

**UNIVERSIDAD AUTONOMA
METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA**

✓ **DIVISION DE CIENCIAS SOCIALES Y HUMANIDADES**

TESINA

✓ **LENGUAJES FORMALES DE LA LÓGICA DE**

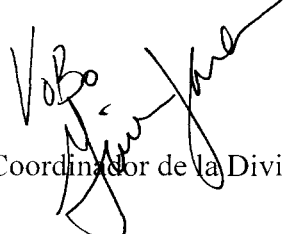
PREDICADOS

PARA LA

✓ **LICENCIATURA EN FILOSOFÍA**

✓ **por: MENDOZA TAVERA OSCAR DAVID.**




Coordinador de la División de Filosofía: Guillermo Zambrana
Febrero de 2001

En este curso he tratado de revelar el mecanismo de esos juguetes maravillosos que son las obras maestras de la literatura. He tratado de hacer de vosotros buenos lectores, capaces de leer libros, no con el objeto infantil de identificarse con los personajes, no con el objeto adolescente de aprender a vivir, ni con el objeto académico de dedicarse a generalizaciones. He tratado de enseñaros a leer libros por amor a su forma, a sus visiones, su arte. He tratado de enseñaros a sentir un estremecimiento de satisfacción artística, a compartir no las emociones de los personajes del libro sino las emociones del autor: las alegrías y las dificultades de la creación. No hemos hablado sobre libros; hemos ido al centro de esta o aquella obra maestra, al corazón vivo de la materia

VLADIMIR NABOKOV

CONTENIDO

PREFACIO

INTRODUCCIÓN

I. LENGUAJES FORMALES EN EL PERIODO DE CONFORMACIÓN DE LA LÓGICA

I.1. Frege. I.2. Russell-Whitehead. I.3. Ackerman-Hilbert

II. LENGUAJES FORMALES EN EL PERIODO DE CONSOLIDACIÓN DE LA LÓGICA

II.1. Kleene. II.2. Church. II.3. Mendelson

III. TRES LENGUAJES FORMALES EN LA ACTUALIDAD

III.1. Smullyan. III.2. Rogers. III.3. Shoenfield

APENDICE

CONCLUSIONES

BIBLIOGRAFÍA

PREFACIO

El tema de mi tesina es: lenguajes formales para la lógica de predicados o teorías de primer orden. En particular sólo en diferentes libros seleccionados -bajo mi responsabilidad- por su importancia en la conformación y consolidación de la lógica. En este trabajo no considero a los lenguajes formales como lenguajes artificiales al modo de los lingüistas. Lenguaje artificial puede ser el lenguaje de la pintura, la escultura, el cine, los gestos mímicos, etc. No así un lenguaje formal, que es un constructo específico bien delimitado para la lógica. En ningún momento aplicare ambos términos como sinónimos.

Comenzaré explicando qué son los lenguajes formales. En el capítulo uno presentaré el lenguaje de la Begriffsschrift (1879) de Frege, de Principia Mathematica Vol. 1 (1910) de Whitehead y Russell, el Grundzüge der Theoretischen Logik (1928) de Ackerman y Hilbert. El periodo comprendido en este capítulo va de 1879 -cuando se publicó la primera edición de la obra de Frege- a 1928 cuando apareció el trabajo de Hilbert y Ackerman.

En el segundo apartado presentaré tres lenguajes formales de la siguiente generación. Son, Introduction to Metamathematics (1952) de Kleene, Introduction to Mathematical Logic (1956) de Church, Introduction to Mathematical Logic (1964) de Mendelson.

En el tercero presentaré los lenguajes formales extraídos de First-Order Logic (1971) de Smullyan, Mathematical Logic (1971) de Rogers, Mathematical Logic (1967) de Shoenfield.

La utilidad de mi trabajo está en mostrar como se han construido lenguajes formales en diferentes periodos. Estoy consciente que la elección de estos libros refleja parcialmente el desarrollo de los lenguajes formales, y no en la amplitud deseada como lo sería una historia de los lenguajes formales.

INTRODUCCIÓN

Una -de entre todas- las ocupaciones importantes de la lógica matemática es la formalización de procedimientos válidos de razonamiento¹ y para lograr esto es preciso construir un lenguaje formal con símbolos iniciales y reglas de formación precisas, aplicables a los símbolos iniciales que sea capaz de reflejar en diferentes niveles las expresiones que conforman una demostración. Los lenguajes formales son entendidos como un conjunto de signos no ambiguo donde únicamente está todo aquello declarado como perteneciente a él. Por tanto, una demostración será una sucesión finita de signos carentes de significado y la derivación de teoremas estará limitada a una transformación de sucesiones siguiendo las reglas de inferencia.

El lenguaje formal es el primer elemento de los sistemas axiomáticos formales. Están organizados en: 1) un lenguaje formal, 2) un conjunto de reglas de inferencia, 3) un conjunto de axiomas, 4) la noción de prueba y 5) la noción de teorema. Los sistemas axiomáticos más sencillos de la lógica matemática son los llamados cálculos de enunciados, y los siguientes en complejidad cálculos de predicados o también llamados teorías de primer orden. Históricamente los sistemas formales son el perfeccionamiento del método axiomático, iniciado por matemático alemán David Hilbert (1842-1943) iniciados a principios de este siglo

En un lenguaje formal las expresiones y las oraciones de un lenguaje formal son perfectamente definidas puesto que una palabra mantiene el mismo significado prescindiendo de contexto o uso. El sentido de los símbolos es determinado exclusivamente por la sintaxis, sin referencia a ningún contenido semántico, un termino y una fórmula bien formada puede denotar cualquier cosa, y solamente los conectivos tienen significados específicos. Los lenguajes formales para el calculo de enunciados y predicados constan de dos elementos básicos: símbolos

¹ Sánchez Pozos. Notas de curso. ESFM. IPN. 1994. PÀG. 9

iniciales, y reglas de formación. Para el caso de los lenguajes formales para el cálculo de predicados los símbolos iniciales se dividen en símbolos descriptivos, constantes lógicas y símbolos auxiliares. Los símbolos descriptivos se subdividen en variables individuales, constantes individuales, letras predicativas, letras funcionales. Una variable es un elemento que recorre el dominio del discurso, esto es, el denotado de una variable individual no es único. Las constantes individuales, son nombres de objetos únicos, nombres cuyo denotado consta de un elemento. El universo del discurso esta constituido por los individuos, las propiedades y relaciones que entre ellos se establece. Se considera a los elementos más simples de un lenguaje formal como indefinibles puesto que en el dominio del discurso los nombres adquieren rasgos que los hacen inteligibles. Así, los símbolos descriptivos son aquellas expresiones que poseen un sentido específico en un área del conocimiento. Los funtores (nombre de función) son las frases nominativas y de ellas no se puede decir si son verdaderas o falsas. El denotado de un nombre de función es una función y no el valor de verdad. Las formas bien formadas o también llamadas “fbf” son las afirmaciones acerca de objetos. Por este motivo las expresiones del lenguaje formal son apofánticas, asertóricas, bivalentes y extesionales. Esto es, deja fuera de consideración aquellos enunciados de los que no pueda preguntarse con sentido si son verdaderas o falsas, y excluye la existencia de modalidades de verdad y falsedad. Esto quiere decir: únicamente admite dos valores de verdad. Las expresiones -un nombre, un enunciado- poseen un denotado.

El segundo componente, las reglas de formación tratan acerca de la estructura sintáctica de las expresiones, del cómo siguiendo una serie de pasos claros y perfectamente expresados puede construirse expresiones de mayor complejidad sintáctica. Al construir los lenguajes formales, en las reglas de formación se señala todas las expresiones básicas y cuales pueden formarse a partir de éstas en nuevas expresiones más complejas. Así, las reglas de formación marcan la diferencia con respecto a los lenguajes naturales. Colocar la cláusula de cerradura en las reglas de formación como el último paso para términos y formas bien formadas indica el carácter finitario del lenguaje, entendido como una definición inductivo recuersiva. En la construcción de los lenguajes formales se da por sentado ciertos requisitos que evidentemente no es preciso introducir explícitamente en la construcción. Por ejemplo, a todos los objetos les debe estar asociado un nombre de función y un nombre de relación de su misma naturaleza². Además, a todos los objetos con sus propiedades y relaciones se les asocian diferentes nombres. Esto es, los lenguajes formales no deben ser ni ambiguos ni insuficientes para designar los objetos de una clase dada. En mi opinión y en concordancia con la teoría fregeana del nombre ambos presupuestos pueden elevarse al rango de principios, evitando la homonimia en el primero de los casos y asegurando la unicidad del denotado para el segundo. En suma, los lenguajes formales son caracterizados por las siguientes propiedades: i) Se desarrollan en una teoría preestablecida; ii) Poseen un componente semántico mínimo; iii) Poseen la posibilidad de incrementar el componente semántico de acuerdo con la teoría a formalizar; iv) La sintaxis produce oraciones no ambiguas;

² Stoylar. Introduction Elementary Mathematical Logic. Dover Publication, Inc. (traslate by Elliot Mendelson)

v) Se acentúa la importancia del rol de los números; vi) La completa formalización.

