UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA – IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

CONEXIONES DE GALOIS BICERRADAS Y SU APLICACIÓN A LAS TEORIAS DE TORSION

Tesis que presenta
Erwin Rommel Cerda León
Para obtener el grado de
Doctor en Ciencias (Matemáticas)

Asesor:	Dr. Rogelio Fernández-Alonso González
Jurado Calificador:	
Presidente:	Dr. José Ríos Montes
Secretario:	Dr. María José Arroyo Paniagua
Vocal:	Dr. Carlos José Enrique Signoret Poillon
Vocal:	Dr. Hugo Rincón Mejía
Vocal:	Dr. Rogelio Fernández-Alonso González

Ciudad de México, Octubre 2016

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Iztapalapa

Fecha : 06/10/2016
Página : 1/1

CONSTANCIA DE PRESENTACION DE EXAMEN DE GRADO

La Universidad Autónoma Metropolitana extiende la presente CONSTANCIA DE PRESENTACION DE DISERTACIÓN PÚBLICA de DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMATICAS) del alumno ERWIN ROMMEL CERDA LEON, matrícula 210180773, quien cumplió con los 339 créditos correspondientes a las unidades de enseñanza aprendizaje del plan de estudio. Con fecha siete de octubre del 2016 presentó la DEFENSA de su DISERTACIÓN PÚBLICA cuya denominación es:

CONEXIONES DE GALOIS BICERRADAS Y SU APLICACIÓN A LAS TEORIAS DE TORSIÓN

Cabe mencionar que la aprobación tiene un valor de 180 créditos y el programa consta de 492 créditos.

El jurado del examen ha tenido a bien otorgarle la calificación de:

APROBAR

JURADO

Presidente

José Ríos M.

DR. JOSE RIOS MONTES

Secretaria

DRA. MARIA JOSE ARROYO PANIAGUA

Vocal

DR. CARLOS JOSE ENRIQUE SIGNORET POILLON

Vocal

R. Fernández G.

DR. ROGELIO FERNANDEZ ALONSO GONZALEZ

Vocal

Hugo A. Rincón M.

DR. HUGO ALBERTO RINCON MEJIA

Agradecimientos:

A mi padres y mis hermanos que siempre han apoyado.

Al Dr. Rogelio Fernández-Alonso Fernández, por sus enseñanzas y la dirección de este trabajo.

A mis sinodales, por tomarse el tiempo de revisar mi trabajo y orientarme con sus comentarios para mejorarlo.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por el apoyo otorgado.

A la Universidad Auntónoma Metropolitana unidad Iztapalapa, por la oportunidad.

Índice general

Resumen

En este trabajo extendemos el concepto de teorías de torsión sobre la categoría R-Mod, las cuales se describen usando la relación $\mathcal{H}$, definida como $\mathrm{Hom}_R(M, N) = 0$. Para cada relación bicerrada $\mathbf{R}$ con respecto a $\mathcal{H}$ definimos a el conglomerado de todas las $\mathbf{R}$-teorías de torsión. Introducimos los conceptos de funtor casi continuo, casi cocontinuo y bifuntor casi continuo, y demostramos que cada bifuntor casi continuo induce una relación bicerrada con respecto a $\mathcal{H}$. Estudiamos las relaciones bicerradas inducidas por pares adjuntos sobre R-Mod, los cuales se describen por un R-R-bimódulo. En particular, estudiamos relaciones bicerradas inducidas por los R-R-bimódulos R/I, y especialmente cuando R es un anillo semisimple artiniano. En este caso demostramos que el conglomerado de todas las relaciones bicerradas forman una retícula booleana de cardinalidad 2^{n^2} y el conglomerado de todas las relaciones bicerradas inducidas por los R-R-bimódulos forman una retícula booleana de cardinalidad 2^n.

Introducción

En este trabajo extendemos el concepto de teorías de torsión sobre la categoría de R-módulos a **R**-teorías de torsión. Esta extensión relaciona tres conceptos; relaciones bicerradas, teorías de torsión y bifuntores casi continuos. Las teorías de torsión han mostrado ser útiles en el estudio de módulos y anillos, ya que desde su nacimiento están conectadas con el estudio de los anillos de cocientes y desde su introducción por Dickson en [10] para categorías abelianas, se han hecho muchas generalizaciones de este concepto; por ejemplo, Bican, *et al* (ver [5]) y por Raggi, *et al* (ver [29]), Barr en [4], Cassidy, *et al* en [8]. Algunas de ellas consideradas como una conexión de Galois inducida por la relación $\mathcal{H}$, la cual está definida como $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) = 0$ para objetos de la categoría $\mathcal{A}$.

Partimos del hecho de que las teorías de torsión inducen una conexión de Galois antítona sobre $\wp(R\text{-Mod})$ (el conglomerado de todas las clases de R-módulos) determinada por el anti-isomorfismo que existe entre el conglomerado de las clases de torsión y el conglomerado de las clases libres de torsión. Principalmente usamos el hecho de que todas las conexiones de Galois sobre $\wp(R\text{-Mod})$ pueden verse de forma sencilla como relaciones sobre R-Mod, en particular la que define a las teorías de torsión y a las teorías de torsión hereditarias. Partimos del Teorema de Domenach-Leclerc [11] que generaliza esta situación, para lo cual se introduce el concepto de relación bicerrada. Así, nuestro objetivo es estudiar relaciones bicerradas con respecto a $\mathcal{H}$ y de esta manera poder extender el concepto de teorías de torsión; esto nos lleva a introducir los conceptos de funtor casi continuo, funtor casi cocontinuo y bifuntor casi continuo.

En el capítulo 1 empezamos hablando sobre fundamentación, como el sistema de los tres niveles o tres capas; conjunto, clase y conglomerado. El último concepto fué creado para lidiar con colecciones de clases, puesto que vamos a usar colecciones de clases como la colección de todas las clases de R-módulos, la colección de todas las clase de torsión, la colección de todas las clases libres de torsión y la colección de todos los prerradicales. Damos los preliminares para conglomerados, como definiciones y propiedades de las conexiones de Galois, el Teorema de Polaridades, definimos las teorías de torsión y las teorías de torsión hereditarias, definimos los prerradicales, operaciones entre prerradicales, propiedades, con las operaciones $\wedge$ y $\vee$ sobre el conglomerado de todos los prerradicales sobre un anillo R se tiene que es una gran retícula completa, damos correspondencias entre prerradicales y clases de módulos, propiedades de funtores exactos y pares adjuntos.

En el capítulo 2 presentamos el Teorema de Domenach-Leclerc que es una generalización del Teorema de Polaridades, demostramos que podemos ver a las Teorías de torsión como una conexión de Galois sobre $\wp(R\text{-Mod})$ para lo cual definimos la relación $\mathcal{H}$ sobre R-Mod definida por $\mathrm{Hom}_R(M, N) = 0$. Esta relación nos va a definir a las familias de Moore con las que vamos a trabajar a lo largo de esta investigación. Definimos un preorden $\preceq$ sobre

$Gal(A, B)$ con el cual obtenemos el concepto de *conexión de Galois bicerrada*, una aplicación del Teorema de Domenach-Leclerc y una generalización del mismo. Con este preorden definimos al conglomerado de todas las relaciones bicerradas con respecto a $\mathcal{H}$ y el conglomerado de todas las conexiones de Galois bicerradas con respecto a $(f)_{\mathcal{H}}$. Definimos las $\mathbf{R}$-teorías de torsión para cada relación bicerrada $\mathbf{R}$ con respecto a $\mathcal{H}$ con lo que se generaliza el concepto de teorías de torsión. Usando las correspondencias entre prerradicales y clases de R-módulos damos un isomorfismo entre las relaciones bicerradas con respecto a $\mathcal{H}$ y las conexiones de Galois isótonas sobre el conglomerado de todos los radicales idempotentes; este isomorfismo nos ayuda a describir las conexiones de Galois entre los conglomerados $\mathcal{T}$-$tors$ y $\mathcal{L}$-$tors$ inducidas por pares adjuntos.

En el capítulo 3 estudiamos relaciones bicerradas inducidas por bifuntores. Para este propósito introducimos los conceptos de bifuntor casi continuo, funtor covariante casi continuo, funtor covariante casi cocontinuo, funtor contravariante casi continuo y funtor contravariante casi cocontinuo, además estudiamos algunas propiedades de estos funtores. Estudiamos las primeras relaciones bicerradas con respecto a $\mathcal{H}$ inducidas por los bifuntores casi continuos $\mathrm{Hom}_R(F(\_), \_)$ y $\mathrm{Hom}_R(\_, G(\_))$ cuando F es un funtor covariante casi cocontinuo, G es un funtor covariante casi continuo y el caso particular cuando $\langle F, G\rangle$ es un par adjunto. En este caso usaremos los Teoremas de Watts-Eilenberg. Describimos las $\mathbf{R}$-teorías de torsión en estos casos. Además tomamos como ejemplo al par adjunto $\langle I \otimes_R \_, \mathrm{Hom}_R(I, \_)\rangle$, con I un ideal bilateral de R.

En el capítulo 4 estudiamos a las relaciones bicerradas inducidas por bifuntores continuos, pues tomamos al R-bimódulo R/I y determinamos los cerrados de la conexión de Galois que induce. En este caso usamos prerradicales para describir al par adjunto $\langle R/I \otimes_R \_, \mathrm{Hom}_R(R/I, \_)\rangle$, dado que existen los isomorfismos naturales $R/I \otimes_R \_ \cong (\alpha_I^R)^*$ y $\mathrm{Hom}_R(R/I, \_) \cong t(\alpha_I^R)$. Esto con el propósito de tener una mejor descripción de estas conexiones de Galois y una mejor descripción de estas relaciones bicerradas. Tomamos como caso particular a los ideales idempotentes y después tomamos como ejemplo a un anillo semisimple artiniano, para el cual demostramos que si $|R\text{-simp}| = n$ entonces $[\mathcal{H}]_{\preceq}$ es una retícula Boolenana con 2^{n^2} elementos (o equivalentemente $|Gal(\mathcal{T}\text{-}tors, \mathcal{L}\text{-}tors)| = 2^{n^2}$) y que las relaciones bicerradas inducidas por todos los pares adjuntos forman una retícula Booleana en $[\mathcal{H}]_{\preceq}$ con 2^n elementos.

En el capítulo 5 planteamos preguntas, conjeturas y temas a investigar acerca de las relaciones bicerradas. Damos otro tipos de relaciones como la inducida por el bifuntor $\mathrm{Ext}^1_R(\_, \_)$ el cual define las Teorías de cotorsión, también tenemos el ejemplo del bifuntor $\mathrm{Tor}^1_R(\_, \_)$, estos casos pueden ser estudiados en un futuro.

En el Apéndice A damos la definición de categorías abelianas y algunas de sus propiedades, puesto que en ellas surgen de forma natural los conceptos de sucesiones exactas, sucesiones exactas cortas, funtores derivados entre otros. Algunos ejemplos de teoremas importantes en el estudio de categorías abelianas son el lema de los cinco, lema de los cinco corto y el lema de la serpiente entre otros.

En el Apéndice B damos las demostraciones de los Teoremas de Watts-Eilenberg, que a grandes rasgos dicen:

1. Un funtor entre categorías de módulos es un adjunto derecho si y sólo si preserva límites.

2. Un funtor entre categorías de módulos es un adjunto izquierdo si y sólo si preserva colímites.

3. En el par adjunto $\langle F, G\rangle$, F preserva colímites y G preserva límites.

4. Para cada par adjunto $\langle F, G\rangle$, existe $L \in R$-BiMod (única salvo ismorfismo) tal que $F \cong L \otimes_R \_$ y $G \cong \mathrm{Hom}_R(L, \_)$.

En el Apéndice C damos algunas fundamentaciones como la de los tres niveles o tres capas (conjunto, clase y conglomerado) para justificar el uso de colecciones de clases como la clase potencia de R-Mod, la colección de todas las clases de torsión (libres de torsión), la colección de todos los prerradicales sobre R, etc., las cuales no puede ser consideradas, según los axiomas de clases de Neumann-Bernays-Gödel, como clases. Otra forma de justificar estas colecciones de clases es con los Universos de Grothendieck, que tienen por objeto proporcionar un universo en el que todas las matemáticas se pueden realizar.

En el Apéndice D damos conexiones de Galois sobre $\wp(\mathbb{R})$, pues las relaciones de $\mathbb{R}^2$ son fáciles de visualizar y nos pueden ayudar a entender mejor las polaridades. Tomamos como ejemplo de una relación al disco unitario con centro en el origen y calculamos los cerrados de su conexión de Galois correspondiente. Este ejemplo es interesante pues encontramos todas las relaciones de $\mathbb{R}^2$ que tienen los mismos cerrados que el disco unitario y también encontramos todas las relaciones bicerradas con respecto a esta relación. Damos también como ejemplo la relación $A \times B$ con $A, B \subseteq \mathbb{R}$, este ejemplo es sencillo para describir y es útil.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo introducimos los conceptos de grandes copos, grandes retículas, operadores cerradura y sus propiedades, conexiones de Galois y sus propiedades, damos el Teorema de Polaridades que es muy importante en este trabajo, prerradicales y clases de R-módulos, como clases de torsión y clases libres de torsión, teorías de torsión y algunas propiedades de los pares adjuntos. Daremos sólo las demostraciones que consideramos necesarias para el desarrollo de este trabajo. Los conceptos de anillo, módulo y categorías pueden consultarse en [1], [2] y [24].

1.1. Fundamentación y estructuras ordenadas.

Antes de empezar, discutiremos algunos aspectos fundamentales. En teoría de categorías nos encontramos con colecciones extremadamente grandes de objetos tales como las colecciones de *todos los conjuntos*, *todos los espacios vectoriales*, *todos los grupos*, etc. Sabemos por los axiomas de la teoría de conjuntos que estas grandes colecciones no pueden ser consideradas como conjuntos. Por ejemplo, si $\mathcal{U}$ fuera el conjunto de todos los conjuntos, entonces el subconjunto $A = \{x \in \mathcal{U} \mid x \notin x\}$ de $\mathcal{U}$ tendría la propiedad $A \in A$ si y sólo si $A \notin A$ (paradoja de Russell). Luego, el concepto de "clase" ha sido creado para hacer frente a "grandes colecciones de conjuntos". Las limitaciones de la teoría de conjuntos y la teoría de clases se hacen evidentes cuando tratamos de realizar ciertas construcciones con categorías, por ejemplo, cuando se forman extensiones de categorías o cuando se forman categorías que tienen categorías o funtores como objetos o cuando nos encontramos con colecciones de clases, como la colección de todas las clases de R-módulos, la colección de todos los prerradicales sobre un anillo R, etc. Cada miembro de una clase debe ser un conjunto y $\mathcal{U}$ no es un conjunto, así que no podemos formar la clase $\{\mathcal{U}\}$ cuyo único miembro es una clase, mucho menos formar una clase cuyos miembros son subclases de $\mathcal{U}$ o todas las asignaciones de $\mathcal{U}$ a $\mathcal{U}$. Tampoco las colecciones de clases pueden ser consideradas como clases; así, el concepto de *Conglomerado* ha sido creado para hacer frente a estas "colecciones de clases".

Los *Conglomerados* son cerrados bajo las construcciones usuales de la teoría de conjuntos, es decir, son cerrados bajo uniones e intersecciones de conglomerados, producto cartesiano de conglomerados, etc. También dados dos conglomerados, se puede considerar el conglomerado de todas las asignaciones entre ellos (ver Apéndice C).

La teoría de axiomática de clases de Von Neumann-Bernays-Gödel (N-B-G) y la teoría axiomática de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (Z-F) coinciden sobre conjuntos, es decir, todo teorema de la teoría Z-F es un teorema en la teoría N-B-G y recíprocamente todo teorema de la teoría N-B-G donde intervengan únicamente conjuntos es un teorema de la teoría Z-F. Con los axioma de los conglomerados sucede lo mismo, si los restringimos a clases coinciden con los axiomas de clases N-G-B. Los detalles de estos tres conceptos; conjunto, clase y conglomerado vienen en el apéndice C.

Notación 1.1. *Para cada clase $\mathcal{A}$, vamos a denotar con $\wp(\mathcal{A})$ al conglomerado de todas las subclases de $\mathcal{A}$, es decir,*

$$\mathscr{C} \in \wp(\mathcal{A}) \quad \textit{si y sólo si} \quad \forall\, M \in \mathscr{C},\;\; M \in \mathcal{A}.$$

Además $\wp(\mathcal{A})$ tiene el orden parcial de la contención de clases.

A continuación damos algunas definiciones relativas a conglomerados, las cuales tienen sentido si nos restringimos a conjuntos y clases; definiremos grandes copos, grandes retículas, operadores cerradura y propiedades. Para más información acerca de teoría de retículas consultar [19].

Definición 1.2. *Una relación "$\leq$" sobre un conglomerado A es un* ***orden parcial*** *si:*

1. ***Reflexiva****:* $\forall\, a \in A,\; a \leq a$.
2. ***Anti-simétrica****:* $\forall\, a, b \in A,\; [(a \leq b \text{ y } b \leq a) \Rightarrow a = b]$.
3. ***Transitiva****:* $\forall\, a, b, c \in A,\; [(a \leq b \text{ y } b \leq c) \Rightarrow a \leq c]$.

En tal caso, se llama a la pareja $\langle A, \leq \rangle$ un ***conglomerado parcialmente ordenado (gran copo)****.*

En la definción anterior si A es un conjunto, entonces $\langle A, \leq \rangle$ es un conjunto parcialmente ordenado (copo). Si A es una clase, entonces $\langle A, \leq \rangle$ es una clase parcialmente ordenada (clapo).

Definición 1.3. [19] *Un gran copo $\langle A, \leq \rangle$ es:*

1. *Una $\wedge$-**gran semi-retícula** si para cada par de miembros a, b de A existe el ínfimo de $\{a, b\}$ en A, denotado $a \wedge b$. Y es una $\wedge$-**gran semi-retícula completa** si para cada $\{a_i\}_{i \in X} \subseteq A$ existe el ínfimo en A.*
2. *Una $\vee$-**gran semi-retícula** si para cada par de miembros a, b de A existe el supremo de $\{a, b\}$ en A, denotado $a \vee b$. Y es una $\vee$-**gran semi-retícula completa** si para cada $\{a_i\}_{i \in X} \subseteq A$ existe el supremo en A.*
3. *Una **gran retícula** si es $\wedge$-gran semi-retícula y $\vee$-gran semi-retícula. Y una **gran retícula completa** si es $\wedge$-gran semi-retícula completa y $\vee$-gran semi-retícula completa.*

Observación 1.4. *Si $\langle A, \leq \rangle$ es una $\wedge$-gran semi-retícula completa, entonces es una gran retícula completa, pues a cada familia $\{a_i\}_{i \in X}$ de miembros de A le podemos construir su supremo (artificial), es decir, tomamos la colección $\{b \in A \mid a_i \leq b, \forall i \in X\}$, la cual tiene ínfimo y sirve como supremo de $\{a_i\}_{i \in X}$.*

De igual forma, en la definición anterior, si A es un conjunto, entonces $\langle A, \leq \rangle$ es una retícula o retícula completa según sea el caso.

