



División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Posgrado en Matemáticas

“Un modelo de reacción-difusión para el análisis de un monopolio con el juego de Cournot”

**TESIS**

Que para obtener el grado de

**Maestro en Ciencias (Matemáticas Aplicadas e Industriales)**

**PRESENTA:**

Tircis Salas Torres

Matricula:

2213801286

st1data@icloud.com

Director

Dr. José Raúl Montes de Oca Machorro

**Jurado:**

Presidente:

Dr. José Raúl Montes de Oca Machorro

Secretario:

Dr. Victor Hugo Vázquez Guevara

Vocal:

Dr. Julio Cesar García Corté

Iztapalapa, Ciudad de México a 17 de Abril de 2024.



# Dedicatoria

*A la memoria de mis padres, que aunque ya no están conmigo físicamente, sé que siguen guiándome y que me siguen acompañando. Siempre estarán presentes en cada logro que alcance. Siempre los llevaré en mi corazón.*

*Este trabajo es mi manera de honrar su legado.*

*No importa lo duro que el mundo empuje en contra mía.  
Dentro de mí, hay algo más fuerte, algo mejor,  
empujando de vuelta.*

*- Albert Camus*



# Agradecimientos

Antes de todo, quiero expresar mi más sincero y profundo agradecimiento, poniendo a Dios en primer lugar. Sin su guía y su luz, no estaría donde estoy hoy. Gracias a Dios, que ha sido mi soporte y mi guía en cada momento, he alcanzado este punto en mi vida.

Quiero expresar mi profundo agradecimiento y amor hacia mis padres, quienes, aunque ya no están físicamente presentes, continúan guiándome y bendiciéndome desde el cielo. Su legado y amor siguen siendo un faro constante en mi vida.

A mi estimado Sensei, cuya profunda sabiduría y orientación constante son una fuente de inspiración diaria. Sus enseñanzas perduran en mí como un legado invaluable en mi camino personal y profesional

A mi querida Botitas, Minerva Bautista Rivera, cuya presencia en mi vida ha sido esencial. Siempre dispuesta a escuchar y con quien siempre puedo contar para una buena charla o para afrontar juntos cualquier desafío.

Expreso también mi profundo agradecimiento a todos mis hermanos y sobrinos por su constante apoyo y cariño.

Mi agradecimiento se extiende hacia mi Director de tesis, el Dr. José Raúl Montes de Oca, por su apoyo constante en mi camino académico. Agradezco especialmente su disposición siempre atenta y sus valiosos consejos, que han sido cruciales para mi desarrollo y éxito en este importante proyecto.

Mi agradecimiento también para mis sinodales el Dr. Víctor Hugo Vázquez Guevara y el Dr. Julio César García Corte, por su valiosas revisiones y consejos, que han enriquecido significativamente este trabajo.

Agradezco asimismo a todos mis profesores de la universidad, cuyos conocimientos y orientación han contribuido significativamente a mi formación.

Finalmente, expreso mi reconocimiento y agradecimiento a la Universidad Autónoma Metropolitana (UAM) por brindarme un entorno académico excepcional. Este espacio no solo ha sido propicio para la adquisición de conocimientos, sino que también ha fomentado mi desarrollo integral como individuo.



# Resumen

En este trabajo, se propone un modelo de Reacción-Difusión para explorar cómo se distribuye la producción de una entidad financiera que opera en un entorno de monopolio. Este modelo incorpora las dinámicas del Juego clásico de Cournot para la producción, permitiendo así una comprensión más profunda de las interacciones entre la competencia en mercados. Nuestro enfoque busca ofrecer una nueva perspectiva sobre la producción y las implicaciones de las estrategias de mercado en el sector financiero.

El objetivo central de este trabajo es verificar la existencia de una solución de equilibrio en el modelo de Reacción-Difusión aplicado a la entidad financiera monopolista. Los resultados revelan la identificación exitosa de una solución de equilibrio estable. Además, se demuestra que, independientemente de las condiciones iniciales, todas las soluciones tienden hacia esta solución de equilibrio en el largo plazo.





# Introducción

La teoría de juegos es un campo interdisciplinario de las matemáticas que se enfoca en analizar situaciones de interacción estratégica entre agentes racionales, donde los resultados dependen no solo de las acciones individuales, sino también de las elecciones realizadas por los demás participantes (Myerson, 1997). Esta teoría es esencial para comprender la toma de decisiones en contextos donde los intereses pueden ser tanto complementarios como conflictivos, lo que la hace crucial en áreas como economía, donde se estudian los mercados y las negociaciones, ciencias políticas, etc.

Además, la teoría de juegos se ha aplicado con éxito en campos tan diversos como la lógica, donde se utilizan juegos para entender la inferencia y la verificabilidad de los enunciados matemáticos (Hintikka, 1973), y la biología, en el estudio de estrategias evolutivas (Smith, 1982). Su versatilidad y capacidad para modelar situaciones complejas donde las decisiones interdependientes juegan un papel crucial la han convertido en una herramienta indispensable para el análisis de sistemas dinámicos en múltiples disciplinas, demostrando su valor más allá de las matemáticas puras.

El modelo de Cournot, introducido por Antoine Augustin Cournot en 1838, representa un hito en la teoría de juegos y la economía industrial, al ofrecer una de las primeras conceptualizaciones matemáticas de la competencia entre empresas en un entorno oligopolístico, donde el mercado está controlado por un número reducido de competidores (Cournot, 1838). Este modelo se basa en la premisa de que cada empresa, al decidir su nivel de producción, considera las decisiones de producción de sus rivales como dadas, lo que lleva a un equilibrio en el que ninguna empresa puede mejorar su situación unilateralmente, asumiendo que las otras mantendrán inalteradas sus decisiones de producción.

La relevancia del modelo de Cournot trasciende su aplicación en economía para abordar la dinámica competitiva en oligopolios, sirviendo también como base para estudios posteriores en estrategia empresarial y teoría de juegos. La noción de equilibrio de Cournot, donde cada empresa optimiza su producción esperando que las otras no cambien sus niveles de producción, ha inspirado numerosas extensiones y aplicaciones en diversos campos, demostrando la interconexión entre la toma de decisiones estratégicas en entornos competitivos y la teoría de juegos (Friedman, 1977).

Este estudio se centra en el desarrollo y análisis de un modelo de reacción-difusión, concebido específicamente para examinar y elucidar la dinámica de la distribución de la producción en una empresa que opera bajo condiciones de monopolio. Mediante esta aproximación, nuestro objetivo trasciende la mera descripción, aspirando a enriquecer la teoría tradicional de los modelos de oligopolio. Para lograr una exploración exhaustiva y sistemática de la temática, el trabajo se estructura en varias secciones clave. Inicialmente, se presenta una revisión de los modelos clásicos de Cournot, haciendo hincapié en los aportes fundamentales y las limitaciones de los modelos previos (Tirole, 1988). Posteriormente, se detalla la metodología empleada para la construcción del modelo de reacción-difusión, explicando las bases matemáticas y las hipótesis subyacentes que permiten simular la distribución de la producción en un entorno monopolístico (Cantrell & Cosner, 2003). Esta sección es crucial para entender lo que nuestro modelo propone respecto a las aproximaciones tradicionales en economía y teoría de juegos.

Finalmente, se concluye con una discusión que sintetiza el trabajo, y su posible relevancia para la teoría económica y sugiriendo posibles direcciones para investigaciones futuras.

En el primer capítulo, se presentan las versiones clásicas del modelo de Cournot, con el objetivo de comprender la dinámica competitiva prevalente en los mercados oligopolísticos.

El segundo capítulo introduce dos modelos esenciales para abordar el problema central de la investigación. Estos modelos sirven como herramientas analíticas fundamentales.

En el tercer capítulo se desarrolla la formulación del modelo propuesto. Este segmento va más allá de la mera presentación del problema; busca establecer un equilibrio de solución y, finalmente, derivar una solución general que ilumine las condiciones iniciales del modelo. Este capítulo es crucial para entender la aplicación del modelo de reacción-difusión en el contexto de la distribución de la producción en un entorno monopolístico.

El cuarto y último capítulo se centra en el análisis de las condiciones iniciales del modelo y su relación en los resultados del equilibrio. Además, se explora una aplicación práctica del modelo, examinando cómo puede aplicarse para resolver problemas y su aplicabilidad más allá del ámbito teórico. Este capítulo concluye la tesis, buscando vincular la teoría con la práctica y buscando la contribución del modelo al entendimiento de la dinámica de mercado en contextos monopolísticos y oligopolísticos.

# Índice general

<b>Dedicatoria</b>	<b>3</b>
<b>Dedicatoria</b>	<b>3</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>5</b>
<b>Resumen</b>	<b>7</b>
<b>Introducción</b>	<b>9</b>
<b>1. El modelo de Cournot</b>	<b>1</b>
1.1. Modelo de duopolio de Cournot . . . . .	1
1.2. El Modelo de Cournot con $n$ empresas . . . . .	3
<b>2. Ecuación de Calor y dinámica de Cournot</b>	<b>7</b>
2.1. Ecuación de Calor . . . . .	7
2.1.1. Solución de la ecuación de calor homogénea . . . . .	7
2.2. Un modelo no lineal de Duopolio de Cournot . . . . .	11
<b>3. Un modelo de reacción-difusión para el análisis de la distribución.</b>	<b>17</b>
3.1. Planteamiento del modelo. . . . .	17
3.2. Solución de equilibrio del modelo de reacción-difusión . . . . .	19
3.3. Solución general del modelo propuesto. . . . .	21
<b>4. Condiciones iniciales e interpretación</b>	<b>25</b>
4.1. Condiciones iniciales . . . . .	25
4.2. Aplicación e interpretación . . . . .	33
<b>Conclusiones</b>	<b>35</b>
<b>A. Deducción de la ecuación de calor</b>	<b>37</b>
<b>Índice alfabético</b>	<b>41</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>41</b>



# Capítulo 1

## El modelo de Cournot

En este breve capítulo, nos proponemos abordar de manera concisa y directa dos modelos económicos de relevancia: el modelo de Duopolio de Cournot y su extensión, el modelo generalizado de Cournot para  $n$  empresas. Estos modelos son fundamentales para entender la competencia en mercados donde las empresas deciden sobre la cantidad de producción para maximizar sus beneficios, bajo la premisa de que cada una toma su decisión con conocimiento de las decisiones de sus competidores.

### 1.1. Modelo de duopolio de Cournot

Los principales supuestos de este modelo, según Cournot (1838) y ampliados por Friedman (1983), son los siguientes:

- Existen dos empresas, a las que denominamos A y B (Cournot, 1838).
- Las empresas compiten en cantidades (Cournot, 1838).
- Las dos empresas operan de forma no cooperativa, es decir, ninguna de ellas tiene información acerca del nivel de producción de la otra (Friedman, 1983).
- La producción de cada empresa se denota como  $q_1$  y  $q_2$ , respectivamente (Cournot, 1838).

Siguiendo el marco propuesto por Tirole (1988), consideramos la función inversa de demanda del mercado en el contexto del modelo de Cournot, que se define como:

$$P(Q) = \begin{cases} a - bQ & \text{si } bQ < a \\ 0 & \text{si } bQ \geq a \end{cases}$$

donde  $P(Q)$  representa el precio de mercado en función de la cantidad total  $Q$ , definida como la suma de  $q_1 + q_2$

$$Q = q_1 + q_2$$

y que además es producida por todas las empresas en competencia. Esta formulación captura la naturaleza decreciente del precio con el aumento de la producción total, reflejando la saturación del mercado a medida que el suministro se expande, hasta un punto en el que el precio se reduce a cero si la oferta supera la demanda a un nivel crítico determinado por  $a/b$ . Donde  $a$  representa el precio máximo aceptable por los consumidores para el producto,  $b > 0$  es un coeficiente que refleja la elasticidad de la demanda, es decir, una medida de cómo la cantidad demandada responde a cambios en el precio

La función de costo es una constante positiva  $c > 0$  que es igual para cada empresa

$$c_i = cq_i, \quad i = 1, 2.$$

La función de beneficio es

$$\pi_i = I - C$$

donde  $I$  es el ingreso total y está dado como

$$I = Pq_i$$

y el costo total es simplemente

$$C = c_i$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned}\pi_1 &= (a - bQ)q_1 - cq_1 = (a - b(q_1 + q_2))q_1 - cq_1 = aq_1 - bq_1^2 - bq_1q_2 - cq_1, \\ \pi_2 &= (a - bQ)q_2 - cq_2 = (a - b(q_1 + q_2))q_2 - cq_2 = aq_2 - bq_2^2 - bq_1q_2 - cq_2.\end{aligned}$$

Para hallar el equilibrio de Nash, tenemos que asumir que cada empresa quiere saber cuál es la mejor cantidad a producir, en función de lo que la otra empresa esté haciendo (Nash, 1950; Myerson, 1997). Por ejemplo, si  $A$  produce muchas rosas, entonces  $B$  querría producir menos para evitar la competencia (Myerson, 1997).

