e_i \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n e_i \right) \left(\sum_{i=1}^n c e_i \right) \\ &= e_1 \left(\sum_{i=1}^n c e_i \right) + e_2 \left(\sum_{i=1}^n c e_i \right) + \dots + e_n \left(\sum_{i=1}^n c e_i \right) \\ &= e_1 c e_1 + e_2 c e_2 + \dots + e_n c e_n \\ &= \left(\sum_{i=1}^n e_i c e_i \right) = \left(\sum_{i=1}^n c_i \right). \end{aligned}$$

Luego, para $i \in I$

$$e_i c = e_i \left(\sum_{t=1}^n c_t \right) = \left(\sum_{t=1}^n e_i c_t \right) = \left(\sum_{t=1}^n e_i e_t c e_t \right) = e_i c e_i = c_i = 0$$

y para $j \in J$

$$e_j c = e_j \left(\sum_{t=1}^n c_t \right) = \left(\sum_{t=1}^n e_j c_t \right) = \left(\sum_{t=1}^n e_j e_t c e_t \right) = e_j c e_j = c_j = e_j.$$

De manera similar se muestran las afirmaciones para $c e_i$ y $c e_j$.

Consideremos $(i, j) \in I \times J$ como $c \in Z(\Lambda)$ y por las igualdades anteriores,

$$e_i \Lambda e_j = e_i \Lambda (c e_j) = e_i (\Lambda c) e_j = e_i (c \Lambda) e_j = (e_i c) \Lambda e_j = c_i \Lambda e_j = 0 \Lambda e_j = 0$$

$$e_j \Lambda e_i = (e_j c) \Lambda e_i = e_j \Lambda c e_i = e_j \Lambda 0 = 0.$$

Por lo tanto, $e_i \Lambda e_j = e_j \Lambda e_i = 0$ para todo par $(i, j) \in I \times J$. $\Leftarrow$) Definamos

$$c = \sum_{j \in J} e_j \text{ como}$$

$$1 = \sum_{t=1}^n e_t = \sum_{j \in J} e_j + \sum_{i \in I} e_i = c + c'.$$

Entonces, $\{c, c'\}$ es una familia completa de idempotentes ortogonales de Λ y por el teorema 3.5.9 se tiene que

$$\Lambda = c \Lambda \oplus c' \Lambda.$$

Además, como $I \uplus J = \{1, 2, \dots, n\}$ es la unión disjunta y e_i son una familia completa de idempotentes, entonces $c \neq \{0, 1\}$ y solo falta ver que $c \in Z(\Lambda)$. Sea $\lambda \in \Lambda$, por hipótesis $e_i \lambda e_j = 0$ para toda $i \in I$ y $j \in J$, se sigue que:

$$\begin{aligned} c \lambda &= c \lambda 1 = c \lambda \left(\sum_{j \in J} e_j + \sum_{i \in I} e_i \right) \\ &= c \lambda \left(\sum_{j \in J} e_j \right) + c \lambda \left(\sum_{i \in I} e_i \right) \\ &= \left(\sum_{j \in J} e_j \right) \lambda \left(\sum_{j \in J} e_j \right) + \left(\sum_{j \in J} e_j \right) \lambda \left(\sum_{i \in I} e_i \right) \\ &= \left(\sum_{j \in J} e_j \right) \lambda \left(\sum_{j \in J} e_j \right) + 0 \\ &= \left(\sum_{j \in J} e_j \lambda e_j \right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\lambda c &= 1\lambda c = \left(\sum_{j \in J} e_j + \sum_{i \in I} e_i \right) \lambda c \\
&= \left(\sum_{j \in J} e_j \right) \lambda c + \left(\sum_{i \in I} e_i \right) \lambda c \\
&= \left(\sum_{j \in J} e_j \right) \lambda \left(\sum_{j \in J} e_j \right) + \left(\sum_{i \in I} e_i \right) \lambda \left(\sum_{j \in J} e_j \right) \\
&= \left(\sum_{j \in J} e_j \right) \lambda \left(\sum_{j \in J} e_j \right) + 0 \\
&= \left(\sum_{j \in J} e_j \lambda e_j \right).
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.1.19 Sea Q un carcaj finito.

a) $\{\epsilon_i \mid i \in Q_0\}$ es una familia completa de idempotentes ortogonales primitivos en KQ .

b) La K -álgebra KQ es conexa si y solo si Q es conexo.

Demostración.

a) En la proposición 4.1.11 tenemos que $\{\epsilon_i\}_{i=1}^n$ es una familia completa de idempotentes ortogonales, por lo que solo queda ver que cada ϵ_i es primitivo.

Por el lema 4.1.17, solo queda ver que $\epsilon_i(KQ)\epsilon_i \neq 0$ y que los únicos elementos idempotentes en $\epsilon_i(KQ)\epsilon_i$ son $\{\epsilon_i, 0\}$. Como $\epsilon_i \in \epsilon_i(KQ)\epsilon_i$, entonces $\epsilon_i(KQ)\epsilon_i \neq 0$. Para ver que $\epsilon_i(KQ)\epsilon_i$ solo tiene idempotentes triviales. Veremos dos casos: Para $\gamma \in Q_n$, observemos que

$$\epsilon_i \gamma \epsilon_i = \begin{cases} \gamma & \text{si } t(\gamma) = o(\gamma) = i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a.1) Q es acíclico.

Sí, $\epsilon_i \gamma \epsilon_i \neq 0$, al ser acíclico se tiene $\gamma = \epsilon_i$, entonces

$$\epsilon_i(KQ)\epsilon_i = K\epsilon_i \cong K.$$

A través de la asignación $a\epsilon_i \mapsto a$ y al ser K un campo, este solo tiene de elementos idempotentes al $\{0, 1\}$ y por la asignación anterior $\epsilon_i(KQ)\epsilon_i$ solo tiene como elementos idempotentes a $\{\epsilon_i, 0\}$.

a.2) Q tiene ciclos que pasan por el vértice i .

Como Q es finito existen $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ ciclos que pasan por i . Sea $\lambda \in \epsilon_i(KQ)\epsilon_i$ un elemento idempotente.

$$\lambda = a_0\epsilon_i + \sum_{i=1}^r a_i\gamma_i = a_0\epsilon_i + w$$

de donde, como $\lambda^2 - \lambda = 0$ se sigue que:

$$\lambda^2 - \lambda = (a_0^2 - a_0)\epsilon_i + (2a_0 - 1)w + w^2 = (a_0^2 - a_0)\epsilon_i + [(2a_0 - 1)\epsilon_i + w]w = 0.$$

Entonces, solo queda que $a_0^2 - a_0 = 0$ y $w = 0$. De esta forma, si $a_0 = 0$, implica $\lambda = 0$ o si $a_0 = 1$ se tiene que $\lambda = \epsilon_i$.

b) $\Rightarrow$) Supongamos que Q no es conexo. Sea $Q' \subseteq Q$ la parte conexa de Q . Definamos $Q'' = Q \setminus Q'$ y $Q_0'' = Q_0 \setminus Q_0'$. Por el inciso a) el conjunto $\{\epsilon_i \mid i \in Q_0\}$ es una familia completa de idempotentes ortogonales primitivos.

Sean $a \in Q_0'$, $b \in Q_0''$ y γ un camino en Q , entonces se tienen dos opciones $\gamma \in Q'$ o $\gamma \in Q''$.

Si $\gamma \in Q'$, entonces $t(\gamma) \neq b$ y $o(\gamma) \neq b$ de esta manera $\epsilon_b\gamma = \gamma\epsilon_b = 0$, por lo tanto, $\epsilon_b(KQ)\epsilon_a = \epsilon_a(KQ)\epsilon_b = 0$. Análogamente, se prueba la afirmación para $\gamma \in Q''$. Y por el lema 4.1.18 se concluye que KQ no es conexo.

$\Leftarrow$) Supongamos que Q es conexo y KQ no es conexa, entonces por el lema 4.1.18 existe $I \oplus J = Q_0' \cup Q_0''$ tal que, para todo $x \in Q_0'$ y $y \in Q_0''$ se tiene que $x(KQ)y = y(KQ)x = 0$. Al ser Q conexo existe $\alpha \in Q_n$ tal que $o(\alpha) = x$ y $t(\alpha) = y$, entonces $x\alpha y = \alpha \in x(KQ)y$, lo que contradice que α sea un elemento de una base de KQ . Por lo tanto, KQ es conexo.

□

4.2 Propiedad Universal de KQ

Una vez visto la construcción del álgebra de caminos. Una propiedad importante es la propiedad universal, esta nos dice que existe una forma de asignar los vértices y flechas del carcaj dentro de otra álgebra y esta se puede extender de manera única a toda el álgebra de caminos. Abordaremos algunos ejemplos importantes.

Teorema 4.2.1 *Sea Q un carcaj con un número finito de vértices y A una K -álgebra con unidad. Entonces, toda función*

$$\phi: Q_0 \cup Q_1 \longrightarrow A$$

que satisface las siguientes condiciones:

- a) $\{e_i := \phi(\epsilon_i) \mid i \in Q_0\}$ es una familia completa de idempotentes ortogonales en A .
- b) Para toda $\alpha \in Q_1$ se tiene que

$$\phi(\alpha) = \phi(\epsilon_{o(\alpha)})\phi(\alpha) = \phi(\alpha)\phi(\epsilon_{t(\alpha)})$$

se extiende de manera única a un morfismo de K -álgebras

$\bar{\phi}: KQ \longrightarrow A$ tal que $\bar{\phi}i = \phi$, esto es, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} Q_0 \cup Q_1 & \xrightarrow{\phi} & A \\ \downarrow i & \nearrow \bar{\phi} & \\ KQ & & \end{array}$$

Demostración. Veamos primero la existencia: Sea $\phi: Q_0 \cup Q_1 \longrightarrow A$ una función que satisface las condiciones a) y b). Definamos para $n \in \mathbb{N}$, el morfismo $\phi_n: KQ_n \longrightarrow A$.

