ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES NO AUTÓNOMAS Y ÁLGEBRAS DE LIE

JOSÉ LEONARDO SÁENZ CETINA

DOCTOR EN CIENCIAS

NOVIEMBRE 2002

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA

AGRADECIMIENTOS

Deseo agradecer al Dr. Rodolfo Suárez Cortez el haberme sugerido la realización de este trabajo, así como por haber aceptado ser mi asesor durante el desarrollo del mismo. Asimismo, quisiera agradecer al Dr. Ernesto Pérez Chavela, Jefe del Departamento de Matemáticas, por su invaluable apoyo a lo largo de estos años de estudio en el Doctorado en Ciencias. Finalmente, pero no menos importante, mi agradecimiento al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.

ÍNDICE

CAPíTULO 1

INTRODUCCIÓN

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA PRINCIPAL

Considérese la *Ecuación Diferencial Lineal No Autónoma* siguiente

$$\dot{x} = A(t)\,x. \tag{1.1}$$

donde $A(t)$ es una matriz cuadrada que es función de t. Si en el Análisis Cualitativo de esta ecuación nos interesamos en la estabilidad de la solución, es natural tomar como referencia al caso *Autónomo*, es decir, cuando $A(t) = A$. Para este caso, se sabe que la ecuación correspondiente (1.1) es Globalmente Asintóticamente Estable (GAE) si, y sólo si, todos los eigenvalores de A tienen parte real negativa. No obstante, este resultado de estabilidad global asintótica es *falso* para el caso no autónomo. Aún cuando para toda t los eigenvalores de $A(t)$ tengan parte real negativa, esto *no* implica que (1.1) sea GAE. Veamos algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales lineales no autónomas que no son GAE.

Ejemplo 1. Considérese el sistema de ecuaciones diferenciales siguiente:

$$\begin{cases} \dot{x} = & -x \quad +e^{2t}y. \\ \dot{y} = & \qquad -y. \end{cases}$$

Podemos representarlo matricialmente como

$$\frac{dU}{dt} = H(t)\,U(t).$$

donde

$$U(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \quad H(t) = \begin{bmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

El sistema no es GAE a pesar de que los eigenvalores de $H(t)$, -1 y -1, tienen parte real negativa. Nótese que en este caso $H(t)$ es no acotado.

Ejemplo 2. Sea

$$\begin{cases} \dot{x} = \left(-1 + \alpha\cos^2 t\right)x + \left(1 - \alpha\sin t\cos t\right)y, \\ \dot{y} = \left(-1 - \alpha\sin t\cos t\right)x + \left(-1 + \alpha\sin^2 t\right)y, \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ y α es una constante positiva. En este caso

$$\frac{dU}{dt} = H(t)\,U(t), \tag{1.2}$$

con

$$U(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix},$$

al representar el operador de evolución (matriz fundamental) de la solución de la ecuación

$$\frac{dU}{dt} = H(t)\,U(t) \tag{1.3}$$

en la forma exponencial

$$X(t) = \exp\Omega(t), \tag{1.4}$$

donde $X(t)$, $H(t)$ son operadores y $X(0) = I$ es la identidad, da como resultado que el exponente $\Omega(t)$ tiene una estructura de elemento de Lie en términos del operador $H(t)$; lo cual, debido a los productos de Lie presentes en él, tiende a conservar simetrías mejor que el operador de evolución $X(t)$, el cual está dado por

$$X(t) = I + \int_0^t dt_1 H(t_1) + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 H(t_1)\,H(t_2)$$

$$+ \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 H(t_1)\,H(t_2)\,H(t_3) + \dots, \quad t \geq 0.$$

Siguiendo esta idea, Wilhelm Magnus, en [**Mag2**], encontró el exponente $\Omega(t)$ dando un método recursivo para conseguirlo, en la forma de una serie de integrales n-múltiples de multiconmutadores (productos de Lie anidados) de $H(t)$, obteniendo

$$\Omega(t) = \int_0^t dt_1 H(t_1) + \frac{1}{2}\int_0^t dt_1 \left[H(t_1), \int_0^{t_1} dt_2 H(t_2)\right] \tag{1.5}$$

$$+\frac{1}{4}\int_0^t dt_1 \left[H(t_1), \int_0^{t_1} dt_2 \left[H(t_2), \int_0^{t_2} dt_3 H(t_3)\right]\right]$$
$$+\frac{1}{12}\int_0^t dt_1 \left[\left[H(t_1), \int_0^{t_1} dt_2 H(t_2)\right], \int_0^{t_1} dt_3 H(t_3)\right] + \dots.$$

donde $t \geq 0$, $[H_1, H_2] = H_1H_2 - H_2H_1$ y los términos omitidos son integrales múltiples de multiconmutadores de órdenes cada vez mayores. A esta expresión se la suele llamar la *Expansión de Magnus* o *Fórmula Generalizada de Baker-Campbell-Hausdorff-Dynkin* y constituye uno de los objetivos de mayor estudio en esta Tesis.

Se han derivado de la expansión de Magnus herramientas matemáticas muy diversas, las cuales han probado ser medios muy poderosos para resolver problemas que, como en el caso de la estabilidad en sistemas no autónomos, involucran al tiempo. Estos métodos han sido aplicados exitosamente a diferentes campos de la matemática y la física (véanse [**BCOR, KO, Ste2, Wil**]). De ahí que sea importante contar con fórmulas, o algoritmos eficientes, para obtener los términos de la expansión (1.5). Motivadas por esta razón, expresiones recursivas para los términos de orden n de la serie han sido obtenidos usando diferentes técnicas (véanse

Álgebras de Lie Libres con un número finito de generadores (discretas). Ahora bien, un problema interesante es conseguir un resultado análogo para $\Omega(t)$, es decir, responder a la siguiente pregunta, ¿es $\Omega(t)$ un elemento de un álgebra de Lie generada por $\{H(t) : t \in \mathbb{R}\}$? En esta Tesis, damos una respuesta afirmativa a esta cuestión, introduciendo ciertas estructuras algebraicas las cuales son útiles para extender los resultados más importantes del caso discreto, a éste que hemos llamado *continuo*. La relación entre ambos asuntos está implícita en el siguiente *enfoque heurístico* a la solución del problema (1.3)-(1.4) usando la fórmula (1.6):

Sea $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = t$ una partición del intervalo $[0, t]$. Si consideramos $H(t)$ constante e igual a $H(s_i)$ en el intervalo $[s_{i-1}, s_i]$ y definimos los operadores

$$X_n(t) = \exp(H(s_n)\Delta s_n)\exp(H(s_{n-1})\Delta s_{n-1})\ldots\exp(H(s_1)\Delta s_1)\,, \tag{1.7}$$

donde $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$, resulta que $X_n(t) \longrightarrow X(t)$ si máx $\Delta s_i \longrightarrow 0$. Ahora bien, si denotamos la z de (1.6) por $x\#y$ y usamos esta operación $\#$ en (1.7) tenemos que

$$X_n(t) = \exp(H(s_n)\Delta s_n \# H(s_{n-1})\Delta s_{n-1} \# \ldots \# H(s_1)\Delta s_1)$$

y de aquí que $X(t) = \exp\Omega(t)$ donde

$$\Omega(t) = \lim_{\text{máx } \Delta s_i \longrightarrow 0} (H(s_n)\Delta s_n \# H(s_{n-1})\Delta s_{n-1} \# \ldots \# H(s_1)\Delta s_1)\,.$$

Basados en esta idea heurística, sugerida por [MP], introducimos aquí un marco matemático adecuado tal que consiga poner este trabajo, iniciado por Magnus en [Mag2], en una forma precisa. A este fin, extenderemos los siguientes resultados del caso discreto (véase [J]): Primeramente, probaremos el análogo continuo al *Teorema de Friedrichs*, el cual hemos llamado el *Criterio de Friedrichs*. Este criterio es la manera más simple de decidir si un elemento de un álgebra es un elemento de Lie. Una vez que se sabe que un elemento es de Lie, es mucho más sencillo determinarlo explícitamente. Usando el criterio de Friedrichs demostraremos el *Teorema de Magnus*, el cual prueba que el exponente $\Omega(t)$ de la representación exponencial de la solución del sistema lineal no autónomo (1.3) es un elemento de Lie, y daremos una fórmula explícita para los términos de la expansión (la llamada *Fórmula de Magnus*). En esta parte del trabajo nos concentraremos exclusivamente en la problemática algebraica; no obstante, una prueba simple de la convergencia de la expansión de Magnus para el parámetro t suficientemente pequeño, siempre y cuando $H(t)$ sea un operador localmente integrable y acotado, se incluye aquí. A este respecto, la convergencia local de la expansión de Magnus ha sido tratada en varios trabajos (véanse [**BCOR, IN, MOR**]) y, sin embargo, muy pocos intentos se han hecho en cuanto a su convergencia global se refiere (por ejemplo en [**Mag2, We, WN1, WN2, Wic**]).

Existen otros trabajos donde la formalización matemática de la expansión de Magnus ha sido hecha considerando distintos marcos. Chen, por ejemplo, propone en [Ch] una generalización para la integral de línea. En particular, prueba que si la función $u(t)$ es un elemento de Lie para toda $t \in [a, b]$, entonces tanto $\int_a^b u(t)\,dt$ como $\frac{du(t)}{dt}$ son también elementos de Lie. No obstante, la prueba que presenta del teorema de Magnus, para esta clase de integral de línea, no es constructiva. En Huillet *et al* [**HMS1**], los autores usan grupoides para simplificar la notación, pero el teorema de Magnus no se prueba. La fórmula (1.5) se toma de [**Mag2**], ya que el transporte de neutrones, física del láser, excitación multifotónica de moléculas, espectros por resonancia magnética de pulsos, lentes magnéticos, lentes ópticos, física del plasma, el problema de los neutrinos solares, espectroscopía por resonancia magnética nuclear de alta resolución y sistemas hamiltonianos (mecánica celeste). La siguiente es una lista de artículos que contienen referencias sobre aplicaciones a la física: [**BCOR, KO, Ste2, Wil**].

Un reciente y muy interesante empleo de la expansión de Magnus, propuesto por primera vez en [**IN**], es acerca de la resolución de ecuaciones diferenciales en grupos de Lie y espacios homogéneos, y está motivado por la preservación de la estructura de grupo de Lie, aún bajo aproximaciones por truncamiento, de $\Omega(t)$, lo cual se usa, por ejemplo, para resolver sistemas dinámicos que permanecen sobre una variedad prescrita, o en sistemas hamiltonianos clásicos (véanse [**BI, EMM, MZ, OR**]). Cercana a esta idea, en los últimos años ha habido un creciente interés en el diseño de técnicas eficientes de integración numérica tales que preserven importantes propiedades cualitativas de las ecuaciones diferenciales. Se ha demostrado, en [**BCR, BI, Is, IMN, INR, MO**], que un método numérico basado en expansiones de Magnus tiene un desempeño consistentemente mejor que los métodos de Runge-Kutta clásicos, especialmente para sistemas con oscilaciones altas o con comportamiento asintótico complicado (véanse [**BM, Mu, MZ**]).

5. PANORAMA DE LA TESIS

Esta Tesis está estructurada de la siguiente manera. En el Capítulo 2 presentamos las álgebras y los espacios lineales ordenados, los cuales extienden las definiciones contenidas en [J], con el fin de caracterizar, en un sentido algebraico, los conjuntos a los que $\Omega(t)$ pertenece. El Capítulo 3 provee del Criterio de Friedrichs, se prueba el Teorema de Magnus usando este criterio y se consigue una expresión explícita para la expansión de Magnus. En el Capítulo 4, se prueba que la serie completa encontrada en el capítulo 3 para la expansión de Magnus, es decir, la Fórmula de Magnus, es equivalente a la otra fórmula no recursiva dada en [**MP**]; después, se logra una simplificación aún mayor de la Fórmula de Magnus y se da un criterio local de convergencia. En el Capítulo 5, se revisan algunas aplicaciones a la estabilidad y teoría de control. Finalmente, en el Capítulo 6 se hace un recuento de las futuras investigaciones que desarrollaremos dentro del mismo tema.

CAPÍTULO 2

ÁLGEBRAS DE LIE DE RANGO CONTINUO

1. ÁLGEBRAS DE LIE LIBRES

Las definiciones y los resultados de esta sección han sido tomados de [Wo].

2.1.1. Álgebra de Lie

Definición 1. Sean $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y A un espacio lineal sobre $\mathbb{F}$. Se dice que A es un *álgebra de Lie* si existe una operación bilineal

$$[\cdot,\cdot] : A \times A \longrightarrow A$$

llamada el *corchete de Lie* o *producto de Lie*, tal que si $a, b, c \in A$, entonces

(i) $[a, a] = 0$,
(ii) $[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$.