Definición 1.5. *Sea $\langle A, \leq \rangle$ un conglomerado parcialmente ordenado y sean $a, b \in A$ tales que $a \leq b$, se define el **intervalo** determinado por a y b como*

$$[a, b] := \{c \in A \mid a \leq c \leq b\}.$$

Definición 1.6. *Sean $\langle A, \leq, \vee, \wedge \rangle$ y $\langle B, \preceq, \vee, \wedge \rangle$ dos grandes retículas. Una asignación $f : A \longrightarrow B$ es:*

1. ***Homomorfismo de grandes retículas** si:*

$$\forall a, b \in A,\ [f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) \ \ y \ \ f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)].$$

2. ***Anti-homomorfismo de grandes retículas** si:*

$$\forall a, b \in A,\ [f(a \vee b) = f(a) \wedge f(b) \ \ y \ \ f(a \vee b) = f(a) \wedge f(b)].$$

3. ***Isomorfismo de grandes retículas** si es un homomorfismo de grandes retículas biyectivo.*

4. ***Anti-isomomorfismo de grandes retículas** si es un anti-homomorfismo de grandes retículas biyectivo.*

A continuación damos la definición de operador cerradura y algunas propiedades de los cerrados, pues cada conexión de Galois induce dos operadores cerradura.

Definición 1.7. *Sea $\langle A, \leq \rangle$ un gran copo, una asignación $\varphi : A \longrightarrow A$ se llama **operador cerradura** si satisface:*

1. *Para toda $a \in A$, se tiene que $a \leq \varphi(a)$ (es extensiva o inflatoria).*

2. *Para toda $a, b \in A$ tales que $a \leq b$ se tiene que $\varphi(a) \leq \varphi(b)$ (preserva el orden).*

3. *Para toda $a \in A$, se tiene que $\varphi(\varphi(a)) = \varphi(a)$ (es idempotente).*

Los miembros del conglomerado $Im(\varphi)$ se llaman cerrados.

Observemos que si $\varphi : A \longrightarrow A$ es un operador cerradura y $a \in Im(\varphi)$ entonces $\varphi(a) = a$.

Proposición 1.8. *Sean $\langle A, \leq, \vee, \wedge \rangle$ una gran copo y $\varphi : A \longrightarrow A$ un operador cerradura, entonces $Im(\varphi)$ es una gran retícula completa.*

Demostración. Sea $\{a_i\}_{i \in X} \subseteq Im(\varphi)$, se sigue que $\bigwedge_{i \in X} a_i \leq a_i$ para toda $i \in X$, esto implica que $\varphi(\bigwedge_{i \in X} a_i) \leq \varphi(a_i) = a_i$, por lo tanto $\varphi(\bigwedge_{i \in X} a_i) \leq \bigwedge_{i \in X} a_i$. Se concluye que $\varphi(\bigwedge_{i \in X} a_i) = \bigwedge_{i \in X} a_i$. Por lo tanto $\bigwedge_{i \in X} a_i \in Im(\varphi)$, es decir, es una gran $\wedge$-semiretícula completa. Concluimos por la Observación 1.4 que $Im(\varphi)$ es una gran retícula completa. $\square$

Observemos que si A es una gran retícula y $\varphi : A \longrightarrow A$ es un operador cerradura, entonces el conglomerado $Im(\varphi)$ en general no es una gran subretícula de A, pues el supremo de cada subconglomerado de $Im(\varphi)$ puede ser diferente al supremo del mismo subconglomerado pero en A.

Definición 1.9. *Sea $\langle A, \leq \rangle$ un gran copo. Un* ***sistema de cerrados*** *de A es un subconglomerado Φ de A tal que para todo $a \in A$ el subconglomerado $\{b \in \Phi \mid a \leq b\}$ tiene miembro menor en Φ. Los miembros de Φ se llaman cerrados.*

Observación 1.10. *Si Φ es un sistema de cerrados de un gran copo A, entonces Φ es imagen del operador cerradura $\varphi : A \longrightarrow A$ definido como $\varphi(a) = min\{b \in \Phi \mid a \leq b\}$ (φ es creciente, es idempotente y preserva el orden). Por lo tanto Φ es cerrado bajo ínfimos arbitrarios (ver Proposición 1.8).*

Proposición 1.11. ([13], [19]) *Sean $\langle A, \leq \rangle$ un gran copo y $\varphi : A \longrightarrow A$ un operador cerradura, entonces $\varphi(A)$ es un sistema de cerrados.* $\square$

1.2. Conexiones de Galois

Las conexiones de Galois aparecen en todas las partes de la Matemática. Por ejemplo, en Teoría de Galois, la correspondencia que existe entre subgrupos y subcampos es una conexión de Galois antítona; en Geometría algebraica, la relación entre conjuntos de polinomios y sus conjuntos de ceros es una conexión antítona de Galois; en cualquier Álgebra de Heyting se puede encontrar una conexión de Galois; en Teoría de anillos, las teorías de torsión inducen una conexión de Galois antítona sobre $\wp(R\text{-Mod})$, etc. Una conexión de Galois es una situación más débil que un anti-isomorfismo (isomorfismo) entre dos grandes copos, pero induce un anti-isomorfismo (isomorfismo) entre grandes subcopos. Por consiguiente, una conexión de Galois generaliza la correspondencia que existe entre subgrupos y subcampos estudiada en la teoría de Galois. Las primeras referencias sobre conexiones de Galois son Birkhoff en [6], Everett en [14] y Ore en [26].

El punto de partida de este trabajo es el anti-isomorfismo que existe entre el conglomerado de las clases de torsión y el conglomerado de las clases libres de torsión inducido por las asignaciones R y L sobre $\wp(R\text{-Mod})$ (que define Dickson en [10] sección 3), las cuales inducen una conexión de Galois sobre $\wp(R\text{-Mod})$. En este contexto el conglomerado de todas las teorías de torsión son parejas de cerrados de una conexión de Galois específica sobre $\wp(R\text{-Mod})$, este concepto lo generalizaremos a $\mathbf{R}$-teorías de torsión para alguna relación $\mathbf{R} \in \wp((R\text{-Mod})^2)$ bicerrada con respecto a $\mathcal{H} \in \wp((R\text{-Mod})^2)$, la cual definiremos más adelante.

En este capítulo damos definiciones y propiedades de las conexiones de Galois que vamos a necesitar. Las definiciones presentadas en este capítulo las hacemos para conglomerados parcialmente ordenados, estas definiciones son congruentes con conjuntos y clases, ya que cada clase es un conglomerado y cada conjunto es una clase (ver Apéndice C).

Definición 1.12. [13], [28] *Una **conexión de Galois** (antítona)*[1] *entre dos grandes copos $\langle A, \leq \rangle$ y $\langle B, \preceq \rangle$ es un par $\langle f_+, f^+ \rangle$ de asignaciones antítonas (invierten el orden) $f_+ : A \longrightarrow B$ y $f^+ : B \longrightarrow A$ tales que*

$$a \leq f^+ f_+(a), \ \forall\, a \in A \quad y \quad b \preceq f_+ f^+(b), \ \forall\, b \in B$$

es decir, $f^+ f_+$ y $f^+ f_+$ son asignaciones inflatorias. Una definición equivalente es

$$a \leq f^+(b) \text{ si y sólo si } b \preceq f_+(a) \text{ para todo } a \in A \text{ y } b \in B$$

*$Gal(A, B)$ denota el conglomerado de todas las conexiones de Galois entre A y B. Llamamos a f_+ la **parte residuada** y a f^+ la **parte residual** de $f := \langle f_+, f^+ \rangle$.*

Si no se menciona otra cosa, todas las conexiones de Galois mencionadas serán antítonas. En la siguiente proposición damos algunas propiedades importantes de las conexiones de Galois. De aquí en adelante A y B van denotar grandes copos o grandes retículas según sea el caso.

Proposición 1.13. [13] *Dada $f \in Gal(A, B)$ tenemos:*

1. *$f^+ f_+ : A \longrightarrow A$ y $f_+ f^+ : B \longrightarrow B$ son operadores cerradura.*
2. *$f^+ f_+ f^+ = f^+$.*
3. *$f_+ f^+ f_+ = f_+$.*
4. *$Im(f_+)$ y $Im(f^+)$ son anti-isomorfos como grandes copos.* □

Observación 1.14. *De la proposición anterior tenemos que los puntos fijos del operador cerradura $f^+ f_+$ son los miembros del conglomerado $Im(f^+)$, es decir, $Im(f^+) = Im(f^+ f_+)$. De igual manera, los puntos fijos del operador cerradura $Im(f_+ f^+)$ son los miembros del conglomerado $Im(f_+)$, por lo tanto concluimos que $Im(f^+ f_+)$ y $Im(f_+ f^+)$ son anti-isomorfos como grandes copos.*

En la siguiente proposición damos condiciones suficientes para que una función antítona entre dos grandes copos A y B sea la parte residuada o la parte residual de una conexión de Galois entre A y B.

Proposición 1.15. *Sean A y B grandes retículas completas.*

1. *Si $f : A \longrightarrow B$ es una asignación tal que $f(\bigvee S) = \bigwedge f(S)$ para toda $S \subseteq A$, entonces f es la parte residuada de una conexión de Galois entre A y B.*
2. *Si $g : B \longrightarrow A$ es una asignación tal que $g(\bigvee T) = \bigwedge g(T)$ para toda $T \subseteq B$, entonces g es la parte residual de una conexión de Galois entre A y B.*

---

[1]También existen las conexiones de Galois *isótonas*, donde $f_+ : A \longrightarrow B$ y $f^+ : B \longrightarrow A$ son asignaciones que preservan el orden, $f^+ f_+ : A \longrightarrow A$ es un operador cerradura, $f_+ f^+ : B \longrightarrow B$ es un operador interior, además $Im(f^+)$ y $Im(f_+)$ son isomorfos como grandes copos. Denotaremos con $Gal_i(A, B)$ al conglomerado de todas las conexiones de Galois isótonas entre A y B.

Demostración.

1. Primero demostraremos que f es una asignación antítona. Sean $a, a' \in A$ tales que $a \leq a'$, por hipótesis $f(a') = f(a) \wedge f(a') = f(a \vee a') \leq f(a)$. Por consiguiente f es una asignación antítona.

   Ahora vamos a definir una asignación $g : B \longrightarrow A$ como $g(b) = \bigvee\{a \in A \mid f(a) \geq b\}$. Veamos que g es una asignación antítona. Sean $b_1, b_2 \in B$ tales que $b_1 \leq b_2$. Notemos que si $a' \in \{a \in A \mid f(a) \geq b_2\}$, entonces $a' \in \{a \in A \mid f(a) \geq b_1\}$, esto implica que $\{a \in A \mid f(a) \geq b_2\} \subseteq \{a \in A \mid f(a) \geq b_1\}$. Por lo tanto $g(b_2) = \bigvee\{a \in A \mid f(a) \geq b_2\} \leq \bigvee\{a \in A \mid f(a) \geq b_1\} = g(b_1)$, se sigue que g es una asignación antítona.

   Demostraremos que $gf : A \longrightarrow A$ es una asignación inflatoria. Sea $a \in A$, evaluando la función en a tenemos $g(f(a)) = \bigvee\{a' \in A \mid f(a') \geq f(a)\} \geq a$, pues en particular $a \in \{a' \in A \mid f(a') \geq f(a)\}$. Por lo tanto gf es una asignación inflatoria.

   Ahora demostraremos que $fg : B \longrightarrow B$ es una asignación inflatoria. Sea $b \in B$, evaluando la asignación fg en b tenemos (por hipótesis y por definición de g) que

   $$f(g(b)) = f(\bigvee\{a \in A \mid f(a) \geq b\}) = \bigwedge f(\{a \in A \mid f(a) \geq b\})$$

   luego para toda $a' \in \{a \in A \mid f(a) \geq b\}$ tenemos $f(a') \geq b$, por lo tanto $f(g(b)) = \bigwedge f(\{a \in A \mid f(a) \geq b\} \geq b$, con esto concluimos que fg es una asignación inflatoria.

   Por lo tanto $\langle f, g\rangle \in Gal(A, B)$ y f es la parte residuada de esta conexión de Galois.

2. La demostración es completamente análoga al caso 1.

$\square$

Proposición 1.16. *Sean A y B dos grandes retículas completas. Entonces $\langle f_+, f^+\rangle \in Gal(A, B)$ si y sólo si $f_+(\bigvee S) = \bigwedge_{s \in S} f_+(s)$ para toda $S \subseteq A$ y $f^+(\bigvee T) = \bigwedge_{t \in T} f^+(t)$ para toda $T \subseteq B$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sean $\langle f_+, f^+\rangle \in Gal(A, B)$ y $S \subseteq A$. Para toda $s \in S$ tenemos que $s \leq \bigvee S$ lo que implica que $f_+(\bigvee S) \leq f_+(s)$ pues f_+ es una asignación antítona. Por lo tanto $f_+(\bigvee S) \leq \bigwedge_{s \in S} f_+(s)$. Por otro lado para toda $s' \in S$ tenemos que $\bigwedge_{s \in S} f_+(s) \leq f_+(s')$, esto implica que $\bigwedge_{s \in S} f_+(s) \leq f_+(\bigvee S)$ (pues A es una retícula completa). Por lo tanto $f_+(\bigvee S) = \bigwedge_{s \in S} f_+(s)$.

De igual forma se demuestra para f^+.

$\Leftarrow$) Por la Proposición 1.15 para f_+ existe una asignación antítona $g : B \longrightarrow A$ tal que $\langle f_+, g\rangle \in Gal(A, B)$. Veamos que $g = f^+$.

Sea $b \in B$ y consideremos el conjunto $A' = \{a \in A \mid a \leq f^+(b)\}$. Afirmamos que $\bigvee A' = f_+(b)$, pues:

$$a \leq \bigvee A' = f_+(b) \text{ si y sólo si } b \leq f_+ f^+(b) = f_+(\bigvee A') \leq f_+(a)$$

Concluimos usando la definición de g en la Proposición 1.15 que $g = f_+$. $\square$

De las Proposiciones 1.15 y 1.16 tenemos que si A y B son dos grandes retículas completas, entonces la parte residuada y la parte residual de cada conexión de Galois entre A y B están determinadas de forma única (una por la otra), esto lo mencionamos en el siguiente corolario.

Corolario 1.17. [28] *Sean A y B grandes retículas completas. Si $f \in Gal(A,B)$, entonces f_+ y f^+ están determinadas de forma única (una por la otra) como*

$$f_+(a) = \bigvee\{b \in B \mid f^+(b) \geq a\} \quad y \quad f^+(b) = \bigvee\{a \in A \mid f_+(a) \geq b\}^2.$$

Observación 1.18. *Para cada $f \in Gal(A,B)$ tenemos que $f_+(0) = 1$ y $f^+(0) = 1$, si además A y B son grandes retículas completas entonces $f_+(1) = \bigwedge f_+(A)$ y $f^+(1) = \bigwedge f^+(B)$.*

De la Observación 1.10 y la Proposición 1.11 tenemos que existe una correspondencia biyectiva entre los sistemas de cerrados de un gran copo y los operadores entre este gran copo. En la siguiente definición nombramos los conglomerados sobre las que vamos a estudiar las conexiones de Galois y las relaciones bicerradas que más adelante definiremos.

Definición 1.19. *Sea $f \in Gal(A,B)$. Definimos f-cerr $:= Im(f^+)$ y cerr-$f := Im(f_+)$.*

Observación 1.20. *Para toda $f \in Gal(A,B)$ tenemos que f-cerr $\subseteq A$ y cerr-$f \subseteq B$ son sistemas de cerrados, donde $f^+f_+ : A \longrightarrow A$ y $f_+f^+ : B \longrightarrow B$ son los operadores cerradura correspondientes pues como resultado de la Proposición 1.13 tenemos que f-cerr $= Im(f^+f_+)$ y cerr-$f = Im(f_+f^+)$.*

Definición 1.21. *En $Gal(A,B)$*[3] *describimos un orden parcial "$\leq$" que llamaremos* ***orden puntual*** *como:*

$$f \leq g \text{ si y sólo si } f_+(a) \leq g_+(a) \text{ y } f^+(b) \leq g^+(b) \text{ para todo } a \in A \text{ y } b \in B.$$

Si A y B son grandes retículas, el ínfimo de $f, g \in Gal(A,B)$ se describe como:

$$f \wedge g := \langle f_+ \wedge g_+, f^+ \wedge g^+ \rangle$$

donde $(f_+ \wedge g_+)(a) = f_+(a) \wedge g_+(a),\ a \in A$ y $(f^+ \wedge g^+)(b) = f^+(b) \wedge g^+(b),\ b \in B$.

Proposición 1.22. *Sean A, B grandes retículas y $f, g \in Gal(A,B)$, entonces $f \wedge g \in Gal(A,B)$.*

Demostración. Para f tenemos que $a \leq f^+(b)$ si y sólo si $b \leq f_+(a)$ para toda $a \in A$ y $b \in B$. También g cumple $a \leq g^+(b)$ si y sólo si $b \leq g_+(a)$ para toda $a \in A$ y $b \in B$, por lo tanto uniendo lo que cumplen f y g tenemos:

[2] En el caso isótono, si A y B son grandes retículas completas, f_+ y f^+ están determinadas de forma única como: $f_+(a) = \bigwedge\{b \in B \mid a \leq f^+(b)\}$ y $f^+(b) = \bigvee\{a \in A \mid f_+(a) \leq b\}$. Además $\langle f_+, f^+\rangle \in Gal_i(A,B)$ si y sólo si $f_+(\bigvee S) = \bigvee f_+(S)$ para todo $S \subseteq A$ y $f^+(\bigwedge T) = \bigwedge f^+(T)$ para todo $T \subseteq B$, en particular $f_+(0) = 0$ y $f^+(1) = 1$ (ver [13] Proposición 3).

[3] En $Gal_i(A,B)$ se define un orden puntual como: $f \leq g$ si y sólo si $f_+(a) \geq g_+(a)$ y $f^+(b) \leq g^+(b)$ para todo $a \in A$ y $b \in B$.

$$a \leq (f^+ \wedge g^+)(b) = f^+(b) \wedge g^+(b) \text{ si y sólo si } b \leq (f_+ \wedge g_+)(a) = f_+(a) \wedge g_+(a)$$

para toda $a \in A$ y $b \in B$. Por lo tanto $f \wedge g \in Gal(A, B)$. □

Para cada $\{f_i\}_{i \in X} \subseteq Gal(A, B)$, el ínfimo se describe de la misma forma

$$\bigwedge_{i \in X} f_i = \langle (\bigwedge_{i \in X} f_i)_+, (\bigwedge_{i \in X} f_i)^+ \rangle$$

Así, si A y B son grandes retículas completas, entonces $\langle Gal(A, B), \leq, \wedge \rangle$ es una gran $\wedge$-semiretícula completa lo que implica (Observación 1.4) que es una gran retícula completa. Esto motiva la siguiente proposición.