Esta decisión óptima se puede encontrar resolviendo el problema de maximización de utilidades de  $A$ , teniendo en cuenta la acción de  $B$ , que está prefijada (ya está decidida) (Nash, 1950; Myerson, 1997). Para ello necesitamos resolver

$$\max_{q_i}(\pi_i) = 0, \quad i = 1, 2.$$

por lo tanto al resolver se tiene

$$\begin{aligned}a - 2bq_1 - bq_2 - c &= 0, \\ a - 2bq_2 - bq_1 - c &= 0.\end{aligned}$$

despejando

$$\begin{aligned}q_1 &= \frac{a - c - bq_2}{2b}, \\ q_2 &= \frac{a - c - bq_1}{2b}.\end{aligned}$$

De esta forma, la función de reacción para la empresa  $A$  está dada por

$$R_1 = \frac{a - c - bq_2}{2b}$$

y la función de reacción de  $B$  es

$$R_2 = \frac{a - c - bq_1}{2b}$$

así, la función de reacción de la empresa  $B$ ,  $R_2(q_1)$ , determina la producción óptima de  $B$  dado el nivel de producción  $q_1$  de  $A$ .

Ahora para calcular los puntos de equilibrio es necesario resolver primero

$$\begin{aligned}q_1 &= \frac{a - c - bq_2}{2b} \\ 2bq_1 &= a - c - b\left(\frac{a - c - bq_1}{2b}\right) \\ 2bq_1 &= a - c - \left(\frac{a - c - bq_1}{2}\right) \\ 2bq_1 &= \frac{a}{2} - \frac{c}{2} + \frac{bq_1}{2} \\ 4bq_1 &= a - c + bq_1 \\ 3bq_1 &= a - c \\ q_1^* &= \frac{a - c}{3b}\end{aligned}$$

resolviendo de forma similar obtenemos

$$q_2^* = \frac{a - c}{3b}.$$

Ahora que se conocen las dos estrategias óptimas, se debe recordar que el equilibrio de Nash, según Nash (1950), se obtiene al combinar ambas estrategias. Por lo tanto, el equilibrio de Nash en este juego de producción, como se describe en Nash (1950) y se profundiza en Tirole (1988), es:

$$E = (q_1^*, q_2^*) = \left( \frac{a - c}{3b}, \frac{a - c}{3b} \right).$$

Este resultado indica que la cantidad óptima de producción de cada empresa es igual y corresponde a un tercio de la diferencia entre el valor del producto y los costos, tal como se analiza en Tirole (1988). Este concepto se ilustra visualmente en la Figura 1.

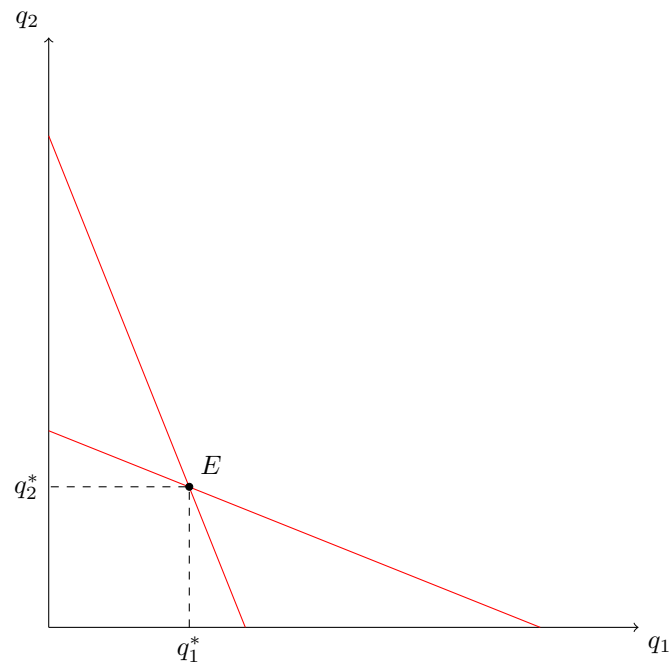


Figura 1: Equilibrio de Nash

De esta forma la cantidad de producción total en equilibrio es

$$Q^* = q_1^* + q_2^* = 2 \left( \frac{a - c}{3b} \right)$$

y el precio en equilibrio es

$$P^* = a - bQ^* = a - b \left( \frac{a - c}{3b} \right)$$

la función de beneficio con equilibrio es

$$\pi_1^* = \frac{(a - c)^2}{9b}$$

del mismo modo para la empresa  $B$  se tiene

$$\pi_2^* = \frac{(a - c)^2}{9b}.$$

## 1.2. El Modelo de Cournot con $n$ empresas

Los supuestos para este modelo son similares a los de los modelos anteriores, tal como se discute en Cournot (1838) y se extiende en Friedman (1983). Sin embargo, en este caso, en lugar de tener únicamente dos empresas, se considera un número finito de ellas, representado por  $n$ , como se analiza en Tirole (1988).

Por lo tanto, la cantidad total  $Q$  se define como la suma de las cantidades individuales de cada empresa, es decir:

$$Q = \sum_{i=1}^n q_i.$$

La utilidad de la  $i$ -ésima empresa sigue la misma fórmula que en los modelos anteriores:

$$\pi_i = \left( a - b \left( \sum_{i=1}^n q_i \right) \right) q_i - cq_i, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Con el objetivo de maximizar las utilidades de la  $i$ -ésima empresa, se debe encontrar el valor de  $q_i$  que hace que la derivada parcial de  $\pi_i$  respecto a  $q_i$  sea igual a cero:

$$\text{máx } \pi_i \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = 0$$

por lo tanto, se obtiene la siguiente ecuación:

$$a - c - \sum_{j=1}^{i-1} bq_j - 2bq_i - \sum_{j=i+1}^n bq_j = 0$$

y a partir de esta ecuación, se puede despejar  $q_i$  de la siguiente manera:

$$q_i = \frac{1}{2b} \left[ a - \left( c + \sum_{j=1}^{i-1} bq_j + \sum_{j=i+1}^n bq_j \right) \right].$$

Ahora consideremos lo siguiente: la cantidad total  $Q$  está determinada por la cantidad individual de cada empresa, pero dado que todas las empresas son iguales, se puede expresar como:

$$Q = qn.$$

Para simplificar el análisis, seguimos las recomendaciones de Mas-Colell, Whinston y Green (1995). Al buscar la cantidad óptima de producción para la  $i$ -ésima empresa, podemos realizar las siguientes simplificaciones:

$$q = \frac{1}{2b} [a - (c + bq(n-1))].$$

Dado que hemos asumido que todas las cantidades son iguales, podemos simplificar aún más la producción de la  $i$ -ésima empresa:

$$q_i = \frac{a - c}{b(n+1)}$$

esta es la cantidad que cada una de las empresas producirá. Ahora podemos calcular la producción total del mercado, que está dada por:

$$Q = \frac{n(a - c)}{b(n+1)}$$

asimismo, el precio se puede calcular de la siguiente manera:

$$P = a - \frac{n(a - c)}{(n+1)} = \frac{a + nc}{n+1}$$

y con estos resultados, se calcula la utilidad de la  $i$ -ésima empresa:

$$\pi_i = (P - c)q_i = \frac{(a - c)^2}{b(n+1)^2}$$

con este cálculo de la utilidad para la  $i$ -ésima, concluimos la discusión sobre el comportamiento basado en el modelo de Cournot, sentando así las bases para abordar las implicaciones más amplias de estos resultados en el contexto de la competencia de mercado que exploraremos en la siguiente sección.



Se han desglosado y analizado los supuestos y derivaciones fundamentales que sostienen el modelo de Cournot, abarcando desde la estructura básica de la competencia entre empresas hasta la detallada formulación de las funciones de reacción y el cálculo del equilibrio de Nash. Este análisis nos ha permitido comprender no solo la dinámica inherente a la competencia en cantidades, sino también la influencia significativa de estos factores en la determinación de las estrategias óptimas de producción y las condiciones de mercado resultantes. Con estas bases, se puede avanzar al siguiente capítulo, donde se explorarán nuevos otros modelos que servirán también de base para este trabajo.



## Capítulo 2

# Ecuación de Calor y dinámica de Cournot

En el capítulo, presentamos dos modelos preliminares que son cruciales para sentar las premisas y los principios sobre los cuales se construirá nuestro argumento y análisis para el siguiente capítulo.

Esta sección actúa como el eje central de nuestro trabajo, proporcionando no solo el marco teórico sino también las herramientas analíticas necesarias para una apreciación integral del modelo propuesto.

### 2.1. Ecuación de Calor

La ecuación de calor es una ecuación diferencial parcial que describe la difusión del calor en un medio, como se discute en Strauss (2007) y en Incropera et al. (2007). Esta ecuación se utiliza para modelar una gran variedad de fenómenos físicos, desde la propagación de ondas térmicas hasta la transferencia de calor en sólidos y fluidos (Incropera et al., 2007).

El objetivo principal de esta sección se centra en la solución de la ecuación de calor. No obstante, para aquellos interesados en comprender la deducción de la ecuación de calor, se encuentra disponible en el apéndice adjunto al final de este trabajo.

#### 2.1.1. Solución de la ecuación de calor homogénea

Consideremos la ecuación de calor:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

donde  $N(x, t)$  es la temperatura en el punto  $x$  del medio y en el instante  $t$ , y  $D$  es la constante de difusión que depende del material y que describe qué tan rápido se difunde la cantidad a través del medio, tal como se señala en Strauss (2007) e Incropera et al. (2007).

La solución de la ecuación de calor se puede obtener mediante métodos analíticos o numéricos, como la discretización por diferencias finitas, un enfoque detallado por Morton y Mayers (2005).

La solución general de la ecuación de calor es una superposición de soluciones simples, llamadas soluciones fundamentales, que corresponden con la propagación de ondas térmicas en diferentes direcciones, según se explica en Strauss (2007).

Vamos a resolver la ecuación de calor homogénea utilizando el método de variables separables y considerando las siguientes condiciones iniciales y de frontera:

$$\begin{cases} \frac{\partial N}{\partial t} = D \frac{\partial^2 N}{\partial x^2}, \\ N(0, t) = 0, & t > 0 \\ N(L, t) = 0, & D > 0 \\ N(x, 0) = f(x), & 0 < x < L \end{cases}$$

### Condiciones de contorno:

- $N(0, t) = 0$ : Esta condición establece que en  $x = 0$ , la función  $N$  siempre es cero para cualquier  $t > 0$ .
- $N(L, t) = 0$ : Similar a la primera condición de contorno, esto establece que en  $x = L$ , la función  $N$  también es cero para cualquier  $t > 0$ .

### Condición inicial:

$$N(x, 0) = f(x)$$

Esta condición describe el estado inicial de la función  $N$  a lo largo de la dimensión espacial  $x$  en el momento  $t = 0$ .  $f(x)$  es una función dada que especifica la distribución inicial de la cantidad que se está difundiendo.

La solución a este problema generalmente involucra la aplicación de métodos de separación de variables, transformadas de Fourier o métodos numéricos. En este trabajo, la resolveremos mediante el método de separación de variables.

Supongamos que  $N$  se puede expresar como el producto de  $X(x)T(t)$ . Necesitamos la primera derivada respecto de  $t$  y la segunda respecto de  $x$  y obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} N_t &= X(x)T'(t) \\ N_x &= X'(x)T(t) \\ N_{xx} &= X''(x)T(t) \end{aligned}$$

sustituyendo en la ecuación original obtenemos

$$N_t - DN_{xx} = 0$$

que es equivalente a

$$T'X - DX''T = 0$$

agrupando tenemos

$$\frac{T'}{DT} = \frac{X''}{X}. \quad (2.1)$$

Es fácil ver que una solución de  $N(x, t) = 0$  es la **solución trivial** es decir  $X = 0$  ó  $T = 0$ . De acuerdo a lo anterior, lo primero que podemos notar en (2.1) es que para que la igualdad tenga sentido es necesario que  $X \neq 0$  y  $T \neq 0$  porque nos interesa cualquier solución que no sea la solución trivial y, por lo tanto en adelante vamos a asumir que  $X \neq 0$  y  $T \neq 0$ .

Lo segundo que podemos notar es que la única forma en que se cumple la igualdad (2.1) es que

$$\frac{T'}{DT} = \lambda = \frac{X''}{X}$$

para simplificar nuestro análisis sin afectar la validez de los resultados futuros, vamos a considerar que el valor de  $\lambda$  se toma como  $-\lambda$ . Esta suposición nos permite manejar las ecuaciones de manera más eficiente, manteniendo al mismo tiempo la integridad de nuestras conclusiones. Entonces ahora tenemos dos ecuaciones diferenciales

$$\frac{T'}{DT} = -\lambda \quad (2.2)$$

y también

$$\frac{X''}{X} = -\lambda \quad (2.3)$$

podemos resolver ambas ecuaciones diferenciales utilizando la ecuación característica, así se tiene:

$$T' + \lambda D T = 0 \quad (2.4)$$

y también

$$X'' + \lambda X = 0. \quad (2.5)$$

Para resolver (2.4) lo podemos escribir como  $r + \lambda D = 0$  y se obtiene una raíz real  $r = -\lambda D$  por lo que su solución general es

$$T(t) = C e^{rt} = C e^{-\lambda D t} \quad (2.6)$$

dado que no se proporcionan condiciones iniciales ni de frontera para la variable  $T$ , solo podemos obtener la solución general.