El lenguaje formal del que venimos hablando para la lógica de predicados responde a las necesidades de expresar con mayor profundidad las demostraciones matemáticas.

:

Lenguaje formal. L_{cp}

SÍMBOLOS INICIALES

Símbolos descriptivos

variables individuales	x_i ($i \in \mathbb{N}$)
constantes individuales	a_i ($i \in \mathbb{N}$)
letras predicativas	A_j^n ($n, j \in \mathbb{N}$)
letras funcionales	f_j^n ($n, j \in \mathbb{N}$)

Constantes lógicas

conectivas	$\neg, \supset$
cuantificadores	$\exists, \forall$

Símbolos auxiliares	$(,)$
---------------------	--------

REGLAS DE FORMACIÓN

Términos (simples y compuestos)

1. Toda variable individual y toda constante individual por sí solas son términos.
2. Si $t_1, t_2, \dots, t_n$ son términos y h_i^n es una letra funcional de aridad n entonces $h_i^n(t_1, t_2, \dots, t_n)$ es un término.
3. Solo aquello que se obtiene de los puntos 1 y 2 es un término.

Formas bien formadas

1. Si $t_1, t_2, \dots, t_n$ son términos y A_j^n es una letra predicativa de aridad n entonces $A_j^n(t_1, t_2, \dots, t_n)$ es una fbf.
2. A y B son fbf, entonces $(\neg A)$, $(A \supset B)$ también son fbf moleculares.
3. Si α es una variable individual y A es una fbf, entonces $(\forall \alpha A)$

NOCIONES SEMÁNTICAS

1. Alcance de un cuantificador: En las fbf del tipo $(\exists \alpha A)$ y $(\forall \alpha A)$ a A se le llama alcance del cuantificador $\exists \alpha$ o $\forall \alpha$, respectivamente, con la variable dada α .
2. Ocurrencias libres y ligadas de una variable: Una ocurrencia de una variable α en A es ligada si y solo si α es la variable de un cuantificador $\forall \alpha$, $\exists \alpha$ o bien ocurre en el alcance de dicho cuantificador (con α precisamente en calidad de variable). En caso de que esto no suceda se dice que dicha ocurrencia de α es libre (es una ocurrencia libre de α en la fbf A).
3. Variables libres y ligadas: Una variable individual α es una variable libre (ligada) en una fbf si y solo existe al menos una ocurrencia libre (ligada) de α en A .
4. Término libre para una variable e una fórmula: Se dice que un término t es libre para una variable individual α en una fbf A si ninguna ocurrencia libre de α está en el alcance del alcance de un $\forall \beta$ o $\exists \beta$ en donde β es una variable que ocurre en t .
5. Cerradura de una fbf: Si en la fbf A existen $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$ en calidad de variables libres, a la fórmula bien formada $A' \approx: x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n} A$ se le llama la cerradura de A .
6. Enunciados: Se le llama enunciado a toda fbf A sin variables libres.

I. LENGUAJES FORMALES EN EL PERIODO DE CONFORMACIÓN DE LA LÓGICA

A principios del siglo XX tres eran las corrientes sobre fundamentos de la matemática: logicismo, formalismo, intuicionismo. El logicismo, en términos generales, planteaba la reducción de la matemática conocida hasta el momento a la lógica; antes de realizar tal reducción era necesario un lenguaje formal idóneo. Mientras que para los formalistas, el problema de la no-contradicción de los sistemas formales era central, soslayando el tema de los lenguajes formales. Y los intuicionistas consideraban a la matemática como una actividad mental cuyos resultados se comunican subsiguientemente por medio del lenguaje³ cotidiano.

En este periodo de la lógica, logicismo y formalismo prestaron importancia -en menor o mayor medida- al lenguaje, con el propósito de desterrar las ambigüedades en los procesos de razonamiento matemático y tratar los problemas relativos a las propiedades de los sistemas formales. El padre del logicismo, el matemático y lógico alemán Gottlob Frege (1848-1925) se había propuesto como meta desterrar el psicologismo reinante en lógica y las ambigüedades en las demostraciones matemáticas, como primer paso ideó un lenguaje bidimensional expuesto en el *Begriffsschrift* (1878) que como sabemos, es el primer trabajo moderno de lógica. En él no están expuestas temas semánticos como la completud, no-contradicción, e independencia de los axiomas. Los comentadores de la obra fregeana están de acuerdo en que él fue más allá que sus predecesores en el rigor formal de la lógica. En el *Begriffsschrift* Frege aboga por la separación del lenguaje natural del lenguaje formal. El simbolismo empleado por él es adecuado para los propósitos impuestos. La notación resolvía el inconveniente de las demostraciones matemáticas basadas en supuestos intuitivos, y evitaba lagunas en las cadenas deductivas.

Frege tomó en cuenta dos mejoras en la lógica, sencillez y claridad en la presentación incorporando todos los avances de Boole a Leibniz y, además, la presentación de todos los elementos que se requieren para las demostraciones. En la parte primera de la *Begriffsschrift* Frege expone los símbolos, o mejor dicho, da las notas para comprender el modo en que deben ser empleados bajo en una presentación por lo demás muy particular.

Desde mi perspectiva, dos pueden ser las visiones sobre el problema del lenguaje formal en Frege. Una representada por Bochenski y Christian Thiel⁴, y otra en contra -por decirlo así- representada por el matrimonio Kneale. Christian Thiel asegura que para Frege "resulto evidente que el lenguaje natural no permitía la

³ Bochenski. *Historia de la lógica formal*. Gredos. 2ª reimpresión. 1985. (traducción de Millán Bravo Lozano). Pág. 307

⁴ Thiel. *Sentido y referencia en la obra de Gottlob Frege*. Tecnos. Madrid. (traducción de Jose Sanmartín Espluga) pág. 22

formulación de cadenas deductivas" y "se vio obligado a desarrollar un lenguaje artificial" para cumplir la exigencia en precisión de las deducciones. Bochenski sostiene que es precisamente la bidimensionalidad de la notación la que da un toque innovador. En comparación con el lenguaje hablado, un lenguaje escrito sí es posible consultarlo en cualquier momento y por ello goza de superioridad. Para Bochenski el lenguaje bidimensional de Frege es el ideal por la simplicidad, aunada a la funcionalidad en la notación para la claridad en las relaciones lógicas.

Los Kneale opinan que el simbolismo fregeano es engorroso no sólo por la diversidad de tipografía de las letras, sino, además, por la disposición bidimensional de las formulas. Todo lo cual acabaría determinando el desplazamiento de los lenguajes formales en los que únicamente se precisa de una disposición unidimensional, donde es necesario un número reducido de signos. Por otro lado, no dejan de restarle méritos y afirman:

"Aunque el empleo de letras destinadas a expresar la universalidad sin la ayuda de cuantificadores aparece en la caracterización fregeana del lenguaje simbólico como un simple recurso económico, se trata históricamente del uso más antiguo que de las variables se haya hecho en el dominio de la lógica y la matemática; y a ello se debe que esas letras recibieran la denominación de variables reales, en tanto las ligadas por prefijos se denominaran variables aparentes. El gran mérito de esta notación radica en permitirnos la construcción de enunciados en múltiples aspectos como si se tratara de enunciados singulares."⁵

Frege consideraba a las funciones como un componente estable que representa la totalidad de las relaciones, las propiedades de los objetos que las satisfacen. Las funciones se dividen en funciones de primer nivel que son las funciones cuyos argumentos son objetos; las funciones de segundo nivel que son funciones cuyos argumentos son funciones. Frege es muy preciso al decir que lo importante de una función es la parte invariante, en $f(x)$, $f()$ es la parte que permanece constante en la función, y x es el argumento que satisface a la función. Para Frege la distinción entre función y argumento nada tiene que ver con el contenido conceptual. Algo ya conocido en matemáticas y que Frege remarca es que la naturaleza del argumento y la función son heterogéneos, el argumento es un número y la función no. Los argumentos de las funciones de primer grado son objetos, y los argumentos de las funciones de segundo grado son funciones. La naturaleza de los argumentos de las funciones de primer grado difiere totalmente de la naturaleza de las funciones de segundo grado.