Proposición 1.23. [35] *Sean A y B grandes copos.*

1. *Si A y B son grandes retículas completas, entonces $\langle Gal(A, B), \leq \rangle$ (con el orden puntual) es una gran retícula completa.*
2. *Si A y B son grandes retículas distributivas, entonces $\langle Gal(A, B), \leq \rangle$ (con el orden puntual) es una gran retícula distributiva.*
3. *Si A y B son grandes retículas booleanas, entonces $\langle Gal(A, B), \leq \rangle$ (con el orden puntual) es una gran retícula booleana.*
4. *Si A y B son grandes marcos, entonces $\langle Gal(A, B), \leq \rangle$ (con el orden puntual) es un gran marco.*

□

En la siguiente proposición damos condiciones suficientes para que cada par de anti-isomorfismos $g : A' \longrightarrow B'$ y $h : B' \longrightarrow A'$ entre subcoglomerados de los conglomerados parcialmente ordenado A y B respectivamente, se pueda extender a una conexión de Galois entre A y B.

Notación 1.24. *Sean A y B conglomerados y sea $f : A \longrightarrow B$ una asignación. Denotamos con $f|_{A'}$ a la restricción de la asignación f al subconglomerado $A' \subseteq A$.*

Proposición 1.25. *Sean A, B dos grandes copos y $\Phi \subseteq A$, $\Phi' \subseteq B$ sistemas de cerrados. Si Φ y Φ' son anti-isomorfos como grandes copos, entonces para cada par de anti-isomorfismos $g : \Phi \longrightarrow \Phi'$ y $h : \Phi' \longrightarrow \Phi$ existe una única $f \in Gal(A, B)$ tal que f-cerr $= \Phi$, cerr-f $= \Phi'$, $f_+|_\Phi = g$ y $f^+|_{\Phi'} = h$.*

Demostración. Sean A, B dos grandes copos y $\Phi \subseteq A$, $\Phi' \subseteq B$ dos sistemas de cerrados anti-isomorfos. Por la Observación 1.10 tenemos que para cada sistema de cerrados existe un operador cerradura. Sean $\varphi : A \longrightarrow A$ y $\varphi' : B \longrightarrow B$ dos operadores cerradura tales que $\varphi(A) = \Phi$ y $\varphi'(B) = \Phi'$. Sean $g : \Phi \longrightarrow \Phi'$ y $h : \Phi' \longrightarrow \Phi$ los anti-isomorfismos.

Vamos a definir dos asignaciones $f_+ : A \longrightarrow B$ y $f^+ : B \longrightarrow A$ como $f_+(a) = g(\varphi(a))$ y $f^+(b) = h(\varphi'(b))$.

Notemos que f_+ y f^+ invierten el orden pues φ, φ' lo preservan y g, h lo invierten. Falta demostrar que f_+f^+ y f^+f_+ son asignaciones inflatorias.

Para cada $a \in A$ tenemos que $a \leq \varphi(a)$, por lo tanto $f_+(a) \geq f_+(\varphi(a))$ y

$$\varphi(a) = f^+(f_+(a)) \leq f^+(f_+(\varphi(a)))$$

pues $f^+(f_+(a)) = h\varphi'(g(\varphi(a))) = hg(\varphi(a)) = \varphi(a)$. Por lo tanto f^+f_+ es creciente. De forma análoga para f_+f^+.

Se sigue que $f = \langle f_+, f^+\rangle \in Gal(A, B)$ con f-*cerr* $= \Phi$ y *cerr*-$f = \Phi'$. Es claro que $f_+|_\Phi = g$ y $f^+|_{\Phi'} = h$ por la definición de f.

Demostraremos la unicidad: Sea $k \in Gal(A, B)$ tal que k-*cerr* $= \Phi$, *cerr*-$k = \Phi'$, $k_+|_\Phi = g$ y $k^+|_{\Phi'} = h$, luego para toda $a \in A$ se cumple $a \leq \varphi(a)$, se sigue que $a \leq k^+k_+(a) \leq k^+k_+(\varphi(a)) = \varphi(a)$ esto implica que $k^+k_+(a) = \varphi(a)$ y $k_+(a) = k_+k^+k_+(a) = k_+(\varphi(a))$, por lo tanto $k_+(a) = k_+(\varphi(a)) = g(\varphi(a)) = f_+(a)$ y de forma análoga para toda $b \in B$ tenemos que $k^+(b) = f^+(b)$. Por lo tanto $k = f$. □

En este trabajo estamos interesados particularmente en estudiar las conexiones de Galois entre los conglomerados $\wp(A)$ y $\wp(B)$, con A y B dos clases. Recordemos que si A es una clase propia, entonces $\wp(A)$ es un conglomerado.

Definición 1.26. *Sean A y B dos clases. Una* ***polaridad*** *es una conexión de Galois entre los conglomerados $\langle\wp(A), \subseteq\rangle$ y $\langle\wp(B), \subseteq\rangle$.*

Sean A y B dos clases, luego $\wp(A\times B)$ denota al conglomerado de todas las relaciones entre A y B. Las polaridades entre $\wp(A)$ y $\wp(B)$ se pueden ver de manera sencilla como relaciones entre A y B como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 1.27 ([13], Proposición 7)**.** *Sean A y B conglomerados parcialmente ordenados, entonces existe un isomorfismo de orden entre los conglomerados $\langle\wp(A \times B), \subseteq\rangle$ y $\langle Gal(\wp(A), \wp(B)), \leq\rangle$.*[4]

Demostración. Sean $\lambda : Gal(\wp(A), \wp(B)) \longrightarrow \wp(A \times B)$ y $\mu : \wp(A \times B) \longrightarrow Gal(\wp(A), \wp(B))$ asignaciones dadas como

$$\lambda(f) = \{(a, b) \in A \times B \mid b \in f_+(\{a\})\} \tag{1.1}$$

(nótese que esta relación es igual a $\{(a, b) \in A \times B \mid a \in f^+(\{b\})\}$) y

$$\mu(\mathbf{R}) = \langle f_{\mathbf{R}}, f^{\mathbf{R}}\rangle \tag{1.2}$$

donde

$$f_{\mathbf{R}}(U) = \{b \in B \mid (a, b) \in \mathbf{R},\ \forall\ a \in U\},\ \text{para toda } U \in \wp(A),$$

$$f^{\mathbf{R}}(V) = \{a \in A \mid (a, b) \in \mathbf{R}, \forall\ b \in V\},\ \text{para toda } V \in \wp(B).$$

[4]De aquí en adelante a este teorema lo llamaremos: *Teorema de Polaridades.*

Por definición $f_{\mathbf{R}}$ y $f^{\mathbf{R}}$ son antítonas, además $f_{\mathbf{R}}f^{\mathbf{R}}$ y $f^{\mathbf{R}}f_{\mathbf{R}}$ son operadores cerradura. Por lo tanto $\langle f_{\mathbf{R}}, f^{\mathbf{R}}\rangle \in Gal(\wp(A), \wp(B))$.

λ preserva el orden. Sean $f, g \in Gal(\wp(A), \wp(B))$ tales que $f \leq g$, luego para toda $U \in \wp(A)$ se tiene que $f_+(U) \subseteq g_+(U)$. Por lo tanto $(a, b) \in \lambda(f)$ implica que $b \in f_+(\{a\}) \subseteq g_+(\{a\})$, es decir, $(a, b) \in \lambda(g)$, se sigue que $\lambda(f) \subseteq \lambda(g)$.

μ preserva el orden. Sean $\mathbf{R}, \mathbf{S} \in \wp(A \times B)$ tales que $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{S}$ y sea $U \in \wp(A)$, luego tenemos que $b \in f_{\mathbf{R}}(U)$ implica que $(a, b) \in \mathbf{R} \subseteq \mathbf{S}$ para toda $a \in U$, por lo tanto $b \in f_{\mathbf{S}}(U)$. Se sigue que $f_{\mathbf{R}} \leq f_{\mathbf{S}}$, de forma análoga $f^{\mathbf{R}} \leq f^{\mathbf{S}}$. Por lo tanto $\mu(\mathbf{R}) \leq \mu(\mathbf{S})$.

λ y μ son inversas una de la otra.

Sea $f \in Gal(\wp(A), \wp(B))$, luego $\mu(\lambda(f)) = \mu(\{(a, b) \in A \times B \mid b \in f_+(\{a\})\})$.

Sean $\mathbf{R} = \{(a, b) \in A \times B \mid b \in f_+(\{a\})\}$, $U \in \wp(A)$ y $V \in \wp(B)$, luego

$$f_{\mathbf{R}}(U) = \{b \in B \mid (a, b) \in \mathbf{R}, \forall\ a \in U\} = \{b \in B \mid b \in f_+(\{a\}), \forall\ a \in U\} = f_+(U)$$
$$f^{\mathbf{R}}(V) = \{a \in A \mid (a, b) \in \mathbf{R}, \forall\ b \in V\} = \{a \in A \mid a \in f^+(\{b\}), \forall\ b \in V\} = f^+(V)$$

Por lo tanto $\mu(\lambda(f)) = f$.

Sea $\mathbf{R} \in \wp(A \times B)$, luego $\lambda(\mu(\mathbf{R})) = \lambda(\langle f_{\mathbf{R}}, f^{\mathbf{R}}\rangle)$, donde

$$\lambda(\langle f_{\mathbf{R}}, f^{\mathbf{R}}\rangle) = \{(a, b) \in A \times B \mid b \in f_{\mathbf{R}}(\{a\})\} = \{(a, b) \in A \times B \mid (a, b) \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}$$

Por lo tanto $\lambda(\mu(\mathbf{R})) = \lambda(\langle f_{\mathbf{R}}, f^{\mathbf{R}}\rangle) = \mathbf{R}$.

Concluimos que μ y λ son isomorfismos de orden. $\square$

Notación 1.28. *Dada $\mathbf{R} \in \wp(A \times B)$, denotamos a $\mu(\mathbf{R})$ como $(f)_{\mathbf{R}} = \langle f_{\mathbf{R}}, f^{\mathbf{R}}\rangle$.*

Observación 1.29. *Sea $\{\mathbf{R}_i\}_{i\in X}$ una familia de relaciones de $A \times B$. Por el Teorema 1.27 tenemos que a la relación $\bigcap_{i\in X} \mathbf{R}_i$ le corresponde la polaridad $(f)_{\bigcap_{i\in X} \mathbf{R}_i} = \bigwedge_{i\in X} (f)_{\mathbf{R}_i}$ que es el ínfimo de la familia de polaridades $\{(f)_{\mathbf{R}_i}\}_{i\in X} \subseteq Gal(\wp(A), \wp(B))$.*

Hay miembros de $Gal(A, B)$ que generan a todos sus miembros, en el siguiente sentido. Sean A y B dos conglomerados parcialmente ordenados, definimos para cada $a \in A$ y $b \in B$ la asignación $p_{a,b} : A \longrightarrow B$ dada como:

$$p_{a,b}(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x = 0 \\ b & si \quad 0 < x \leq a \\ 0 & si \quad x \not\leq a \end{cases}$$

Proposición 1.30. ([35], Teorema 2.5) *Sean A y B grandes retículas. Entonces para cada $a \in A$ y $b \in B$ tenemos que $\langle p_{a,b}, p_{b,a}\rangle \in Gal(A, B)$. Además para toda $f \in Gal(A, B)$, existen $\{a_i\}_{i\in X} \subseteq A$ y $\{b_j\}_{j\in Y} \subseteq B$ tal que f es supremo de $\{\langle p_{a_i,b_j}, p_{b_j,a_i}\rangle\}_{i\in X, j\in Y} \subseteq Gal(A, B)$.*

Demostración. Sean A y B grandes retículas y sea $f \in Gal(A, B)$.

Afirmamos que $f = \bigvee_{x \in A} \{\langle p_{b,a}, p_{a,b}\rangle \mid a = f^+f_+(x) \ \text{ y } \ b = f_+(x)\}$.

Notemos que si $x \in A$, y si tomamos $a = f^+f_+(x)$ y $b = f_+(x)$, entonces $p_{a,b}(x) = f_+(x) = b$, pues $x \leq f^+f_+(x) = a$. Por otro lado para todo $y \in A$ tal que $y \neq x$ y $y \neq 0$, tenemos que $p_{a,b}(y) \leq p_{a,b}(x)$, pues si $y \not\leq x \leq f^+f_+(x) = a$, entonces $p_{a,b}(y) = 0$ y si $y < x \leq f^+f_+(x) = a$, entonces $p_{a,b}(y) = b = p_{a,b}(x)$. Además si $y \leq x$, entonces $p_{a,b}(x) \leq p_{a',b'}(y)$ donde $a' = f^+f_+(y)$ y $b' = f_+(y)$, pues $b = f_+(x) \leq f_+(y) = b'$. De esta forma $p_{a,b}(y)$ toma su valor máximo cuando $a = f^+f_+(y)$ y $b = f_+(y)$.

Por lo tanto para toda $y \in A$, entonces $\bigvee_{x \in A} \{p_{a,b}(y) \mid a = f^+f_+(x) \ \text{ y } \ b = f_+(x)\} = f_+(y)$. Concluimos que $f_+ = \bigvee_{x \in A} \{p_{a,b} \mid a = f^+f_+(x) \ \text{ y } \ b = f_+(x)\}$.

De forma similar, para $z \in B$ tenemos que $p_{b,a}(z)$ toma su valor máximo cuando $b = f_+f^+(z)$ y $a = f^+(z)$, es decir, cuando $f_+f^+(z) = f_+(x)$ y $f^+(z) = f^+f_+f^+(z) = f_+f^+(x) = a$. Por lo tanto para toda $z \in B$, tenemos que $\bigvee_{x \in A} \{p_{b,a}(z) \mid a = f^+f_+(x) \ \text{ y } \ b = f_+(x)\} = f^+(z)$. Concluimos que $\bigvee_{x \in A} \{p_{b,a} \mid a = f^+f_+(x) \ \text{ y } \ b = f_+(x)\} = f^+$.

Por lo tanto $f = \bigvee_{x \in A} \{\langle p_{b,a}, p_{a,b}\rangle \mid a = f^+f_+(x) \ \text{ y } \ b = f_+(x)\}$. $\square$

La siguiente observación es importante, pues más adelante nos servirá para dar ejemplos de relaciones bicerradas con respecto a $\mathcal{H}$ y contraejemplos para alguna situaciones.

Observación 1.31. *Sean A y B dos conglomerados parcialmente ordenados. De la Proposición 1.30 tenemos para cada $a \in A$ y $b \in B$, $\langle p_{a,b}, p_{b,a}\rangle \in Gal(A, B)$, además $Im(p_{b,a}) = \{0, a, 1\}$ y $Im(p_{a,b}) = \{0, b, 1\}$.*

En el caso de polaridades tenemos para $U \in \wp(A)$ y $V \in \wp(B)$, $\langle p_{U,V}, p_{V,U}\rangle \in Gal(\wp(A), \wp(B))$ donde $p_{U,V} : \wp(A) \longrightarrow \wp(B)$ está definida como

$$p_{U,V}(A') = \begin{cases} B & si \quad A' = \emptyset \\ V & si \quad \emptyset \subset A' \subseteq U \\ \emptyset & si \quad A' \not\subseteq U \end{cases}$$

y $p_{V,U} : \wp(B) \longrightarrow \wp(A)$ está definida de forma similar. Por el Teorema 1.27 a esta polaridad $\langle p_{U,V}, p_{V,U}\rangle$ le corresponde la relación $\mathbf{R} = \{(a, b) \in A \times B \mid b \in p_{U,V}(\{a\})\} = U \times V$.

1.3. Teorías de torsión

En 1964 S. E. Dickson en [10], introduce la axiomática de una teoría de torsión en una categoría abeliana, demostrando que este concepto es equivalente a la noción de radical idempotente en el sentido de Maranda, quien en 1964 en *Injective Structures* (ver [23]) introduce los conceptos de prerradical, radical y radical de torsión (radical exacto izquierdo), demostrando que existe una correspondencia biyectiva entre las Topología de Gabriel del anillo y los radicales de torsión.

Además, establece una correspondencia biyectiva entre las teorías de torsión hereditarias y los radicales exactos izquierdos.

Las teorías de torsión han mostrado ser útiles en el estudio de módulos y anillos. Por ejemplo, ellas ayudan a generalizar el concepto de localización de un anillo (ver Golan [17] y [18]) y desde su introducción han habido muchas generalizaciones de este concepto, principalmente considerando el subfuntor del funtor identidad asociado a alguna teoría de torsión, el cual resulta ser un radical idempotente. La teoría general de prerradicales ha sido desarrollada por Bican, *et al* (ver [5]) y por Raggi, *et al* (ver [29]). Una generalización más fue hecha por Barr en [4], considerando una mónada idempotente sobre una categoría (no necesariamente abeliana). Otra noción de teorías de torsión fué introducida por Cassidy, *et al* en [8]. Ellas consideradas como una conexión de Galois inducida por la relación $\mathcal{H}$ (también introducida por Dickson en [10]), la cual está definida como $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) = 0$ para objetos de la categoría $\mathcal{A}$, junto con una conexión de Galois sobre el conglomerado de clases de morfismos, la cual define pares de subcategorías llamadas *sistemas de prefactorización*. En [27], Picado estudió ambas nociones y la relación entre ellas.

En esta sección damos definiciones de clases de R-módulos como clases de torsión y clases libres de torsión, teorías de torsión y teorías de torsión hereditarias. A continuación damos algunas propiedades de cerradura para clases en una categoría abeliana (ver Apéndice A).

Definición 1.32. ([9], Capítulo 2) *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana bicompleta. Una clase $\mathscr{C} \in \wp(\mathcal{A})$ es cerrada bajo:*

1. ***Monomorfismos**: Si dados $M \in \mathscr{C}$, $N \in R\text{-Mod}$ y un monomorfismo $f : N \longrightarrow M$, entonces se tiene que $N \in \mathscr{C}$.*

2. ***Epimorfismos**: Si dados $M \in \mathscr{C}$, $L \in R\text{-Mod}$ y un epimorfismo $g : M \longrightarrow L$, entonces se tiene que $L \in \mathscr{C}$.*

3. ***Sumas directas**: Si dada $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq \mathscr{C}$ se tiene $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha \in \mathscr{C}$.*

4. ***Productos directos**: Si dada $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq \mathscr{C}$ se tiene $\prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha \in \mathscr{C}$.*

5. ***Extensiones**: Si dada una sucesión exacta $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow 0$ con $N, L \in \mathscr{C}$ se tiene $M \in \mathscr{C}$.*

6. *Para $\mathcal{A} = R\text{-Mod}$. **Cápsulas inyectivas**: Si $M \in \mathscr{C}$ entonces $E(M) \in \mathscr{C}$.*[5]

Con las propiedades de cerradura se definen las siguientes clases de objetos de $\mathcal{A}$ que son importantes en nuestro trabajo.

Definición 1.33. ([9], Capítulo 2) *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana bicompleta. Una clase $\mathscr{C} \in \wp(\mathcal{A})$ es:*

1. ***Clase de pretorsión** si es cerrada bajo epimorfismos y sumas directas.*

[5]En una categoría abeliana no necesariamente hay cápsulas inyectivas, pero en R-Mod si.

2. ***Clase de torsión*** *si es cerrada bajo epimorfismos, sumas directas y extensiones.*

3. ***Clase libre de pretorsión*** *si es cerrada bajo monomorfismos y productos directos.*

4. ***Clase libre de torsión*** *si es cerrada bajo monomorfismos, productos directos y extensiones.*

5. ***Clase de pretorsión hereditaria*** *si es cerrada bajo epimorfismos, monomorfismos y sumas directas.*

6. ***Clase de torsión hereditaria*** *si es cerrada bajo monomorfismos, epimorfismos, sumas directas y extensiones.*

7. *Para* $\mathcal{A} = R\text{-Mod}$. ***Clase libre de torsión hereditaria*** *si es cerrada bajo cápsulas inyectivas, epimorfismos, productos directos y extensiones.*

Notación 1.34. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana bicompleta. Definimos los siguientes conglomerados:*

1. $\mathcal{T}\text{-}tors = \{\mathbb{T} \in \wp(\mathcal{A}) \mid \mathbb{T} \text{ es clase de torsión}\}$.