La condición (ii) se llama la *identidad de Jacobi*.

Por ejemplo, sea A es un álgebra asociativa sobre $\mathbb{F}$, con producto denotado por $*$. Defínase el corchete de Lie mediante el *conmutador*, de la manera siguiente; si $a, b \in A$:

$$[a, b]_* = a * b - b * a.$$

Es fácil demostrar que el corchete satisface las condiciones (i) y (ii). De esta manera se obtiene un álgebra de Lie que se llama el *álgebra de Lie asociada con A* y que se denota por A_L.

2.1.2. Subálgebra de Lie

Definición 2. Sea A un álgebra de Lie sobre $\mathbb{F}$. Un subespacio lineal $\mathfrak{M}$ de A se llama una *subálgebra de Lie de A*, si para toda $a, b \in \mathfrak{M}$ se tiene que $[a, b] \in \mathfrak{M}$.

2.1.3. Aplicación bilineal

Definición 3. Sean $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ y $\mathfrak{P}$ espacios lineales sobre $\mathbb{F}$, y sea $\omega : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \longrightarrow \mathfrak{P}$ una función. Se dice que ω es una *aplicación bilineal* si satisface las siguientes condiciones:

1. Para $x_1, x_2 \in \mathfrak{M}$, $y \in \mathfrak{N}$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, se tiene que

$$\omega(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda\omega(x_1, y) + \mu\omega(x_2, y).$$

2. Para $x \in \mathfrak{M}$, $y_1, y_2 \in \mathfrak{N}$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, se tiene que

$$\omega(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda\omega(x, y_1) + \mu\omega(x, y_2).$$

diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{T}_1 \arrow[rr, shift left, "h_1"'] & & \mathfrak{T}_2 \arrow[ll, shift left, "h_2"'] \\ & \mathfrak{M}\times\mathfrak{N} \arrow[ul, "\tau_1"] \arrow[ur, "\tau_2"'] & \end{tikzcd}$$

De las condiciones $h_1(\tau_1(x,y)) = \tau_2(x,y)$, $h_2(\tau_2(x,y)) = \tau_1(x,y)$ resultan las identidades $(h_2 \circ h_1)(\tau_1(x,y)) = \tau_1(x,y)$ y $(h_1 \circ h_2)(\tau_2(x,y)) = \tau_2(x,y)$ para $x \in \mathfrak{M}$, $y \in \mathfrak{N}$. De la condición (2) en la definición de producto tensorial resulta entonces que $h_2 \circ h_1 = i_{\mathfrak{T}_1}$ y $h_1 \circ h_2 = i_{\mathfrak{T}_2}$. Entonces h_1 y h_2 son inversos mutuamente y por esta razón cada uno de ellos es un isomorfismo lineal.∎

2.1.6. Álgebra libre

Definición 5. Sea $\mathfrak{M}$ un espacio lineal sobre $\mathbb{F}$. Un *álgebra libre sobre* $\mathfrak{M}$ es un par $(\mathfrak{T}, j)$, donde $\mathfrak{T}$ es un álgebra asociativa, con unidad 1, y j es una aplicación lineal $j : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{T}$ tal que:

1. Para cualquier álgebra asociativa A y cualquier aplicación lineal $\rho : \mathfrak{M} \longrightarrow A$, existe un homomorfismo de álgebras $\omega : \mathfrak{T} \longrightarrow A$, para el cual el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{T} \arrow[r, "\omega"] & A \\ \mathfrak{M} \arrow[u, "j"] \arrow[ur, "\rho"'] & \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

2. La imagen $j(\mathfrak{M})$ y 1 generan a $\mathfrak{T}$ como álgebra.

2.1.7. Existencia y unicidad del álgebra libre

Proposición 2. (a) Para cada espacio lineal $\mathfrak{M}$ sobre $\mathbb{F}$, existe un álgebra libre. (b) Si $(\mathfrak{T}_1, \tau_1)$ y $(\mathfrak{T}_2, \tau_2)$ son dos álgebras libres para las cuales el diagrama (2.2) es conmutativo, entonces existe un isomorfismo de álgebras $\alpha : \mathfrak{T}_1 \longrightarrow \mathfrak{T}_2$ tal que el siguiente diagrama también es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{T}_1 \arrow[rr, "\alpha"] & & \mathfrak{T}_2 \\ & \mathfrak{M} \arrow[ul, "j_1"] \arrow[ur, "j_2"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración

Denótese por $\mathfrak{M}^{\otimes n}$ el producto tensorial

$$\mathfrak{M}^{\otimes n} = \overbrace{\mathfrak{M} \otimes \ldots \oplus \mathfrak{M}}^{n \text{ veces}}$$

y $\mathfrak{M}^{\otimes 0} = \mathbb{F}$. Sea $\mathfrak{T}$ el espacio lineal cuyos elementos son las sucesiones $\{u_n\}_{n \geq 0}$ con $u_n \in \mathfrak{M}^{\otimes n}$ y $u_n = 0$ para $n > m$ (m depende de la sucesión.). La suma en $\mathfrak{T}$ y el producto por escalares se define coordenada a coordenada; esto es, $\{u_n\} + \{u'_n\} = \{u_n + u'_n\}$ y $\lambda\{u_n\} = \{\lambda u_n\}$ para $\lambda \in \mathbb{F}$. Para definir el producto en $\mathfrak{T}$ sea τ_{km} la aplicación bilineal de $\mathfrak{M}^k \times \mathfrak{M}^m$ en $\mathfrak{M}^{k+m}$ y defínase

$$\{u_i\}\{u_j\} = \left\{ \sum_{i+j=k} \tau_{ij}(u_i, u_j) \right\} = \left\{ \sum_{i+j=k} u_i \otimes u_j \right\}.$$

2.1.10. La completación de un álgebra libre generada

Definición 8. Sea $\mathfrak{F}$ un álgebra asociativa libre generada por el conjunto X. Recordemos que $\mathfrak{M}_m$ es el subespacio de $\mathfrak{F}$ de elementos homogéneos de grado m. Sea $\overline{\mathfrak{F}}$ la suma directa *completa* de los espacios $\mathfrak{M}_m$; luego, los elementos de $\overline{\mathfrak{F}}$ son expresiones de la forma

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = a_0 + a_1 + \dots , \tag{2.4}$$

donde a_i es de grado i. La igualdad, la adición y la multiplicación escalar están definidas de manera natural, en base a (2.4), componente a componente. La multiplicación en $\overline{\mathfrak{F}}$ está dada por el "producto de Cauchy":

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k,$$

donde

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0 \in \mathfrak{M}_k.$$

Como es de esperar, $\overline{\mathfrak{F}}$ es un álgebra. Más aún, el subconjunto de $\overline{\mathfrak{F}}$ de elementos $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ tales que $a_i = 0$ si $i \geq m$ para $m = 0, 1, 2, \dots$ es una subálgebra que puede ser identificada con $\mathfrak{F}$.

2.1.11. La valuación de un álgebra libre generada

Definición 9. Sea $\mathfrak{F}$ un álgebra asociativa libre generada por el conjunto X y $\overline{\mathfrak{F}}$ su completación. El subconjunto $\overline{\mathfrak{F}}^{(i)}$ de los elementos de la forma $a_i + a_{i+1} + \dots$, con a_k homogéneo de grado k, es un ideal bilateral de $\overline{\mathfrak{F}}$. Definimos una *valuación en* $\overline{\mathfrak{F}}$ de la siguiente manera:

$$|a| = \begin{cases} 0, & \text{si } a = 0. \\ 2^{-i}, & \text{si } a \neq 0 \text{ y } a \in \overline{\mathfrak{F}}^{(i)}, \text{ pero } a \notin \overline{\mathfrak{F}}^{(i+1)}. \end{cases} \tag{2.5}$$

Esta función tiene las propiedades siguientes ($a, b \in \overline{\mathfrak{F}}$):

1. $|a| \geq 0$ y $|a| = 0$ si, y sólo si, $a = 0$.
2. $|ab| \leq |a|\,|b|$.
3. $|a + b| \leq \textit{máx}\,(|a|, |b|)$.

Dados $a, b \in \overline{\mathfrak{F}}$ definamos $d(a, b) = |a - b|$. Es sencillo verificar que d es una métrica para $\overline{\mathfrak{F}}$ y que, bajo esta métrica, las operaciones algebraicas son continuas. La propiedad no arquimediana (3) de la valuación implica el criterio muy simple de que la serie $x_1 + x_2 + \dots$ converge si, y sólo si, $|x_i| \longrightarrow 0$. Claramente, la subálgebra $\mathfrak{F}$ es densa en $\overline{\mathfrak{F}}$.

2. EL ÁLGEBRA DE PERMUTACIONES

2.2.1. Álgebra de permutaciones

Definición 10. Sea S_n el grupo de permutaciones de orden n. El *álgebra de permutaciones de n elementos*, denotada por $\mathbb{F}S_n$, es el conjunto de sumas formales y

$$E_n = \frac{1}{n}\left(1 - C_{1,n}^{-1}\right)\left(1 - C_{1,n-1}^{-1}\right)\dots\left(1 - C_{1,2}^{-1}\right), \tag{2.8}$$

en los que 1, recordemos, denota la permutación identidad. En particular, si $\mathbb{B}$ es un álgebra asociativa sobre $\mathbb{F}$, con producto denotado por $*$, $H \in \mathfrak{F}(T, \mathbb{B})$ y $\mathcal{H} \in \mathfrak{F}(T^n, \mathbb{B})$, con $\mathcal{H}(t_1, \dots, t_n) = H(t_1)* \dots *H(t_n)$, tenemos que D_n corresponde al siguiente arreglo de Lie (véase [MP], pág. 247)

$$\begin{aligned} D_n(\mathcal{H}(t_1, \dots, t_n)) &= D_n(H(t_1) * \dots * H(t_n)) \\ &= \frac{1}{n}\left[\dots\left[H(t_1), H(t_2)\right]_*, \dots, H(t_n)\right]_*. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Así, nD_n desempeña, en familias de operadores por ejemplo, el papel de que tiene la transformación lineal $\mathcal{O}$ en el caso discreto (ver [J]). La propiedad más importante que poseen los objetos D_n y E_n es la de ser proyecciones, es decir,

$$D_n^2 = D_n \tag{2.10}$$

y

$$E_n^2 = E_n. \tag{2.11}$$

Una prueba esbozada para (2.10) se encuentra en [MKS] (pág. 365).

Sea $N_n(t)$ el álgebra conmutativa sobre $\mathbb{F}$ de funciones de $\mathfrak{F}(T^n, \mathbb{F})$ que se anulan en casi todo $T^n = [0, t]^n$. Es fácil de comprobar que $\mathbb{F}S_n(N_n(t)) = N_n(t)$. En particular

$$E_n(N_n(t)) \subset N_n(t). \tag{2.12}$$

resultado que será de utilidad más adelante.

Las permutaciones $C_{1,k}$ serán de gran relevancia en la teoría subsiguiente: para poder manipularlas de una manera adecuada se dan a continuación los siguientes resultados que sintetizan sus propiedades más importantes.

Proposición 3. Sea $m > 0$ y sean $i_1 < \dots < i_m$, m enteros positivos cualesquiera. Tomemos ahora a los $i_m - m$ enteros positivos menores que i_m distintos de los anteriores y llamémosles $i_{m+1} < \dots < i_{i_m}$. Entonces

$$C_{1,i_1} \dots C_{1,i_m} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m & m+1 & \dots & i_m \\ i_m & i_{m-1} & \dots & i_1 & i_{m+1} & \dots & i_{i_m} \end{pmatrix}.$$

Demostración

La demostración será por inducción sobre m y supondremos que $i_1 \geq 2$. El caso $i_1 = 1$, conviniendo que $C_{1,1} = 1$, será inmediato de aquél.

Para $m = 1$ la igualdad vale ya que por (2.7)

$$C_{1,i_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i_1 \\ i_1 & 1 & \dots & i_1 - 1 \end{pmatrix}.$$

Supongamos que vale para $m = k$. Probémoslo para $m = k + 1$.

Sean $i_1 < \dots < i_{k+1}$ junto con $i_{k+2} < \dots < i_{i_{k+1}}$ los primeros i_{k+1} enteros positivos. Por la hipótesis inductiva

$$C_{1,i_1} \dots C_{1,i_k} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & i_k \\ i_k & i_{k-1} & \dots & i_1 & i_{k+2} & \dots & i_{i_k+1} \end{pmatrix}.$$

donde E_n está dado por (2.8), $[[\cdot]]$ es la función "mayor entero menor o igual que", y

$$\sigma_{n,m} = \left(\prod_{k=2}^{n-m} C^{-1}_{1,n-m-k+2} \right) \rho_{n,m}$$

con

$$\rho_{n,m} = \sum_{n \geq i_{n-m} > \ldots > i_1 \geq 1} C^{-1}_{1,i_{n-m}} \ldots C^{-1}_{1,i_1}.$$

Demostración.