Por otro lado para resolver (2.5) obtenemos  $r^2 + \lambda = 0$  de donde se obtiene que

$$r = \pm \sqrt{-\lambda}$$

para obtener una solución para la ecuación (2.5), es necesario realizar un análisis exhaustivo de cada caso de  $\lambda$ , considerando si es igual a cero, positivo o negativo. Cada caso podría conducir a diferentes formas de la solución, lo que nos permitiría comprender cómo evoluciona el sistema en función de los distintos valores de  $\lambda$ .

i) Si  $\lambda = 0$  entonces  $r = 0$  tiene multiplicidad dos y por lo tanto su solución general es

$$X(x) = C_1 + C_2 x$$

teniendo en cuenta la condición inicial  $X(0) = 0$  obtenemos

$$C_1 = 0$$

para la otra condición inicial  $X(L) = 0$

$$0 = C_2 L$$

pero  $L > 0$  por lo que  $C_2 = 0$  por lo tanto para  $\lambda = 0$  sólo se obtiene la solución trivial  $X(x) = 0$ .

ii) Si  $\lambda < 0$  entonces  $-\lambda > 0$  por lo que  $r = \pm \sqrt{-\lambda}$ , tenemos dos raíces reales y distintas y entonces la solución general es de la forma:

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

tomamos la primera condición de frontera  $X(0) = 0$  así

$$0 = C_1 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -C_2$$

para la segunda condición de frontera  $X(L) = 0$

$$C_1 e^{\sqrt{-\lambda}L} = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}L}$$

para simplificar un poco la notación utilizamos  $\xi = \sqrt{-\lambda}$  entonces

$$C_1 e^{\xi L} = C_1 e^{-\xi L}$$

vamos a suponer que  $C_1 \neq 0$  y al simplificar

$$e^{2\xi L} = 1$$

sin embargo, notemos que

$$e^q = 1 \quad \Leftrightarrow \quad q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \xi L = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{-\lambda}L = 0$$

así se obtiene que  $L > 0$  y  $-\lambda > 0$  por lo que  $\sqrt{-\lambda}L > 0$  por lo que el error fue suponer que  $C_1 \neq 0$  y entonces  $C_1 = 0$  lo cuál nos da nuevamente la solución trivial para el caso  $\lambda < 0$ .

iii) Si  $\lambda > 0$  entonces  $r = i\sqrt{\lambda}$  y la solución general es de la forma

$$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Ahora con  $X(0) = 0$  se tiene

$$0 = C_1$$

por lo que  $X(L) = 0$  se tiene

$$0 = C_2 \sin(\sqrt{\lambda}L)$$

ahora si  $C_2 = 0$  obtenemos nuevamente la solución trivial, por lo tanto pedimos que  $C_2 \neq 0$  entonces

$$\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\lambda}L = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

como  $L > 0$  entonces

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

con el valor de  $\lambda$  obtenemos que la solución general para  $\lambda > 0$  es

$$X(x) = b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (2.7)$$

donde  $C = C_2$ . En conclusión, dado que para  $\lambda > 0$  obtuvimos una solución no trivial, podemos afirmar que  $\lambda > 0$  actúa como un valor propio en el contexto del problema de la ecuación diferencial. Este valor propio está asociado con las soluciones de la forma de onda estacionaria de la ecuación de calor, reflejando cómo las frecuencias específicas de estas ondas contribuyen a la solución general del problema. Ahora, según el principio de superposición, si se tiene un conjunto de soluciones, entonces cualquier combinación lineal de esas soluciones también es una solución de la misma, en particular, la suma de todas las soluciones también es solución. Entonces

$$X(x) = \sum_{n=1}^N b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \quad (2.8)$$

Ahora que conocemos  $X$  y  $T$  podemos sustituir y obtener

$$N(x, t) = \sum_{n=1}^N b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) C e^{-\left(\frac{n\pi}{L}x\right)Dt} \quad (2.9)$$

si utilizamos al condición inicial  $N(x, 0) = f(x)$

$$N(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^N b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

donde  $f$  puede ser cualquier función. Si ahora consideramos el producto interior en un espacio de funciones:

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^L f(x)g(x)dx$$

si tomamos  $N$  muy grande

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

si tomamos  $m \in \mathbb{N}$  fijo y hacemos

$$\begin{aligned} \langle f(x), \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \rangle &= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \right\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \langle \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx \end{aligned}$$

recordando que

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ L/2 & \text{si } m = n \end{cases}$$

por lo que obtenemos

$$\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = b_m \frac{L}{2}$$

entonces

$$b_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx. \quad (2.10)$$

A través de la solución analítica obtenida mediante el método de variables separables, hemos ilustrado cómo las condiciones iniciales y de frontera juegan un papel crucial en la determinación de la evolución temporal y espacial de la temperatura en un medio dado.

Se ha obtenido una expresión para  $b_m$ , que representa el coeficiente asociado al  $m$ -ésimo término de la serie de Fourier. Esta fórmula indica que cada coeficiente se calcula como una función de la condición inicial  $f(x)$ , integrada a lo largo del dominio espacial  $[0, L]$ , y ponderada por la función seno, lo que refleja la naturaleza periódica y ortogonal de las soluciones en el contexto de la ecuación de calor. Este resultado es fundamental para construir la solución completa de la ecuación de calor, permitiendo adaptar la solución general a las condiciones específicas del problema inicial.

## 2.2. Un modelo no lineal de Duopolio de Cournot

Esta sección está basada completamente en el análisis del artículo: *Nonlinear Dynamics of Cournot Duopoly Game: When One Firm Considers Social Welfare*, que nos servirá como punto de partida para nuestra investigación. Para más detalles, se puede consultar al final la bibliografía.

El modelo que veremos es un juego de Duopolio de Cournot, sin embargo, a diferencia del típico modelo clásico de Cournot, aquí hay dos principales diferencias:

1. Aquí se consideran productos diferenciados, es decir, no tienen por qué ser idénticos.
2. Una de las dos empresas considera el bienestar social como una forma de utilidad o ganancia.

Consideremos dos empresas que compiten por cantidades y cuya producción se denotará como  $q_1$  y  $q_2$  respectivamente. La función de utilidad, que les ayuda a elegir el nivel de producción que maximiza su beneficio conjunto está dada por la siguiente función

$$U(q_1, q_2) = a(q_1 + q_2) - \frac{1}{2}(q_1^2 + 2dq_1q_2 + q_2^2) \quad (2.11)$$

donde  $a, d \in \mathbb{R}$ .

Para obtener los precios finales para los consumidores, es decir, los precios al por menor es necesario calcular las condiciones de primer orden respecto de  $q_1$  y  $q_2$  y de esta forma obtenemos

$$\begin{aligned} p_1 &:= \frac{\partial U(q_1, q_2)}{\partial q_1}, \\ p_2 &:= \frac{\partial U(q_1, q_2)}{\partial q_2} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{U(q_1, q_2)}{q_1} &= a - q_1 - dq_2, \\ \frac{U(q_1, q_2)}{q_2} &= a - q_2 - dq_1 \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} p_1 &= a - q_1 - dq_2, \\ p_2 &= a - q_2 - dq_1 \end{aligned}$$

Aquí se restringen los valores de los coeficientes  $a$  y  $d$ . Para que tenga sentido, es necesario que  $a > 0$  y  $d \in [-\frac{1}{2}, 1]$ , porque  $a$  es el precio máximo y  $d$  es el parámetro de diferenciación, es decir,  $d$  nos dice qué tan distintos son los productos:

- si  $d = 1$  los productos son homogéneos. No hay diferencias notables para los consumidores, por lo que la elección entre estos productos es indiferente.
- si  $d = 0$  los precios de cada empresa están determinados exclusivamente por su propia producción.

La función de costos de producción,  $C_i(q_i)$ , representa el costo en el que incurre la empresa  $i$  para producir una cantidad  $q_i$  de un bien o servicio. En este contexto, se ha especificado que la función de costo para cada una de las dos empresas, identificadas por  $i = 1$  y  $i = 2$ , sigue una estructura cuadrática dada por la expresión  $C_i(q_i) = \frac{1}{2}cq_i^2$ . Este modelo cuadrático implica que el costo de producción aumenta a medida que aumenta la cantidad producida, y el parámetro  $c$  representa el coeficiente de costo que influye en la tasa de este incremento y dónde  $c > 0$ . La presencia del término cuadrático  $q_i^2$  sugiere que los costos de producción crecen más que proporcionalmente con un aumento en la producción. Las funciones de beneficios están dadas por

$$\begin{aligned} \pi_1 &= p_1q_1 + \frac{1}{2}cq_1^2 = (1 - q_1 - dq_2)q_1 + \frac{1}{2}cq_1^2, \\ \pi_2 &= p_2q_2 + \frac{1}{2}cq_2^2 = (1 - q_2 - dq_1)q_2 + \frac{1}{2}cq_2^2 \end{aligned}$$

Las funciones de beneficio,  $\pi_1$  y  $\pi_2$ , reflejan las ganancias de cada empresa. Estas funciones incorporan tanto los ingresos por ventas, representados por  $p_1q_1$  y  $p_2q_2$ , como los costos de producción, dados por  $\frac{1}{2}cq_1^2$  y  $\frac{1}{2}cq_2^2$ . La función de precio,  $p_1 = 1 - q_1 - dq_2$  para la empresa 1 y  $p_2 = 1 - q_2 - dq_1$  para la empresa 2, refleja la competencia entre las empresas y cómo la producción de una afecta el precio de mercado del bien. El término  $d$  captura el efecto de la producción de una empresa sobre la otra, evidenciando la interdependencia en el duopolio de Cournot.

También se considera la función de excedente del consumidor, que mide la diferencia entre el valor que las personas obtienen del consumo de un bien o servicio y el costo que ellas deben pagar para obtenerlo, está dada por

$$CS = \frac{1}{2} (q_1^2 + 2dq_1q_2 + q_2^2).$$

El estudio contempla la función de excedente del consumidor,  $CS$ , la cual es fundamental para evaluar el bienestar social en el contexto del mercado. El excedente del consumidor se define como la diferencia entre el valor total que los consumidores asignan a una cierta cantidad de bien o servicio y el costo efectivo que pagan por esa cantidad. En este modelo,  $CS = \frac{1}{2} (q_1^2 + 2dq_1q_2 + q_2^2)$  captura la suma de los excedentes de todos los consumidores, considerando las cantidades producidas  $q_1$  y  $q_2$  por las dos empresas en competencia. La presencia de los términos  $q_1^2$ ,  $2dq_1q_2$ , y  $q_2^2$  refleja no solo el valor que los consumidores obtienen de los productos de cada empresa por separado, sino también cómo la interacción entre las cantidades producidas por ambas empresas afecta el bienestar total de los consumidores en el mercado.

Se considera el bienestar social como la suma de todos los beneficios, es decir, la suma de los beneficios de las dos empresas y el excedente del consumidor:

$$W = CS + \pi_1 + \pi_2$$

y como se mencionó al principio, una de las dos empresas va a asumir el bienestar social  $W$ , por lo tanto, los beneficios se redefinen de la siguiente manera:



$$\begin{cases} \pi_1 = (1 - q_1 - dq_2)q_1 - dq_1^2, \\ \Pi_2 = \omega\pi_2 + (1 - \omega)W \end{cases}$$

donde  $\omega \in [0, 1]$ . Y  $\omega$  es un parámetro que determina cuánto peso se le da a cada objetivo:

- si  $\omega = 1$  la empresa sólo ve por su propio beneficio y no considera el bienestar social.
- si  $\omega = 0$  la empresa solo busca el bienestar social sin considerar su propio beneficio.

Los productores estiman la demanda del mercado de la siguiente manera:

$$\begin{cases} q_1(t+1) = q_1(t) + v_1 q_1 \frac{\partial \pi_1}{\partial q_1}, \\ q_2(t+1) = q_2(t) + v_2 q_2 \frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2} \end{cases} \quad (2.12)$$

donde  $v_i$  representan la velocidad o el ritmo de cambio de los bienes  $q_1$  y  $q_2$ , en otras palabras, es el ritmo al que cada empresa ajusta su producción en respuesta al mercado.

En el modelo de duopolio de Cournot, las empresas ajustan sus niveles de producción basándose en sus expectativas sobre la demanda del mercado y la respuesta competitiva de la otra empresa. Las ecuaciones presentadas describen cómo las empresas estiman la producción futura ( $q_1(t+1)$  y  $q_2(t+1)$ ) en función de su producción actual ( $q_1(t)$  y  $q_2(t)$ ) y las derivadas parciales de sus funciones de beneficio ( $\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1}$  y  $\frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2}$ ). Estas derivadas parciales representan el beneficio marginal de cada empresa, es decir, el cambio en el beneficio resultante de un cambio unitario en la cantidad producida. Los coeficientes  $v_1$  y  $v_2$  indican la sensibilidad o la rapidez con la que cada empresa reacciona a este beneficio marginal, ajustando su producción en consecuencia. Este mecanismo de ajuste refleja la dinámica estratégica entre las empresas en el mercado, donde cada una toma en cuenta no solo sus propias condiciones de producción y costos, sino también las acciones de su competidor y las condiciones del mercado para optimizar sus niveles de producción y, por ende, sus beneficios.