Si $n = 0$ $\phi_0: KQ_0 \longrightarrow A$ donde ϕ_0 es la extensión lineal como espacio vectorial de $\phi|_{Q_0}$, esto es,

$$\begin{array}{ccc} Q_0 & \xrightarrow{\phi|_{Q_0}} & A \\ \downarrow i & \nearrow \phi_0 & \\ KQ_0 & & \end{array}$$

Si $n = 1$ se tiene que $\phi_1: KQ_1 \rightarrow A$ donde:

$$\begin{array}{ccc} Q_1 & \xrightarrow{\phi|_{Q_1}} & A \\ \downarrow i & \nearrow \phi_1 & \\ KQ_1 & & \end{array}$$

Para $n \geq 2$. Recordemos que KQ_n es un K -espacio vectorial generado por Q_n , entonces para $\gamma \in Q_n$ tenemos que $\gamma = \gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_n$ donde cada $\gamma_j \in Q_1$. Para $j = 1, \dots, n$, definamos

$$\begin{aligned} \phi_n: KQ_n &\rightarrow A \\ \gamma &\mapsto \phi(\gamma_1)\phi(\gamma_2) \cdots \phi(\gamma_n), \end{aligned}$$

entonces γ_n es la extensión lineal K -lineal de Q_n

$$\begin{array}{ccc} Q_n & \xrightarrow{\phi|_{Q_n}} & A \\ \downarrow i & \nearrow \phi_n & \\ KQ_n & & \end{array}$$

Para $\gamma \in Q_n$ y $\delta \in Q_m$ tenemos que

$$\gamma\delta = \begin{cases} \gamma\delta & \text{si } t(\gamma) = o(\delta) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si $t(\gamma) \neq o(\delta)$, se tiene que $t(\gamma_n) \neq o(\delta_1)$, esto es, $\phi_{n+m}(\gamma\delta) = 0$. Ahora probemos que $\phi_n(\gamma)\phi_m(\delta) = 0$. Como

$$\begin{aligned} \phi_n(\gamma) &= \phi(\gamma_1) \cdots \phi(\gamma_n) \\ \phi_m(\delta) &= \phi(\delta_1) \cdots \phi(\delta_m), \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \phi_n(\gamma)\phi_m(\delta) &= \phi(\gamma_1) \cdots \phi(\gamma_n)\phi(\delta_1) \cdots \phi(\delta_m) \\ &= \phi(\gamma_1) \cdots \phi(\gamma_n)\phi(\epsilon_{t(\gamma_n)})\phi(\epsilon_{o(\delta_1)})\phi(\delta_1) \cdots \phi(\delta_m) \\ &= \phi_n(\gamma)\phi(\epsilon_{t(\gamma_n)}\epsilon_{o(\delta_1)})\phi_m(\delta) \\ &= \phi_n(\gamma)\phi(0)\phi_m(\delta) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\phi_{n+m}(\gamma\delta) = \phi_n(\gamma)\phi_m(\delta)$. Ahora, si $t(\gamma) = o(\delta)$, es decir, $t(\gamma_n) = o(\delta_1)$ se tiene:

$$\begin{aligned} \phi_{n+m}(\gamma\delta) &= \phi_n(\gamma_1 \cdots \gamma_n \delta_1 \cdots \delta_m) \\ &= \phi(\gamma_1) \cdots \phi(\gamma_n)\phi(\delta_1) \cdots \phi(\delta_m) \\ &= \phi_n(\gamma)\phi_m(\delta) \end{aligned}$$

así ϕ_n es un morfismo de K -álgebras y $KQ = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} KQ_n$ y por la propiedad universal de la suma directa se tiene

$$\begin{array}{ccc}
KQ_j & \xrightarrow{\iota_j} & \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} KQ_n \\
& \searrow \phi_j & \swarrow \bar{\phi} \\
& A &
\end{array}$$

existe un único $\bar{\phi}: \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} KQ_n \longrightarrow A$ lineal tal que $\bar{\phi}|_{KQ_j} = \phi_j$ para toda $j \in \mathbb{N}$. Solo falta mostrar que $\bar{\phi}(1_{KQ}) = 1_A$.

$$\begin{aligned}
\bar{\phi}(1_{KQ}) &= \bar{\phi}\left(\sum_{i \in Q_0} \epsilon_i\right) \\
&= \sum_{i \in Q_0} \bar{\phi}(\epsilon_i) \\
&= \sum_{i \in Q_0} \phi_0(\epsilon_i) \\
&= \sum_{i \in Q_0} \phi(\epsilon_i) \\
&= \sum_{i \in Q_0} e_i \\
&= 1 \text{ por el inciso a).}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\bar{\phi}$ es morfismo de K -álgebras.

Sigamos con la unicidad: Supongamos que existe $\psi: KQ \longrightarrow A$ que satisface a) y b) y $\psi|_{Q_0 \cup Q_1} = \gamma$. Probemos que $\psi|_{KQ_n} = \phi_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 0, 1$ se tiene por hipótesis. Si $\gamma \in Q_n$ con $n \geq 2$, entonces

$$\begin{aligned}
\psi(\gamma) &= \psi(\gamma_1 \cdots \gamma_n) \\
&= \psi(\gamma_1) \cdots \psi(\gamma_n) \\
&= \phi(\gamma_1) \cdots \phi(\gamma_n) \\
&= \phi_n(\gamma)
\end{aligned}$$

y por unicidad de $\bar{\psi}$ se tiene que $\phi = \psi$.

Ejemplo 4.2.2 Consideremos

$$Q: \quad \bullet \xrightarrow{\gamma} \bullet$$

Observemos que $KQ = K\epsilon_1 \oplus K\gamma \oplus K\gamma^2 \oplus \cdots$. Entonces, $\beta = \{\alpha^n: n \in \mathbb{N}\}$ es la base de KQ . Consideremos el siguiente morfismo de K -álgebras.

$$\begin{aligned}
\psi: KQ &\longrightarrow K[x] \\
\gamma = \sum_{i=0}^n a_i \alpha^i &\mapsto \sum_{i=0}^n a_i x^i
\end{aligned}$$

probemos que ψ es un isomorfismo de K -álgebras. Sea $\gamma, \beta \in KQ$ y $k \in K$. Supongamos que $n < m$. Se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \psi(\gamma + \beta) &= \psi \left(\sum_{i=0}^n a_i \alpha^i + \sum_{j=0}^m b_j \alpha^j \right) \\
 &= \psi \left(\sum_{i=0}^m (a_i + b_i) \alpha^i \right) \\
 &= \sum_{i=0}^m (a_i + b_i) x^i \\
 &= \sum_{i=0}^n a_i \alpha^i + \sum_{j=0}^m b_j \alpha^j \\
 &= \psi(\gamma) + \psi(\beta).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \psi(\gamma\beta) &= \psi \left(\sum_{i=0}^n a_i \alpha^i \sum_{j=0}^m b_j \alpha^j \right) \\
 &= \psi \left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_i b_j \alpha^i \alpha^j \right) \\
 &= \psi \left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_i b_j \alpha^{i+j} \right) \\
 &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_i b_j x^{i+j} \\
 &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_i b_j x^i x^j \\
 &= \psi(\gamma)\psi(\beta).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \psi(k\gamma) &= \psi \left(k \sum_{i=0}^n a_i \alpha^i \right) \\
 &= \psi \left(\sum_{i=0}^n k \alpha^i \right) \\
 &= \sum_{i=0}^n k x^i \\
 &= k \sum_{i=0}^n \alpha^i \\
 &= k\psi(\gamma).
 \end{aligned}$$

Veamos que ψ es inyectiva. Sea $\gamma, \beta \in KQ$ tal que $\psi(\gamma) = \psi(\beta)$ esto es

$$\psi(\gamma) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = \sum_{j=0}^m b_j x^j = \psi(\beta);$$

entonces $m = n$ y $a_i = b_j$ para toda i y así $\gamma = \beta$.

Para ver que ψ es suprayectiva. Sea $p(x) \in K[x]$, entonces $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$.

Consideremos $\gamma = \sum_{i=0}^n a_i \alpha_i$, de esta forma $\psi(\gamma) = p(x)$.

Ejemplo 4.2.3

$$Q: \bullet 1 \quad \bullet 2 \quad \bullet 3$$

Observemos que $KQ = K\epsilon_1 \oplus K\epsilon_2 \oplus K\epsilon_3$ y se tiene la siguiente tabla de multiplicación de los elementos.

$\bullet$	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3
ϵ_1	ϵ_1	0	0
ϵ_2	0	ϵ_2	0
ϵ_3	0	0	ϵ_3

Definamos la siguiente función;

$$\begin{aligned} \psi: Q_0 \cup Q_1 &\longrightarrow K^3 \\ \epsilon_1 &\mapsto (1, 0, 0) \\ \epsilon_2 &\mapsto (0, 1, 0) \\ \epsilon_3 &\mapsto (0, 0, 1) \end{aligned}$$

ψ satisface las condiciones del Teorema 4.2.1. Por lo tanto, ψ se puede extender a un isomorfismo de K -álgebras y así $KQ \cong K^3$.

Ejemplo 4.2.4

$$Q: \bullet 1 \xrightarrow{\alpha_{12}} \bullet 2 \xrightarrow{\alpha_{23}} \bullet 3$$

Donde $KQ = K\epsilon_1 \oplus K\epsilon_2 \oplus K\epsilon_3 \oplus K\alpha_{12} \oplus K\alpha_{23} \oplus K\alpha_{13}$, así la tabla de multiplicación de elementos queda de la siguiente forma.

$\bullet$	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	α_{12}	α_{23}	α_{13}
ϵ_1	ϵ_1	0	0	α_{12}	0	α_{13}
ϵ_2	0	ϵ_2	0	0	α_{23}	0
ϵ_3	0	0	ϵ_3	0	0	0
α_{12}	0	α_{12}	0	0	α_{13}	0
α_{23}	0	0	α_{23}	0	0	0
α_{13}	0	0	α_{13}	0	0	0

Consideremos $T_3(K) = \{(a_{ij})_{3 \times 3} \in M_{3 \times 3} \mid a_{ij} = 0 \text{ para } i < j\}$ el conjunto de matrices triangulares inferiores de tamaño 3×3 . Definamos el morfismo

$$\begin{aligned} \psi: KQ &\longrightarrow T_3(K) \\ \epsilon_1 &\mapsto E_{33} \\ \epsilon_2 &\mapsto E_{22} \\ \epsilon_3 &\mapsto E_{11} \\ \alpha_{12} &\mapsto E_{32} \\ \alpha_{23} &\mapsto E_{21} \\ \alpha_{13} &\mapsto E_{31} \end{aligned}$$

Donde la matriz

$$E_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{en la entrada } ij \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por el teorema 4.2.1 se tiene que $KQ \cong T_3(K)$.