Antes de pasar a la demostración propiamente dicha advirtamos que debido al convenio por el cual $C_{1,1} = 1$ podemos reescribir $\rho_{n,m}$ de la siguiente manera, más adecuada a nuestros propósitos

$$\rho_{n,m} = \sum_{n \geq j_{n-m-1} > \ldots > j_1 \geq 2} C^{-1}_{1,j_{n-m-1}} \ldots C^{-1}_{i,j_1} + \sum_{n \geq l_{n-m} > \ldots > l_1 \geq 2} C^{-1}_{1,l_{n-m}} \ldots C^{-1}_{1,l_1}$$

(para $m = n - 1$ la primera sumatoria se reducirá, por convenio, a 1).

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{[[n/2]]} \left[(-1)^i (n-i) \prod_{k=2}^{i} C^{-1}_{1,i-k+2} + (-1)^{n-i} i \prod_{k=i+1}^{n} C^{-1}_{1,n-k-i+1} \right] \sigma_{n,n-1} \\
&= \sum_{i=1}^{[[n/2]]} \left[(-1)^i (n-i) \prod_{k=2}^{i} C^{-1}_{1,i-k+2} + (-1)^{n-i} i \prod_{k=i+1}^{n} C^{-1}_{1,n-k+i+1} \right] \\
&\quad \times \left(\prod_{k=2}^{i} C^{-1}_{1,i-k+2} \right) \rho_{n,n-1}.
\end{aligned}$$

Como consecuencia del corolario 1.1 tenemos que $\left(\prod_{k=2}^{i} C^{-1}_{1,i-k+2} \right)^2 = 1$. Además $\prod_{k=i+1}^{n} C^{-1}_{1,n-k+i+1} \prod_{k=2}^{i} C^{-1}_{1,i-k+2} = \prod_{k=2}^{n} C^{-1}_{1,n-k+2}$. Así

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{[[n/2]]} \left[(-1)^i (n-i) + (-1)^{n-i} i \prod_{k=2}^{n} C^{-1}_{1,n-k+2} \right] \rho_{n,n-1} \\
&= \sum_{i=1}^{[[n/2]]} (-1)^i (n-i) \rho_{n,n-1} + \sum_{i=1}^{[[n/2]]} (-1)^{n-i} i \prod_{k=2}^{n} C^{-1}_{1,n-k+2} \rho_{n,n-1}.
\end{aligned}$$

Cambiando en la segunda sumatoria el contador i por $n - i$ obtenemos

$$= \sum_{i=1}^{[[n/2]]} (-1)^i (n-i) \rho_{n,n-1} + \sum_{i=[[n/2]]+1}^{n-1} (-1)^i (n-i) \prod_{k=2}^{n} C^{-1}_{1,n-k+2} \rho_{n,i}.$$

$$
\begin{aligned}
&= -(n-1)+\sum_{i=2}^{n-1}(-1)^{i-1}(-n+i+n-i+1)\sum_{n\geq j_{i-1}>\ldots>j_1\geq 2} C^{-1}_{1,j_{i-1}}\cdots C^{-1}_{1,j_1} \\
&\quad +(-1)^{n-1}\prod_{k=2}^{n} C^{-1}_{1,n-k+2} \\
&= -(n-1)+\sum_{i=2}^{n-1}(-1)^{i-1}\sum_{n\geq j_{i-1}>\ldots>j_1\geq 2} C^{-1}_{1,j_{i-1}}\cdots C^{-1}_{1,j_1}+(-1)^{n-1}\prod_{k=2}^{n} C^{-1}_{1,n-k+2} \\
&= -(n-1)+\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i-1}\sum_{n\geq j_{i-1}>\ldots>j_1\geq 2} C^{-1}_{1,j_{i-1}}\cdots C^{-1}_{1,j_1} \\
&= nE_n-n. \blacksquare
\end{aligned}
$$

3. ESPACIOS LINEALES ORDENADOS

2.3.1. Álgebra de coeficientes

Definición 12. Sea $A_n(t)$, para cada $n = 1, 2, \ldots$, un subespacio lineal del espacio de Banach $\mathfrak{L}_p^n$ de funciones definidas en $T^n = [0, t]^n$ y con valores en $\mathbb{F}$; sea, además, $A_0(t) = \mathbb{F}$. Al conjunto de sucesiones infinitas

$$A(t) = \prod_{n=0}^{\infty} A_n(t) = \{\{a_n\}_{n=0}^{\infty} : a_n \in A_n(t)\}$$

se le llama un *álgebra de coeficientes* si satisface

1. para cada $\sigma \in S_n$ y $a \in A_n(t)$, tenemos que $\sigma a \in A_n(t)$,
2. dados $a \in A_k(t)$ y $b \in A_m(t)$, la función $a \circ b$ es un elemento de $A_{k+m}(t)$, donde

$$(a \circ b)(t_1, \ldots, t_{k+m}) = a(t_1, \ldots, t_k)\, b(t_{k+1}, \ldots, t_{k+m}). \tag{2.13}$$

Observación: Dado que $A_n(t) \subset \mathfrak{L}_p^n$ entenderemos que (2.13) es una igualdad como funciones en $\mathfrak{L}_p^n$, esto es, (2.13) se cumple en casi todas partes de T^n. Debido a que esto requiere la prueba de una buena definición, es decir, de independencia de la igualdad ante el representante de la clase de equivalencia que se tome, a continuación la damos.

Prueba: La igualdad (2.13) está bien definida para funciones reales continuas de varias variables. Como el correspondiente espacio lineal de n variables es denso en $\mathfrak{L}_p^n$ bajo la norma, podemos tomar sucesiones $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$ y $\{\beta_i\}_{i=0}^{\infty}$ que converjan a a y b, respectivamente. Por la buena definición de la operación $\circ$ entre funciones continuas, tenemos que puede definirse $a \circ b$ como el límite de la sucesión $\{\alpha_i \circ \beta_i\}_{i=0}^{\infty}$ bajo la norma de $\mathfrak{L}_p^n$. Tomando clases de equivalencia, se consigue finalmente la igualdad (2.13).

Ejemplo. Si $A_n(t)$ es el espacio de funciones reales continuas de n variables, entonces $A(t) = \prod_{n=0}^{\infty} A_n(t)$ es un álgebra de coeficientes. El concepto de "álgebra de coeficientes" se usa en la definición de series de Volterra, las cuales son aplicadas frecuentemente en la solución de problemas en sistemas y teoría de control (véase [R2]).

Desde luego, $\Lambda(t)$ es subespacio lineal de $A(t)$.

2.3.5. El operador E

Definición 16. Definamos ahora el operador $E : A(t) \to A(t)$, como la transformación lineal tal que, si $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in A(t)$, se tiene que

$$E(a) = \{b_n\}_{n=0}^{\infty} \tag{2.14}$$

en donde $b_0 = 0$ y $b_1 = a_1$ y si $n \geq 2$ entonces $b_n(t_1, \ldots, b_n) = E_n(a_n(t_1, \ldots, t_n))$.

Por la definición de sucesión de coeficientes ordenados y el hecho de que, por (2.11), $E_n^2 = E_n$ se obtiene la siguiente proposición.

Proposición 4. El operador E es una proyección, esto es $E^2 = E$, y además *Rango* $E = \Lambda(t)$.

El operador E es un "ordenador" que "fuerza" a los elementos del álgebra $A(t)$ a adquirir la estructura de una sucesión de coeficientes ordenados. El concepto de ordenador, así como el análisis de otros ejemplos, puede encontrarse en [MP].

4. ÁLGEBRAS Y ESPACIOS LINEALES ORDENADOS DE RANGO CONTINUO

2.4.1. El álgebra libre $\overline{\mathcal{A}}$

Definición 17. Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert sobre el campo $\mathbb{F}$ y $\mathbb{A}$ el álgebra de operadores continuos sobre $\mathbb{H}$, es decir, $\mathbb{A}$ es el álgebra de transformaciones lineales continuas que van del espacio $\mathbb{H}$ en sí mismo. Siguiendo la manera de proceder en el caso de álgebras libres generadas, construyamos el álgebra libre $\mathcal{A} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{A} \oplus (\mathbb{A} \otimes \mathbb{A}) \oplus \ldots$ y su extensión a las series formales $\overline{\mathcal{A}}$. Para tratar problemas de convergencia de series en $\overline{\mathcal{A}}$, como en el caso generado, se define la valuación dada por (2.5). Las álgebras $\mathcal{A}$ y $\overline{\mathcal{A}}$ son asociativas con unidad. Para evitar cualquier confusión entre el producto usual de operadores definido en $\mathbb{A}$ con el producto libre dado en las dos últimas denotaremos a este último por $\cdot$. El álgebra libre $\mathcal{A}$ se introduce aquí para mantener el debido rigor matemático.

Observación: Dado que $\mathbb{H}$ es un espacio de Hilbert, tiene definida una norma a partir de su producto interior. Esta norma permite a su vez definir una norma estándar en el álgebra de operadores $\mathbb{A}$ que da lugar a una métrica. Sea, pues, $H : \mathbb{R} \to \mathbb{A}$ una función continua y que se anula sólo en un conjunto finito de puntos del intervalo $T = [0, t]$. Induciendo a partir de la norma de $\mathbb{A}$ la norma en los espacios homogéneos $\mathbb{A} \otimes \ldots \otimes \mathbb{A}$ (véase [**Ko**]) llegamos a que todo producto de la forma $H(t_1) \otimes \ldots \otimes H(t_n)$ es una función continua de n variables. Si tomamos $a_n \in A_n(t)$ tendremos que la función de n variables reales $a_n(t_1, \ldots, t_n) H(t_1) \otimes \ldots \otimes H(t_n)$ es integrable, con *respecto a la norma* de $\mathbb{A} \otimes \ldots \otimes \mathbb{A}$, sobre $T^n = [0, t]^n$. Por lo tanto la integral

$$\int_0^t dt_1 \ldots \int_0^t dt_n a_n(t_1, \ldots, t_n) H(t_1) \otimes \ldots \otimes H(t_n)$$

está definida y es un elemento homogéneo de grado n en $\overline{\mathcal{A}}$.

Con todo esto definimos

Observación. El espacio $\lambda(t)$ será para nosotros el más importante de todos los mencionados antes ya que todo elemento ordenado podrá ser reescrito en la siguiente forma

$$\int_0^t dt_1 u_1(t_1) H(t_1)$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^t dt_1\ldots\int_0^t dt_n u_n(t_1,\ldots,t_n)\left[\ldots\left[H(t_1),H(t_2)\right]_{\otimes},\ldots,H(t_n)\right]_{\otimes}$$

(nótese que el producto de lie $[\cdot]_{\otimes}$ está referido al producto libre $\otimes$). Esto es consecuencia de la siguiente ecuación que satisface cualquier coeficiente ordenado u_n,

$$\int_0^t dt_1\ldots\int_0^t dt_n u_n(t_1,\ldots,t_n) H(t_1)\otimes\ldots\otimes H(t_n) \tag{2.17}$$
$$=\frac{1}{n}\int_0^t dt_1\ldots\int_0^t dt_n u_n(t_1,\ldots,t_n)\left[\ldots\left[H(t_1),H(t_2)\right]_{\otimes},\ldots,H(t_n)\right]_{\otimes}$$

La demostración de la ecuación (2.17) se consigue reordenando los índices de u_n, usando el *teorema* de *Fubini*, y transfiriendo las permutaciones a los productos del operador H de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
&\int_0^t dt_1\ldots\int_0^t dt_n u_n(t_1,\ldots,t_n) H(t_1)\otimes\ldots\otimes H(t_n)\\
=\;&\int_0^t dt_1\ldots\int_0^t dt_n E_n(u_n(t_1,\ldots,t_n)) H(t_1)\otimes\ldots\otimes H(t_n)\\
=\;&\frac{1}{n}\int_0^t dt_1\ldots\int_0^t dt_n\left(\left(\prod_{k=2}^{n}\left(1-C_{1,n-k+2}^{-1}\right)\right)(u_n(t_1,\ldots,t_n))\right)\\
&\times H(t_1)\otimes\ldots\otimes H(t_n)\\
=\;&\frac{1}{n}\int_0^t dt_1\ldots\int_0^t dt_n\left(\left(1+\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i-1}\sum_{n\geq j_{i-1}>\ldots>j_1\geq 2}C_{1,j_{i-1}}^{-1}\ldots C_{1,j_1}^{-1}\right)\right.\\
&\left.\times(u_n(t_1,\ldots,t_n))\right) H(t_1)\otimes\ldots\otimes H(t_n)\\
=\;&\frac{1}{n}\int_0^t dt_1\ldots\int_0^t dt_n u_n(t_1,\ldots,t_n) H(t_1)\otimes\ldots\otimes H(t_n)\\
&+\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i-1}\sum_{n\geq j_{i-1}>\ldots>j_1\geq 2}\int_0^t dt_1\ldots\int_0^t dt_n\left(C_{1,j_{i-1}}^{-1}\ldots C_{1,j_1}^{-1}\right.\\
&\left.\times(u_n(t_1,\ldots,t_n))\right) H(t_1)\otimes\ldots\otimes H(t_n)\\
=\;&\frac{1}{n}\int_0^t dt_1\ldots\int_0^t dt_n u_n(t_1,\ldots,t_n) H(t_1)\otimes\ldots\otimes H(t_n)\\
&+\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i-1}\sum_{n\geq j_{i-1}>\ldots>j_1\geq 2}\int_0^t dt_1\ldots\int_0^t dt_n C_{1,j_1}\ldots C_{1,j_{i-1}}\\
&\times\left(\left(C_{1,j_{i-1}}^{-1}\ldots C_{1,j_1}^{-1}(u_n(t_1,\ldots,t_n))\right) H(t_1)\otimes\ldots\otimes H(t_n)\right)
\end{aligned}$$

5. EL ÁLGEBRA DE COEFICIENTES FINITO DIMENSIONAL

Construiremos a continuación un álgebra de coeficientes particular que será de utilidad para obtener la fórmula de Magnus.