Luego,

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = a + q_1(c - 2) - dq_2$$

y además

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2} = a - q_2(1 + \omega + c) - dq_1$$

en lo que respecta al primer término, tenemos

$$\begin{aligned} q_1(t+1) &= q_1(t) + v_1 q_1 \frac{\partial \pi_1}{\partial q_1}, \\ &= q_1(t) + v_1 q_1 (a + q_1(c - 2) - dq_2), \\ &= q_1(t) - v_1 q_1 (a + q_1(2 - c) - dq_2) \end{aligned}$$

para el segundo término, al resolverlo de la misma manera que el primero, obtenemos que el sistema (2.12) se convierte en

$$\begin{cases} q_1(t+1) = q_1(t) - v_1 q_1 (a + q_1(2 - c) - dq_2), \\ q_2(t+1) = q_2(t) + v_2 q_2 (a - q_2(1 + \omega + c) - dq_1) \end{cases} \quad (2.13)$$

finalmente, cuando se establece que la producción es independiente del tiempo, esto es,  $q_i(t+1) = q_i(t) = q_i$ , se obtiene que

$$\begin{cases} 0 = q_1(a + q_1(2 - c) - dq_2), \\ 0 = q_2(a - q_2(1 + \omega + c) - dq_1) \end{cases} \quad (2.14)$$

Al resolver algebraicamente el sistema de ecuaciones (2.14), se obtienen los puntos de equilibrio del sistema:

- el primer punto de equilibrio es para el caso  $q_1 = 0 = q_2$  de donde

$$E_0 = (0, 0) \quad (2.15)$$

- si se supone ahora que  $q_1 = 0$  y  $q_2 \neq 0$  se tiene

$$a - (1 + w + c)q_2 = 0 \Leftrightarrow a = (1 + w + c)q_2 \Leftrightarrow q_2 = \frac{a}{(1 + w + c)}$$

por lo tanto el segundo punto de equilibrio es

$$E_1 = \left(0, \frac{a}{1 + w + c}\right) \quad (2.16)$$

- si se supone ahora que  $q_1 \neq 0$  y  $q_2 = 0$  se tiene

$$a - (2 + c)q_1 = 0 \Leftrightarrow (2 + c)q_1 = a \Leftrightarrow q_1 = \frac{a}{2 + c}$$

por lo tanto el tercer punto de equilibrio es

$$E_2 = \left(\frac{a}{2 + c}, 0\right) \quad (2.17)$$

- finalmente, ahora se supone que  $q_1 \neq 0$  y  $q_2 \neq 0$  y así

$$\begin{aligned} a - (2 + c)q_1 - dq_2 &= 0, \\ a - (1 + w + c)q_2 - dq_1 &= 0 \end{aligned}$$

despejando de ambas  $q_1$

$$\begin{aligned} a - dq_2 &= (2 + c)q_1 \quad \Leftrightarrow \quad q_1 = \frac{a - dq_2}{2 + c}, \\ a - (1 + w + c)q_2 &= dq_1 \quad \Leftrightarrow \quad q_1 = \frac{a - (1 + w + c)q_2}{d} \end{aligned}$$

resolviendo la igualdad

$$\begin{aligned} \frac{a - dq_2}{2 + c} &= \frac{a - (1 + w + c)q_2}{d} \quad \Leftrightarrow \\ ad - d^2q_2 &= (2 + c)(a - (1 + w + c)q_2) \quad \Leftrightarrow \\ ad - d^2q_2 - (2 + c)a + (2 + c)(1 + w + c)q_2 &= 0 \quad \Leftrightarrow \\ q_2((2 + c)(1 + w + c) - d^2) &= 2a + ac - ad \quad \Leftrightarrow \\ q_2 &= \frac{2a + ac - ad}{3c + 2w + cw + c^2 - d^2 + 2} \end{aligned}$$

ahora despejamos para  $q_2$

$$\begin{aligned} a - (2 + c)q_1 &= dq_2 \quad \Leftrightarrow \quad q_2 = \frac{a - (2 + c)q_1}{d} \\ a - dq_1 &= (1 + w + c)q_2 \quad \Leftrightarrow \quad q_2 = \frac{a - dq_1}{(1 + w + c)} \end{aligned}$$

nuevamente resolvemos la igualdad

$$\begin{aligned} \frac{a - (2 + c)q_1}{d} &= \frac{a - dq_1}{(1 + w + c)} \quad \Leftrightarrow \\ a(1 + w + c) - (1 + w + c)(2 + c)q_1 &= ad - d^2q_1 \quad \Leftrightarrow \\ a(1 + w + c) - (1 + w + c)(2 + c)q_1 - ad + d^2q_1 &= 0 \quad \Leftrightarrow \\ q_1(d^2 - (1 + w + c)(2 + c)) &= ad - a - aw - ac \quad \Leftrightarrow \\ q_1 &= \frac{a + aw + ac - ad}{3c + 2w + cw + c^2 - d^2} \end{aligned}$$

por lo tanto el último punto de equilibrio es

$$E_3 = \left(\frac{a + aw + ac - ad}{3c + 2w + cw + c^2 - d^2}, \frac{2a + ac - ad}{3c + 2w + cw + c^2 - d^2 + 2}\right). \quad (2.18)$$

Así los cuatro puntos de equilibrio que se han obtenido son los siguientes

$$E_0 = (0, 0)$$

$$E_1 = \left( \frac{a}{c+2}, 0 \right)$$

$$E_2 = \left( 0, \frac{a}{1+\omega+c} \right)$$

$$E_3^* = \left( \frac{a + a\omega + ac - ad}{3c + 2\omega + c\omega + c^2 - d^2 + 2}, \frac{2a + ac - ad}{3c + 2\omega + c\omega + c^2 - d^2 + 2} \right)$$

Si bien los puntos  $E_1$  y  $E_2$  emergen como de particular interés debido a su ilustración de condiciones monopolísticas, su análisis detallado, aunque enriquecedor, no es imprescindible para la progresión inmediata de nuestro estudio. Por ende, su examen más profundo se reservará para una discusión posterior donde su impacto pueda ser explorado con la consideración adecuada.

---



## Capítulo 3

# Un modelo de reacción-difusión para el análisis de la distribución.

En este capítulo nos ocupamos del planteamiento y la comprensión del modelo. Iniciamos delineando el planteamiento del modelo, estableciendo las bases y los supuestos. Luego, nos enfocamos en el desarrollo de cada uno de los pasos que nos conducen hacia la solución de equilibrio, un estado de particular interés por su significado en la estabilidad y la respuesta del sistema modelado.

Tras hallar la solución de equilibrio, extendemos nuestro análisis hacia la búsqueda de la solución general del modelo. Este esfuerzo nos permite observar el comportamiento general del sistema bajo una variedad de condiciones, ofreciendo una visión más amplia y profunda de las dinámicas involucradas.

### 3.1. Planteamiento del modelo.

Del la sección 1.3 resulta interesante considerar el caso del monopolio, es decir, considerar los puntos de equilibrio

$$E_1 = \left( \frac{a}{c+2}, 0 \right)$$

$$E_2 = \left( 0, \frac{a}{1+\omega+c} \right)$$

Sin embargo, a lo largo del análisis de la sección anterior también vimos que para este tipo de mercado se sigue una dinámica logística, expresada de la siguiente manera:

$$\mu_j = 1 + av_j, \quad j = 1, 2$$

Esto nos indica que al analizar el monopolio, es conveniente utilizar una ecuación logística como modelo para comprender cómo el mercado se comporta en este tipo de situación. Por lo anterior, si tomamos la función de utilidad original y establecemos en cero la producción de una de las dos empresas, y por simplicidad denominamos  $x$  a la producción restante, obtendremos lo siguiente:

$$Q(x) = ax - \frac{1}{2}x^2$$

Dado que  $Q(x)$  con  $a > 0$ , describe el comportamiento del mercado para una sola empresa y, al mismo tiempo, representa los beneficios de la empresa para la producción  $x$ , es coherente considerarla como la componente de reacción en un modelo de reacción-difusión

$$\frac{\partial N}{\partial t} - D \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} = ax \left( 1 - \frac{x}{2a} \right)$$

Difusión

Reacción

En este contexto, la derivada  $\frac{\partial N}{\partial t}$  representa la variación temporal de la producción de la empresa, modelando cómo se distribuye esta producción a lo largo del tiempo y en diferentes ubicaciones. Este enfoque se inspira en la ecuación de calor y adopta un marco de reacción-difusión, donde  $N$  simboliza la distribución espacial y temporal de la producción. De esta manera, el modelo captura tanto la dinámica temporal como la dispersión espacial de la producción, reflejando cómo se difunde a través de diferentes áreas y cómo evoluciona en el tiempo.

Además, si tomamos en cuenta que la empresa tiene la habilidad de distribuir su producción en un área radial, es decir, para cualquier radio  $r > 0$ , lo cuál se puede entender mejor viendo la Figura 2:

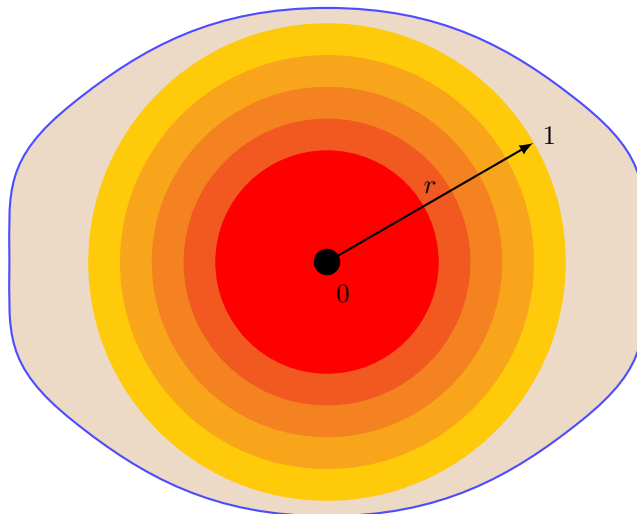


Figura 2. Gráfico radial

Vamos a establecer  $r = 1$  para simplificar nuestro análisis. No obstante, más adelante validaremos que este enfoque es aplicable para cualquier radio positivo  $r > 0$ . Teniendo en cuenta todas las consideraciones previas, el modelo que estamos proponiendo es el siguiente:

$$\begin{cases} \frac{\partial N}{\partial t} = D \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + Q(x) \\ N(0, t) = M \\ N(1, t) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} N(0, t) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} N(1, t) = 0 \\ N(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

- La constante de difusión,  $D > 0$ , desempeña un papel crucial en el modelo, análogo a su función en la ecuación de calor. Esta constante cuantifica la rapidez con la que la producción se dispersa o difunde a través del espacio a lo largo del tiempo. Un valor mayor de  $D$  indica una tasa de difusión más rápida, permitiendo que la producción se extienda más rápidamente a diferentes áreas. En contraste, un valor menor de  $D$  resulta en una difusión más lenta, limitando la velocidad de dispersión de la producción. De esta forma,  $D$  no solo influye en la velocidad de difusión, sino también en la capacidad del modelo para capturar la dinámica espacial de la distribución de la producción en el marco de la reacción-difusión.
- Donde la variable  $a$  representa la tasa de crecimiento en el modelo logístico  $Q(x)$ .

Estamos proponiendo un modelo que proporcionará la mejor distribución de la producción de la empresa monopolista para cualquier momento  $t > 0$  y para cualquier radio  $r > 0$ . Este modelo asume que la

empresa ya tiene conocimiento de la producción requerida, y este conocimiento se deriva de la función de utilidad que estamos utilizando como respuesta en nuestro modelo. Por lo tanto, lo que nuestro modelo aportará es la estrategia de distribución de la producción, sujeta a cada una de las condiciones previamente mencionadas.

### 3.2. Solución de equilibrio del modelo de reacción-difusión

Retomando la ecuación de reacción-difusión

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + ax \left(1 - \frac{x}{2a}\right) \quad (3.1)$$

Con el fin de determinar la solución de equilibrio, vamos a suponer que existe una solución de equilibrio, representada por la variable  $N_E$  y que satisface:

$$\frac{\partial N_E}{\partial t} = 0 \quad (3.2)$$

es decir

$$D \frac{\partial^2 N_E}{\partial x^2} + ax \left(1 - \frac{x}{2a}\right) = 0 \quad (3.3)$$

Dado que necesitamos determinar  $N_E$ , es necesario calcular la primera y segunda derivada de (3.3). Luego, utilizaremos las condiciones de frontera y las condiciones de la primera derivada para identificar los coeficientes que aseguran la existencia de la solución de equilibrio. Entonces

$$\frac{\partial^2 N_E}{\partial x^2} + \frac{ax}{D} \left(1 - \frac{x}{2a}\right) = 0$$

Para la primera integral se obtiene

$$\frac{\partial N_E}{\partial x} = \frac{x^3}{6D} - \frac{ax^2}{2D} + C_1 \quad (3.4)$$

La aplicación de las condiciones de primera derivada da como resultado los siguientes valores

$$C_1 = 0$$

y

$$a = \frac{1}{3}$$

Dado que  $a$  y  $C_1$  son conocidos, podemos sustituirlos y obtener

$$\frac{\partial N_E}{\partial x} = \frac{x^3}{6D} - \frac{x^2}{6D}$$

Ahora, para la segunda integral se obtiene

$$N_E = \frac{x^4}{24D} - \frac{ax^3}{6D} + C_2 \quad (3.5)$$

Para completar el procedimiento, debemos utilizar ahora las condiciones de frontera a la integral recién obtenida y obtener los otros coeficientes. Entonces

$$C_2 = M$$

y

$$D = \frac{1}{72M}$$

Recordemos que  $D$  representa la constante de difusión, y en este contexto, depende del nivel de producción  $M$ .

Así pues, hemos logrado identificar la solución de equilibrio y cada uno de los coeficientes que satisfacen (3.3) y en consecuencia (3.2). Finalmente la forma de la solución de equilibrio es:

$$N_E = \frac{x^4}{24D} - \frac{x^3}{18D} + \frac{1}{72D} \quad (3.6)$$

Y su representación gráfica se puede ver en la Figura 3.