Ejemplo 4.2.5

$$Q: \bullet 1 \xrightarrow{\alpha_{12}} \bullet 2 \xrightarrow{\alpha_{23}} \bullet 3 \xrightarrow{\alpha_{34}} \cdots \xrightarrow{\alpha_{(n-2)(n-1)}} \bullet n-1 \xrightarrow{\alpha_{(n-1)n}} \bullet n$$

Observemos que los subespacios de KQ son de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} KQ_0 &= K\epsilon_1 \oplus K\epsilon_2 \oplus \cdots \oplus K\epsilon_n. \\ KQ_1 &= K\alpha_{12} \oplus K\alpha_{23} \oplus \cdots \oplus K\alpha_{(n-1)n}. \\ KQ_2 &= K\alpha_{13} \oplus K\alpha_{24} \oplus \cdots \oplus K\alpha_{(n-2)n}. \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$KQ_l = K\alpha_{1(l+1)} \oplus K\alpha_{2(l+2)} \oplus \cdots \oplus K\alpha_{(n-l)n} = \bigoplus_{i=1}^{n-l} K\alpha_{i(l+i)}.$$

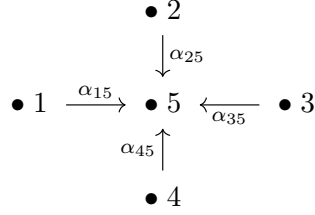
Donde α_{ij} es el camino que inicia en el vértice i y termina en el vértice j , de esta forma

$$KQ = \bigoplus_{i=0}^n KQ_i = \bigoplus_{i=0}^n \bigoplus_{j=1}^{n-i} K\alpha_{j(i+j)}.$$

Definiendo el siguiente morfismo de K -álgebras entre KQ y $T_n(K)$ las matrices triangulares inferiores de tamaño $n \times n$ de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} \psi: KQ &\longrightarrow T_n(K) \\ \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^{n-i} a_{ij} \alpha_{j(i+j)} &\longrightarrow \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^{n-i} a_{ij} E_{(n-j+1)(n-(i+j)+1)} \end{aligned}$$

y con ello se obtiene que $KQ \cong T_n(K)$.

Ejemplo 4.2.6

Observemos que $Q_0 = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5\}$ y $Q_1 = \{\alpha_{15}, \alpha_{25}, \alpha_{35}, \alpha_{45}\}$, entonces la tabla de multiplicación de elementos queda de la siguiente manera:

$\bullet$	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	ϵ_4	ϵ_5	α_{15}	α_{25}	α_{35}	α_{45}
ϵ_1	ϵ_1	0	0	0	0	α_{15}	0	0	0
ϵ_2	0	ϵ_2	0	0	0	0	α_{25}	0	0
ϵ_3	0	0	ϵ_3	0	0	0	0	α_{35}	0
ϵ_4	0	0	0	ϵ_4	0	0	0	0	α_{45}
ϵ_5	0	0	0	0	ϵ_5	0	0	0	0
α_{15}	0	0	0	0	α_{15}	0	0	0	0
α_{25}	0	0	0	0	α_{25}	0	0	0	0
α_{35}	0	0	0	0	α_{35}	0	0	0	0
α_{45}	0	0	0	0	α_{545}	0	0	0	0

Considerado el subespacio

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & b & 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & c & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 & d & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix} \mid \text{tal que, } a, b, c, d, e, f, g, h, i \in KQ \right\}$$

y $\psi: KQ \longrightarrow W$ definido de la siguiente manera $\alpha_{ij} \mapsto E_{ij}$ se obtiene que $KQ \cong W$.

Para el siguiente ejemplo daremos una pequeña introducción de la estructura anillos formales de matrices triangulares.

Definición 4.2.7 Sea A, C dos anillos y ${}_C B_A$ un bimódulo. Denotamos al conjunto

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} : a \in A, b \in B, c \in C \right\}$$

y definimos las siguientes operaciones

$$a) \ +) \text{ Suma } \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & 0 \\ b+b' & c+c' \end{pmatrix}$$

$$b) \ \bullet) \text{ Producto: } \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & 0 \\ ba' + cb' & cc' \end{pmatrix}$$

Proposición 4.2.8 $\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}, +, \bullet \right)$ es un anillo.

Demostración. Estas propiedades se heredan de que A y C son anillos y B un bimódulo. □

Si A y C son anillos con identidad, entonces $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$ tiene identidad, donde $I = \begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & 1_C \end{pmatrix}$. Al anillo $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$ con las operaciones definidas anteriormente, se le conoce como **el anillo formal de matrices triangulares** construido por A, B, C . Para simplificar la notación $R = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$. Una vez visto lo necesario, veamos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4.2.9 a) Sea $T_2^i(A)$ el anillo de matrices inferiores de 2×2 sobre un anillo A .

b) Si $A, C \subseteq B$ subanillos de B , entonces R es un subanillo $T_2^i(B)$.

c) Considerando $A = \mathbb{Q}$, $C = \mathbb{R}$ y $B = \mathbb{C}$ entonces

$$\begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ \mathbb{C} & \mathbb{R} \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} \mathbb{C} & 0 \\ \mathbb{C} & \mathbb{C} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 4.2.10 (Álgebra de Kronecker.) Sea el siguiente Carcaj.

$$Q: \bullet 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} \bullet 2$$

donde $KQ = K\epsilon_1 \oplus K\epsilon_2 \oplus K\alpha \oplus K\beta$, la tabla de multiplicación es:

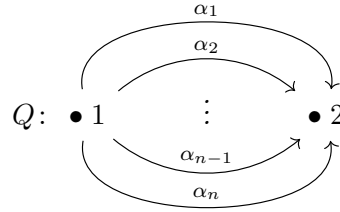
$\bullet$	ϵ_1	ϵ_2	α	β
ϵ_1	ϵ_1	0	α	β
ϵ_2	0	ϵ_2	0	0
α	0	α	0	0
β	0	β	0	0

Consideremos $A = \begin{pmatrix} K & 0 \\ K^2 & K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & 0 \\ K \times K & K \end{pmatrix}$, el anillo formal de matrices triangulares construido por K . Tomando el siguiente morfismo

$$\begin{aligned} \phi: KQ &\longrightarrow A \\ \epsilon_1 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \epsilon_2 &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \alpha &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (1, 0) & 0 \end{pmatrix} \\ \beta &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (0, 1) & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

obtenemos un isomorfismo de K -álgebras.

Ejemplo 4.2.11 Sea

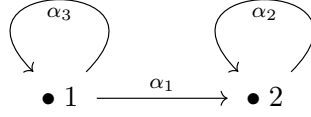


y $A = \begin{pmatrix} K & 0 \\ K^n & K \end{pmatrix}$, como $KQ = K\epsilon_1 \oplus K\epsilon_2 \oplus K\alpha_1 \oplus K\alpha_2 \oplus \dots \oplus K\alpha_n$, entonces consideremos el siguiente morfismo.

$$\begin{aligned} \phi: KQ &\longrightarrow A \\ \epsilon_1 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \epsilon_2 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \alpha_i &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (0, \dots, 1, \dots, 0) & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Se obtiene que $KQ \cong A$.

Ejemplo 4.2.12 *Consideremos*



y $R = \begin{pmatrix} R[x] & 0 \\ R[x, y] & R[y] \end{pmatrix}$ el anillo de matrices formales generado por $R[x]$ y $R[y]$. Considerando el siguiente morfismo,

$$\begin{aligned}
 \phi: KQ &\mapsto R \\
 \epsilon_1 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \epsilon_2 &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \alpha_1 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 \alpha_2 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \\
 \alpha_3 &\mapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Se obtiene que $KQ \cong A$. probemos que ϕ es un isomorfismo de K -álgebras para ello mostraremos que satisface las condiciones de 4.2.1.

$$\begin{aligned}
 \phi(\epsilon_1 \alpha_1) &= \phi(\alpha_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \phi(\epsilon_1) \phi(\alpha_1) \\
 \phi(\epsilon_1 \alpha_2) &= \phi(\alpha_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \phi(\epsilon_1) \phi(\alpha_2) \\
 \phi(\epsilon_2 \alpha_3) &= \phi(\alpha_3) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \phi(\epsilon_2) \phi(\alpha_3).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, existe $\bar{\phi}$ morfismo de K -álgebras de KQ a R . Falta mostrar que $\bar{\phi}$ es isomorfismo.

Veamos que $\ker(\bar{\phi}) = 0$. Sea $\gamma \in \text{Ker}(\bar{\phi})$, entonces

$$\begin{aligned}
\bar{\phi}(\gamma) &= \bar{\phi}(a_1\epsilon_1 + a_2\epsilon_2 + a_3\alpha_1 + a_4\alpha_2 + a_5\alpha_3 + \sum_i \sum_j a_{ij}\alpha_2^i\alpha_1^j) \\
&= a_1\bar{\phi}(\epsilon_1) + a_2\bar{\phi}(\epsilon_2) + a_3\bar{\phi}(\alpha_1) + a_4\bar{\phi}(\alpha_2) + a_5\bar{\phi}(\alpha_3) + \sum_i \sum_j a_{ij}\bar{\phi}(\alpha_2^i)\bar{\phi}(\alpha_1^j) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_4y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_5x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&+ \sum_i \sum_j a_{ij} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_4y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_5x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&+ \sum_i \sum_j a_{ij} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sum_i \sum_j a_{ij}y^i x^j & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_2 + a_5x & 0 \\ a_3 + \sum_i \sum_j a_{ij}y^i x^j & a_1 + a_4y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{array}{ll}
a_2 + a_5x = 0 & a_2 = a_5 = 0 \\
a_1 + a_4y = 0 & \Rightarrow a_1 = a_4 = 0 \\
a_3 + \sum_i \sum_j a_{ij}y^i x^j a_1 + a_4y = 0 & a_3 = a_{ij} = 0
\end{array}$$

por lo que se obtiene que $\bar{\phi}$ es inyectiva.

Sea

$$\begin{pmatrix} \sum_i a_i x^i & 0 \\ \sum_i \sum_j a_{ij} y^i x^j & \sum_j c_j y^j \end{pmatrix} \in R.$$

Considerando $\gamma \in KQ$ de la siguiente manera

$$\gamma = \sum_i a_i \alpha_3^i + \sum_k \sum_l b_{kl} \alpha_2^k \alpha_1 \alpha_3^l + \sum_j c_j \alpha_2^j$$

se obtiene que $KQ \cong R$, pero sabemos que $K[x, y] \cong K[x] \otimes K[y]$, por lo tanto,

$$KQ \cong \begin{pmatrix} K[x] & 0 \\ K[x] \otimes K[y] & K[y] \end{pmatrix}.$$

4.3 Ideales de KQ

En este capítulo analizaremos uno de los elementos importantes en el álgebra de carcaj, los ideales. Veremos propiedades que estos tienen dentro del álgebra.

Definición 4.3.1 Dado Q un carcaj denotamos como $\mathcal{F}$ al ideal generado por Q_1 en KQ , esto es, para $\gamma \in \mathcal{F} = \langle Q_1 \rangle$ se tiene que $\gamma = \sum_{i \in Q_0} a_i \gamma_i$ con $\gamma_i \in Q_1$.

Lema 4.3.2 Dado Q un carcaj, para todo $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ se tiene que $\mathcal{F}^m = \bigoplus_{n \geq m} KQ_n$ y $\frac{\mathcal{F}^m}{\mathcal{F}^{m+1}} \cong KQ_m$ como K -módulos.

Demostración. Para $m = 1$, veamos que $\mathcal{F} = \bigoplus_{n \geq 1} KQ_n \subseteq \langle Q_1 \rangle$. Como $\mathcal{F} = \langle Q_1 \rangle \subseteq \bigoplus_{n \geq 1} KQ_n$.