Las relaciones para Frege son funciones diádicas y los argumentos de estas son las variables y sus valores son valores veritativos.

Frege puso énfasis en los de nombres de objeto y nombres de función. Nombres de objeto son nombres de objeto simples o variables y nombres de objeto único o constantes que tienen como denotado un elemento perfectamente reconocible. Para los nombres de objeto compuestos en el lenguaje natural tienen su correlato con las descripciones, u oraciones que pueden ser entendidas lo mismo que las ecuaciones conformadas de una parte constante o nombre simple y una parte

⁵ Kneale. The Development of Logic. Oxford, 1988. Pág. 705.

que necesita completarse o nombre de función. Son los enunciados sobre los que se puede asegurar si son verdaderos o falsos. Frege añade que la *forma lingüística* de estos son los enunciados aseverativos.

En resumen, Frege justifica el lenguaje del siguiente modo: el lenguaje formal sirve para evitar fallas en las deducciones, i.e., en la evolución de los razonamientos matemáticos. El lenguaje natural por su origen es imperfecto, ambiguo puesto que hay casos en que una misma palabra designa a un objeto y un concepto al mismo tiempo. De esto surge la necesidad en crear un repertorio de símbolos (lenguaje formal) adecuados para expresar las relaciones lógicas de los razonamientos o deducciones.

Bertrand Russell (1873-1970) y Alfred North Whitehead (1861-1947) escribieron en colaboración *Principia Mathematica* publicados de 1910 a 1913. El objetivo central de *Principia* era la reducción de la matemática a la lógica. Por este motivo pusieron especial atención a la notación que emplearían. Utilizaron como punto de partida los trabajos de Peano y sus colaboradores.

En los *Principia Mathematica* no se considera que haya diferencia esencial entre lógica y matemática. Para ellos la lógica se dedica a examinar formalmente que puede decirse de los objetos o propiedades. La lógica requiere de un lenguaje en el cual todos los aspectos formales estuvieran englobados en la sintaxis. En este lenguaje deben de expresarse todas las proposiciones de la lógica. Para Russell, proposición y función proposicionales adquieren relevancia en el nivel semántico. Llama proposición a la forma verbal que expresa lo que es verdadero o falso. Función proposicional a una expresión que contiene uno o más componentes indeterminados que al asignarles valores, se convierte en una proposición cuyos valores son proposiciones. Por si misma, una proposición es como un cascaron que esta "preparada para recibir un significado, no algo significativo por si mismo" Las funciones proposicionales tienen interés de estar conectadas con las nociones de existencia y universalidad. Por otro lado, las descripciones son definidas o indefinidas, con un número indefinido de proposiciones que la hagan verdaderas, o definidas y verdaderas para un solo valor de verdad.

Como postura filosófica el reduccionismo desprendido de los *Principia* lego el llamado positivismo lógico que ha caído en desuso. Pero desde el punto de vista lógico dejaron el lenguaje formal.

Con otras finalidades y haciendo uso de otras herramientas el formalismo plantea otra perspectiva para los lenguajes formales.

En 1928 David Hilbert y Wilhelm Ackerman publican *Grundzüge der Theoretischen Logik*, quince años después de la aparición del último volumen de *Principia Mathematica*. En general, al igual que los logicistas no ven diferencia esencial entre la lógica y la matemática. Para ellos el problema esencial es la no-contradicción de los sistemas formales. Para resolver este problema se abocaron a generar sistemas formales sin interpretación, donde ni la evidencia ni la verdad de los axiomas representan un papel determinante. El método axiomático por el cual creían encontrar solución era aislar en el ámbito de una teoría enunciados que se consideran fundamentales (axiomas) de los que puede derivarse nuevos enunciados por medio de reglas precisas de razonamiento. Así mismo,

consideraban que la consistencia podría demostrarse por medio de métodos finitarios. Para los formalistas la axiomatización es el resultado de la madurez de una determinada teoría matemática. Para los formalistas la elección de los símbolos no tiene nada de fundamental, depende de los intereses o preferencias.

Los símbolos iniciales en sí mismos pueden no ser objeto de una rigurosa definición, puesto que se les asigna un sentido definido en ciertas condiciones de empleo. Por ello, desde un punto de vista intuitivo podemos pensar que una constante es un símbolo que denota un objeto perfectamente determinado y una variable es un elemento que recorre el dominio del discurso.

Es importante recalcar que la construcción del lenguaje formal en *Grundzüge der Theoretischen Logik* es más cercana al modo como se construyen en el periodo de consolidación de la lógica y la actualidad.

En el prefacio del libro a la primera edición alemana, Hilbert explica que el libro es la confluencia de los trabajos realizados en colaboración con P. Bernays en cursos semestrales de 1917 a 1922. Y la colaboración de W. Ackerman en la preparación del material definitivo para la publicación del 28. En la segunda edición, Hilbert y Ackerman realizaron correcciones centradas sobre los desarrollos en las bases axiomáticas para el cálculo de enunciados -sin salirse de los límites originales del libro. Ellos agregaron correcciones en las reglas de inferencias para el cálculo de predicados. Hay otras correcciones menores como cambiar "conjunción" por "suma lógica" y "disyunción" por "producto lógico" de uso más difundido.

En términos generales el texto plantea la relación entre el método axiomático y el método semántico. En el libro están desarrollados el cálculo de enunciados y el de predicados, más una discusión de los problemas metodológicos más importantes de ambos cálculos. El último capítulo es una introducción a la lógica superior, donde es posible formalizar las teorías de clases y de relaciones y desarrollar la aritmética.

En mi opinión ya no es sustentable la división terminante entre formalismo y logicismo en lo referente al tema de los lenguajes formales. Y en general sobre los sistemas axiomáticos. Dado que se han entrelazado para conformar un cuerpo sólido para los siguientes desarrollos en lógica. Ahora, me gustaría mostrar como sería mi forma de presentar los lenguajes formales de este periodo, tomando como patrón en la construcción el presentado en la introducción. Como dije al principio del trabajo no agregué ni axiomas ni reglas de inferencia, que sí lo están en los originales, por la razón de que estos están en un nivel diferente en relación con los lenguajes formales. .

En alguna parte del trabajo hablaba de las posturas relativas al lenguaje de Frege. Pero, ¿cómo es ese lenguaje? Mejor aún, ¿cómo lo podrían ver los ojos de la lógica a más de un siglo de distancia? En el caso de los Principia, como se sabe, el lenguaje es el legado real a la lógica. ¿Cómo presentar el lenguaje bajo un estándar de rigor actual?. El lenguaje de Ackerman y Hilbert, ¿cómo espurgarlo para tener la presentación completa? Ahora doy mi versión de estos lenguajes presentados en orden cronológico. Empezando con el de Frege.

I.1 FREGE

En el caso de Frege, él mismo confiesa que solamente esta dando guías para la comprensión del lenguaje. Motivo por el cual no hay reglas de formación aun cuando se entiende como deben de formarse nuevas expresiones. No reproduciré, axiomas ni la regla de transformación, ni la de generalización, aun cuando seria interesante aislar el sistema completo.

Lenguaje formal de la Begriffsschrift⁶:

Símbolos iniciales

Símbolos indeterminados.

Letras que expresan generalidad:

p.j. $(a+b) c = ac + bc$

Símbolos determinados.

Letras que expresan unicidad.

p.j. 0, 1, 2

Funciones.

Son del tipo:

$\Phi(a)$

Juicio

Establece la verdad de la proposición. Esta compuesto por la barra del contenido –que establece en el lector la *idea* generada en él- y la barra del juicio.

Simbolizado por:

A

a). Juicios de generalidad: El juicio de que una función sea lo que sea a lo que se considere su argumento es un hecho.