Y su gráfica

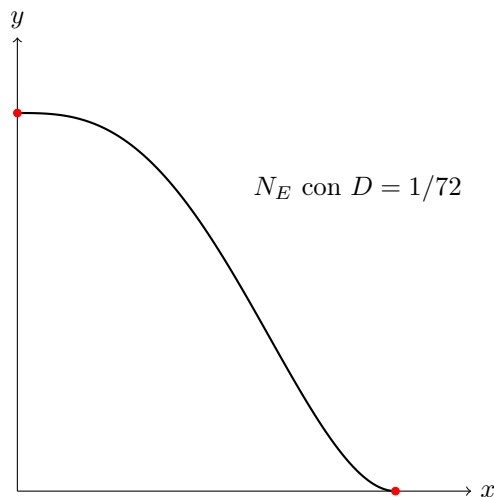


Figura 3. Solución de equilibrio.

La solución de equilibrio indica un estado estacionario en el que no hay cambios en el tiempo. Dado que la solución de equilibrio es un punto de estabilidad en el sistema dinámico que representa el modelo, es importante para la empresa conocerla, ya que esto le permite tener información sobre la dinámica a largo plazo del sistema y hacia donde converge cualquier solución cercana a la solución de equilibrio.

Es crucial destacar la relevancia de este modelo propuesto, ya que sus resultados son aplicables para cualquier cantidad de producción  $M$  y para cualquier radio positivo  $r > 0$ , lo que resalta la importancia de este análisis, como se ilustra en el gráfico siguiente:



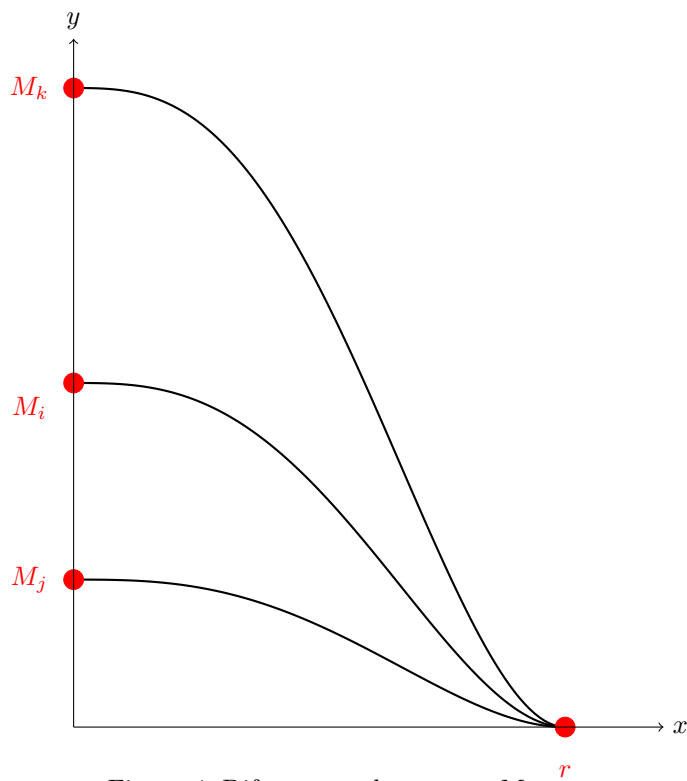


Figura 4. Diferentes valores para  $M_i$

De hecho, la elección de la producción  $M$  depende de las necesidades de la empresa y de su función de utilidad.

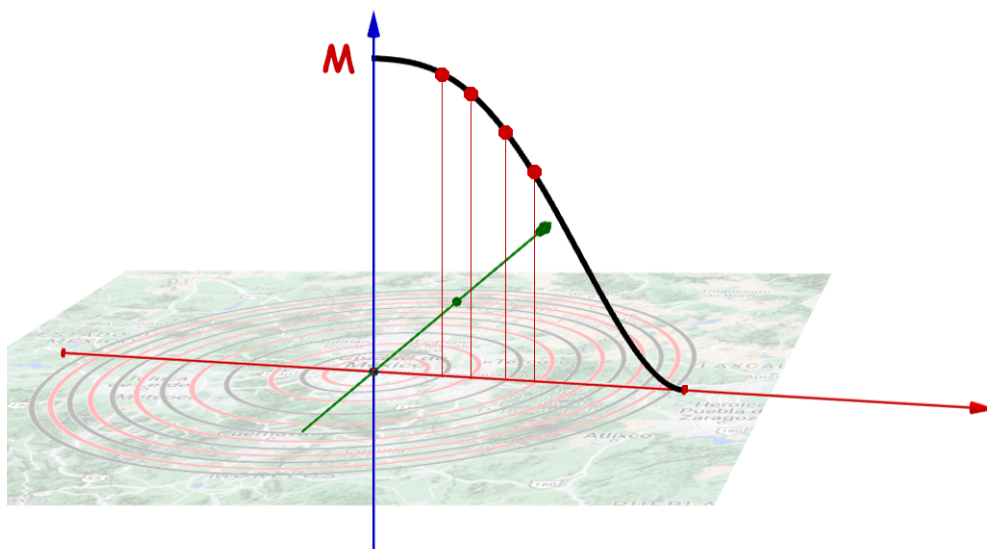


Figura 3.1: Sub-radios considerados para la interpretación del problema

### 3.3. Solución general del modelo propuesto.

Para hallar la solución general, definimos

$$V(x, t) = N(x, t) - N_E(x)$$

donde  $N(x, t)$  es la solución general.

a) Primero vamos a calcular la primera derivada de  $V(x, t)$  con respecto a  $t$

$$\frac{\partial}{\partial t} V(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} N(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} N_E(x)$$

pero como  $\frac{\partial N_E}{\partial t} = 0$  entonces

$$\frac{\partial}{\partial t} V(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} N(x, t) \quad (3.7)$$

Sin embargo, recordemos que

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + ax \left(1 - \frac{x}{2a}\right)$$

por lo que

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + ax \left(1 - \frac{x}{2a}\right) \quad (3.8)$$

b) Ahora, calculamos la segunda derivada de  $V$  con respecto a  $x$ , esto es

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 N_E}{\partial x^2}$$

pero  $\frac{\partial^2 N_E}{\partial x^2} + ax \left(1 - \frac{x}{2a}\right) = 0$  así

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + ax \left(1 - \frac{x}{2a}\right) \quad (3.9)$$

Desde las ecuaciones (3.8) y (3.9) es evidente que

$$\frac{\partial V}{\partial t} = D \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad (3.10)$$

De esta manera podemos concluir que la solución de (3.10) coincide con la solución de la ecuación de calor y, por lo tanto

$$V(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Dado que en nuestro modelo se propone que  $L = r$  y se toma  $r = 1$ , la solución de la ecuación de calor se ajusta para reflejar estas especificaciones. La variable  $L$  en la ecuación original se reemplaza por  $r$ , y posteriormente se asigna el valor de  $r = 1$ . Así, la solución de la ecuación de calor se reescribe como:

$$V(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\left(\frac{n\pi}{r}\right)^2 kt} \sin\left(\frac{n\pi x}{r}\right)$$

Con  $r = 1$ , la ecuación se simplifica a:

$$V(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-(n\pi)^2 kt} \sin(n\pi x)$$

Esta simplificación refleja directamente las condiciones específicas de nuestro modelo, adaptando la solución general de la ecuación de calor a las particularidades del sistema que estamos analizando.

Dado que el propósito de definir  $V(x, t) = N(x, t) - N_E(x)$  era conocer la solución general  $N(x, t)$ , entonces todas las soluciones para  $N(x, t)$  son de la forma

$$N(x, t) = V(x, t) + N_E(x)$$

esto implica que la solución de  $N(x, t)$  está dada por

$$N(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-(n\pi)^2 kt} \sin(n\pi x) + N_E(x) \quad (3.11)$$

Sin embargo, sabemos que la ecuación de calor tiende a cero cuando  $t$  tiende a infinito. Por lo tanto, si hacemos que todo el sistema tienda a infinito, obtendremos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(x, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} V(x, t) + \lim_{t \rightarrow \infty} N_E(x)$$

Pero como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x, t) = 0$$

se tiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(x, t) = N_E(x) \quad (3.12)$$

Este resultado es importante porque nos indica que, independientemente de la condición inicial que seleccionemos, todas las soluciones van a converger hacia la solución de equilibrio cuando  $t$  tiende a infinito

En el contexto de la competencia de Corunot, la solución de equilibrio proporciona información valiosa para la empresa, y con este resultado, ya sabe que todas las demás soluciones tienden a converger hacia ella. En otras palabras, conociendo la solución de equilibrio, la empresa puede tener una idea clara de hacia donde converge la solución en el largo plazo, lo que puede ser de gran utilidad en la planificación y toma de decisiones.



## Capítulo 4

# Condiciones iniciales e interpretación

En este capítulo, nos adentramos en un análisis de diferentes condiciones iniciales aplicables al modelo que hemos propuesto previamente. Aunque la solución general del problema y la solución de equilibrio nos dicen cuál es el comportamiento esperado, la exploración de distintas condiciones iniciales nos ayudará a comprender mejor la dinámica del modelo en diversos escenarios.

Para finalizar se presenta una aplicación concreta del modelo, ilustrando su utilidad y potencial en situaciones reales. A través de este capítulo, buscamos no solo probar la validez de nuestras soluciones sino también enriquecer la comprensión del modelo y su capacidad bajo un abanico de posibilidades iniciales.

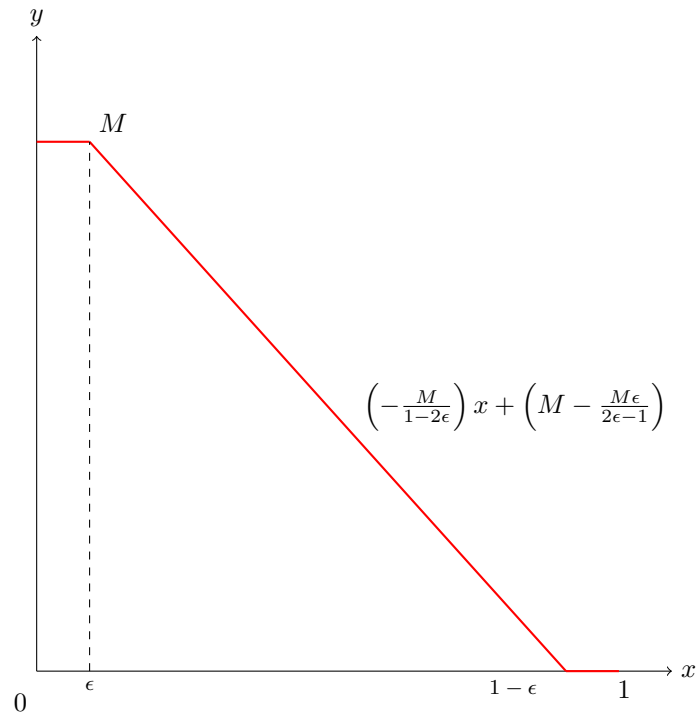
### 4.1. Condiciones iniciales

Aunque ya sabemos que la solución general converge hacia la solución de equilibrio, como se observó en el capítulo anterior, en esta sección vamos a analizar diferentes condiciones iniciales. Esto nos permitirá comparar y comprender el comportamiento de las distintas condiciones iniciales.

**Caso 1.** La condición inicial más evidente es tomar la recta que conecta los puntos  $(0, M)$  y  $(1, 0)$ . Sin embargo, para cumplir con las condiciones de derivada cero en los puntos extremos, es posible considerar condiciones iniciales de la siguiente forma:

$$f_{\epsilon}(x) = \begin{cases} M & \text{si } 0 \leq x \leq \epsilon \\ \left(-\frac{M}{1-2\epsilon}\right)x + \left(M - \frac{M\epsilon}{2\epsilon-1}\right) & \text{si } \epsilon \leq x \leq 1 - \epsilon \\ 0 & \text{si } 1 - \epsilon \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Podemos observar la representación gráfica de la función dada por

Figura 5. Gráfico de  $f_\epsilon(x)$ 

Para resolver la función anterior, se observa que el valor de la integral en el intervalo  $[1 - \epsilon, 1]$  es igual a cero, lo que indica que no se requiere realizar ninguna operación adicional en esa región.