$\supseteq$) Sea $\gamma \in \bigoplus_{n \geq 1} KQ_n$, por lo que $\gamma = \sum_{i=1}^s a_i \gamma_i$ donde $\gamma_i \in Q_i$, observemos que

$$\gamma_i = \gamma_{i1} \gamma_{i2} \cdots \gamma_{ij}$$

con $\gamma_{ij} \in Q_1$, de esta forma,

$$\gamma = a_1 \gamma_1 + a_2 \gamma_{21} \gamma_{22} + a_3 \gamma_{31} \gamma_{32} \gamma_{33} + \cdots + a_s \gamma_{s1} \cdots \gamma_{ss}$$

como $\mathcal{F}$ es un ideal se tiene que $a_i \gamma_{ij} \in \mathcal{F}$, se sigue que $\sum_i a_i \gamma_i \in \mathcal{F}$. Por

lo tanto, $\gamma \in \mathcal{F}$.

Supongamos que se cumple para m , esto es que $\mathcal{F}^m = \bigoplus_{n \geq m} KQ_n$, entonces

$$\mathcal{F}^{m+1} = \mathcal{F} = \langle Q_1 \rangle \left(\bigoplus_{n \geq m} KQ_n \right) = \langle Q_1 \rangle KQ_m \oplus \langle Q_1 \rangle KQ_{m+1} \oplus \cdots \dots (*)$$

observemos que si $\gamma \in \langle Q_1 \rangle$ y $\delta \in KQ_n$, entonces $\gamma\delta \in KQ_{m+1}$, con esto de (*) se obtiene que

$$\mathcal{F}^{m+1} = KQ_{m+1} \oplus KQ_{m+2} \oplus \cdots = \bigoplus_{n \geq m+1} KQ_n.$$

b) Por el inciso a) tenemos que $\mathcal{F}^m = \bigoplus_{n \geq m} KQ_n$. Consideremos la proyección sobre KQ_m donde; $\pi: \bigoplus_{n \geq m} KQ_n \rightarrow KQ_m$ es un morfismo suprayectivo y el $\ker(\pi) = \bigoplus_{n \geq m+1} KQ_n$, entonces por el primer teorema de isomorfismo de Noether

$$\frac{\bigoplus_{n \geq m} KQ_n}{\ker(\pi)} = \frac{\bigoplus_{n \geq m} KQ_n}{\bigoplus_{n \geq m+1} KQ_n} = \frac{\mathcal{F}^m}{\mathcal{F}^{m+1}} \cong KQ_m.$$

□

Lema 4.3.3 Sean Q un carcaj finito y $K^{|Q_0|} = K \times \cdots \times K$ la K -álgebra semisimple asociada a Q . Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen

a) $\frac{KQ}{\mathcal{F}} = \bigoplus_{i \in Q_0} K\bar{\epsilon}_i$ como K -módulos donde $\bar{\epsilon}_i = \epsilon_1 + \mathcal{F}$.

b) La aplicación

$$\phi: \frac{KQ}{\mathcal{F}} \rightarrow K^{|Q_0|}$$

$$\bar{\epsilon}_i \mapsto (0, \dots, 1, \dots, 0)$$

es un isomorfismo de K -álgebras y $\{\bar{\epsilon}_i \mid i \in Q_0\}$ es una familia completa de idempotentes ortogonales primitivos de $\frac{KQ}{\mathcal{F}}$.

Demostración. a) Por el lema 4.3.2 se tiene

$$\frac{KQ}{\mathcal{F}} = \frac{\bigoplus_{n \geq 0} KQ_n}{\bigoplus_{n \geq 1} KQ_n} \cong KQ_0,$$

entonces como K -espacios vectoriales

$$\dim_K \left(\frac{KQ}{\mathcal{F}} \right) = \dim_K(KQ_0) = |Q_0|,$$

entonces $\frac{KQ}{\mathcal{F}} \subseteq \bigoplus_{i \in Q_0} K\bar{\epsilon}_i$.

Sea $\gamma \in \bigoplus_{i \in Q_0} K\bar{\epsilon}_i$, entonces

$$\begin{aligned} \gamma &= \sum_{i \in Q_0} a_i \bar{\epsilon}_i \\ &= \sum_{i \in Q_0} a_i (\epsilon_i + \mathcal{F}) \\ &= \sum_{i \in Q_0} (a_i \epsilon_i + a_i \mathcal{F}) \\ &= \sum_{i \in Q_0} a_i \epsilon_i + \sum_{i \in Q_0} a_i \mathcal{F} \\ &= \left(\sum_{i \in Q_0} a_i \epsilon_i + \mathcal{F} \right) \in \frac{KQ}{\mathcal{F}} \end{aligned}$$

b) Consideremos

$$\begin{aligned} \phi: \bigoplus_{i \in Q_0} K\bar{\epsilon}_i &\longrightarrow K^{|Q_0|} \\ \bar{\epsilon}_i &\mapsto e_i \end{aligned}$$

observemos que $\{\bar{\epsilon}_i\}_{i \in Q_0}$ son idempotentes ortogonales, pues

$$\bar{\epsilon}_i^2 = (\epsilon_i + \mathcal{F})(\epsilon_i + \mathcal{F}) = \epsilon_i^2 + \mathcal{F} = \epsilon_i + \mathcal{F}$$

para $i \neq j$

$$\bar{\epsilon}_i \bar{\epsilon}_j = \epsilon_i \epsilon_j + \mathcal{F} = 0 + \mathcal{F} = \bar{0}$$

Sea $\gamma, \delta \in \frac{KQ}{\mathcal{F}}$, entonces

$$\phi(\gamma\delta) = \phi\left(\sum_{i \in Q_0} \gamma_i \delta_i \bar{\epsilon}_i\right) = \sum_{i \in Q_0} \gamma_i \delta_i e_i$$

$$\phi(\gamma)\phi(\delta) = \phi\left(\sum_{i \in Q_0} \gamma_i \bar{\epsilon}_i\right) \phi\left(\sum_{i \in Q_0} \delta_i \bar{\epsilon}_i\right) = \left(\sum_{i \in Q_0} \gamma_i e_i\right) \left(\sum_{i \in Q_0} \delta_i e_i\right) = \sum_{i \in Q_0} \gamma_i \delta_i e_i$$

al ser ϕ un morfismo de K -álgebras se tiene por el teorema 4.2.1 que es un isomorfismo. Veamos que $\bar{\epsilon}_i$ son elementos primitivos, como $\frac{KQ}{\mathcal{F}} \cong K^{|Q_0|}$.

Por el lema 4.1.17 inciso b) solo queda ver que $e_i K^{|Q_0|} e_i \neq 0$. En efecto, ya que $e_i \in e_i K^{|Q_0|} e_i$.

Recordando que $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ y que

$$e_i(K^{|Q_0|}) = 0 \times \dots \times K \times \dots \times 0,$$

entonces

$$e_i(K^{|Q_0|})e_i = 0 \times \dots \times K \times \dots \times 0 \cong K.$$

Por lo tanto, $e_i(K^{|Q_0|})e_i$ solo tiene $\{e_i, 0\}$ como conjunto de elementos idempotentes. En consecuencia, e_i es primitivo y por el isomorfismo $\bar{e}_i$ también lo es. $\square$

4.4 Cocientes de álgebras de Caminos

Una estructura que se analiza en la teoría de anillos, es el cociente con un ideal, en esta, sección estudiaremos las propiedades que se tienen en el cociente con el ideal $\mathcal{F}$.

Definición 4.4.1 Sean Q un carcaj finito e I un ideal de KQ . Decimos que I es admisible si existe $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 2$ tal que

$$\mathcal{F}^m \subseteq I \subseteq \mathcal{F}^2$$

Al par (Q, I) con I admisible se le llama un carcaj con relaciones.

Lema 4.4.2 Sean Q un carcaj finito e $I \leq KQ$ tal que $\mathcal{F}^2 \subseteq I$, entonces

- a) I es admisible si y solo si para cada ciclo $\sigma \in Q$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma^n \in I$.
- b) $I = 0$ es admisible si y solo si Q es acíclico.

Demostración. a) $\Rightarrow$ Supongamos que I es admisible, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\bigoplus_{n \geq m} KQ_n = \mathcal{F}^m \subseteq I \subseteq \mathcal{F}^2$$

Sea $\sigma \in Q$ un ciclo de longitud l , tomando $n = m$ se tiene $\sigma^m \in I$, por ser admisible.

$\Leftarrow$) Sea σ un ciclo de longitud $l \geq 2$ en Q , por hipótesis $\sigma^n \in I$ donde

$$\sigma = \sigma_1(\sigma_2 \cdots \sigma_l) \in \langle Q_1 \rangle$$

por lo que $\sigma \in \mathcal{F} = \langle Q_1 \rangle$, entonces $\sigma^n \in \mathcal{F}^n$ así $\mathcal{F}^n \subseteq I$, esto es I es admisible.

b) $\Rightarrow$ Como $I = 0$ es admisible, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{F}^m \subseteq I = 0$, de tal forma que $\mathcal{F}^m = \bigoplus_{n \geq m} KQ_n = 0$ esto nos dice $KQ_m = 0$ por lo que Q tiene caminos de a lo más de longitud $m - 1$. En consecuencia $\dim_K(KQ) = m < \infty$ y así Q es acíclico.

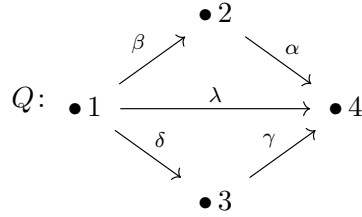
$\Leftarrow$) Si Q es acíclico, se tiene $\dim_K(KQ) = m < \infty$, por lo que

$KQ = \bigoplus_{i=0}^{m-1} KQ_i$ y así $KQ_n = 0$ para todo $n \geq m$ y, por lo tanto,

$$\mathcal{F}^m = \bigoplus_{n \geq m} KQ_n = 0.$$

□

Ejemplo 4.4.3 *Consideremos*



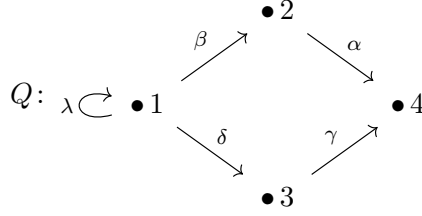
se tiene que $KQ = \bigoplus_{i=0}^2 KQ_i = \left(\bigoplus_{i=1}^3 \epsilon_i \right) \oplus K\alpha \oplus K\beta \oplus K\delta \oplus K\gamma \oplus K\beta\alpha \oplus K\delta\gamma$.

