

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - IZTAPALAPA  
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

**ESTIMACIÓN DEL RIESGO  
EN PORTAFOLIOS DE INVERSIÓN**

Tesis que presenta

**Jaime Iván Urbina Rugerio**

Para obtener el grado de

**Maestro en Ciencias Matemáticas  
Aplicadas e Industriales**

*Asesores:* Dr. Gabriel Núñez Antonio  
Dra. Patricia Saavedra Barrera

Jurado Calificador:

Presidente: Dr. Gabriel Rodríguez Yam  
Secretaria: Dra. Patricia Saavedra Barrera  
Vocal: Dr. Gabriel Núñez Antonio  
Vocal: Dra. Marissa del Rosario Martínez Preece

México D.F. Marzo 2015



# Agradecimientos

A Dios por iluminar mi camino para lograr con las metas que me he propuesto.

A mi familia por apoyarme a lo largo de mi vida moral y económicamente así como también acompañarme en todos los momentos que los he necesitado.

A mis amigos por su apoyo incondicional y además por apoyarme moralmente con mis objetivos.

A mis compañeros y profesores por darme la oportunidad de trabajar con ellos aportando ideas para llevar a cabo trabajos y proyectos en conjunto.

En especial, a mis directores de tesis ya que me dieron la oportunidad de poder trabajar con el tema de tesis de mi interés y por guiarme en hacer un excelente trabajo.

A los sinodales por leer mi trabajo y darme sus críticas ya que gracias a su apoyo, junto con el de mis directores de tesis, aprendí mucho de cada uno de ellos.

A CONACyT por ofrecerme la beca para seguir estudiando sin la necesidad de trabajar además de otorgarme el seguro médico.



# Dedicatoria

Esta tesis se la dedico a mi familia, mis amigos, compañeros y profesores que me han acompañado a lo largo de mi vida siempre deseándome lo mejor, por su interés en conocer mi trabajo, al cual dedique el tiempo necesario para poder presentarlo y defenderlo.



# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>3</b>
<b>Dedicatoria</b>	<b>5</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>9</b>
1.1. Portafolio de inversión . . . . .	12
1.1.1. Riesgo en un portafolio . . . . .	13
1.1.2. Acciones . . . . .	14
1.1.3. Bonos . . . . .	17
1.1.4. Tipo de cambio . . . . .	18
1.2. Medidas de riesgo coherentes . . . . .	19
1.3. Ejemplos de medidas de riesgo . . . . .	21
1.3.1. El modelo de Markowitz . . . . .	22
1.3.2. Inclusión de un activo libre de riesgo . . . . .	23
1.3.3. Modelo de la Valuación de Activos de Capital (CAPM) . . . . .	24
1.3.4. Valor en Riesgo VaR . . . . .	26
1.4. Beneficios del manejo de riesgo . . . . .	32
<b>2. Estimación del VaR y el EVaR</b>	<b>35</b>
2.1. Estimación puntual del VaR y el EVaR . . . . .	35
2.1.1. Método de varianza-covarianza . . . . .	35
2.1.2. Método histórico . . . . .	36
2.1.3. Aproximación Monte Carlo . . . . .	37
2.1.4. Teoría de Valores Extremos . . . . .	40
2.2. Estimación por intervalos de confianza . . . . .	48
2.2.1. Métodos bootstrap . . . . .	48
2.2.2. Otros métodos para calcular intervalos de confianza . . . . .	53

<b>3. Aplicación a portafolios de inversión</b>	<b>57</b>
3.1. Portafolio de acciones . . . . .	57
3.1.1. Modelo de Markowitz . . . . .	60
3.1.2. Validación del supuesto de normalidad y distribución $t$ de Student . . . . .	61
3.1.3. Estimación del VaR y el EVaR . . . . .	66
3.2. Portafolio de acciones y tipo de cambio . . . . .	74
3.2.1. Estimación del VaR y el EVaR . . . . .	78
3.3. Portafolio de bonos . . . . .	80
3.3.1. Validación del supuesto de normalidad y distribución $t$ de Student . . . . .	88
3.3.2. Estimación del VaR y el EVaR . . . . .	93
<b>Conclusiones</b>	<b>97</b>
<b>A. Anexo</b>	<b>101</b>
A.1. Pruebas de bondad de ajuste . . . . .	101
<b>Bibliografía</b>	<b>103</b>



# Capítulo 1

## Introducción

Los inversionistas adquieren instrumentos financieros con el propósito de obtener ganancias a través de ellos en un horizonte de tiempo determinado y anticiparse ante eventos que lo afecten desde un punto de vista financiero. El término inversionista en este trabajo se refiere a la persona o empresa que compra instrumentos financieros y especula la magnitud de la ganancia o pérdida obtenida en ese horizonte de tiempo. En la mayoría de los instrumentos financieros existe una incertidumbre en sus precios en el horizonte de interés. Debido a ello, el inversionista corre el riesgo de obtener una pérdida. El riesgo, desde el punto de vista financiero, se define como la exposición ante posibles eventos que impactan de manera adversa en el capital que posee un individuo. Existen diversos tipos de riesgo, entre otros, de mercado, crédito y liquidez.

En el presente trabajo el riesgo que se analiza es el de mercado, puesto que los activos con los que se trabaja son aquellos cuyas cotizaciones están disponibles en algunas instituciones financieras. Algunos ejemplos son la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) y el Banco de México (BANXICO). Se han propuesto varias formas de medir el riesgo. Una de las finalidades de medir el riesgo, por mencionar una de ellas, es que por medio de la medida de riesgo el inversionista puede saber el capital económico que necesita para compensar una pérdida de gran magnitud. El término capital se refiere al monto o valor total de todos los instrumentos financieros que el inversionista posee. Al final del Capítulo 1 se explican los beneficios de medir el riesgo. La medición del riesgo puede ser tanto para un sólo activo o un conjunto de activos financieros. A este conjunto de activos financieros se le llama portafolio de inversión. La complejidad de la evaluación de los portafolios recae en la estructura de dependencia de los precios de los activos. En algunos casos esta estructura se desconoce. Una medida de riesgo ayuda a comparar distintas alternativas de inversión y

a tomar la decisión con base en ellas. Cada una de las medidas de riesgo que se han propuesto asume ciertos supuestos bajo los cuales la medida produce estimaciones consistentes, de lo contrario, las inferencias pueden no ser adecuadas.

Algunas propuestas para medir el riesgo son por ejemplo los trabajos de Harry Markowitz quien fue el primero en proponer que la volatilidad de un portafolio es una buena medida de riesgo. Sharpe, Lintner y Mossin desarrollaron el Modelo de Valuación de Activos de Capital (CAPM, por sus siglas en inglés), el cual sigue la lógica del modelo de media-varianza de Markowitz (ver Luenberger, 1998 [5]). A diferencia de este último, el modelo CAPM asume que debe tomarse en cuenta el comportamiento del mercado. La medida de riesgo que maneja este método es el coeficiente *beta* que a su vez mide la influencia que tienen los cambios en el mercado en los rendimientos de un activo. Los modelos anteriores estiman el riesgo en términos de las varianzas de los rendimientos de los activos y del mercado. Sin embargo, al medir el riesgo por medio de la varianza implícitamente se asume que existe el segundo momento central de la distribución de la variable en cuestión. Debido a que los rendimientos de los activos, en la práctica exhiben colas pesadas, el segundo momento no necesariamente existe. Además, asumen que la distribución que siguen los rendimientos es simétrica, lo cual en la realidad no se cumple. Por lo tanto, el modelo de media-varianza y el CAPM no miden adecuadamente el riesgo (ver McNeil et. al., 2005 [6]).

La siguiente medida de riesgo que nació en el siglo pasado, y que aún se usa hoy en día, es el Valor en Riesgo (*Value at Risk*) (VaR). El VaR es la pérdida máxima que se obtiene al invertir en un activo o portafolio de inversión a un nivel de confianza y en un horizonte de tiempo dados. En el Capítulo 1 se mencionan las cualidades que posee el VaR. Hoy en día es una medida de riesgo empleada en lugar de la desviación estándar y el coeficiente *beta*. No obstante, no posee la propiedad de subaditividad. Otra medida propuesta es el Valor en Riesgo Condicionado (CVaR) o Riesgo Extremo (EVaR), el cual subsana la deficiencia del VaR en cuanto a la subaditividad. De todas las medidas que se han propuesto para medir el riesgo de mercado, se eligieron en este trabajo el Valor en Riesgo (VaR) y el Valor en Riesgo Condicionado o Extremo (EVaR) para describir el riesgo de mercado al que se expone el inversionista al invertir en un portafolio. El motivo por el cual se estima el riesgo mediante el VaR es que éste es muy utilizado por las empresas y corporaciones en todo el mundo para evaluar sus portafolios y con base en ello se determina el capital económico que requieren para cubrirse ante ciertos escenarios. El EVaR se eligió debido a que es una medida de riesgo coherente y aunque no es muy utilizada en la práctica es más confiable desde el punto de vista financiero. Las estimaciones del VaR y el EVaR se obtienen a partir de la distribución de las pérdidas en el valor del portafolio, la

cual en la práctica se desconoce. Se han propuesto procedimientos que aproximan la función de distribución de las pérdidas por medio de una muestra aleatoria de pérdidas en el valor del portafolio o asumen una distribución de probabilidad. Cabe mencionar que el VaR, para horizontes de tiempo muy cortos, llega a proporcionar estimaciones muy cercanas a los que ocurren en la fecha futura.

En el presente trabajo se investigan algunas metodologías para estimar el VaR y el EVaR. En una de estas, conocida como la *aproximación varianza-covarianza*, se asume que la pérdida se distribuye normal con ciertos parámetros y es empleada por la facilidad de su cálculo. No obstante, el supuesto de normalidad no se satisface en general puesto que las pérdidas exhiben colas pesadas en su distribución. Un método alternativo a la aproximación anterior es el *método histórico*, el cual estima las medidas de riesgo mencionadas a través de una muestra histórica de pérdidas. La ventaja es que no se requiere asumir una distribución específica. Sin embargo, tiene sus desventajas, por ejemplo, no hay suficiente información de la cola de la distribución. Además, las estimaciones del VaR y el EVaR se calculan con base en la muestra.

Se han propuesto métodos que estimen el riesgo de la forma más realista posible. Por ejemplo, la *Teoría del Valor Extremo (TVE)* es muy útil para estimar el VaR y el EVaR ya que ambos se concentran en la cola de la distribución. En la TVE se modelan la distribución de los valores más grandes que puede tomar una variable aleatoria, en este caso, la pérdida en el valor de la cartera de inversión. Una cualidad de la TVE es que extrapola la cola de la función de distribución a partir de un umbral y de una muestra de datos de tal manera que se generen escenarios que el método histórico no es capaz de hacer. Algunos autores han propuesto la distribución  $t$  como la distribución que modela la pérdida. Aunque la distribución  $t$  tiene colas pesadas no representa a la verdadera distribución debido a que en la práctica las pérdidas muestran asimetría en su distribución en la mayoría de los casos.

En varios libros de finanzas se han propuesto estimaciones puntuales del VaR y del EVaR. El problema es que es prácticamente imposible que el valor del estimador sea idéntico al verdadero valor. Por esta razón, se deben recurrir a emplear distintas herramientas estadísticas para estimar el VaR y el EVaR a través de intervalos, los cuales contendrán al verdadero valor del parámetro que se está estimando con una probabilidad alta y lo ideal es que su longitud sea lo más chica posible. Además, se emplean pruebas de bondad de ajuste con las cuales se validan los supuestos de que las pérdidas u otras variables se modelan mediante cierta distribución. De esta forma, se complementan los métodos que estiman el VaR y el EVaR de manera puntual. En particular, se busca adaptar la metodología TVE a datos financieros. Para

la TVE se recurre al método de corridas con la cual se obtiene una muestra de valores extremos independientes para estimar los parámetros de la distribución teórica.

### Objetivo de la tesis

El objetivo general de este trabajo de tesis es aplicar metodologías estadísticas para describir el comportamiento del VaR y el EVaR, como medidas de riesgo, a distintos portafolios de inversión.

### Contenido

El presente trabajo se conforma de la siguiente manera: en el Capítulo 1 se explican conceptos básicos de finanzas sobre acciones, tasas de cambio, bonos, medidas de riesgo y ejemplos de estas medidas. En el Capítulo 2 se describen métodos para estimar el VaR y el EVaR puntualmente y por intervalos de confianza, los supuestos que requiere cada procedimiento, así como sus limitaciones. En el Capítulo 3, las metodologías del Capítulo 2 se aplican a tres portafolios de inversión y se validan los supuestos necesarios de cada metodología. Todo ello se detalla en el capítulo 3. En el Anexo se presentan las pruebas de bondad de ajuste. Finalmente, se muestran las conclusiones y la bibliografía utilizada.

## 1.1. Portafolio de inversión

Antes de definir qué es un portafolio de inversión primero se explica de manera general, los conceptos de *acciones* y *bonos*. Una *acción* es un título de propiedad de cierta porción de la empresa que la emite. Existen dos tipos de acciones: las *preferentes* y las *comunes*. Los poseedores de las acciones preferentes reciben un pago fijo (un beneficio que proviene de los ingresos de la empresa) periódicamente. Quienes tienen acciones comunes reciben un pago variable después de los accionistas preferentes. Por otra parte, los *bonos* son títulos de deuda emitidos por entidades gubernamentales y empresas hacia inversionistas. El dueño del bono recibe pagos fijos (cupones) en cada periodo de tiempo antes y en la fecha de vencimiento del bono. Un tipo especial de bonos es el bono cupón cero con el cual solamente se recibe un pago al vencimiento. Un portafolio de inversión es un conjunto de activos compuesto por acciones, bonos y opciones, entre otros, con los cuales se busca tener un mayor rendimiento y reducir el riesgo de exponerse ante una pérdida, en particular, de

aquellas que tengan una magnitud grande. A continuación se explican el concepto de riesgo y las diversas formas en que éste se mide. Posteriormente se explica más acerca de las acciones, los bonos y el tipo de cambio.

### 1.1.1. Riesgo en un portafolio

La primera pregunta que uno se hace es acerca del concepto de riesgo. El riesgo, en finanzas, es la exposición ante posibles eventos que ocurrirán y repercutirán de manera adversa en los precios de los activos que integran al portafolio de inversión. El siguiente concepto, el cual está relacionado con el primero, es sobre un *factor de riesgo*. Un factor de riesgo es aquella variable o elemento del cual depende que un instrumento financiero tenga un cambio en su valor. Cada instrumento financiero tiene su propio factor de riesgo. Por ejemplo, en las acciones el riesgo está en sus precios, en los bonos recae en los cambios en su rendimiento al vencimiento, en los tipos de cambio el factor son ellos mismos. Debido a que son factores no deterministas se consideran como variables aleatorias (v. a.). Por medio de ciertas metodologías se obtienen sus estimaciones. El principal interés de un inversionista es conocer el peor escenario posible en el que se podría encontrar si invierte en un activo riesgoso en un horizonte de tiempo. En un portafolio de inversión ocurre cualquiera de los siguientes casos: el primer caso es que el valor de un activo X se incremente y que eso impacte en el aumento del valor de otro activo Y en la misma o en diferente magnitud (correlación positiva) o que ambos valores disminuyan. El segundo caso es que mientras el valor del activo X aumente, el del activo Y disminuya, o viceversa (correlación negativa). El tercer caso es cuando el valor del activo X no impacta en el activo Y (correlación nula). Este último es el menos interesante debido a que cuando se invierte en una cantidad de instrumentos se espera que al obtener pérdidas en algunos instrumentos exista una compensación con las ganancias logradas por los demás activos. Asimismo, si no estuvieran correlacionadas sería equivalente a invertir en un activo por separado y el estudio se simplificaría al caso en que sólo se tenga un activo. Como se comentó anteriormente, al invertir en un activo hay de por medio un factor de riesgo que hace que éste modifique su valor. En el caso de un portafolio, ya que puede estar compuesto por diversos instrumentos puede llegar a haber más de un factor de riesgo y además, algunos pueden ser más riesgosos que otros. En el momento en que se quiere invertir en aquellos activos se sabe que se puede hacer de una infinidad de formas. Sin embargo, la forma interesante es aquella en la que se obtenga una mayor ganancia a un menor riesgo. Lo interesante de trabajar con un portafolio diversificado es la dificultad de conocer la estructura

de dependencia de los factores de riesgo de cada uno de los activos. Un portafolio diversificado es aquel que está integrado por activos o instrumentos de inversión distintos, por ejemplo, un portafolio compuesto por una acción, un bono, un crédito y una opción. Cada uno de éstos se modela de diferente manera y tienen diferentes factores de riesgo.

### 1.1.2. Acciones

Un instrumento de inversión que puede ser comprado y vendido es frecuentemente llamado un activo. Se denota como  $v_t$  el monto que se invierte en una acción en el tiempo  $t$ . Se desea conocer el monto obtenido  $V_{t+1}$  en un horizonte de tiempo, o equivalentemente el rendimiento de la acción  $R_{t+1}$  al tiempo  $t + 1$ . Ya que  $V_{t+1}$  es desconocido en el tiempo  $t$  y su comportamiento no es determinístico entonces es una variable aleatoria, por lo cual su rendimiento también es una variable aleatoria con media  $E[R_{t+1}]$  y desviación estándar  $\sigma_{R_{t+1}}$  y además tiene una distribución de probabilidad. Esta distribución se desconoce en la práctica. Lo que se hace es suponer que se conoce o se emplea la distribución de los datos para obtener las estimaciones que se requieran.

El rendimiento de una acción está dado por la siguiente ecuación:

$$R_{t+1} = \frac{V_{t+1} - v_t}{v_t}. \quad (1.1)$$

### Rendimiento de un portafolio

Suponga que están disponibles  $n$  activos diferentes en el mercado de acciones. Se desea formar un portafolio con estos activos. Sean  $v_{i,t}$  el precio del activo  $i$  al tiempo  $t$  y  $m_i$  el número de acciones que se invierten en la acción  $i$ . Entonces  $v_t$  está dado por la ecuación:

$$v_t = \sum_{i=1}^n m_i v_{i,t}. \quad (1.2)$$

Sea  $w_i = \frac{m_i v_{i,t}}{v_t}$  la proporción de capital invertida en la acción  $i$ . En el presente trabajo se asume que los pesos son constantes en el tiempo. Claramente:

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1. \quad (1.3)$$

Algunas de las proporciones  $w_i$ 's pueden ser negativas si se permiten ventas en corto. Una venta en corto consiste en pedir prestado cierta cantidad de dinero para comprar un activo y posteriormente pagar lo que se recibió. Por ello, su peso (o proporción en el portafolio) se refleja con signo negativo. Sea  $R_{i,t}$  el retorno del activo  $i$ . El rendimiento del portafolio  $R_{t+1}$  está dado por:

$$R_{t+1} = \frac{V_{t+1} - V_t}{V_t} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i (V_{i,t+1} - V_{i,t})}{V_t} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{(V_{i,t+1} - V_{i,t})V_{i,t}}{V_t V_{i,t}} = \sum_{i=1}^n w_i R_{i,t+1}.$$

Donde

$$R_{i,t+1} = \frac{V_{i,t+1} - V_{i,t}}{V_{i,t}}.$$

En Luenberger (1998) [5] se explica con más detalle el modelo de riesgo-rendimiento. Dadas las definiciones anteriores se procede a explicar el siguiente modelo: se asume que existen  $n$  activos  $A_1, \dots, A_n$  cuyos rendimientos son  $R_1, \dots, R_n$ , respectivamente. En la teoría de Markowitz se asume que tanto la media como la varianza de los rendimientos de cada acción son conocidas, o en su defecto estimadas. Sean  $E(R_i)$  y  $\sigma_i^2$ , la media y varianza del activo  $i$ , y  $\sigma_{ij}$  la covarianza de los activos  $i$  y  $j$ . De las propiedades del operador valor esperado se obtiene que:

$$E[R_p] = \sum_{i=1}^n w_i E[R_i], \quad (1.4)$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij}. \quad (1.5)$$

## Diversificación

Los portafolios con pocos activos pueden estar sujetos a un alto grado de riesgo. El propósito de tener varios activos es que cuando se obtengan pérdidas de algunos activos del portafolio se compensen con las ganancias de los demás activos. Se han propuesto distintas formas de medir el riesgo. Una forma de medir el riesgo es por medio de la varianza del portafolio. Es posible reducir la varianza al añadir otros activos si las covarianzas entre ellos son negativas. Como se puede ver en las ecuaciones (1.4) y (1.5), dados los pesos  $w_1, \dots, w_n$ , la media y la varianza de cada activo (en la práctica ambos se reemplazan por sus valores estimados) se obtienen la desviación estándar y la media del rendimiento del portafolio. Éstos se pueden graficar en un diagrama riesgo-rendimiento como se ilustra en la Figura 1.1 (ver Luenberger 1998 [5]).

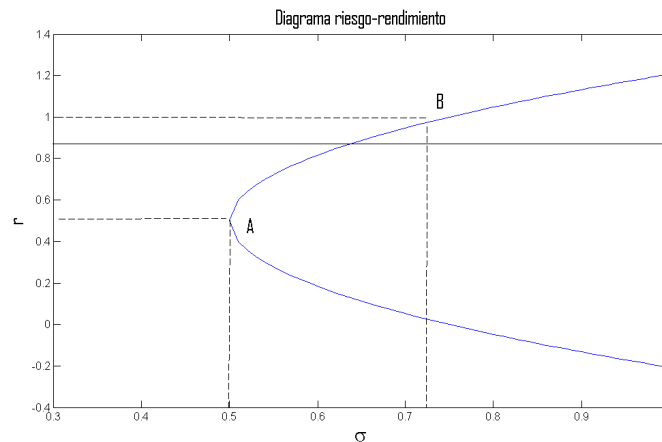


Figura 1.1: *Diagrama de riesgo-rendimiento donde se grafica el rendimiento esperado de un portafolio en función de su volatilidad. La recta indica que para un mismo rendimiento esperado hay varios portafolios con distinta desviación estándar. La curva de riesgo-rendimiento de la gráfica es válida solamente para un portafolio con dos activos. Para más de dos activos la curva tiene la forma de una sombrilla.*

Cada punto de la curva representa el valor esperado y la desviación estándar del rendimiento de un portafolio. Si se fija el rendimiento esperado se observa que al trazar una recta horizontal se tienen varios portafolios con un mismo rendimiento esperado pero con diferente desviación estándar. Note que el punto que corresponde a un portafolio A es el que tiene menor riesgo de los puntos que están sobre la curva.



Un inversionista tiende a preferir portafolios con mayor rendimiento esperado que el del portafolio  $A$  a pesar de que este último tenga una volatilidad menor. Un ejemplo es el portafolio  $B$ . La semiparábola formada por los puntos de aquellos portafolios con dicha característica se llama frontera eficiente (ver Luenberger (1998) [5]).

### 1.1.3. Bonos

Los bonos son títulos de deuda emitidos por entidades gubernamentales y empresas hacia inversionistas. Los bonos, en contraste con las acciones, tienen una fecha de vencimiento. A su vencimiento el dueño del bono recibe un monto conocido como pago principal o nominal (*face value*). Generalmente, el dueño del bono recibe periódicamente pagos cupón (éstos pueden ser anuales, mensuales, semestrales u otro distinto). A excepción del último pago, que se recibe en la fecha de vencimiento, los pagos son fijos a una tasa cupón. Éstos son proporcionales al valor nominal. Otro dato importante es el precio al que se vende el bono. Con las variables anteriores se calcula un factor más: el rendimiento del bono. El rendimiento es un porcentaje con el cual se “mueve” un flujo de efectivo en el tiempo. La definición de flujos de efectivo se encuentra en Crouhy et. al. (2001) [2]. El precio del bono es igual a la suma del valor presente de todos los flujos como se presenta abajo:

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{cF}{(1+y)^i} + \frac{F}{(1+y)^n}, \quad (1.6)$$

si el rendimiento es discreto. Si es continuo se calcula en forma similar como se muestra en la siguiente ecuación:

$$P = \sum_{i=1}^n cF e^{-yt_i} + F e^{-yt_n}, \quad (1.7)$$

donde  $F$  es el valor principal,  $c$  es la tasa cupón,  $y$  es el rendimiento,  $n$  es el número de pagos periódicos y  $P$  es el precio del bono. Para el caso continuo  $t_i$  es el tiempo cuando se recibe el pago  $i$ . Un caso particular es el bono cupón cero. Un bono cupón cero es aquel cuya tasa cupón es cero. Por ello, el dueño del bono sólo recibe el valor principal al vencimiento del bono. En el presente trabajo sólo se enfoca en este tipo

de bonos. Las ecuaciones (1.6) y (1.7) para un bono cupón cero con rendimiento discreto y continuo se simplifica, respectivamente, como:

$$P = \frac{F}{(1 + y)^n}, \quad (1.8)$$

$$P = Fe^{-yt_n}. \quad (1.9)$$

Dados el pago principal, el valor del bono y su madurez, se obtiene el rendimiento a la que el poseedor recibe el pago  $F$ . El rendimiento tiene cierta capitalización. La capitalización es la forma en que se distribuye el rendimiento a lo largo de un año. Por ejemplo, si  $y$  se capitaliza semestralmente, entonces cada semestre se pagan flujos a una tasa de  $y/2$ . Éste varía con respecto al tiempo y es un factor estocástico. En general cada bono tiene su propia curva del rendimiento. Se puede notar que en las ecuaciones (1.8) y (1.9) hay una relación entre el precio del bono y el rendimiento. Por lo tanto, los precios de los bonos son sensibles a los cambios en el rendimiento en diferente magnitud. En la siguiente subsección se explica el concepto del tipo de cambio, el cual es otro activo que se considera en el presente trabajo.

#### 1.1.4. Tipo de cambio

En las subsecciones pasadas se habló acerca de las acciones y de los bonos junto con sus respectivos factores de riesgo. En ambos casos el poseedor tiene un título de propiedad el cual avala que es el dueño del mismo. En general obtiene ganancias periódicamente en ambos casos. Otra forma de obtener ganancias (o pérdidas en un caso desfavorable) es invertir un capital reunido en cierto país A a otro país B mediante una conversión de la moneda nacional en dólares, por ejemplo. A diferencia de los bonos y de las acciones aquí no se tiene nada físicamente si no que se convierte el capital en unidades monetarias extranjera. A través del tiempo, el tipo de cambio de cambio varía y además, su comportamiento es estocástico. Al convertir el capital en dólares en un plazo corto o largo se espera que el tipo de cambio (por ejemplo, el tipo de cambio FIX Peso/dólar) aumente ya que así los dólares obtenidos se venden a un mayor precio y se logra una ganancia al convertir el capital en las unidades monetarias original. Un ejemplo de inversionistas que invierten en este instrumento son las empresas multinacionales que cotizan en mercados de distintos países. El

manejo de riesgo de estas empresas es independiente del tipo de empresas que son.

El factor de riesgo de este activo es el cambio de valor en el tipo de cambio. Cuando se solicita un préstamo en otro país el capital se otorga en las unidades monetarias de aquel país y antes de invertirlo se hace una conversión de unidades monetarias por lo que aquí está de por medio el tipo de cambio. Lo interesante se refleja en el plazo en que se devuelve lo que se recibió prestado puesto que no solamente está de por medio la tasa de interés a la cual se prestó el capital si no también el incremento en el tipo de cambio ya que en un escenario indeseable aumente de tal forma que se invierta más que el monto de la deuda. Desde otra perspectiva, un individuo deposita un monto en el extranjero. En ese momento convierte lo que depositó en la moneda que se maneja en ese país. Tiempo después decide retirar su capital. Se sabe que va a recibir una cantidad adicional de la que invirtió. Sin embargo, todavía falta que la convierta en la moneda del país en que reside. Esta persona también está expuesta al riesgo del incremento en el tipo de cambio. De hecho, no le conviene que ésta disminuya ya que entonces tendría una pérdida. En el análisis de optimización de portafolios por el método de media-varianza de Markowitz y en el modelo CAPM el tipo de cambio se puede ver como si fuera una acción a través de sus rendimientos. Para un mayor conocimiento del tema se puede consultar el artículo del manejo y medición de riesgo en el tipo de cambio (Papaioannou Michael (2006) [9]).