Ahora consideremos la integral

$$I_1 = 2M \int_0^\epsilon \sin(n\pi x) dx$$

Aplicando la regla de integración para la función seno, obtenemos

$$I_1 = 2M \left[ -\frac{1}{n\pi} \cos(n\pi x) \right]_0^\epsilon$$

Evaluando los límites de integración, tenemos

$$I_1 = \frac{2M}{n\pi} [1 - \cos(n\pi\epsilon)]$$

Por lo tanto, el valor de la integral es

$$2M \int_0^\epsilon \sin(n\pi x) = \frac{2M}{n\pi} [1 - \cos(n\pi\epsilon)]$$

¿Pero qué ocurre con  $I_1$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ ? Podemos observar que a medida que  $\epsilon$  se acerca a 0, el valor de la integral  $I_1$  tiende a 0. Esto se puede expresar formalmente como:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( 2M \int_0^\epsilon \sin(n\pi x) dx \right) = 0 \quad (4.1)$$

Ahora necesitamos resolver la siguiente integral

$$I_2 = 2 \int_\epsilon^{1-\epsilon} \left[ \left( -\frac{M}{1-2\epsilon} \right) x + \left( M - \frac{M\epsilon}{2\epsilon-1} \right) \right] \sin(n\pi x) dx$$

Para simplificar un poco la notación, se define:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 2 \left( -\frac{M}{1-2\epsilon} \right) \\ \alpha_2 &= 2 \left( M - \frac{M\epsilon}{2\epsilon-1} \right) \\ \zeta_1 &= \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} x \sin(n\pi x) dx \\ \zeta_2 &= \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} \sin(n\pi x) dx\end{aligned}$$

Es claro que

$$I_2 = \alpha_1 \zeta_1 + \alpha_2 \zeta_2$$

Ahora, vamos a resolver las integrales.

$$\begin{aligned}\zeta_1 = \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} x \sin(n\pi x) dx &= -\frac{1}{n\pi} \left[ x \cos(n\pi x) \Big|_{\epsilon}^{1-\epsilon} \right] + \frac{1}{n\pi} \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} \cos(n\pi x) dx \\ &= \frac{1}{(n\pi)^2} \sin(n\pi x) \Big|_{\epsilon}^{1-\epsilon} - \frac{1}{n\pi} \left[ x \cos(n\pi x) \Big|_{\epsilon}^{1-\epsilon} \right]\end{aligned}$$

Retomando  $\alpha_1$  obtenemos:

$$\begin{aligned}\alpha_1 \zeta_1 &= \alpha_1 \left( \frac{1}{(n\pi)^2} \sin(n\pi x) \Big|_{\epsilon}^{1-\epsilon} - \frac{x}{n\pi} \cos(n\pi x) \Big|_{\epsilon}^{1-\epsilon} \right) \\ &= \frac{\alpha_1}{(n\pi)^2} \left( \sin(n\pi x) \Big|_{\epsilon}^{1-\epsilon} - (n\pi)x \cos(n\pi x) \Big|_{\epsilon}^{1-\epsilon} \right)\end{aligned}$$

Si ahora definimos

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \sin(n\pi x) \Big|_{\epsilon}^{1-\epsilon} \\ \gamma_2 &= x \cos(n\pi x) \Big|_{\epsilon}^{1-\epsilon}\end{aligned}$$

Entonces la expresión anterior se puede escribir como

$$\alpha_1 \zeta_1 = \frac{\alpha_1}{(n\pi)^2} (\gamma_1 - (n\pi)\gamma_2)$$

Vamos a ver por separado las expresiones  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  para realizar un análisis individual de cada una. Posteriormente, combinaremos los resultados obtenidos para tener una visión general de  $\alpha_1 \zeta_1$ .

Para  $\gamma_1$ , se tiene la expresión:

$$\gamma_1 = \sin(n\pi(1-\epsilon)) - \sin(n\pi\epsilon) \quad (4.2)$$

Al evaluar el límite cuando  $\epsilon$  tiende a cero, obtenemos:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \gamma_1 = 0$$

Para  $\gamma_2$ , se tiene la expresión:

$$\gamma_2 = (1-\epsilon) \cos(n\pi(1-\epsilon)) - \epsilon \cos(n\pi\epsilon) \quad (4.3)$$

Al evaluar el límite cuando  $\epsilon$  tiende a cero, obtenemos:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \gamma_2 = (-1)^n$$

Para esta primera integral, ya sólo queda ver que pasa con  $\alpha_1 \zeta_1$  entonces:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\alpha_1 \zeta_1) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( -\frac{\alpha_1}{n\pi} (-1)^n \right) = \frac{2M(-1)^n}{n\pi} \quad (4.4)$$

Para resolver  $\zeta_2$ , comenzamos con la expresión:

$$\zeta_2 = \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} \sin(n\pi x) dx = -\frac{1}{n\pi} \cos(n\pi x) \Big|_{\epsilon}^{1-\epsilon} = \frac{1}{n\pi} [\cos(n\pi\epsilon) - \cos(n\pi(1-\epsilon))]$$

Al evaluar el límite cuando  $\epsilon$  tiende a cero, obtenemos:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \zeta_2 = \frac{1}{n\pi} [1 - (-1)^n]$$

Por lo tanto, el límite de  $\zeta_2$  cuando  $\epsilon$  tiende a cero es igual a  $\frac{1}{n\pi} [1 - (-1)^n]$ . Ahora, si consideramos  $\alpha_2$ , podemos obtener:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\alpha_2 \zeta_2) = \frac{2M}{n\pi} [1 - (-1)^n]$$

Por lo tanto, el límite de  $\alpha_2 \zeta_2$  cuando  $\epsilon$  tiende a cero es igual a  $\frac{2M}{n\pi} [1 - (-1)^n]$ .

Después de resolver cada una de las integrales y calcular sus respectivos límites cuando  $\epsilon$  tiende a cero, podemos obtener el valor total de la integral  $I_2$  como sigue:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_2 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( 2 \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} \left[ \left( -\frac{M}{1-2\epsilon} \right) x + \left( M - \frac{M\epsilon}{2\epsilon-1} \right) \right] \sin(n\pi x) dx \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\alpha_1 \zeta_1 + \alpha_2 \zeta_2) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\alpha_1 \zeta_1) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\alpha_2 \zeta_2) \\ &= \frac{2M(-1)^n}{n\pi} + \frac{2M}{n\pi} [1 - (-1)^n] \\ &= \frac{2M}{n\pi} \end{aligned}$$

El objetivo de este análisis fue estudiar el comportamiento de la función  $f_{\epsilon}(x)$  cuando  $\epsilon$  tiende a cero.

En el intervalo  $[1-\epsilon, 1]$  vimos que el valor de la función es cero. Para el intervalo  $[0, \epsilon]$ , hemos evaluado la integral correspondiente y hemos encontrado que su valor tiende a cero cuando  $\epsilon$  tiende a cero. Por lo tanto, podemos concluir que cuando  $\epsilon$  tiende a cero, la función  $f_{\epsilon}(x)$  tiende al valor de  $I_2$  cuando  $I_2$  también tiende a cero.

Además, hemos hallado que el valor de la integral en el intervalo  $[\epsilon, 1-\epsilon]$ , denotada como  $I_2$ , tiende a  $2M/n\pi$  cuando  $\epsilon$  tiende a cero. Como consecuencia, podemos concluir que cuando  $\epsilon$  tiende a cero, la función  $f_{\epsilon}(x)$  tiende a  $I_2$ , que a su vez tiende a  $2M/n\pi$ . Por lo tanto, cuando  $\epsilon$  tiende a cero, la función  $f_{\epsilon}(x)$  converge a  $2M/n\pi$ , lo cual hemos probado mediante el análisis anterior. En este caso específico, la expresión se reduce a:

$$f_{\epsilon}(x) \underset{\epsilon \rightarrow 0}{=} \frac{2M}{n\pi}$$

El siguiente paso para concluir con esta primera condición inicial  $f_{\epsilon}(x)$  es verificar que al calcular los coeficientes de Fourier de la nueva función  $N_1(x, 0) = M(1-x)$ , se llega al mismo resultado. De esta forma, podemos utilizar indistintamente la función  $f_{\epsilon}$  o la función  $N_1$ . Sin embargo, para



obtener las gráficas y cálculos numéricos optaremos por utilizar la función  $N_1$  debido a que es una función más sencilla.

Consideremos la función  $N(x, 0) = M(1 - x)$  en el intervalo  $[0, 1]$ .

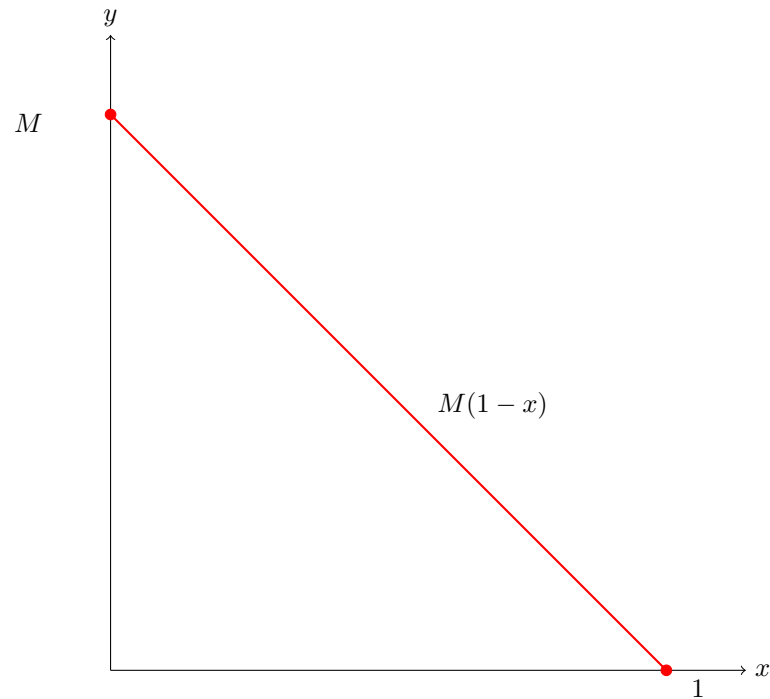


Figura 6. Gráfico de  $f(x)$

Resolvemos la integral

$$2M \int_0^1 (1-x) \sin(n\pi x) dx$$

La primera parte de la integral es

$$2M \int_0^1 \sin(n\pi x) dx = -2M \left( \frac{1}{n\pi} \right) \cos(n\pi x) \Big|_0^1 = \frac{2M}{n\pi} (1 - (-1)^n)$$

La segunda parte de la integral es

$$-2M \int_0^1 x \sin(n\pi x) dx = \frac{2M(-1)^n}{n\pi}$$

por lo tanto

$$\int_0^1 M(1-x) \sin(n\pi x) dx = \frac{2M}{n\pi}$$

que coincide totalmente con  $f_\epsilon(x)$   
 $\epsilon \rightarrow 0$

En conclusión para esta primera condición inicial, consideramos la función  $f(x)$  y su contraparte modificada  $f_\epsilon(x)$ , donde  $f(x)$  es una recta definida como  $f(x) = M(1-x)$  y  $f_\epsilon(x)$  es la misma recta suavizada por un parámetro  $\epsilon$ . Observamos que cuando  $\epsilon$  tiende a cero, la función  $f_\epsilon(x)$  converge hacia  $f(x)$ , es decir,  $f_\epsilon(x) \rightarrow f(x)$ .

Esta convergencia nos permite concluir que la solución de  $f_\epsilon(x)$  es equivalente a la solución de  $f(x)$ . Aunque inicialmente  $f(x)$  no cumple con la condición de tener derivada cero, hemos demostrado que la solución suavizada  $f_\epsilon(x)$  sí cumple dicha condición. Lo más interesante es que a medida que  $\epsilon$  se aproxima a cero, la convergencia entre  $f_\epsilon(x)$  y  $f(x)$  se hace más evidente.

En consecuencia, podemos justificar que, a pesar de que  $f(x)$  no satisface la condición inicial de tener derivada cero, podemos considerarla válida debido a que hemos demostrado que es equivalente a  $f_\epsilon(x)$ , que sí cumple con dicha condición. Esta equivalencia nos permite utilizar  $f(x)$  como una función simplificada para resolver el problema, evitando la complejidad adicional de  $f_\epsilon(x)$  y aprovechando la convergencia demostrada.

Para finalizar esta sección, mostraremos la gráfica que representa la tendencia de la serie de Fourier utilizando los coeficientes calculados para esta primera condición inicial.

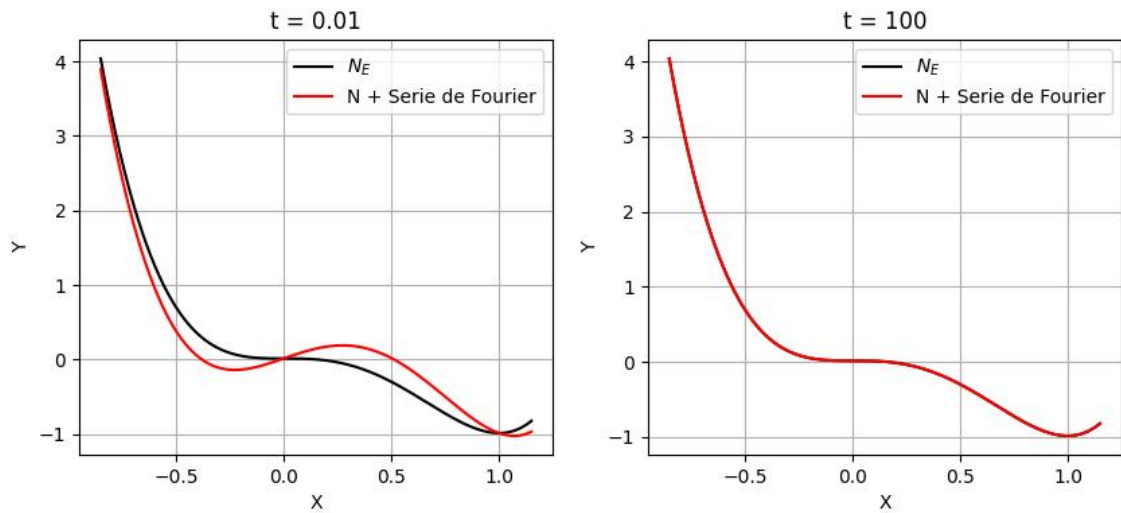


Figura 4.1: Convergencia de la Serie de Fourier para la primera condición inicial