Observemos que $\bigoplus_{n \geq 3} KQ_n = 0$, entonces 0 es un ideal admisible. Consideran-

do, $I_1 = \langle \beta\alpha - \delta\gamma \rangle$ también es un ideal admisible, como $\mathcal{F}^3 = 0$ y $\mathcal{F}^3 \subseteq I_1$ veamos que $I_1 \subseteq \mathcal{F}^2$. En efecto, ya que $\mathcal{F}^2 = \bigoplus_{n \geq 2} KQ_n = KQ_2$, como

$\beta\alpha, \delta\gamma \in Q_2$ y al ser un espacio vectorial, entonces $\beta\alpha - \delta\gamma \in KQ_2$, por lo tanto, $I_1 \subseteq \mathcal{F}^2$.

Sin embargo, el ideal $I_2 = \langle \beta\alpha - \lambda \rangle$ no es admisible, ya que $I \not\subseteq \mathcal{F}$, esto es porque $\beta\alpha - \lambda \notin KQ_2$.

Ejemplo 4.4.4 Consideremos

Como se tiene un lazo, $\dim_K(KQ) = \infty$, por el 4.4.2 el ideal $I = 0$ no es admisible. Para $I_1 = \langle \beta\alpha - \delta\gamma, \lambda\beta, \lambda^3 \rangle$ es un ideal admisible, ya que $\beta\alpha - \delta\gamma, \lambda\beta \in KQ_2$ y $\lambda^3 \in KQ_3$ y así $I_1 \subseteq \mathcal{F}^2$ y $\mathcal{F}^4 \subseteq I_1$. En efecto, pues

$$\mathcal{F}^4 = \bigoplus_{n \geq 4} KQ_n = \bigoplus_{n \geq 4} K\lambda^n \gamma_i = \lambda^3 \left(\bigoplus_{n \geq 4} K\lambda \gamma_i \right) \text{ con } \gamma_i \in KQ_r, r = 1, 2.$$

Por lo tanto, $\mathcal{F}^4 \subseteq I_1 \subseteq \mathcal{F}^2$. Sin embargo, $I_2 = \langle \lambda\beta, \beta\alpha - \delta\gamma \rangle$ cumple que $I_2 \subseteq \mathcal{F}^2$ sin embargo, $\gamma_3 \in KQ_3$ se tiene que

$$\gamma_3 = a_1\lambda^3 + a_2\lambda\beta\gamma + a_3\lambda\delta\gamma \notin I_2.$$

Por lo tanto, $\mathcal{F}^3 = \bigoplus_{n \geq 3} KQ_n \not\subseteq I_2$

Teorema 4.4.5 Sea (Q, I) un carcaj con relaciones. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen:

- a) KQ/I es una K -álgebra básica de dimensión finita.
- b) $\{e_i := \epsilon_i + I\}_{i \in Q_0}$ es una familia completa de idempotentes ortogonales primitivos en KQ/I .
- c) KQ/I es conexa si y solo si Q es conexo.
- d) $J(KQ/I) = \mathcal{F}/I$.

Demostración.

- d) Veamos que $\mathcal{F}/I$ es nilpotente y $(KQ/I)/(\mathcal{F}/I)$ es semisimple. Como I es admisible, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{F}^m \subseteq I$, considerando

$$\begin{aligned} \theta: KQ/\mathcal{F}^m &\longrightarrow KQ/I \\ \bar{x} = x + \mathcal{F}^m &\mapsto x + I \end{aligned}$$

como

$$\frac{KQ}{\mathcal{F}} = \frac{\bigoplus_{n \geq 0} KQ_n}{\bigoplus_{n \geq m} KQ_n} = \bigoplus_{n=0}^m KQ_n$$

al ser Q es finito, se tiene

$$\dim_K(KQ/\mathcal{F}) = \dim_K \left(\bigoplus_{n=0}^{m-1} KQ_n \right) = r < \infty,$$

entonces por el lema 4.3.3

$$\frac{KQ/I}{\mathcal{F}/I} \cong KQ/\mathcal{F} = K^{|Q_0|}$$

y como $K^{|Q_0|}$ es un módulo semisimple. Se concluye que $KQ/I/\mathcal{F}/I$ es semisimple.

Ahora veamos que $(\mathcal{F}/I)^m = \mathcal{F}^m/I$

$\subseteq$) Sea $\bar{x} \in (\mathcal{F}/I)^m$, por lo que

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^m \bar{y}_1 \bar{y}_2 \cdots \bar{y}_m = \sum_{i=1}^m \overline{y_1 y_2 \cdots y_m} \in \mathcal{F}^m/I.$$

$\supseteq$) Sea $\bar{x} \in \mathcal{F}^m/I$ por lo que $\bar{x}$ es de la forma $\bar{x} = x + I$ con $x \in \mathcal{F}^m$. Entonces,

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x + I \\ &= \sum (y_1 y_2 \cdots y_m) + I \\ &= \sum (y_1 + I)(y_2 + I) \cdots (y_m + I) \\ &= \sum \bar{y}_1 \bar{y}_2 \cdots \bar{y}_m \in (\mathcal{F}/I)^m \end{aligned}$$

con $y_i \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}^m \subset I$, entonces $(\mathcal{F}/I)^m = 0$, por lo tanto, $J(KQ/I) = \mathcal{F}/I$.

- a) Como $\dim_K(KQ/I) < \infty$ y por el inciso anterior $J(KQ/I) = \mathcal{F}/I$, entonces

$$\frac{KQ/I}{\mathcal{F}/I} \cong KQ/\mathcal{F} = K^{|Q_0|}$$

- b) Como $\{e_i = \epsilon_i + I\}_{i \in Q_0}$ es una familia completa de idempotentes ortogonales en KQ/I , solo falta ver que e_i es primitivo.

Como $e_i \in e_i(KQ/I)e_i \neq 0$. Sea $\tau \in e_i(KQ/I)e_i$ tal que $\tau^2 = \tau$, como $e_i(KQ/I)e_i = \frac{e_i KQ e_i}{I}$. Para $\gamma \in e_i KQ e_i$ se tiene que $\gamma = a_i \epsilon_i + w$ donde w es un ciclo en i . Por lo tanto, $\tau = (a_i \epsilon_i + w) + I$, entonces

$$\tau^2 = a_i^2 \epsilon_i + 2a_i w + w^2 + I = a_i \epsilon_i + w + I = \tau$$

por lo que

$$(a_i^2 - a_i)\bar{\epsilon}_i + (2a_i - 1)\bar{w} + \bar{w}^2 = 0 \dots (*)$$

En consecuencia $(a_i^2 - a_i) = a_i(a_i - 1) = 0$

Si $a_i = 0$, $(*)$ queda de la siguiente forma

$$\bar{w} + \bar{w}^2 = 0, \Rightarrow \bar{w}^2 = \bar{w}, \Rightarrow \bar{w}^3 = \bar{w}^2 \bar{w} = \bar{w}, \Rightarrow \bar{w}^4 = \bar{w}^3 \bar{w} = \bar{w}.$$

Por lo tanto, $\bar{w}^m = \bar{w} = 0$ y así $\tau = 0$

Si $a_i = 1$, $\bar{w}^2 = -\bar{w}$, entonces

$$\bar{w}^3 = \bar{w}^2 \bar{w} = -\bar{w} \bar{w} = -\bar{w}^2 = \bar{w}$$

$$\bar{w}^4 = \bar{w}^2 \bar{w}^2 = -\bar{w} - \bar{w} = \bar{w}^2 = -\bar{w},$$

entonces $\bar{w}^m = \bar{w} = 0$ o $\bar{w}^m = -\bar{w} = 0$, por lo tanto, $\tau = \bar{\epsilon}_i = e_i$ y por el lema 4.1.17 se tiene que e_i es primitivo.

- c) $\Rightarrow$ Como (KQ/I) es conexa, supongamos que Q no es conexa. Consideremos Q' la parte conexa de Q y $Q'' = Q/Q'$ por lo que $Q_0'' = Q_0/Q_0'$ como $\{e_i = \epsilon_i + I\}_{i \in Q_0}$ es una familia completa de idempotentes ortogonales primitivos y $Q_0 = Q_0' \cup Q_0''$ es una partición de Q_0 , veamos que $e_i(KQ/I)e_j = 0$ para todo $i \in Q_0'$ y para toda $j \in Q_0''$.

Sea $a \in Q_0'$ y $b \in Q_0''$ y $\bar{\gamma} \in KQ/I$, donde $\bar{\gamma} = \gamma + I$ con $\gamma \in KQ$

Caso 1) $\gamma \in KQ'$ se tiene que $t(\gamma) \neq b \neq o(\gamma)$, por lo que $\epsilon_i \gamma \epsilon_j = 0$ como ϵ_i, ϵ_j son elementos idempotentes en KQ , entonces

$$e_i(KQ/I)e_j = (\epsilon_i + I)(KQ/I)(\epsilon_j + I) = \epsilon_i KQ \epsilon_j / I$$

y así $e_i \bar{\gamma} e_j = \epsilon_i \gamma \epsilon_j + I = 0$. Por lo tanto, $e_i(KQ/I)e_j = \bar{0}$.

Caso 2) $\gamma \in KQ''$ se sigue $t(\gamma) \neq a \neq o(\gamma)$ y $e_i \bar{\gamma} e_j = \epsilon_i \gamma \epsilon_j + I = 0$, por lo tanto, $e_i(KQ/I)e_j = \bar{0}$ y así (KQ/I) no es conexa.

$\Leftrightarrow$) Supongamos que KQ/I no es conexa, entonces por el lema 4.1.18 existe una partición de números naturales $I_1 \uplus I_2$ tal que para cualesquiera $i \in I_1$ y $j \in I_2$, se tiene que

$$e_i(KQ/I)e_j = \epsilon_i KQ \epsilon_j / I = 0$$

Como Q es conexo, existen $k \in I_1$, $l \in I_2$ y $\gamma \in Q_1$ de tal forma que $o(\gamma) = k$ y $T(\gamma) = l$, donde $\epsilon_k \gamma \epsilon_l = \gamma$. Por la elección de k y l se tiene $e_k(KQ/I)e_l = \bar{0} = I$, entonces $\gamma \in I$ y como I es admisible, $\gamma \in \mathcal{F}^2$, lo cual contradice el hecho que $\gamma \in Q_1$, por lo tanto, KQ/I es conexa.

□

Definición 4.4.6 Sea Q un carcaj finito y $\rho = \sum_{i=1}^m \lambda_i w_i \in KQ$ con $\lambda_i \in K$ y w_i un camino en Q para toda i :

a) Decimos que ρ es una relación en Q con coeficientes en K si

$$a.1) \quad \forall i; w_i \in \bigcup_{n \geq 2} Q_n$$

$$a.2) \quad \forall i \neq j \quad o(w_i) = o(w_j) \text{ y } t(w_i) = t(w_j)$$

b) Si ρ es una relación en Q , decimos que:

$$b.1) \quad \rho \text{ es una relación cero o monomial si } m = 1 \text{ es decir } \rho = \lambda_1 w_1$$

$$b.2) \quad \rho \text{ es una relación de conmutatividad si } \rho = w_1 - w_2$$

Definición 4.4.7 Sea Q un carcaj finito y $\{\rho_j \mid j \in J\}$ un conjunto de relaciones en Q . Si $I = \langle \{\rho_j \mid j \in J\} \rangle \trianglelefteq Q$ es un ideal admisible, diremos que el carcaj con relaciones (Q, I) está generado por $\{\rho_j \mid j \in J\}$ o bien por las relaciones $\rho_j = 0 \quad \forall j \in J$.