Simbolizado como:

a $\Phi(a)$

⁶ Frege, G. Conceptografía. Los Fundamentos de la Aritmética. Otros Estudios. Unam. México. 1972. (traducción de Hugo Padilla). " Cap. I. Definición de los Símbolos" p 7-36

b). Juicios particulares: Se generan a partir del juicio de generalidad y la negación.
Simbolizado como:

$a \quad \Phi(a)$

Conectivos lógicos:

Barra de la negación.

Esta barra establece que el contenido del juicio no tiene lugar.

Simbolizada como:

$\neg$

Barra del condicional:

Entre ellos no es necesario que exista una relación causal.

Simbolizado como:

Definición de la conjunción y la disyunción en a base en la barra de la negación y la barra de la implicación.

Disyunción.

Conjunción.

Igualdad.

La igualdad de contenido se refiere a nombres, los nombres que tienen el mismo contenido puede establecerse por el contenido del juicio. Establece que A y B tienen el mismo contenido.

Simbolizado como:

I.2. RUSSELL-WHITEHEAD.

En mi opinión y después de haber tenido contacto directo con el lenguaje de los Principia está totalmente de acuerdo que estos legaron el lenguaje.

Lenguaje formal en Principia Mathematica. Vol.1 (1910) ⁷

A. Símbolos descriptivos

I. Símbolos

1. Variables.

(cualquier letra del alfabeto).

2. Constantes.

p, s

3. Funciones.

$\phi, \gamma, \dots, \Phi$

4. Relaciones.

R

5. Clases.

α

II. CONSTANTES LÓGICAS.

$\neg$ negación

$\supset$ implicación,

$\forall$ Cuantificador universal.

III. SIMBOLOS AUXILIARES.

(puntos)

B. REGLAS DE FORMACION.

⁷ Whitehead, A. N. & B. Russell. Principia Mathematica. Vol. 1. Cambridge University Presss. 2nd edition. Reprinted 1978. Introduction. 2th edition. Pp1-36

1. Funciones proposicionales.

$f(p)$ es verdadero o falso cuando p es una proposición y el valor de verdad de $f(p)$ depende únicamente del valor de verdad de p .

2. Clase.

Si α es una clase componente de objetos que satisfacen la función $\phi(x)$ diremos que α es determinada para $\phi(x)$ se representa por $\alpha(\phi(x))$

Relaciones.

Cualquier función $\phi(x, y)$ determina una relación R entre x y y . Si consideramos una relación como una clase de pares, la relación determinada por $\phi(x, y)$ es una clase de parejas para las cuales $\phi(x, y)$ es verdadera. Se representa por xRy .

FBF.

Tomando los rangos de las relaciones para $\phi(x)$ se tiene que.

1. Todos los rangos de las expresiones son verdaderas

$\phi(x)$. $\phi(x)$

1. Algunos de los rangos de las expresiones son verdaderos.

NOCIONES ANEXAS

Variables aparentes.

x en $\phi(x)$. $\phi(x)$ o en $E(x)$, $\phi(x)$ es un constituyente ambiguo en $\phi(x)$, $\phi(x)$ o $E(x)$. $\phi(x)$

Rango de x en $\phi(x)$. $\phi(x)$ o $E(x)$. $\phi(x)$ para cualquier campo de los valores de x es llamado el alcance de x , entendida como la función para todo valor de los que pueden ser afirmados.

Aseveración ambigua.

Cada valor de $\phi(x)$ en la función $\phi(x)$ puede ser aseverado, así tenemos que $\neg \phi(x)$ es llamada aseveración ambigua de $\phi(x)$

El último lenguaje formal de éste periodo es el de Ackerman y Hilbert. Lo expondré como sigue.

I.3. ACKERMAN-HILBERT

I Símbolos iniciales.

Ia.

Variables proposicionales.

$X, Y, Z, \dots$

variables individuales

$x, y, z, \dots$

variables predicado

$F(,), G(, ,), H(, , ,), \dots$

Ib.

Conectivos

$\&, \vee, \equiv, \neg,$

Cuantificadores.

$\forall, \exists$

II. Reglas de formación.

Formulas.

1. Las variables proposicionales son formulas.
2. Las variables predicado n -ádicas, tras la que se encuentra n variables individuales son formulas.
3. Si A es una formula $\neg A$ es también una formula.
4. Si A y B son formulas de tal tipo que la misma variable individual no aparezca en una ocurrencia libre y en la otra ligada, son expresiones: $(U \& B)$
 $(U \vee B), (U \rightarrow B), (U \equiv B).$
5. Sea $A(x)$ una formula en la que aparezca la variable x libre entonces, $(x)A(x)$ y $(\exists x)A(x)$ son formulas.
6. Una formula es solamente aquello que se muestra como tal tras una aplicación finita de las reglas 1 a 5.

III. Se llama a A el campo de afección del cuantificador del caso $(x)A(x)$ o $(\exists x)A(x)$. Se dice que la variable esta ligada en $(x)A(x)$ y en $(\exists x)A(x)$; se llamara a las demás variables o ligadas teniendo en cuenta que han de tener el mismo carácter que en A .

IV. Se dice que en una formula es válida en un campo de individuos cuando: si en dicha formula se sustituyen las variables proposicionales por proposiciones determinadas, las variables predicado n -ádicas por signos de predicado n -ádicos determinadas, definidos en el campo de

⁸ Hilbert. D. & Ackerman. W. Principles of Mathematical. Chelsea Publising Company New York, (traslate from German by Lewis M. Hammond, George C. Leckie, F. Steinhard) 1950 Chapter III. The Restrited Predicate Calculus. Pp 55-66.

individuos, y las variables individuales libres por objetos del campo de individuos, pero de tal modo que cada variable quede sometida de la misma manera en todos los lugares en que aparezca; la expresión se convierte en una proposición verdadera para toda sustitución de este tipo. V. Se dice que una fórmula es universalmente válida cuando es válida en todo campo de individuos no vacío.

VI. Se llama a una expresión cumplible en un campo de individuos cuando existe una sustitución de las variables proposicionales por proposiciones determinadas, de las variables predicado n -ádicas por predicados determinados del campo de individuos, tal que la fórmula se convierte en una proposición verdadera.

VII. Se dice que una proposición es simplemente cumplible cuando existe en general un campo de individuos no-vacío en el cual es cumplible. Una fórmula es cumplible siempre que la misma fórmula negada no sea universalmente válida y únicamente en este caso.

II. LOS LENGUAJES FORMALES EN EL PERIODO DE CONSOLIDACIÓN DE LA LÓGICA

En 1930 aparece el trabajo de Gödel (1906–1978) "Die Vollständigkeit der Axiomme des logischen Funktionenkalküls" que trata la incompletud de la lógica de primer orden. En 1931 aparece "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica und verwandter System I" que establece que no existe un método finitario que permita establecer si siempre una fórmula es un teorema o no en el sistema formal hachando por tierra el ideal de Hilbert.

En este ambiente, aunado a otros resultados como los Gentzen, Herbrand, la tesis de Church, Tarski. Carnap, etc. Los lógicos se abocan a presentar a la lógica matemática con niveles de rigor comparablemente mas altos que sus predecesores. Entre los libros representativos de este periodo de consolidación están los escritos por Kleene, Church, Mendelson.

El libro de Kleene es Introduction to Metamathematics publicado en 1952 por Elsevier North-Holland, Inc. En New York. La novena reimpresión de la que yo me serví es del año 1988. Para la elaboración Kleene tomó en consideración los resultados de Gödel sobre la incompletud; el trabajo de Alfred Tarski sobre el concepto de verdad para los lenguajes formales; los trabajos de Hebrand-Gödel; la tesis de A.Church de 1936. Es un libro de texto para estudios profesional programados por semestres. El trabajo en que se inspiró Kleene es el de D.Hilbert y P. Bernays "Grundlagen der Mathematik" en dos volúmenes 1934 y 1939. El lenguaje formal para el cálculo de predicados esta en Chapter VII. The Predicate Calculus

El libro de Church se llama Introduction to Matematical Logic publicado en el año de 1950 por Princenton University Press en New Jersey. La cuarta reimpresión data de 1964. La edición de la que me sirvo para el trabajo es la edición ampliada del original de 1944, aparecida originalmente como uno de los

Annals of Mathematical Studies. Es un libro de texto para estudiantes de matemáticas, por ello es un requisito tener conocimientos de la materia. En la presentación del lenguaje para el cálculo de predicados Church introduce inmediatamente las reglas de inferencia y un grupo de axiomas. El lenguaje formal para el cálculo de predicados está en el Chapter III. Functional Calculi of First Order

El libro de Mendelson se llama Introduction to Mathematical Logic publicado por Wodsworth & Books. El propósito de Mendelson es exponer los tópicos y demostraciones con sencillez y claridad para el lector. Pero no se deja de lado el rigor; tiene como punto de referencia los trabajos de D. Hilbert-Bernays, Kleene, Rosser, y Church. Uno de los cambios importantes en cuanto a notación es con relación a los conectivos y cuantificadores. El lenguaje formal para el cálculo de predicados está en el Chapter III. Quantification Theory.