Sea la función escalón

$$\overline{\theta}(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad \tau > 0 \\ 0, & \text{si} \quad \tau \leq 0 \end{cases} \tag{2.20}$$

y las funciones de n variables

$$\theta_{i,j}(t_1, \ldots, t_n) = \overline{\theta}(t_i - t_j) \tag{2.21}$$

para $1 \leq i.j \leq n$ con $i \neq j$. Además, sea $\Theta_1^n(t_1. \ldots . t_n) = 1$.

Nótese que

$$\theta_{i,j} = 1 - \theta_{j.i} \tag{2.22}$$

en casi todo $\mathbb{R}^n$.

Se define $A_n^f(t)$ como el subespacio lineal del espacio $\mathfrak{L}_p^n$ sobre $\mathbb{R}$ generado por las restricciones a T^n de Θ_1^n y las funciones

$$\theta_{\mathbf{i},\mathbf{j}}^n(t_1, \ldots, t_n) = \theta_{i_1,j_1}\theta_{i_2.j_2}\ldots\theta_{i_k,j_k},$$

en donde $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_k)$ y $\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_k)$ con $1 \leq k \leq n-1$, y los índices $(i_p.j_p)$ están ordenados en el sentido lexicográfico. La multiplicación entre elementos de $A_n^f(t)$ y $A_m^f(t)$ se define de la misma forma que (2.13). esto es. se define para $\theta_{\mathbf{i},\mathbf{j}}^n \in A_n^f(t)$ y $\theta_{\mathbf{i}',\mathbf{j}'}^m \in A_m^f(t)$ como

$$\theta_{\mathbf{i},\mathbf{j}}^n \circ \theta_{\mathbf{i}',\mathbf{j}'}^m = \theta_{\mathbf{i}'',\mathbf{j}''}^{n+m}.$$

en donde $\mathbf{i}'' = (i_1. \ldots, i_k. n+i_1', \ldots, n+i_r')$ y $\mathbf{j}'' = (j_1, \ldots, j_k, n+j_1'. \ldots . n+j_r')$ y se extiende por linealidad en los demás productos posibles. La notación Θ_1^n. por ejemplo. es consistente con la operación $\circ$, ya que si queremos evaluar la enésima potencia de Θ_1^1, obtenemos

$$\left(\Theta_1^1\right)^n = \overbrace{\Theta_1^1 \circ \ldots \circ \Theta_1^1}^{n \text{ veces}} = \Theta_1^n.$$

Observemos que cada $A_n^f(t)$ es un espacio lineal de dimensión finita. Para $n \geq 2$. un elemento distinguido de este espacio es

$$\Theta_n(t_1. \ldots, t_n) = \theta_{1.2} + \ldots + \theta_{n-1,n}. \tag{2.23}$$

Obsérvese que $\prod_{n=0}^{\infty} A_n^f(t)$ es un álgebra de coeficientes a la que llamaremos el *álgebra de coeficientes finito dimensional* y se denotará por $A^f(t)$. Los otros espacios, para este caso, se denotarán por $\Lambda_n^f(t)$, $\Lambda^f(t)$, $\mathcal{A}^f(t)$, $\lambda^f(t)$, $\mathfrak{A}^f(t)$ y $\mathcal{L}^f(t)$. Por otro lado, como $\Lambda_n^f(t) \subset A_n^f(t)$, también $\Lambda_n^f(t)$ es de dimensión finita.

CAPíTULO 3

LA FÓRMULA DE MAGNUS

En este capítulo terminaremos de extender los resultados del caso discreto al caso continuo que hemos construido y finalmente obtendremos la Fórmula de Magnus la cual es el análogo continuo a la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (véase [J]). Usaremos. pues. la notación del capítulo anterior y los conceptos del caso discreto.

1. EL CRITERIO DE FRIEDRICHS

3.1.1. El álgebra $\overline{\mathcal{A} \otimes_1 \mathcal{A}}$

Definición 24. Considérese ahora el álgebra libre $\mathcal{A}$ dada en la definición 13. Siguiendo los pasos de las Álgebras de Lie discretas (véase [J]), tomemos el producto tensorial del álgebra $\mathcal{A}$ consigo misma, esto es, $\mathcal{A} \otimes_1 \mathcal{A}$ y su álgebra formal asociada $\overline{\mathcal{A} \otimes_1 \mathcal{A}}$. Los elementos de $\overline{\mathcal{A} \otimes_1 \mathcal{A}}$ son de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} d_{m,n-m}. \tag{3.1}$$

donde $d_{m.m-n} = c_{n,m} (a_m \otimes_1 b_{n-m})$ con $c_{n,m} \in \mathbb{F}$ y $a_m . b_{n-m}$ son elementos homogéneos de $\mathcal{A}$ de grados. respectivamente, m y $n - m$. Cuando el elemento $d_{i,j}$ no es nulo lo llamaremos un *elemento homogéneo de grado* (i, j). Es inmediato que todo elemento de $\overline{\mathcal{A} \otimes_1 \mathcal{A}}$ se escribe de una manera única como una serie (3.1) de elementos homogéneos de distintos grados $(i. j)$. El producto libre $\cdot$ dado en $\overline{\mathcal{A}}$ se relacionará con el nuevo producto $\otimes_1$ dado en $\overline{\mathcal{A} \otimes_1 \mathcal{A}}$ de la manera usual. es decir, si $\alpha. \beta, \gamma. \delta$ están en $\overline{\mathcal{A}}$ se tendrá

$$(\alpha \odot \beta) \otimes_1 (\gamma \odot \delta) = (\alpha \otimes_1 \gamma) \odot (\beta \otimes_1 \delta) . \tag{3.2}$$

De esta identidad se puede comprobar que. con respecto al producto libre $\cdot$. el *elemento idéntico* de ambas álgebras $\mathcal{A} \otimes_1 \mathcal{A}$ y $\overline{\mathcal{A} \otimes_1 \mathcal{A}}$ es $1 \otimes_1 1$.

3.1.2. La subálgebra $\mathcal{A}(t) \otimes_1 \mathcal{A}(t)$

Definición 25. Abusando de la notación tensorial consideremos ahora la subálgebra $\mathcal{A}(t) \otimes_1 \mathcal{A}(t)$ de $\overline{\mathcal{A} \otimes_1 \mathcal{A}}$. $\mathcal{A}(t) \otimes_1 \mathcal{A}(t)$ consta de todos los elementos de la forma

$$\begin{aligned} & a_{0.0} (1 \otimes_1 1) + \int_0^t dt_1 a_{1,0} (t_1) (H(t_1) \otimes_1 1) + \int_0^t dt_1 a_{0,1} (t_1) (1 \otimes_1 H(t_1)) \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\int_0^t dt_1 \ldots \int_0^t dt_n a_{n,0} (t_1, \ldots, t_n) ((H(t_1) \otimes \ldots \otimes H(t_n)) \otimes_1 1) \right. \\ & + \sum_{m=1}^{n-1} \int_0^t dt_1 \ldots \int_0^t dt_n a_{n,m} (t_1, \ldots, t_n) (H(t_1) \otimes \ldots \otimes H(t_{n-m})) \end{aligned} \tag{3.3}$$

($\Longrightarrow$) Si $\alpha \in \lambda(t)$ entonces existe $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in \Lambda(t)$ tal que $\alpha = \Phi(a)$, pero como a está en $\Lambda(t)$ ocurre que $a = E(a)$; esto, por (2.14), es $a_0 = 0$ y $a_n = E_n(a_n)$, para $n \geq 2$. De donde que

$$\begin{aligned}\alpha &= \Phi(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t dt_1 \ldots \int_0^t dt_n a_n(t_1, \ldots, t_n) H(t_1) \otimes \ldots \otimes H(t_n) \\ &= \int_0^t dt_1 a_1(t_1) H(t_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t dt_1 \ldots \int_0^t dt_n E_n(a_n(t_1, \ldots, t_n)) H(t_1) \\ &\quad \otimes \ldots \otimes H(t_n).\end{aligned}$$

Aplicando Δ dada por (3.4) obtenemos

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= \int_0^t dt_1 a_1(t_1) (H(t_1) \otimes_1 1 + 1 \otimes_1 H(t_1)) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t dt_1 \ldots \int_0^t dt_n E_n(a_n(t_1, \ldots . t_n)) (H(t_1) \otimes_1 1 + 1 \otimes_1 H(t_1)) \\ &\quad \otimes \ldots \otimes (H(t_n) \otimes_1 1 + \otimes_1 H(t_n)).\end{aligned}$$

Por (2.17) podemos reordenar cada una de las integrales múltiples de tal manera que las variables conserven su índice ordenado en cada a_n. Procediendo así obtenemos

$$\begin{aligned}&= \int_0^t dt_1 a_1(t_1) (H(t_1) \otimes_1 1 + 1 \otimes_1 H(t_1)) + \\ &\quad \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t dt_1 \ldots \int_0^t dt_n a_n(t_1, \ldots, t_n) D_n((H(t_1) \otimes_1 1 + 1 \otimes_1 H(t_1)) \\ &\quad \otimes \ldots \otimes (H(t_n) \otimes_1 1 + 1 \otimes_1 H(t_n))).\end{aligned}$$

De (2.9) tenemos

$$\begin{aligned}&= \int_0^t dt_1 a_1(t_1) (H(t_1) \otimes_1 1 + 1 \otimes_1 H(t_1)) \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^t dt_1 \ldots \int_0^t dt_n a_n(t_1, \ldots, t_n) [\ldots [H(t_1) \otimes_1 1 + 1 \otimes_1 H(t_1), \\ &\quad H(t_2) \otimes_1 1 + 1 \otimes_1 H(t_2)]_{\otimes}, \ldots, H(t_n) \otimes_1 1 + 1 \otimes_1 H(t_n)]_{\otimes}.\end{aligned}$$

El producto de Lie $[\cdot]_{\otimes}$ está, desde luego, referido al producto libre $\otimes$. Y como por inducción puede probarse que

$$\begin{aligned}&[\ldots [H(t_1) \otimes_1 1 + 1 \otimes_1 H(t_1), H(t_2) \otimes_1 1 + 1 \otimes_1 H(t_2)]_{\otimes}, \ldots, H(t_n) \otimes_1 1 + 1 \otimes_1 H(t_n)]_{\otimes} \\ &= [\ldots [H(t_1), H(t_2)]_{\otimes}, \ldots, H(t_n)]_{\otimes} \otimes_1 1 + 1 \otimes_1 [\ldots [H(t_1), H(t_2)]_{\otimes}, \ldots, H(t_n)]_{\otimes},\end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) Sea $\alpha = \Phi(a)$, $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in A(t)$, como de costumbre. Por hipótesis $\Delta\alpha = \alpha \otimes_1 1 + 1 \otimes_1 \alpha$. Antes de igualar, desarrollemos $\Delta\alpha$:

$$\begin{aligned}
\Delta\alpha &= a_0 (1 \otimes_1 1) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t dt_1 \ldots \int_0^t dt_n a_n (t_1, \ldots, t_n) \prod_{m=1}^{n} \otimes \left(H (t_m) \otimes_1 1 + 1 \otimes_1 H (t_m)\right) \\
&= a_0 (1 \otimes_1 1) + \int_0^t dt_1 a_1 (t_1) \left(H (t_1) \otimes_1 1 + 1 \otimes_1 H (t_1)\right) \\
&\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t dt_1 \ldots \int_0^t dt_n a_n (t_1, \ldots, t_n) \left(\left(\prod_{m=1}^{n} \otimes H (t_m) \right) \otimes_1 1 \right. \\
&\quad + \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{\substack{S_j \subset J_n \\ \# S_j = m}} \left(\left(\prod_{p \in J_n \setminus S_j} \otimes H (t_p) \right) \otimes_1 \left(\prod_{q \in S_j} \otimes H (t_q) \right) \right) \\
&\quad \left. + 1 \otimes_1 \prod_{m=1}^{n} \otimes H (t_m) \right),
\end{aligned}$$