En la siguiente sección se describe formalmente el concepto de medida de riesgo coherente junto con su interpretación. Después se explican algunos ejemplos de medidas de riesgo estimadas por varios métodos como la teoría de Markowitz, el Modelo de Valuación de Precios de Capital CAPM (por sus siglas en inglés) así como el Valor en Riesgo (VaR) y el Valor en Riesgo Condicionado (EVaR).

## 1.2. Medidas de riesgo coherentes

En la sección anterior se mencionaron los conceptos de riesgo y factor de riesgo tanto para un solo instrumento como para un conjunto de ellos. Cuando se tiene un conjunto de activos con distintos factores de riesgo la complejidad yace en su estructura de dependencia. Por otra parte, la estimación del riesgo se relaciona con la probabilidad de que ocurran eventos no deseados, la cual no puede calcularse si

no se conoce la distribución del factor de riesgo o la pérdida en cuestión. Por ello, el riesgo se estima y existen diversas formas de hacerlo. Cada medida de riesgo se obtiene por una metodología que se basa en supuestos, los cuales en la práctica se deben garantizar que se cumplan para validar los resultados que se obtengan de ella. Ejemplos de medidas de riesgo son la varianza o la desviación estándar del modelo de Markowitz, el coeficiente beta en el modelo CAPM, el Valor en Riesgo (VaR), el Valor en Riesgo Extremo o Condicional (EVAR), entre otros. De todas las medidas que existen, solo algunas tienen las propiedades deseadas desde el punto de vista financiero y que definen una medida de riesgo coherente.

**Definición 1 (Medida de riesgo):** *Para un espacio de probabilidad y un horizonte de tiempo  $\Delta$  fijos sea  $L^0$  el conjunto de todas las variables aleatorias finitas casi seguramente. Los riesgos financieros se representan por un conjunto  $\gamma \subset L^0$  de variables aleatorias interpretadas como pérdidas del portafolio sobre el horizonte de tiempo  $\Delta$ . Usualmente se asume que  $\gamma$  es un cono convexo, es decir, si  $L_1, L_2 \in \gamma$  entonces  $\theta L_1 + (1 - \theta)L_2 \in \gamma, 0 \leq \theta \leq 1$ .*

Las medidas de riesgo son funciones reales  $\rho : \gamma \rightarrow \mathbb{R}^+$  y se usan como indicador de cuánto es el capital que el inversionista necesita para cubrirse ante una pérdida  $L$ .

**Definición 2 (Medida de riesgo coherente):**

*Sean  $\rho : \gamma \rightarrow \mathbb{R}^+$  una medida de riesgo y  $\gamma$  un conjunto convexo. Una medida de riesgo coherente  $\rho$  es aquella que cumple con las siguientes 4 propiedades (McNeil et. al. (2005) [6]):*

1. *Traslación invariante:*  $\rho(L + l) = \rho(L) + l, L \in \gamma, l \in \mathbb{R}$ .
2. *Subaditividad:*  $\rho(L_1 + L_2) \leq \rho(L_1) + \rho(L_2), L_1, L_2 \in \gamma$ .
3. *Homogeneidad positiva:*  $\rho(\theta L) = \theta \rho(L), L \in \gamma, \theta > 0$ .
4. *Monotonicidad:*  $\rho(L_1) \leq \rho(L_2), L_1, L_2 \in \gamma, L_1 \leq L_2$ .

La propiedad 1 se interpreta que si se añade o sustrae una cantidad determinística  $l$  a una posición con pérdida  $L$ , al riesgo de esa pérdida se le añade o sustrae la

misma cantidad. En particular, sea  $l = -\rho(L)$  una cobertura determinística, entonces el riesgo de la posición es cero ya que  $\rho(L - \rho(L)) = \rho(L) - \rho(L) = 0$ . De las 4 propiedades, la segunda es la más discutida en finanzas debido a que existe la duda de si una medida de riesgo coherente debe cumplir esta propiedad y tiene el siguiente significado: si se invierte en dos activos distintos entonces el riesgo al que se expone un inversionista que posee un portafolio de esos activos es menor a que si invirtiera en cada uno por separado. Esta idea también se cumple en el caso que se tuvieran más de dos activos. Esta propiedad está relacionada con el principio de diversificación. En palabras, la propiedad 3 dice que el riesgo obtenido de una pérdida proporcional a la original,  $\theta L$ , es igual al riesgo asociado a la pérdida  $L$  multiplicado por la proporción  $\theta$ . Si  $\theta$  fuese un número natural entonces el riesgo de la suma de  $\theta$  activos iguales es igual a  $\theta$  veces el riesgo de ese mismo activo. La última propiedad es la más fácil de entender e inclusive de probar si una medida de riesgo posee esta propiedad. Si ésta se cumple, entonces la medida de riesgo es una función monótona creciente.

Las propiedades descritas previamente respaldan a las medidas de riesgo coherentes de tal manera que éstas proporcionen resultados que tengan sentido en la aplicación. Una observación adicional es que algunos analistas de riesgo afirman que en la propiedad 3 para valores grandes de  $\theta$  la ecuación correspondiente cambia a  $\rho(\theta L) > \theta\rho(L)$ , lo cual implica que tampoco se satisfaga la propiedad 2 de subaditividad (ver McNeil et. al. (2005) [6]). No obstante, en el caso de un portafolio de inversión se cumple la expresión:

$$\rho(\theta L_1 + (1 - \theta)L_2) \leq \theta\rho(L_1) + (1 - \theta)\rho(L_2). \quad (1.10)$$

Por lo tanto, una medida de riesgo coherente también es una función convexa si no se permiten ventas en corto. En la siguiente sección se proporcionan algunos ejemplos de medidas de riesgo y se verifica cuáles de ellas son coherentes.

### 1.3. Ejemplos de medidas de riesgo

A lo largo del tiempo se han propuesto distintas metodologías para medir el riesgo de un activo o de un portafolio de inversión. Cada una sigue diversos supuestos y a partir de éstos se define la medida de riesgo. Por ejemplo, en el modelo de Markowitz la teoría parte de suponer que el rendimiento de una acción sigue una distribución normal y por ello su riesgo se expresa como su desviación estándar. En el modelo CAPM la medida de riesgo es el coeficiente beta y parte del supuesto que existe un

activo que mide el rendimiento y la volatilidad de mercado. Otras medidas son el VaR y el EVaR, las cuales son calculadas mediante diversos métodos que parten de asumir ciertos supuestos. En las siguientes subsecciones se explican algunos métodos para estimar el riesgo que existe al invertir en un portafolio de inversión.

### 1.3.1. El modelo de Markowitz

En el modelo de Markowitz se usan las ideas explicadas acerca del rendimiento de las acciones. Por ejemplo, las definiciones de la media y la varianza del rendimiento de un portafolio. El modelo de Markowitz supone que el rendimiento de cada activo tiene una distribución normal con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ . En este caso el riesgo del portafolio se mide con la desviación estándar del rendimiento. Se desea un portafolio de inversión que tenga la menor varianza, o en otras palabras, el menor riesgo. El problema se formula como sigue:

$$\text{Minimizar } \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} = \frac{1}{2} \mathbf{w}' \Sigma \mathbf{w}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \bar{r}_p &= \sum_{i=1}^n w_i \bar{r}_i = \mathbf{w}' \mathbf{r}, \\ \sum_{i=1}^n w_i &= 1 = \mathbf{w}' \mathbf{1}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Donde  $\mathbf{1}$  es el vector de unos,  $\mathbf{w}$  es el vector de pesos,  $\mathbf{r}$  es el de rendimientos esperados y  $\Sigma$  es la matriz de varianzas y covarianzas de los rendimientos de los activos. El problema anterior se plantea de esa manera si se asume que hay ventas en corto (pedir prestado un activo para invertir en él). Si no es el caso, se añada la restricción de la no negatividad de las  $w_i$ 's.

#### Solución del problema de Markowitz

Se puede encontrar la solución de este problema (bajo el supuesto que se permiten las ventas en corto) con los multiplicadores de Lagrange dado que las restricciones son de igualdad. El lagrangiano queda de la siguiente forma:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} - \lambda_1 \left( \sum_{i=1}^n w_i \bar{r}_i - \bar{r}_p \right) - \lambda_2 \left( \sum_{i=1}^n w_i - 1 \right). \tag{1.12}$$

se deriva  $L$  con respecto a cada uno de los pesos y de los multiplicadores de Lagrange y las derivadas se igualan a cero. El problema de minimizar el riesgo del portafolio se reduce a resolver el sistema de ecuaciones lineales como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} w_j - \lambda_1 \bar{r}_i - \lambda_2 &= 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ \bar{r}_p &= \sum_{i=1}^n w_i \bar{R}_i = \mathbf{w}'\mathbf{r}, \\ \sum_{i=1}^n w_i &= 1 = \mathbf{w}'\mathbf{1}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

La solución del sistema de ecuaciones (1.13) es  $w^* = \lambda_1 \Sigma^{-1} \mathbf{r} + \lambda_2 \Sigma^{-1} \mathbf{1}$ . Cuando no se permiten ventas en corto, es decir, que todas las  $w_i$ 's son no negativas el problema de minimizar el riesgo del portafolio se resuelve con las condiciones de Kuhn-Tucker. Las condiciones de Kuhn-Tucker optimizan funciones no lineales con restricciones de desigualdad. En las restricciones no necesariamente debe haber una combinación lineal de las variables. A continuación se explica cómo formar un portafolio óptimo si se incluyen activos libres de riesgo.

### 1.3.2. Inclusión de un activo libre de riesgo

Un activo libre de riesgo es aquel cuyo rendimiento es libre de riesgo de incumplimiento y será libre de riesgo si se conserva hasta su vencimiento. Invertir en un activo libre de riesgo consiste en pedir prestado o prestar dinero a una tasa libre de riesgo. Suponga que se desea formar un portafolio compuesto por un activo riesgoso cuyo rendimiento promedio y volatilidad son, respectivamente,  $\bar{r}$  y  $\sigma$  y un activo libre de riesgo con tasa  $r_f$ . Se invierten una proporción de capital  $\alpha$  en el activo libre de riesgo y otra de  $1 - \alpha$  en el activo riesgoso. La tasa promedio y la volatilidad del portafolio son, respectivamente,  $\bar{r}_p = \alpha r_f + (1 - \alpha) \bar{r}$  y  $\sigma_p = (1 - \alpha) \sigma$ . La frontera eficiente de este portafolio es una línea recta. La explicación de ello se puede revisar en Luenberger et. al. (1998) [5]. Para encontrar el portafolio óptimo que incluye el activo sin riesgo y el activo con riesgo se debe maximizar la pendiente de la frontera eficiente:

$$\tan \theta = \frac{\bar{r}_p - r_f}{\sigma_p}. \tag{1.14}$$

El portafolio  $F$  es el punto que maximiza  $\theta$  o su tangente y para encontrarlo las ecuaciones (1.11) se sustituyen en la ecuación (1.14), ésta se deriva con respecto a

cada  $w_i$  y las derivadas se igualan a cero como se muestra en el sistema de ecuaciones (1.15) y la solución del sistema de ecuaciones es el vector de pesos  $(w_1, \dots, w_n)^t$ , donde  $w_i = \frac{v_i}{\sum_{j=1}^n v_j}$ .

$$\sum_{i=1}^n \sigma_{ki} v_i = \bar{r}_k - r_f, k = 1, \dots, n. \quad (1.15)$$

### 1.3.3. Modelo de la Valuación de Activos de Capital (CAPM)

El modelo CAPM es otra forma de medir el riesgo de un activo o de un portafolio. De acuerdo a Luenberger (1998) [5], los supuestos sobre el modelo CAPM son los siguientes:

1. Todos los participantes (inversionistas) optimizan sus portafolios con el modelo de riesgo-rendimiento de Markowitz.
2. La estructura de probabilidad de los activos de todos los participantes son iguales.
3. Existe una única tasa libre de riesgo tanto para pedir prestado como para prestar dinero.
4. No hay costos de transacción.

Los porcentajes que se invierten en un portafolio riesgoso y en un activo libre de riesgo varían de acuerdo a cada individuo. Además de los portafolios formados por el inversionista, el mercado también ofrece los suyos. Los pesos del portafolio de mercado se determinan de manera diferente a lo estudiado en la teoría de Markowitz. El peso de la  $i$ -ésima acción,  $w_{c,i}$ , del portafolio de mercado es el producto del número de acciones  $m_i$  por el precio de la acción  $i$  entre la suma de los productos de las  $n$  acciones que se venden en el mercado. Las variables  $w_{c,i}$ , conocidas como pesos de capitalización, están dadas por:

$$w_{c,i} = \frac{m_i V_i}{\sum_{j=1}^n m_j V_j}. \quad (1.16)$$

En la Figura 1.2 se muestra la relación que hay entre el retorno esperado del portafolio de mercado y su desviación estándar. La recta de la gráfica se conoce como la línea de mercado de capital.



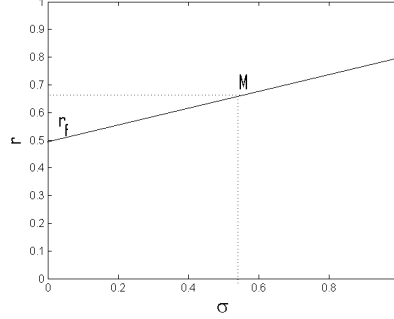


Figura 1.2: Gráfica del rendimiento esperado como función del riesgo. El punto  $M$  es el portafolio de mercado.

El modelo CAPM propone que los rendimientos “ideales” de un activo están definidos por la línea de mercado y basta conocer la volatilidad de un activo para determinar su rendimiento. Es decir:

$$\bar{r} = r_f + \frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M} \sigma. \quad (1.17)$$

**Proposición 1 (El modelo CAPM):** Si el portafolio de mercado  $M$  es eficiente, el retorno esperado  $\bar{r}_i$  de cualquier activo  $i$  satisface:

$$\bar{r}_i - r_f = \beta_i (\bar{r}_M - r_f), \quad (1.18)$$

con  $\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$ .

La deducción de esta expresión se muestra a continuación y se obtuvo del libro *Investment Science* de Luenberger (1998) [5]. Se considera el siguiente portafolio y se asume que  $(r_M, \sigma_M)$  está en la frontera eficiente. Sean  $\bar{r}_p$  y  $\sigma_p$  el retorno esperado y la desviación estándar respectivamente del retorno del portafolio, conformado por el activo  $i$  y el portafolio de mercado:

$$\bar{r}_p = \alpha \bar{r}_i + (1 - \alpha) \bar{r}_M, \quad \sigma_p = [\alpha^2 \sigma_i^2 + 2\alpha(1 - \alpha) \sigma_{iM} + (1 - \alpha)^2 \sigma_M^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Donde  $\alpha$  es el porcentaje de capital invertido en el activo  $i$  y  $1 - \alpha$ , en el portafolio de mercado. Se derivan ambas ecuaciones con respecto a  $\alpha$  y se evalúan en  $\alpha = 0$ . La razón es que para este valor de  $\alpha$  se obtiene el portafolio de mercado. Por otro lado, se desea que la frontera eficiente del portafolio, definida en la ecuación

(1.18), sea tangente a la curva de riesgo-rendimiento del portafolio de mercado en el punto  $(\sigma_M, \bar{r}_M)$ . Para obtener la pendiente de esa recta se calcula el cociente  $\frac{d\bar{r}_p}{d\alpha}|_{\alpha=0}$  entre  $\frac{d\sigma_p}{d\alpha}|_{\alpha=0}$ , es decir,  $\frac{d\bar{r}_p}{d\sigma_p}|_{\alpha=0}$ . Se tiene:

$$\frac{d\bar{r}_p}{d\sigma_p}|_{\alpha=0} = \frac{(\bar{r}_i - \bar{r}_M)\sigma_M}{\sigma_{iM} - \sigma_M^2}. \quad (1.19)$$

La frontera eficiente de la Figura 1.2 es tangente a la curva  $\bar{r}(\sigma)$  del portafolio de mercado en el punto  $M$ . Por lo tanto, la pendiente de la recta se expresa como:

$$\frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M}. \quad (1.20)$$

Al igualar las expresiones (1.19) y (1.20) y despejando  $\bar{r}_i$  se obtiene la ecuación (1.18) (ver Luenberger (1998) [5]), donde,

$$\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}. \quad (1.21)$$

Como se puede observar cuando el activo es independiente del mercado, entonces su beta es cero, pero si el activo está perfectamente correlacionado con el mercado, su valor beta es uno. El coeficiente  $\beta_i$  representa la medida de riesgo del activo  $i$ . De aquí que el valor beta de un portafolio de  $n$  activos está dado por:

$$\beta_p = \sum_{i=1}^n w_i \beta_i. \quad (1.22)$$

En la siguiente sección se describe otra medida de riesgo conocida como Valor en Riesgo (*Value at Risk*). Esta metodología se basa en la distribución de la pérdida del portafolio. En el presente trabajo se enfoca al caso de un portafolio de acciones y uno de bonos.

### 1.3.4. Valor en Riesgo VaR

En esta subsección se describe una medida de riesgo basada en la pérdida más grande de un portafolio. Con base en ello el inversionista sabe qué monto de capital requiere para cubrirse ante este escenario. Antes de definir el valor en riesgo, primero se define la pérdida que se obtiene al invertir en un portafolio en cierto periodo de tiempo. Sea  $L_{t+1}$  la pérdida del portafolio en cierto horizonte de tiempo. Sean  $v_t$  y  $V_{t+1}$  los valores del portafolio en los tiempos  $t$  y  $t + 1$ , respectivamente. La pérdida  $L_{t+1}$  está dada por:

$$L_{t+1} = -(V_{t+1} - v_t). \quad (1.23)$$

$v_t$  es fijo, ya que se asume que en el tiempo  $t$  se tiene toda la información disponible. Sin embargo, en ese tiempo  $V_{t+1}$  se desconoce. El valor del portafolio depende del tiempo y de los factores de riesgo. Los factores de riesgo son aquellas variables de los activos que modifican el valor de la cartera. Aquellos que están presentes dependen de la composición del portafolio. Ninguno de ellos tiene un comportamiento determinístico. En consecuencia, el valor del portafolio  $V_{t+1}$  es aleatorio. Ésto implica que el valor de la pérdida también lo sea. En la práctica, cuando se desea hacer un análisis sobre un horizonte de tiempo muy corto y debido a que las definiciones de las pérdidas les resulta complicado manejar a los financieros, se emplea la aproximación de primer orden de  $L$ . La expansión en series de Taylor de primer orden a  $V$  evaluado en  $(t+1, Z_{t+1})$  centrado en  $(t, Z_t)$ , donde  $Z_t$  es el vector de factores de riesgo evaluados en el tiempo  $t$  está dada por

$$V(t+1, Z_{t+1}) \approx V(t, Z_t) + \frac{\partial V(t, Z_t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(t, Z_t)}{\partial Z_{i,t}} X_{i,t+1}. \quad (1.24)$$

Donde  $X_{i,t+1} = Z_{i,t+1} - Z_{i,t}$  es el incremento en el valor del factor de riesgo. De la aproximación (1.24) se obtiene la aproximación de primer orden de  $L_{t+1}$ , la cual se denota como  $L_{t+1}^\Delta$ .

$$L_{t+1} \approx -\left[\frac{\partial V(t, Z_t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(t, Z_t)}{\partial Z_{i,t}} X_{i,t+1}\right] = L_{t+1}^\Delta. \quad (1.25)$$

Además del tiempo,  $L_{t+1}$  también depende de los cambios en los valores de los factores de riesgo. A continuación se muestran dos ejemplos del cálculo de la pérdida, uno para un portafolio de acciones y otro para un portafolio de bonos.

### Pérdida de un portafolio de acciones

Sean  $n$  el número de acciones que componen un portafolio,  $m_i$  el número de acciones que se invierten en la  $i$ -ésima acción,  $V_{i,t}$  el precio de la acción  $i$  al tiempo  $t$ . De manera análoga a  $V_{i,t}$  se define  $V_{i,t+1}$ . Se asume que en el tiempo presente,  $t$ , se conoce toda la información del mercado y que la composición del portafolio permanece igual.  $V_{i,t+1}$  no se conoce en el tiempo  $t$ , y además su comportamiento es aleatorio. En el caso de las acciones su factor de riesgo recae en sus precios. Si  $V_{i,t+1}, i = 1, \dots, n$  son v. a., entonces  $L_{t+1}$  también lo es. El valor  $v_t$  del portafolio de acciones en el tiempo  $t$  se define como:

$$v_t = \sum_{i=1}^n m_i v_{i,t}. \quad (1.26)$$

En el tiempo  $t + 1$  se define en forma análoga. Por lo tanto, la pérdida de la cartera de acciones se expresa de la siguiente manera:

$$L_{t+1} = - \sum_{i=1}^n m_i (V_{i,t+1} - v_{i,t}) = - \sum_{i=1}^n m_i v_{i,t} (e^{X_{i,t+1}} - 1). \quad (1.27)$$

(1.27) se obtuvo al factorizar el término  $e^{\ln(v_{i,t})}$  y al definir la variable  $X_{i,t+1} = \ln\left(\frac{V_{i,t+1}}{v_{i,t}}\right)$ .  $X_{i,t+1}$  representa el rendimiento de la acción  $i$  al tiempo  $t + 1$ .

La aproximación de primer orden de  $L_{t+1}$  es:

$$L_{t+1}^{\Delta} = - \sum_{i=1}^n m_i v_{i,t} X_{i,t+1} = -v_t \sum_{i=1}^n w_i X_{i,t+1}. \quad (1.28)$$

Aquí  $w_i = \frac{m_i v_{i,t}}{v_t}$  es la proporción de capital que se invierte en el activo  $i$ .

### Pérdida de un portafolio de bonos

Las variables  $m_i, v_{i,t}, v_t, L_{t+1}$  se definen de la misma manera que en el ejemplo anterior. Sin embargo, en lugar de acciones ahora el portafolio se compone de bonos. En el caso de los bonos, su factor de riesgo son los cambios en su rendimiento al vencimiento. El  $i$ -ésimo rendimiento es la tasa a la cual se recibe el pago principal al momento del vencimiento del bono  $i$ ,  $T_i$ . Sea  $y_{i,t}$  el rendimiento del bono  $i$  al tiempo  $t$  y  $X_{i,t+1} = Y_{i,t+1} - y_{i,t}$ , su rendimiento. Se asume que el valor nominal tiene el valor de un peso para cada bono. El valor de una cartera de bonos se define como sigue:

$$V_t = \sum_{i=1}^n m_i v_{i,t} = \sum_{i=1}^n m_i e^{-(T_i - t\Delta)y_{i,t}}. \quad (1.29)$$

De manera análoga se define  $V_{t+1}$ . En lugar de escribir  $Y_{i,t+1}$  se escribe  $X_{i,t+1} + y_{i,t}$  puesto que  $y_{i,t}$  se conoce y la pérdida que se obtiene al invertir en dicho portafolio, además del tiempo, depende de los incrementos (rendimientos)  $X_{i,t+1}$ . La pérdida,  $L_{t+1}$ , tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
L_{t+1} &= - \sum_{i=1}^n m_i (e^{-(T_i-(t+1)\Delta)(X_{i,t+1}+y_{i,t})} - e^{-(T_i-t\Delta)y_{i,t}}) \\
&= - \sum_{i=1}^n m_i (e^{-(T_i-t\Delta)(X_{i,t+1}+y_{i,t})+\Delta(X_{i,t+1}+y_{i,t})} - e^{-(T_i-t\Delta)y_{i,t}}) \\
&= - \sum_{i=1}^n m_i e^{-(T_i-t\Delta)y_{i,t}} (e^{-(T_i-t\Delta)X_{i,t+1}+\Delta(X_{i,t+1}+y_{i,t})} - 1) \\
&= - \sum_{i=1}^n m_i V_{i,t} (e^{-(T_i-t\Delta)X_{i,t+1}+\Delta(X_{i,t+1}+y_{i,t})} - 1),
\end{aligned}$$

en particular, si  $t = 0$  la pérdida en el tiempo 1 es como sigue:

$$L_1 = - \sum_{i=1}^n m_i V_{i,0} (e^{-(T_i-\Delta)X_{i,1}+\Delta y_{i,0}} - 1). \quad (1.30)$$

Obsérvese que la relación entre los factores de riesgo y la pérdida no es lineal. La aproximación de primer orden para  $L_{t+1}$  se deduce a partir de la serie de Taylor de primer orden explicada al inicio de esta subsección. Por ello y si  $t = 0$ ,  $L_1^\Delta$  se define de la siguiente manera:

$$L_1^\Delta = \sum_{i=1}^n m_i V_{i,0} [T_i X_{i,1} - \Delta y_{i,0}]. \quad (1.31)$$

En ambos ejemplos  $L_{t+1}$  denota a  $L(t+1, X_{t+1})$ . Una vez definida la pérdida se prosigue a dar las definiciones de Valor en Riesgo (VaR) y Valor en Riesgo Condicionado (EVAR). Ambas parten de la distribución de la pérdida mencionada. El Valor en Riesgo VaR se define como la peor pérdida de un portafolio a un nivel de confianza dado  $1 - \alpha$  sobre un periodo de tiempo específico. Esto significa que, con probabilidad  $\alpha$ , la verdadera pérdida del portafolio obtenida en el horizonte objetivo es mayor al VaR del portafolio. Esta subsección está basada en McNeil et. al. (2005) [6]. El VaR es positivo. Un inversionista para protegerse ante el peor escenario requiere del capital suficiente para cubrirse. Este capital, llamado capital económico, es el que los accionistas deben reservar para limitar la probabilidad de incumplimiento. El capital económico difiere del capital regulatorio porque el nivel de confianza y el horizonte de tiempo de cada uno son distintos. Se denota  $L$  como la v. a. que representa la pérdida del portafolio con distribución  $F_L$ . En la práctica,  $F_L(\cdot)$  es desconocida por lo que se han propuesto diversas técnicas para estimar el

VaR y el EVaR. El VaR es un cuantil de la distribución de pérdida. En McNeil et. al. (2005) [6] definen el valor en riesgo como:

$$VaR_\alpha = \inf[k_\alpha \in \mathbb{R} \mid P(L \leq k_\alpha) \geq 1 - \alpha]. \quad (1.32)$$

Existen modelos, tanto paramétricos como no paramétricos para estimar el VaR y el EVaR. El primero asume que la pérdida se modela mediante una distribución paramétrica con ciertos parámetros. En la práctica, los parámetros se estiman mediante datos históricos. En el no paramétrico se emplea una muestra aleatoria de alguna distribución no especificada. Comúnmente se asume que los factores de riesgo,  $X_t$ , siguen una distribución normal. En realidad los factores de riesgo y las pérdidas exhiben colas pesadas en su distribución. Al asumir esto, se subestima el riesgo puesto que las colas de una distribución normal son ligeras. Una alternativa a la distribución normal como una distribución de los rendimientos es suponer que estos siguen una distribución  $t$  de student con  $v$  grados de libertad. Mientras menos grados de libertad tenga la distribución  $t$ , las colas de la distribución son más pesadas. Esta alternativa es errónea si los datos presentan asimetría en su distribución.