II.1.KLEENE

INTRODUCTION TO METAMATHEMATICS (1952) de S.C.Kleene.

Lenguaje formal para el cálculo de predicados⁹

I. Símbolos iniciales.

la.

Variables individuales.

$x, y, z, \dots$

Constantes individuales.

$a, b, c, \dots$

Símbolo individual.

0

lb. Letras predicativas.

$A, B, C, \dots =$ (igualdad)

lc. Letras funcionales.

$P, Q, R, S, \dots +$ (suma)

$*$ (múltiplo)

$,$ (sucesor)

II. Constantes lógicas.

Implicación $\rightarrow$

Conjunción $\&$

⁹ Kleene, S. C. Introduction to Metamathematics. Elsevier North-Holland, Inc. New York. First published 1952. Ninth reprint 1988. Chapter VII. The Predicate Calculus. Pp. 142-180.

Disyunción $\vee$
 Negación $\neg$
 Cuantificador universal $\forall$
 Cuantificador existencial $\exists$

REGLAS DE FORMACIÓN.

Término.

1. 0 es un término.
2. Las variables son términos.
- 3-5. Si s y t son términos entonces, $(s)+(t)$, $(s)*(t)$ son términos.
6. Únicamente son términos la aplicación finita de los puntos 1-5.

Formula.

2. Si s y t son términos entonces, $(s)=(t)$ es una formula.
- 2-5. Si A y B son formulas entonces, $(A) \rightarrow (B)$, $(A) \& (B)$, $(A) \vee (B)$ y $\neg (A)$ son formulas.
- 6-7. Si x es una variable y A es una formula entonces, $\forall x(A)$ y $\exists x(A)$ son formulas.
8. Son formulas únicamente lo realizado con base en los puntos 1-7.

II.2. CHURCH

Introduction to Mathematical Logic.¹⁰ 1956, de Alonzo Church

Lenguaje formal para el cálculo de predicados F^1

I. Símbolos primarios:

A. Símbolos impropios

$[$
 $]$
 $\supset$
 $\neg$
 $,$
 $\forall$

A. Variables individuales

$x \ y \ z \ x_1 \ y_1 \ z_1 \ x_2 \ y_2 \ z_2$

B. Variables proposicionales

$p \ q \ r \ s \ p_1 \ q_1 \ r_1 \ s_2 \ p_2$

¹⁰ Church, Alonzo. Introduction to Mathematical Logic. Princeton University Press. New Jersey. Volume 1. First published 1950. Fourth Printing 1964. Pp. 379. Chapter III. Functional Calculi of First Order 30, The primitive basis of F^1 , página 169-170

C. Variables funcionales unarias

$F^1 \quad G^1 \quad H^1 \quad F^1_1 \quad G^1_1 \quad H^1_1 \quad F^1_2$

D. Variables funcionales binarias

$F^2 \quad G^2 \quad H^2 \quad F^2_1 \quad G^2_1 \quad H^2_1 \quad F^2_2$

II. Reglas de formación

Las variables individuales por si mismas son formas bien formadas.

Si F es una variables funcional n -ario o constante n -aria y $a_1, a_2, \dots, a_n$ son variables individuales, entonces $F(a_1, a_2, \dots, a_n)$ es una forma bien formada.

Si Γ es forma bien formada, entonces $\neg\Gamma$ es una forma bien formada.

Si Γ y Δ son formas bien formadas entonces $[\Gamma \supset \Delta]$ es una forma bien formada

Si Γ es una forma bien formada y a es una variable individual, entonces $(\forall a)\Gamma$ es una forma bien formada.

Son ocurrencias ligadas de a en A cuando hay una ocurrencia ligada de A en $(\forall a)B$; de otro modo se llamara ocurrencia libre de a en A .

Variables ligadas A son variables con una ocurrencia ligada en A , de otro modo son ocurrencias libres de A .

II.3. MENDELSON

Lenguaje formal para el cálculo de predicados¹¹ en INTRODUCTION TO MATHEMATICAL LOGIC (1964) de Elliott Mendelson.

I. Símbolos iniciales.

Ia. Variables individuales:

$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

Constantes individuales.

$a_1, a, \dots, a_n, \dots$

Letras predicativas.

$A_k^n \quad (n \text{ y } k \in \mathbb{N})$

Letras funcionales

¹¹ Mendelson, E. Introduction to Mathematical Logic. Wodsworth & Books; California; 3rd ed. 1986. Chapter III. Quantification Theory. Pp. 41-46.

f_k^n (n y $k \in \mathbb{N}$)

Ib. Conectivos.

$\neg$ (negación)
 $\rightarrow$ (implicación)

Cuantificadores

$\forall$ (universal)

II. Reglas de formación

Ila. Término.

1. Variables y constantes individuales son términos.
2. Si f_k^n es una letra funcional y $(t_1, \dots, t_n)$, entonces $f_k^n(t_1, \dots, t_n)$ es un término.
3. Únicamente en el caso de obtenerse con base en 1 y 2 a una expresión se le denominará término.

Ilb. Formula bien formada.

1. Toda formula atómica es una fbf.
2. Si A y B son fbf y y es una variable entonces, $(\neg A)$, $(A \rightarrow B)$ y $((\forall y)A)$ son fbf.
3. Una expresión es una fbf únicamente si se obtiene con base en los puntos 1 y 2.

III. En $((\forall y)A)$ a A se le llama el alcance del cuantificador. A no necesita contener a y como variable.

IV. Una ocurrencia de una variable x es ligada si en una fbf A la variable ocurre en el cuantificador $(\forall x)$ o esta en el alcance de dicho cuantificador. De otro modo la ocurrencia será libre en A .

V. Una variable es libre (ligada) en una fbf A si tiene una ocurrencia libre (ligada) en A . Una variable puede ser tanto libre como ligada en una misma fbf.

VI. Si A es una fbf y t es un término, entonces, t es un término libre para x_i en A si ninguna ocurrencia libre cae en el alcance de un cuantificador $(\forall x_j)$, donde x_j es una variable en t .

III. TRES LENGUAJES FORMALES EN LA ACTUALIDAD

¿Cuáles son las características centrales de los libros más recientes en lógica? He tomado tres trabajos, que creo representativos. El libro de Raymond M. Smullyan se llama *First-Order Logic*, publicado en 1968. Es introductorio a la teoría de primer orden; expone los resultados y desarrollos basándose en el método "analítico", y requiere de conocimientos previos de la materia. Mi construcción,

basándome en la estructura de los lenguajes formales expuesta en la introducción es del siguiente modo.

Lenguaje para la teoría de primer orden en First-Order Logic de 1968 de R. M. Smullyan.

III.1 SMULLYAN

Otro buen texto es de Robert Rogers llamado Mathematical logic and formalized theories publicado en 1971. Para Rogers los libros de Mendelsson y Church son centrales. En palabras del autor su trabajo es más una exposición de los desarrollos y conceptos básicos de la lógica que un libro de texto. No requiere de un conocimiento previo de la materia, por lo cual el autor dice que los especialistas podrían sentirse decepcionados por el libro, pero los estudiantes tendrán material para familiarizarse con la lógica. ¿Cómo es el lenguaje bajo el esquema expuesto en la introducción?

Lenguaje para la teoría de primer orden¹² en First-Order Logic de 1968 de R. M. Smullyan.

Símbolos:

(a) Los símbolos de la lógica proposicional más las variables proposicionales.

(b) $\forall$ (cuantificador universal)
 $\exists$ (cuantificador existencial)

(c1) Variables individuales

(c2) Parámetros individuales (constantes individuales)

(d) Predicados n -arios, para cada entero positivo n .

Formulas atómicas

Por formulas atómicas se entiende $P c_1 \dots c_n$ donde P es cualquier predicado n -ario, donde $(n+1)$, y $c_1 \dots c_n$ son cualquiera de las variables.