$J_n = \{1, \ldots, n\}$ y tanto él, como cada subconjunto S_j y $J_n \setminus S_j$, considerados como conjuntos ordenados. Tomando en cuenta que $a_0 (1 \otimes_1 1) = a_0 \otimes_1 1 = 1 \otimes_1 a_0$, e integrando separadamente y reagrupando obtenemos, continuando

$$\begin{aligned}
&= \alpha \otimes_1 1 + 1 \otimes_1 \alpha - a_0 (1 \otimes_1 1) \\
&\quad - \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t dt_1 \ldots \int_0^t dt_n a_n (t_1, \ldots, t_n) \left(\sum_{m=1}^{n-1} \sum_{\substack{S_j \subset J_n \\ \# S_j = m}} \left(\left(\prod_{p \in J_n \setminus S_j} \otimes H (t_p) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \otimes_1 \left(\prod_{q \in S_j} \otimes H (t_q) \right) \right) \right).
\end{aligned}$$

Y ahora sí, aplicando la hipótesis podemos cancelar $\alpha \otimes_1 1 + 1 \otimes_1 \alpha$ en la expresión anterior e igualar lo restante a cero

$$\begin{aligned}
&-a_0 (1 \otimes_1 1) \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-1} \int_0^t dt_1 \ldots \int_0^t dt_n a_n (t_1, \ldots, t_n) \sum_{\substack{S_j \subset J_n \\ \# S_j = m}} \left(\left(\prod_{p \in J_n \setminus S_j} \otimes H (t_p) \right) \right. \\
&\qquad \left. \otimes_1 \left(\prod_{q \in S_j} \otimes H (t_q) \right) \right) = 0.
\end{aligned}$$

Esto implica inmediatamente que $a_0 = 0$. Por otro lado, puede notarse que cada integral múltiple de la expresión anterior representa un elemento homogéneo de distinto grado (i, j) en $\overline{\mathcal{A} \otimes_1 \mathcal{A}}$. Lo cual nos lleva directamente a que la anulación de la expresión se verifica cuando y sólo cuando se da la de cada integral múltiple.

Conviniendo que $\prod_{k=2}^{1} C_{1,1-k+2}^{-1} = 1$, otra forma de presentar la ecuación anterior es

$$\int_0^t dt_1 \ldots \int_0^t dt_n \left(\prod_{k=2}^{n-m} C_{1,n-m-k+2}^{-1} \sum_{n \geq i_{n-m} > \ldots > i_1 \geq 1} C_{1,i_{n-m}}^{-1} \ldots C_{1,i_1}^{-1} \left(a_n\left(t_1, \ldots, t_n\right)\right) \right)$$
$$\times \left(\prod_{p=1}^{n-m} \otimes H\left(t_p\right) \right) \otimes_1 \left(\prod_{q=n-m+1}^{n} \otimes H\left(t_q\right) \right) = 0.$$

Denotando

$$\rho_{n,m} = \sum_{n \geq i_{n-m} > \ldots > i_1 \geq 1} C_{1.i_{n-m}}^{-1} \ldots C_{1,i_1}^{-1}$$

y

$$\sigma_{n,m} = \left(\prod_{k=2}^{n-m} C_{1,n-m-k+2}^{-1} \right) \rho_{n,m}$$

llegamos a que la integral anterior se anula, según lo convenido, cuando y sólo cuando $\sigma_{n.m}\left(a_n\right) = 0$. Como esto debe verificarse para cada una de las integrales múltiples arribamos, pues, al siguiente sistema infinito de ecuaciones

$$\left\{ \sigma_{n,m}\left(a_n\right) = 0, \quad \text{para} \quad n \geq 2 \quad \text{y} \quad m \quad \text{entre} \quad 1 \quad \text{y} \quad n-1. \right.$$

Las ecuaciones de este sistema no son independientes entre sí. Para reducirlo, apliquemos el corolario 1.7 y veremos que

$$\sigma_{n,i} = \left(C_{1,n}^{m}\right) \sigma_{n.n-i}.$$

luego, tenemos el sistema reducido, denotando por $[[\cdot]]$ la función mayor entero menor o igual, siguiente

$$\left\{ \sigma_{n,m}\left(a_n\right) = 0, \quad \text{para} \quad n \geq 2 \quad \text{y} \quad m \quad \text{entre} \quad \left[\left[\frac{n+1}{2}\right]\right] \quad \text{y} \quad n-1. \right. \tag{3.6}$$

A partir de él debemos llegar a que $E_n\left(a_n\right) = a_n$ para $n \geq 2$. Una forma de expresar lo anterior, más útil a nuestros propósitos, es $\left(nE_n - n\right) a_n = 0$ para $n \geq 2$. Recordemos que

$$nE_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - C_{1,n-k+2}^{-1}\right) = 1 + \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i-1} \sum_{n \geq j_{i-1} > \ldots > j_1 \geq 2} C_{1,j_{i-1}}^{-1} \ldots C_{1,j_1}^{-1}$$

y, por ende,

$$nE - n = -(n-1) + \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i-1} \sum_{n \geq j_{i-1} > \ldots > j_1 \geq 2} C_{1,j_{i-1}}^{-1} \ldots C_{1,j_1}^{-1}.$$

Exponemos a continuación la estrategia a seguir. El lector estará de acuerdo en que si logramos establecer las identidades siguientes:

Para n impar:

$$nE_n - n = \sum_{i=1}^{[[n/2]]} \left[(-1)^i (n-i) \prod_{k=2}^{i} C_{1,i-k+2}^{-1} + (-1)^{n-i} i \prod_{k=i+1}^{n} C_{1,n-k+i+1}^{-1} \right] \sigma_{n,n-1}$$

con $b_{1,n} = a_n$ para toda $n \geq 1$. Las potencias sucesivas de β estarán dadas por expresiones de la forma

$$\beta^m = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t dt_1 \ldots \int_0^t dt_n b_{m,n}(t_1, \ldots, t_n) H(t_1) \otimes \ldots \otimes H(t_n),$$

las que por ser $\mathcal{A}(t)$ álgebra estarán en $\mathcal{A}(t)$. Nótese que la componente homogénea de menor grado en β^m debe de ser al menos de grado m. Por lo tanto, de (3.7) tenemos que log α es

$$\log\ \alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t dt_1 \ldots \int_0^t dt_n \left(\sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m+1}}{m} b_{m,n}(t_1 \ldots t_n) \right) H(t_1) \otimes \ldots \otimes H(t_n),$$

el cual evidentemente se encuentra en $\mathcal{A}(t)$.■

Por ser Δ homomorfismo entre álgebras asociativas con unidad se tendrá que si para un $\alpha \in \mathcal{A}(t)$ se tiene log $\alpha \in \mathcal{A}(t)$ entonces

$$\Delta(\log\ \alpha) = \log(\Delta\alpha). \tag{3.8}$$

Hasta ahora hemos tomado a t fijo. Sin embargo, conviene considerar a los elementos de $\mathcal{A}(t)$ y $\mathcal{A}(t) \otimes_1 \mathcal{A}(t)$ como funciones en t. Luego podemos, por ejemplo. utilizar la derivada con respecto a t, $\frac{d}{dt}$, la cual se aplicará como es natural componente a componente en cada elemento. Esta derivada no necesariamente se encontrará en los espacios respectivos $\mathcal{A}(t)$ ó $\mathcal{A}(t) \times_1 \mathcal{A}(t)$ pero se hallará en $\overline{\mathcal{A}}$ ó $\overline{\mathcal{A} \times_1 \mathcal{A}}$ respectivamente. Finalmente, para la derivada del producto tensorial de dos elementos $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ de $\mathcal{A}(t)$ se dará, como puede comprobarse, la conocida regla

$$\frac{d}{dt}(\alpha(t) \otimes_1 \beta(t)) = \frac{d}{dt}\alpha(t) \otimes_1 \beta(t) + \alpha(t) \otimes_1 \frac{d}{dt}\beta(t). \tag{3.9}$$

A continuación se prueba el análogo continuo del teorema de Baker-Campbell-Hausdorff (para el caso discreto, véase [J]).

3.2.2. El Teorema de Magnus

Teorema 2. Sean. $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{F}$, $\mathbb{A}$ el álgebra de los operadores acotados sobre $\mathbb{H}$. $t > 0$ y $H(t)$ una función continua de $[0, t]$ en $\mathbb{A}$ que se anula sólo en un conjunto finito de puntos. Sea $U(t)$ la solución de

$$\frac{dU}{dt} = H(t)U(t), \quad U(0) = I, \tag{3.10}$$

donde I denota al operador identidad. Entonces, si $U(t)$ tiene un logaritmo $\Omega(t)$ dado por la serie (3.7) (poniendo I en lugar de e) y que ésta converge absolutamente en $\mathbb{A}$ entonces resulta que, existe un elemento $\psi(t)$ de $\mathcal{L}^f(t)$ (esto es, una sucesión de coeficientes ordenados convergentes y finito dimensionales) tal que $\Omega(t) = \Xi(\psi(t))$.

Demostración

La solución $U(t)$ de (3.10) está dada por la serie

$$U(t) = I + \int_0^t dt_1 H(t_1) + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 H(t_1) H(t_2) \tag{3.11}$$

3. UNA EXPRESIÓN EXPLÍCITA PARA LA EXPANSIÓN DE MAGNUS

En esta sección, usaremos las Álgebras de Lie presentadas en el capítulo 1, junto con los resultados hasta ahora conseguidos en éste, para obtener una expresión explícita para la expansión de Magnus.

3.3.1. La derivada formal

Definición 29. Siguiendo a Mielnik y Plebañski [MP], definamos una derivada "formal" $\frac{d}{d\theta} : A_n^f(t) \longrightarrow A_n^f(t)$ de la siguiente manera:

(3.16)

1) $\dfrac{d}{d\theta}\Theta_1^n = 0,$	2) $\dfrac{d}{d\theta}\theta_{i,j} = \Theta_1^n, \quad i,j \in \mathbb{N}.$
3) $\dfrac{d}{d\theta}(A+B) = \dfrac{d}{d\theta}A + \dfrac{d}{d\theta}B,$	4) $\dfrac{d}{d\theta}(aA) = a\left(\dfrac{d}{d\theta}A\right).$
5) $\dfrac{d}{d\theta}(AB) = \left(\dfrac{d}{d\theta}A\right)B + A\left(\dfrac{d}{d\theta}B\right).$	

donde $A, B \in A_n^f(t)$, y $a \in \mathbb{R}$.

La primera condición indica que la derivada de una función constante es cero; la segunda asevera que la derivada de cualquier función generadora es 1. Las condiciones 3 y 5 proveen de las reglas que una derivada definida en un anillo debe verificar.

Podemos extender esta derivada al álgebra de coeficientes finito dimensional $A^f(t)$. Primero, la extendemos a los productos entre elementos de $A_n^f(t)$ y $A_m^f(t)$. Como

$$\theta_{\mathbf{i},\mathbf{j}}^n \circ \theta_{\mathbf{i}',\mathbf{j}'}^m = \theta_{\mathbf{i}'',\mathbf{j}''}^{n+m}.$$

donde $\mathbf{i}'' = (i_1, \ldots, i_k, n+i_1', \ldots, n+i_r')$ y $\mathbf{j}'' = (j_1, \ldots, j_k, n+j_1', \ldots, n+j_r')$, tenemos que

$$\theta_{\mathbf{i},\mathbf{j}}^n \circ \theta_{\mathbf{i}',\mathbf{j}'}^m = \theta_{i_1,j_1}\theta_{i_2,j_2}\ldots\theta_{i_k,j_k}\theta_{n+i_1',n+j_1'}\theta_{n-i_2',n+j_2'}\ldots\theta_{n+i_r',n+j_r'}.$$

Por lo que la derivada debe ser definida como

$$\frac{d}{d\theta}\left(\theta_{\mathbf{i},\mathbf{j}}^n \circ \theta_{\mathbf{i}',\mathbf{j}'}^m\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\theta_{i_1,j_1}\theta_{i_2,j_2}\ldots\theta_{i_k,j_k}\theta_{n+i_1',n-j_1'}\theta_{n+i_2',n+j_2'}\ldots\theta_{n+i_r',n+j_r'}\right).$$

Es fácil comprobar que esta derivada verifica la regla para la derivada de un producto:

$$\frac{d}{d\theta}\left(\theta_{\mathbf{i},\mathbf{j}}^n \circ \theta_{\mathbf{i}',\mathbf{j}'}^m\right) = \left(\frac{d}{d\theta}\theta_{\mathbf{i},\mathbf{j}}^n\right) \circ \theta_{\mathbf{i}',\mathbf{j}'}^m + \theta_{\mathbf{i},\mathbf{j}}^n \circ \left(\frac{d}{d\theta}\theta_{\mathbf{i}',\mathbf{j}'}^m\right).$$

Por lo tanto, podemos definir la derivada en $A^f(t)$ como el operador lineal $\frac{d}{d\theta} : A^f(t) \longrightarrow A^f(t)$ que satisface las condiciones 1, 2 y 5 de (3.16).