Los autores Crouhy et. al. (2001) [2] mencionan que bajo el supuesto de que los mercados son eficientes y los rendimientos diarios  $R_t$  del día  $t$  son normales  $(\mu, \sigma^2)$ , independientes e idénticamente distribuidos entonces el rendimiento a 10 días se distribuye normal  $(10\mu, 10\sigma^2)$ . Este supuesto es muy invocado por los financieros. La relación entre el VaR a uno y 10 días se expresa mediante la relación:

$$VaR_\alpha^{10} = \sqrt{10} VaR_\alpha^1. \quad (1.33)$$

El VaR, como cualquier medida de riesgo, tiene sus ventajas y desventajas (Crouhy et. al. (2001) [2]).

Ventajas:

1. El VaR proporciona una medida de riesgo común, consistente e integrada con factores de riesgo, instrumentos, y clases de activos conduciendo a un tratamiento consistente de riesgos sobre la empresa.
2. Proporciona una medida agregada de riesgo: un simple número que está relacionado a la pérdida máxima a un nivel de confianza dado. Dicho número se puede trasladar a un requerimiento de capital.

3. Manejadores y accionistas, así como reguladores, pueden decidir si están satisfechos con el nivel de riesgo tomado por el banco en términos de unidades VaR.
4. Los reportes del VaR se producen diariamente por manejadores de líneas de negocios. El VaR también se comunica a los reguladores para usarlo como dato y calcular el capital regulatorio.

Desventaja: no es una medida de riesgo coherente puesto que no es subaditiva.

Una medida de riesgo que complementa el Valor en Riesgo, y que además es coherente, es el Valor en Riesgo Condicional o Extremo (EVAR). El EVaR es la pérdida esperada del valor de un portafolio dado que ésta excedió el VaR. El EVaR al nivel de confianza  $1 - \alpha$  se expresa como:

$$EVaR_\alpha = E[L|L > VaR_\alpha]. \quad (1.34)$$

Una vez que se presentaron algunas de las medidas de riesgo que se manejan en los sistemas financieros lo siguiente es analizar cuáles de ellas son medidas coherentes y, en el caso de que no lo sean, mostrar qué propiedad(es) incumple(n). En la Tabla 1.1 se muestran las medidas de riesgo anteriores y qué propiedades dadas en la definición 2 son las que cumplen y no cumplen.

El argumento de por qué la desviación estandar  $\sigma$  cumple o no las propiedades anteriores como medida de riesgo recae en las propiedades de la varianza de una variable aleatoria. Ya que si a una variable aleatoria se le suma o se le resta un término constante su volatilidad no cambia, la propiedad 1 no se cumple. La desigualdad de la propiedad 2 solamente se cumple si la covarianza de los dos activos es no positiva, es decir, en general no se cumple. La propiedad 3 se cumple para  $\sigma$  puesto que  $var(cX) = c^2 var(X)$  donde  $X$  es una variable aleatoria y  $c$  es una constante. Se calcula la raíz cuadrada por ambos lados y se corrobora que se satisface. La propiedad 4 no la cumple la desviación estandar puesto que en general si una variable aleatoria toma valores mayores que otra variable aleatoria no implica que su desviación estándar sea mayor. Ahora se analiza el caso del coeficiente beta. Los argumentos se basan en las propiedades de la covarianza de dos variables aleatorias. La propiedad 1 no se cumple por un motivo similar al de la desviación estándar. La segunda sí se cumple puesto que:

$$\beta_1 + \beta_2 = \frac{\sigma_{1,M}}{\sigma_M^2} + \frac{\sigma_{2,M}}{\sigma_M^2} = \frac{cov(r_1, r_M) + cov(r_2, r_M)}{\sigma_M^2} = \frac{cov(r_1 + r_2, r_M)}{\sigma_M^2} = \beta_{1+2}.$$

Tabla 1.1: Validación de las propiedades mencionadas en la definición 2 de medida de riesgo coherente para las cuatro medidas de riesgo.

Medida	Propiedad 1: traslación invariante	Propiedad 2: subaditividad	Propiedad 3: homogeneidad positiva	Propiedad 4: monotonicidad
$\sigma$	No	No	Si	No
$\beta$	No	Si	Si	No
VaR	Si	No	Si	Si
EVaR	Si	Si	Si	Si

La propiedad de homogeneidad positiva se cumple por la propiedad que posee la covarianza. La última propiedad no se cumple por una razón similar a la de la desviación estándar. Los argumentos para el VaR y el EVaR se pueden consultar en McNeil et. al. (2005) [6].

De las 4 medidas de riesgo definidas en la presente tesis, el EVaR es la única que es coherente. El VaR solamente no cumple con la de subaditividad. A pesar de ello es muy usada en los bancos y empresas para evaluar sus carteras de inversión. Por otra parte, aunque los modelos de Markowitz y el CAPM no proporcionan buenas medidas de riesgo, como el VaR y el EVaR, son útiles para complementar a estas dos últimas. En el capítulo 3 se ilustra mediante ejemplos numéricos el efecto de emplear la teoría de optimización de portafolios de Markowitz. Los coeficientes del modelo CAPM son útiles cuando se calcula el VaR marginal de cada activo.

## 1.4. Beneficios del manejo de riesgo

En esta sección se da a conocer las razones por las que se mide el riesgo. El primer motivo es que al medir el riesgo que hay al invertir en un activo o portafolio se puede definir el capital necesario para cubrirse ante cualquier pérdida que se obtenga en un horizonte de tiempo dado, es decir, una cobertura. Los reguladores obligan a las empresas a evaluar sus portafolios periódicamente ya que por ese medio se evalúa su situación financiera y así se evita una posible quiebra; en otras palabras, se busca que la empresa sea solvente y que tenga un mejor control de sus inversiones (McNeil et. al. 2005 [6]). En términos de probabilidad, la labor de las empresas es



disminuir la probabilidad de tener una pérdida mayor que la cobertura anticipada. Por otra parte, el manejo correcto del riesgo financiero hace que una empresa o corporación aumente su valor, lo cual inclusive beneficia a sus accionistas ya que las acciones incrementan su valor. En el caso de los bonos corporativos, se busca reducir la probabilidad de incumplimiento de deuda. Desde la perspectiva de un inversionista, va a preferir invertir en instrumentos cuyas medidas de riesgo sean pequeñas, es decir, entre más chica sea la estimación más preferible será para él. Si se mide el riesgo marginal de cada activo que conforma el portafolio se puede notar cuáles activos contribuyen más al riesgo de todo el portafolio de inversión. De ahí se toma la decisión de seguir invirtiendo en el mismo portafolio, o reestructurarlo.



# Capítulo 2

## Estimación del VaR y el EVaR

En el presente capítulo se describen cuatro procedimientos para estimar el VaR y el EVaR. En la Sección 2.1 se presentan los métodos de varianza-covarianza, el histórico, integración Monte Carlo y, la Teoría del Valor Extremo (TVE) para estimar puntualmente el VaR y el EVaR. Además, en la Sección 2.2 se presentan procedimientos para calcular intervalos de confianza para ambas medidas de riesgo. A partir de ellos se desarrolla el análisis para obtener expresiones del VaR y el EVaR. Al calcular la pérdida en el valor del portafolio se supone que el monto a invertir es de un peso, es decir,  $v_t = 1$ . Por simplicidad, el horizonte de tiempo se toma a un día. En general, se pueden modificar el horizonte de inversión y el monto a invertir en el portafolio de inversión. Para una versión más detallada de los procedimientos antes mencionados, se puede consultar McNeil et. al. (2005) [6], Crouhy et. al. (2001) [2] y Campa (2001) [1].

### 2.1. Estimación puntual del VaR y el EVaR

#### 2.1.1. Método de varianza-covarianza

El procedimiento de varianza-covarianza es una aproximación que asume que la distribución de las pérdidas  $L$  en el valor del portafolio es normal con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ . En la práctica, los parámetros son desconocidos. Ambos se estiman con datos históricos a través de alguna metodología. Con base en este supuesto, el VaR se define como el cuantil de orden  $1 - \alpha$  de una distribución normal, es decir,

$$VaR_\alpha = \mu + \Phi_{1-\alpha}^{-1}\sigma, \quad (2.1)$$

y el EVaR como:

$$EVaR_\alpha = \frac{E[L I_{[L > VaR_\alpha]}]}{\alpha}, \quad (2.2)$$

donde  $\Phi^{-1}$  es la inversa de la función de distribución acumulada normal estándar. La aproximación varianza-covarianza subestima el VaR y el EVaR (McNeil et. al. (2005) [6]).

### 2.1.2. Método histórico

El procedimiento que sigue esta metodología es el siguiente:

1. Se selecciona una muestra de los cambios en los factores de riesgo sobre un periodo de tiempo dado.
2. Se evalúa el operador de pérdida para cada elemento de la muestra.
3. Con la distribución empírica de la pérdida del portafolio se calculan el VaR y el EVaR. Así, si  $L_1, \dots, L_n$  es una muestra de datos históricos de las pérdidas en el valor de un portafolio. El VaR y el EVaR al nivel de confianza  $1 - \alpha$  se definen, respectivamente como:

$$\begin{aligned} VaR_\alpha &= \hat{F}^{-1}(1 - \alpha), \\ EVaR_\alpha &= \frac{\sum_{i=1}^n L_i I_{[L_i > VaR_\alpha]}}{\sum_{j=1}^n I_{[L_j > VaR_\alpha]}}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde  $\hat{F}$  es la función de distribución empírica. La mayor atracción de este método es que es no paramétrico, es decir, no se asume ninguna distribución específica de la pérdida. Sin embargo, la variabilidad del cuantil depende de la muestra que se tenga. Es por ello que una estimación puntual no es suficiente. Este procedimiento se puede complementar mediante los métodos Bootstrap con los cuales se pueden calcular intervalos de confianza para el VaR y el EVaR a partir de la muestra de datos. La deficiencia de este método recae en la dependencia de eventos pasados. En consecuencia, genera únicamente escenarios que ocurrieron en el pasado, en otras palabras, ignora nuevos escenarios.

### 2.1.3. Aproximación Monte Carlo

El método Monte Carlo tiene aplicaciones en diversas áreas tales como investigación de operaciones, finanzas, etc. por medio de la simulación estocástica. Esta sección se divide en dos partes. En la primera se explica en qué consiste el método, junto con sus características. En la segunda, se explica cómo se emplea para estimar el VaR y el EVaR, los supuestos que sigue, entre otras cosas.

#### Método Monte Carlo

El método Monte Carlo es una herramienta matemática capaz de estimar el valor de un parámetro e inclusive obtener su intervalo de confianza. Se basa en generar diversos escenarios sobre un fenómeno real cuyo comportamiento es aleatorio. Los escenarios se generan mediante números pseudo-aleatorios. Los números pseudo-aleatorios son aquellos que se obtienen mediante un algoritmo matemático de tal manera que simule que se obtuvieron aleatoriamente.

El método Monte Carlo es capaz de resolver problemas en varias dimensiones que en la mayoría de los casos es difícil de resolver analíticamente. La estimación se realiza de la siguiente manera: en términos matemáticos sea  $E[G(X)]$  el valor esperado de una función, que depende de una variable aleatoria  $X$ , el cual se quiere estimar,  $M$  es el número de escenarios que se generan y  $G(X_1), \dots, G(X_M)$  una muestra aleatoria de los posibles valores de  $G(X)$ . Cada uno de los valores  $G(X_i)$  es el resultado obtenido de una observación y todas ellas son independientes e idénticamente distribuidas con cierta distribución  $F$ . Por la Ley Fuerte de los Números Grandes con probabilidad 1 se tiene que:

$$\hat{E}[G(X)]_M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M G(X_i) \xrightarrow{a.s.} E[G(X)]. \quad (2.4)$$

Es decir, cuando el tamaño de muestra  $M$  tiende a infinito el estimador  $\hat{E}[G(X)]$  converge casi seguramente al verdadero valor,  $E[G(X)]$ . Por lo tanto, es un buen estimador del valor esperado y es insesgado (ver Glasserman (2003) [4] y Saavedra et. al. (2008) [12]). El teorema del límite central también afirma que  $\sqrt{M} \frac{\hat{E}[G(X)] - E[G(X)]}{\sigma}$  converge, en distribución, a una distribución normal. En otras palabras,

$$\sqrt{M} \frac{\hat{E}[G(X)] - E[G(X)]}{\sigma} \rightarrow N(0, 1), M \rightarrow \infty. \quad (2.5)$$

Además, un intervalo de confianza al  $(1 - \alpha)100\%$  de  $E[G(X)]$  está dado por:

$$\hat{E}[G(X)] \pm \Phi_{\frac{\alpha}{2}}^{-1} \frac{\sigma}{\sqrt{M}}. \quad (2.6)$$

Comúnmente nunca se conoce la desviación estándar  $\sigma$  de la variable  $X$ . Por ello, se reemplaza  $\sigma$  por  $s_M$  (la desviación estándar muestral). A continuación se muestra el algoritmo para obtener el intervalo de confianza para la esperanza de una función  $G(X)$ , donde  $X$  es una variable aleatoria, a partir de las estimaciones de la media y varianzas muestrales. Este algoritmo se realiza por pasos. En el primer paso se genera un número aleatorio de la variable aleatoria  $X$ ,  $X_1$ , se evalúa en la función  $G$  y se estiman la media y varianzas de  $G(X)$  con el único dato simulado. Es claro que en este paso la media y la varianzas estimadas son, respectivamente,  $G(X_1)$  y cero. En el segundo paso se genera otro número aleatorio de la variable en cuestión,  $X_2$ , se evalúa en  $G$  y se vuelve a estimar la media y varianzas con el dato anterior y el nuevo. Este paso se repite tantas veces como el tamaño de muestra que se genere. Cada paso es una iteración.

1. Sean  $I_i$  y  $Var_i$  el promedio y la varianzas muestrales, respectivamente, de  $G(X)$  hasta la iteración  $i$ .
2. Sean  $I_0 = 0$  y  $Var_1 = 0$ ;  $X_1$  una v. a. simulada e  $I_1 = G(X_1)$ .
3. Para  $i = 2, \dots, M$  generar  $X_i$ .
4. Obtener de manera recursiva  $I_{i+1} = I_i + \frac{G(X_{i+1}) - I_i}{i+1}$ ;  $Var_{i+1} = (1 - \frac{1}{i})Var_i + (i+1)(I_{i+1} - I_i)^2$ . En cada iteración se utilizan las estimaciones de la media y varianzas obtenidas en la iteración anterior para estimarlas con el dato nuevo. De esta forma se reduce el tiempo de cómputo.
5. Finalmente se obtiene el intervalo de confianza  $I_M \pm \frac{\Phi_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{Var_M}}{\sqrt{M}}$ .

La descripción de este método se puede revisar en Saavedra et. al. (2008) [12]. La ventaja de este método es que es fácil de implementar y de entender. Sin embargo, el inconveniente es que converge lentamente al verdadero valor. Para reducir el error de estimación existen dos alternativas: una de ellas es aumentar el número de simulaciones  $M$ , lo cual implica un mayor costo de tiempo y la otra es reducir la varianzas  $\sigma$  de la variable aleatoria  $X$  por métodos de reducción de varianzas.

En finanzas, bajo este método se asume que se conoce la distribución de los factores de riesgo. Con ello se simula un posible valor de la pérdida de un portafolio.

Cabe resaltar que no se asume nada acerca de la distribución de la pérdida. La forma de cómo se obtiene este valor es independiente de la aproximación Monte Carlo. La simulación Monte Carlo trabaja con la muestra de escenarios generados y a partir de la muestra simulada calcula las estimaciones correspondientes, en este caso, del VaR y el EVaR.

### Desarrollo del método Monte Carlo

En esta subsección se discute cómo calcular un posible valor de la pérdida de la cartera de acciones para cada escenario. El procedimiento se puede revisar en McNeil et. al. (2005) [6]. La pérdida del portafolio está en términos de los valores de los instrumentos de inversión, los cuales cambian en el tiempo. En un portafolio de acciones,  $V_{i,t}$  representa el precio de la  $i$ -ésima acción al tiempo  $t$ . Se asume que los precios siguen un Movimiento Browniano Geométrico (MBG) (ver Mikosh (1998) [7]) y se distribuyen log-normal. En consecuencia, el vector de rendimientos sigue una distribución normal multivariada. Comúnmente, los rendimientos son dependientes entre sí. Por ello, la simulación de los precios de cada una de las acciones no se puede realizar por separado ya que los cambios que se presentan en el precio de una de las acciones puede afectar a los que corresponden a las otras acciones. Se asume que se conocen los precios actuales de las acciones,  $v_{i,0}$ , y a partir de éstos se obtienen los precios de las acciones al tiempo  $t$  mediante la expresión:

$$V_{i,t} = v_{i,0} e^{(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2})\Delta t + A_i Z_t \sqrt{\Delta t}}, i = 1, \dots, n, \quad (2.7)$$

donde  $A$  es una matriz de tamaño  $n \times n$  obtenida por la descomposición de Cholesky de la matriz de varianzas-covarianzas de los rendimientos de las acciones  $\Sigma$ ,  $A_i$  es la fila  $i$  de la matriz  $A$  y  $\mu_i$  es el rendimiento esperado de la acción  $i$ . En la práctica, los parámetros  $\mu$  y  $\Sigma$  son desconocidos pero se pueden estimar mediante una muestra de datos. Como se vió en la sección 1.3.4 del capítulo 1,  $L_{t+1}$  se define como se muestra en las ecuaciones (1.27) y (1.28). Independientemente si se trabaja con la ecuación (1.27) o la ecuación (1.28) se pueden simular  $M$  vectores  $\mathbf{X}_{t+1} = (X_{1,t+1}, \dots, X_{n,t+1})^t$  con distribución normal multivariado  $N_n(\hat{\mu}, \hat{\Sigma})$  a través de algún lenguaje de programación. Cada uno de ellos se evalúan en la ecuación (1.27) o (1.28). Con ellos se obtiene una muestra aleatoria de escenarios (pérdidas)  $L_{t+1}^{(1)}, \dots, L_{t+1}^{(M)}$ . Se supone que en el tiempo  $t$  se conoce  $v_t$  y las proporciones  $w_i$  y con ellos se generan distintos escenarios de pérdidas en el tiempo  $t + 1$ . En el caso de un portafolio de bonos el procedimiento es análogo. La pérdida en el valor de la cartera de bonos está dada por la ecuación (1.30). Nuevamente, se asume que el tiempo actual es el tiempo  $t$  y que la información correspondiente a ese instante es

conocida. Por ello, el valor del rendimiento del bono al tiempo actual  $t$   $y_{i,t}$  es fijo. Sea  $X_{t+1} = (X_{1,t+1}, \dots, X_{n,t+1})^t$  el vector de incrementos en los rendimientos al tiempo  $t + 1$  con cierta distribución. Se simula una m. a. de valores  $X_{t+1}^{(1)}, \dots, X_{t+1}^{(M)}$  ya que son los factores de riesgo de la cartera de bonos y el supuesto de la simulación recae en ellos, se evalúan en la función de pérdida  $L_{t+1}$  y así, se logra tener una muestra de los posibles valores de la pérdida en el valor de la cartera de bonos al tiempo  $t + 1$ ,  $L_{t+1}^{(1)}, \dots, L_{t+1}^{(M)}$ . Se asume que los rendimientos al vencimiento se modelan mediante ciertos procesos con reversión a la media como el de Vasicek y el CIR (ver Glasserman (2003) [4]). Una vez obtenida la muestra  $L_{t+1}^{(1)}, \dots, L_{t+1}^{(M)}$  entonces se aplica el método Monte Carlo. Con la distribución de los datos simulados se estima el VaR a un nivel de confianza  $(1 - \alpha) \times 100\%$ , con  $0 < \alpha < 1$  propuesto. Por su definición, un estimador del VaR será el valor más pequeño  $x$  de la muestra que cumpla la siguiente desigualdad:

$$\hat{F}(x) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M I_{[L_{t+1}^{(i)} \leq x]} \geq 1 - \alpha. \quad (2.8)$$

Y el EVaR con el mismo nivel de confianza se estima como el promedio aritmético de aquellos elementos de la muestra simulada que exceden el VaR. La ventaja de este método es que, bajo el supuesto de la distribución de los factores de riesgo, si se genera una cantidad grande de escenarios la distribución de los datos simulados se asemeja a la verdadera. Además, puede adecuarse a cualquier distribución, en particular, las de colas pesadas. Asimismo, el tamaño de muestra puede ser tan grande como se desee y se puede aplicar a cualquier portafolio de inversión sin importar su complejidad en su composición. Su deficiencia recae en el supuesto que se conoce la distribución de los factores de riesgo.

#### 2.1.4. Teoría de Valores Extremos

En esta sección se emplea una herramienta matemática que se centra en la cola de la distribución de pérdida (en el presente trabajo se eligió la cola derecha). A lo largo del tiempo se han propuesto diversas metodologías que trabajan con los valores grandes que puede tomar una variable aleatoria. El estudio de los valores grandes de una variable aleatoria y su distribución es lo que se denomina Teoría de Valores Extremos. En el presente trabajo se detallan dos métodos que se enfocan en esta teoría: el método de *máximo por bloques* y el método de *picos sobre el umbral*. En las siguientes subsecciones se detallan cada uno de ellos, los supuestos que siguen y se menciona cuál y por qué se elige uno de los dos métodos para implementarlo numéricamente.



### Método de máximo por bloques

Este método parte de una idea similar al Teorema del Límite Central. Dada una muestra aleatoria de elementos independientes e idénticamente distribuidos  $X_1, \dots, X_n$  y dos sucesiones normalizadas  $a_n = nE[X_1], b_n = \sqrt{n \text{var}(X_1)}$  el cociente  $\frac{S_n - a_n}{b_n}$ , donde  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  converge, en distribución, a una normal estándar (McNeil et. al. (2005) [6]). Como su nombre lo dice, el método se basa en dividir una muestra de datos  $X_1, \dots, X_n$  en bloques o grupos disjuntos entre sí pero adyacentes. Sea  $m$  el número de bloques y  $n$  el número de elementos o el tamaño de cada bloque (se supone que todos los bloques son del mismo tamaño). En cada bloque se toma el valor más grande, es decir, se denota  $M_i = \max(X_{(i,1)}, \dots, X_{(i,m)})$ ,  $i = 1, \dots, m$  donde  $X$  es la variable aleatoria que modela, por ejemplo, la pérdida en el valor de un portafolio. De esta forma lo que se obtiene es una muestra de valores máximos que puede tomar una variable aleatoria.

Sea  $H_\varepsilon(x)$  la función de distribución que modela el valor extremo:

$$H_\varepsilon(x) = \begin{cases} e^{-(1+\varepsilon x)^{-\frac{1}{\varepsilon}}} & \varepsilon \neq 0, \\ e^{-e^{-x}} & \varepsilon = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Con la restricción  $1 + \varepsilon x > 0$ . La distribución definida en (2.9) es general en el sentido que tiene como casos particulares a la distribución Fréchet si  $\varepsilon > 0$ , Gumbel si  $\varepsilon = 0$  y por último Weibull si  $\varepsilon < 0$ . El parámetro  $\varepsilon$  es de forma y representa el decaimiento de la cola de cierta distribución. La clase de distribuciones Fréchet son aquellas que tienen cola pesada, en la Gumbel hay distribuciones con cola pesada o delgada. En cambio, en la clase Weibull las distribuciones tienen un punto final derecho finito el cual se define más adelante. La pregunta que uno se plantea es la siguiente ¿Los valores máximos de una v. a.  $X$  siempre se pueden modelar con una del tipo de distribución (2.9) sin importar cómo se distribuye la v. a.  $X$ ? Para contestar esta pregunta suponga que se tiene una muestra de observaciones independientes  $X_1, \dots, X_n$  con distribución  $F$ . Sea  $M_n$  una sucesión del valor máximo de  $X$  definida por  $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$  y suponga que  $M_n$  se puede transformar por medio de dos sucesiones normalizadas  $d_n \in \mathbb{R}$  y  $c_n > 0$  de tal manera que se tiene lo siguiente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{M_n - d_n}{c_n} \leq x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(c_n x + d_n) = H(x), \quad (2.10)$$

si el límite existe entonces  $M_n$  converge, en distribución, a  $H(x)$ . Se dice que  $F$  está en el Máximo Dominio de Atracción (MDA) de  $H(x)$ ,  $F \in MDA(H(x))$  si el límite anterior existe. Ejemplos de las distribuciones  $F$  que cumplen con lo anterior

se pueden consultar en McNeil et. al. (2005) [6]. El estudio del valor extremo se formaliza con el siguiente teorema.

**Teorema 1 (Fisher-Tippett, Gnedenko)** *Si  $F \in MDA(H(x))$  para alguna FDP  $H$  entonces  $H$  debe ser una FDP del valor extremo generalizado  $H_\varepsilon$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ .*

Dos características que tiene la distribución  $H_\varepsilon(x)$  son las siguientes:

- $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_\varepsilon(x) = H_0(x)$ , para un valor fijo  $x$ ,
- $H_{\varepsilon, \mu, \sigma}(x) := H_\varepsilon\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ .

Los parámetros  $\mu$  y  $\sigma > 0$  son de localización y escala, respectivamente. En el siguiente apartado se detalla sobre los tipos de distribuciones que engloba la Teoría del Valor Extremo (TVE). A continuación se muestra una definición que explica formalmente la característica de la cola de las distribuciones de la clase Fréchet.

**Definición 3 (funciones de variación lenta y regular)** *Una función positiva, medible de variación lenta  $L$  en  $\infty$  es aquella que satisface la propiedad:*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1, t > 0. \quad (2.11)$$

*Por otro lado, una función positiva, medible  $h$  de variación regular en  $\infty$  con índice  $p \in \mathbb{R}$  debe cumplir la siguiente condición:*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = t^p, t > 0. \quad (2.12)$$

En palabras, las funciones de variación lenta convergen a un cierto valor cuando  $x \rightarrow \infty$ . El crecimiento o decaimiento de las funciones de variación regular es controlada por el índice  $p$ . Respecto a la distribución Gumbel, una v. a. positiva cuya función de distribución está en el  $MDA(H_0)$ , donde  $H_0$  es una distribución Gumbel, siempre tiene momentos finitos (de cualquier orden). Es decir,  $E[X^k] < \infty$ , para toda  $k > 0$ . Los ejemplos de las distribuciones que forman parte de esta clase se pueden encontrar en McNeil et. al. (2005) [6]. Sobre la familia de distribuciones Weibull, la particularidad que tienen las distribuciones de esta clase, además de que tienen un valor máximo finito, es que se usan comúnmente para modelar riesgo de crédito. Sin embargo, para el riesgo de mercado no son tan adecuadas, por lo que no se profundiza en este tipo de distribuciones. Solamente se menciona una propiedad que poseen estas distribuciones, la cual se presenta en el siguiente teorema.

**Teorema 2 (Weibull MDA, Gnedenko).** Para  $\varepsilon < 0$ ,

$$F \in MDA(H_{\frac{1}{\varepsilon}}(x)) \iff x_F < \infty, \bar{F}(x_F - x^{-1}) = x^{\frac{1}{\varepsilon}} L(x).$$

Donde  $x_F = \sup\{x : F(x) < 1\}$  y  $L$  es una función de variación lenta en  $\infty$ .