Formulas

Junto con las formulas atómicas, puede construirse el conjunto de todas las formulas bajo las reglas de formación del cálculo proposicional, además de:

(i) Si A es una formula y x es una variable, entonces $(\forall x)A$ y $(\exists x)A$ son formulas

¹² Smullyan, R. M. First-Order Logic. Springer-Verlag. New York. 1968. 2th printing 1971. Part II. First-Order Logic. Pp. 43-46.

Formulas Puras

Son formulas donde no aparecen parámetros individuales.

III.2. ROGERS

Robert Rogers. Mathematical logic and formalized theories. (1971)

Lenguaje F^1 de la lógica de predicados de Primer-Orden.¹³

Símbolos.

(1) Constantes lógicas y no-lógicas.

Negeción $\neg$
Implicación $\rightarrow$
Disyunción $\vee$
conjunción $\&$
bicondicional $\equiv$
paréntesis izquierdo y derecho $(,)$
cuantificador existencial $\exists$

(2) variables individuales

$x \ y \ z \ x_1 \ y_1 \ z_1 \ x_2 \ y_2 \ z_2 \dots$

(3) constantes individuales

(4) constantes predicativas

$P^1 \ Q^1 \ R^1 \ P_1^1 \ Q_1^1 \ R_1^1$

constantes predicativas binarias

$P^2 \ Q^2 \ R^2 \ P_1^2 \ Q_1^2 \ R_1^2$

FORMULAS.

Una expresión es una formula de F^1 , sí:

(a) Si **f** es una constante predicativa n-aria de F^1 , y **a1, a2,...an** son variables individuales, entonces **f a1, a2,...an** es una formula de F^1

(b) Si **A** es una formula de F^1 , entonces $\neg \mathbf{A}$ es una formula de F^1

(c) Si **A** y **B** son formulas de F^1 , entonces **(AvB)**, **(A&B)**, **(A→B)**, **(A≡B)** son formulas de F^1

(d) Si **A** es una formula de F^1 , y α es una variable individual, entonces $(\forall \alpha)\mathbf{A}$ y $(\exists \alpha)\mathbf{A}$ es una formula de F^1

¹³ Rogers, R. Mathematical logic and formalized theories. North-Holland Publishing Company. New York. 1971. 2nd printing 1974. Chapter III. The First-Order Predicate Logic. Pp. 28-33.

Variables libres y ligadas

La ocurrencia de una particular variable individual en una formula A es ocurrencia ligada de la variable a en la formula A si y sólo si pertenece a A en la formula $(\forall a)B$ o $(\exists a)B$. De otro modo la ocurrencia de a en A es libre.

Alcance de un cuantificador.

Si en la formula $(\forall \alpha)B$ o $(\exists \alpha)B$ ocurren en la formula A (o es ella misma), una variable, al alcance en A para la variable, cuando, ocurre en el cuantificador $(\forall \alpha)$ o $(\exists \alpha)$ o es parte de $(\forall \alpha)B$ o $(\exists \alpha)B$.

Formula cerrada

Una formula es cerrada en F^1 si ninguna formula de F^1 contiene ocurrencias libres de variables. De otro modo son llamadas formulas abiertas de F^1

III.3. SHOENFIELD

Joseph R. Shoenfield. MATHEMETICAL LOGIC. (1967) Lenguaje de Primer-Orden¹⁴

Símbolos:

(a). Variables:

$x, y, z, w, x', y', z', w', x'', \dots;$

(b). Símbolos funcionales n-arios, símbolos predicativos;

(c). Símbolos $\neg, \forall, \exists$

Términos.

i) Una variable es un término.

ii) Si $u_1, \dots, u_n$ son términos y f es una letra funcional n-aria, entonces $f u_1, \dots, u_n$ es un término.

Formulas atómicas

Una formula atómica es una expresión de la forma $p a_1 \dots a_n$, donde p es una letra funcional n-aria. Se definen las formulas atómicas por inducción:

i) una formula atómica es una formula

ii) si u es una formula, entonces $\neg u$ es una formula

iii) si u y v son formulas, entonces $\forall uv$ es una formula

iv) Si u es un formula, entonces $\exists xu$ es una formula.

Ocurrencias libres y ligadas.

¹⁴ Shoenfield, J. R. Mathematical Logic. Adison-Wesley Publishing Company. Massachusets. 1967.
Chapter II. First Order Theories. Pp, 9-27.

Una ocurrencia de x en A es ligada en A si ocurre en A en la fórmula $\exists xB$; de otro modo, x es libre en A .

Decimos que a es sustituible por x en A si para cada variable y no ocurre en A de la fórmula $\exists xB$, donde x ocurre libre en A .

CONCLUSIONES

La notación de la *Begriffsschiff* de Frege no ha quedado reflejada en la construcción de los lenguajes formales, mientras que la forma en como comprender una función o un concepto ha permanecido mas o menos constante hasta la actualidad. Esto nada mas para los lenguajes formales.

En el caso de los Principia está claro hasta donde llega la influencia. No obstante en la mayoría de los libros de texto, los de Kleene por poner un ejemplo, están más cercanos a la postura hilbertiana. Church, Mendelson hacen referencia en los prólogos a los trabajos de Hilbert-Ackerman o Hilbert-Bernays.

¿Hasta donde estoy capacitado para sostener estas afirmaciones? Es difícil saberlo, la propia literatura filosófica sobre lenguajes formales es casi nula. En los pocos artículos especializados de las revistas filosóficas no se tocan estos temas. Posiblemente por el interés que representa los lenguajes computacionales, filosofía del lenguaje natural o cuestiones más abstractas en filosofía de la matemática y la propia lógica.

La notación de Frege, por razones de economía, no esta en uso -opinión que comparto con los Kneale. Por otro lado, siguiendo a Bochenski, ésta no se consideró una opción útil debido a lo radical de la propuesta fergeana. Pero sea cual sea el caso la respuesta real es que el lenguaje formal es la confluencia del logicismo y el formalismo. Podría decir sin reservas que el lenguaje formal es –abusando del lenguaje natural- Fregehilbertrusseliano. La pregunta sobre que es lo que ha quedado de Frege para el lenguaje es aplicable tanto a Hilbert, como a Russell.

En la actualidad contamos con una distinción clara entre lenguajes artificiales y lenguajes formales. El lenguaje formal es un constructo con finalidades precisas, diseñado para crear un número finito de nuevas expresiones que pueden ser aceptadas en el cálculo. A diferencia de los lenguajes artificiales, a los lenguajes naturales suele considerárseles como estructuras semiótica que presentan una característica inmanente, donde el hablante se sirve de él. En un lenguaje artificial las personas son las *manipuladoras*; es evidente que en cierto sentido el limite preciso entre la parte pragmática y la sintáctica rozan entre sí sin que

esto afecte ninguno de los dos aspectos. Los lenguajes artificiales están considerados como una categoría que abarca diferentes clases de lenguajes como el lenguaje de la música y el de la pintura, etc. Esta distinción puede variar dependiendo de los intereses de investigación, ya sea desde una perspectiva lingüística o lógico-filosófica, etc. Desde mi punto de vista un lenguaje formal tiene cabida como un lenguaje artificial, pero no es comparable con otro tipo de lenguajes artificiales como el de la música o pintura. Es la parte "más artificial" de los lenguajes artificiales. La riqueza implícita de los lenguajes naturales por un lado fomenta una cantidad enorme de ambigüedades mas no así los lenguajes restringidos -cómo los llamo Morris- cuya finalidad radica en limitar la cantidad de expresiones que se admiten como parte de él. En ningún caso podría aseverarse que esto es una desventaja de los lenguajes naturales frente a los lenguajes formales, por el contrario la finalidad de un lenguaje formal es específica, no así la de los lenguajes de los que nos servimos para expresarnos.

Otra fuente de inspiración referente a la notación son los trabajos de Pierce (1834 – 1914), en especial aquellos que tenían que ver con el cálculo de las relaciones. Russell discutió esto en un trabajo publicado originalmente en francés en el año de 1901. En él proponía simplificar la lógica de las relaciones haciendo uso de la notación de Peano como respuesta a la notación de Pierce y Schroder. Peirce había introducido subíndices a los signos relacionales con la finalidad de economizar la notación para los términos y el orden de ellos. Al combinarlas con minúsculas griegas ofreció una definición clara y sencilla de producto relativo y suma relativa. En la lógica de las relaciones de Peirce el cuantificador P puede ligar a una variable que la tenga como variable o ligarla por estar en el alcance del cuantificador. Por otro lado, Peirce, Schröder y De Morgan concibieron a las relaciones expresables en la forma de "... esta en la relación R con...", para ellos la tarea a seguir estaba orientada en saber esta que punto los términos se relacionaban entre sí.