Dado el siguiente elemento en $\mathcal{A}^f(t)$,

$$\alpha(t) = 1 + \int_0^t dt_1 H(t_1)\, dt_1 \tag{3.17}$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t dt_1 \ldots \int_0^t dt_n \theta_{1,2}\ldots\theta_{n-1,n} H(t_1) \otimes \ldots \otimes H(t_n),$$

donde las a_q son los elementos de la sucesión r. Para continuar, anexemos los índices $i = 0$ e $i = n$ de la suma los cuales son cero:

$$\frac{d}{d\theta}r = \left(0, 0, \Theta_1^1 \circ \Theta_1^1, \dots, \sum_{i=0}^{n} a_i \circ a_{n-i}, \dots\right).$$

Pero, por la definición del producto $\circ$ entre elementos de $A^f(t)$, esta última fórmula es el cuadrado de r; es decir

$$\frac{d}{d\theta}r = \left(0, \Theta_1, \theta_{1,2}, \dots, \prod_{m=1}^{n-1} \theta_{m.m+1} \cdots\right)^2 = r^2.$$

Por lo tanto, para $p = 2$, (3.20) es válido.

Supongamos, por hipótesis de inducción, que (3.20) vale para $p = k$, esto es, que r cumple con que

$$\frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{d\theta^{k-1}}r = r^k.$$

Probemos ahora que (3.20) vale para $p = k+1$. Para esto, calculemos la k-ésima derivada de r:

$$\begin{aligned}\frac{d^k}{d\theta^k}r &= \frac{d}{d\theta}\left(\frac{d^{k-1}}{d\theta^{k-1}}r\right) = \frac{d}{d\theta}\left[(k-1)!r^k\right] = (k-1)!\frac{d}{d\theta}\left(r^k\right) \\ &= (k-1)!kr^{k-1}\frac{d}{d\theta}r = k!r^{k-1}r^2 = k!r^{k+1}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, vale para toda $p \geq 2$.

2. Probaremos esta parte por inducción sobre p.

Para $p = 1$, las ecuaciones (3.21) y (3.22) se dan: para comprobar esta afirmación, basta revisar r.

Siguiendo el proceso inductivo, supongamos, por hipótesis de inducción, que las ecuaciones (3.21) y (3.22) son válidas para $p = k$: es decir:

si $n < k$:

$$a_{k,n} = 0; \tag{3.23}$$

si $n \geq k$:

$$a_{k,n} = \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_{n-k} < n} \prod_{m=1}^{n-k} \theta_{j_m, j_m+1}. \tag{3.24}$$

Calculemos el término $a_{k+1,n}$:

$$a_{k+1,n} = \sum_{i=0}^{n} a_{k,i} \circ a_{1,n-i}.$$

Debido a (3.23), los términos $a_{k,i}$ son cero para $i = 0, \dots, k-1$, y lo mismo ocurre para $a_{1,0}$. Eliminándolos obtenemos:

$$a_{k+1,n} = \sum_{i=k}^{n-1} a_{k,i} \circ a_{1,n-i}. \tag{3.25}$$

Ahora, podemos distinguir dos casos para n: $n < k+1$ o $n \geq k+1$.

y aplicando la fórmula (3.20) del lema 3 obtenemos

$$\log(e_f + r) = r - \frac{1}{2!}\frac{d}{d\theta}r + \frac{1}{3!}\frac{d^2}{d\theta^2}r - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{d\theta^{n-1}}r + \ldots.$$

Definamos

$$L(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}x^{n-1}.$$

donde x^{n-1} significa la composición del elemento x. $n-1$ veces. Con esta notación tenemos:

$$L\left(\frac{d}{d\theta}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{d\theta^{n-1}}$$

y

$$L\left(\frac{d}{d\theta}\right)r = \log(e_f + r). \tag{3.27}$$

Como $L\left(\frac{d}{d\theta}\right)$ es una función lineal, podemos aplicarla componente a componente en r, es decir:

$$L\left(\frac{d}{d\theta}\right)r = L\left(\frac{d}{d\theta}\right)(0, \Theta_1^1, \theta_{1,2}, \theta_{1.2}\theta_{2.3}, \ldots, \theta_{1.2}\cdots\theta_{n-1.n}, \ldots)$$

$$= \left(L\left(\frac{d}{d\theta}\right)(0), L\left(\frac{d}{d\theta}\right)(\Theta_1^1), L\left(\frac{d}{d\theta}\right)(\theta_{1.2}). L\left(\frac{d}{d\theta}\right)(\theta_{1.2}\theta_{2.3}), \ldots, \right. \tag{3.28}$$

$$\left. L\left(\frac{d}{d\theta}\right)(\theta_{1,2}\cdots\theta_{n-1.n}), \ldots \right).$$

Para $n \geq 2$, sea

$$L_n = L\left(\frac{d}{d\theta}\right)(\theta_{1,2}\cdots\theta_{n-1.n}).$$

Sustituyendo la última expresión en (3.28) conseguimos

$$L\left(\frac{d}{d\theta}\right)r = (0, 1, L_2, \ldots, L_n, \ldots). \tag{3.29}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(-\frac{1}{2}a_{2,0},-\frac{1}{2}a_{2,1},-\frac{1}{2}a_{2,2},\dots,-\frac{1}{2}a_{2,n},\dots\right)\\
&+\left(\frac{1}{3}a_{3,0},\frac{1}{3}a_{3,1},\frac{1}{3}a_{3,2},\dots,\frac{1}{3}a_{3,n},\dots\right)+\dots\\
&+\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}a_{n,0},\frac{(-1)^{n+1}}{n}a_{n,1},\frac{(-1)^{n+1}}{n}a_{n,2},\dots,\frac{(-1)^{n+1}}{n}a_{n,n},\dots\right)+\dots,
\end{aligned}
$$

donde $a_{i,n}$ está definida por (3.21)-(3.22). Para conseguir L_n, tenemos que sumar las $(n+1)$-ésimas entradas. Sin embargo, debido a (3.21), la serie se trunca en el término $i=n$. Por lo tanto, esta evaluación da

$$L_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i+1}}{i}a_{i,n}.$$

Finalmente, sustituyendo (3.22) obtenemos

$$L_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i+1}}{i}\sum_{j_1<j_2<\ldots<j_{n-i}<n}\prod_{m=1}^{n-i}\theta_{j_m,j_m+1}.\blacksquare$$

El siguiente teorema da una expresión explícita para la expansión de Magnus, la cual hemos llamado la *Fórmula de Magnus*.

3.3.2. La Fórmula de Magnus

Teorema 4. Sea $\alpha(t)$ en $\mathcal{A}^f(t)$ dada por

$$
\begin{aligned}
\alpha(t) &= 1+\int_0^t dt_1 H(t_1)\\
&+\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^t dt_1\dots\int_0^t dt_n\theta_{1,2}\cdots\theta_{n-1,n}H(t_1)\otimes\ldots\otimes H(t_n).
\end{aligned}
$$

Entonces $\omega(t)=\log(\alpha(t))$ está contenido en $\Gamma^f(t)$ y se expresa explícitamente de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
\omega(t) &= \int_0^t dt_1 H(t_1)\\
&+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^t dt_1\dots\int_0^t dt_n L_n\left[\dots\left[H(t_1),H(t_2)\right]_{\otimes},\dots,H(t_n)\right]_{\otimes},
\end{aligned}
$$

donde L_n está dado por (3.30).

Demostración

De (3.17) y (3.18) tenemos que

$$\omega(t)=\log(\alpha(t))=\log(1+R).$$

Aplicando sucesivamente (3.26), (3.27), (3.29) y (2.16) obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\omega(t) &= \log(1+R)=\Phi(\log(e_f+r))=\Phi\left(L\left(\frac{d}{d\theta}\right)r\right)\\
&= \Phi(0,1,L_2,\dots,L_n,\dots)\\
&= \int_0^t dt_1 H(t_1)+\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^t dt_1\dots\int_0^t dt_n L_n H(t_1)\otimes\ldots\otimes H(t_n).
\end{aligned}
$$

CAPíTULO 4

CONSECUENCIAS DE LA FÓRMULA DE MAGNUS

1. DOS SERIES COMPLETAS PARA LA EXPANSIÓN DE MAGNUS

El siguiente teorema, el cual provee de una fórmula alternativa para L_n, fue probado por Mielnik y Plebański en [MP]. Demostraremos que (3.30) es equivalente a la representación que Mielnik y Plebański dan para L_n.

4.1.1. La Fórmula de Mielnik y Plebański

Teorema 5. Para $n \geq 2$:

$$L_n = \frac{(-1)^{n-1-\Theta_n}}{n}\binom{n-1}{\Theta_n}^{-1}. \tag{4.1}$$

donde Θ_n está dado por.(2.23).

Demostración

La prueba será por inducción sobre n.

Veamos que (4.1) vale para $n = 2$. Primeramente. ya hemos visto que

$$L_2 = \theta_{1.2} - \frac{1}{2}.$$

Ahora. calculando la expresión del lado derecho de (4.1) para $n = 2$, obtenemos

$$\frac{(-1)^{2-1-\Theta_2}}{2}\binom{2-1}{\Theta_2}^{-1} = \frac{(-1)^{1-\theta_{1,2}}}{2}\binom{1}{\theta_{1,2}}^{-1}. \tag{4.2}$$

Hay dos casos para $\theta_{1,2}$: $\theta_{1,2} = 0$ o $\theta_{1.2} = 1$.

Caso 1: $\theta_{1.2} = 0$. Sustituyendo $\theta_{1,2} = 0$ en el lado derecho de (4.2) tenemos

$$\frac{(-1)^{1-\theta_{1,2}}}{2}\binom{1}{\theta_{1,2}}^{-1} = \frac{(-1)^{1-0}}{2}\binom{1}{0}^{-1} = -\frac{1}{2} = \theta_{1.2} - \frac{1}{2} = L_2.$$

Caso 2: $\theta_{1,2} = 1$. Sustituyendo $\theta_{1,2} = 1$ en el lado derecho de (4.2) obtenemos

$$\frac{(-1)^{1-\theta_{1,2}}}{2}\binom{1}{\theta_{1,2}}^{-1} = \frac{(-1)^{1-1}}{2}\binom{1}{1}^{-1} = \frac{1}{2} = \theta_{1,2} - \frac{1}{2} = L_2.$$

Por lo tanto, (4.1) es válido para $n = 2$.