2. $\mathcal{L}\text{-}tors = \{\mathbb{F} \in \wp(\mathcal{A}) \mid \mathbb{F} \text{ es clase libre de torsión}\}$.

3. $\mathcal{T}\text{-}torsh = \{\mathbb{T} \in \wp(\mathcal{A}) \mid \mathbb{T} \text{ es clase de torsión hereditaria}\}$.

4. $\mathcal{L}\text{-}torsh = \{\mathbb{F} \in \wp(R\text{-Mod}) \mid \mathbb{F} \text{ es clase libre de torsión hereditaria}\}$.

La siguiente definición de teorías de torsión aparece en el artículo de Dickson [10] "*A torsion theory for abelian categories*".

Definición 1.35. *Una **teoría de torsión** para una categoría abeliana bicompleta $\mathscr{A}$ es una pareja ordenada $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ de clases de objetos de $\mathscr{A}$ que satisface los siguientes axiomas:*

1. $\mathbb{T} \cap \mathbb{F} = \{0\}$.

2. $\mathbb{T}$ *es cerrada bajo epimorfismos.*

3. $\mathbb{F}$ *es cerrada bajo monomorfismos.*

4. *Para cada objeto $A \in \mathcal{A}$ existe una sucesión exacta $0 \longrightarrow T \longrightarrow A \longrightarrow F \longrightarrow 0$ con $T \in \mathbb{T}$ y $F \in \mathbb{F}$.*

Más adelante damos una equivalencia de esta definición, la cual además nos dice cómo generar teorías de torsión usando una conexión de Galois sobre $\wp(\mathcal{A})$.

1.4. Prerradicales

Los prerradicales son muy importantes en nuestro estudio de relaciones bicerradas con respecto a $\mathcal{H}$, debido a la relación que tienen con las clases de R-módulos. En esta sección damos la definición de prerradical y las propiedades básicas del conglomerado de todos los prerradicales sobre un anillo R, denotado R-pr. Presentamos dos operaciones binarias (producto y coproducto) y se define un orden parcial sobre este conglomerado con lo que resulta una gran retícula completa. Además definimos dos importantes tipos de prerradicales, alfa y omega. También damos algunas correspondencias entre prerradicales, clases de módulos y teorías de torsión.

En este trabajo los anillos que consideramos son anillos asociativos con 1 (no necesariamente conmutativos).

Definición 1.36. *Un* ***prerradical*** σ *sobre el anillo* R *es una asignación* $\sigma : R\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}$ *que cumple: para cada* $M \in R\text{-Mod}$ *se tiene que* $\sigma(M) \leq M$ *y para todo* R*-homomorfismo* $f : M \longrightarrow N$ *se tiene que* $f(\sigma(M)) \leq \sigma(N)$*; esto induce un funtor que es un subfuntor del funtor identidad en* R-Mod.

Denotamos con R-pr *el conglomerado de todos los prerradicales sobre* R.

Observación 1.37. *Aunque en la literatura* R-pr *se considera como una clase (ver [29]), en esta tesis es un conglomerado, puesto que todo prerradical sobre un anillo* R *es una subclase de la clase* $(R\text{-Mod})^2$ *(ver Apéndice C). Además esta consideración hace que nuestros resultados sean congruentes con los isomorfismos que obtendremos más adelante.*

Observación 1.38. *Sea* $\sigma \in R\text{-pr}$, *entonces* $\sigma(R)$ *siempre es un ideal (bilateral) de* R. *Como ejemplo tenemos el ideal* $J(R)$, *que es el radical de Jacobson del anillo* R.

Definición 1.39. *Sea* $\sigma \in R\text{-pr}$. *El* ***coprerradical*** *de* σ *es la asignación* $\sigma^* : R\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}$ *definida como* $\sigma^*(M) := M/\sigma(M)$, *el cual a cada morfismo* $f : M \longrightarrow N$ *le asigna el morfismo* $\sigma^*(f) : M/\sigma(M) \longrightarrow N/\sigma(N)$. *Por lo tanto* σ *induce el funtor* σ^*.

En la siguiente proposición vemos el comportamiento de los prerradicales sobre R con respecto del producto directo y suma directa. En este trabajo, cada vez que mencionemos a una familia de R-módulos, esta siempre estará indicada por un conjunto.

Proposición 1.40. *Sea* $\sigma \in R\text{-pr}$ *y* $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq R\text{-Mod}$, *entonces se tiene que:*

1. $\sigma(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha) = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} \sigma(M_\alpha)$.
2. $\sigma(\prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha) \leq \prod_{\alpha\in\Lambda} \sigma(M_\alpha)$.

Demostración. Sean $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq R\text{-Mod}$ y $\sigma \in R\text{-pr}$:

1. Para cada $\beta \in \Lambda$ tenemos la inclusión canónica $\iota_\beta : M_\beta \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ y la proyección canónica $p_\beta : \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha \longrightarrow M_\beta$. Entonces para cada $\beta \in \Lambda$ tenemos que

$$\iota_\beta(\sigma(M_\beta)) \leq \sigma(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha), \qquad (1)$$
$$\text{y} \qquad p_\beta(\sigma(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha)) \leq \sigma(M_\beta), \qquad (2)$$

Demostraremos la igualdad por doble contención:

$\leq$) Sea $\varphi \in \sigma(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha) \leq \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$. Por (2) para todo $\beta \in \Lambda$, $p_\beta(\varphi) \in \sigma(M_\beta)$. Por lo tanto $\varphi \in \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} \sigma(M_\alpha)$. Luego $\sigma(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha) \leq \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} \sigma(M_\alpha)$.

$\geq$) Sea $\varphi \in \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} \sigma(M_\alpha) \leq \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$. Dado que $sop(\varphi)$ es finito, podemos escribir: $\varphi = \sum_{k=1}^{n} \iota_{\alpha_k}(p_{\alpha_k}(\varphi))$, donde $sop(\varphi) = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$, como $\varphi \in \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} \sigma(M_\alpha)$ sucede para cada coordenada que $\varphi_\beta = p_\beta(\varphi) \in \sigma(M_\beta)$. Por (1) para cada $k \in \{1, ..., n\}$ tenemos que $\iota_{\beta_k}(\varphi_{\beta_k}) \in \sigma(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha)$. Por lo tanto $\varphi = \sum_{k=1}^{n} \iota_{\alpha_k}(\varphi_{\alpha_k}) \in \sigma(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha)$. Por lo tanto $\sigma(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha) \geq \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} \sigma(M_\alpha)$.

2. Para cada $\beta \in \Lambda$ consideramos las proyecciones canónicas $p_\beta : \prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha \longrightarrow M_\beta$. Sea $\varphi \in \sigma(\prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha)$, entonces tenemos que $p_\beta(\sigma(\prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha)) \leq \sigma(M_\beta)$, de donde $\varphi_\beta = p_\beta(\varphi) \in \sigma(M_\beta)$ para cada $\beta \in \Lambda$, luego $\varphi \in \prod_{\alpha\in\Lambda} \sigma(M_\alpha)$. Por lo tanto $\sigma(\prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha) \leq \prod_{\alpha\in\Lambda} \sigma(M_\alpha)$.

□

En R-pr describimos un **orden parcial** $\preccurlyeq$ como:

$$\sigma \preccurlyeq \tau \text{ si y sólo para toda } M \in R\text{-Mod } \sigma(M) \leq \tau(M)$$

de esta forma $\langle R\text{-pr}, \preccurlyeq\rangle$ es un *conglomerado parcialmente ordenado* (gran copo). Además:

1. Existe el **ínfimo** de σ y τ que se puede describir como:

$$(\sigma \wedge \tau)(M) = \sigma(M) \cap \tau(M) \text{ para toda } M \in R\text{-Mod}.$$

También podemos describir el ínfimo arbitrario para $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{C}} \subseteq R$-pr como $(\bigwedge_{\alpha\in\mathcal{C}} \sigma_\alpha)(M) = \bigcap_{\alpha\in\mathcal{C}} \sigma_\alpha(M)$ para toda $M \in R$-Mod, con $\mathcal{C}$ una clase.[6]

2. Existe el **supremo** de σ y τ que se puede describir como:

$$(\sigma \vee \tau)(M) = \sigma(M) + \tau(M) \text{ para toda } M \in R\text{-Mod}.$$

También podemos describir el supremo arbitrario para $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{C}} \subseteq R$-pr como $(\bigvee_{\alpha\in\mathcal{C}} \sigma_\alpha)(M) = \sum_{\alpha\in\mathcal{C}} \sigma_\alpha(M)$ para toda $M \in R$-Mod, con $\mathcal{C}$ una clase.

Proposición 1.41. [29] $\langle R\text{-pr}, \preccurlyeq, \wedge, \vee\rangle$ *es una gran retícula completa.*[7] □

[6] Aunque $\mathcal{C}$ es una clase, se puede describir el ínfimo arbitrario de $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{C}} \subseteq R$-pr pues existe un conjunto Λ tal que $(\bigwedge_{\alpha\in\mathcal{C}} \sigma_\alpha)(M) = (\bigwedge_{\alpha\in\Lambda} \sigma_\alpha)(M)$ ya que para toda $M \in R$-Mod, $\{\sigma_\alpha(M) \mid \alpha \in \mathcal{C}\}$ siempre es un conjunto. De forma similar se describe el supremo arbitrario.

[7] Recordemos que R-pr siempre es un conglomerado.

Notación 1.42.

1. *Para cada* $\sigma, \tau \in R\text{-pr}$, *podemos definir el intervalo*
$$[\sigma, \tau] := \{\eta \in R\text{-pr} \mid \sigma \preccurlyeq \eta \preccurlyeq \tau\}.$$

2. *Sean* $\mathcal{A}$ *y* $\mathcal{B}$ *clases. Sea* $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ *una asignación y* $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$, *denotamos*
$$\overleftarrow{F}(\mathcal{B}') := \{A \in \mathcal{A} \mid F(A) \in \mathcal{B}'\}.$$

Vamos a definir dos tipos de prerradicales: alfa y omega que son muy importantes en el estudio de los prerradicales, ya que todo prerradical es supremo de prerradicales alfa e ínfimo de prerradicales omegas.

Definición 1.43. ([29], Definición 4) *Sea* $M \in R\text{-Mod}$ *y* $N \leq M$, *definimos para cada* $K \in R\text{-Mod}$ *los siguientes prerradicales:*

1. $\alpha_N^M(K) = \sum\{f(N) \mid f : M \longrightarrow K\}$.
2. $\omega_N^M(K) = \bigcap\{\overleftarrow{g}(N) \mid g : K \longrightarrow M\}$.

Recordemos que para todo $M \in R\text{-Mod}$, $Tr_M()$ y $Rej_M()$ son prerradicales que estan definidos como $Tr_M(K) = \sum\{Im(f) \mid f : M \longrightarrow K\}$ y $Rej_M(K) = \bigcap\{ker(g) \mid g : K \longrightarrow M\}$, asi estos dos prerradicales son α_M^M y ω_0^M respectivamente.

Definición 1.44. *Sea* $M \in R\text{-Mod}$ *y* $N \leq M$. *Se dice que* N *es un submódulo totalmente invariante con respecto a* M *si para todo* $f \in \mathrm{Hom}_R(M, M)$ *se tiene que* $f(N) \leq N$.

Notemos que si N es un submódulo totalmente invariante de M entonces $\alpha_N^M(M) = N$ y $\omega_N^M(M) = N$. En la siguiente proposición se describen los submódulos totalmente invariantes y su relación con los prerradicales.

Proposición 1.45. [29] *Sea* $M \in R\text{-Mod}$. *Entonces* N *es un submódulo totalmente invariante de* M *si y sólo si existe* $\sigma \in R\text{-pr}$ *tal que* $\sigma(M) = N$. □

Observación 1.46. *Sea* ${}_RI \leq_R R$, *entonces* I *es totalmente invariante en* R *si y sólo si* I *es ideal bilateral de* R.

Proposición 1.47. [29] *Sea* $M \in R\text{-Mod}$ *y* N *un submódulo totalmente invariante de* M. *Tenemos que* $\sigma(M) = N$ *si y sólo si* $\alpha_N^M \preccurlyeq \sigma \preccurlyeq \omega_N^M$. □

De la proposición anterior tenemos que α_N^M es el menor prerradical que le asigna a M el submódulo N y ω_N^M es el mayor prerradical con la misma propiedad. Además para todo $\sigma \in R\text{-pr}$ y todo $M \in R\text{-Mod}$ se tiene que $\sigma(M)$ es un submódulo totalmente invariante de M.

Los prerradicales alfa y omega son muy importantes en teoría de prerradicales pues todo prerradical se puede ver como supremo de prerradicales alfa e ínfimo de prerradicales omega.

Proposición 1.48. *Sea $\sigma \in R\text{-pr}$, entonces σ puede escribirse como*

$$\sigma = \bigvee_{M \in R\text{-Mod}} \alpha^M_{\sigma(M)} = \bigwedge_{M \in R\text{-Mod}} \omega^M_{\sigma(M)}.$$

$\square$

En R-pr existen cuatro operaciones clásicas, $\wedge$, $\vee$, $\cdot$ y $:$, ya dimos las dos primeras, ahora damos las otras dos.

Definición 1.49. ([29], Definición 2) *Sean $\sigma, \tau \in R\text{-pr}$.*

1. *El **producto** de σ y τ como $(\sigma\tau)(M) := \sigma(\tau(M))$ para toda $M \in R\text{-Mod}$.*
2. *El **coproducto** de σ y τ como $(\sigma : \tau)(M)$ es el submódulo de M tal que*

   $$(\sigma : \tau)(M)/\sigma(M) = \tau(M/\sigma(M))$$

   para toda $M \in R\text{-Mod}$.

De la definición anterior, para todo $M \in R$-Mod y $\sigma, \tau \in R$-pr, tenemos que el coproducto de σ, τ está definido como $(\sigma : \tau)(M) := \overleftarrow{p}\,(\tau(M/\sigma(M)))$. Esto se puede ver en el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \sigma(M) \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & (\sigma : \tau)(M) \arrow[r, "p"] \arrow[d, hook] & \tau(M/\sigma(M)) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & \sigma(M) \arrow[r, hook] & M \arrow[r] & M/\sigma(M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Observación 1.50. *La operación coproducto también puede ser llamada **pullback** o **producto fibrado**, pues cumple con la propiedad universal. Como podemos ver, $(\sigma : \tau)(M)$ es un pullback del siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
 & \tau(M/\sigma(M)) \arrow[d, hook] \\
M \arrow[r] & M/\sigma(M)
\end{tikzcd}$$

Para todo $\sigma, \tau \in R\text{-}pr$ se tiene que $\sigma\tau \preccurlyeq \sigma \preccurlyeq (\sigma : \tau)$ y $\sigma\tau \preccurlyeq \tau \preccurlyeq (\sigma : \tau)$ lo que implica que $\sigma\tau \preccurlyeq \sigma \wedge \tau \preccurlyeq \sigma \vee \tau \preccurlyeq (\sigma : \tau)$, además en general el producto y coproducto no son conmutativos pero sí son asociativos.

A continuación presentamos algunos tipos de prerradicales que son muy importantes, pues algunos de ellos estan en correspondencia biunívoca con clases de torsión, clases libres de torsión y teorías de torsión.

Definición 1.51. [29] *Sea $\sigma \in R\text{-pr}$, σ se llama:*

1. ***Radical*** *si para cada* $M \in R$-Mod *se tiene que* $\sigma(M/\sigma(M)) = 0$.
2. ***Idempotente*** *si para cada* $M \in R$-Mod *se tiene que* $\sigma(\sigma(M)) = \sigma(M)$.
3. ***Exacto izquierdo*** *si para cada sucesión exacta* $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow 0$, *la sucesión* $0 \longrightarrow \sigma(M) \longrightarrow \sigma(N) \longrightarrow \sigma(L)$ *es exacta.*
4. t-***radical*** *si para cada* $M \in R$-Mod *se tiene que* $\sigma(M) = \sigma(R)M$.

Tenemos que σ es radical si y sólo si es idempotente con respecto al coproducto, es decir, para toda $M \in R$-Mod tenemos que $(\sigma : \sigma)(M)/\sigma(M) = \sigma(M/\sigma(M)) = 0$ lo cual significa que $(\sigma : \sigma)(M) = \sigma(M)$.

Notación 1.52. *Denotamos con:*

1. R-idem *el conglomerado de todos los prerradicales idempotentes sobre* R.
2. R-rad *el conglomerado de todos los radicales sobre* R.
3. R-radidem *el conglomerado de todos los radicales idempotentes sobre* R.
4. R-lep *el conglomerado de todos los prerradicales exactos izquierdos sobre* R.
5. R-trad *el conglomerado de todos los prerradicales exactos derechos sobre* R.

Para cada $I \leq R$ ideal y $M \in R$-Mod tenemos $\alpha_I^R(R) = I$ y $\alpha_I^R(M) = IM = \alpha_I^R(R)M$, por lo tanto α_I^R es un t-radical.

Proposición 1.53. ([36], Proposición 1.7) $\sigma \in R$-pr *es exacto izquierdo si y sólo si para todo* $M \in R$-Mod *y* $N \leq M$ *se tiene que* $\sigma(N) = \sigma(M) \cap N$. $\square$

Observación 1.54. *Sea* $\sigma \in R$-pr *exacto izquierdo, luego para toda* $M \in R$-Mod, $\sigma(M) \leq M$ *lo que implica que* $\sigma(\sigma(M)) = \sigma(M) \cap \sigma(M) = \sigma(M)$, *es decir, todo prerradical exacto izquierdo es idempotente.*

Sea σ t*-radical, luego para toda* $M \in R$-Mod *se tiene que* $\sigma(M/\sigma(M)) = I(M/IM) = 0$ *con* $I = \sigma(R)$, *es decir, todo* t*-radical es radical.*

En el capítulo 4 obtendremos conexiones de Galois isótonas sobre R-radidem, donde la parte residuada y residual de algunas de ellas son un producto y coproducto respectivamente, luego las siguientes proposiciones no son útiles para este propósito.