Uno de los supuestos que se hacen para estimar algún parámetro en términos de la muestra es la independencia de las observaciones. En las series de tiempo financieras los datos no son independientes. Para tratar de resolver el problema de no contar con observaciones independientes se puede tomar una submuestra a partir de la muestra original de tal manera que los elementos resultantes sean independientes. Sean  $X_1, \dots, X_N$  una muestra de pérdidas idénticamente distribuidas y  $X_1^*, \dots, X_P^*$  una muestra de elementos independientes obtenidos a partir de la original. Sean  $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ ,  $M_n^* = \max(X_1^*, \dots, X_n^*)$  las sucesiones de valores máximos de la serie original y de la muestra de elementos independientes e idénticamente distribuidos, respectivamente. En muchos procesos de series financieras se cumple el siguiente resultado (McNeil et. al. (2005) [6]):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{M_n^* - d_n}{c_n} \leq x\right) = H(x), \quad (2.13)$$

sí y sólo si  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{M_n - d_n}{c_n} \leq x\right) = H^\delta(x)$ , donde  $\delta$  se conoce como el índice extremo del proceso (el índice extremo es un coeficiente que representa qué tan dependientes son entre sí los elementos de la muestra, ver McNeil et. al. (2005) [6]),  $0 < \delta \leq 1$  y  $H$  es la FDP del valor extremo. Más aún, la sucesión de máximos por bloque  $M_n$  converge en distribución si la sucesión asociada  $M_n^*$  también converge, es decir,  $F \in MDA(H_\varepsilon(x))$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ . El parámetro de forma es el mismo para ambas series. Solamente lo que varían son los parámetros de localización y escala. Una forma de obtener una muestra de elementos independientes es a través del método de corridas (*runs*), el cual consiste en agrupar los excesos por medio de un conjunto de datos (corridas). Las corridas son el conjunto de pérdidas menores que el umbral  $u$ , que están juntos y el tamaño de esa corrida es de un valor mínimo. Una vez que ya se tiene la muestra de valores máximo independientes se pueden estimar los parámetros  $\varepsilon, \mu, \sigma$ . Un método para hacerlo es por máxima verosimilitud. La función de log verosimilitud es la siguiente:

$$\ln L(\varepsilon, \mu, \sigma \mid M_i, i = 1, \dots, m) = -m \ln \sigma - \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \sum_{i=1}^m \ln\left(1 + \varepsilon \frac{M_i - \mu}{\sigma}\right) - \sum_{i=1}^m \left(1 + \varepsilon \frac{M_i - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}} \quad (2.14)$$

sujeto a  $\sigma > 0$  y  $1 + \varepsilon \frac{M_i - \mu}{\sigma} > 0, i = 1, \dots, m$ .

De esta forma se estiman los parámetros de la distribución  $H_\varepsilon(x)$ . No se debe olvidar que se debe garantizar que  $F \in MDA(H_\varepsilon(x))$  mediante una prueba de bondad de ajuste. Dos variables a considerar en este método son el tamaño del bloque  $n$  y el número de bloques  $m$ . A mayor valor de  $n$  se tiene una mejor estimación de la distribución de  $M_n$  y un menor sesgo en los estimadores. Inclusive, es más probable tener una muestra de elementos independientes. Por otro lado, entre más grande sea  $m$  más pequeñas son las varianzas de los estimadores y se tiene un mayor número de datos sobre el valor máximo. El problema se encuentra en elegir estos valores, ya que de acuerdo al tamaño del bloque y número de bloques es la muestra que obtenemos. Es posible que se ignoren algunos elementos importantes en nuestro estudio. Asimismo, es complicado aproximar la distribución del valor máximo (McNeil et. al. (2005) [6]). Una mejor opción es emplear la teoría de picos sobre el umbral (POT) (por sus siglas en inglés), la cual se explica en la siguiente sección.

### Modelo de picos sobre el umbral (POT)

En esta sección se presenta otra alternativa de modelar valores máximos que puede tomar una variable aleatoria  $X$  con cierta distribución  $F$ . En contraste con el método de máximo por bloques el modelo POT se basa en describir la distribución de valores de  $X$  que exceden cierto umbral  $u$ . Se les llaman excedentes a aquellos valores del dominio de  $X$  que sean mayores que  $u$ . En finanzas,  $X$  representa la pérdida de un portafolio de inversión en cierto instante de tiempo. La distribución de los excedentes, la cual se denota por  $F_u(x)$ , está definida por:

$$F_u(x) = P(X \leq x \mid X > u) = \frac{F(x) - F(u)}{1 - F(u)}, u < x < x_F, \quad (2.15)$$

donde  $x_F = \sup \{x \mid F(x) < 1\}$ . Sean  $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$  y  $y$  la diferencia entre el valor  $x$  que excede el umbral y  $u$  ( $y$  es el exceso), es decir,  $y = x - u$ . La distribución acumulada se puede escribir como:

$$F_u(y) = P(X - u \leq y \mid X > u) = \frac{F(u + y) - F(u)}{\bar{F}(u)}, 0 < y < x_F - u. \quad (2.16)$$

En el caso del riesgo de mercado  $x_F$  es infinito por lo que el dominio de la distribución de los excesos se reduce a  $0 < y$ .  $F$  es una distribución desconocida en la

práctica. Por el momento se analiza cómo modelar la distribución de los excesos. Más adelante se verá que a través de esta distribución se puede estimar la distribución subyacente  $F$  a partir de  $u$ . El teorema de Pickands-Balkema-de-Haan explica acerca de la distribución  $F_u(y)$ .

**Teorema 3 (Pickands-Balkema-de-Haan)** *Para una función de distribución  $F$  y un umbral  $u$  se puede encontrar una función positiva medible  $\beta(u)$  tal que:*

$$\lim_{u \rightarrow x_F} \sup |F_u(y) - G_{\varepsilon, \beta(u)}(y)| = 0, \quad (2.17)$$

si y sólo si  $F \in MDA(H_\varepsilon(x))$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ .

Lo que dice el teorema es que conforme el tamaño del umbral se aproxime a  $x_F$  (donde  $x_F$  es el punto extremo derecho) los excesos convergen, en distribución, a una Distribución Pareto Generalizada (GPD) denotada por  $G_{\varepsilon, \beta(u)}$ . La GPD está definida por:

$$G_{\varepsilon, \beta}(y) = \begin{cases} 1 - (1 + \varepsilon \frac{y}{\beta})^{-\frac{1}{\varepsilon}}, & \varepsilon \neq 0, \\ 1 - \exp(-\frac{y}{\beta}), & \varepsilon = 0, \end{cases} \quad (2.18)$$

donde  $y \geq 0$  si  $\varepsilon \geq 0$  y  $0 \leq y \leq -\frac{\beta}{\varepsilon}$  si  $\varepsilon < 0$  y en ambos casos  $\beta > 0$ . Una propiedad que comparte esta distribución con la función de distribución de probabilidad del método de máximo por bloques es la continuidad de  $G_{\varepsilon, \beta}(y)$  en  $\varepsilon = 0$  para  $y$  fijo. El valor esperado de una GPD, para  $\varepsilon < 1$ , es:

$$E[Y] = \frac{\beta}{1 - \varepsilon}. \quad (2.19)$$

Para  $\varepsilon \geq 1$  el valor esperado de  $Y$  es infinito (McNeil et. al. (2005) [6]). Aún más, para el caso de una GPD con  $\varepsilon > 0$ ,  $E[X^k] = \infty$  para toda  $k \geq \frac{1}{\varepsilon}$ . Los parámetros  $\varepsilon$  y  $\beta$  son de forma y escala, respectivamente. El parámetro  $\varepsilon$  representa el decaimiento de la cola de la distribución  $F$ . En la práctica, se presupone que los excesos se modelan mediante una Distribución Pareto Generalizada (GPD). Los parámetros de la distribución se deben estimar. Si se estiman por máxima verosimilitud se utiliza una muestra de excesos  $Y_1, \dots, Y_{N_u}$  i.i.d., donde  $N_u$  es el tamaño de muestra de los excesos de la muestra original que sobrepasa el umbral  $u$ . En este caso, la función de log-verosimilitud resulta ser la siguiente:

$$\ln L(\varepsilon, \beta | y_i, i = 1, \dots, N_u) = -N_u \ln \beta - (1 + \frac{1}{\varepsilon}) \sum_{i=1}^{N_u} \ln(1 + \varepsilon \frac{y_i}{\beta}), \quad (2.20)$$

y se maximiza con las siguientes restricciones:

$$\beta > 0, 1 + \varepsilon \frac{y_i}{\beta} > 0, i = 1, \dots, N_u. \quad (2.21)$$

Así, la estimación de la distribución  $F_u(y)$  es  $G_{\hat{\varepsilon}, \hat{\beta}}(y)$ . En finanzas, los excedentes no son independientes. Para ello se emplea el método de corridas. De cada cluster se elige el excedente más grande con el objetivo de obtener una nueva muestra de excedentes independientes.

En la modelación, se debe elegir un umbral adecuado de tal manera que se tenga una muestra suficiente de excesos y a su vez se garantice que éstos siguen una GPD. De otro modo si el umbral no es lo suficientemente grande suele ocurrir que una GPD no se ajuste a los datos. Por otra parte, si el umbral es demasiado grande el tamaño de muestra de los excesos es muy pequeño y la estimación de los parámetros es muy pobre. En el siguiente lema se muestra qué sucede si se elige otro umbral más alto, además de tener un tamaño de muestra más pequeño.

**Lema 1** *Bajo el Teorema de Pickands-Balkema-de-Haan, sea  $v$  otro umbral mayor que  $u$ . La distribución  $\bar{F}_v(y)$  también es Pareto generalizada con el mismo parámetro de forma pero con diferente parámetro de escala  $\beta(v) = \beta + \varepsilon(v - u)$ .*

El resultado del lema muestra que a partir de un umbral específico,  $u$ , la relación entre otro umbral más grande y el parámetro de escala es lineal. Una relación análoga se cumple entre el exceso esperado y dicho umbral ya que por el valor esperado de la GPD mostrado en la ecuación (2.19) y el valor de  $\beta(v)$  mostrado en el lema anterior se obtiene el siguiente resultado:

$$e(v) = E[Y] = \frac{\beta(v)}{1 - \varepsilon} = \frac{\beta + \varepsilon(v - u)}{1 - \varepsilon}. \quad (2.22)$$

Existen métodos, tanto gráficos como estadísticos, para elegir el umbral óptimo  $u$ . En McNeil et. al. (2005) [6] se propone el método gráfico del valor esperado *mean plot*. La gráfica del valor esperado consiste en graficar puntos de la forma  $(X_{(i)}, \hat{e}(X_{(i)}))$ , donde  $\hat{e}(X_{(i)})$  es el exceso promedio estimado dado el umbral  $X_{(i)}$  y  $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)}$  son los estadísticos de orden de la muestra  $X_1 \leq \dots \leq X_n$ . Si se grafican los puntos  $(X_{(i)}, \hat{e}(X_{(i)}))$ , de acuerdo a McNeil et. al. (2005) [6], se llega a observar que a partir de cierto valor  $X_{(j)}$  la relación entre el umbral  $X_{(i)}$  y el exceso esperado estimado  $\hat{e}(X_{(i)})$  se vuelve lineal. La justificación de esta metodología se basa en la ecuación (2.22) y el umbral óptimo es aquel valor  $X_{(j)}$  donde se aprecie

una relación lineal entre los estadísticos de orden y el exceso promedio estimado para valores mayores que  $X_{(j)}$ . El exceso promedio se calcula como:

$$\hat{e}(x_{(i)}) = \hat{E}[X - x_{(i)} \mid x_{(i)}] = \frac{\sum_{j=1}^n (x_j - x_{(i)}) I_{[x_j - x_{(i)} > 0]}(x_j)}{\sum_{j=1}^n I_{[x_j - x_{(i)} > 0]}(x_j)}, i = 1, \dots, n. \quad (2.23)$$

La GPD no sólo sirve para modelar la distribución de los excesos sino también la distribución  $F$  a partir del umbral  $u$ . Para  $X > u$ , la distribución de supervivencia  $\bar{F}$  se puede escribir como:

$$\bar{F}(x) = P(X > x) = P(X > u)P(X > x \mid X > u) = \bar{F}(u)\left(1 + \varepsilon \frac{x - u}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}}. \quad (2.24)$$

Para conocer el cuantil de orden  $1 - \alpha$ , al resolver para  $x$  en la ecuación  $\hat{F}(x) = \alpha$ , donde  $\hat{F}$  está dada en (2.24). Se obtiene:

$$x = u + \frac{\beta}{\varepsilon} \left[ \left( \frac{\alpha}{\bar{F}(u)} \right)^{-\varepsilon} - 1 \right]. \quad (2.25)$$

En particular,  $x$  estima el VaR al nivel de confianza  $1 - \alpha$ , es decir,  $V\hat{a}R_\alpha = x$ . El EVaR al mismo nivel  $1 - \alpha$  se calcula por definición y por la esperanza de la GPD. La estimación, para el EVaR, con el mismo nivel de confianza es:

$$E\hat{V}aR_\alpha = \frac{VaR_\alpha}{1 - \varepsilon} + \frac{\beta - \varepsilon u}{1 - \varepsilon}, \quad (2.26)$$

siempre que  $\varepsilon < 1$ . Para  $\varepsilon \geq 1$  no existe ningún momento central. En la práctica  $\varepsilon, \beta$  y  $\bar{F}(u)$  se reemplazan por sus respectivos estimadores.

A lo largo de este capítulo se han presentado diversas metodologías para estimar puntualmente el VaR y EVaR. En la siguiente sección se presentan y desarrollan procedimientos, paramétricos y no paramétricos, para construir intervalos de confianza.

## 2.2. Estimación por intervalos de confianza

Hasta ahora se han presentado estimaciones puntuales del VaR y el EVaR. Otra forma de realizar la estimación es a través de intervalos de confianza de tal manera que estos contengan al verdadero valor del parámetro de interés. Todos los intervalos o regiones de confianza (*IC*) son aquellos que contienen al verdadero parámetro  $\theta$  ( $\theta$  puede ser un vector o un escalar) con cierta probabilidad  $1 - \alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ :

$$P(\theta \in IC) = 1 - \alpha. \quad (2.27)$$

El coeficiente  $1 - \alpha$  representa la proporción de veces en un muestreo repetitivo que la región contiene a  $\theta$ . Un intervalo de confianza que estima el valor de un parámetro es de la forma  $[\hat{\theta}_{\alpha_1}, \hat{\theta}_{1-\alpha_2}]$  tal que  $P(\theta \leq \hat{\theta}_{\alpha_i}) = \alpha_i, i = 1, 2$ . Entonces, el intervalo contiene a  $\theta$  con probabilidad  $1 - \alpha_1 - \alpha_2$ . Existen distintos métodos para calcular el intervalo de confianza, entre ellos, los métodos Bootstrap, el de la razón de verosimilitud y el de muestreo repetitivo, los cuales se explicarán más adelante.

### 2.2.1. Métodos bootstrap

En esta sección se describen los métodos bootstrap para calcular intervalos de confianza tanto desde un enfoque paramétrico como desde un enfoque no paramétrico. Los intervalos de confianza se basan en estimar cuantiles de la distribución del estadístico en cuestión. Esencialmente los métodos Bootstrap consisten en generar submuestras aleatorias a partir de una muestra ya existente de datos  $Y_1, \dots, Y_n$ , los cuales provienen de una misma distribución  $F$  y son independientes. El proceso anteriormente descrito se conoce como remuestreo y se obtiene en forma directa o por medio de un modelo ajustado. Sea  $R$  el número de submuestras que se generan y se asume que todas ellas son de tamaño  $M$ . La  $j$ -ésima submuestra se denota por  $Y_1^{(j)}, \dots, Y_M^{(j)}$ . En cada una de las submuestras generadas se estima el parámetro deseado  $\theta$ , y así se obtiene una muestra  $\hat{\theta}_1^*, \dots, \hat{\theta}_R^*$  de réplicas del estimador del parámetro  $\theta$ .

La ventaja de esta técnica es que se puede implementar tanto en los casos con los que se cuente con un modelo probabilístico definido para los datos como para los casos en que no se cuente con ello. Aunque los métodos de remuestreo tienen sus desventajas, con estos métodos se logra tener una solución en forma rápida y fácil sin realizar muchos supuestos. Por otra parte, se puede emplear esta técnica para contrastar los resultados numéricos obtenidos analíticamente. Sin embargo, tiene sus errores que son del tipo estadístico y de simulación. El error estadístico se origina



al usar la función de distribución empírica (fde)  $\hat{F}$  cuando no se conoce  $F$ . El de simulación se refiere únicamente a los estimadores que se obtienen empíricamente. Existen dos tipos de estimaciones: la paramétrica y la no paramétrica. En la aproximación paramétrica se tiene un modelo particular con parámetros que especifican la función de densidad  $f$ . En la aproximación no paramétrica solamente se considera el hecho que las observaciones son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d.). La teoría sobre los métodos de estimación por intervalos por medio de los métodos Bootstrap se pueden consultar en Nuñez-Antonio (1999) [8] y Davison y Hinkley (1997) [3].

El primer paso para construir intervalos de confianza es determinar la distribución que sigue el correspondiente estimador de  $\theta$ ,  $\hat{\theta}$ . Dada la distribución, los límites de confianza están en términos de los cuantiles de dicha distribución de  $\hat{\theta}$ . En el presente capítulo los cuantiles de la distribución del estimador  $\hat{\theta}$  se expresan en términos del error de estimación  $\hat{\theta} - \theta$  debido a lo siguiente:  $\hat{\theta}$  no necesariamente es un estimador insesgado. Sea  $b$  el sesgo del estimador  $\hat{\theta}$ , entonces  $b = E[\hat{\theta}] - \theta$ . La ventaja de emplear el método Bootstrap es que a través de las réplicas del estimador  $\hat{\theta}$  se puede estimar  $b$ , es decir:

$$b_R = \hat{E}[\hat{\theta}] - \hat{\theta}_0 = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \hat{\theta}_r^* - \hat{\theta}_0, \quad (2.28)$$

donde  $b_R$  es el estimador Bootstrap de  $b$  y  $\hat{\theta}_0$  es el estimador puntual de  $\theta$ . Por la Ley Fuerte de los Números Grandes,  $b_R$  converge a  $b$  casi seguramente. Por lo tanto, si el estimador se puede describir como  $\hat{\theta}_0 - (\hat{\theta} - \hat{\theta}_0)$  y si calculamos la media muestral de las réplicas  $\hat{\theta}_0 - (\hat{\theta}_1^* - \hat{\theta}_0), \dots, \hat{\theta}_0 - (\hat{\theta}_R^* - \hat{\theta}_0)$  como  $\hat{\theta}_0 - (\hat{E}[\hat{\theta}] - \hat{\theta}_0) = \hat{\theta} - b_R$  entonces la diferencia  $\hat{\theta} - b_R$  converge a  $\hat{\theta} - b$ . Si  $b = E[\hat{\theta}] - \theta$  entonces  $E[\hat{\theta} - b] = E[\hat{\theta} - (E[\hat{\theta}] - \theta)] = E[\hat{\theta}] - E[\hat{\theta}] + \theta = \theta$ , es decir,  $\hat{\theta} - b_R$  es un estimador asintóticamente insesgado. El intervalo de confianza al  $(1 - \alpha) \times 100\%$  de  $\theta$  es:

$$(\hat{\theta}_0 - (\hat{\theta}_{[(R+1)(1-\alpha)]} - \hat{\theta}_0), \hat{\theta}_0 - (\hat{\theta}_{[(R+1)\frac{\alpha}{2}]} - \hat{\theta}_0)), \quad (2.29)$$

donde  $\hat{\theta}_{[(R+1)(1-\alpha)]} - \hat{\theta}_0$  y  $\hat{\theta}_{[(R+1)\frac{\alpha}{2}]} - \hat{\theta}_0$  son los cuantiles  $1 - \frac{\alpha}{2}$  y  $\frac{\alpha}{2}$  de la distribución de  $\hat{\theta} - \hat{\theta}_0$ ,  $R$  es un valor tal que  $(R+1)(1-\alpha)$  y  $(R+1)\frac{\alpha}{2}$  sean enteros (ver Davison y Hinkley (1997) [3]).  $R$  no tiene ninguna restricción, solamente se recomienda que sea mayor que 100 para contener con mayor seguridad al verdadero valor del parámetro. Los límites de confianza anteriores se conocen como límites Bootstrap. Otra forma de obtener el intervalo de confianza es a través de varias réplicas de  $\hat{\theta}$ . Sean  $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_R$

y  $\hat{\sigma}_1^2, \dots, \hat{\sigma}_R^2$  dos muestras de estimadores de  $\theta$  y de la varianza del estimador  $\hat{\theta}$ , respectivamente, obtenidas de diferentes muestras simuladas  $Y_1^j, \dots, Y_M^j, j = 1, \dots, R$  de la muestra original  $Y_1, \dots, Y_n$  con distribución  $F$  a través del remuestreo. Con ambas muestras (de estimadores puntuales) se genera una tercera,  $Z_1, \dots, Z_R$ , donde  $Z_j = \frac{\hat{\theta}_j - \theta}{\hat{\sigma}_j}, j = 1, \dots, R$  es un réplica Bootstrap estandarizada. El intervalo se construye en términos de los cuantiles de la función de distribución empírica de la m. a. de las observaciones  $Z_i$ 's.

$$(\hat{\theta}_0 - \hat{\sigma} Z_{[(R+1)(1-\frac{\alpha}{2}]}, \hat{\theta}_0 - \hat{\sigma} Z_{[(R+1)\alpha]}), \quad (2.30)$$

donde  $\hat{\sigma}$  es un estimador puntual de la varianza del estimador  $\hat{\theta}$ . Una vez que se han presentado las diferentes formas para calcular los intervalos de confianza de  $\theta$  se explica bajo qué condiciones el Bootstrap proporciona estimaciones adecuadas. Suponga que se tiene una muestra de datos  $Y_1, \dots, Y_n$  con distribución  $F$  y se desea conocer las propiedades del estimador  $Q = q(Y_1, \dots, Y_n | F)$ . Sea  $G_F(q) = P(Q \leq q | F)$  la función de distribución de  $Q$ . Si  $F$  no se conoce,  $G_F(q)$  se reemplaza por  $G_{\hat{F}}(q)$ . Si  $G_{\hat{F}}(q)$  converge a  $G_F(q)$  conforme el tamaño de muestra tiende a infinito, entonces el método Bootstrap es consistente. Sea  $\mathcal{N}$  un espacio de distribuciones. Se espera que la verdadera distribución  $F$  esté contenida dentro de una vecindad, la cual está contenida en  $\mathcal{N}$ . Cuando  $n$  tiende a infinito se espera que  $\hat{F}$  esté en  $\mathcal{N}$  con probabilidad 1.

Para que ocurra la convergencia deben cumplirse las siguientes condiciones (ver Davison y Hinkley (1997) [3]):

- Para toda  $A \in \mathcal{N}$ ,  $G_{A,n}$  converge débilmente a  $G_{A,\infty}$ , es decir, cuando  $n \rightarrow \infty$   $\int h(u) dG_{A,n}(u) \rightarrow \int h(u) dG_{A,\infty}(u)$  para toda función integrable  $h(u)$ .
- La convergencia anterior debe ser uniforme en  $\mathcal{N}$ .
- La función de mapeo de  $A$  en  $G_{A,\infty}$  debe ser continua.

Si se cumplen las 3 condiciones anteriores, entonces el método Bootstrap es consistente. En la siguiente sección se ilustran diversas formas de calcular intervalos de confianza a través de los métodos de remuestreo. Los métodos se pueden consultar en Davison y Hinkley (1997) [3].

### Enfoque paramétrico

Suponga que  $T$  es un estimador de  $\theta$ , el cual es un parámetro desconocido. Se desea tener un intervalo de confianza para  $\theta$  al  $(1 - \alpha) \times 100\%$ . El estadístico  $T$  se

asume que es continuo por simplicidad. En general se trabaja con la distribución de  $T - \theta$ . Los intervalos de confianza se basan en aproximaciones a los cuantiles de la fda de  $T - \theta$ . Sea  $a_\alpha$  el cuantil de la distribución de  $T - \theta$  de orden  $\alpha$  ( $P(T - \theta \leq a_\alpha) = \alpha$ ). Se despeja  $\theta$  de las desigualdades  $T - \theta \leq a_{\frac{\alpha}{2}}$  y  $T - \theta \geq a_{1 - \frac{\alpha}{2}}$ . Por lo tanto, el intervalo de confianza al  $(1 - \alpha) \times 100\%$  para  $\theta$  es de la forma:

$$(\hat{\theta}_{\frac{\alpha}{2}} = t - a_{1 - \frac{\alpha}{2}}, \hat{\theta}_{1 - \frac{\alpha}{2}} = t - a_{\frac{\alpha}{2}}), \quad (2.31)$$

o equivalentemente,

$$(\hat{\theta}_{\frac{\alpha}{2}} = t - (T_{1 - \frac{\alpha}{2}} - \theta), \hat{\theta}_{1 - \frac{\alpha}{2}} = t - (T_{\frac{\alpha}{2}} - \theta)), \quad (2.32)$$

donde  $t$  es un estimador puntual de  $\theta$ . A continuación se explican los siguientes métodos basados en la expresión (2.31) para calcular los límites de confianza.

### Método bootstrap básico

En este método los cuantiles  $a_{\frac{\alpha}{2}}$  y  $a_{1 - \frac{\alpha}{2}}$  se estiman a través de los cuantiles de la distribución de  $T^* - t$ , donde  $t$  es el estimador puntual de  $\theta$  y  $T^*$  es una réplica del estimador del parámetro  $\theta$ . Se asume que se obtienen por medio del remuestreo de distintos valores  $t_1^*, \dots, t_R^*$  del estimador  $t$ . En el método bootstrap básico el intervalo de confianza tiene la siguiente estructura:

$$(\hat{\theta}_{\frac{\alpha}{2}} = t - (t_{((R+1)(1 - \frac{\alpha}{2}))}^* - t), \hat{\theta}_{1 - \frac{\alpha}{2}} = t - (t_{((R+1)(\frac{\alpha}{2}))}^* - t)). \quad (2.33)$$

La forma en que se obtiene el intervalo (2.33) parte de la misma idea en que se obtuvo el intervalo (2.32). Los subíndices encerrados entre paréntesis indican en qué posición de la muestra ordenada se toman los valores correspondientes.

### Método bootstrap studentizado

Sean  $T$  el estimador del parámetro desconocido  $\theta$  y  $v$  la varianza del estimador de  $T$ . Se define otro estadístico,  $Z$ , como  $Z = \frac{T - \theta}{\sqrt{v}}$ . Por la técnica de remuestreo, para cada muestra simulada se calcula  $t^*$ , la varianza estimada  $v^*$ , y finalmente  $z^* = \frac{T^* - t}{\sqrt{v^*}}$ , donde  $z^*$  es una réplica de  $Z$ . Al igual que en el método bootstrap básico, se reemplaza  $T - \theta$  por  $T^* - t$ . Los valores simulados  $z_1^*, \dots, z_R^*$  se ordenan en forma creciente y el cuantil de orden  $p$  de la verdadera distribución se estima por  $z_{(R+1)p}^*$ . Los intervalos de confianza se representan de la siguiente manera y se denominan límites de confianza bootstrap studentizados:

$$(\hat{\theta}_{\frac{\alpha}{2}} = t - \sqrt{v}z_{((R+1)(1-\frac{\alpha}{2}))}^*, \hat{\theta}_{1-\frac{\alpha}{2}} = t - \sqrt{v}z_{((R+1)(\frac{\alpha}{2}))}^*). \quad (2.34)$$

## Enfoque no paramétrico

### Método bootstrap básico

En el método bootstrap básico los intervalos de confianza se calculan como en el modelo paramétrico. La diferencia es la forma en que se simulan los valores  $t^*$ . En este caso se utiliza la función de distribución empírica.