Reconsiderando el ejemplo 4.4.4, $\rho_1 = \beta\alpha - \delta\gamma$ es una relación de conmutatividad y $\rho_2 = \lambda\beta$, $\rho_3 = \lambda^3$ son ejemplos de relaciones monomiales, entonces el ideal $I_1 = \langle \rho_1, \rho_2, \rho_3 \rangle = \langle \beta\alpha - \delta\gamma, \lambda\beta, \lambda^3 \rangle$ y KQ/I es una K -álgebra de Q y las relaciones $\alpha\beta = \gamma\delta$ y $\beta\lambda = 0 = \lambda^3$.

Proposición 4.4.8 Sean Q un carcaj finito y acíclico e $I \trianglelefteq Q$ ideal admisible. Entonces, existe un conjunto finito de relaciones $\{\rho_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ en Q tal que $I = \langle \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n \rangle$.

Demostración. Como I es admisible, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{F}^m \subseteq I \subseteq \mathcal{F}^2$. Para mostrar que I es finitamente generado, consideremos ϵ la siguiente sucesión exacta.

$$\epsilon: 0 \longrightarrow \mathcal{F}^m \xrightarrow{i} I \xrightarrow{\pi} I/\mathcal{F}^m \longrightarrow 0$$

Mostremos que $\mathcal{F}^m, I/\mathcal{F}^m \in \text{mod}(KQ)$, Notemos que $\mathcal{F}^m = \langle Q_m \rangle$ como KQ -módulo. En efecto:

$\subseteq$) Sea $\gamma \in \mathcal{F}^m$, entonces $\gamma = \sum_{i=0}^r a_i \gamma_i$ donde $\gamma_i \in Q_{m+i}$ y $a_i \in K$. Donde

$\gamma_i = \gamma_{jm} \delta_j$ con $\gamma_{jm} \in Q_m$ y $\delta_j \in Q_j \subset KQ$, por lo tanto, $\gamma \in \langle Q_m \rangle$

$\supseteq$) Como $Q_m \subseteq \mathcal{F}^m$, entonces $\langle Q_m \rangle \subseteq \mathcal{F}^m$. Y al ser Q_m finito obtenemos que $\mathcal{F}^m \in \text{mod}(KQ)$.

Como I es admisible, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{F}^m \subseteq I \subseteq \mathcal{F}^2$ y por el teorema 4.4.5 se tiene que $\dim_K(KQ/\mathcal{F}^m) < \infty$ y como $I/\mathcal{F}^m \trianglelefteq KQ/\mathcal{F}^m$ es un ideal, entonces $I/\mathcal{F}^m$ es finitamente generado como K -módulo, ya que

$$\begin{array}{ccc} (KQ/\mathcal{F}^m)^s & \twoheadrightarrow & I/\mathcal{F}^m \\ \uparrow & \nearrow \phi & \\ KQ^s & & \end{array}$$

al tener que ϕ es epimorfismo, se tiene que $I/\mathcal{F}^m$ es finitamente generado como $KQ/\mathcal{F}^m$ -módulo, por lo tanto, al ser ϵ una sucesión exacta, $\mathcal{F}^m$ y $I/\mathcal{F}^m$ son finitamente generados como KQ -módulos e $I \in \text{mod}(KQ)$.

Entonces, existe $\{\rho_1, \dots, \rho_m\} \subseteq KQ$ tal que $I = \langle \rho_1, \dots, \rho_m \rangle$. Como $I \subseteq \mathcal{F}^2$ se tiene que ρ_i tiene longitud a lo menos 2 para toda $i = 1, \dots, m$, sin embargo, no se tiene que $o(\rho_i) = o(\rho_j)$ y $t(\rho_i) = t(\rho_j)$ para todo $i \neq j$. Consideremos $a, b \in Q_0$ y ϵ_a, ϵ_b de manera que tenemos que

$$\epsilon_a \rho_i \epsilon_b = 0 \text{ o } \epsilon_a \rho_i \epsilon_b = \rho_i,$$

entonces $I = \langle \{\epsilon_a \rho_i \epsilon_b \mid i = 1, 2, \dots, m\} \rangle$. Pues para $\gamma \in I$ se tiene que

$$\gamma = \sum_{i=1}^m a_i \rho_i \text{ si y solo si}$$

$$\epsilon_a \gamma \epsilon_b = \sum_{i=1}^m a_i \epsilon_a \rho_i \epsilon_b \in \langle \{\epsilon_a \rho_i \epsilon_b \mid i = 1, 2, \dots, m\} \rangle,$$

por lo tanto, I está generado por m -relaciones.

4.5 Carcaj de una K -álgebra de dimensión finita.

En esta sección recordaremos algunos resultados importantes en la teoría de representaciones, donde dichos resultados los podemos consultar en [13], [21], [15] y [8].

Definición 4.5.1 Sea A una K -álgebra de dimensión finita,

$$\{e_i \mid i \leq i \leq n\}$$

una familia completa de idempotentes ortogonales primitivos de A y $J := J(A)$ el radical de Jacobson de A . El **carcaj ordinario** Q_A se define como sigue:

- a) $(Q_A)_0 := \{1, 2, \dots, n\}$.
- b) Para todo $a, b \in (Q_A)_0$ definimos $\text{card}(\varepsilon_a(Q_A)_1 \varepsilon_b) := \dim_K(e_a(J/J^2)e_b)$ esto es, las flechas de a en b de Q_A están en correspondencia biyectiva con una K -base de $ea(J/J^2)e_b$.

Ejemplo 4.5.2 Consideremos la K -álgebra de matrices triangulares superiores.

$$\begin{pmatrix} K & K & K \\ 0 & K & K \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix}$$

Las matrices elementales de esta K -álgebra son $\{E_{11}, E_{22}, E_{33}\}$ que son una familia completa de idempotentes ortogonales primitivos de A , ya que

$$E_{ii} A E_{ii} = K E_{ii} \cong K.$$

Sea $I = \begin{pmatrix} 0 & K & K \\ 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \trianglelefteq A$ ideal de A , donde se cumple que $I = J(A)^2$, esto es porque $J^3 = 0$ y

$$\frac{A}{J} \cong K \times K \times K$$

$$\frac{J}{J^2} = \frac{K E_{12} \oplus K E_{13} \oplus K E_{23}}{K E_{13}} = \overline{K E_{12}} \oplus \overline{K E_{23}}$$

donde $\overline{K E_{12}} = E_{12} + J$ y $\overline{K E_{23}} = E_{23} + J$.

Entonces, los únicos productos por idempotentes que no son cero son:

$$E_{11}(J/J^2)E_{22} = E_{11}(\overline{K E_{12}} \oplus \overline{K E_{23}})E_{22} = \overline{K E_{12}}.$$

² $\forall I \trianglelefteq \Lambda$ ideal de Λ . I es nilpotente y $\frac{\Lambda}{I}$ es un anillo semisimple si y solo si $J(\Lambda) = I$.

y

$$E_{22}(J/J^2)E_{33} = E_{22}(\overline{KE_{12}} \oplus \overline{KE_{23}})E_{33} = \overline{KE_{23}}.$$

Por lo que el carcaj asociado a A es

$$Q_A: \bullet 1 \longleftarrow \bullet 2 \longleftarrow \bullet 3$$

Proposición 4.5.3 *Sea A una K -álgebra de dimensión finita. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen:*

- a) *El carcaj Q_A asociado a A , no depende de la elección de una familia completa de idempotentes ortogonales primitivos de A .*
- b) *Para cada par e_a, e_b de idempotentes ortogonales y primitivos de A la correspondencia*

$$\Psi: \frac{e_a J(A) e_b}{e_a J(A)^2 e_b} \longrightarrow e_a \frac{J(A)}{J(A)^2} e_b,$$

dada por

$$\Psi(e_a x e_b + e_a J(A)^2 e_b) := e_a (x + J(A)^2) e_b$$

es un isomorfismo de K -espacios vectoriales.

Definición 4.5.4 *Sea A una K -álgebra de dimensión finita, $\{e_i | 1 \leq i \leq n\}$ una familia completa de idempotentes ortogonales primitivos de A y Q_A el carcaj asociado a A . Definimos la función $\phi: (Q_A)_0 \cup (Q_A)_1 \longrightarrow A$ como sigue:*

- a) $\forall a \in (Q_A)_0, \phi(e_a) := \phi_{e_a} = e_a.$
- b) *Para cada par $(a, b) \in (Q_A)_0 \times (Q_A)_0$ con $e_a((Q_A)_i)e_b \neq \emptyset$ y cada $\alpha: a \longrightarrow b \in (Q_A)_1$, elegimos $\phi(a) := \phi_a \in e_a J(A) e_b$ tal que $\{\phi_a + J(A)^2 | \alpha \in e_a(Q_A)_1 e_b\}$ es una K -base de $e_a \frac{J(A)}{J(A)^2} e_b$.*

Observemos que ϕ satisface las condiciones de la propiedad universal de KQ por lo que se extiende a un morfismo de K -álgebras $\Phi: KQ_a \longrightarrow A$ y $\Phi(\mathcal{F}) \subseteq J(A)$ donde $\mathcal{F}$ es el ideal generado por $(Q_A)_1$.

Proposición 4.5.5 Sean A una K -álgebra de dimensión finita. Consideramos una familia completa de idempotentes ortogonales de A y Φ el morfismo de K -álgebras construido por la propiedad universal. Entonces,

- a) $\Phi(\mathcal{F}) = J(A)$.
- b) Si A es conexa y básica, entonces Q_A es conexo.
- c) $\forall \alpha \in (Q_a)_1$ existe un único morfismo $\bar{\phi}_\alpha \in \text{Hom}_A(Ae_{o(\alpha)}, Ae_{t(\alpha)})$ tal que $\bar{\phi}(e_{o(\alpha)}) = \phi_\alpha$. Más aún $\text{Im}(\bar{\phi}_\alpha) \subseteq J(A)e_{t(\alpha)}$ y $\text{Im}(\bar{\phi}_\alpha) \not\subseteq J(A)^2 e_{t(\alpha)}$.

Proposición 4.5.6 Si (Q, I) es un carcaj con relaciones y $A = KQ/I$, entonces $Q_A = Q$.

4.6 Teorema de P. Gabriel

En esta sección recordaremos un teorema fundamental para la teoría de representaciones que es el Teorema de P. Gabriel. Antes se dará á un resultado necesario cuyo resultado se puede consultar en [13].