Supongamos, por hipótesis de inducción, que (4.1) vale para $n = k$; es decir, que

$$L_k = \frac{(-1)^{k-1-\Theta_k}}{k}\binom{k-1}{\Theta_k}^{-1}. \tag{4.3}$$

Sea p un entero entre 1 y $k-1$. Es conveniente separar en L_k los productos que incluyen $\theta_{p,p+1}$:

$$L_k = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(-1)^{i+1}}{i} \sum_{\substack{j_1<j_2<\ldots<j_q<p \\ p<j_{q+1}<\ldots<j_{k-i-1}<k}} \theta_{p,p+1} \prod_{m=1}^{k-i-1} \theta_{j_m,j_m+1} \tag{4.8}$$

$$+ \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(-1)^{i+2}}{i+1} \sum_{\substack{j_1<j_2<\ldots<j_q<p \\ p<j_{q+1}<\ldots<j_{k-i-1}<k}} \prod_{m=1}^{k-i-1} \theta_{j_m,j_m+1}.$$

Multiplicando L_k por $\frac{\Theta_k-k}{k+1}$ y aplicando (2.23) obtenemos:

$$\left(\frac{\Theta_k - k}{k+1}\right) L_k = \frac{1}{k+1}\left(\sum_{p=1}^{k-1} \theta_{p,p+1} - k\right) L_k = \frac{1}{k+1}\left(\sum_{p=1}^{k-1} \theta_{p,p+1} L_k - kL_k\right).$$

Para continuar, sustituyamos (4.8) en el primer L_k:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\Theta_k - k}{k+1}\right) L_k = {} & \frac{1}{k+1}\left(\sum_{p=1}^{k-1}\left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{(-1)^{i+1}}{i} \sum_{\substack{j_1<j_2<\ldots<j_q<p \\ p<j_{q+1}<\ldots<j_{k-i-1}<k}} \theta_{p.p+1}^2 \prod_{m=1}^{k-i-1} \theta_{j_m,j_m+1}\right.\right. \\ & \left.\left. + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(-1)^{i+2}}{i+1} \sum_{\substack{j_1<j_2<\ldots<j_q<p \\ p<j_{q+1}<\ldots<j_{k-i-1}<k}} \theta_{p.p+1} \prod_{m=1}^{k-i-1} \theta_{j_m,j_m+1}\right) - kL_k\right).\end{aligned}$$

Como $\theta_{p.p+1}$ es idempotente, $\theta_{p,p+1}^2 = \theta_{p,p+1}$. Sustituyendo, podemos continuar:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\Theta_k - k}{k+1}\right) L_k = {} & \frac{1}{k+1}\left(\sum_{p=1}^{k-1}\left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{(-1)^{i+1}}{i} \sum_{\substack{j_1<j_2<\ldots<j_q<p \\ p<j_{q+1}<\ldots<j_{k-i-1}<k}} \theta_{p,p+1} \prod_{m=1}^{k-i-1} \theta_{j_m,j_m+1}\right.\right. \\ & \left.\left. + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(-1)^{i+2}}{i+1} \sum_{\substack{j_1<j_2<\ldots<j_q<p \\ p<j_{q+1}<\ldots<j_{k-i-1}<k}} \theta_{p,p+1} \prod_{m=1}^{k-i-1} \theta_{j_m,j_m+1}\right) - kL_k\right) \\ = {} & \frac{1}{k+1}\left(\sum_{p=1}^{k-1}\sum_{i=1}^{k-1} \frac{(-1)^{i+1}}{i\,(i+1)} \sum_{\substack{j_1<j_2<\ldots<j_q<p \\ p<j_{q+1}<\ldots<j_{k-i-1}<k}} \theta_{p.p+1} \prod_{m=1}^{k-i-1} \theta_{j_m,j_m+1}\right. \\ & \left. -kL_k\right).\end{aligned}$$

Efectuemos la suma con respecto al índice p:

$$\left(\frac{\Theta_k - k}{k+1}\right) L_k = \frac{1}{k+1}\left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{(-1)^{i+1}(k-i)}{i\,(i+1)} \sum_{j_1<j_2<\ldots<j_{k-i}<k} \prod_{m=1}^{k-i} \theta_{j_m,j_m+1} - kL_k\right).$$

Con el objeto de simplificar la prueba, es importante notar que $\frac{\Theta_k+1}{k+1} = 1 + \frac{\Theta_k-k}{k+1}$. Luego, multiplicando L_k por $\frac{\Theta_k+1}{k+1}$, tenemos que

$$\left(\frac{\Theta_k+1}{k+1}\right) L_k = \left(1 + \frac{\Theta_k - k}{k+1}\right) L_k = L_k + \left(\frac{\Theta_k - k}{k+1}\right) L_k,$$

por lo que podemos aprovechar los desarrollos obtenidos en el caso 1. Sustituyendo (4.11) en lugar del primer L_k y aplicando la igualdad (4.9), obtenemos:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\Theta_k+1}{k+1}\right) L_k &= \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{i+1}}{i} \sum_{j_1<j_2<\ldots<j_{k-i}<k} \prod_{m=1}^{k-i} \theta_{j_m,j_m+1} \\ &+ \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{i+2}}{i+1} \sum_{j_1<j_2<\ldots<j_{k-i}<k} \prod_{m=1}^{k-i} \theta_{j_m,j_m+1},\end{aligned}$$

lo cual coincide con (4.10).■

De (3.31) y el teorema de equivalencia anterior, obtenemos las dos series completas siguientes para $\Omega(t)$:

$$\begin{aligned}\Omega(t) &= \int_0^t dt_1 H(t_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^t dt_1 \ldots \int_0^t dt_n L_n [\ldots[H(t_1), H(t_2)], \ldots, H(t_n)] \\ &= \int_0^t dt_1 H(t_1) \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t dt_1 \ldots \int_0^t dt_n \frac{(-1)^{n-1+\Theta_n}}{n^2} \binom{n-1}{\Theta_n}^{-1} [\ldots[H(t_1), H(t_2)], \ldots, H(t_n)].\end{aligned}$$

Una vez más creemos que es necesario enfatizar que estas dos fórmulas para la expansión de Magnus son las **dos únicas series explícitas y, además, no recursivas que existen en la literatura sobre el tema.**

2. UNA COTA SUPERIOR PARA LAS INTEGRALES EN LA FÓRMULA DE MAGNUS

Cuando se dispone de una serie completa para la expansión de Magnus, como lo es (3.31), es mucho más sencillo saber cuántas integrales tienen sus términos. Como una consecuencia de ello, damos a continuación el conteo de estas integrales por término.

Proposición 6. El número de integrales n-múltiples que aparecen en el término enésimo de la Fórmula de Magnus es 2^{n-1}.

Demostración

Se deduce inmediatamente observando que el número de subíndices distintos sujetos a la restricción $j_1 < j_2 < \ldots < j_{n-i} < n$, para cada i, es $\binom{n-1}{n-i}$. Luego, tomando la suma con respecto al índice i, obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{n-i} = 2^{n-1}.■$$

Proposición 7. Una cota superior para el número de integrales n-múltiples no cero en la Fórmula de Magnus es $3 \times 2^{n-3}$, para $n \geq 3$.

Ahora, denotando por π a la permutación

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

y aplicándola a (4.12) obtenemos

$$\begin{aligned} \theta_{3,2}\theta_{2,1} &= \pi(\theta_{1,2}\theta_{2,3}) = \pi(\theta_{1,3}(\theta_{1,2}+\theta_{2,3}-1)) \\ &= \theta_{3,1}(\theta_{3,2}+\theta_{2,1}-1) \end{aligned}$$

Por (2.22) tenemos que $\theta_{3,1} = 1-\theta_{1,3}$, $\theta_{3,2} = 1-\theta_{2,3}$ y $\theta_{2,1} = 1-\theta_{1,2}$. Sustituyendo, podemos continuar

$$\begin{aligned} \theta_{3,2}\theta_{2,1} &= (1-\theta_{1,3})(1-\theta_{2,3}+1-\theta_{1,2}-1) \\ &= (\theta_{1,3}-1)(\theta_{1,2}+\theta_{2,3}-1). \end{aligned}$$

En resumen

$$\theta_{3,2}\theta_{2,1} = (\theta_{1,3}-1)(\theta_{1,2}+\theta_{2,3}-1). \tag{4.13}$$

Restando (4.12) y (4.13) obtenemos

$$\begin{aligned} \theta_{1,2}\theta_{2,3} - \theta_{3,2}\theta_{2,1} &= \theta_{1,3}(\theta_{1,2}+\theta_{2,3}-1) - (\theta_{1,3}-1)(\theta_{1,2}+\theta_{2,3}-1) \\ &= \theta_{1,2}+\theta_{2,3}-1. \end{aligned}$$

Luego

$$\theta_{1,2}+\theta_{2,3} = \theta_{1,2}\theta_{2,3} - \theta_{3,2}\theta_{2,1} + 1. \tag{4.14}$$

Recordemos que el coeficiente L_3 es

$$L_3 = \theta_{1,2}\theta_{2,3} - \frac{1}{2}(\theta_{1,2}+\theta_{2,3}) + \frac{1}{3}.$$

Sustituyendo la expresión (4.14) por $\theta_{1,2}+\theta_{2,3}$ tenemos

$$\begin{aligned} L_3 &= \theta_{1,2}\theta_{2,3} - \frac{1}{2}(\theta_{1,2}\theta_{2,3} - \theta_{3,2}\theta_{2,1} + 1) + \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{2}\theta_{1,2}\theta_{2,3} + \frac{1}{2}\theta_{3,2}\theta_{2,1} - \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$L_3 = \frac{1}{2}\theta_{1,2}\theta_{2,3} + \frac{1}{2}\theta_{3,2}\theta_{2,1} - \frac{1}{6}. \tag{4.15}$$

Finalmente, considérese el tercer término de $\Omega(t)$ en (3.31), el cual hemos llamado Ω_3:

$$\Omega_3 = \frac{1}{3}\int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \int_0^t dt_3 L_3 \left[\left[H(t_1), H(t_2)\right], H(t_3)\right].$$

Sustituyendo la equivalencia para L_3 dada por (4.15) obtenemos

$$\begin{aligned} \Omega_3 &= \frac{1}{3}\int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \int_0^t dt_3 \left(\frac{1}{2}\theta_{1,2}\theta_{2,3} + \frac{1}{2}\theta_{3,2}\theta_{2,1} - \frac{1}{6}\right)\left[\left[H(t_1), H(t_2)\right], H(t_3)\right] \\ &= \frac{1}{6}\int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \int_0^t dt_3 \theta_{1,2}\theta_{2,3}\left[\left[H(t_1), H(t_2)\right], H(t_3)\right] \\ &\quad + \frac{1}{6}\int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \int_0^t dt_3 \theta_{3,2}\theta_{2,1}\left[\left[H(t_1), H(t_2)\right], H(t_3)\right] \\ &\quad - \frac{1}{18}\int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \int_0^t dt_3 \left[\left[H(t_1), H(t_2)\right], H(t_3)\right]. \end{aligned}$$

CAPÍTULO 5

APLICACIONES DE LA FÓRMULA DE MAGNUS

1. LA ESTABILIDAD DE SISTEMAS TRIANGULARES

Como ejemplo de un resultado global que se sigue inmediatamente de la Fórmula de Magnus, damos a continuación una prueba sencilla de un resultado conocido de estabilidad en sistemas triangulares.

Considérese el siguiente sistema triangular:

$$
\left\{
\begin{array}{llll}
\dot{x}_1 = a_{11}(t)\,x_1 + & a_{12}(t)\,x_2 + \ldots + & a_{1n}(t)\,x_n \\
\dot{x}_2 = & a_{22}(t)\,x_2 + \ldots + & a_{2n}(t)\,x_n \\
\vdots & & \vdots \\
\dot{x}_n = & & a_{nn}(t)\,x_n
\end{array}
\right.
\tag{5.1}
$$

Podemos representar (5.1) de la siguiente manera:

$$\frac{dU}{dt} = H(t)\,U(t).$$

donde

$$U(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad H(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ 0 & a_{22}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

La matriz triangular $H(t)$ puede ser representada como la suma $H(t) = D(t) + N(t)$, donde $D(t)$ es la matriz diagonal principal y $N(t)$ es la matriz triangular superior nilpotente. Para obtener una solución exponencial, apliquemos la Fórmula de Magnus en su forma (4.16), de la cual obtenemos

$$
\begin{aligned}
\Omega(t) &= \int_0^t dt_1 H(t_1) + \frac{1}{2}\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \left[H(t_1), H(t_2)\right] + \ldots \\
&= \operatorname{diag}\Big(\textstyle\int_0^t dt_1 a_{11}(t_1),\ \int_0^t dt_1 a_{22}(t_1)\ ,\ldots,\ \int_0^t dt_1 a_{nn}(t_1) \Big) + \hat{N}(t),
\end{aligned}
$$

A su vez, la ecuación (5.3) se puede poner en la forma

$$\frac{dU}{dt} = H(t)\,U(t)\,,$$

si definimos $U(t)$ como el operador no lineal dependiente del tiempo $\phi(\mathbf{x}_0, t)$. Nótese que en este caso $H(t) = L_{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0,t)}$ es un operador no acotado

La fórmula (5.3) se ha aplicado en Teoría de Control (véanse [**D, HMS1, HMS2, Str**]), especialmente a la planeación del movimiento llamado No Holonómico o Sin Dinámica Libre o Sin Deriva (Without Drift). Muchos robots con ruedas dotadas de movimiento independiente pueden ser clasificados como sistemas no holonómicos (véase [**LSLT**]). En [**D**], con el fin de mostrar la utilidad de la expansión de Magnus en tales tipos de sistemas, controles de forma cerrada fueron derivados guiando un sistema no holonómico de dos entradas de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = f_1(\mathbf{x})u(t) + f_2(\mathbf{x})v(t) = H(t)(\mathbf{x}) \tag{5.4}$$

en la dirección $[f_1, [f_1, f_2]]$. Sustituyendo $H(t)$ en (4.16) obtenemos:

$$\begin{aligned}
\Omega(t) &= \int_0^t dt_1 H(t_1) - \frac{1}{2}\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2\, [H(t_1)\,, H(t_2)] \\
&\quad + \frac{1}{6}\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3\, [[H(t_1)\,, H(t_2)]\,, H(t_3)] \\
&\quad + \frac{1}{6}\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3\, [H(t_1)\,, [H(t_2)\,, H(t_3)]] + \dots
\end{aligned}$$