### Método bootstrap studentizado

El procedimiento que sigue esta metodología, con respecto al caso parametrizado, cambia únicamente por la varianza  $v$  en cuanto a la forma de calcular. Se reemplaza  $v$  por  $v_L$ .  $v_L$  es el estimador de la varianza de  $\hat{\theta}$  por medio del método delta y está definido por:

$$v_L = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n l^2(Y_j^*, \hat{F}^*), \quad (2.35)$$

donde  $l^2(Y_j^*, \hat{F}^*)$  es el valor de la influencia empírica evaluada en la muestra generada  $Y_j^*$ 's y en su correspondiente función de distribución empírica  $\hat{F}^*$ . La función de influencia se define como (ver Davison y Hinkley (1997) [3]):

$$L_t(y, F) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{t((1-\varepsilon)F + \varepsilon H_y) - t(F)}{\varepsilon}, \quad (2.36)$$

donde  $H_y(u) = H(u-y)$  es la función de Heaviside. La aproximación de la expresión (2.36) se denomina como  $l(y) = L_t(y, \hat{F})$ . Esta aproximación es lo que se conoce como la función de influencia empírica (ver Davison y Hinkley (1997) [3]). Asimismo, para cada submuestra, además de calcular el estimador  $t^*$ , se calcula  $v_L^*$  en términos de los valores influenciados de las submuestras (ver Davison y Hinkley (1997) [3]). Se observa que en la ecuación (2.35),  $\hat{F}^*$  varía de submuestra a submuestra. Es por ello que en la expresión (2.35) la función de influencia empírica no es fija. La transformación del parámetro y del estimador se realiza como se describió en el mismo método con el enfoque paramétrico con la diferencia que  $v$  se sustituye por  $v_L$ .

### Método del percentil básico

En la aproximación normal se asume que el estimador sigue una distribución normal, en el método bootstrap básico se trabaja con la distribución  $T^* - t$  mientras que el studentizado hace una transformación específica. En el método del percentil básico se emplea una transformación monótona. Sin embargo, no está especificada. Sean  $T$  el estimador del parámetro  $\theta$ ,  $h$  la transformación citada arriba y  $U = h(T)$  el estimador transformado cuya distribución es simétrica. Se asume que se conoce  $h$  y al parámetro original se le aplica la transformación, es decir,  $\phi = h(\theta)$ . Por el método bootstrap básico y por la simetría de la distribución de  $U$ ,

$$u_{((R+1)\frac{\alpha}{2})}^* - u, u_{((R+1)(1-\frac{\alpha}{2}))}^* - u. \quad (2.37)$$

Ambos se reemplazan, respectivamente, por:

$$u - u_{((R+1)(1-\frac{\alpha}{2}))}^*, u - u_{((R+1)\frac{\alpha}{2})}^*, \quad (2.38)$$

Además,  $u - (u - u_{((R+1)(1-\frac{\alpha}{2}))}^*) = u_{((R+1)(1-\frac{\alpha}{2}))}^*$ ,  $u - (u - u_{((R+1)\frac{\alpha}{2})}^*) = u_{((R+1)\frac{\alpha}{2})}^*$ . Se aplica la transformación inversa,  $h^{-1}(U) = T$ , y así tenemos los límites de confianza  $t_{((R+1)\frac{\alpha}{2})}^*$  y  $t_{((R+1)(1-\frac{\alpha}{2}))}^*$  para  $\theta$ .

## 2.2.2. Otros métodos para calcular intervalos de confianza

### Aproximación normal

De todas las aproximaciones ésta es la más simple de obtener. Consiste en asumir que  $T - \theta$  se distribuye normal  $N(0, v)$ . Con base en este supuesto los intervalos de confianza son de la forma:

$$(\hat{\theta}_{\frac{\alpha}{2}}, \hat{\theta}_{1-\frac{\alpha}{2}}) = (t - \sqrt{v}z_{1-\frac{\alpha}{2}}, t + \sqrt{v}z_{1-\frac{\alpha}{2}}), \quad (2.39)$$

donde  $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  es el cuantil de la distribución normal estándar de orden  $1 - \frac{\alpha}{2}$ . Si  $T$  es un estimador obtenido por máxima verosimilitud (MV), la varianza  $v$  también se estima por ese mismo método. Además de la varianza también se puede estimar el sesgo (en general los estimadores no son insesgados). Si  $v_R$  y  $b_R$  son la varianza y el sesgo estimados, respectivamente, entonces los límites de confianza modificados resultan ser:

$$(\hat{\theta}_{\frac{\alpha}{2}}, \hat{\theta}_{1-\frac{\alpha}{2}}) = (t - b_R - \sqrt{v_R}z_{1-\frac{\alpha}{2}}, t - b_R + \sqrt{v_R}z_{1-\frac{\alpha}{2}}). \quad (2.40)$$

Cabe resaltar que esta aproximación se puede emplear siempre y cuando se garantice que la distribución de  $T - \theta$  es normal, lo cual en la mayoría de los casos no se cumple.

### Método de la razón de máxima verosimilitud

Cuando se emplea la estimación por Máxima Verosimilitud (MV) se puede derivar de ahí el cálculo del intervalo de confianza de cierto parámetro. Sea  $\theta$  el parámetro desconocido. Los intervalos de confianza se calculan a partir de la tasa de log-verosimilitud, la cual es un estadístico de prueba utilizada para probar si el parámetro  $\theta$  tiene cierto valor  $\theta_0$  (hipótesis nula). El estadístico de la prueba de log-verosimilitud está definido por la ecuación:

$$w(\theta) = 2[l(\hat{\theta}) - l(\theta)]. \quad (2.41)$$

Donde  $l(\theta)$  es la función de log-verosimilitud. El estadístico  $w(\theta)$  se distribuye aproximadamente Ji-cuadrada con un grado de libertad si  $\theta$  es un escalar. Una región de confianza del  $(1 - \alpha) \times 100\%$  para  $\theta$  está dada por:

$$C_{1-\alpha} = \{\theta : w(\theta) \leq q_{1,1-\alpha}\}, \quad (2.42)$$

aquí  $q_{1,1-\alpha}$  es el cuantil de una Ji-cuadrada con un grado de libertad de orden  $1 - \alpha$  bajo el supuesto que la hipótesis nula de la prueba de la tasa de verosimilitud sea verdadera. De hecho, la región de confianza (2.42) es aquella donde no se rechaza dicha hipótesis a un nivel de significancia  $\alpha$ . En contraste con la aproximación normal, este intervalo es asimétrico. Además, no necesariamente tiene que ser un solo intervalo. Como caso particular, cuando se tiene un vector de parámetros de la forma  $(\theta, \lambda)$  y se estima  $\theta$  por MV, la región de confianza se calcula si se reemplaza  $l(\theta)$  por  $l_1(\theta) = \sup_{\lambda} l(\theta, \lambda)$ , donde  $\lambda$  es el vector de los otros parámetros y  $l_1(\theta)$  es la función de verosimilitud de perfiles.

### Muestreo repetitivo

En la aproximación de varianza-covarianza vista en la Sección 2.1.1 se asume que la pérdida en el valor del portafolio  $L$  se distribuye normal con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ . Sin embargo, en la aplicación éstos se desconocen. Por ello no es suficiente dar una estimación puntual bajo la aproximación mencionada. En el presente trabajo se propone un método, el cual se le llamó Muestreo repetitivo que consiste en generar varias muestras de variables aleatorias normales con media y varianza estimadas a

través de una muestra. Esto es, bajo el supuesto de normalidad de la aproximación varianza-covarianza. Sea  $L_1^{(j)}, \dots, L_M^{(j)}, j = 1, \dots, R$  la  $j$ -ésima muestra aleatoria donde  $R$  es el número de muestras generadas y  $M$  es el tamaño de cada muestra. Para cada muestra se estiman el VaR y el EVaR por lo que se tiene una muestra de distintos valores del VaR,  $VaR_1, \dots, VaR_R$ , y otra de distintos valores del EVaR,  $EVaR_1, \dots, EVaR_R$ . A partir de la distribución de la muestra de valores del VaR estimado se obtiene un intervalo de confianza al  $(1 - \alpha) \times 100\%$  para el VaR.

El intervalo de confianza para el VaR se puede escoger de diversas formas, siempre y cuando contenga al verdadero valor del VaR con probabilidad  $1 - \alpha$ . Una forma para seleccionarlo es graficar un histograma de la muestra  $VaR_1, \dots, VaR_R$  con el objetivo de observar si una distribución normal se ajusta a la muestra obtenida. Entonces se procede a aplicar la prueba de Shapiro-Wilk a la muestra mencionada y en caso de que no se rechace el supuesto de normalidad se toman sus cuantiles empíricos de ordenes  $\frac{\alpha}{2}$  y  $1 - \frac{\alpha}{2}$  para construir el intervalo de confianza para el VaR. El procedimiento para construir el intervalo de confianza para el EVaR es análogo al anterior. En el siguiente Capítulo se aplican las metodologías vistas en este capítulo a tres portafolios de inversión y se emplean dos de las pruebas de hipótesis explicadas en el anexo del presente trabajo.





# Capítulo 3

## Aplicación a portafolios de inversión

En el presente capítulo se ilustran las metodologías y los conceptos vistos en los capítulos anteriores a tres portafolios. En la Sección 3.1 se analiza el primer portafolio que está compuesto por 5 acciones. En la Sección 3.2 se analiza el segundo compuesto por las mismas acciones más el tipo de cambio FIX peso/dólar. En la Sección 3.3 se analiza el tercero que está conformado por 3 bonos gubernamentales. Uno de ellos es a 28, otro a 91 y el último a 182 días. En las siguientes secciones se presenta un análisis de cada uno de los portafolios mencionados. Particularmente, se obtienen estimaciones puntuales y por intervalo del VaR y el EVaR a un día y con un monto de inversión de un peso para cada portafolio.

### 3.1. Portafolio de acciones

En esta sección se analiza una cartera de inversión conformada por acciones de las empresas Grupo ICA, Grupo Mexicano de Desarrollo (GMD), Cementos Mexicanos (CEMEX), desarrolladora HOMEX y Grupo Carso del sector de la industria y del subsector de la construcción, que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV). Las cinco empresas se eligieron del mismo sector con el fin de conseguir que los rendimientos de sus acciones estuvieran correlacionados. Por otra parte, en los últimos años el gobierno ha recurrido a estas empresas con el fin de mejorar la infraestructura de nuestro país. Además, los valores de sus acciones han servido de referencia para especular si habrá o no recesión económica. Se obtuvieron precios diarios de cada una de sus acciones del 1 de enero de 2009 al 31 de diciembre de 2013. De sus respectivos precios se calcularon sus rendimientos diarios como:

$$R_{i,t} = \ln\left(\frac{V_{i,t}}{v_{i,t-1}}\right), \quad (3.1)$$

donde  $v_{i,t-1}$  y  $V_{i,t}$  son los precios de la acción  $i$  en los días  $t - 1$  y  $t$ , respectivamente y  $R_{i,t}$  es el rendimiento de la acción  $i$  en el día  $t$ .

En la segunda cartera, además de estas 5 acciones, se incluyó el tipo de cambio FIX peso/dólar. Como se comentó al inicio de la tesis, el precio peso/dólar se puede considerar como si fuera una acción más por lo que el análisis del segundo portafolio de inversión se realiza como si se tuvieran 6 acciones. El periodo de datos que se tomó del FIX fue exactamente el mismo que el de las acciones. En la Figura 3.1 se muestran las gráficas del comportamiento histórico de los rendimientos de cada una de las acciones y del precio peso/dólar. Posteriormente en las Tablas 3.1 y 3.2 se muestran los rendimientos promedio y la matriz de varianza covarianza estimados de los rendimientos del portafolio de acciones para el primer portafolio analizado, respectivamente.

Tabla 3.1: *Rendimiento promedio diario de cada una de las acciones.*

Acción	ICA	GMD	CEMEX	HOMEX	GCARSO
Rend. prom.	$9.2028 \times 10^{-5}$	$-3.4177 \times 10^{-4}$	$8.45 \times 10^{-5}$	$-2.3887 \times 10^{-3}$	$1.0205 \times 10^{-3}$

Tabla 3.2: *Matriz de varianza-covarianza de los rendimientos diarios de las acciones.*

Acción	ICA	GMD	CEMEX	HOMEX	GCARSO
ICA	$5.0041 \times 10^{-4}$	$2.6922 \times 10^{-5}$	$3.4413 \times 10^{-4}$	$3.1459 \times 10^{-4}$	$1.7108 \times 10^{-4}$
GMD	$2.6922 \times 10^{-5}$	$2.8842 \times 10^{-3}$	$6.3159 \times 10^{-5}$	$-7.2274 \times 10^{-6}$	$9.8096 \times 10^{-5}$
CEMEX	$3.4413 \times 10^{-4}$	$6.3159 \times 10^{-5}$	$8.9848 \times 10^{-4}$	$4.1421 \times 10^{-4}$	$2.5173 \times 10^{-4}$
HOMEX	$3.1459 \times 10^{-4}$	$-7.2274 \times 10^{-6}$	$4.1421 \times 10^{-4}$	$1.5468 \times 10^{-3}$	$1.9557 \times 10^{-4}$
GCARSO	$1.7108 \times 10^{-4}$	$9.8096 \times 10^{-5}$	$2.5173 \times 10^{-4}$	$1.9557 \times 10^{-4}$	$5.0656 \times 10^{-4}$

Como se puede notar en la Tabla 3.1 la acción de Grupo Carso es la que da un mayor rendimiento esperado por lo que en principio da pauta a que el mayor porcentaje del monto esté destinado a esta acción mientras que se invierta menos capital

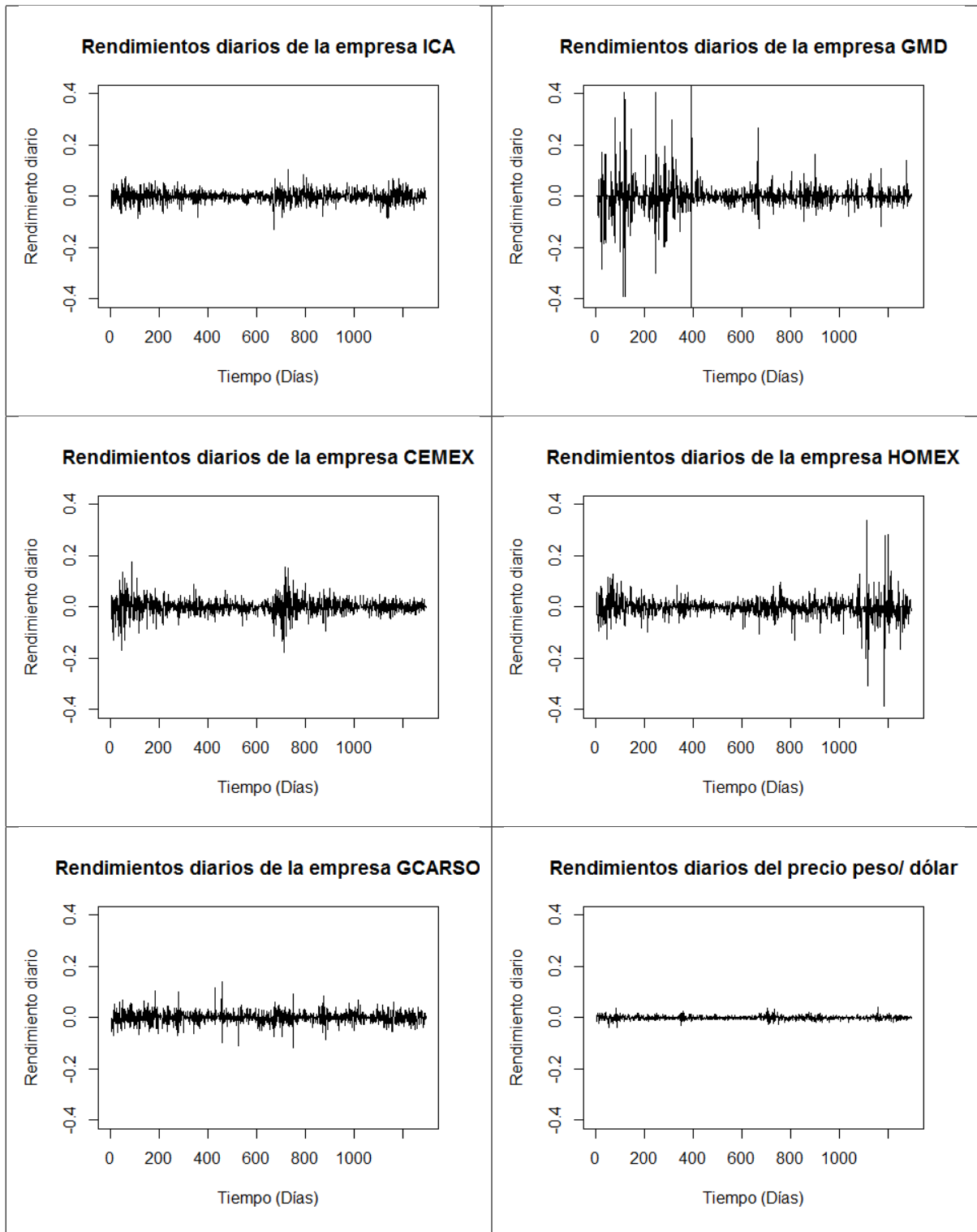


Figura 3.1: Rendimientos diarios de cada una de las acciones y del precio peso/ dólar para el primer portafolio analizado.

en las acciones de las empresas GMD y HOMEX puesto que tienen rendimiento promedio negativo. Sin embargo, es importante considerar también la volatilidad del rendimiento de cada activo. Las gráficas indican que hay una mayor discrepancia en los rendimientos de las acciones GMD y HOMEX y de CEMEX, en menor magnitud. En el caso de la acción HOMEX los cambios se notan más drásticos en los últimos días del periodo analizado. Este comportamiento refleja la posibilidad que la empresa esté en un periodo de gran volatilidad. Finalmente, los rendimientos de las acciones ICA y GCARSO tienen poca variabilidad aunque en algunos días, no seguidos, hubo cambios relativamente importantes. Ahora se contrastan las observaciones anteriores con las estimaciones de las varianzas y covarianzas de los rendimientos. La acción cuyo rendimiento presenta menor volatilidad es la de Grupo ICA, en segundo y tercer lugar, respectivamente, corresponden a las acciones del Grupo CARSO y CEMEX cada una del orden de  $10^{-4}$ . Las otras dos acciones tienen una varianza del orden de  $10^{-3}$ . Por las magnitudes en las varianzas de cada acción, a las acciones ICA y GCARSO se les debe dar mayor peso en comparación con el resto de las acciones debido a que se busca construir un portafolio con un mayor rendimiento esperado y una menor volatilidad. Con la solución del problema de Markowitz, con estos datos, se confirma la recomendación anterior.

### 3.1.1. Modelo de Markowitz

Con el vector de rendimientos esperado y la matriz de varianza-covarianza mostrados en las Tablas 3.1 y 3.2 se implementó el método de Markowitz. El problema de optimización de portafolios consiste en minimizar la varianza del portafolio de inversión. Una de las restricciones es que el rendimiento promedio del portafolio tenga cierto valor  $r^*$ . El rendimiento esperado,  $r^*$ , debe ser consistente de tal forma que se esperen ganancias. Además debe estar entre el mínimo y el máximo de los rendimientos esperados de cada una de las acciones mostrados en la Tabla 3.1. Se propone que sea del 5% anual, es decir,  $r^* = \frac{0.05}{360}$  es el rendimiento esperado diario. Se asume que se permiten las ventas en corto. El portafolio óptimo se muestra en la Tabla 3.3.

Tabla 3.3: Vector de pesos óptimo de Markowitz para el portafolio de acciones construido.

Acción	ICA	GMD	CEMEX	HOMEX	GCARSO
$w_i$	0.4057	0.0948	0.0379	0.0997	0.3616

Los pesos dados en la Tabla 3.3 están en el intervalo abierto  $(0, 1)$ . Ésto significa que no se requiere pedir prestado capital para lograr tener una menor volatilidad con el rendimiento esperado dado. Las acciones que tienen los pesos más altos pertenecen a las empresas ICA y grupo CARSO con 0.4057 y 0.3616, respectivamente. Se nota que más de la mitad del capital se invierte en estos dos activos. La solución que se obtuvo es concisa puesto que es razonable invertir una proporción grande en el activo cuyo rendimiento esperado sea alto y que además, su volatilidad sea chica. En la siguiente sección se analiza el supuesto de normalidad en los rendimientos de las acciones y del precio peso/dólar FIX.

### 3.1.2. Validación del supuesto de normalidad y distribución $t$ de Student

En el método de varianza-covarianza presentado en la Sección 2.1.1, se supone que la distribución que siguen las pérdidas de un portafolio de inversión es normal. También, en la simulación Monte Carlo, para un portafolio de acciones, se asume que los rendimientos son normales. En este trabajo se emplea la prueba de normalidad de Shapiro-Wilk puesto que no se requiere del conocimiento de los valores de los parámetros y es eficiente aún con tamaños de muestra pequeños. En la Tabla 3.4 se registran los valores  $p$  de las pruebas de normalidad para los rendimientos de cada acción. Las respectivas gráficas Q-Q se presentan en la Figura 3.2. Se aprecia que todos los valores  $p$  son demasiado pequeños por lo que para cualquier nivel de significancia que se proponga (0.01, 0.05, etc.) se rechaza el supuesto que los rendimientos de las acciones y del tipo de cambio FIX peso/dólar siguen una distribución normal. Esto se refleja también en la discrepancia en las colas de la distribución empírica y teórica en cada gráfica.

Tabla 3.4: Valores  $p$  de las pruebas de normalidad de Shapiro-Wilk para los rendimientos de las acciones y del tipo de cambio.

Activo	ICA	GMD	CEMEX	HOMEX	GCARSO	FIX
valor $p$	$2.2 \times 10^{-16}$	$2.2 \times 10^{-16}$	$2.2 \times 10^{-16}$	$2.2 \times 10^{-16}$	$2.2 \times 10^{-16}$	$2.2 \times 10^{-16}$

En el Capítulo 1 se comentó que la volatilidad no es una medida de riesgo coherente. Sin embargo, más adelante se ilustra que el método de Markowitz propone a la volatilidad como una medida de riesgo tiene un impacto financiero en la estima-

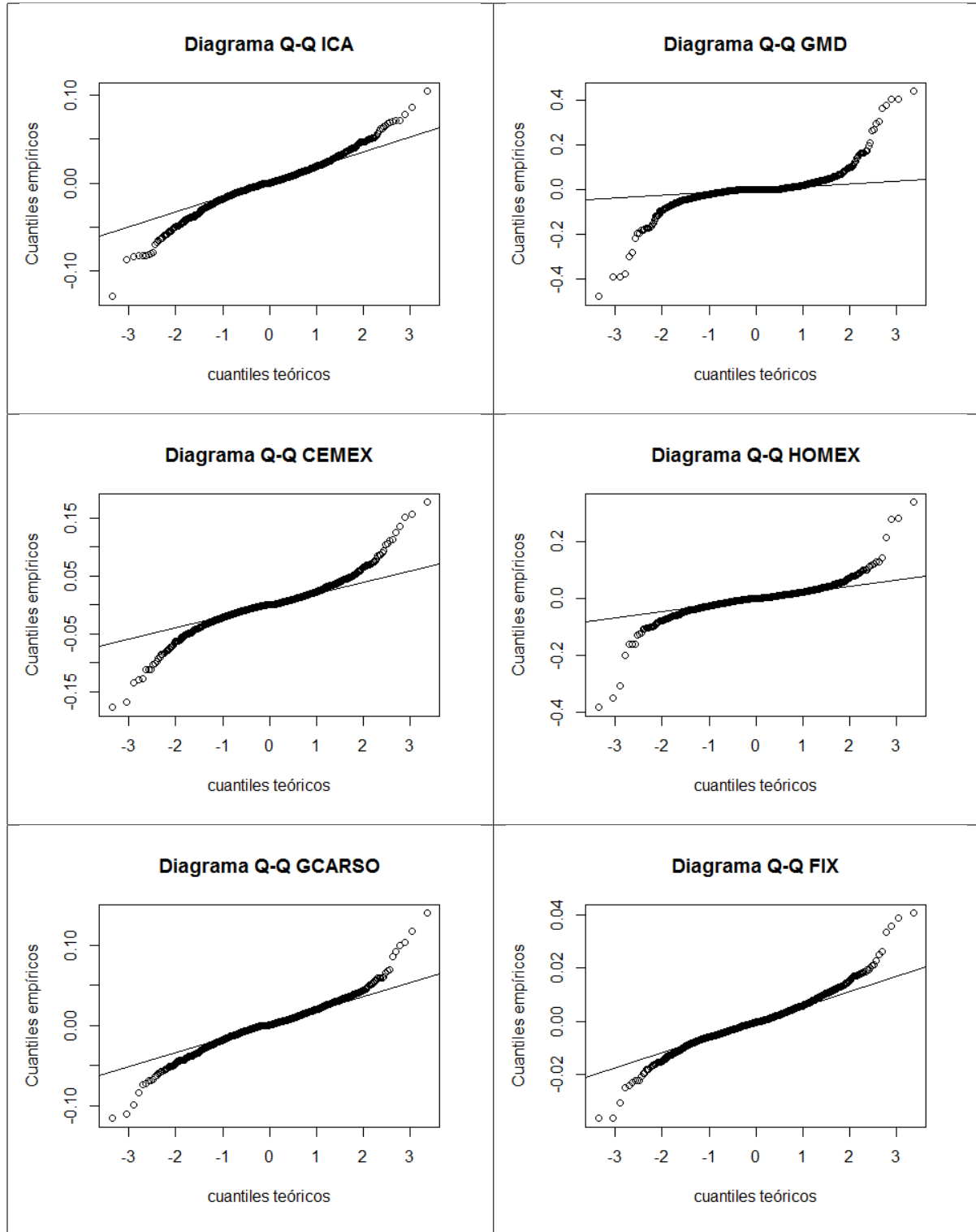


Figura 3.2: Gráficas Q-Q de los rendimientos diarios de cada una de las 5 acciones del portafolio 1 y del precio peso/dólar.

Tabla 3.5: Valores  $p$  de las pruebas de normalidad de Shapiro-Wilk para las pérdidas.

Portafolio	A	B
valor $p$	$2.2 \times 10^{-16}$	$2.581 \times 10^{-14}$

ción del VaR y el EVaR. Supóngase que existen dos portafolios para invertir en la cartera constituida por las 5 acciones mencionadas. El primer portafolio de inversión es invertir equitativamente, es decir, en cada acción se invierte  $\frac{1}{5}$  del monto total. A este portafolio se le llamará portafolio A. En el segundo portafolio, el portafolio B, se invierte de acuerdo a la solución propuesta por el método de Markowitz (Tabla 3.3). Lo siguiente es probar si se satisface el supuesto de normalidad en las pérdidas para los portafolios A y B ya que se necesita determinar si la aproximación de varianza-covarianza, la cual asume normalidad en la pérdida y el método Monte Carlo, el cual asume normalidad en los rendimientos de las acciones proporcionan estimaciones realistas del VaR y el EVaR ya que de ambos procedimientos parten de los supuestos ya mencionados para estimarlos y a partir de ahí se obtienen sus respectivas expresiones. El análisis de las pérdidas se realiza en forma análoga al caso de los rendimientos como se ilustra en la Tabla 3.5 y las gráficas de las Figuras 3.3 y 3.4. Al igual que en la Figura 3.2 también hay una discrepancia en las colas y los valores  $p$  de la prueba de Shapiro-Wilk son muy pequeños.