Proposición 1.55. ([29], Teorema 8) *Sean* $\tau \in R$-pr *y* $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{C}} \subseteq R$-pr. *Entonces*

1. $(\bigvee_{\alpha \in \mathcal{C}} \sigma_\alpha)\tau = \bigvee_{\alpha \in \mathcal{C}} (\sigma_\alpha \tau)$.
2. $(\tau : \bigwedge_{\alpha \in \mathcal{C}} \sigma_\alpha) = \bigwedge_{\alpha \in \mathcal{C}} (\tau : \sigma_\alpha)$. $\square$

Proposición 1.56. ([36], Capítulo VI) *Dado $\sigma \in R$-pr son equivalentes:*

1. *σ preserva epimorfismos.*
2. *Para toda $M \in R$-Mod, se tiene que σ es t-radical.*
3. *$\sigma = \alpha_I^R$ con I ideal de R.* □

Proposición 1.57. ([36], Capítulo VI) *Sean $\sigma, \tau \in R$-idem, entonces $(\sigma : \tau) \in R$-idem.* □

Proposición 1.58. ([36], [23] § 4, Proposición 1) *Sean $\sigma, \tau \in R$-rad, entonces $\sigma\tau \in R$-rad.* □

Definición 1.59. ([30], Definición 3.1) *Sea $\sigma \in R$-pr. Definimos* ***totalizador*** *$t(\sigma)$ de σ como:*

$$t(\sigma) = \bigwedge\{\tau \in \mathcal{A}_\tau\}, \ \textit{donde} \ \mathcal{A}_\tau = \{\tau \in R\text{-pr} \mid (\sigma : \tau) = 1\}.$$

Notemos que para todo $\sigma \in R$-pr se tiene que $(\sigma : t(\sigma)) = 1$ y para todo ideal $I \leq R$ tenemos que el totalizador de α_I^R es $t(\alpha_I^R)(M) = \{m \in M \mid Im = 0\}$ con $M \in R$-Mod.

Proposición 1.60. *Sea $I \leq R$ un ideal, entonces $t(\alpha_I^R) = \alpha_{R/I}^{R/I}$.*

Demostración. Sean $N \in R$-Mod y $n \in t(\alpha_I^R)(N)$ luego $In = 0$ por lo tanto $n = (1+I)n$ lo que implica que $n \in \alpha_{R/I}^{R/I}(N)$ pues para $\overline{d_n} : R/I \longrightarrow N$ tenemos que $\overline{d_n}(1+I) = (1+I)n = 1n$. Por lo tanto $t(\alpha_I^R)(N) \leq \alpha_{R/I}^{R/I}(N)$.

Sea $n \in \alpha_{R/I}^{R/I}(N)$, entonces $n = (1+I)n$ lo que implica que $In = 0$ por lo tanto $n \in t(\alpha_I^R)(N)$ y $\alpha_{R/I}^{R/I}(N) \leq t(\alpha_I^R)(N)$.

Por lo tanto $t(\alpha_I^R) = \alpha_{R/I}^{R/I}$. □

De la proposición anterior se deduce el siguiente resultado.

Proposición 1.61. *Sea $I \leq R$ ideal, entonces $t(\alpha_I^R) \cong \mathrm{Hom}_R(R/I, \_)$.*

Demostración. Sean $I \leq R$ un ideal, lo que sigifica que R/I es un R-bimódulo y por lo tanto para toda $M \in R$-Mod, $\mathrm{Hom}_R(R/I, M) \in R$-Mod.

Sea $N \in R$-Mod, $\varphi : \mathrm{Hom}_R(R/I, N) \longrightarrow t(\alpha_I^R)(N)$ dada como $\varphi(f) = f(1+I)$ y $\psi : t(\alpha_I^R)(N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R/I, N)$ dada como $\psi(x) = \overline{d_x}$.

Sea $f \in \mathrm{Hom}_R(R/I, N)$, luego $\psi(\varphi(f)) = \psi(f(1+I)) = \overline{d_{f(1+I)}} = f$.

Sea $x \in t(\alpha_I^R)(N)$, luego $\varphi(\psi(x)) = \varphi(\overline{d_x}) = \overline{d_x}(1+I) = (1+I)x = x$.

Por lo tanto $\psi\varphi = Id$ y $\varphi\psi = Id$. □

De la proposición anterior tenemos que para cada ideal I de R, $t(\alpha_I^R)$ es exacto izquierdo.

Definición 1.62. *Sean* $\sigma, \tau \in R$-pr*:*

1. ***Potencias:*** $\sigma^1 = \sigma, \sigma^2 = \sigma\sigma, \cdots, \sigma^{n+1} = \sigma\sigma^n$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$*. Para* $\lambda + 1$ *un ordinal sucesor definimos* $\sigma^{\lambda+1} = \sigma\sigma^{\lambda}$*, para* λ *un ordinal límite se define* $\sigma^{\lambda} := \bigwedge_{\beta<\lambda} \sigma^{\beta}$*.*

   Podemos considerar el prerradical $\widehat{\sigma} := \bigwedge_{\lambda \in OR} \sigma^{\lambda}$*, donde* OR *es la clase de todos los ordinales.*

2. ***Copotencias:*** $\tau_{(1)} = \tau,\ \tau_{(2)} = (\tau : \tau),\ \cdots, \tau_{(n)} = (\tau : \tau_{(n-1)})$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$*. Para un ordinal sucesor* $\lambda + 1$ *definimos* $\tau_{(\lambda+1)} = (\tau : \tau_{(\lambda)})$*, para* λ *un ordinal límite se define* $\tau_{(\lambda)} = \bigvee_{\beta<\lambda} \tau_{(\beta)}$*.*

   Podemos considerar el prerradical $\overline{\tau} := \bigvee_{\lambda \in OR} \tau_{\lambda}$*.* [8]

Para cada prerradical σ existe el mayor idempotente por debajo de σ como se puede ver en la siguiente proposición.

Proposición 1.63. ([36], Capítulo VI) *Dado* $\sigma \in R$-pr *resulta:*

1. $\widehat{\sigma} \preccurlyeq \sigma$*.*
2. $\widehat{\sigma}$ *es un prerradical idempotente.*
3. $\widehat{\sigma}$ *es el mayor idempotente por debajo de* σ*.* □

Para cada prerradical τ existe el menor radical por encima de σ como se puede ver en la siguiente proposición.

Proposición 1.64. ([36], Capítulo VI) *Dado* $\tau \in R$-pr *resulta:*

1. $\tau \preccurlyeq \overline{\tau}$*.*
2. $\overline{\tau}$ *es un radical.*
3. $\overline{\tau}$ *es el menor radical por encima de* τ*.* □

Proposición 1.65. ([36], Capítulo VI) *Sea* $\sigma \in R$-pr *resulta:*

1. *Si* σ *es idempotente,* $\overline{\sigma}$ *también lo es, es decir, es radical idempotente.*
2. *Si* σ *es radical,* $\widehat{\sigma}$ *también lo es, es decir, es radical idempotente.* □

[8] A este tipo de construcción de prerradicales $\widehat{\sigma}$ y $\overline{\tau}$ se le llama construcciones de Amitsur, ver [17], [18] y [36].

Para cada ideal I de R y para cada $M \in R$-Mod tenemos que

$$\alpha^R_{I^2}(M) = I^2M = I(IM) = \alpha^R_I(IM) = \alpha^R_I(\alpha^R_I(M)) \leq \alpha^R_I(M)$$

por consiguiente tenemos que $\alpha^R_{I^{n+1}} \leq \alpha^R_{I^n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, esto induce la cadena de prerradicales

$$0 \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq \widehat{\alpha^R_I} \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq \alpha^R_{I^n} \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq \alpha^R_{I^2} \preccurlyeq \alpha^R_I \preccurlyeq 1$$

Recordemos por la Definición 1.62 que $(\alpha^R_I)^{n+1} = \alpha^R_I(\alpha^R_I)^n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Esto motiva la siguiente proposición.

Proposición 1.66. *Sea $I \leq R$ un ideal. Entonces $(\alpha^R_I)^n = \alpha^R_{I^n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sean $I \leq R$ un ideal y $M \in R$-Mod. Tenemos que para $n = 1$ la afirmación es cierta. Supongamos que se cumple para $n = k$, luego por hipótesis de inducción tenemos que $(\alpha^R_I)^k = \alpha^R_{I^k}$, de esto tenemos las siguientes igualdades

$$(\alpha^R_I)^{k+1}(M) = \alpha^R_I((\alpha^R_I)^k(M)) = \alpha^R_I(\alpha^R_{I^k}(M)) = I(I^k(M)) = I^{k+1}(M) = \alpha^R_{I^{k+1}}(M).$$

Por lo tanto para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple $(\alpha^R_I)^n = \alpha^R_{I^n}$. $\square$

También para cada ideal I de R y para cada $N \in R$-Mod tenemos que $t(\alpha^R_I) \preccurlyeq t(\alpha^R_{I^2})$ pues si $r \in t(\alpha^R_I)(N)$ entonces $I^2r = I(Ir) = I0 = 0$, por lo tanto $r \in t(\alpha^R_{I^2})(N)$. Luego tenemos la cadena de prerradicales

$$0 \preccurlyeq t(\alpha^R_I) \preccurlyeq t(\alpha^R_{I^2}) \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq t(\alpha^R_{I^n}) \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq \overline{t(\alpha^R_I)} \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq 1$$

Recordemos de la Definición 1.62 que $t(\alpha^R_I)_{(n)} = (t(\alpha^R_I) : t(\alpha^R_I)_{(n-1)})$, donde $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 1.67. *Sea $I \leq R$ ideal. Entonces $t(\alpha^R_I)_{(n)} = t(\alpha^R_{I^n})$, con $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sean $I \leq R$ ideal y $M \in R$-Mod. Para $n = 1$ la afirmación es cierta. Supongamos que es cierta para $n = k$, luego $t(\alpha^R_I)_{(k+1)} = (t(\alpha^R_I), t(\alpha^R_I)_{(k)})$ y

$$\begin{aligned}
(t(\alpha^R_I) : t(\alpha^R_I)_{(k)})(M)/t(\alpha^R_I)(M) &= t(\alpha^R_I)_{(k)}(M/t(\alpha^R_I)(M)) \\
&= \{m + t(\alpha^R_I)(M) \mid I^k(m + t(\alpha^R_I)(M)) = t(\alpha^R_I)(M)\} \\
&= \{m \in M \mid I^k m \leq t(\alpha^R_I)(M)\}/t(\alpha^R_I)(M) \\
&= \{m \in M \mid I^{k+1}m = 0\}/t(\alpha^R_I)(M) \\
&= t(\alpha^R_{I^{k+1}})(M)/t(\alpha^R_I)(M)
\end{aligned}$$

Por lo tanto $t(\alpha^R_I)_{(k+1)} = (t(\alpha^R_I) : t(\alpha^R_{I^k})) = t(\alpha^R_{I^{k+1}})$.

Concluimos para toda $n \in \mathbb{N}$ que $t(\alpha^R_I)_{(n)} = t(\alpha^R_{I^n})$. $\square$

El siguiente lema es importante porque lo vamos usar en algunas demostraciones.

Lema 1.68. [22] *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana. Sean $A, A', B, B', C, C' \in \mathcal{A}$. Supongamos que tenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas:*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

1. *Si f y g son isomorfismos entonces h también lo es.*
2. *Si f y h son isomorfismos entonces g también lo es.*
3. *Si g y h son isomorfismos entonces f también lo es.* □

De las proposiciones 1.66 y 1.67 se deduce el siguiente corolario.

Corolario 1.69. *Para un ideal $I \leq R$ son equivalentes:*

1. *I es idempotente.*
2. *α_I^R es idempotente.*
3. *$t(\alpha_I^R)$ es radical.*

Demostración. $1 \Leftrightarrow 2$) Se deduce de la Proposición 1.66.

$1 \Rightarrow 3$) Sea $I \leq R$ un ideal idempotente, ya tenemos que $(t(\alpha_I^R) : t(\alpha_I^R)) = t(\alpha_{I^2}^R)$, como I es idempotente por hipótesis, $t(\alpha_{I^2}^R) = t(\alpha_I^R)$. Por lo tanto $t(\alpha_I^R)$ es radical.

$3 \Rightarrow 1$) Sea $t(\alpha_I^R)$ radical, luego $t(\alpha_I^R) = (t(\alpha_I^R) : t(\alpha_I^R)) = t(\alpha_{I^2}^R)$, se sigue que para todo $M \in R$-Mod, $t(\alpha_I^R)(M) = t(\alpha_{I^2}^R)(M)$, en particular $R/I \cong t(\alpha_I^R)(R) = t(\alpha_{I^2}^R)(R) \cong R/I^2$,de esta forma tenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r] & R \arrow[r] & R/I \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & I^2 \arrow[r] \arrow[u, hook, "i"] & R \arrow[r] \arrow[u, equal] & R/I^2 \arrow[r] \arrow[u, "\cong"] & 0 \end{tikzcd}$$

Por el Lema 1.68 tenemos que la inclusión i es un isomorfismo, es decir, i es la identidad y por lo tanto $I^2 = I$. □

Proposición 1.70. ([36], Capítulo VI) *Sea $\sigma \in R$-pr, entonces existe el mayor prerradical exacto izquierdo por debajo de σ, al cual denotamos como $\widetilde{\sigma}$.*

1.5. Prerradicales y clases de R-módulos

Puesto que el concepto de teorías de torsión es equivalente a la noción de radical idempotente en el sentido de Maranda [23] (también ver [36], Cap. VI, Proposiciones 2.3 y 2.4), en esta sección veremos como se relacionan estos dos conceptos. Por consiguiente damos un isomorfismo entre los conglomerados R-radidem y $\mathcal{T}$-*tors*, y otro entre los conglomerados R-radidem y $\mathcal{L}$-*tors*. Estos isomorfismos los usamos para describir los cerrados de algunas conexiones de Galois entre $\mathcal{T}$-*tors* y $\mathcal{L}$-*tors* y para obtener un isomorfismo de orden entre las relaciones bicerradas con respecto a $\mathcal{H}$ y todas las conexiones de Galois isótonas sobre R-radidem. Esto último nos ayuda, en el caso particular de un anillo semisimple artiniano, a determinar la estructura reticular del conglomerado $Gal(\mathcal{T}\text{-}tors, \mathcal{L}\text{-}tors)$.

En la siguiente proposición se dan dos asignaciones, una de $\wp(R\text{-Mod})$ a R-idem y otra de $\wp(R\text{-Mod})$ a R-rad.

Proposición 1.71. ([30], Proposición 2.1) *Sea $\mathscr{C} \in \wp(R\text{-Mod})$. Entonces:*

1. $\bigvee_{M\in\mathscr{C}} \alpha_M^M$ *es idempotente y* $\overline{\bigvee_{M\in\mathscr{C}} \alpha_M^M} = \bigvee_{M\in\mathbb{T}} \alpha_M^M$ *donde $\mathbb{T}$ es la menor clase de torsión que contiene a $\mathscr{C}$, es decir, si $\mathscr{C}$ es clase de torsión, entonces* $\bigvee_{M\in\mathscr{C}} \alpha_M^M$ *es radical idempotente.*

2. $\bigwedge_{N\in\mathscr{C}} \omega_0^N$ *es radical y* $\widehat{\bigwedge_{N\in\mathscr{C}} \omega_0^N} = \bigwedge_{N\in\mathbb{F}} \omega_0^N$ *donde $\mathbb{F}$ es la menor clase libre de torsión que contiene a $\mathscr{C}$, es decir, si $\mathscr{C}$ es clase libre de torsión, entonces* $\bigwedge_{N\in\mathscr{C}} \omega_0^N$ *es radical idempotente.*

$\square$

A cada prerradical le podemos asociar dos clases de R-módulos como lo vemos en la siguiente definición (ver [29]).

Definición 1.72. *Sea $\sigma \in R$-pr. Definimos las siguientes clases de R-módulos:*

1. $\mathbb{T}_\sigma = \{M \in R\text{-Mod} \mid \sigma(M) = M\}$.

2. $\mathbb{F}_\sigma = \{N \in R\text{-Mod} \mid \sigma(N) = 0\}$.

La definición anterior nos induce dos asignaciones entre el conglomerado de todos los prerradicales sobre R y el conglomerado de todos las clases de R-módulos:

1. La asignación $\sigma \mapsto \mathbb{T}_\sigma$ preserva el orden; Sean $\sigma, \tau \in R$-pr tales que $\sigma \preccurlyeq \tau$ y $M \in \mathbb{T}_\sigma$ entonces $M = \sigma(M) \leq \tau(M) \leq M$ esto implica que $\tau(M) = M$, por lo tanto $M \in \mathbb{T}_\tau$ y $\mathbb{T}_\sigma \subseteq \mathbb{T}_\tau$.

2. La asignación $\sigma \mapsto \mathbb{F}_\sigma$ invierte el orden; Sean $\sigma, \tau \in R$-pr tales que $\sigma \preccurlyeq \tau$ y $N \in \mathbb{F}_\tau$ entonces $\sigma(N) \leq \tau(N) = 0$ esto implica que $\sigma(N) = 0$, por lo tanto $N \in \mathbb{F}_\sigma$ y $\mathbb{F}_\tau \subseteq \mathbb{F}_\sigma$.

Proposición 1.73. ([36], Capítulo VI, Proposición 1.4) *Sea $\sigma \in R$-pr. Entonces:*

1. $\mathbb{T}_\sigma$ *es una clase de pretorsión.*

2. $\mathbb{F}_\sigma$ *es una clase libre de pretorsión*

En general las asignaciones de la definición 1.72 no son inyectivas como veremos en las siguientes dos proposiciones.

Proposición 1.74. *Sea* $\sigma \in R$-pr*, entonces* $\mathbb{T}_\sigma = \mathbb{T}_{\widehat{\sigma}}$.

Demostración. $\supseteq$) Sea $M \in \mathbb{T}_{\widehat{\sigma}}$, luego $M = \widehat{\sigma}(M) \leq \sigma(M)$, por lo tanto $\sigma(M) = M$ lo que implica que $M \in \mathbb{T}_\sigma$ y $\mathbb{T}_{\widehat{\sigma}} \subseteq \mathbb{T}_\sigma$.

$\subseteq$) Sea $M \in \mathbb{T}_\sigma$, luego $\sigma(M) = M$, $\sigma^2(M) = \sigma(M) = M$. Supongamos que $\sigma^\lambda(M) = M$, entonces $\sigma^{\lambda+1}(M) = \sigma^\lambda(\sigma(M)) = \sigma^\lambda(M) = M$.

Si λ es un ordinal límite y suponemos $\sigma^\beta(M) = M$ para todo $\beta < \lambda$, entonces

$$\sigma^\lambda(M) = (\bigwedge_{\beta<\lambda} \sigma^\beta)(M) = \bigcap_{\beta<\lambda} \sigma^\lambda(M) = M$$

se ha demostrado por inducción transfinita que para todo $\lambda \in OR$ que $\sigma^\lambda(M) = M$.

Por lo tanto $\widehat{\sigma}(M) = (\bigwedge_{\lambda \in OR} \sigma^\lambda)(M) = M$, es decir, $M \in \mathbb{T}_{\widehat{\sigma}}$. Por lo tanto $\mathbb{T}_\sigma \subseteq \mathbb{T}_{\widehat{\sigma}}$. □

Proposición 1.75. *Sea* $\tau \in R$-pr*, entonces* $\mathbb{F}_\tau = \mathbb{F}_{\overline{\tau}}$.

Demostración. Sea $N \in \mathbb{F}_{\overline{\tau}}$, luego $\tau(N) \leq \overline{\tau}(N) = 0$ pues $\tau \preccurlyeq \overline{\tau}$ lo que implica que $\tau(N) = 0$. Por lo tanto $N \in \mathbb{F}_\tau$ y $\mathbb{F}_\tau \supseteq \mathbb{F}_{\overline{\tau}}$.