APÉNDICE.

CUATRO LENGUAJES FORMALES.

Benson Mates **ELEMENTARY MATHEMATICAL LOGIC (1963)**

Libro dirigido especialmente a filósofos interesados en lógica. No requiere de conocimientos previos. No es un libro de texto. Esta inspirado por el Principia Mathematica de Whitehead y Russell

Lenguaje formalizado L para la lógica elemental o cálculo de predicados de primer orden.¹⁵

A. Variables

Las variables son las letras minúsculas en cursiva de “u” a “z”, con o sin números suscritos (esto es, suscritos que son cifras arábigas representativas de enteros positivos).

B. Constantes

(I) Constantes lógicas son los ocho símbolos:

$$\neg \vee () \& \rightarrow \equiv \exists$$

(II) Constantes no lógicas se dividen en dos:

- (a) Predicados, que son letras minúsculas en cursiva con o sin números superescritos.
- (b) Constantes individuales, que son las letras en cursivas de “a” hasta “t” con o sin números suscritos.

Un predicado de grado n (o un predicado n -ario) es un predicado que tiene como superescrito una cifra representativa del entero positivo.

Reglas de formación.

- a. Una letra enunciativa es un predicado carente de superescrito.
- b. Un símbolo individual es una variable o una constante individual.
- c. Una fórmula atómica es una expresión que consta de una letra enunciativa sola, o (para algún entero positivo n) de un predicado n -ario seguido por una serie (de longitud n) de símbolos individuales.

¹⁵ Benson Mates **ELEMENTARY MATHEMATICAL LOGIC** Oxford University Press. New York. 1963 Chapter III. The Formalized Language. Pp.44-53

d. Una fórmula es una expresión que o es una fórmula atómica, o, en otro caso, está formada a partir de una o más fórmulas atómicas por un número finito de aplicaciones de las siguientes reglas:

(I) Si ϕ es una fórmula, entonces:

$\neg\phi$ es una fórmula

(II) Si ϕ y ψ son fórmulas, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \& \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$, y $(\phi \equiv \psi)$, son fórmulas.

(III) Si ϕ es una fórmula y α es una variable, entonces $(\alpha)\phi$ y $\exists(\alpha)\phi$ son fórmulas.

Nociones anexas.

Una ocurrencia de una variable α en una fórmula ϕ es ligada, si dentro de una ocurrencia en ϕ de una fórmula de la forma $(\alpha)\psi$ o de la forma $\exists(\alpha)\psi$; de otro modo es una ocurrencia libre.

Un enunciado es una fórmula en la que no ocurre variable libre.

HANS HERMES. INTRODUCTION TO MATHEMATICAL LOGIC. (1970)

Libro introductorio a la teoría de primer orden que requiere de conocimientos en la materia.

Lenguaje de la lógica de Predicados. ¹⁶

Símbolos primitivos e hileras de símbolos.

Símbolos primitivos.

(1). Para cada entero positivo n , válida para cada variable predicativa n -aria. Las variables funcionales n -arias son llamadas variables individuales

(2). Para cada entero positivo n , válida para cada variable predicativa n -aria. Las variables funcionales n -arias son llamadas variables proposicionales

(3). Paréntesis: izquierdo y derecho.

(4). Dos functores: negación y conjunción.

(5). Un cuantificador: el cuantificador universal.

(6). Signo de igualdad.

Hileras de símbolos.

Son obtenidas a partir de la concatenación finita de los símbolos primitivos. Una hilera de símbolos posee al menos un símbolo primitivo.

¹⁶ HANS HERMES. INTRODUCTION TO MATHEMATICAL LOGIC. Springer-Verlag. New York. (translated by Diana Schmidt) 1970 Chapter II. The Language of Predicate Logic. Pp. 45-57

Para lo siguiente, no es necesario describir en detalle los símbolos primitivos utilizados. Los símbolos pueden sustituirse por otros que sean compatibles con los siguientes:

Supuestos sobre los símbolos primitivos:

- (a). Para cada símbolo primitivo, decidiremos que se tendrá por variable funcional. Una variable predicativa, paréntesis derecho e izquierdo, la negación, el cuantificador universal o, el signo de igualdad.
- (b). Tomaremos para cada variable funcional ζ y para cada variable predicativa, determinando que lugares aceptará.
- (c). Para cada n , es la relación 1-1 en la variable funcional n -arias sobre los números naturales y las variables predicativas n -arias. Estas relaciones son efectivas, i.e. para cada variable funcional n -aria o variable proposicional n -aria la correspondencia con los naturales se determina, y conserva
- (d). Para cada hilera de símbolos puede separarse efectivamente y sin ambigüedades los símbolos primitivos por ella compuesta.

Términos

Considerando un cálculo, llamamos términos de cálculo, A lo obtenido por las dos reglas siguientes:

Regla 1. Determinamos arbitrariamente bajo cualquier escritura una variable individual.

Regla 2. Asignamos para r (no necesariamente distinto) en la hilera de símbolos $\zeta_1 \dots \zeta_r$ ($r \geq 1$) para cada hilera de símbolos escribimos una variable funcional ζ r -aria seguida de la hilera de símbolos $\zeta_1 \dots \zeta_r$

Definición. Las hileras de símbolo se dividen en términos de cálculo (únicamente para las hileras) llamados términos.

Expresiones atómicas. Se definen:

1ª. Colocada una letra predicativa P n -aria precedida de una hilera de símbolos de términos $t_1 \dots t_n$ para obtener $Pt_1 \dots t_n$

2ª. Para toda hilera de símbolos que se obtiene de escribir el signo de igualdad entre dos términos es una expresión atómica. Así toda hilera de la forma $t_1 = t_n$ es una expresión atómica.

Expresiones

Las expresiones del cálculo son definidas bajo las siguientes cuatro reglas:

- 1. Designamos bajo cualquier escritura una arbitraria expresión atómica.
- 2. Designamos bajo el punto anterior una hilera de símbolos ζ para obtener una nueva hilera $\neg \zeta$

3. Bajo los puntos anteriores, de las hileras de símbolos (no necesariamente distintos) ζ_1, ζ_2 obtenemos $(\zeta_1 \ \& \ \zeta_2)$
4. Para la hilera de símbolos ζ , $\forall x \ \zeta$, donde x es una variable individual es una expresión.

Definición. Estas hileras que son obtenidas en las expresiones del cálculo (y únicamente ellas) son llamadas expresiones.

Enderton. **UNA INTRODUCCION MATEMATICA A LA LOGICA (1972)**

Libro de lógica con tratamiento matemático, que no requiere de conocimientos matemática avanzados, pero si requiere que ya se haya tenido un acercamiento a la lógica. Dividido en prefacio, introducción y cinco capítulos.

Lenguaje de Primer Orden¹⁷:

A. Símbolos lógicos.

0. Paréntesis: (,)
1. Símbolos de conectiva: $\rightarrow, \neg$
2. Variable (una para cada entero positivo):
 $v_1, v_2 \dots$
3. Símbolo de igualdad: $=$

B. Parámetros.

0. Símbolo de cuantificador: $\forall$
1. Símbolos de predicado: Para cada entero positiva n , un conjunto, posiblemente vacío, de símbolos, llamados símbolos de predicado *n-ario*.
2. Símbolos de constante: un conjunto, posiblemente vacío, de símbolos.
3. Símbolos de función: Para cada entero positivo n un conjunto, posiblemente vacío, de símbolos, llamados símbolos de función *n-aria*.

REGLAS DE FORMACIÓN.

Termino. Definición: El conjunto de los términos es el conjunto de las expresiones generadas a partir de los símbolos de constante y de las variables por las operaciones L_f

Formulas. Definición: EL conjunto de las formulas es el conjunto de las expresiones formadas a partir de las fórmulas atómicas por las operaciones

¹⁷ Enderton, H. B. Una Introducción Matemática a la Lógica. Unam. Colección: Filosofía Contemporánea. México. (Traducción de Pablo Rosenblueth). 1987. Pp.391. Del Original: A MATHEMATICAL INTRODUCTION TO LOGIC. Academia Press. New York. 1972. Capítulo 2. Lógica de primer orden, Pp. 99-117.

$$L \neg, L \rightarrow, L_i (i=1,2,\dots)$$

NOCIONES ANEXAS.