En resumen, con los resultados obtenidos y los datos disponibles se concluye que los métodos de varianza-covarianza y Monte Carlo no son adecuados para estimar las medidas de riesgo. Los resultados anteriores se esperaban, puesto que tanto los rendimientos como las pérdidas exhiben colas pesadas. También se probó si las pérdidas se pueden modelar mediante una distribución  $t$ . Sin embargo, en ambos casos se refleja asimetría en la distribución de acuerdo a los histogramas de las Figuras 3.5 y 3.6. En las Figuras 3.5 y 3.6 se muestran los histogramas de las pérdidas para cada alternativa de inversión. Debido a ello no es posible ajustar una distribución  $t$  a las pérdidas obtenidas independientemente del número de grados de libertad que se asigne. Para validar la afirmación anterior se hizo la prueba de bondad de ajuste de Anderson-Darling cuyos valores  $p$  se muestran en la tabla 3.6. Los valores  $p$  que se muestran en la Tabla 3.6 son los mismos para los diferentes grados de libertad que se propusieron, es decir, independientemente del número de grados que se asuma los valores  $p$  son muy pequeños. En ambos casos la decisión es rechazar el supuesto que los datos se pueden modelar mediante una distribución  $t$ .

Tabla 3.6: Valores  $p$  de las pruebas de la distribución  $t$  de Anderson-Darling para las pérdidas con 10,100 y 10000 grados de libertad.

Portafolio	A	B
valor $p$	$4.63 \times 10^{-7}$	$4.63 \times 10^{-7}$

**Diagrama Q-Q de las pérdidas del portafolio A**

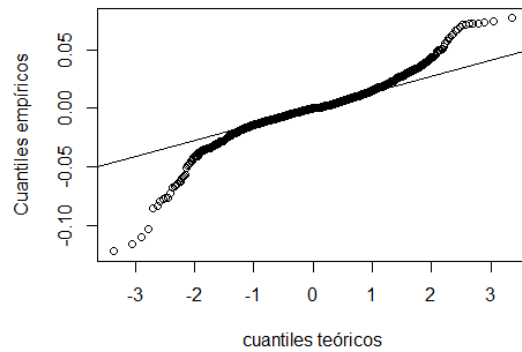


Figura 3.3: Gráficas Q-Q de las pérdidas en el valor del portafolio A.

**Diagrama Q-Q de las pérdidas del portafolio B**

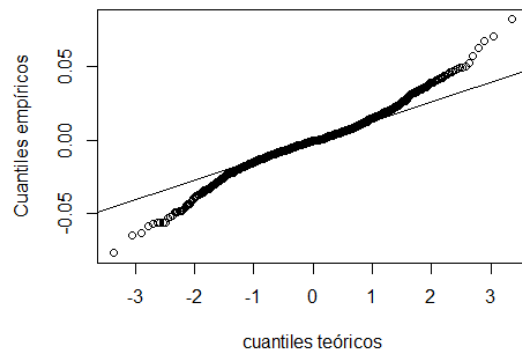


Figura 3.4: Gráficas Q-Q de las pérdidas en el valor del portafolio B.



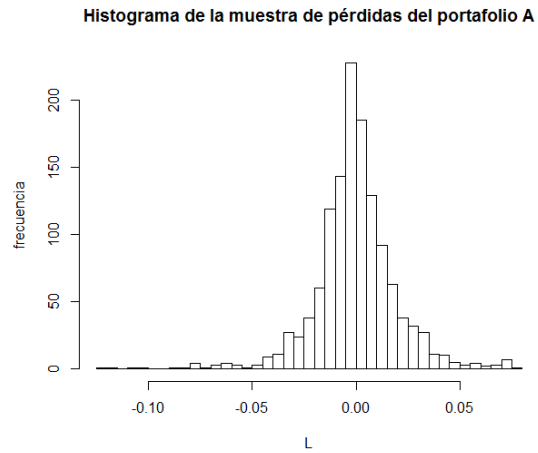


Figura 3.5: *Histogramas de las pérdidas en el valor de la cartera de inversión bajo el portafolio A.*

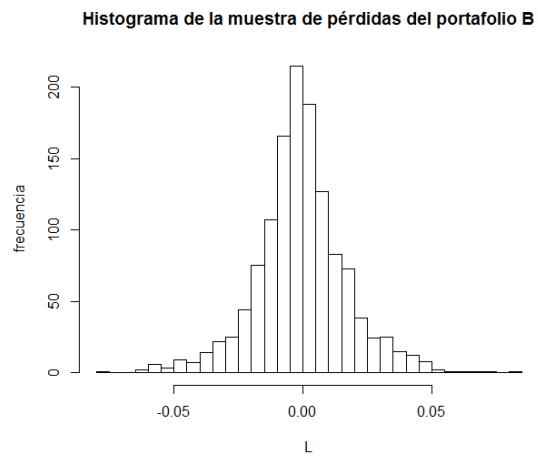


Figura 3.6: *Histogramas de las pérdidas en el valor de la cartera de inversión bajo el portafolio B.*

### 3.1.3. Estimación del VaR y el EVaR

Después de presentar la información de las acciones y el análisis del supuesto de normalidad, lo siguiente es aplicar las metodologías vistas en el Capítulo 2 para calcular las estimaciones puntuales e intervalos de confianza para el VaR y el EVaR a los dos portafolios de inversión ya mencionados: el uniforme (portafolio A), donde se invierte la misma proporción de capital en cada acción y el de Markowitz (portafolio B), el cual se invierte de acuerdo a la solución del problema de Markowitz mostrada en la Tabla 3.3.

En la aproximación varianza-covarianza se asume una distribución normal de las pérdidas con ciertos parámetros, los cuales se estiman mediante la muestra de pérdidas. Se sabe que las pérdidas no siguen una distribución Normal. Sin embargo, este análisis se realiza con fines de comparación con los otros métodos revisados en este trabajo. Se generó un número grande de muestras de variables aleatorias normales con media y varianza estimadas a partir de los datos de pérdidas. En cada muestra se estimaron el VaR y el EVaR, es decir, se obtuvo una muestra de valores del VaR y otra del EVaR. Mediante la prueba de Shapiro-Wilk se verificó que se cumpliera la hipótesis de normalidad de cada una de las muestras mencionadas anteriormente, en ambos casos se obtuvieron valores  $p$  grandes. Por lo tanto, no se rechazó el supuesto que ambas muestras se pueden modelar mediante una distribución Normal. Esta prueba se realizó con el objetivo de que, en caso de que no se rechazaran las pruebas citadas, se eligieran los cuantiles empíricos de ordenes  $\frac{\alpha}{2}$  y  $1 - \frac{\alpha}{2}$  para construir los intervalos de confianza del VaR y el EVaR.

Respecto al método histórico, el VaR y el EVaR se estimaron puntualmente mediante el cuantil de la distribución de la muestra y la media aritmética de las pérdidas de la muestra que exceden el VaR, respectivamente, como se describió en el Capítulo 2. Bajo este método, los límites de confianza se estimaron por el método del percentil básico.

Por último, en el método POT se escogió como el umbral al cuantil del 85% de la muestra de pérdidas de los portafolios A y B. Dado este umbral se obtuvo la muestra de los excedentes. En la Figura 3.7 se ilustra el comportamiento histórico de las pérdidas en el valor del portafolio para ambos portafolios. Los excedentes

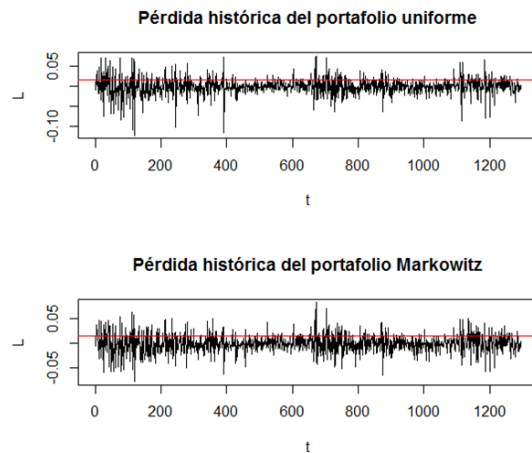


Figura 3.7: *Comportamiento histórico de las pérdidas del portafolio de acciones para ambos portafolios de inversión: el uniforme (imagen superior) y el de Markowitz (imagen inferior). En ambas gráficas la línea horizontal representa el umbral escogido.*

son las pérdidas que se localizan por encima de la franja horizontal (umbral). En ambos casos el tamaño inicial de los excedentes fue de 195. A partir de la muestra de los excedentes se obtuvo una muestra de elementos independientes por medio del método de corridas revisado en la Sección 2.1.4. El tamaño de la corrida se eligió de 2 elementos de tal manera que no disminuya demasiado el tamaño de muestra. En el caso del portafolio A el tamaño final de la muestra fue de 133 mientras que en el B fue de 128. En las Figuras 3.8 y 3.9 se muestran las gráficas del comportamiento histórico de los excedentes y el gráfico Q-Q de la distribución de los excedentes antes y después de emplear el método de corridas. Se observa que las gráficas de los excedentes ordenados cronológicamente de las Figuras 3.8 y 3.9, donde aún no se ha empleado el método de corridas son equivalentes a las gráficas de sus respectivos comportamientos histórico de las pérdidas de la Figura 3.7 si en ambas hiciéramos un zoom en aquellas pérdidas que sobrepasan la línea horizontal.

Se empleó la estimación de la función de auto correlación como se muestra en las gráficas de las Figuras 3.10 y 3.11. Se aprecia que para un desfase de dos elementos, en ambos casos se observa que la correlación se encuentra dentro de las bandas de significancia. Por lo tanto, la correlación entre los excedentes de la muestra simplificada, para un desfase de dos elementos, es nula y los excedentes se pueden considerar independientes. Con la nueva muestra se estimaron los

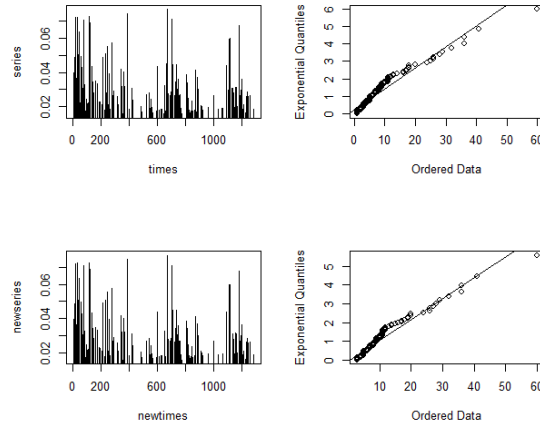


Figura 3.8: Gráficas del comportamiento histórico de los excedentes con sus respectivos diagramas Q-Q del portafolio A. En la esquina superior izquierda se localiza la gráfica que corresponde al comportamiento histórico de los excedentes. En la esquina superior derecha se encuentra el gráfico Q-Q. Las dos gráficas de abajo son análogas a las anteriores después de aplicar el método de corridas a los excedentes.

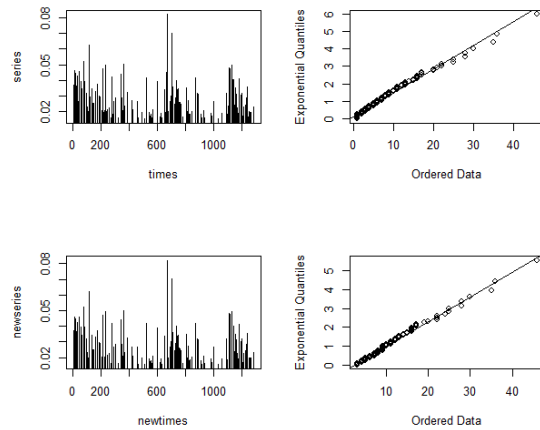


Figura 3.9: Gráficas del comportamiento histórico de los excedentes con sus respectivos diagramas Q-Q del portafolio B. En la esquina superior izquierda se localiza la gráfica que corresponde al comportamiento histórico de los excedentes. En la esquina superior derecha se encuentra el gráfico Q-Q. Las dos gráficas de abajo son análogas a las anteriores después de aplicar el método de corridas a los excedentes.

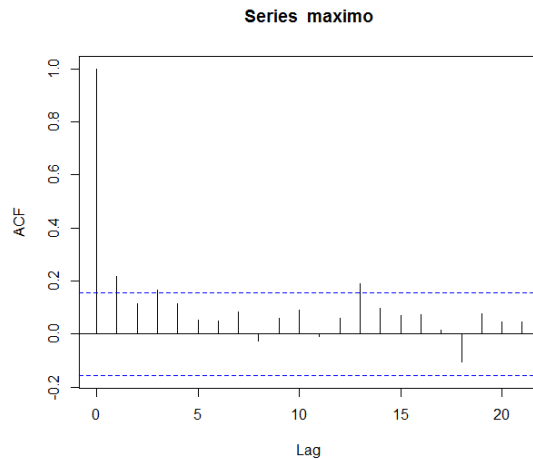


Figura 3.10: Gráfica de las estimaciones de las funciones de autocorrelación para distintos valores de desfaseamiento para el portafolio A. Las líneas punteadas horizontales representan las bandas de significancia.

parámetros de forma y escala de la GPD que modela la distribución de los excedentes. Los parámetros se estimaron por máxima verosimilitud. Después, se hizo la prueba de bondad de ajuste de Anderson-Darling a la muestra de los excedentes independientes y en ambos casos se obtuvieron valores  $p$  suficientemente grandes (para el portafolio A el valor  $p$  fue de 0.8101 y para el B, 0.9536). Por lo tanto, no rechaza el supuesto que los excedentes se pueden describir mediante una GPD. En las Figuras 3.12 a 3.15 se muestran las distribuciones empíricas y las ajustadas por los datos de los excedentes y la de supervivencia de la distribución de la muestra de excedentes, respectivamente. Para el portafolio B, se aprecia que los ajustes de las funciones de la GPD y la de supervivencia son mejores que las del portafolio A, debido a que se observa que en el primer caso los puntos están mejor ajustados a la recta del diagrama Q-Q. Los intervalos de confianza, por el método POT, se calcularon mediante el método de verosimilitud de perfiles. En las Figuras 3.16 y 3.17 se muestra la función de supervivencia del portafolio A y la del portafolio B, respectivamente. Mediante las líneas verticales se muestran los valores estimados del VaR y el EVaR junto con las funciones de verosimilitud de perfiles, las cuales se representan por las curvas punteadas. En las Tablas 3.7 y 3.8 se exhiben los resultados de las estimaciones correspondientes.

En ambas Tablas se puede observar que tanto el método POT como el método

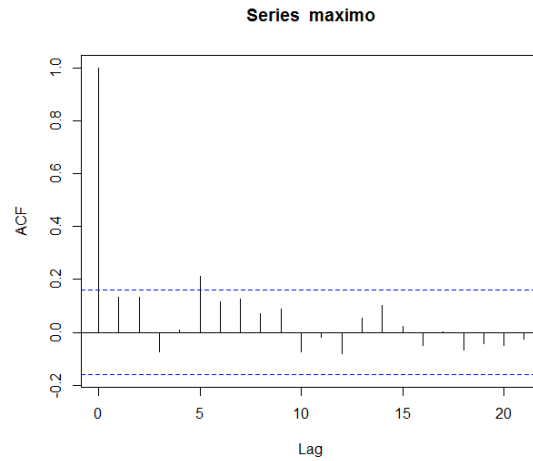


Figura 3.11: Gráfica de las estimaciones de las funciones de autocorrelación para distintos valores de desfase para el portafolio B. Las líneas punteadas horizontales representan las bandas de significancia.

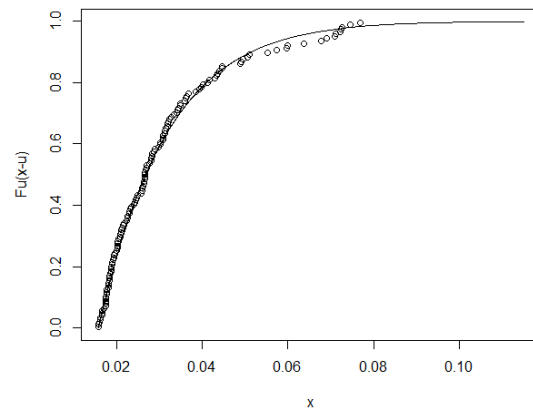


Figura 3.12: Gráficas de la distribución empírica de los excedentes y la GPD ajustada a los datos para el portafolio A.

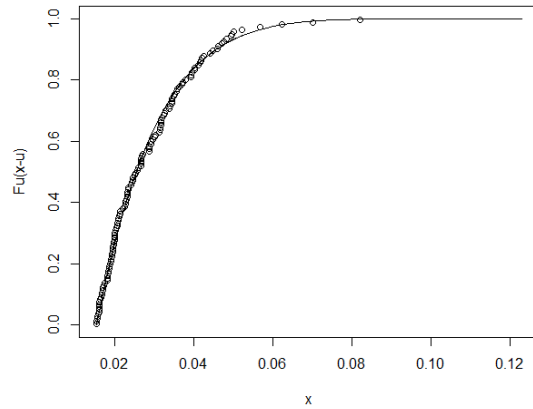


Figura 3.13: Gráficas de la distribución empírica de los excedentes y la GPD ajustada a los datos para el portafolio B.

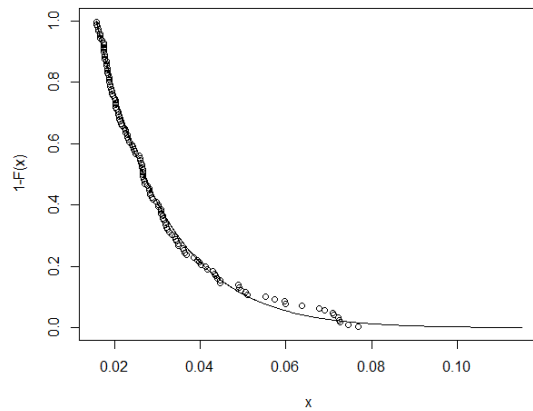


Figura 3.14: Gráficas de la función de supervivencia empírica de los excedentes y la ajustada a través de los datos para el portafolio A.

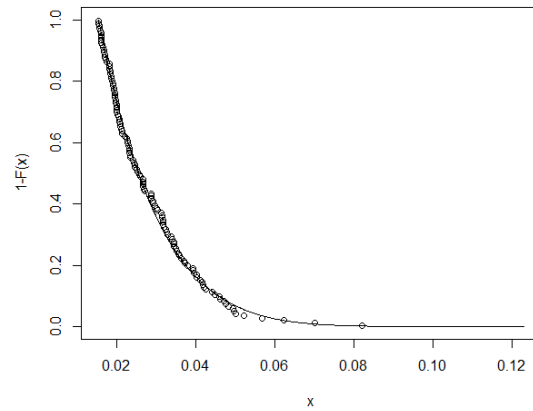


Figura 3.15: Gráficas de la función de supervivencia empírica de los excedentes y la ajustada a través de los datos para el portafolio B.

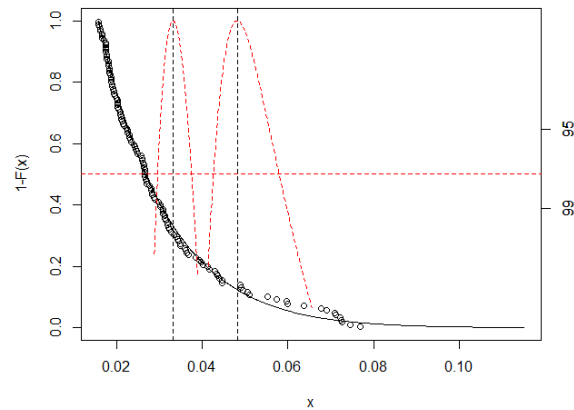


Figura 3.16: Gráficas de la función de supervivencia empírica de los excedentes y la ajustada a través de los datos para la cartera A. En la gráfica la línea vertical punteada izquierda indica el valor del VaR estimado puntualmente y la curva punteada izquierda la función de verosimilitud de perfiles. Los puntos de intersección entre dicha curva y la línea horizontal punteada son los límites de confianza del VaR. Análogamente se tiene lo mismo para el EVaR por medio de la línea derecha y la curva derecha.



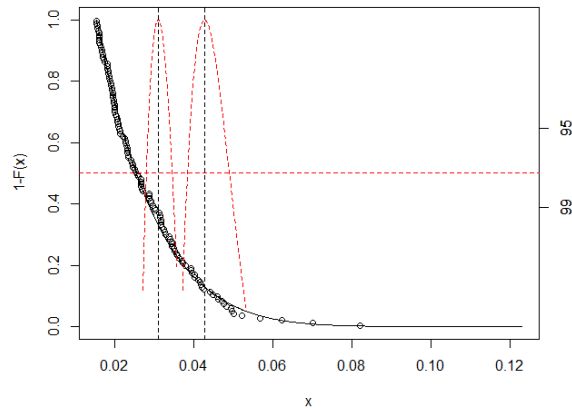


Figura 3.17: Gráficas de la función de supervivencia empírica de los excedentes y la ajustada a través de los datos para la cartera B. En la gráfica la línea vertical punteada izquierda indica el valor del VaR estimado puntualmente y la curva punteada izquierda la función de verosimilitud de perfiles. Los puntos de intersección entre dicha curva y la línea horizontal punteada son los límites de confianza del VaR. Análogamente se tiene lo mismo para el EVaR por medio de la línea derecha y la curva derecha.

histórico arrojan inferencias comparables para el VaR y el EVaR. Esto se esperaba, puesto que en la aproximación de varianza-covarianza cuando se asume normalidad las colas de la distribución son más delgadas, en consecuencia, se subestiman el VaR y el EVaR. En el caso del método histórico hay muy pocos datos de la cola de la distribución y además, no se tiene información más allá del dato más grande por lo que parece natural que también puede existir una subestimación. El método de verosimilitud de perfiles utilizado en la aproximación POT, es el que proporciona los intervalos de confianza más amplios en comparación de los demás. Por otro lado, las estimaciones puntuales del VaR y el EVaR obtenidos para el portafolio B son menores que los correspondientes al portafolio A. Algo similar sucede con los correspondientes intervalos de confianza. Esto se debe quizá a que el método de Markowitz es en cierto sentido más óptimo comparado con la forma uniforme de asignación de pesos. Por lo tanto, para los datos, el método de optimización de portafolios no sólo minimiza la varianza del portafolio sino también con el vector de pesos óptimo se logra tener una reducción del VaR y el EVaR. De hecho, esto es muy evidente en la aproximación varianza-covarianza puesto que ambas medidas están en términos de la desviación estándar. En la siguiente sección se verá qué sucede si al portafolio compuesto por las 5 acciones citadas se le añade un activo que corresponde

Tabla 3.7: Estimaciones del VaR y el EVaR para el portafolio A. Monto=\$ 1.00, Tiempo= 1 día.

Método	Var-Covar	Histórico	POT
VaR	0.0329	0.0313	0.0331
IC VaR	<b>( 0.0314, 0.0344 )</b>	<b>( 0.0278, 0.0345 )</b>	<b>( 0.0295, 0.0374 )</b>
EVaR	0.0414	0.0463	0.0481
IC EVaR	<b>( 0.0396, 0.0431 )</b>	<b>( 0.0407, 0.0523 )</b>	<b>( 0.0427, 0.0579 )</b>

Tabla 3.8: Estimaciones del VaR y el EVaR para el portafolio B. Monto=\$ 1.00, Tiempo= 1 día.

Método	Var-Covar	Histórico	POT
VaR	0.0284	0.0305	0.0309
IC VaR	<b>( 0.0272 , 0.0297 )</b>	<b>( 0.026, 0.0339 )</b>	<b>( 0.0279, 0.0344 )</b>
EVaR	0.0358	0.0405	0.0427
IC EVaR	<b>( 0.0343, 0.0372 )</b>	<b>( 0.0366 , 0.0447 )</b>	<b>( 0.0384, 0.0489 )</b>

al tipo de cambio peso/dólar.

## 3.2. Portafolio de acciones y tipo de cambio

En esta sección se muestran los resultados del portafolio anterior si también se invierte una proporción del capital total en el extranjero donde dicho monto se convierte en dólares. En la Sección 3.1 se mostró la gráfica del comportamiento histórico del rendimiento del precio FIX peso/dólar (ver Figura 3.1) y el análisis sobre la validación del supuesto de normalidad, el cual no se cumple. Se estimaron, con los datos históricos, el rendimiento promedio del FIX, su varianza y la covarianza con los rendimientos de cada una de las acciones. El rendimiento promedio diario estimado del precio peso/dólar fue  $-3.9289 \times 10^{-5}$ . En la matriz de la expresión (3.2) se muestran las covarianzas estimadas del rendimiento del FIX con el rendimiento de cada una de las acciones. Se aprecia que la varianza del rendimiento del FIX es muy chica ( $5.1128 \times 10^{-5}$ ). De hecho, es menor que las varianzas de los rendimientos de las acciones, las cuales se muestran en las celdas diagonales de la Tabla 3.2. Esto da

pauta a especular que la mayor proporción del monto se deba invertir en este activo. Las covarianzas del FIX con respecto a cada una de las acciones son negativas y muy cercanas a cero. Esto significa que el cambio en el rendimiento del FIX afecta negativamente a los rendimientos de las acciones. Asimismo, cabe resaltar que si las covarianzas de la expresión (3.2) son negativas, entonces la varianza del portafolio 2 disminuye.

$$\begin{pmatrix} -5.4379 \times 10^{-5} \\ -2.8973 \times 10^{-5} \\ -7.1896 \times 10^{-5} \\ -6.5153 \times 10^{-5} \\ -4.0644 \times 10^{-5} \\ 5.1128 \times 10^{-5} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Se minimizó la varianza del portafolio 2, y de esa manera se determinó el vector de pesos óptimo y se analizó el impacto que tiene el rendimiento del FIX en el portafolio de inversión. El rendimiento esperado del portafolio 2,  $r^*$ , en el problema de optimización es el mismo que el del portafolio 1. Dicho vector se ilustra en la Tabla 3.9. Como se esperaba, gran parte de la proporción del monto a invertir se destina al tipo de cambio peso/dólar (0.7687), es decir, más de tres cuartas partes del monto total. Hay un cambio grande en la proporción de capital que se invierte en la acción ICA: cambió de 0.4057 a 0.0929. Un cambio similar ocurre en la acción GCARSO de 0.3616 a 0.1110. En el caso de la acción GMD el cambio es menor, de 0.0948 a 0.01004. En la acción CEMEX la proporción se mantiene prácticamente igual. El efecto más grande recae en la acción HOMEX puesto que el peso de inversión se vuelve negativo ( $-0.0198$ ) (también en este caso se supone que se permiten las ventas en corto). En esta sección se analizan dos portafolios de inversión, ambos compuestos por las cinco acciones y el tipo de cambio. Se denota como portafolio C a aquel donde se invierte la misma proporción de capital en cada uno de los activos y portafolio D, aquél en el que se invierte de acuerdo al vector de pesos óptimo mostrado en la Tabla 3.9.

Primero se valida el supuesto de normalidad en las pérdidas calculadas en términos de cada uno de los vectores de pesos. Los resultados de las pruebas son idénticos en cuanto a rechazar la prueba de normalidad en los portafolios C y D (los valores  $p$  de la prueba de normalidad resultaron ser mucho menores que 0.01). En las Fi-

Tabla 3.9: Vector de pesos óptimo de Markowitz para la cartera de inversión 2.