Sea $N \in \mathbb{F}_\tau$ entonces $\tau(N) = 0$, $\tau_{(2)}(N) = 0$ pues $(\tau : \tau)(N)/\tau(N) = \tau(N/\tau(N)) = \tau(N) = 0$, supongamos que $\tau_\lambda(N) = 0$, entonces $\tau_{(\lambda+1)}(N) = (\tau : \tau_{(\lambda)})(N) = 0$ pues

$$(\tau : \tau_{(\lambda)})(N)/\tau(N) = \tau_{(\lambda)}(N/\tau(N)) = \tau_{(\lambda)}(N) = 0$$

Si λ es un ordinal límite y suponemos que $\tau_{(\beta)}(N) = 0$ para toda $\beta < \lambda$ entonces

$$\tau_{(\lambda)}(N) = (\bigvee_{\beta<\lambda} \tau_{(\beta)})(N) = \sum_{\beta<\lambda} \tau_{(\beta)}(N) = 0$$

se ha demostrado por inducción transfinita que para todo $\lambda \in OR$ que $\tau_{(\lambda)}(N) = 0$.

Por lo tanto $\overline{\tau}(N) = (\bigvee_{\lambda \in OR} \tau_{(\lambda)})(N) = 0$, es decir, $N \in \mathbb{F}_{\overline{\tau}}$. Por lo tanto $\mathbb{F}_\tau \subseteq \mathbb{F}_{\overline{\tau}}$. □

Proposición 1.76. *Existe un isomorfismo de orden entre* R-radidem *y* $\mathcal{T}$*-tors.*

Demostración. El isomorfismo esta dado por las asignaciones $\Phi : R\text{-radidem} \longrightarrow \mathcal{T}\text{-}tors$ y $\Psi : \mathcal{T}\text{-}tors \longrightarrow R\text{-radidem}$ definidas como $\Phi(\sigma) = \mathbb{T}_\sigma$ y $\Psi(\mathbb{T}) = \bigvee_{M \in \mathbb{T}} \alpha_M^M$.

Φ y Ψ preservan el orden. Por la Proposición 1.74 al ser $\sigma = \widehat{\sigma}$ resulta que Φ es inyectiva. De la Proposición 1.73 tenemos que $\mathbb{T}_\sigma$ es una clase de pretorsión, la cual demostraremos que también es cerrada bajo extensiones; sea $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow 0$ una sucesión exacta con $N, L \in \mathbb{T}_\sigma$, $M \in R$-Mod. Como σ es radical idempotente tenemos que $M/\sigma(M)$ es un módulo libre de torsión, consideremos el funtor contravariante $\mathrm{Hom}_R(\_, M/\sigma(M))$, luego tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(L, M/\sigma(M)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, M/\sigma(M)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N, M/\sigma(M))$$

donde $0 = \text{Hom}_R(L, M/\sigma(M)) = \text{Hom}_R(N, M/\sigma(M))$ por lo tanto $\text{Hom}_R(M, M/\sigma(M)) = 0$, esto implica que $M = \sigma(M)$ y por lo tanto $M \in \mathbb{T}_\sigma$.

Concluimos que $\Phi(\sigma)$ es una clase de torsión. De la proposición 1.71 tenemos que $\Psi(\mathbb{T}) = \bigvee_{M\in\mathbb{T}} \alpha_M^M$ es un radical idempotente. De lo anterior tenemos que Φ y Ψ son isomorfismos uno el inverso del otro. $\square$

Proposición 1.77. *Existe un anti-isomorfismo de orden entre* R-radidem *y* $\mathcal{L}$-*tors.*

Demostración. El anti-isomorfismo está dado por las asignaciones $\Phi' : R\text{-radidem} \longrightarrow \mathcal{L}\text{-}tors$ y $\Psi' : \mathcal{L}\text{-}tors \longrightarrow R\text{-radidem}$ definidas como $\Phi'(\tau) = \mathbb{F}_\tau$ y $\Psi'(\mathbb{F}) = \bigwedge_{N\in\mathbb{F}} \omega_0^N$.

Φ' y Ψ' invierten el orden. Por la proposición 1.75, Φ' es inyectiva y por la proposición 1.73 $\mathbb{F}_\tau$ es una clase libre de pretorsión, demostraremos que también es cerrada bajo extensiones; sea $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow 0$ una sucesión exacta con $N, L \in \mathbb{F}_\tau$, $M \in R$-Mod. Como τ es radical idempotente tenemos que $\tau(M)$ es un módulo de torsión, consideremos el funtor covariante $\text{Hom}_R(\tau(M), \_)$, luego tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(N, M/\tau(M)) \longrightarrow \text{Hom}_R(M, M/\tau(M)) \longrightarrow \text{Hom}_R(L, M/\tau(M))$$

donde $0 = \text{Hom}_R(\sigma(M), N) = \text{Hom}_R(\sigma(M), L)$ por lo tanto $\text{Hom}_R(\sigma(M), M) = 0$, esto implica que $\tau(M) = 0$ y por lo tanto $M \in \mathbb{F}_\tau$.

Concluimos que $\Phi'(\tau)$ es una clase libre de torsión. De la proposición 1.71 tenemos que $\Psi'(\mathbb{F}) = \bigwedge_{N\in\mathbb{F}} \omega_0^N$ es un radical idempotente. De lo anterior tenemos que Φ' y Ψ' son isomorfismos uno el inverso del otro. $\square$

De las dos proposiciones anteriores tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.78. ([36], Capítulo VI) *Sea* $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ *una teoría de torsión, entonces* $\bigvee_{M\in\mathbb{T}} \alpha_M^M = \bigwedge_{N\in\mathbb{F}} \omega_0^N$*, es decir, es un radical idempotente.* $\square$

De las proposiciones anteriores tenemos la siguiente correspondencia.

Proposición 1.79. ([36], Capítulo VI) *Existe una correspondencia biunívoca entre el conglomerado de todos los radicales idempotentes y el conglomerado de todas las teorías de torsión.*

Demostración. De la Proposición 1.78 tenemos que a cada teoría de torsión le corresponde un único radical idempotente. Sea $\sigma \in R$-radidem. Sea $M \in \mathbb{T}_\sigma \cap \mathbb{F}_\sigma$, esto implica que $M = \sigma(M) = 0$. Sea $M \in \mathbb{T}_\sigma$ y $g : M \longrightarrow L$ un epimorfismo, se sigue que $L = g(M) = g(\sigma(M)) \leq \sigma(L) \leq L$. Por lo tanto $L \in \mathbb{T}_\sigma$. Sea $N \in \mathbb{F}_\sigma$ y $f : M \longrightarrow N$ un monomorfismo, se sigue que $f(\sigma(M)) \leq \sigma(N) = 0$. Por lo tanto $\sigma(M) = 0$ y $M \in \mathbb{F}_\sigma$.

Sea $M \in R$-Mod, luego existe la sucesión exacta $0 \longrightarrow \sigma(M) \longrightarrow M \longrightarrow M/\sigma(M) \longrightarrow 0$ con $\sigma(M) \in \mathbb{T}_\sigma$ y $M/\sigma(M) \in \mathbb{F}_\sigma$. Por lo tanto $(\mathbb{T}_\sigma, \mathbb{F}_\sigma)$ es una teoría de torsión $\square$

Proposición 1.80. ([36], Capítulo VI) *Dado $\sigma \in R$-pr, son equivalentes:*

1. *σ es exacto izquierdo.*

2. *Para toda $M \in R$-Mod y para todo $N \leq M$ se tiene que $\sigma(N) = N \cap \sigma(M)$.*

3. *σ es idempotente y $\mathbb{T}_\sigma$ es cerrada bajo monomorfismos.* □

Las siguientes correspondencias las usamos para caracterizar a los prerradicales exactos izquierdos que preservan productos como un funtor $\mathrm{Hom}_R(L, \_)$, pues los usaremos para generar relaciones bicerradas con respecto a $\mathcal{H}$.

Proposición 1.81. ([36], Capítulo VI) *Existe una correspondencia biunívoca entre R-lep y el conglomerado de todas las clases de pretorsión hereditarias.* □

Proposición 1.82. ([36], Capítulo VI) *Existe una correspondencia biunívoca entre el conglomerado de los radicales exactos izquierdos (R-lep$\cap R$-rad) y el conglomerado de todas las clases (teorías) de torsión hereditarias.* □

Notación 1.83. *Sea I un ideal izquierdo de R y sea $a \in R$. Denotamos con $(I : a)$ al ideal izquierdo $\{r \in R \mid ra \in I\}$.*

Definición 1.84. *Una familia $\mathscr{L}$ de ideales izquierdos del anillo R se llama* ***filtro lineal*** *si cumple las siguientes condiciones:*

1. *Si $I \in \mathscr{L}$ y $I \subseteq J$ entonces $J \in \mathscr{L}$.*

2. *Si $I, J \in \mathscr{L}$, entonces $I \cap J \in \mathscr{L}$.*

3. *Si $I \in \mathscr{L}$, $a \in R$ entonces $(I : a) \in \mathscr{L}$.*

Denotamos con $\mathscr{R}$-fil al conjunto de todos los filtros lineales de R.

Proposición 1.85. *Sea $I \leq R$ un ideal, entonces $\mathscr{L}_I = \{_RJ \leq R \mid I \subseteq J\}$ es un filtro lineal generado por I.*

Demostración. Sea $I \leq R$ un ideal,

1. Sea $J \in \mathscr{L}_I$ y $J \subseteq J'$, entonces $I \subseteq J \subseteq J'$. Por lo tanto $J' \in \mathscr{L}_I$.

2. Sean $J, J' \in \mathscr{L}_I$, luego $I \subseteq J \cap J'$. Por lo tanto $J \cap J' \in \mathscr{L}_I$.

3. Sean $J \in \mathscr{L}_I$ y $a \in R$. Sea $r \in I$, entonces $ra \in I$, esto implica que $r \in (J : a)$. Por lo tanto $I \subseteq (J : a)$, esto implica que $(J : a) \in \mathscr{L}_I$.

Conluimos que $\mathscr{L}_I$ es un filtro lineal. □

Definición 1.86. *Sean $M \in R$-Mod y $m \in M$. El **anulador** de m en R, es el ideal izquierdo $\{r \in R \mid rm = 0\}$ que es denotado como $ann(m)$. Y el **anulador** de M en R es el ideal izquierdo $\bigcap\limits_{m \in M} ann(m)$ que es denotado como $ann(M)$.*

Teorema 1.87. ([36], Capítulo VI) *Hay una correspondencia biunívoca entre el conglomerado de todas clases de pretorsión hereditarias y el conjunto de todos los filtros lineales de R.*

Demostración. Las asignaciones que dan la correspondencia biunívoca están dadas como:

1. $\mathbb{T} \longmapsto \mathscr{L}_{\mathbb{T}} = \{_R I \leq R \mid R/I \in \mathbb{T}\}$.

2. $\mathscr{L} \longmapsto \mathbb{T}_{\mathscr{L}} = \{M \in R\text{-Mod} \mid \forall\ m \in M,\ ann(m) \in \mathscr{L}\}$.

□

Observemos que el conglomerado de todas las clases de pretorsión hereditarias puede considerarse como un conjunto, esto como resultado del teorema anterior.

Proposición 1.88. *Existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de todos filtros lineales generados por un ideal y el conglomerado de todos los prerradicales exactos izquierdos tales que sus de clases de pretorsión hereditarias correspondientes son jansianas (son cerradas bajo productos directos).*

Demostración. Sea $\mathscr{L}_I \in \mathscr{R}\text{-}fil$ generado por $I \leq R$, por el Teorema 1.87 a $\mathscr{L}_I$ le corresponde una única clase de R-módulos $\mathbb{T}_{\mathscr{L}_I}$ que es de pretorsión hereditaria, falta ver que es cerrada bajo productos directos.

Observemos que si $M \in \mathbb{T}_{\mathscr{L}_I}$, entonces $ann(m) \in \mathscr{L}_I$ para toda $m \in M$ lo que significa que $I \subseteq ann(m)$ para toda $m \in M$, por lo tanto $IM \leq ann(M)M = 0$ y como consecuencia $\mathbb{T}_{\mathscr{L}_I} = \{M \in R\text{-Mod} \mid IM = 0\}$.

Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq \mathbb{T}_{\mathscr{L}_I}$, entonces $IM_\alpha = 0$ para toda $\alpha \in \Lambda$, por lo tanto $I(\prod\limits_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha) = \prod\limits_{\alpha \in \Lambda} IM_\alpha = 0$. Concluimos que $\prod\limits_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha \in \mathbb{T}_{\mathscr{L}_I}$ y $\mathbb{T}_{\mathscr{L}_I}$ es cerrada bajo productos directos.

Sea $\mathbb{T}$ una clase de pretorsión hereditaria cerrada bajo productos directos. Por el Teorema 1.87 a $\mathbb{T}$ le corresponde un único filtro lineal $\mathscr{L}_{\mathbb{T}}$. Falta ver que $\mathscr{L}_{\mathbb{T}}$ está generado por un ideal. Tenemos que $\mathscr{L}_{\mathbb{T}} = \{I \leq R \mid R/I \in \mathbb{T}\}$. Consideremos $I_0 = \bigcap \mathscr{L}_{\mathbb{T}}$ y veamos que $I_0 \in \mathscr{L}_{\mathbb{T}}$.

Para cada $I \in \mathscr{L}_{\mathbb{T}}$ tenemos que $R/I \in \mathbb{T}$. Consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[d, "\pi_I"'] & \prod\limits_{I \in \mathscr{L}_{\mathbb{T}}} R/I \arrow[dl, "p_I"] \\ R/I & \end{tikzcd}$$

f es inducida por la propiedad de universal del producto directo con

$$ker(f) = \bigcap_{I \in \mathscr{L}_{\mathbb{T}}} ker(\pi_I) = \bigcap_{I \in \mathscr{L}_{\mathbb{T}}} I = I_0$$

Por el primer Teorema de isomorfismo tenemos que $R/I_0 \cong Im(f) \leq \prod_{I \in \mathscr{L}_{\mathbb{T}}} R/I$ es decir, existe un monomorfismo

$$R/I_0 \longrightarrow Im(f) \longrightarrow \prod_{I \in \mathscr{L}_{\mathbb{T}}} R/I$$

como $\mathbb{T}$ es cerrada bajo monomorfismos y productos tenemos que $\prod_{I \in \mathscr{L}_{\mathbb{T}}} R/I \in \mathbb{T}$ y $R/I_0 \in \mathbb{T}$, lo que significa que $I_0 \in \mathscr{L}_{\mathbb{T}}$, es decir, $\mathscr{L}_{\mathbb{T}}$ tiene elemento menor y es I_0.

Demostraremos: $\mathscr{L}_{\mathbb{T}} = \mathscr{L}_{I_0}$.

$\subseteq$) Sea $I \in \mathscr{L}_{\mathbb{T}}$, entonces por la definición de I_0 tenemos que $I_0 \subseteq I$ lo que implica que $I \in \mathscr{L}_{I_0}$. Por lo tanto $\mathscr{L}_{\mathbb{T}} \subseteq \mathscr{L}_{I_0}$.

$\supseteq$) Sea $I \in \mathscr{L}_{I_0}$, entonces $I_0 \leq I$ y tenemos un epimorfismo $R/I_0 \longrightarrow R/I$. Como $R/I_0 \in \mathbb{T}$ entonces $R/I \in \mathbb{T}$ lo que significa que $I \in \mathscr{L}_{\mathbb{T}}$. Por lo tanto $\mathscr{L}_{\mathbb{T}} \supseteq \mathscr{L}_{I_0}$.

Por lo tanto $\mathscr{L}_{\mathbb{T}} = \mathscr{L}_{I_0}$. □

1.5.1. Ideales puros

Los resultados que presentamos en esta sección los usamos para caracterizar a los prerradicales exactos como un producto tensorial, puesto que esto nos ayudará cuando con pares adjuntos generemos relaciones bicerradas con respecto a $\mathcal{H}$.

Recordemos que un R-módulo M es plano si el funtor $\_ \otimes_R M$ es exacto.

Proposición 1.89. ([15], Proposición 4.12) *Sea $I \leq R$ un ideal derecho. Son equivalentes:*

1. *R/I es plano.*
2. *Para todo $M \in R$-Mod y $N \leq M$ se tiene que $IN = N \cap IM$.*
3. *Para todo $J \leq R$ se tiene que $IJ = I \cap J$.*
4. *Para cada $r \in I$ se tiene que $r \in Ir$.* □

De la proposición anterior tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.90. *Sea $I \leq R$ tal que R/I es plano, entonces I es idempotente.*

Demostración. Sea $I \leq R$ un ideal tal que R/I es plano, en la Proposición 1.89 tenemos que para todo $M \in R$-Mod y $N \leq M$, $IN = N \cap IM$, en particular para I tenemos $II = I \cap I = I$. Por lo tanto I es idempotente. □

Hacemos notar que todo prerradical preserva monomorfismos. Los prerradicales que preservan epimorfismos son α_I^R con $I \leq R$ ideal, por lo tanto para demostrar que α_I^R es exacto derecho basta demostrar que es exacto izquierdo.

Definición 1.91. *Sea I un ideal (bilateral) de R. Decimos que I es un **ideal puro** si y sólo si para todo ideal $J \leq R$ se tiene que $IJ = I \cap J$.*

Proposición 1.92. *$I \leq R$ es un ideal puro si y sólo si α_I^R es exacto.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sean $M \in R$-Mod y $N \leq M$, entonces como I es puro, por la Proposición 1.89 tenemos que

$$\alpha_I^R(N) = IN = N \cap IM = N \cap \alpha_I^R(M).$$

Debido a la Proposición 1.53 α_I^R es exacto izquierdo y como es un t-radical preserva epimorfismos lo que implica que α_I^R es exacto.

$\Leftarrow$) Sea α_I^R exacto, entonces para toda $M \in R$-Mod y $N \leq M$ tenemos que

$$IN = \alpha_I^R(N) = N \cap \alpha_I^R(M) = N \cap IM$$

por lo tanto de la Proposición 1.89 tenemos que $I \leq R$ es puro. $\square$

Corolario 1.93. *Sea σ un prerradical exacto, entonces $\sigma = \alpha_I^R$ con $I \leq R$ ideal puro.* $\square$

Proposición 1.94. *Sea $I \leq R$ un ideal puro, entonces $\alpha_I^R \cong I \otimes_R \_$.*

Demostración. Por hipótesis I es puro y por lo tanto α_I^R es exacto, por el Teorema B.4, $\alpha_I^R \cong L \otimes_R \_$ para algún $L \in R$-BiMod pues los prerradicales preservan coproductos. Luego tenemos que $\alpha_I^R \cong \alpha_I^R(R) \otimes_R \_ = I \otimes_R \_$. $\square$

Los siguientes lemas los usamos para dar un isomorfismo natural entre $R/I \otimes_R \_$ y un prerradical para cuando generemos relaciones bicerradas con pares adjuntos.