Suponiendo controles sinusoidales de la forma

$$\begin{aligned}
u(t,s) &= \overline{u}(s)\sin(a_1 t + b_1), \\
v(t,s) &= \overline{v}(s)\sin(a_2 t + b_2),
\end{aligned} \quad t \in [0,1], \tag{5.9}$$

donde $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ y $\overline{u}(t), \overline{v}(t)$ son incógnitas a determinar. Sean $u(t_i, s) = u_i$ y $v(t_i, s) = v_i$. Con esta notación, reemplacemos (5.4) en (4.16):

$$\begin{aligned}
\Omega(t) &= f_1(x)\int_0^t dt_1 u_1 + f_2(x)\int_0^t dt_1 v_1 + \frac{1}{2}[f_1, f_2]\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2\,(u_1 v_2 - u_2 v_1) \\
&\quad + \frac{1}{6}[[f_1(x)\,, f_2(x)]\,, f_3(x)]\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3\, [[H(t_1)\,, H(t_2)]\,, H(t_3)] \\
&\quad + \dots
\end{aligned}$$

Para minimizar la energía $\int_0^t \left(u^2(t,s) + v^2(t,s)\right) dt$, los siguientes controles fueron obtenidos:

$$\begin{aligned}
u(t,s) &= \pm\sqrt{2}(4\pi)^{2/3} s^{1/3}\sin(2\pi t + \pi/4), \\
v(t,s) &= -(4\pi)^{2/3} s^{1/3}\sin(2\pi \times 2t),
\end{aligned} \qquad t \in [0,1],$$

Obsérvese que las funciones del control tienen frecuencias relativamente pequeñas, contraviniendo la idea generalmente aceptada de que son necesarias funciones armónicas de alta ganancia para controlar sistemas no holonómicos (para más detalles, consúltese [**D**]). Finalmente, adviértase de la conveniencia de contar con una fórmula para la expansión de Magnus como (3.31) en la planeación del movimiento no holonómico cuando el sistema considerado tiene un número muy grande de controles.

CAPÍTULO 6

DESARROLLOS POSTERIORES

1. UNA EXPRESIÓN MÍNIMA PARA LA FÓRMULA DE MAGNUS

Hemos llegado a la siguiente expresión para la Fórmula de Magnus (3.31):

$$\begin{aligned}\Omega(t) &= \int_0^t dt_1 H(t_1) \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^t dt_1 \ldots \int_0^t dt_n L_n \left[\ldots\left[H(t_1), H(t_2)\right], \ldots, H(t_n)\right],\end{aligned}$$

donde L_n está dado por

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} \sum_{j_1<j_2<\ldots<j_{n-i}<n} \prod_{m=1}^{n-i} \theta_{j_m, j_m+1},$$

y, eliminando las integrales que se anulan debido a su coeficiente, hasta ahora hemos conseguido reducir éstas hasta un máximo de $3 \times 2^{n-3}$ integrales n-múltiples distintas para el término enésimo. Sin embargo, en [Wil], encontramos una expresión aún más reducida que es la siguiente:

$$\begin{aligned}\Omega(t) &= \int_0^t dt_1 H(t_1) + \frac{1}{2}\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \left[H(t_1), H(t_2)\right] \\ &+\frac{1}{6}\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \left[\left[H(t_1), H(t_2)\right], H(t_3)\right] \\ &-\frac{1}{6}\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \left[H(t_1), \left[H(t_2), H(t_3)\right]\right] \\ &+\frac{1}{12}\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \int_0^{t_3} dt_4 \left[\left[\left[H(t_1), H(t_2)\right], H(t_3)\right], H(t_4)\right] \\ &+\frac{1}{12}\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \int_0^{t_3} dt_4 \left[\left[\left[H(t_3), H(t_4)\right], H(t_2)\right], H(t_1)\right] \\ &+\frac{1}{12}\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \int_0^{t_3} dt_4 \left[\left[\left[H(t_3), H(t_2)\right], H(t_4)\right], H(t_1)\right] \\ &+\frac{1}{12}\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \int_0^{t_3} dt_4 \left[\left[\left[H(t_4), H(t_1)\right], H(t_3)\right], H(t_2)\right] + \ldots\end{aligned}$$

Es decir, que mientras que el cuarto coeficiente que proponemos es el siguiente:

$$L_4 = \theta_{1,2}\theta_{2,3}\theta_{3,4} - \frac{1}{2}\left(\theta_{1,2}\theta_{2,3} + \theta_{1,2}\theta_{3,4} + \theta_{2,3}\theta_{3,4}\right) + \frac{1}{3}\left(\theta_{1,2} + \theta_{2,3} + \theta_{3,4}\right) - \frac{1}{4},$$

3. UNA GENERALIZACIÓN DE LA FÓRMULA DE MAGNUS EN B*-ÁLGEBRAS

La Fórmula de Magnus, en su formulación clásica, indica que la solución de la ecuación diferencial siguiente

$$\frac{dU}{dt} = H(t)\,U(t)\,. \tag{6.1}$$

en la forma

$$U(t) = \exp\Omega(t)\,. \tag{6.2}$$

está dada por la expresión

$$\begin{aligned}\Omega(t) \;=\; & \int_0^t dt_1 H(t_1) + \frac{1}{2}\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \left[H(t_1), H(t_2)\right] \\ & + \frac{1}{6}\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \left[\left[H(t_1), H(t_2)\right], H(t_3)\right] \\ & + \frac{1}{6}\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \left[H(t_1), \left[H(t_2), H(t_3)\right]\right] + \dots\,.\end{aligned}$$

La fórmula anterior tiene la ventaja de que expresa el logaritmo natural para cualquier caso de operador acotado o matriz H en un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ en el caso de t pequeña. Sin embargo, para el caso de t grande, la fórmula generalmente diverge, salvo para los casos de H triviales. Por esto, se propone un enfoque que tome en cuenta la convergencia para cualquier caso de t, aunque no sea aplicable con la generalidad de la fórmula clásica, usando B^*-álgebras.

Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert y $H \in \mathbb{B}(\mathbb{H})$, el álgebra de operadores acotados sobre $\mathbb{H}$. Tenemos el siguiente resultado:

Teorema de la Descomposición Polar

(a) Si H es invertible, H tiene una única *descomposición polar* $H = VP$, donde V es unitaria y P es definida positiva.
(b) Si H es normal, H tiene una descomposición polar $H = VP$, en donde V y P conmutan entre sí y con H.

Para nuestros propósitos, en el teorema anterior es más importante que H sea normal ya que eso garantiza la conmutatividad de la descomposición polar: sin embargo, en algunos casos podríamos exigir la unicidad que sería equivalente a pedir la invertibilidad de H. Luego, si H es normal, podemos encontrar una función logaritmo natural log, analítica en una vecindad de H, y que dada la conmutatividad de la descomposición polar se tendría que:

$$\log H = \log(VP) = \log V + \log P.$$

Como se ve esto reduce el problema al de hallar series logarítmicas para los casos unitario y definido positivo.

Si $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, su logaritmo natural se puede calcular usando la fórmula:

$$\log x = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}.$$

Esta serie da la clave para el caso definido positivo e invertible. Faltaría encontrar una serie análoga para el caso unitario.

con $\Omega(0) = 0$, para $t \geq 0$ y $\Omega(t)$ dos veces diferenciable, si, y sólo si,

$$[\text{traza}(U)]^2 \leq 4$$

para $t \geq 0$.

Hipotéticamente, este resultado de imposibilidad quiere decir que la representación de la solución $U(t)$ con *una sola exponencial* dada en (6.4) no basta para todos los casos posibles. La propuesta de investigación en este caso es dar una representación alternativa, posiblemente con el uso de más exponenciales, o bien, con una expresión de tipo polar como la del teorema de la sección anterior, la cual lleve a criterios más sencillos o, incluso. a una condición necesaria y suficiente para la estabilidad exponencial uniforme en Ecuaciones Diferenciales Lineales No Autónomas.

Bibliografía

[A] ADELSBERGER, H. "Über unendliche diskrete gruppen". *J. reine u. angew Math.*, **163**, (1930). 103-124.

[B] BAKER. H.F. "Alternants and continuous groups". *Proceedings of the London Mathematical Society, Second Series*, **3**, (1904), 24-47.

[BCOR] BLANES. S.. Casas, F., Oteo, J.R. y Ros, J. "Magnus and Fer expansions for matrix differential equations: The convergence problem". *Journal of Physics A*. **31**. (1998), 259-268.

[BCR] BLANES, S.. Casas, F. y Ros, J. "Improved high order integrators based on Magnus expansion". *Department of Applied Mathematics and Theoretical Phisics. Reporte Técnico No. 1999/NA08. University of Cambridge*, (1999).

[BM] BLANES. S. y Moan, P.C. "Splitting methods for non-autonomous differential equations". *Department of Applied Mathematics and Theoretical Phisics, Reporte Técnico No. 1999/NA21. University of Cambridge*, (1999).

[BI] BUDD. C.J. e Iserles. A. "Geometric integration: numerical solution of differential equations on manifolds". *Department of Applied Mathematics and Theoretical Phisics. Reporte Técnico No. 1998/NA10. University of Cambridge*, (1998).

[C] CAMPBELL. J.E. "On a law of combination of operators". *Proceedings of the London Mathematical Society*, **29**, (1898), 14-32.

[CI] CELLEDONI. E. e Iserles, A. "Methods for the approximation of the matrix exponential in a Lie-algebraic setting". *Department of Applied Mathematics and Theoretical Phisics. Reporte Técnico No. 1999/NA3, University of Cambridge*, (1999).

[CF] CHACON. R.V. y Fomenko, A.T. "Recursion formulas for the Lie integral". *Advances in Mathematics*, **88**, (1991), 200-257.

[Ch] CHEN. K.T. "Integration of paths, geometric invariants and a generalized Baker-Hausdorff formula". *Annals of Mathematics*, **65**, (1957) 163-178.

[D] DULEBA. I. "On a computationally simple form of the generalized Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin formula". *Systems & Control Letters*, **34**, (1998). 191-202.

[EMM] ENGO. K.. Marthinsen, A. y Munthe-Kaas, H. "DiffMan an object oriented MATLAB toolbox for solving differential equations on manifolds". *Department of Informatics. Reporte Técnico No. 164, University of Bergen*, Noruega, (1999).

[F] FRIEDRICHS, K.O. "Mathematical aspects of the Quantum Theory of Fields". *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **6**, (1953), 1-72.

[H] HAUSDORFF, F. "Die symbolische exponentialformel in der gruppentheorie". *Berichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften (Math. Phys. Klasse)*, **58**. (1906). 19-48.

[HMS1] HUILLET. T., Monin, A. y Salut, G. "Lie algebraic representation results for nonstationary evolution operators". *Mathematical Systems Theory*, **19**, (1987), 205-226.

[HMS2] HUILLET, T., Monin, A. y Salut, G. "Lie algebraic canonical representations in nonlinear control systems". *Mathematical Systems Theory*, **20**. (1987), 193-213.

[HSW] HLAVATY, L., Steinberg, S. y Wolf, K.B. "Riccati equations and Lie series". *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **104**, (1984), 246-263.

[Is] ISERLES, A. "Expansions that grow on trees". *Notices of the AMS*, **49**, No. 4, (2002), 430-440.

[IMN] ISERLES, A., Marthinsen, A. y Nørsett, S.P. "On the implementation of the method of Magnus series for linear differential equations". *BIT Numerical Mathematics*, **39**. (1999), 281-304.

[We] WEI, J. "Note on the global validity of the Baker-Hausdorff and Magnus theorems". *Journal of Mathematical Physics*, **4**, (1963), 1337-1341.

[WN1] WEI, J. y Norman, E. "Lie algebraic solution of linear differential equations". *Journal of Mathematical Physics*, **4**, (1963), 575-581.

[WN2] WEI, J. y Norman, E. "On global representations of solutions of linear differential equations as a product of exponentials". *Proceedings of the American Mathematical Society*, **15**, (1964), 327-334.

[Wic] WICHMAN, E. "Note on the algebraic aspect of the integration of a system of ordinary linear differential equations". *Journal of Mathematical Physics*, **2**, (1961), 876-880.

[Wil] WILCOX, R.M. "Exponential operators and parameter differentiation in quantum physics". *Journal of Mathematical Physics*, **8**, 4, (1967), 962-981.

[Wo] WOJTYŃSKI, W. "Grupos y Álgebras de Lie". *Editorial Científica* (en polaco), Varsovia, (1986).