Activo	ICA	GMD	CEMEX	HOMEX	GCARSO	FIX
$w_i$	0.0929	0.01004	0.0370	-0.0198	0.1110	0.7687

guras 3.18 a 3.20 se muestran los gráficos Q-Q y el comportamiento histórico de las pérdidas del portafolio invertido por ambos portafolios. Al igual que en el portafolio 1, para el método POT se eligió como umbral el cuantil del 85% de la distribución empírica de la pérdida para ambos portafolios. El tamaño inicial de los excedentes, para ambos portafolios, es de 195. Después de emplear el método de corridas con un tamaño de corrida igual a dos, en el portafolio C la muestra se redujo a 131 mientras que en el D la muestra reducida es de 132. En las Figuras 3.21 y 3.22 se muestran las gráficas de los excedentes ordenados cronológicamente de tal manera que en las regiones de las gráficas donde hay espacios en blanco corresponden a las pérdidas menores que el umbral. Adicionalmente, se incluyen los gráficos Q-Q de la distribución empírica de los excedentes versus la distribución teórica, es decir, la GPD.

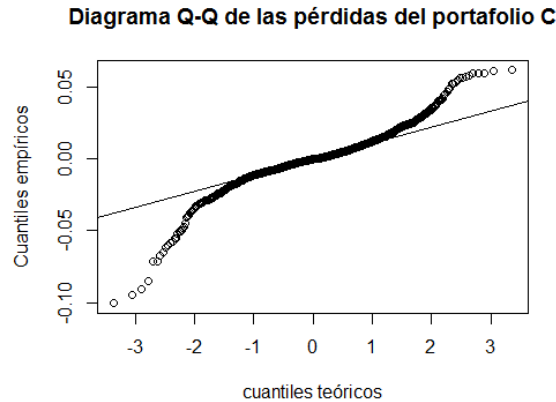


Figura 3.18: Gráficas Q-Q de la distribución de las pérdidas del portafolio C versus la distribución normal.

Posteriormente, mediante la estimación de la función de auto correlación se corroboró que no existiera una fuerte dependencia entre los excedentes de la muestra reducida. En las Figuras 3.23 y 3.24 se observa que conforme el desfase au-

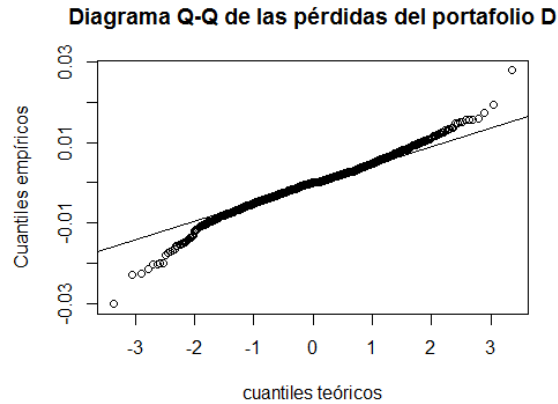


Figura 3.19: Gráficas Q-Q de la distribución de las pérdidas del portafolio D versus la distribución normal.

menta la correlación entre los excedentes de la muestra mencionada está contenida dentro de las bandas de significancia en la mayoría de los casos. Con base en lo observado en las Figuras 3.23 y 3.24, se consideró a los excedentes de la muestra resultante no correlacionados y con ellos se estimaron los parámetros  $\epsilon$  y  $\beta$  de la GPD (2.18). Con los parámetros estimados se graficaron la GPD junto con la distribución empírica de los excedentes como se muestra en las Figuras 3.25 y 3.26. Como se analizó en la Sección 2.1.4, debido a la relación entre la distribución de los excedentes y la distribución empírica se puede graficar la distribución de la pérdida a partir del umbral y compararla con la distribución empírica tal como se presentan en las Figuras 3.27 y 3.28. Al igual que en la sección anterior, en el portafolio D hay un mejor ajuste de las funciones de GPD y de supervivencia que en el caso del portafolio C por la misma razón que se explicó en la sección 3.1. Por otro lado, la prueba de bondad de ajuste de Anderson-Darling arrojó que los excedentes se pueden modelar mediante una GPD tanto para el portafolio C como para el portafolio D. Sus respectivos valores  $p$  fueron 0.8605 y 0.3066. Para el método POT, se calcularon los intervalos de confianza para el VaR y el EVaR mediante el método de verosimilitud de perfiles. En las Figuras 3.29 y 3.30 se muestran las funciones de supervivencia de las pérdidas para cada alternativa de inversión. Las líneas verticales punteadas izquierda y derecha indican las estimaciones puntuales del VaR y el EVaR, respectivamente. Ambas líneas se encuentran rodeadas de las funciones de verosimilitud de perfiles representadas por las curvas punteadas. Los puntos de intersección entre las curvas y la línea vertical, ambas punteadas, son los límites de confianza para el VaR y el EVaR.

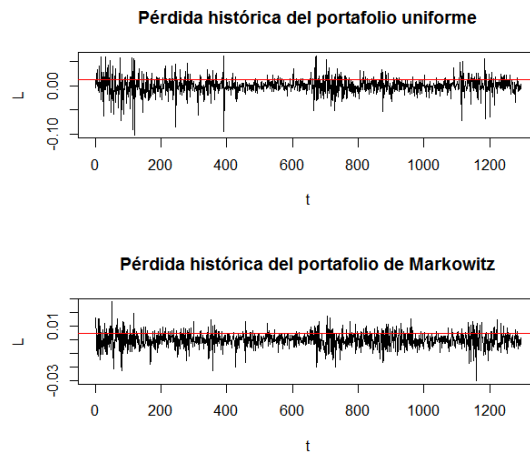


Figura 3.20: *Comportamiento histórico de las pérdidas del portafolio de acciones más la tasa de cambio para ambos portafolios: portafolio C (imagen superior) y el portafolio D (imagen inferior). En ambas gráficas la línea horizontal representa el umbral escogido.*

### 3.2.1. Estimación del VaR y el EVaR

Además de la variación en las estimaciones del VaR y el EVaR por los métodos de varianza-covarianza, el histórico y el POT entre los portafolios C y D de inversión también interesa conocer el efecto que se tiene al invertir en el tipo de cambio FIX y así determinar si conviene o no invertir en él. En las Tablas 3.10 y 3.11 se muestran las estimaciones del VaR y del EVaR en forma puntual y por intervalos de confianza. Nuevamente, el método POT es el que arroja las estimaciones puntuales más grandes tanto para el VaR como el EVaR. Con respecto a los intervalos de confianza sucede lo mismo que en la sección anterior. En el portafolio D las estimaciones del VaR y el EVaR también son menores que las del portafolio C.

La última comparación es entre los resultados obtenidos en esta sección con los de la anterior. Para los portafolios C y D los tres métodos que estiman puntualmente el VaR y el EVaR coinciden en que el VaR y el EVaR del portafolio que incluye el activo FIX son menores que los del portafolio que no lo incluyen (ver Tablas 3.7,

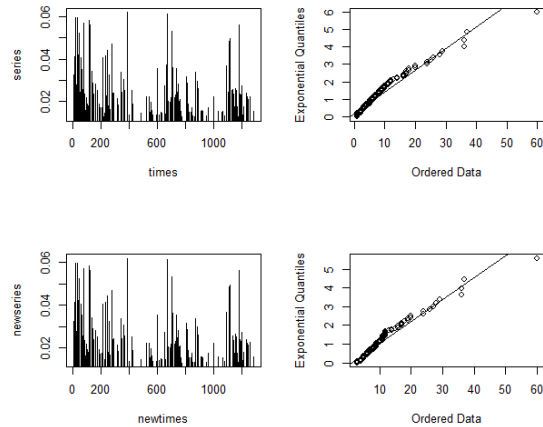


Figura 3.21: Gráficas del comportamiento histórico de los excedentes con sus respectivos diagramas Q-Q del portafolio C.

Tabla 3.10: Estimaciones del VaR y el EVaR para el portafolio C. Monto=\$ 1.00, Tiempo= 1 día.

Método	Var-Covar	Histórico	POT
VaR	0.0268	0.0247	0.0271
IC VaR	( 0.0257, 0.0279)	(0.0225, 0.028)	(0.0241, 0.0306)
EVaR	0.0337	0.0375	0.0392
IC EVaR	(0.0323, 0.0351)	(0.0328 , 0.0425 )	(0.0347, 0.0470)

3.8, 3.10 y 3.11). Por lo tanto, de acuerdo con los resultados es mejor convertir una parte del capital en pesos a dólares y así reducir el riesgo del portafolio. Además, conviene más diversificar la cartera de tal manera que se tenga un rendimiento esperado determinado y menor volatilidad.

Finalmente, en la siguiente sección se presenta el análisis de las estimaciones para un portafolio de bonos.

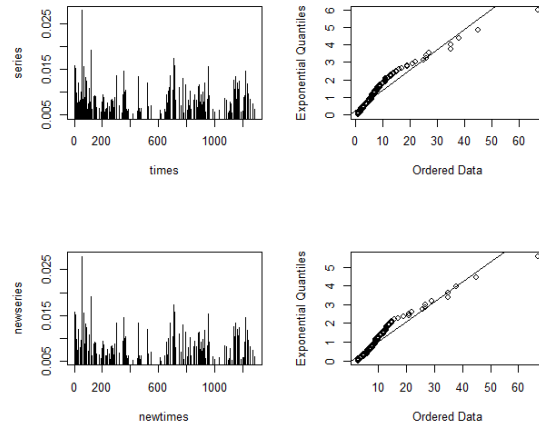


Figura 3.22: Gráficas del comportamiento histórico de los excedentes con sus respectivos diagramas Q-Q del portafolio D.

Tabla 3.11: Estimaciones del VaR y el EVaR para el portafolio D. Monto=\$ 1.00, Tiempo= 1 día.

Método	Var-Covar	Histórico	POT
VaR	0.0089	0.00883	0.0094
IC VaR	<b>(0.0086 , 0.0093)</b>	<b>(0.0079, 0.0097 )</b>	<b>(0.0086, 0.0104)</b>
EVaR	0.0113	0.0117	0.0129
IC EVaR	<b>(0.0108, 0.01180)</b>	<b>(0.0106 , 0.0131)</b>	<b>(0.0116, 0.0147)</b>

### 3.3. Portafolio de bonos

En esta sección se aplican las metodologías vistas en los capítulos anteriores a un portafolio compuesto por 3 bonos gubernamentales cupón cero. Cada uno tiene una duración distinta. Uno es a 28, otro a 91 y el último a 182 días. Se seleccionó una muestra histórica de las tasas de interés. El periodo que se había tomado inicialmente fue del primero de enero de 2009 al 4 de septiembre de 2014. No obstante, para estimar el VaR y el EVaR por el método POT se necesita una muestra suficiente de excedentes de tal manera que después de aplicar el método de corridas, el tamaño de muestra sea significativo. En la muestra inicial no ocurrió la situación anterior. Por lo tanto, se extendió el periodo de muestra del 1 de enero de 2004 y la fecha final



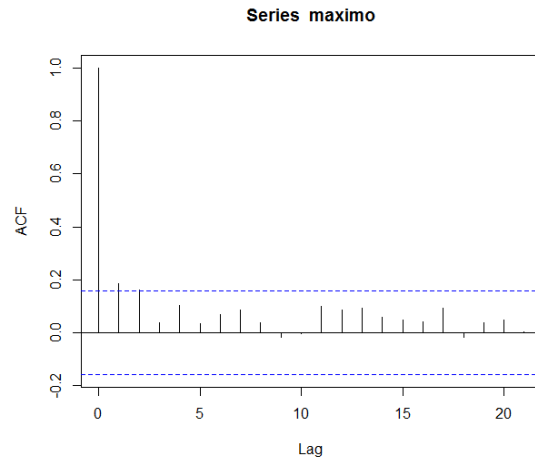


Figura 3.23: Gráfica de las estimaciones de las funciones de autocorrelación para distintos valores de desfase para el portafolio C. Las líneas punteadas horizontales representan las bandas de significancia.

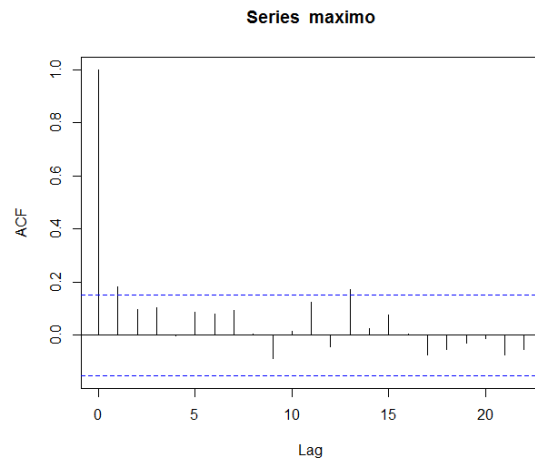


Figura 3.24: Gráfica de las estimaciones de las funciones de autocorrelación para distintos valores de desfase para el portafolio D. Las líneas punteadas horizontales representan las bandas de significancia.

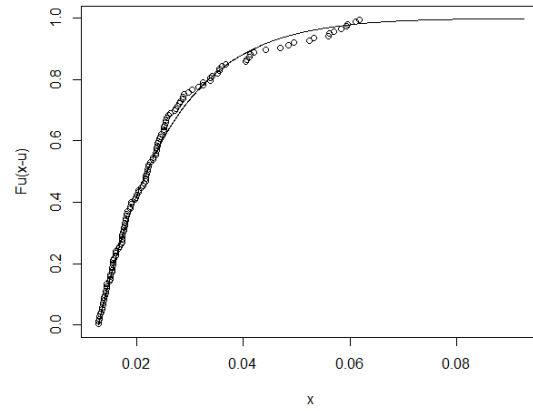


Figura 3.25: Gráficas de la distribución empírica de los excedentes y la GPD que se ajusta a los datos para la cartera C.

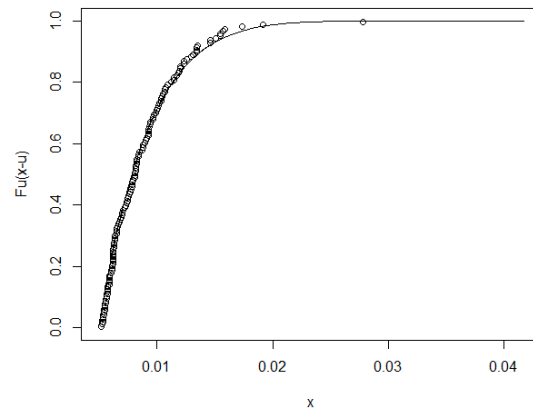


Figura 3.26: Gráficas de la distribución empírica de los excedentes y la GPD que se ajusta a los datos para la cartera D.

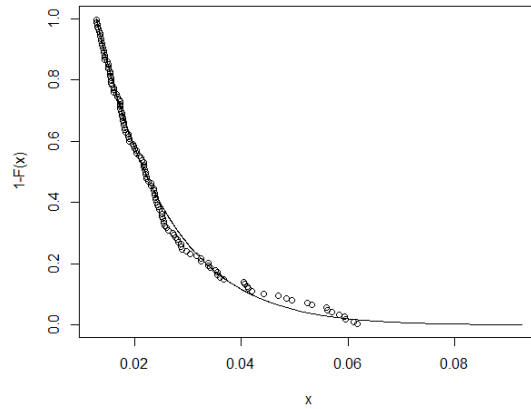


Figura 3.27: Gráficas de la función de supervivencia empírica de los excedentes y la ajustada a través de los datos para la cartera C.

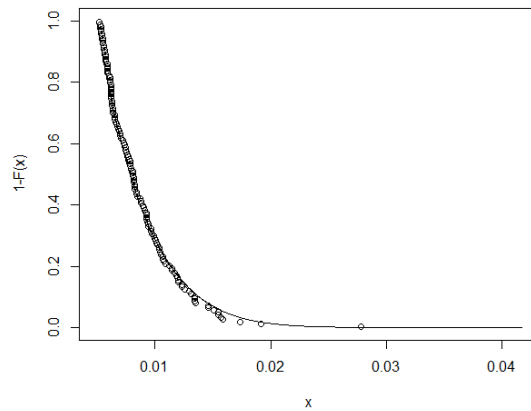


Figura 3.28: Gráficas de la función de supervivencia empírica de los excedentes y la ajustada a través de los datos para la cartera D.

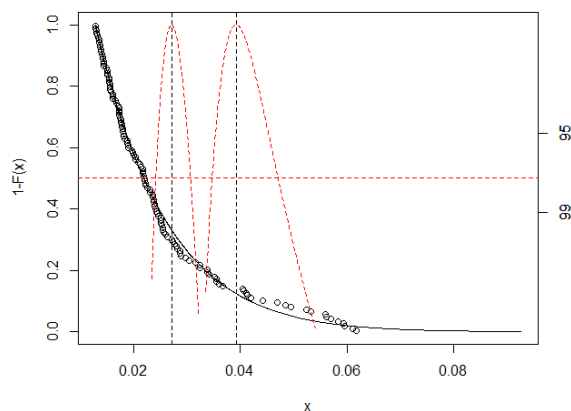


Figura 3.29: Gráficas de la función de supervivencia empírica de los excedentes y la ajustada a través de los datos para la cartera C. En ambas gráficas, la línea vertical punteada izquierda indica el valor del VaR estimado puntualmente y la curva punteada izquierda, la función de verosimilitud de perfiles. Los puntos de intersección entre dicha curva y la línea punteada horizontal son los límites de confianza del VaR. Análogamente se tiene lo mismo para el EVaR por medio de la línea vertical derecha y la curva punteada derecha.

permaneció igual. Se asume que el valor nominal (*face value*) es de un peso para los tres bonos. A diferencia del caso de las acciones donde el tiempo se manejó en días, en este caso se manejó en años (364 días por año) para las pérdidas en el valor del portafolio. En las Figuras 3.31 a 3.33 se muestran los comportamientos históricos de las tasas de rendimiento y se observa que presentan un comportamiento de decrecimiento y en las Figuras 3.34 a 3.36 sus respectivas variaciones por semana. También se puede observar que no hay mucha variabilidad en las tasas, salvo en algunas semanas. La que presenta menor variación, en comparación de las otras dos, es la tasa a 182 días. En la Tabla 3.12 y en la expresión (3.3) se presentan los incrementos promedio y la matriz de varianza covarianza de los incrementos en las tasas, respectivamente. Las variaciones promedio en las tasas resultan del orden de  $10^{-4}$  y presentan varianzas y covarianzas muy pequeñas, por lo tanto, los incrementos están escasamente correlacionados.

$$\begin{pmatrix} 7.072405 \times 10^{-7} & 5.128592 \times 10^{-7} & 5.406562 \times 10^{-7} \\ 5.128592 \times 10^{-7} & 7.530306 \times 10^{-7} & 6.981017 \times 10^{-7} \\ 5.406562 \times 10^{-7} & 6.981017 \times 10^{-7} & 9.012450 \times 10^{-7} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

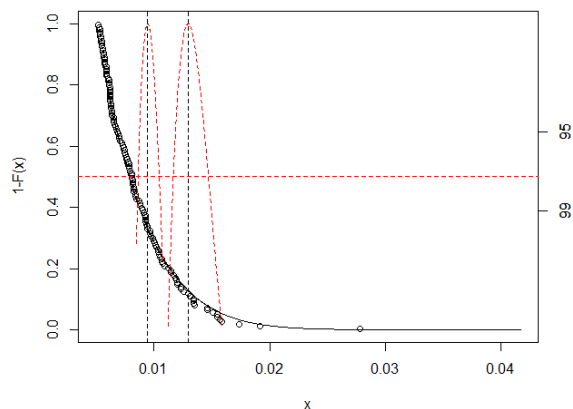


Figura 3.30: Gráficas de la función de supervivencia empírica de los excedentes y la ajustada a través de los datos para la cartera D. En ambas gráficas, la línea vertical punteada izquierda indica el valor del VaR estimado puntualmente y la curva punteada izquierda, la función de verosimilitud de perfiles. Los puntos de intersección entre dicha curva y la línea punteada horizontal son los límites de confianza del VaR. Análogamente se tiene lo mismo para el EVaR por medio de la línea vertical derecha y la curva punteada derecha.

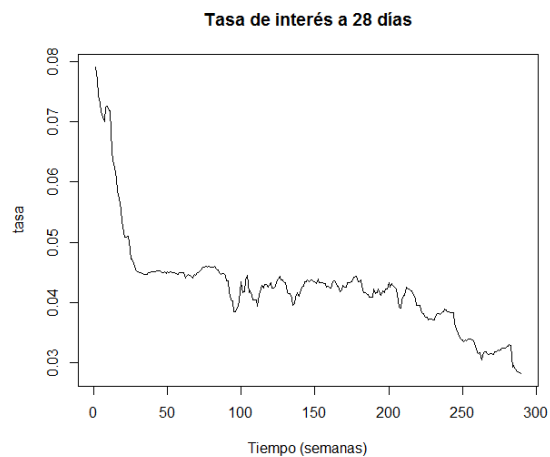


Figura 3.31: Comportamiento histórico de la tasa de rendimiento a 28 días.

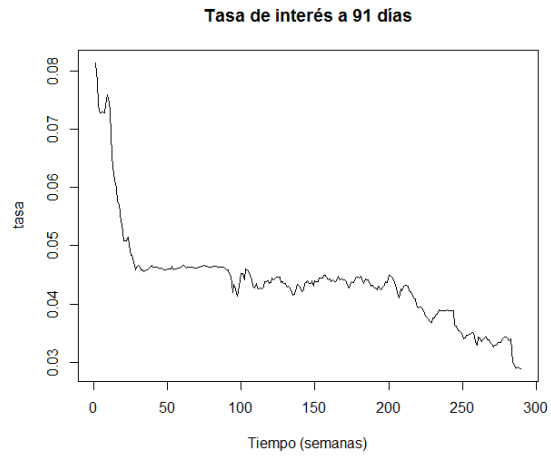


Figura 3.32: *Comportamiento histórico de la tasa de rendimiento a 91 días.*

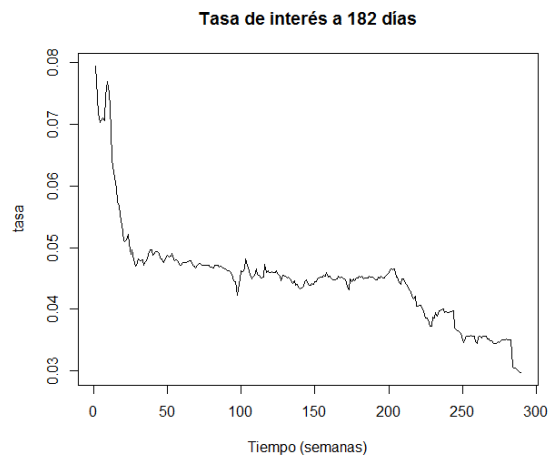


Figura 3.33: *Comportamiento histórico de la tasa de rendimiento a 182 días.*

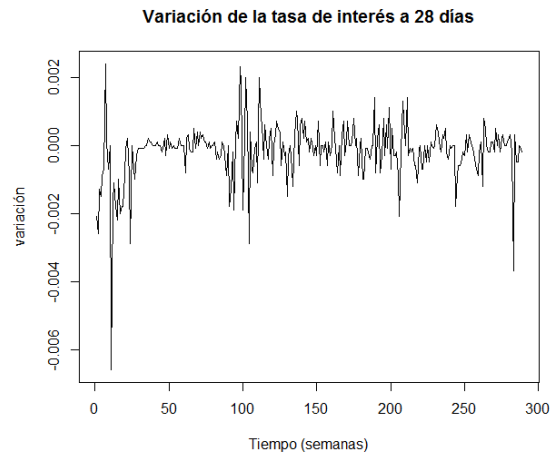


Figura 3.34: *Comportamiento histórico de las variaciones en la tasa de rendimiento a 28 días.*

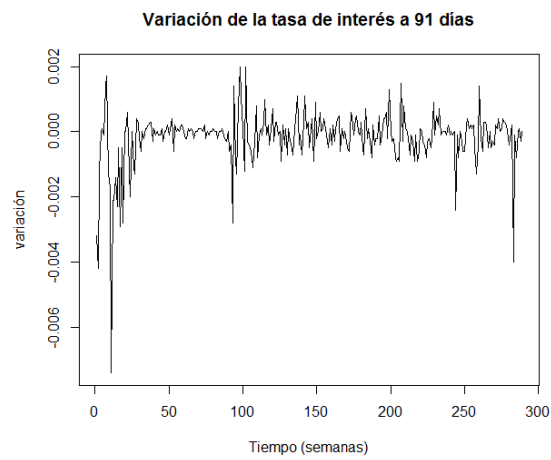


Figura 3.35: *Comportamiento histórico de las variaciones en la tasa de rendimiento a 91 días.*

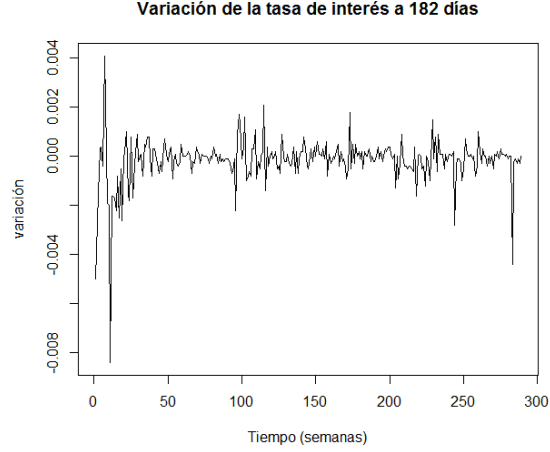


Figura 3.36: *Comportamiento histórico de las variaciones en la tasa de rendimiento a 182 días.*

Tabla 3.12: *Cambio promedio estimado de los incrementos en las tasas a 28, 91 y 182 días.*

Bono	28 días	91 días	182 días
Cambio promedio	-0.000176	-0.000181	-0.000172

### 3.3.1. Validación del supuesto de normalidad y distribución $t$ de Student

Análogamente al análisis de los otros dos portafolios, se realizan las correspondientes pruebas de bondad de ajuste. En este caso, de normalidad en las variaciones en las tasas y en las pérdidas del portafolio. En la Tabla 3.13 y en las Figuras 3.37 a 3.39 se muestran los resultados de las pruebas de normalidad de Shapiro-Wilk para cada incremento, así como sus respectivas gráficas Q-Q. Obsérvese que hay un alejamiento en las colas con respecto a la línea recta por lo que se comprueba que los incrementos no siguen una distribución normal. Con base en estos resultados, se concluye que las estimaciones del VaR y EVaR por el método Monte Carlo no serían consistentes si se recurriera a este método. Incluso, de acuerdo a los histogramas de las Figuras 3.40 a 3.42 hay evidencia de asimetría en la distribución de los incrementos en las tasas por lo que gráficamente también se rechaza el supuesto



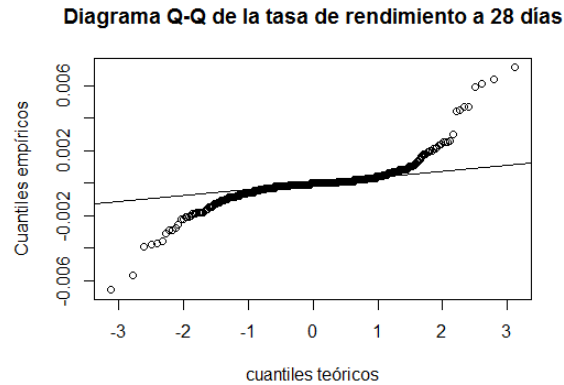


Figura 3.37: Gráfica Q-Q de los incrementos en la tasa de rendimiento a 28 días.

de que éstos se distribuyan *t*-Student. En el método Monte Carlo no se emplean otras distribuciones debido a que no poseen las mismas propiedades que las de una distribución normal, por ejemplo, linealidad en las variables aleatorias.