Lema 1.95. ([15], Lema 4.11) *Si $I \leq R$ es un ideal derecho entonces:*

1. *Para cada R-módulo izquierdo M existe un isomorfismo $\varphi_M : R/I \otimes_R M \longrightarrow M/IM$ tal que para cada $r + I \in R/I$ y $m \in M$ se tiene que $\varphi_M((r + I) \otimes m) = rm + IM$.*
2. *Para cada morfismo $f : N \longrightarrow M$ existe un morfismo $f^\# : N/IN \longrightarrow M/IM$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
R/I \otimes_R N \arrow[r, "R/I\otimes f"] \arrow[d, "\varphi_N"] & R/I \otimes_R M \arrow[d, "\varphi_M"] \\
N/IN \arrow[r, "f^\#"] & M/IM
\end{tikzcd}$$

$\square$

De la Proposición 1.61 y el Lema 1.95 tenemos el siguiente lema, con el cual caracterizamos a cada elemento del par adjunto $\langle R/I \otimes_R \_, \mathrm{Hom}_R(R/I, \_)\rangle$ como un coprerradical y un prerradical, donde I es ideal bilateral de R. Recordemos que $t(\sigma)$ es el totalizador de $\sigma \in R$-pr.

Lema 1.96. *Para cada ideal I de R, existen los isomorfismos naturales:*

1. $(\alpha_I^R)^* \cong R/I \otimes_R \_$.
2. $t(\alpha_I^R) \cong \mathrm{Hom}_R(R/I, \_)$.

Del lema anterior tenemos que para cada ideal $I \leq R$, $\langle(\alpha_I^R)^*, t(\alpha_I^R)\rangle : R\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}$ es par adjunto. En el siguiente resultado tenemos una caracterización de los prerradicales exactos izquierdos que preservan productos directos, para este propósito usaremos la correspondencia entre filtros de ideales generados por un ideal y prerradicales exactos izquierdos que preservan productos.

Proposición 1.97. *Sea $\sigma \in R$-lep que preserva productos directos, entonces existe un ideal $I \leq R$ tal que $\sigma = t(\alpha_I^R)$. En particular $\sigma \cong \mathrm{Hom}_R(R/I, \_)$.*

Demostración. Sea $\sigma \in R$-*lep*, entonces por la Proposición 1.81, $\mathbb{T}_\sigma$ es clase de pretorsión hereditaria cerrada bajo productos a la cual le corresponde un filtro lineal $\mathscr{L}_I$ generado por un ideal $I \leq R$.

Por la correspondencia biunívoca de las Proposiciones 1.82 y 1.88 tenemos que σ es tal que

$$\mathbb{T}_\sigma = \{M \mid \forall\ m \in M,\ ann(m) \in \mathscr{L}_I\} = \{M \in R\text{-Mod} \mid IM = 0\} = R/I\text{-Mod}.$$

esto significa que para toda $M \in R$-Mod, $\sigma(M) \cong M/IM$.

En la Proposición 1.61 tenemos que $t(\alpha_I^R) \cong \mathrm{Hom}_R(R/I, \_)$ y por lo tanto es un prerradical exacto izquierdo que preserva productos lo que significa que

$$\mathbb{T}_{t(\alpha_I^R)} = \{M \in R\text{-Mod} \mid t(\alpha_I^R)(M) = M\} = \{M \in R\text{-Mod} \mid IM = 0\} = \mathbb{T}_\sigma$$

por la correspondencia biunívoca entre filtros lineales generados por un ideal y prerradicales tales que su clase de pretorsión hereditaria es cerrada bajo productos tenemos que $\sigma = t(\alpha_I^R)$. Por lo anterior y por el Teorema B.8 (Watts-Eilenberg) tenemos que para cada prerradical σ exacto izquierdo que preserva productos existe un R-bimódulo $L = R/I$ tal que $\sigma \cong \mathrm{Hom}_R(R/I, \_)$ con $I \leq R$ ideal. $\square$

1.6. Funtores exactos

Los conceptos básicos de Teoría de Categorías se pueden consultar en [24] y [20]. En esta sección sólo damos algunas propiedades de los funtores exactos que más adelante usamos para obtener relaciones bicerradas con respecto a $\mathcal{H}$ inducidas por bifuntores casi continuos. Recordemos que en una categoría abeliana tenemos los conceptos de sucesión exacta y de funtor exacto (ver Apéndice A).

Definición 1.98. ([2], Capítulo 5) *Sean* $\mathscr{A}$ *y* $\mathscr{B}$ *categorías abelianas. Un funtor* $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ *es* ***exacto izquierdo*** *si para toda sucesión exacta* $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow 0$ *en* $\mathscr{A}$ *se tiene que la sucesión* $0 \longrightarrow F(N) \longrightarrow F(M) \longrightarrow F(L)$ *es exacta en* $\mathscr{B}$.

Proposición 1.99. ([2], Capítulo 5) *Sean* $\mathscr{A}$ *y* $\mathscr{B}$ *categorías abelianas. Para un funtor* $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ *son equivalentes:*

1. F *es exacto izquierdo.*
2. *Para cada sucesión exacta* $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow L$ *en* $\mathscr{A}$, *la sucesión*

   $0 \longrightarrow F(N) \longrightarrow F(M) \longrightarrow F(L)$ *es exacta en* $\mathscr{B}$. □

Definición 1.100. ([2], Capítulo 5) *Sean* $\mathscr{A}$ *y* $\mathscr{B}$ *categorías abelianas. Un funtor* $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ *es* ***exacto derecho*** *si para toda sucesión exacta* $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow 0$ *en* $\mathscr{A}$ *se tiene que la sucesión* $F(N) \longrightarrow F(M) \longrightarrow F(L) \longrightarrow 0$ *es exacta en* $\mathscr{B}$.

Proposición 1.101. ([2], Capítulo 5) *Sean* $\mathscr{A}$ *y* $\mathscr{B}$ *categorías abelianas. Para un funtor* $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ *son equivalentes:*

1. F *es exacto derecho.*
2. *Para cada sucesión exacta* $N \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow 0$ *en* $\mathscr{A}$, *la sucesión*

   $F(N) \longrightarrow F(M) \longrightarrow F(L) \longrightarrow 0$ *es exacta en* $\mathscr{B}$. □

Proposición 1.102. ([22], Capítulo I) *Sean* $\mathscr{A}$ *una categoría abeliana y* $E : M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ *una sucesión (no necesariamente exacta). Supongamos que para cada* $N \in \mathscr{A}$ *tenemos que la sucesión*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M'', N) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M, N) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M', N)$$

es exacta. Entonces E *es exacta.* □

Proposición 1.103. ([22], Capítulo I) *Sean* $\mathscr{A}$ *una categoría abeliana y* $E : 0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N''$ *una sucesión en* $\mathcal{A}$ *(no necesariamente exacta). Supongamos que para cada* $M \in \mathscr{A}$ *tenemos que la sucesión*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N') \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N'')$$

es exacta. Entonces E *es exacta.* □

1.7. Pares adjuntos

En esta sección damos la definición de par adjunto y algunas de sus propiedades. En el apéndice B se enuncian y se dan las demostraciones los Teoremas de Watts-Eilenberg (ver [32], Teoremas 5.45 y 5.50) que son muy importantes en nuestro de estudio relaciones bicerradas con respecto a $\mathcal{H}$ que son inducidas por pares adjuntos.

Definición 1.104. [24] *Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ categorías. Una **adjunción** de $\mathscr{A}$ a $\mathscr{B}$ es una tripleta $\langle F, G, \varphi\rangle : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ donde F y G son funtores*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, shift left, "F"] & \mathscr{B} \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$$

y donde φ es una función que asigna a cada par de objetos $A \in \mathscr{A}$ y $B \in \mathscr{B}$ una biyección

$$\varphi_{A,B} : \operatorname{Hom}_{\mathscr{B}}(F(A), B) \cong \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(A, G(B))$$

*que es natural en A y B. Al par $\langle F, G\rangle$ lo llamaremos **par adjunto**, a F **adjunto izquierdo** y a G **adjunto derecho**.*

Teorema 1.105. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías abelianas. Si $\langle F, G\rangle : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es un par adjunto, entonces F es exacto derecho y G es exacto izquierdo.*

Demostración. Sea $A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $\mathcal{A}$.

Aplicando el funtor $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(\_, G(B))$ tenemos que la sucesión:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A'', G(B)) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A, G(B)) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A', G(B))$$

es exacta en $\mathcal{A}$. Por la adjunción de $\langle F, G\rangle$ y los isomorfismos naturales

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A'', G(B)) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A, G(B)) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A', G(B)) \arrow[d, "\cong"] \\ 0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A''), B) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), B) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A'), B) \end{tikzcd}$$

se deduce para toda $B \in \mathcal{B}$ la exacticud de la sucesión

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A''), B) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), B) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A'), B)$$

Por la Proposición 1.102 tenemos que la sucesión $F(A') \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(A'') \longrightarrow 0$ es exacta. Concluimos que F es un funtor exacto derecho.

De la misma forma se demuestra que el funtor G es exacto izquierdo. $\square$

Teorema 1.106. ([20], Capítulo VII) *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías abelianas bicompletas. Si $\langle F, G\rangle : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es un par adjunto, entonces F preserva todos los límites pequeños y G preserva todos los colímites pequeños.*

$\square$

Capítulo 2

Teorema de Domenach-Leclerc

En esta tesis extendemos el concepto de teorías de torsión, esta extensión relaciona tres conceptos; *relaciones bicerradas, teorías de torsión y bifuntores casi continuos*. Por ejemplo, las relaciones bicerradas con respecto a $\mathcal{H}$ nos van a definir las teorías de torsión, teorías de torsión hereditarias y las **R**-teorías de torsión. Las teorías de torsión se definen usando la conexión de Galois a la que le corresponde (por el Teorema de Polaridades) la relación $\mathcal{H}$, esta conexión nos determina las familias de Moore $\mathcal{T}$-$tors$ y $\mathcal{L}$-$tors$ con las que trabajamos, con las cuales determinamos si una relación es bicerrada.

2.1. Teorema de Domenach-Leclerc

En este capítulo damos el concepto de relación bicerrada y un teorema que es fundamental en nuestro estudio de las relaciones bicerradas con respecto a los conglomerados $\mathcal{T}$-$tors$ y $\mathcal{L}$-$tors$, el cual llamamos *Teorema de Domenach-Leclerc* (ver [11], Teorema 4.1), pues partiremos del hecho de que las teorías de torsión inducen una conexión de Galois específica sobre $\wp(R\text{-Mod})$. El Teorema 1.27 (de Polaridades) resulta ser un caso particular del Teorema de Domenach-Leclerc como veremos más adelante.

Aunque estamos interesados en el caso de que A sea una clase y por lo tanto $\wp(A)$ resulte ser un conglomerado, damos las siguientes definiciones para conjuntos como en [11] sección 3 y 4. Esto no afecta el desarrollo de este trabajo, como se explica en el apéndice C.

Definición 2.1. *Sean A un conjunto, $\varphi : \wp(A) \longrightarrow \wp(A)$ un operador cerradura y $\Phi \subseteq Im(\varphi)$.*[1] *Si Φ satisface:*

1. $A \in \Phi$.
2. $\Phi' \subseteq \Phi$ *implica* $\bigcap \Phi' \in \Phi$. [2]

*entonces Φ es llamada una **familia de Moore** y llamamos a (A, φ) un espacio cerradura.*

Notemos que para cada operador cerradura $\varphi : \wp(A) \longrightarrow \wp(A)$, $Im(\varphi)$ es una familia de Moore, pues $A \subseteq \varphi(A) \subseteq A$ y es cerrada bajo intersecciones arbitrarias (ver Proposición 1.8).

[1] En [11] toman la familia de Moore como $\Phi = Im(\varphi)$.
[2] Considerando $\Phi' = \emptyset$ obtenemos 1.

Definición 2.2. *Sean (A, φ) y (B, φ') dos espacios cerradura con sus correspondientes familias de Moore Φ y Φ' respectivamente. Se dice que una relación $\mathbf{R} \in \wp(A \times B)$ es* ***bicerrada*** *con respecto a Φ y Φ' si satisface:*

1. *Para todo $a \in A$, $a\mathbf{R} \in \Phi'$, donde $a\mathbf{R} = \{b \in B \mid (a, b) \in \mathbf{R}\}$.*

2. *Para todo $b \in B$, $\mathbf{R}b \in \Phi$, donde $\mathbf{R}b = \{a \in A \mid (a, b) \in \mathbf{R}\}$.*

El conjunto de todas las relaciones bicerradas lo denotamos por $\mathcal{R}_{\varphi\varphi'}$.

Observación 2.3. *Si A es una clase propia, entonces seguiremos llamando espacio cerradura al par (A, φ) y una de familia de Moore al conglomerado Φ, al igual que en el caso de conjuntos. De forma similar, si A y B son clases, entonces cada relación $\mathbf{R} \in \wp(A \times B)$ es una clase y por lo tanto $\mathcal{R}_{\varphi\varphi'}$ es el conglomerado de todas relaciones bicerradas con respecto a los conglomerados Φ y Φ'. Esto no causa problemas como se explica en el apéndice C.*

El conjunto de relaciones bicerradas cumple las condiciones 1 y 2 de la definición 2.1 como se demuestra a continuación.

Proposición 2.4. *Sean $(A, \varphi), (B, \varphi')$ dos espacios cerradura, Φ y Φ' sus familias de Moore correspondientes. El conjunto de relaciones bicerradas $\mathcal{R}_{\varphi\varphi'}$ con respecto a Φ y Φ' cumple:*

1. *$A \times B \in \mathcal{R}_{\varphi\varphi'}$.*

2. *Para cada $\{\mathbf{R}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq \mathcal{R}_{\varphi\varphi'}$, $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} \mathbf{R}_\alpha \in \mathcal{R}_{\varphi\varphi'}$.*

Demostración.

1. Tenemos que $A \in \Phi$ y $B \in \Phi'$, se sigue que $a(A \times B) = \{b \in B \mid (a, b) \in A \times B\} = B \in \Phi'$ para toda $a \in A$ y $(A \times B)b = \{a \in A \mid (a, b) \in A \times B\} = A \in \Phi$ para toda $b \in B$. Por lo tanto $A \times B \in \mathcal{R}_{\varphi\varphi'}$.

2.
   a) Para toda $a \in A$ y toda $\alpha \in \Lambda$ tenemos que $a\mathbf{R}_\alpha \in \Phi'$, esto implica que $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} a\mathbf{R}_\alpha \in \Phi'$, además tenemos $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} a\mathbf{R}_\alpha = a(\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} \mathbf{R}_\alpha)$.

   b) Para toda $b \in B$ y toda $\alpha \in I$ tenemos que $\mathbf{R}_\alpha b \in \Phi$ esto implica que $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} \mathbf{R}_\alpha b \in \Phi$, además tenemos $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} \mathbf{R}_\alpha b = (\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} \mathbf{R}_\alpha)b$.

   Concluimos que $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} \mathbf{R}_\alpha \in \mathcal{R}_{\varphi\varphi'}$.

$\square$

A continuación damos las asignaciones para la demostración del Teorema de Domenach-Leclerc. En [11] se definen dos asignaciones μ y ν de la siguiente forma:

Sean $(A,\varphi),(B,\varphi')$ dos espacios cerradura, Φ y Φ' sus familias de Moore correspondientes.

Sea $\mu : \wp(A\times B) \longrightarrow \Phi'^{\Phi} \times \Phi^{\Phi'}$ definida como $\mu(\mathbf{R}) = \langle \mu_1(\mathbf{R}), \mu_2(\mathbf{R})\rangle$, donde las componentes están dadas como

$$\mu_1(\mathbf{R}) : \Phi \longrightarrow \Phi',\ \mu_1(\mathbf{R})(U) = \varphi'(\bigcap_{a\in U} a\mathbf{R}),\ U \in \Phi$$

$$\mu_2(\mathbf{R}) : \Phi' \longrightarrow \Phi,\ \mu_2(\mathbf{R})(V) = \varphi(\bigcap_{b\in V} \mathbf{R}b),\ V \in \Phi'.$$

Definimos las asignaciones:

$$\nu_1 : \Phi'^{\Phi} \longrightarrow \wp(A\times B),\ \nu_1(f) = \{(a,b) \in A\times B \mid b \in f(\varphi(\{a\}))\}$$

$$\nu_2 : \Phi^{\Phi'} \longrightarrow \wp(A\times B),\ \nu_2(g) = \{(a,b) \in A\times B \mid a \in g(\varphi'(\{b\}))\}$$

Donde Φ'^{Φ} es el conjunto de funciones $f : \Phi \longrightarrow \Phi'$ y $\Phi^{\Phi'}$ es el conjunto de funciones $g : \Phi' \longrightarrow \Phi$.

Proposición 2.5. ([11], Sección 4) *Sean $(A,\varphi),(B,\varphi')$ dos espacios cerradura, Φ y Φ' sus familias de Moore correspondientes. Entonces:*

1. *Para cada $\mathbf{R} \in \wp(A\times B)$ las asignaciones $\mu_1(\mathbf{R})$ y $\mu_2(\mathbf{R})$ son antítonas.*
2. *Las asignaciones μ_1 y μ_2 son isótonas.*
3. *Las asignaciones ν_1 y ν_2 son isótonas.*
4. *Si $\mathbf{R} \in \mathcal{R}_{\varphi\varphi'}$ entonces $\mu(\mathbf{R}) \in Gal(\Phi,\Phi')$.*
5. *Si $f \in Gal(\Phi,\Phi')$ entonces $\nu_1(f_+) = \nu_2(f^+)$ y $\nu_1(f_+) \in \mathcal{R}_{\varphi\varphi'}$.*

Demostración.

1. Sea $\mathbf{R} \in \wp(A\times B)$ y sean $U,U' \in \wp(A)$ tales que $U \subseteq U'$, luego $\bigcap_{a\in U} a\mathbf{R} \supseteq \bigcap_{a\in U'} a\mathbf{R}$ lo que implica que $\mu_1(\mathbf{R})(U) = \varphi'(\bigcap_{a\in U} a\mathbf{R}) \supseteq \varphi'(\bigcap_{a\in U'} a\mathbf{R}) = \mu_1(\mathbf{R})(U')$. Concluimos que $\mu_1(\mathbf{R})$ es una asignación antítona, de la misma forma se prueba que $\mu_2(\mathbf{R})$ es una asignación antítona.

2. Sean $\mathbf{R},\mathbf{S} \in \wp(A\times B)$ tales que $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{S}$, entonces para toda $a \in A$ se tiene que $a\mathbf{R} \subseteq a\mathbf{S}$ lo que implica que $\bigcap_{a\in U} a\mathbf{R} \subseteq \bigcap_{a\in U} a\mathbf{S}$ para toda $U \in \wp(A)$, esto a su vez implica que $\mu_1(\mathbf{R})(U) = \varphi'(\bigcap_{a\in U} a\mathbf{R}) \subseteq \varphi'(\bigcap_{a\in U} a\mathbf{S})(U) = \mu_1(\mathbf{S})(U)$. De la misma forma se prueba que μ_2 es una asignación isótona.

3. Sean $f_1, f_2 \in \Phi'^{\Phi}$ tales que $f_1 \leq f_2$, luego como φ preserva el orden tenemos para toda $a \in A$ que $f_1(\varphi(\{a\})) \subseteq f_2(\varphi(\{a\}))$. Se sigue que

$$\{(a,b) \in A \times B \mid b \in f_1(\varphi(\{a\}))\} \subseteq \{(a,b) \in A \times B \mid b \in f_2(\varphi(\{a\}))\}$$

esto implica que $\nu_1(f_1) \subseteq \nu_1(f_2)$. Por lo tanto ν_1 preserva el orden.