**Caso 2.** Ahora consideraremos una segunda condición inicial dada por:

$$N_2(x, 0) = x^2 - 2x + 1$$

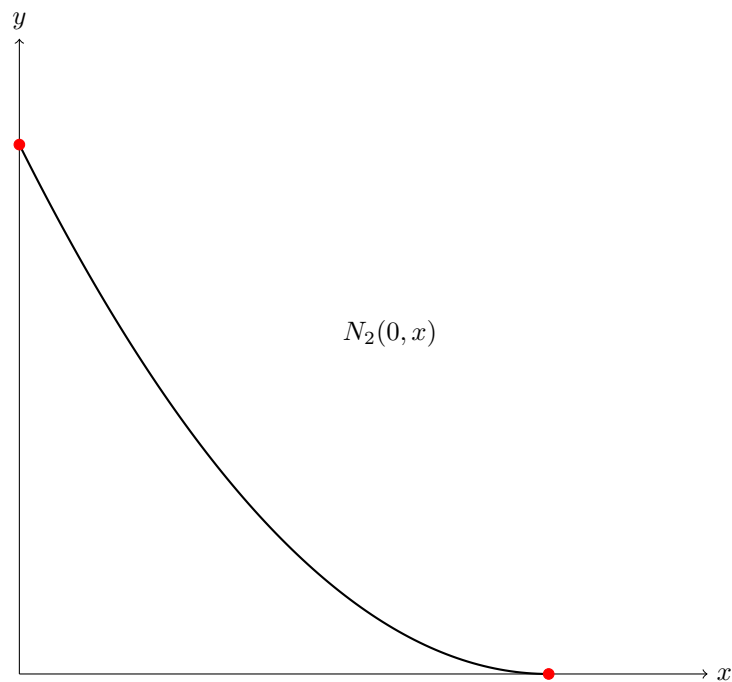


Figura 7. Segunda condición inicial

Para hallar los coeficientes de Fourier, resolvamos:

$$b_{2n} = \int_0^1 f(x) \sin(n\pi x) dx = \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) \sin(n\pi x) dx$$

Resolviendo cada una de las integrales, obtenemos:

$$\int_0^1 \sin(n\pi x) dx = \frac{1}{n\pi} (1 - (-1)^n)$$

Para la segunda integral:

$$-2 \int_0^1 x \sin(n\pi x) dx = \frac{2(-1)^n}{n\pi}$$

Y finalmente:

$$\int_0^1 x^2 \sin(n\pi x) dx = \frac{2}{(n\pi)^3} ((-1)^n - 1) - \frac{1}{n\pi} (-1)^n$$

Por lo tanto, el valor de la integral original está dado por:

$$\begin{aligned} b_{2n} = \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) \sin(n\pi x) dx &= \frac{1}{n\pi} (1 - (-1)^n) + \frac{2(-1)^n}{n\pi} \\ &- \frac{1}{n\pi} (-1)^n + \frac{2}{(n\pi)^3} ((-1)^n - 1) \\ &= \frac{1}{n\pi} + \frac{2}{(n\pi)^3} ((-1)^n - 1) \end{aligned}$$

Al igual que hicimos anteriormente con la condición inicial previa, también vamos a graficar el comportamiento de los coeficientes de Fourier obtenidos en relación con la solución de equilibrio.

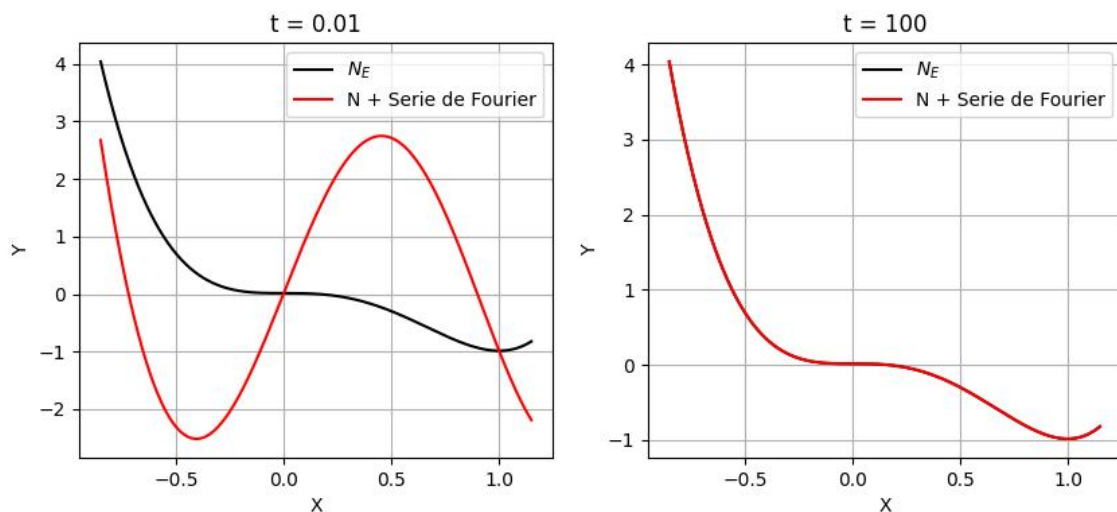


Figura 4.2: Convergencia de la Serie de Fourier para la segunda condición inicial

**Observación:** Antes de continuar con la última condición, es necesario resaltar que una vez obtenida la solución general del modelo propuesto, se procedió al análisis bajo tres diferentes condiciones iniciales, con el objetivo de examinar y comprender el comportamiento del sistema bajo variadas circunstancias. Aunque era previsible, dado el diseño del modelo, que la solución general convergería hacia la solución de equilibrio, la exploración de estas condiciones iniciales diversas no fue meramente redundante. Por el contrario, este enfoque permitió enriquecer el análisis, aportando una visión más completa sobre la robustez y la dinámica del modelo ante distintos escenarios iniciales. Este ejercicio demostró no solo la estabilidad de la solución de equilibrio, sino también cómo el sistema se adapta y evoluciona desde diferentes puntos de partida hacia este estado estable, subrayando la relevancia y la aplicabilidad del modelo en un espectro amplio de situaciones.

**Caso 3.** Finalmente consideramos la tercera condición inicial dada por

$$N_3(x, 0) = M - x^2$$

Consideramos  $M = 1$  y nos queda

$$N_3(x, 0) = 1 - x^2$$

Para hallar los coeficientes de Fourier, resolvamos:

$$b_n = \int_0^1 f(x) \sin(n\pi x) dx = \int_0^1 (1 - x^2) \sin(n\pi x) dx$$

Para la primera integral obtenemos

$$\int_0^1 \sin(n\pi x) dx = \frac{1}{n\pi} (1 - (-1)^n)$$

Para la segunda integral:

$$-\int_0^1 x^2 \sin(n\pi x) dx = \frac{1}{n\pi} (-1)^n - \frac{2}{(n\pi)^3} ((-1)^n - 1)$$

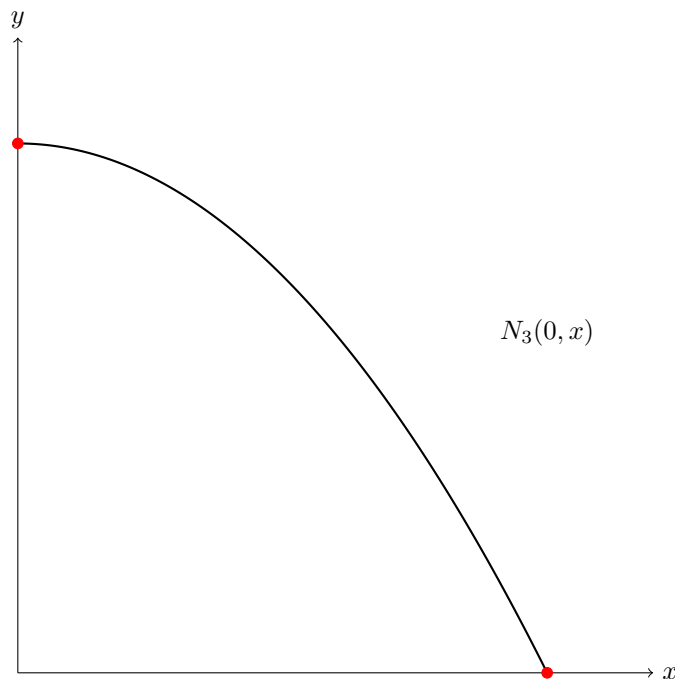


Figura 8. Tercera condición inicial

Por lo tanto, el valor para la tercera integral es

$$\begin{aligned} b_{3_n} &= \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) \sin(n\pi x) dx = \frac{1}{n\pi} (1 - (-1)^n) + \frac{1}{n\pi} (-1)^n - \frac{2}{(n\pi)^3} ((-1)^n - 1) \\ &= \frac{1}{n\pi} - \frac{2}{(n\pi)^3} ((-1)^n - 1) \end{aligned}$$

En la gráfica correspondiente a la tercera condición inicial, se puede observar que no existe una diferencia significativa en comparación con la condición inicial anterior. Ambas gráficas son prácticamente idénticas. Sin embargo, es importante destacar que las series de Fourier asociadas a estas condiciones iniciales son distintas.

A pesar de esta diferencia en las series de Fourier, como se ha mencionado anteriormente, el comportamiento de cualquier solución tiende siempre hacia la solución de equilibrio. Esto se ha podido evidenciar en cada una de las condiciones iniciales proporcionadas, las cuales presentan características distintas.

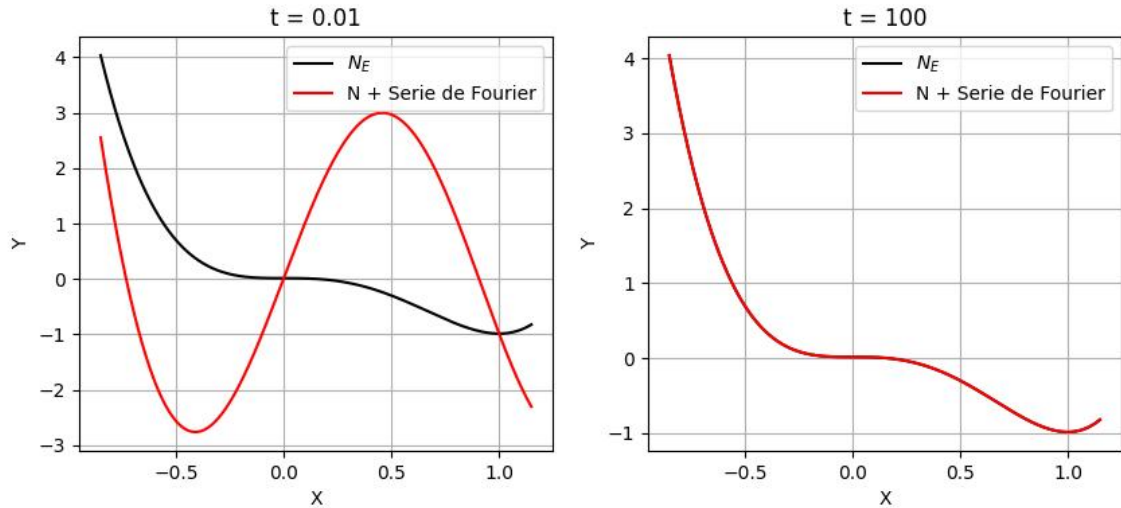


Figura 4.3: Convergencia de la Serie de Fourier para la tercera condición inicial

## 4.2. Aplicación e interpretación

En esta última sección, vamos a considerar un problema típico de Cournot para una situación de monopolio. Es decir, un modelo que incluye una función inversa de demanda, una función de costo de producción y una función de utilidad. En este modelo típico de Cournot, el primer paso será determinar el valor de la producción que maximice la producción, tal como se haría en un modelo clásico.

Imaginemos que nos encontramos ante una compañía que denominaremos *MegaCorp S.A.*, que opera en un mercado de monopolio. *MegaCorp S.A.* tiene la capacidad de distribuir sus productos en una región circular con un radio de  $r > 0$ .

La empresa busca determinar la función que le proporcione la distribución más adecuada de su producción dentro de este radio, con el objetivo de garantizar que sus ganancias se mantengan en su punto óptimo.

La función inversa de demanda es  $P(x) = 50a - 2x$ , la función de costo es  $C(x) = 3x$  y finalmente la función de beneficio de la empresa  $\pi(x) = 50ax - 2x^2 - 3x$ .

- La empresa busca determinar la cantidad de producción  $x^*$  que maximiza su beneficio.

$$\max_x \pi(x) = P(x)x - C(x)$$

- Una vez que se ha determinado  $x^*$ , la empresa busca la mejor forma de distribuir esa producción en el área circular de radio  $r > 0$ .

Resolviendo obtenemos  $a = 13/150$ ,  $D = 1/18M$ , tomamos  $M = x^*$  y la función de equilibrio

$$N(x) = \frac{x^4}{6D} + \frac{x^3}{2D} - \frac{13}{18D} + \frac{1}{18D}$$

Como la solución de equilibrio no depende de  $t$  y sólo depende de la producción podemos agregarla en el mismo gráfico

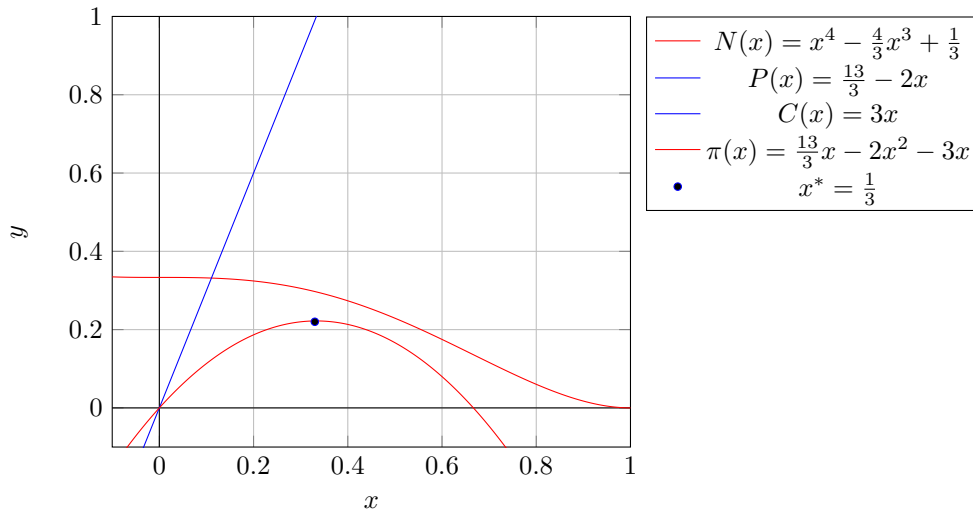


Figura 10. Interpretación de la aplicación.