Definición 4.6.1 Sean A una K -álgebra de dimensión finita. Decimos que A es **elemental** si existe $m \in \mathbb{N}^+$ tal que $A/J(A) \cong K \times \cdots \times K = K^m$.

Proposición 4.6.2 Sea A una K -álgebra de dimensión finita. Entonces,

- a) Si A es elemental, entonces A es básica.
- b) Si A es un anillo con división y K es algebraicamente cerrado, entonces $A \cong K$.

Lema 4.6.3 Sea A una K -álgebra de dimensión finita. Si A es básica y K es algebraicamente cerrado, entonces A es elemental.

Teorema 4.6.4 Sea A una K -álgebra de dimensión finita y consideremos el morfismo de K -álgebras $\Phi : KQ_a \rightarrow A$. Entonces,

- a) $(Q_a, \ker(\Phi))$ es un carcaj con relaciones.
- b) $\text{Im}(\Phi) = A$ si A es elemental.

Definición 4.6.5 Sea A una K -álgebra de dimensión finita. Una **presentación** de A es un carcaj con relaciones (Q, I) tal que $A \cong KQ/I$.

Teorema 4.6.6 (Teorema de P. Gabriel) Toda K -álgebra básica A de dimensión finita, con K algebraicamente cerrado, admite una presentación (Q, I) .

Observación 4.6.7 Sea A una K -álgebra de dimensión finita. Supongamos que A admite una presentación (Q, I) . Tenemos que:

- a) El carcaj Q es único, de hecho $Q = Q_A$.
- b) El ideal I no tiene por qué ser único. De hecho, el ideal $\ker(\Phi_A)$ depende de las posibles elecciones de $\phi_\alpha \in J(A)$, tales que $\phi_\alpha + J(A)^2 : \alpha \in Q_1$ sea una K -base de $J(A)/J(A)^2$.

4.7 Representaciones de Carcajes

Definición 4.7.1 Sea Q un carcaj. Una **representación** D de Q sobre $\text{Vec}(K)$ es una función $D : Q \longrightarrow \text{Vec}(K)$. que satisface:

- a) Para todo $i \in Q_0$ se tiene $D_i \in \text{Vec}(K)$.
- b) Para toda $\alpha \in Q_1$ se tiene que $D_\alpha : D_i \longrightarrow D_j$ es morfismo de $\text{Vec}(K)$.

En los siguientes enunciados $\text{Rep}_Q(\text{Vec}(K))$ denotará la categoría de representaciones de Q sobre un K -espacio vectorial, $\text{Rep}_K(Q) = \text{Rep}_Q(\text{Mod}(K))$ y $\text{rep}_K(Q) = \text{Rep}_Q(\text{mod}(K))$.

Definición 4.7.2 Sean $\mathcal{C}$ una categoría y R un anillo. Decimos que $\mathcal{C}$ es una R -categoría si:

- a) Para todo $A, B \in \mathcal{C}$ se cumple que $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \in \text{Mod}(R)$.
- b) Sea $A, B, C \in \mathcal{C}$

$$\text{Hom}(B, C) \times \text{Hom}(A, B) \longrightarrow \text{Hom}(A, C)$$

$$(g, f) \mapsto gf.$$

- b.1) Para todo $r \in R$ y $g \in \text{Hom}(B, C)$, $f_1, f_2 \in \text{Hom}(A, B)$ se cumple que

$$g \circ (rf_1 + f_2) = rgf_1 + gf_2.$$

- b.2) Para todo $r \in R$ y $f \in \text{Hom}(A, B)$, $g_1, g_2 \in \text{Hom}(B, C)$ se cumple que

$$(rg_1 + g_2) \circ f = rg_1f + g_2f.$$

Definición 4.7.3 Decimos que una R -categoría $\mathcal{C}$ es **Hom-finita** si para todo $A, B \in \mathcal{C}$ se tiene que $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \in \text{mod}(R)$.

Ejemplo 4.7.4 a) Sea

$$Q: \bullet 1 \xrightarrow{\alpha} \bullet 2$$

Considerando $D_1 = K^2$, $D_2 = K^3$ y

$$\begin{aligned} D_\alpha : D_1 &\longrightarrow D_2 \\ (x, y) &\longmapsto (x, x + y, x), \end{aligned}$$

es una transformación lineal. Tomemos la matriz asociada de D_α respecto a la base canónica, se sigue que:

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, $(D_1, D_2, D_\alpha) = (K^2, K^3, D_\alpha)$ es una representación de Q sobre $\text{mod}(K)$.

b) Sea

$$Q: \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \bullet 1 \end{array}$$

Considerando $D_1 = D_2 = K^2$ y

$$D_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Obtenemos que $(D_1, D_2, D_\beta) = (K^2, K^2, D_\beta)$ es una representación de Q en $\text{mod}(K)$.

Definición 4.7.5 Sean Q un carcaj, D, D' dos representaciones de Q sobre $\text{Vec}(K)$.

a) **Un morfismo** $F : D \longrightarrow D'$ en $\text{Rep}(\text{Vec}(K))$ es una familia de morfismos $f = \{f_i : D_i \longrightarrow D'_i\}_{i \in Q_0}$ en $\text{Vec}(K)$ tal que para todo $\alpha \in Q_1$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} D_i & \xrightarrow{D_\alpha} & D_j \\ f_i \downarrow & & \downarrow f_j \\ D'_i & \xrightarrow{D'_\alpha} & D'_j \end{array}$$

- b) La composición de morfismos $D \xrightarrow{f} D' \xrightarrow{g} D''$ en $\text{Rep}_Q(\text{Vec}(K))$ es la familia

$$gf = \{g_i f_i : D_i \longrightarrow D''_i\}_{i \in Q_0}$$

Donde

$$\begin{array}{ccccc} D_i & \xrightarrow{D_\alpha} & D_j & \xrightarrow{D_\beta} & D_k \\ f_i \downarrow & & \downarrow f_j & & \downarrow f_k \\ D'_i & \xrightarrow{D'_\alpha} & D'_j & \xrightarrow{D'_\beta} & D'_k \end{array}$$

conmuta.

- c) Dados $f, g : D \longrightarrow D'$ en $\text{Rep}_Q(\text{Vec}(K))$ se define:

c.1)

$$f + g := \{f_i + g_i : D_i \longrightarrow D'_i\}_{i \in Q_0}$$

c.2)

$$\lambda f := \{\lambda f_i : D_i \longrightarrow D'_i\}_{i \in Q_0}$$

Ejemplo 4.7.6 Consideremos $Q : 1 \xrightarrow{\alpha} 2$, $D : K^2 \longrightarrow K^3$ y $D' : K^2 \longrightarrow K^2$. Definidas de la siguiente forma $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $D' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} K^2 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} & K^3 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ K^2 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} & K^2 \end{array}$$

de donde $F : D \longrightarrow D'$ es un morfismo de $\text{Rep}_Q(\text{Vec}(K))$

Proposición 4.7.7 Sea Q un carcaj finito. Entonces,

- a) $\text{Rep}(\text{Vec}(K))$ es una K -categoría.
b) $\text{rep}_K(Q)$ es Hom-finita.

Demostración.

a) Sea $D, D' \in \text{Rep}_Q(\text{Vec}(K))$ como

$$\text{Hom}(D, D') = \prod_{i \in Q_0} \text{Hom}_K(D_i, D'_i)$$

donde para todo $f \in \text{Hom}(D, D')$ se define como:

$$f : Q_0 \longrightarrow \bigcup \text{Hom}(D_i, D'_i) \\ i \mapsto f_i$$

Como $\text{Hom}(D_i, D'_i) \in \text{Mod}(K)$ y Q es finito, se sigue que $\text{Hom}(D, D') \in \text{Mod}(K)$. Sea $r \in K$ y $f_1, f_2 \in \text{Hom}(D, D')$ y $g \in \text{Hom}(D', D'')$; observemos que

$$\begin{array}{ccccc} D_i & \xrightarrow{D_\alpha} & D_j & \xrightarrow{D_\beta} & D_k \\ \downarrow r f_{1i} & & \downarrow f_{2i} & \downarrow r f_{1j} & \downarrow f_{2j} \\ D'_i & \xrightarrow{D'_\alpha} & D'_j & \xrightarrow{D'_\beta} & D'_k \\ \downarrow g_i & & \downarrow g_j & & \downarrow g_k \\ D''_i & \xrightarrow{D''_\alpha} & D''_j & \xrightarrow{D''_\beta} & D''_k \end{array}$$

Es un cuadro que conmuta, por lo que

$$(D''_\alpha \circ g_i) \circ r f_{1i} = g_j \circ D'_\alpha \circ (r f_{1i}) = g_i \circ (r f_{1j}) \circ D'_\beta$$

Por lo tanto, $\text{Rep}_Q(\text{Vec}(K))$ es una K -categoría.

b) Recordemos

$$\text{Hom}(D_i, D'_i) = \prod_{i \in Q_0} \text{Hom}(D_i, D'_i)$$

Donde $\text{Hom}(D_i, D'_i) = \{\tau : D_i \longrightarrow D'_i \mid \tau \text{ es un morfismo en } \text{mod}(K)\}$, entonces existe $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $D_i \simeq K^m/L$ y $D'_i \simeq K^n/S$, lo cual implica que $\text{Hom}(D_i, D'_i) \cong \text{Hom}(K^m/L, D'_i)$. Sea $\varphi \in \text{Hom}(K^m/L, D'_i)$. Consideremos $P = \{f \in \text{Hom}(K^m, D'_i) \mid L \subseteq \ker(f)\}$.

b.1) Veamos que $P \leq \text{Hom}(K^m, D'_i)$ es un submódulo.

Por definición $P \subseteq \text{Hom}(K^m, D'_i)$. Verifiquemos que para todo $f, g \in P$, $f + g \in P$. En efecto, ya que $\ker(f) + \ker(g) \subseteq \ker(f + g)$, entonces $L \subseteq \ker(f + g)$.

Ahora para $r \in K$ se tiene que $L \subseteq r\ker(f) = \ker(rf)$. Por lo tanto, $P \leq \text{Hom}(K^m, D'_i)$.

b.2) Sea

$$\gamma : \text{Hom}(K^m/L, D'_i) \longrightarrow P$$

$$\varphi \mapsto \varphi \circ \pi_L$$

un morfismo de módulos. Probemos que γ es un isomorfismo.
Sea $\varphi \in \ker(\gamma)$, entonces

$$\gamma(\varphi) = \varphi \circ \pi_L \equiv 0$$

por lo que para todo $k \in K^m$ $\varphi \circ \pi_L(k) = \varphi(\bar{k}) = 0$. Por lo tanto, $\varphi \cong 0$.

Por el teorema del factor, existe una única φ , por lo tanto,

$$P \simeq \text{Hom}(K^m/L, D'_i) \simeq \text{Hom}(D_i, D'_i)$$

como $\text{Hom}(K^m, D'_i) \cong (D'_i)^m$ y al ser K y $(D_i)^m$ módulos noetherianos se tiene que P es finitamente generado y así $\text{Hom}(D_i, D'_i)$ también lo es. Por último, como $|Q_0| < \infty$ se sigue que, $\text{Hom}(D, D') \in \text{mod}(K)$.