Variable libre. Definición: Consideramos una variable x . Definimos, para cada fórmula a , lo que significa que x ocurre libre en a .

1. Si a es atómica, x ocurre libre en a sí y sólo si x ocurre libre en a .
2. x ocurre libre en $(\neg a)$ si y sólo si x ocurre en a .
3. x ocurre libre en $(a \rightarrow b)$ si y sólo si x ocurre libre en a o en b .
4. x ocurre libre en $\forall v \bar{a}$ si y sólo si x ocurre libre en a y $v \neq x$.

Enunciado. Definición. Si ninguna variable ocurre libre en la fórmula a , entonces a es un enunciado.

A.H. Ligstone. Mathematical Logic (1978)

No fue publicado en vida del autor, H. B. Enderton se encarga del trabajo de publicación y añadir ciertas correcciones menores. Algunas de las ideas expuestas en este libro se desprenden de Abraham Robinson (padre del análisis nonstandard)

Lenguaje Π del cálculo de predicados¹⁸

Los elementos del lenguaje Π consisten en las variables de Π y un cierto número de símbolos, llamados conectivos y paréntesis.

Este lenguaje involucra variables, predicados, y constantes, se definen:

Variables: Para cada término en cada una de las secuencias de Π

Predicados: El primer término de cada secuencia de Π

Constantes: para cada término i -ésimo, $i \geq 1$, da cualquier secuencia de Π

Tipo: se asocia a los números naturales con cada predicado: es definido cómo:

P es un predicado de Π ; entonces

$$P = \{n \in \mathbb{N} / P_n \in \Pi\}$$

Elementos de Π

Variables: constantes y predicados de Π

Conectivos: $\neg, \vee, \forall$.

Paréntesis: $(,)$

Forma bien formada atómica.

Definición:

¹⁸ Part II. 8. Predicate Calculus. Pp. 129-151

Sea P cualquier predicado de Π y sea α ; entonces la expresión " $P(\alpha)$ " es una fbf atómica de Π . FBF. Definición:

1. Cada fbf atómica es una fbf.
2. $(\neg A)$ es una fbf, si A es una fbf
3. $(A \vee B)$ es una fbf, si A y B son fbf, no hay variables libres en A y ligadas en B y viceversa.
4. $(\forall t D)$ es una fbf si D es una fbf y t es libre en D .
5. Cada fbf contiene una serie finita de ocurrencias de los conectivos.

Variables libres y ligadas.

Si t es libre en una expresión φ :

1. t ocurre en φ
2. t no es un predicado
3. " $\forall t$ " no ocurre en φ

En una expresión φ , t es ligada si, " $\forall t$ " ocurre en φ

BIBLIOGRAFÍA

Bochenski, I. M. Historia de la Lógica Formal. Gredos. 2ª reimpresión 1985. (traducción de Milán Bravo Lozano) Colección: Biblioteca Hispánica de Filosofía. Pp. 595.

Burbaki, N. Elementos de Historia de las Matemáticas. Alianza. Madrid. 2ª edición 1976. (traducción de Jesús Hernández). Pp.401.

Carnap, R. Introduction to Symbolic Logic and its Applications. Dover. New York. Dover edition first published in 1958. Translation by William H. Meyer and John Wilkinson. Pp. 241+xiv.

Church, A. Introduction to Matematica Logic. Princenton University Press. New Jersey. Volume I. First published 1950. Fourth Printing 1964. Pp. 379

Deaño, A. Introducción a la Lógica Formal. Alianza. Madrid. 5ª edición 1994. Pp.

Edwards, P. (Ed. Chief) The encyclopedia of philosophy. Macmillan Publishing Co. , Inc. & The Free Press. New York. 8 vols.

Enderton, H. B. Una Introducción Matemática a la Lógica. Unam. Colección: Filosofía Contemporánea. México. (Traducción de Pablo Rosenblueth). 1987. Pp.391. Del Original: A MATHEMATICAL INTRODUCTION TO LOGIC. Academia Press. New York. 1972.

Frege, G. Conceptografía. Los Fundamentos de la Aritmética. Otros Estudios. Unam. México. 1972. (traducción de Hugo Padilla). Pp. 270

----- Escritos lógico-semánticos. Tecnos. Madrid. Colección: Estructura y Función. 1974. (Traducción de Carlos R. Luis y Carlos Pereda). Pp ---

----- Estudios sobre semántica. Ariel; Barcelona; 2ª ed. 1973. (traducción de Ulises Moulines); p.

Heinenoort, Jean El desarrollo de la teoria de la cuantificacion. UNAM. IIF. Mexico. 1976. Págs. 56

Hermes, H. Introduction to Mathematical Logic. Spriger-Verlag. New York. 1973. (translated from German by Diana Shmith). Pp.

Hilbert, D. & Ackerman, W. Principles of Mathematical. Chelsea Publishing Company New York, (translated from German by Lewis M. Hammond, George C. Leckie, F. Steinhard) 1950. pp. Hay traducción al español; Elementos de lógica teórica; ed tecnos; traducción de Victor Sánchez de Zavala; p 213.

Kleene, S. C. Introduction to Metamathematics. Elsevier North-Holland, Inc. New York. First published 1952. Ninth reprint 1988. Pp.542.

----- Mathematical Logic. John Wesley & Sons, Inc. New York. 1969. Pp. 398+xiii.

Kneale, W. & M. The Development of logic. Oxford; 1988. p.705. Press. Cambridge, Massachusetts. 1991.p

Landriére, J. Limitaciones internas de los formalismos. Tecnos; Madrid. 1969, (traducción de Jose Blasco), p.535

Mendelson, E. Introduction to Mathematical Logic. Wodsworth & Books; California; 3rd ed. 1986.

Nagel, E. y J. R. Newman. El teorema de Gödel. Tecnos, Madrid. Reimpreso 1979. (traducción de Adolfo Martin). Págs. 140.

Rescher, N. “Desarrollos y orientaciones recientes en lógica”. Teorema, 2(junio 1971), págs. 55+ss.

Rosser, J. B. Logic for mathematicians. Chelsea Publishing Company; New York. 2nd ed. 1978, p 574+xv.

Rogers, R. Mathematical logic and formalized theories. North-Holland Publishing Company. New York. 1971. 2nd printing 1974.

Russell, B. Introducción a la filosofía de la matemática. Paidós. Barcelona; 1^a

ed. 1988 (traducción de Mircea Bonfil). Págs. 172

-----Lógica y conocimiento.

Sanchez Pozos, J. "Forma lógica: aspectos metodológicos" en CONTACTOS. Universidad Autonoma Metropolitana-Iztapalapa. Núm. 10. Nueva Época 1993. Pág 50-61.

-----"Principios generales de una teoría fregeana del nombre" en SIGNOS, Tomo II, Universidad Autonoma Metropolitana-Iztapalapa. 1989,págs. 229-236.

-----Lógica II. (Notas de curso) Universidad Autonoma Metropolitana-Iztapalapa. México, D.F. Trimestre 96-I.

Shoenfield, J. R. Mathematical Logic. Adison-Wesley Publishing Company. Massachusets. 1967.

Smullyan, R. M. First-Order Logic. Springer-Verlag. New York. 1968. 2nd printing 1971.

Stoylar. Introduction to Elementary Mathematical Logic. Dover Publication, Inc. 1983, (traslated by Elliot Mendelson) pp. 209 + vii

Tarski, A. Introducción a la lógica formal y a la metodología de las ciencias deductivas. Espasa-Calpe. Madrid. (Traducción de T. R. Bachiller y J. R. Fuentes). Págs. 285.

Thiel, C. Sentido y referencia en la lógica de Gottlob Frege. Tecnos. Madrid. 1972. (traducción de Jose Sanmartin Espluges). Págs. 177.

Weiner, J. Frege in Perspective. Cornell University Press. Ithaca, New York; 1990, p 307+xv.

Whitehead, A. N. & B. Russell. Principia Mathematica. Vol. 1. Cambridge University Presss. 2nd edition. Reprinted 1978.