Al aplicar el modelo propuesto al escenario de monopolio de *MegaCorp S.A.*, hemos abordado un problema típico de Cournot integrando funciones clave como la demanda inversa, el costo de producción y la utilidad. Determinando la cantidad óptima de producción,  $x^*$ , que maximiza las ganancias de la empresa, establecemos un marco crucial para analizar cómo se debe distribuir esta producción de manera eficiente dentro de una región circular de radio  $r > 0$ .

Esta resolución no solo revela la cantidad óptima de producción sino también la manera en que esta producción debe ser distribuida espacialmente para maximizar la utilidad de la empresa, extendiendo significativamente el análisis clásico de Cournot. La función de equilibrio obtenida,  $N(x)$ , independiente del tiempo  $t$ , se centra en la distribución espacial de la producción, permitiéndonos visualizar integralmente cómo la producción óptima,  $x^*$ , se ajusta dentro del área de interés para alcanzar el equilibrio deseado.

La representación gráfica de estas funciones y su intersección proporciona una interpretación visual y tangible de la aplicación del modelo. Cada curva y punto de intersección encapsulan aspectos críticos del análisis, desde la determinación de la producción óptima hasta la relación entre producción, demanda y costo, culminando en la visualización de la distribución espacial de la producción que asegura la maximización de las ganancias para *MegaCorp S.A.* en su entorno de monopolio.

# Conclusiones

En esta tesis se ha planteado un modelo de reacción-difusión con la finalidad de constituir una herramienta para el análisis de la distribución de la producción de una empresa que opera bajo condiciones de monopolio, desde una perspectiva diferente, aprovechando el uso de la ecuación de reacción-difusión y sus propiedades.

Más allá de la propuesta de un nuevo modelo, el objetivo principal de este trabajo era determinar la existencia o inexistencia de una solución de equilibrio y caracterizar su comportamiento. Porque en esta tesis no solo busca innovar en la formulación de modelos, sino también contribuir a la comprensión teórica de las dinámicas de equilibrio en contextos monopolistas.

Además, buscamos y determinamos la solución general y, como se observó en el capítulo anterior, lo más importante fue descubrir que, al hacer tender todo el sistema al infinito, la solución general converge a la solución de equilibrio. Este hecho tiene una gran relevancia, ya que nos indica que, independientemente de la condición inicial que adoptemos, todas convergerán a la solución de equilibrio. En el contexto económico, resulta que la solución de equilibrio nos proporciona la estrategia óptima para distribuir la producción.

Otro aspecto que merece ser destacado es que el modelo propuesto no solo contribuye al estudio de los juegos de monopolio de Cournot, sino que también los complementa. Esto se debe a que, en un modelo clásico de Cournot, todo lo que se puede determinar es la producción que maximiza la utilidad de la empresa. Sin embargo, con el modelo de reacción-difusión, se puede conocer la mejor manera de distribuir dicha producción para cualquier monto  $M$  y para cualquier radio  $r$ . Esta es una aportación significativa que amplía la utilidad y aplicabilidad de los modelos de Cournot en el análisis de situaciones monopolistas.

Por último, los resultados obtenidos en este trabajo ofrecen la posibilidad de considerar futuras investigaciones aún más interesantes, abriendo un nuevo enfoque que complementa la línea de investigación en economía y física. Sin embargo, es importante destacar que estos trabajos se planificarán más adelante, a fin de aprovechar y explorar plenamente las implicaciones y potencialidades identificadas en este estudio.





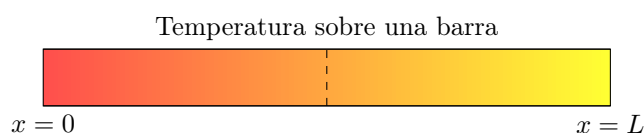
## Apéndice A

# Deducción de la ecuación de calor

¿Es posible definir una función  $u$  que nos permita conocer la temperatura de una barra en cualquier punto y en cualquier momento?

Para responder esta pregunta, primero necesitamos hacer algunas consideraciones (Incropera et al., 2007):

1. Primero definimos  $x$ , como la variable que nos mida la posición.
2. También definimos  $t$ , como la variable que nos mida la temperatura.
3. Vamos a asumir que la varilla es unidimensional y que la variación de la temperatura ocurre solo en una dirección, lo cual permite expresar la ecuación en términos de una sola variable (la posición a lo largo de la varilla).
4. La densidad de la varilla es la misma en cualquier punto. Es decir, supondremos que la varilla es lo suficientemente delgada para que la temperatura no varíe significativamente a lo largo de su grosor.
5. Área transversal constante  $A$ : La temperatura en cada sección transversal  $A$  de la varilla es constante. Es decir, si se toma un corte transversal de la varilla en cualquier punto y se mide la temperatura, se obtendrán valores iguales en todos los puntos.



También necesitamos conocer lo siguiente (Özişik, 1993):

1.  $e(x, t)$  es la densidad de energía térmica
2.  $E(x, t)$  es la energía térmica. Por lo tanto  $E = e(x, t) \cdot V$  donde  $V$  es el volumen.
3.  $q(x, t)$  es el flujo de calor o energía térmica por área.
4.  $Q(x, t)$  energía térmica generada por el material por volumen. Por lo que si tomamos un pequeño volumen de la barra, entonces  $Q(x, t)$  es la energía que entra y  $Q(x + \Delta x, t)$  es la energía que sale

Entonces la forma en la que cambia la energía térmica a lo largo del tiempo es

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = (Q(x, t) - Q(x + \Delta x, t))A + Q(x, t) \cdot \Delta x \cdot A$$

donde

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\Delta(e(x, t)\Delta x \cdot A)}{\Delta t}$$

Podemos expresarlo como

$$\frac{\partial}{\partial t}e(x, t)\Delta x \cdot A = (Q(x, t) - Q(x + \Delta x, t))A + Q(x, t) \cdot \Delta x \cdot A$$

hasta aquí sólo hemos obtenido como cambia la energía en pequeñas secciones de la barra, lo que nos interesa es conocer, como cambia la energía en toda la barra o por lo menos en un intervalo mucho más grande. Entonces la energía en un intervalo  $(a, b)$  la podemos calcular

$$e(a, b) = \int_a^b e(x, t)A dx$$

por lo tanto

$$Q(a, b) = \int_a^b Q(x, t)A dx$$

Así el cambio total de la energía debe ser

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \int_a^b e(x, t)A dx \right) &= Aq(a, t) - Aq(b, t) + \int_a^b Q(x, t)A dx \\ &= -(Aq(b, t) - Aq(a, t)) + \int_a^b Q(x, t)A dx \end{aligned}$$

Si suponemos que  $e, q$  son de clase  $C^1 \in [0, L]$  y  $Q$  es continua en  $[0, L]$  entonces por el teorema fundamental del cálculo y derivación bajo el signo de integral obtenemos

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial t}e(x, t)dx = - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x}q(x, t)dx + \int_a^b Q(x, t)dx \quad (\text{A.1})$$

Esta ecuación se conoce como la ley de conservación de energía térmica pero en forma diferencial (Farlow, 1993).

$$\int_a^b \left( \frac{\partial}{\partial t}e(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}q(x, t) - Q(x, t) \right) dx = 0$$

por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial t}e(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}q(x, t) - Q(x, t) = 0$$

Esta ecuación se conoce como la ley de conservación de energía térmica pero en forma diferencial.

Ahora consideremos el calor específico  $c(x, t)$  como la energía térmica para elevar una masa un grado. Para simplificar el análisis, supondremos que el calor específico solo va a depender de la posición, es decir,

$$c(x, t) = c(x)$$

también consideremos  $\rho(x)$  como la densidad de masa que es la masa por el volumen. Y entonces

$$\begin{aligned} e(x, t) \cdot A \cdot \Delta x &= c(x)u(x, t)\rho(x)A \cdot \Delta x \\ e(x, t) &= c(x)u(x, t)\rho(x) \end{aligned}$$

se sigue

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}e(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t}(c(x)u(x, t)\rho(x)) \\ &= c(x)\rho(x)\frac{\partial}{\partial t}u(x, t) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x}q(x, t) + Q(x, t) \end{aligned}$$

Para poder resolver esto necesitamos ver como se relaciona la temperatura con el flujo de calor. Utilizando la ley de Fourier tenemos la relación (Bracewell, 2000):

$$q = -k_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

donde  $k_0$  es una constante. Entonces

$$\begin{aligned} c(x)\rho(x)\frac{\partial}{\partial t}u(x, t) &= -\frac{\partial}{\partial x}q(x, t) + Q(x, t) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left( -k(x) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) + Q(x, t) \end{aligned}$$

y entonces se ha obtenido al ecuación de calor

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial}{\partial t}u(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( -k(x) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) + Q(x, t) \quad (\text{A.2})$$

y si la barra es homogénea entonces  $c$ ,  $\rho$  y  $k$  son constantes por lo que obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x, t) \quad (\text{A.3})$$

que es la ecuación de calor no homogénea, donde

$$D = \frac{k}{c\rho}$$

es llamado el *coeficiente de difusión*. Esta ecuación se utiliza para modelar la propagación del calor en un medio con una fuente de calor presente. Finalmente si no hay fuentes internas de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{A.4})$$

qué es la ecuación de calor homogénea.

Por lo tanto hemos llegado a la ecuación de calor, una ecuación diferencial parcial que describe cómo se propaga el calor a través del tiempo y del espacio en un medio dado.

Notación: Podemos utilizar indistintamente cualquiera de la siguiente notación:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{o} \quad u_t - Du_{xx} = 0$$



# Bibliografía

- [1] Cournot, A. (1838). *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*.
- [2] Friedman, J. W. (1983). *Oligopoly Theory*. Cambridge University Press.
- [3] Tirole, J. (1988). *The Theory of Industrial Organization*. MIT Press.
- [4] Myerson, R. B. (1997). *Game Theory: Analysis of Conflict*. Harvard University Press.
- [5] Hintikka, J. (1973). *Logic, Language-Games and Information: Kantian Themes in the Philosophy of Logic*. Oxford University Press.
- [6] Smith, J. M. (1982). *Evolution and the Theory of Games*. Cambridge University Press.
- [7] Cournot, A. A. (1838). *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses*.
- [8] Friedman, J. W. (1977). *Oligopoly and the Theory of Games*. North-Holland.
- [9] Cantrell, R. S., & Cosner, C. (2003). *Spatial Ecology via Reaction-Diffusion Equations*. Wiley Series in Mathematical and Computational Biology.
- [10] Nash, J. F. (1950). *Equilibrium points in n-person games*. Proceedings of the National Academy of Sciences, 36(1), 48-49.
- [11] Myerson, R. B. (1997). *Game Theory: Analysis of Conflict*. Harvard University Press.
- [12] Mas-Colell, A., Whinston, M. D., & Green, J. R. (1995). *Microeconomic Theory*. Oxford University Press.
- [13] Strauss, W. A. (2007). *Partial Differential Equations: An Introduction*. Wiley.
- [14] Incropera, F. P., DeWitt, D. P., Bergman, T. L., & Lavine, A. S. (2007). *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. Wiley.
- [15] Morton, K. W., & Mayers, D. F. (2005). *Numerical Solution of Partial Differential Equations: An Introduction*. Cambridge University Press.
- [16] Özişik, M. N. (1993). *Heat Conduction*. Wiley-Interscience.
- [17] Farlow, S. J. (1993). *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. Dover Publications.
- [18] Bracewell, R. N. (2000). *The Fourier Transform & Its Applications*. 3rd Edition, McGraw-Hill.



### CONSTANCIA DE PRESENTACION DE EXAMEN DE GRADO

La Universidad Autónoma Metropolitana extiende la presente CONSTANCIA DE PRESENTACION DE EXAMEN DE GRADO de MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS APLICADAS E INDUSTRIALES) del alumno TIRCIS SALAS TORRES, matrícula 2213801286, quien cumplió con los 147 créditos correspondientes a las unidades de enseñanza aprendizaje del plan de estudio. Con fecha diecisiete de abril del 2024 presentó la DEFENSA de su EXAMEN DE GRADO cuya denominación es:

Un modelo de reacción-difusión para el análisis de un monopolio con el juego de Cournot.

Cabe mencionar que la aprobación tiene un valor de 60 créditos y el programa consta de 207 créditos.

El jurado del examen ha tenido a bien otorgarle la calificación de:

Aprobar

#### JURADO

Presidente

J. Raúl Montes de Oca Mf.

DR. JOSE RAUL MONTES DE OCA MACHORRO

Secretario

DR. VICTOR HUGO VAZQUEZ GUEVARA

DR. VICTOR HUGO VAZQUEZ GUEVARA

Vocal

DR. JULIO CESAR GARCIA CORTE

DR. JULIO CESAR GARCIA CORTE