□

Conclusiones

El estudio de K -álgebras de dimensión finita constituye un ejemplo fundamental en el análisis de las K -álgebras de Artin, las cuales desempeñan un papel crucial en la *Teoría de Auslander-Reiten*. Esta teoría permite clasificar y estudiar la categoría de módulos de una K -álgebra dada, proporcionando herramientas esenciales para entender sus propiedades estructurales.

En años recientes, el estudio de K -álgebras ha permitido abordar diversas cuestiones de interés, como las condiciones bajo las cuales la colección de subfuntores de la identidad (prerradicales) forma un conjunto [12].

Esta tesis representa una introducción a la teoría de K -álgebras, proporcionando un marco conceptual para comprender su estructura y aplicaciones.

Por otro lado, se ha desarrollado el estudio de las categorías de Krull-Schmidt, que desempeñan un papel central en la teoría de representaciones de álgebras y en geometría algebraica. Se dice que una categoría $\mathcal{C}$ es una categoría de Krull-Schmidt si para todo objeto inescindible $Z \in \mathcal{C}$, el anillo $\text{End}_{\mathcal{C}}(Z)$ es local, es decir, posee un único ideal máximo. Además, para cada par de objetos $X, Y \in \mathcal{C}$, el conjunto $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ tiene estructura de K -espacio vectorial de dimensión finita.

Teorema 5.0.1 *En toda categoría de Krull-Schmidt $\mathcal{C}$, se satisface el Teorema de Krull-Schmidt, el cual establece que todo objeto de $\mathcal{C}$ se descompone como suma de objetos inescindible, y esta descomposición es única salvo isomorfismos.*

Las categorías de Krull-Schmidt aparecen en diversos contextos matemáticos, entre ellos:

- La categoría $\text{mod}(\Lambda)$ de módulos de dimensión finita sobre un álgebra de dimensión finita Λ .
- La categoría derivada acotada $D^b(\text{mod}(\Lambda))$ de módulos sobre Λ .
- La categoría $fg(R, m, k)$ de módulos finitamente generados sobre un anillo local completo conmutativo (R, m, k) .
- La categoría de gavillas algebraicas coherentes sobre una variedad algebraica completa X sobre un campo algebraicamente cerrado.
- La categoría de gavillas analíticas coherentes sobre una variedad compleja compacta.

Esto nos demuestra la relevancia y aplicabilidad del teorema en distintas ramas del álgebra y la geometría.

Finalmente, dentro del grupo de investigación de la UAM Iztapalapa y en el marco del proyecto CONAHCYT CBF-2023-2024-2630 DAI UAM 2024, este tema ha sido objeto de estudio activo. La presente tesis busca servir como un punto de partida para futuras investigaciones en la teoría de representaciones de álgebras y sus aplicaciones al estudio de teoría de prerradicales y de módulos.

Índice alfabético

- C -Prerradical, 23
- Álgebra
 - de grupo, 65
 - de Kronecker, 109
 - elemental, 125
- A-elemento, 17
- Anillo
 - local, 60
- Carcaj
 - ordinario, 123
- Categoría, 5
 - abeliana, 13
 - aditiva, 13
 - opuesta, 8
 - pequeña, 6
- co-prerradical, 25
- Coigualador, 10
- Cokernel, 10
- Condición
 - cadena ascendente, 31
 - cadena descendente, 29
 - máxima, 31
 - mínima, 30
- Coproducto, 11
- Elemento
 - idempotente, 64
 - idempotente primitivo, 70
 - idempotentes ortogonales, 70
 - invertible, 57
 - nilpotente, 64
- Epimorfismo, 9, 18
- Equivalencia natural, 16
- Familia completa de elementos
 - idempotentes, 70
- Funtor, 14
 - aditivo, 15
 - constante, 14
 - contravariante, 14
 - fiel, 15
 - identidad, 14
 - inclusión, 14
 - pleno, 15
- Igualador, 10
- Imagen de x por f , 17
- Kernel, 9
- Lema
 - de Fitting, 42
 - de la serpiente, 19
 - de Zassenhaus, 52

- del cinco, 18
 - Longitud de un módulo., 54
 - Módulo
 - artiniano, 31
 - divisible, 48
 - escindible, 42
 - finitamente cogenerado, 38
 - finitamente generado, 38
 - inescindible, 42
 - irreducible, 77
 - noetheriano, 32
 - semisimple, 48
 - simple, 43
 - Monomorfismo, 9, 17
 - Morfismo
 - de representaciones , 127
 - cero, 8
 - Objeto cero, 8
 - Prerradical
 - r -torsión, 25
 - Exacto izquierdo, 25
 - idempotente, 24
 - libre de torsión, 25
 - radical, 24
 - t -radical, 25
 - Presentación, 125
 - Producto, 11
 - Prerradical, 23
 - Pullback, 11
 - Pushout, 12
 - R-categoría, 126
 - Hom-finita, 126
 - Radical
 - Jacobson, 24, 26
 - Representación de carcaj, 126
 - Soclo, 24
 - Split epi, 8
 - Split mono, 8
 - Subcategoría, 6
 - plena, 6
 - Submódulo
 - máximo, 31
 - mínimo, 30
 - Teorema
 - Jordan Hölder-Shreier, 53
 - Krull-Remak-Azumaya, 83
 - P. Gabriel, 125
 - Transformación natural, 16
-

Bibliografía

- [1] J. Adámek, H. Herrlich, G. E. Strecker, *Abstract and Concrete Categories The Joy of Cats*, 2004 <http://katmat.math.uni-bremen.de/acc>.
- [2] J. Aguilar Guzmán, *La fórmula de Künneth en categorías abelianas*. Tesis de licenciatura, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México, 2015.
- [3] T. Albu, *Topics in Lattice Theory with Applications to Rings. Modules and Categories Lecture Notes*. Escola de Algebra, XXIII Brazilian Algebra Meeting, Maringa, Parana, Brasil, 2014, 80 pages.
- [4] F. W. Anderson, K.R. Fuller. *Rings and Categories of Modules*. Volumen 13 de Graduate Texts in Mathematics. Springer Science & Business Media, 2012.
- [5] M. F. Atiyah, I. G. MacDonald, *Introduction Commuative Algebra*. Addison- Wesley, 1969.
- [6] P. Bland, *Rings and Their Modules*. De Gruyter Textbook. Walter de Gruyter, 2011.
- [7] F. Borceux, *Handbook of categorical algebra 2: Categories and structures*. Great Britain. Cambridge University Press, 1994.
- [8] C. Cibils, F. Larrión, L. Salmerón, *Métodos diagramáticos en teoría de representaciones*, Monografías del Instituto de matemáticas, 1981.
- [9] T. Ciurca, L. A'Campo, *Snake Lemma* Notas 2019.
- [10] K. Erdmann, T. Holm, *Algebras and Representation Theory*. Springer, 2018.

- [11] A. Facchini, *The Krull Schmidt Theorem*, Elsevier science, 2003.
 - [12] R. Fernández-Alonso, S. Gavito, J. E. Pérez-Terrazas, *On the conection between the representation type of an algebra and its lattice of preradicals*. Communications in Algebra, 2018.
 - [13] M. Flores Galicia, *Una introducción a la teoría de representaciones de álgebras*. Tesis de licenciatura, UNAM, México, 2010.
 - [14] G. Gallego, *Notas de álgebra homológica* , <https://guillegoxyz/files/homologica.pdf>, 2024.
 - [15] W. Germán Busch, *Teoría de Auslander-Reiten y teorema de Gabriel*. Tesis de licenciatura, Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires Argentina, 2017.
 - [16] M. Hazewinkel, N. Gubareni, V. V. Kirichenko, *Algebra, rings and modules, Volume 1*. Mathematics and Its Applications (MAIA, volume 575).
 - [17] T. Hungerford, *Algebra*. Springer, 2011.
 - [18] C. Ivorra, *Teoría de conjuntos*, <https://www.uv.es/~ivorra/Libros/TC.pdf>, 2024.
 - [19] F. Kasch, *Modules and rings. A translation of Moduln und ringe*. Translation and edition by D. A. R. Wallace. Academic Press Inc. 1982.
 - [20] L. S. Levy, *Krull-Schmidt Uniqueness Fails Dramatically over Rings $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$* . Rocky Mountain Journal of Mathematics, volumen 13, 1983.
 - [21] H. G. Mora Díaz, *Una Introducción a la teoría de representaciones de Quivers*. Tesis de licenciatura, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá Colombia, 2018.
 - [22] O. Pérez, *Introducción a la teoría de preradicales sobre R –Mod*. Tesis de Maestría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México, 2019.
 - [23] J. J. Rotman, *An introduction to homological algebra*. Second ed., Universitext, Springer, New York, 2009.
 - [24] V. Santiago, *Elementos de álgebra homológica en categorías abelianas*, Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, 2007.
 - [25] R. Wisbauer, *Modules and algebras: Bimodule Structure on Group Actions and Algebras*, volume 81, CRC Press, 1996.
-



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00245

Matrícula: 2222800091

Una Introducción al estudio
de K-álgebras.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 11:00 horas
del día 1 del mes de agosto del año 2025 en la Unidad
Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los
suscritos miembros del jurado:

DRA. SILVIA CLAUDIA GAVITO TICOZZI
DRA. DIANA AVELLA ALAMINOS
DRA. JANETH ANABELLE MAGAÑA ZAPATA

Bajo la Presidencia de la primera y con carácter de
Secretaria la última, se reunieron para proceder al Examen
de Grado cuya denominación aparece al margen, para la
obtención del grado de:

MAESTRA EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

DE: MIRIAN LEON FARO

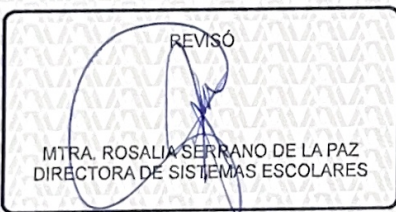
y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del
Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad
Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado
resolvieron:

APROBAR

Acto continuo, la presidenta del jurado comunicó a la
interesada el resultado de la evaluación y, en caso
aprobatorio, le fue tomada la protesta.



MIRIAN LEON FARO
ALUMNA



REVISÓ
MTRA. ROSALÍA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

Román Linares Romero

DR. ROMAN LINARES ROMERO

PRESIDENTA

Silvia C. Gavito T.

DRA. SILVIA CLAUDIA GAVITO TICOZZI

VOCAL

Diana Avella Alaminos

DRA. DIANA AVELLA ALAMINOS

SECRETARIA

Janeth Anabelle Magaña Zapata

DRA. JANETH ANABELLE MAGAÑA ZAPATA