Tabla 3.13: Valores *p* de las pruebas de normalidad de Shapiro-Wilk para los incrementos en las tasas de rendimiento.

Bono	28 días	91 días	182 días
valor <i>p</i>	$2.2 \times 10^{-16}$	$2.2 \times 10^{-16}$	$2.2 \times 10^{-16}$

En el caso del portafolio de bonos también se analiza el impacto que tiene la forma de calcular la pérdida en el valor del portafolio de bonos en las estimaciones del VaR y el EVaR. Sin embargo, los dos casos que se comparan no difieren en la forma que se invierte en la cartera de bonos. La diferencia entre uno y otro consiste en la forma en que se calcula la pérdida en el valor del portafolio. En el primer caso (portafolio E) se emplea la ecuación (1.30) del Capítulo 1, es decir, la pérdida “exacta”. En el segundo caso (portafolio F) se considera la ecuación (1.31) del mismo Capítulo, es decir, la aproximación de primer orden de la pérdida. En un portafolio de acciones, debido a que la relación entre los factores de riesgo (que son los precios de las acciones) y la pérdida es lineal, no tiene sentido compararla con su aproximación de primer orden. En un portafolio de bonos la relación entre los incrementos en los rendimientos al vencimiento y la pérdida es no lineal, por lo cual en este caso sí tiene sentido la citada comparación. En las Figuras 3.43 y 3.44 se

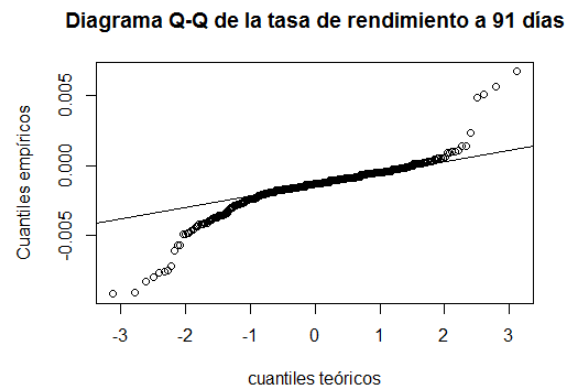


Figura 3.38: Gráfica Q-Q de los incrementos en la tasa de rendimiento a 91 días.

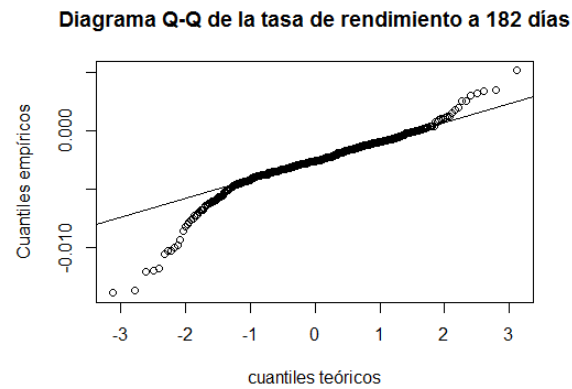


Figura 3.39: Gráfica Q-Q de los incrementos en la tasa de rendimiento a 182 días.

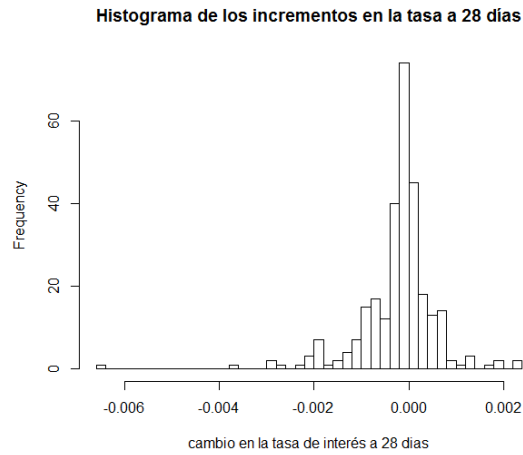


Figura 3.40: *Histograma de los incrementos en la tasa de rendimiento a 28 días.*

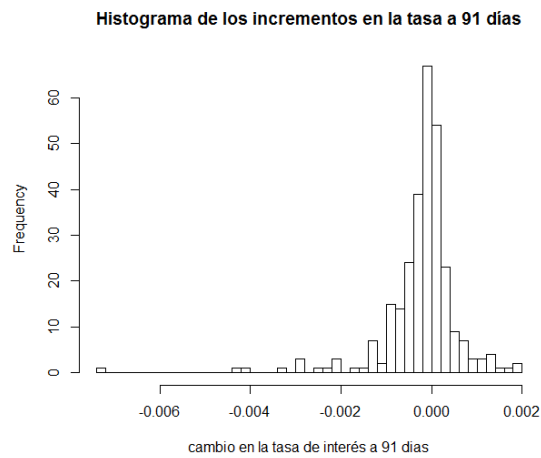


Figura 3.41: *Histograma de los incrementos en la tasa de rendimiento a 91 días.*

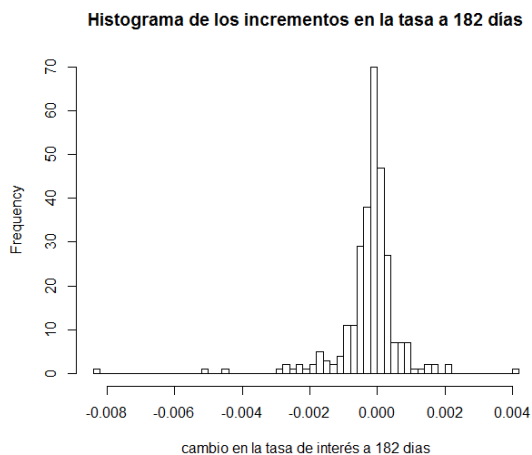


Figura 3.42: *Histograma de los incrementos en la tasa rendimiento a 182 días.*

muestra el comportamiento histórico de la pérdida “exacta” y de su correspondiente aproximación de primer orden en el valor de la cartera de bonos. Cabe resaltar que en las últimas semanas del periodo de estudio las pérdidas disminuyen. Esto es, debido a que recientemente los valores de los rendimientos han disminuido y en consecuencia se generan pérdidas en el valor del portafolio.

De la misma manera que se desarrolló para los portafolios analizados anteriormente también se verificó el supuesto de normalidad. En ambos casos, los rendimientos al vencimiento del día 4 de septiembre de 2014 se tomaron como los rendimientos iniciales. Los valores  $p$  de la prueba de Shapiro-Wilk fueron del orden de  $10^{-16}$ . Asimismo, hay una discrepancia entre los cuantiles de la distribución de los datos y la distribución normal en las gráficas Q-Q de las Figuras 3.45 y 3.46. Con las dos pruebas que se hicieron para verificar el supuesto de normalidad se concluye que el supuesto anterior se rechaza. Por lo tanto, bajo el método de varianza-covarianza se tiene una subestimación del riesgo. Incluso, se hace la prueba de Anderson-Darling con el fin de probar si las pérdidas se distribuyen  $t$ -Student con 10, 100, 1000 y 10000 grados de libertad. Se propusieron grados de libertad grandes y pequeños para probar si una distribución  $t$ -Student, con cualquiera de los grados de libertad propuestos, modele la distribución de las pérdidas. Con todos los grados de libertad propuestos se rechaza la hipótesis que ambas muestras de pérdidas se les ajuste dicha distribución. De hecho, los resultados obtenidos de las pruebas de bondad de ajuste concuerdan con los histogramas de las respectivas muestras de las pérdidas de las

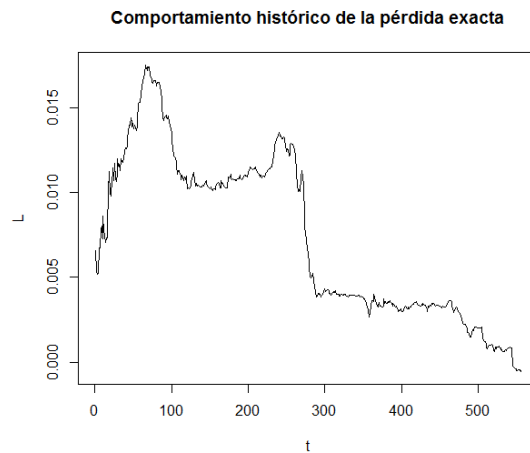


Figura 3.43: *Comportamiento histórico de la pérdida en el valor del portafolio en forma exacta (portafolio E).*

Figuras 3.47 y 3.48. En ambos casos se aprecian dos modas en la distribución.

### 3.3.2. Estimación del VaR y el EVaR

Con las muestras de pérdidas se estiman el VaR y el EVaR de la misma manera que se hizo para los portafolios de las Secciones 3.1 y 3.2. El método POT, a pesar de que subsana las deficiencias de los otros dos métodos, tiene una limitación: se requiere de una muestra grande de excedentes independientes para estimar adecuadamente los parámetros de la GPD. Tanto en la muestra de pérdidas calculadas en forma exacta como aquellas que se calcularon mediante la aproximación de primer orden de la pérdida, después de aplicar el método de corridas, el tamaño de la muestra resultante fue menor que 10. Los tamaños de muestra de los excedentes independientes fueron demasiado pequeños para estimar los parámetros  $\epsilon$  y  $\beta$  de la GPD. Por ello no se aplicaron los métodos POT y de verosimilitud de perfiles. Las Tablas 3.14 y 3.15 presentan las estimaciones del VaR y EVaR puntual y por los intervalos de confianza. En ambas tablas se observa que el VaR puntual obtenido por el método histórico es mayor que el que se obtuvo por la aproximación varianza-covarianza. No obstante, en el caso del EVaR los papeles se intercambian. Los intervalos obtenidos para el VaR por remuestreo Bootstrap contienen a los in-

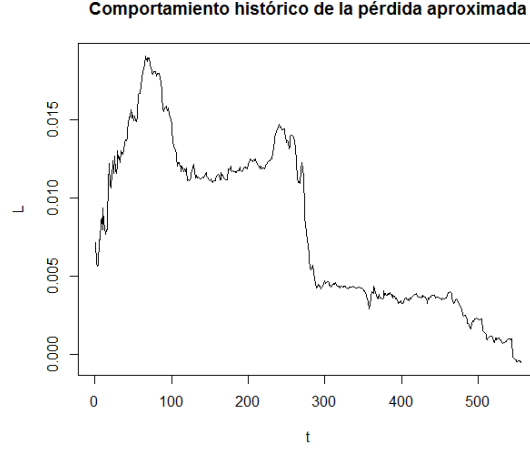


Figura 3.44: *Comportamiento histórico de la aproximación de primer orden de la pérdida en el valor del portafolio (portafolio F).*

tervalos asociados al método de varianza-covarianza. En el caso del EVaR ningún intervalo contiene al otro, solamente se intersectan. Las estimaciones que se obtuvieron para la pérdida exacta y su aproximación de primer orden son distintas a pesar de que la composición es la misma en ambos casos (ver Tablas 3.14 y 3.15). Esta afirmación se esperaba, puesto que una aproximación de primer orden de la pérdida no es suficiente para proporcionar resultados similares con la forma exacta. Más aún, ambos métodos coinciden que bajo la aproximación de primer orden hay una sobreestimación del VaR y el EVaR.

Tabla 3.14: *Estimaciones del VaR y el EVaR para la cartera de bonos cuya pérdida se calcula en la forma exacta. Monto=\$ 1.00, Tiempo= 1 día.*

Método	Var-Covar	Histórico
VaR	0.0152	0.0153
IC VaR	<b>(0.0149 , 0.0156)</b>	<b>(0.0141, 0.0164)</b>
EVaR	0.0172	0.0166
IC EVaR	<b>(0.0168, 0.0176)</b>	<b>( 0.0158, 0.0169)</b>

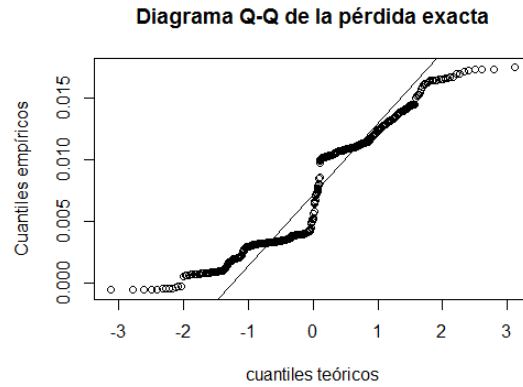


Figura 3.45: Gráfica Q-Q para la prueba de normalidad de la muestra de la pérdida exacta (portafolio E).

Tabla 3.15: Estimaciones del VaR y el EVaR para la cartera de bonos cuya pérdida se calcula por su aproximación de primer orden. Monto=\$ 1.00, Tiempo= 1 día.

Método	Var-Covar	Histórico
VaR	0.0166	0.0167
IC VaR	<b>(0.0162 , 0.0169)</b>	<b>(0.0154, 0.0179)</b>
EVaR	0.0188	0.0181
IC EVaR	<b>(0.0183, 0.0192)</b>	<b>(0.0172 , 0.0185)</b>

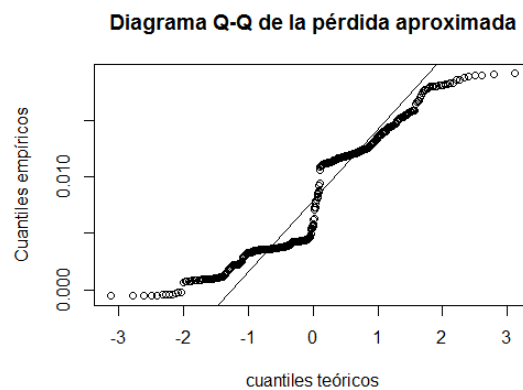


Figura 3.46: Gráfica Q-Q para la prueba de normalidad de la muestra de la aproximación de primer orden de la pérdida (portafolio F).

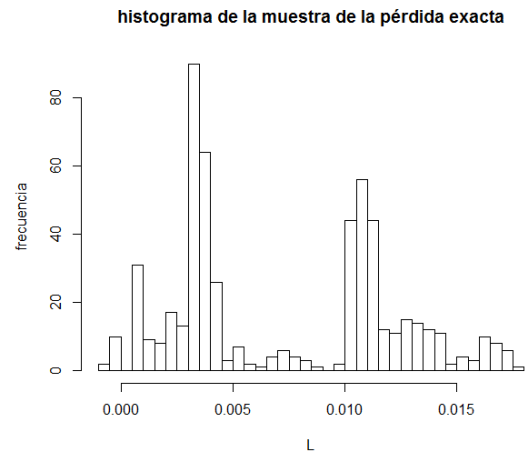


Figura 3.47: *Histograma de la pérdida en el valor del portafolio en forma exacta (portafolio E).*

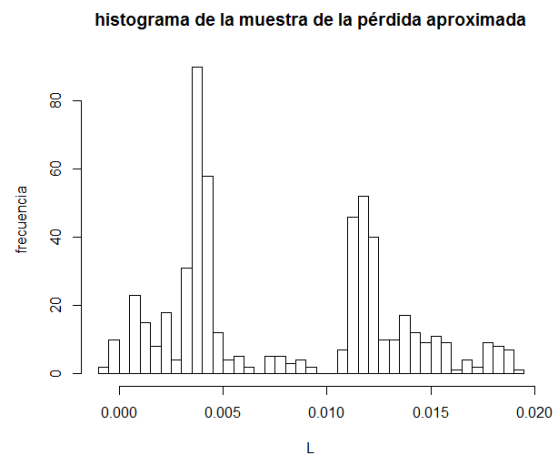


Figura 3.48: *Histograma de la aproximación de primer orden de la pérdida en el valor del portafolio (portafolio F).*



# Conclusiones

En el presente trabajo se analizaron algunas medidas de riesgo de mercado que se han utilizado a lo largo del tiempo. Los inversionistas buscan cuantificar el riesgo al que se exponen al invertir en un portafolio de inversión. De estas medidas se estudiaron el VaR y el EVaR. El VaR es una medida popular y muy utilizada para regular la situación financiera de las empresas y de esa manera determinar la cobertura necesaria para compensar casi cualquier pérdida que se presente. El EVaR es una medida coherente de riesgo en comparación con el VaR.

En los tres portafolios que se analizaron se observó que en ningún caso se cumple el supuesto de normalidad a través de la prueba de bondad de ajuste de Shapiro-Wilk por lo que no es viable aplicar la aproximación de varianza-covarianza ni el método Monte Carlo suponiendo una distribución normal de los rendimientos. De hecho, la aproximación de varianza-covarianza subestima el riesgo debido a que menosprecia la probabilidad de que ocurran los valores extremos de la distribución de pérdida. En cambio, el método histórico no presupone una distribución para las pérdidas, únicamente emplea la muestra histórica de las pérdidas en el valor del portafolio de inversión. El método histórico tiene el inconveniente que la distribución empírica se construye a partir de una muestra.

Además, con base en la muestra que se dispone es el conocimiento que se obtiene de la distribución de las pérdidas. En algunos casos se puede observar que las pérdidas exhiben colas pesadas en su distribución. No obstante, la distribución se aproxima con base en una muestra de pérdidas históricas. Por lo tanto, se requiere de un tamaño grande de muestra para tener una buena aproximación tanto en la distribución de la pérdida como en las estimaciones del riesgo. Más aún, el VaR y

el EVaR son dos medidas que se localizan en la cola de la distribución. Al ubicarse en esa región, si no se tienen suficientes datos de la cola las estimaciones son “pobres”. Además, se obtuvieron intervalos de confianza del VaR y el EVaR. Las estimaciones puntuales no son suficientes en el sentido que es muy poco probable que el valor de un parámetro sea igual a su valor estimado que se obtuvo previamente. En particular, dado que en el método histórico se cuenta con una muestra de pérdidas entonces a través de métodos de remuestreo como el Bootstrap se estiman los intervalos de confianza. Cuando se realiza el remuestreo de la muestra original se genera un número de submuestras aleatorias. En cada una se estiman el VaR y el EVaR. Esto es equivalente a aplicar varias veces el método histórico y tener distintas réplicas del VaR y el EVaR. Con base en las distribuciones empíricas que generan las respectivas muestras del VaR y el EVaR se obtuvieron los intervalos de confianza de cada uno. Esta idea es buena hasta cierto punto. El método histórico no es capaz de generar nuevos escenarios que permiten al inversionista cubrirse ante ellos. En consecuencia, el método Bootstrap tampoco posee esta cualidad.

Debido a lo anterior y dado que la información de la cola es insuficiente se recurrió a la Teoría del Valor Extremo, en particular, el método de Picos Sobre el Umbral (POT). Este método hace una estimación de la cola de la función de distribución de las pérdidas a partir de cierto umbral. La estimación de la cola se hace a través de una muestra de excedentes independientes, la cual se obtuvo por medio del método de corridas. El método POT parte del supuesto que los excedentes se modelan mediante una Distribución Pareto Generalizada. Por medio de la prueba de bondad de ajuste de Anderson-Darling se verificó que este supuesto se cumpliera para cada portafolio. Al cumplirse el supuesto se garantiza la consistencia de las estimaciones del VaR y EVaR. El método POT, a diferencia del método histórico, es capaz de generar nuevos escenarios dado que se tiene para ello la distribución Pareto generalizada.

De los tres métodos que se analizaron para estimar el VaR y el EVaR, el método POT modela mejor el problema real. El método POT se aplicó solamente al portafolio compuesto únicamente por acciones y al portafolio conformado por las cinco acciones del portafolio anterior más el tipo de cambio. A pesar de las ventajas que posee este método tiene una limitación: se necesita un tamaño de muestra considerablemente grande para estimar los parámetros de la GPD. Si no se tiene, entonces se incurre en un error de estimación relativamente grande de los parámetros. En el caso del portafolio de bonos se vio reflejada esta limitación. El tamaño de muestra de los excedentes, después de aplicar el método de corridas, fue menor que 10 sin

importar el umbral que se eligiera. No obstante, se aplicaron las otras dos metodologías al portafolio de bonos. Con base en la muestra histórica de los incrementos en cada uno de los rendimientos al vencimiento de los bonos se calcularon sus respectivas pérdidas de manera “exacta” junto con su aproximación de primer orden. Comúnmente en las empresas se emplea la última. Ya que la aproximación de primer orden de la pérdida, para un portafolio de bonos, arroja resultados distintos en comparación con aquellos que proporciona la pérdida exacta, las estimaciones que se obtuvieron del VaR y el EVaR por la aproximación de primer orden de la pérdida difieren de las estimaciones que se obtuvieron de la pérdida exacta tanto por el método de varianza-covarianza como el histórico.

En los portafolios de las Secciones 3.1 y 3.2 se estimaron los parámetros de la GPD mediante el método de Máxima Verosimilitud (MV). Lo anterior dio pauta a emplear el método de Verosimilitud de Perfiles, el cual se relaciona con el método de MV, para obtener intervalos de confianza. Los intervalos de confianza estimados por los métodos Bootstrap y de verosimilitud de perfiles se intersectan. En el caso del portafolio de acciones se analizaron los portafolios A, B, C y D y se llegó a la conclusión que, con base en los datos, el riesgo al que se expone el inversionista que invierte de acuerdo a la solución del modelo de Markowitz es menor al que tendría si invirtiera de manera uniforme en cada una de las acciones, lo cual es natural en el método de varianza-covarianza pero no para el método histórico o POT.

En suma, de acuerdo con los resultados obtenidos en este trabajo para un portafolio de inversión se recomienda emplear el método POT para estimar el VaR y el EVaR de manera puntual. Sin embargo, cuando no se dispone de un tamaño de muestra suficientemente grande de excedentes después de emplear el método de corridas es preferible utilizar el método histórico y en ambos casos complementar las estimaciones puntuales mediante intervalos de confianza.

Creemos que este trabajo contribuye a entender de mejor manera instrumentos de riesgo financiero, como el VaR y el EVaR. En consecuencia se ofrecen mayores herramientas de decisión, en particular al ofrecer intervalos de confianza más adecuados metodológicamente a los ofrecidos a través de métodos tradicionales como el método de varianza-covarianza. Lo anterior, como resultado del análisis y la aplicación de procedimientos estadísticos al estudio de datos provenientes del sector financiero.



# Apéndice A

## Anexo

### A.1. Pruebas de bondad de ajuste

En esta sección se muestra un cuadro donde se describen algunas pruebas de bondad de ajuste. Para cada una se explican los supuestos que éstas siguen. En el presente trabajo no se profundiza en este tema ya que sólo se trabajan con dos de las pruebas. Si se desea conocer más sobre el tema, las pruebas se pueden consultar en el artículo *Power comparisons of Shapiro-Wilk, Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors and Anderson-Darling tests* (2011) [10]. La Tabla A.1 describe algunas pruebas de hipótesis.

Tabla A.1: Pruebas de bondad de ajuste.

Método	Estadístico	Características
Shapiro-Wilk	$W_x$	Asume que los parámetros son desconocidos. En el método se usa un vector constante obtenido a partir del valor esperado y de la matriz de covarianza del vector de estadísticos, los cuales deben ser conocidos. Si no se conocen, existen métodos numéricos para tener una aproximación de ese vector. El estadístico $W_x$ no se puede calcular analíticamente. La potencia de la prueba aumenta conforme aumenta el tamaño de muestra. El inconveniente es que, mediante esta prueba, únicamente se puede probar si a una muestra aleatoria se le puede ajustar una distribución normal.
Anderson-Darling	$W_n^2$	Se basa en las funciones de distribución teórica y empírica. Es una prueba no paramétrica. No se requiere del conocimiento de los parámetros de la distribución teórica. A diferencia de la prueba de Shapiro-Wilk, en la hipótesis nula se puede proponer cualquier distribución de probabilidad continua. Hace énfasis en las colas de la distribución.
Kolmogorov-Smirnov	$D$	Se aplica a funciones de distribución continuas. Usa la función de distribución empírica y la compara con la teórica a través de una medida de distancia. Asume que se conocen los parámetros.
Lilliefors	$D$	Es una prueba similar a la de Kolmogorov-Smirnov con la diferencia que en este caso sí se puede aplicar la prueba aunque no se conozcan los parámetros. Las regiones de rechazo de esta prueba son diferentes de las de Kolmogorov-Smirnov aunque el estadístico también se defina de la misma manera.

# Bibliografía

- [1] Campa Rojas Maria Antonieta. *Teoria de valores extremos con aplicaciones a medidas de riesgo*. Universidad Nacional Autónoma de México. México. 2001.
- [2] Crouhy Michel, Galai Dan and Mark Robert. *Risk Management*. Ed. McGraw-Hill. USA. 2001.
- [3] Davison, A. C. and Hinkley, D. V. *Bootstrap Methods and their Application*. Cambridge University Press. USA. 1997.
- [4] Glasserman Paul. *Monte Carlo methods in Financial Engineering*. Springer. USA. 2003.
- [5] Luenberger David. *Investment Science*. Ed. Oxford University Press. U.S.A. 1998.
- [6] McNeil Alexander J., Frey Rüdiger and Embrechts Paul. *Quantitative Risk Management Concepts, Techniques and Tools*. Ed. Princeton University Press. U.S.A. 2005.
- [7] Mikosch Thomas. *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*. World Scientific Publishing. Singapore. 1998.
- [8] Nuñez Gabriel. *Introducción al Bootstrap y sus aplicaciones*. Memorias XIV Ford Nacional de Estadística en González-Barrios, J. M., Ruiz, S. Molina, A. Eds. INEGI. México. 1999.
- [9] Papaioannou Michael. *Exchange Rate Risk Measurement and Management: Issues and Approaches for Firms*. International Montetary Fund. 2006.

- [10] Razali Nornadiah and Wah Yap Bee. *Power comparisons of Shapiro-Wilk, Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors and Anderson-Darling tests*. Journal of Statistical Modeling and Analytics. Vol. 2 No. 1. Faculty of Computer and Mathematical Sciences. Malaysia. 2011.
- [11] Ross Sheldon. *Simulation*. Second edition. Ed. Pearson Prentice Hall. Traductor Palmas Óscar. México. 1999.
- [12] Saavedra Patricia y V. Ibarra M. *Método Montecarlo en Finanzas*. Universidad Autónoma Metropolitana. México. 2008.
- [13] Yahoo Finanzas. Precios históricos. <https://mx.finanzas.yahoo.com/>. México.
- [14] Banco de México. Tasas de interés y tipo de cambio. <http://www.banxico.org.mx/>. México.





Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

# ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00121

Matrícula: 2123802953

ESTIMACION DEL RIESGO EN  
PORTAFOLIOS DE INVERSION

En México, D.F., se presentaron a las 13:00 horas del día 10 del mes de marzo del año 2015 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. GABRIEL ARCANGEL RODRIGUEZ YAM  
DRA. MARISSA DEL ROSARIO MARTINEZ PREECE  
DR. GABRIEL NUÑEZ ANTONIO  
DRA. PATRICIA SAAVEDRA BARRERA

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretaria la última, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS APLICADAS E INDUSTRIALES)

DE: JAIME IVAN URBINA RUGERIO

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.



JAIME IVAN URBINA RUGERIO  
ALUMNO

REVISÓ

LIC. JULIO CESAR DE LARA ISASSI  
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JOSE GILBERTO CORDOBA HERRERA

PRESIDENTE

DR. GABRIEL ARCANGEL RODRIGUEZ YAM

VOCAL

DRA. MARISSA DEL ROSARIO MARTINEZ  
PREECE

VOCAL

DR. GABRIEL NUÑEZ ANTONIO

SECRETARIA

DRA. PATRICIA SAAVEDRA BARRERA