De forma análoga se demuestra que ν_2 preserva el orden.

4. Sea $\mathbf{R} \in \mathcal{R}_{\varphi\varphi'}$. Por 2 tenemos que $\mu_1(\mathbf{R}) : \Phi \longrightarrow \Phi'$ y $\mu_2(\mathbf{R}) : \Phi' \longrightarrow \Phi$ son dos asignaciones antítonas. Demostraremos que $\mu_2(\mathbf{R}) \circ \mu_1(\mathbf{R})$ y $\mu_1(\mathbf{R}) \circ \mu_2(\mathbf{R})$ son operadores cerradura. Sea $U \in \Phi$, luego $\mu_1(\mathbf{R})(U) = \varphi'(\bigcap_{a \in U} a\mathbf{R})$ y

$$\mu_2(\mathbf{R})(\mu_1(\mathbf{R})(U)) = \varphi(\bigcap_{b \in \mu_1(\mathbf{R})(U)} \mathbf{R}b) \supseteq U$$

Por lo tanto $\mu_2(\mathbf{R}) \circ \mu_1(\mathbf{R})$ es un operador cerradura y de la misma forma lo es $\mu_1(\mathbf{R}) \circ \mu_2(\mathbf{R})$. Concluimos que $\mu(\mathbf{R}) = \langle \mu_1(\mathbf{R}), \mu_2(\mathbf{R}) \rangle \in Gal(\Phi, \Phi')$.

5. Por el Teorema 1.27 tenemos para cada $f \in Gal(\Phi, \Phi')$ tenemos que

$\nu_1(f_+) = \{(a,b) \in A \times B \mid b \in f_+(\varphi(\{a\}))\} = \{(a,b) \in A \times B \mid a \in f^+(\varphi'(\{b\}))\} = \nu_2(f^+)$.

Por lo tanto $\nu_1 = \nu_2$.

Sea $a \in A$, entonces $a\nu_1(f_+) = \{b \in B \mid b \in f_+(\varphi(\{a\}))\} \in \Phi'$. De la misma forma para toda $b \in B$ tenemos que $\nu_1(f_+)b \in \Phi$. Por lo tanto $\nu_1(f^+) \in \mathcal{R}_{\varphi\varphi'}$.

□

El siguiente teorema es fundamental en esta tesis, puesto que es el punto de partida. El teorema se enuncia para conjuntos (como viene en [11], Teorema 4.1) pero se puede aplicar cuando A y B son clases propias.

Teorema 2.6. (**Domenach-Leclerc**) ([11], Teorema 4.1) *Sean A y B dos conjuntos. Sean (A, φ) y (B, φ') dos espacios cerradura con sus correspondientes familias de Moore Φ y Φ' respectivamente. Existe un isomorfismo de orden entre $\langle \mathcal{R}_{\varphi\varphi'}, \subseteq \rangle$ y $\langle Gal(\Phi, \Phi'), \leq \rangle$.*

Demostración. Sean $\mathbf{R} \in \mathcal{R}_{\varphi\varphi'}$ y $f \in Gal(\Phi, \Phi')$. Por la Proposición 2.5, $\mu(\mathbf{R}) \in Gal(\Phi, \Phi')$ y $\nu_1(f_+) = \nu_2(f^+) \in \mathcal{R}_{\varphi\varphi'}$.

Sea $\nu : Gal(\Phi, \Phi') \longrightarrow \wp(A \times B)$, y por la Proposición 2.5 sea $\nu(f) := \nu_1(f_+) = \nu_2(f^+)$. *Se demostrará:* $\nu\mu(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$.

$\subseteq$) Sea $(a,b) \in \nu\mu(\mathbf{R})$ y consideraremos $\mu(\mathbf{R}) = (f)_{\mathbf{R}}$, se sigue que $\nu\mu(\mathbf{R}) = \nu((f)_{\mathbf{R}}) = \{(a,b) \mid b \in f_{\mathbf{R}}(\varphi(\{a\}))\}$, por lo tanto $b \in f_{\mathbf{R}}(\varphi(\{a\})) = \bigcap_{x \in \varphi(\{a\})} x\mathbf{R} \subseteq a\mathbf{R}$ lo que implica que $(a,b) \in \mathbf{R}$ pues $a \in \varphi(\{a\})$. Concluimos que $\nu\mu(\mathbf{R}) \subseteq \mathbf{R}$.

$\supseteq$) Sea $b \in a\mathbf{R}$, luego $(a,b) \in \mathbf{R}$ lo que implica que $a \in \mathbf{R}b$ y $\{a\} \subseteq \mathbf{R}b$ por lo tanto $\varphi(\{a\}) \subseteq \mathbf{R}b$, luego si $x \in \varphi(\{a\})$ implica que $x \in \mathbf{R}b$, se sigue que $(x,b) \in \mathbf{R}$ y $b \in x\mathbf{R}$.

Por lo tanto $a\mathbf{R} \subseteq \bigcap_{x\in\varphi(\{a\})} x\mathbf{R} = \varphi'(\bigcap_{x\in\varphi(\{a\})} x\mathbf{R}) = f_{\mathbf{R}}(\varphi(\{a\}))$. Concluimos que $b \in f_{\mathbf{R}}(\varphi(\{a\}))$ lo que implica que $(a,b) \in \nu\mu(\mathbf{R})$.

Por lo tanto $\mathbf{R} \subseteq \nu\mu(\mathbf{R})$, luego $\nu\mu(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$.

Se demostrará: $\mu\nu(f) = f$.

Sea $f \in Gal(\Phi,\Phi')$, tenemos para todo $U \in \Phi$ tenemos que $U = \bigcup_{a\in U} \varphi(\{a\}) = \varphi(\bigcup_{a\in U} \varphi(\{a\}))$, luego $f_+(U) = \bigcap_{a\in U} f_+(\varphi(\{a\})) = \bigcap_{a\in U} a\nu(f) = f_{\nu(f)}(U)$.

Por lo tanto $f_+ = f_{\nu(f)}|_{\Phi,\Phi'}$

De forma análoga $f^+ = f^{\nu(f)}|_{\Phi,\Phi'}$. Por la proposición anterior $\mu\nu(f) = (f)_{\nu(f)}|_{\Phi,\Phi'} = f$.

Concluimos que $\langle \mathcal{R}_{\varphi\varphi'}, \subseteq\rangle \cong \langle Gal(\Phi,\Phi'), \leq\rangle$. □

El Teorema de Polaridades es un caso particular del Teorema de Domenach-Leclerc como lo mostramos.

Observación 2.7. *Sean A y B dos clases, $\varphi : \wp(A) \longrightarrow \wp(A)$ y $\varphi' : \wp(B) \longrightarrow \wp(B)$ operadores cerradura dados como la identidad y las familias de Moore $\Phi = \wp(A)$ y $\Phi' = \wp(B)$, de esta forma $\mathcal{R}_{\varphi\varphi'} = \wp(A\times B)$ y para cada $\mathbf{R} \in \mathcal{R}_{\varphi\varphi'}$ y $(f)_{\mathbf{R}} \in Gal(\wp(A),\wp(B))$ tenemos que:*

$$f_{\mathbf{R}}(\{a\}) = \{b \in B \mid (a,b) \in \mathbf{R}\} = a\mathbf{R},\ a \in A,$$

$$f^{\mathbf{R}}(\{b\}) = \{a \in A \mid (a,b) \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}b,\ b \in B,$$

por lo tanto

$$f_{\mathbf{R}}(U) = \bigcap_{a\in U} a\mathbf{R},\ U \in \wp(A) \quad y \quad f^{\mathbf{R}}(V) = \bigcap_{b\in V} \mathbf{R}b,\ V \in \wp(B).$$

2.2. Teorías de torsión como una conexión de Galois

En esta sección vemos cómo las teorías de torsión y las teorías de torsión hereditarias en R-Mod son inducidas por dos conexiones de Galois sobre $\wp(R\text{-Mod})$, a las cuales les corresponden (por el Teorema de Polaridades) las relaciones; $\mathcal{H}$ y $\hbar$ definidas, como $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,N) = 0$ y $\mathrm{Hom}_R(M,E(N)) = 0$, respectivamente. De esta forma, veremos que todo miembro del conglomerado $(f)_\hbar$-*cerr* resulta ser miembro del conglomerado $(f)_{\mathcal{H}}$-*cerr* y todo miembro del conglomerado *cerr*-$(f)_\hbar$ resulta ser miembro del conglomerado *cerr*-$(f)_{\mathcal{H}}$. Esto nos motiva a definir un preorden $\preceq$ en $Gal(\wp(R\text{-Mod}),\wp(R\text{-Mod}))$. Con esta relación tendremos el concepto de *relación bicerrada con respecto a otra relación* y el de *conexión de Galois bicerrada con respecto a otra conexión de Galois*, por consiguiente tendremos el conglomerado de todas las relaciones bicerradas con respecto a $\mathcal{H}$.

Al igual que Dickson en [10], la siguiente definición y las siguientes proposiciones (excepto para el caso hereditario, donde interviene la cápsula inyectiva) se plantean para categorías abelianas, ya que en ellas tenemos productos y coproductos, y los conceptos de sucesión exacta y funtor exacto (ver Apéndice A).

Notación 2.8. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana. Definimos*

$$\mathcal{H} := \{(M,N) \in \mathcal{A}^2 \mid \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,N) = 0\}, \textit{ donde } \mathcal{A}^2 = \mathcal{A} \times \mathcal{A}.$$

La relación $\mathcal{H}$ es fundamental en nuestro estudio ya que su polaridad correspondiente $(f)_{\mathcal{H}} \in Gal(\wp(\mathcal{A}), \wp(\mathcal{A}))$ induce las familias de Moore $(f)_{\mathcal{H}}$-*cerr* y *cerr*-$(f)_{\mathcal{H}}$ con las que vamos a trabajar. La siguiente demostración se desarrolla por completo pues nos da una idea de como podemos generar relaciones bicerradas usando bifuntores.

Proposición 2.9. *Sean $\mathcal{A}$ una categoría abeliana bicompleta y $(f)_{\mathcal{H}} \in Gal(\wp(\mathcal{A}), \wp(\mathcal{A}))$. Para cada $\mathscr{C} \in \wp(\mathcal{A})$:*

1. *$f^{\mathcal{H}}(\mathscr{C})$ es una clase de torsión.*
2. *$f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C})$ es una clase libre de torsión.*

Demostración. Sea $\mathscr{C} \in \wp(\mathcal{A})$

1. Demostraremos que $f^{\mathcal{H}}(\mathscr{C})$ es una clase de torsión.

   $f^{\mathcal{H}}(\mathscr{C})$ es cerrada bajo epimorfismos: Sea $g : M \longrightarrow L$ un epimorfismo con $M \in f^{\mathcal{H}}(\mathscr{C})$ y $L \in \mathcal{A}$. Sea $N \in \mathscr{C}$, se sigue que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(L,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,N)$ es monomorfismo con $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,N) = 0$, por lo tanto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(L,N) = 0$, esto implica que $L \in f^{\mathcal{H}}(\mathscr{C})$.

   $f^{\mathcal{H}}(\mathscr{C})$ es cerrada bajo coproductos: Sean $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq f^{\mathcal{H}}(\mathscr{C})$ y $N \in \mathscr{C}$, tenemos para cada $\alpha \in \Lambda$ que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M_\alpha, N) = 0$ por lo tanto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha, N) \cong \prod_{\alpha\in\Lambda} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M_\alpha, N) = 0$. Por lo tanto $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha \in f^{\mathcal{H}}(\mathscr{C})$.

   $f^{\mathcal{H}}(\mathscr{C})$ es cerrada bajo extensiones: Sea $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta con $M', M'' \in f^{\mathcal{H}}(\mathscr{C})$ y $M \in \mathcal{A}$. Sea $N \in \mathscr{C}$, luego tenemos que la sucesión

   $$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M'',N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M',N)$$

   es exacta con $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M'',N) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M',N) = 0$, lo que implica que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,N) = 0$. Por lo tanto $M \in f^{\mathcal{H}}(\mathscr{C})$.

   Concluimos que $f^{\mathcal{H}}(\mathscr{C})$ es una clase de torsión.

2. Demostraremos que $f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C})$ es una clase libre de torsión.

   $f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C})$ es cerrada bajo monomorfismos: Sea $L \longrightarrow N$ un monomorfismo con $N \in f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C})$ y $L \in \mathcal{A}$. Sea $M \in \mathscr{C}$, luego $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,L) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,N)$ es un monomorfismo con $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,N) = 0$, lo que implica que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,L) = 0$. Por lo tanto $L \in f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C})$.

   $f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C})$ es cerrada bajo productos: Sean $\{N_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C})$ y $M \in \mathscr{C}$, luego para cada $\alpha \in \Lambda$ tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N_\alpha) = 0$, por lo tanto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, \prod_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha) \cong \prod_{\alpha\in\Lambda} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N_\alpha) = 0$. Por lo tanto $\prod_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha \in f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C})$.

$f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C})$ es cerrada bajo extensiones: Sea $0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta con $N', N'' \in f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C})$ y $N \in \mathcal{A}$. Sea $M \in \mathscr{C}$, luego tenemos que la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N'')$$

es exacta con $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N') = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N'') = 0$, esto implica que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) = 0$. Por lo tanto $N \in f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C})$.

Concluimos que $f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C})$ es clase libre de torsión.

□

Con la conexión de Galois $(f)_{\mathcal{H}}$ podemos definir e inducir las teorías de torsión.

Proposición 2.10. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana bicompleta. Para $(f)_{\mathcal{H}} \in Gal(\wp(\mathcal{A}), \wp(\mathcal{A}))$ y toda $\mathscr{C} \in \wp(\mathcal{A})$, se tiene que $(f^{\mathcal{H}} f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C}), f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C}))$ y $(f^{\mathcal{H}}(\mathscr{C}), f_{\mathcal{H}} f^{\mathcal{H}}(\mathscr{C}))$ son teorías de torsión.*

Demostración. Sea $\mathscr{C} \in \wp(\mathcal{A})$, luego tenemos que:

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C}) &= \{N \in \mathcal{A} \mid (M, N) \in \mathcal{H}, \forall\ M \in \mathscr{C}\} \\ &= \{N \in \mathcal{A} \mid \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) = 0, \forall\ M \in \mathscr{C}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{\mathcal{H}} f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C}) &= \{M \in \mathcal{A} \mid (M, N) \in \mathcal{H}, \forall\ N \in f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C})\} \\ &= \{M \in \mathcal{A} \mid \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) = 0, \forall\ N \in f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C})\} \end{aligned}$$

Probaremos que la pareja $(f^{\mathcal{H}} f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C}), f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C}))$ cumple las condiciones de la Definición 1.35.

1. Sea $M \in f^{\mathcal{H}} f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C}) \cap f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C})$, se sigue que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, M) = 0$ y entonces $M = 0$.

2. Por la Proposición 2.9 $f^{\mathcal{H}}(f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C}))$ es clase de torsión y por lo tanto es cerrada bajo epimorfismos.

3. Por la Proposición 2.9 $f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C})$ es una clase libre de torsión y por lo tanto es cerrada bajo monomorfismos.

4. Sean $A \in \mathcal{A}$ y $\tau = \bigwedge_{N \in f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C})} \omega_0^N$ que es un radical idempotente (ver Proposición 1.71).

   Sea $0 \longrightarrow \tau(A) \longrightarrow A \longrightarrow A/\tau(A) \longrightarrow 0$ una sucesión exacta, donde $A/\tau(A) \in f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C})$ pues $\tau(A/\tau(A)) = 0$ (ver Definición 1.72 y Proposición 1.77). Veamos que $\tau(A) \in f^{\mathcal{H}} f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C})$; sean $N \in f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C})$ y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\tau(A), N)$, luego $f(\tau(\tau(A))) = f(\tau(A)) \leq \tau(N) = 0$. Por lo tanto $f = 0$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\tau(A), N) = 0$ para todo $N \in f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C})$. Concluimos que $\tau(A) \in f^{\mathcal{H}} f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C})$.

Por lo tanto $(f^{\mathcal{H}} f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C}), f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C}))$ es una teoría de torsión. De forma análoga se demuestra que $(f^{\mathcal{H}}(\mathscr{C}), f_{\mathcal{H}} f^{\mathcal{H}}(\mathscr{C}))$ es una teoría de torsión. □

Las asignaciones $f_{\mathcal{H}}$ y $f^{\mathcal{H}}$ son las denotadas como R y L por Dickson en [10], sección 3, Proposiciones 3.1, 3.2 y 3.3. De esta forma tenemos una definición equivalente de teorías de torsión (ver definición 1.35) usando la conexión de Galois $(f)_{\mathcal{H}}$.

Definición 2.11. *Una* ***teoría de torsión*** *para una categoría abeliana bicompleta* $\mathcal{A}$*, es una pareja ordenada* $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ *de clases de objetos de* $\mathscr{A}$ *tales que* $f_{\mathcal{H}}(\mathbb{T}) = \mathbb{F}$ *y* $f^{\mathcal{H}}(\mathbb{F}) = \mathbb{T}$.

Usando la definición anterior podemos determinar nuestras familias de Moore $(f)_{\mathcal{H}}$-*cerr* y *cerr*-$(f)_{\mathcal{H}}$ con las que vamos a trabajar a lo largo de esta investigación.

Proposición 2.12. *Sean* $(f)_{\mathcal{H}} \in Gal(\wp(\mathcal{A}), \wp(\mathcal{A}))$ *entonces:*

1. $(f)_{\mathcal{H}}$-*cerr* $= \mathcal{T}$-*tors*.
2. *cerr*-$(f)_{\mathcal{H}} = \mathcal{L}$-*tors*.

Demostración.

1. Por la Proposición 2.9 tenemos que $(f)_{\mathcal{H}}$-*cerr* $\subseteq \mathcal{T}$-*tors*. Sea $\mathbb{T} \in \mathcal{T}$-*tors*, luego
$$\mathbb{T} = \{M \in R\text{-Mod} \mid \mathrm{Hom}_R(M, N) = 0, \forall\ N \in \mathbb{F}\} = f^{\mathcal{H}}(\mathbb{F})$$
donde $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ es una teoría de torsión. Luego $\mathbb{T} \in (f)_{\mathcal{H}}$-*cerr*, lo que implica que $\mathcal{T}$-*tors* $\subseteq (f)_{\mathcal{H}}$-*cerr*.

   Concluimos que $(f)_{\mathcal{H}}$-*cerr* $= \mathcal{T}$-*tors*.

2. Por la Proposición 2.9 tenemos que *cerr*-$(f)_{\mathcal{H}} \subseteq \mathcal{L}$-*tors*. Sea $\mathbb{F} \in \mathcal{L}$-*tors*, luego
$$\mathbb{F} = \{N \in R\text{-Mod} \mid \mathrm{Hom}_R(M, N) = 0, \forall\ M \in \mathbb{T}\} = f_{\mathcal{H}}(\mathbb{T})$$
donde $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ es una teoría de torsión. Por lo tanto $\mathbb{F} \in$ *cerr*-$(f)_{\mathcal{H}}$, lo que implica que $\mathcal{L}$-*tors* $\subseteq$ *cerr*-$(f)_{\mathcal{H}}$.

   Concluimos que *cerr*-$(f)_{\mathcal{H}} = \mathcal{L}$-*tors*.

□

La siguiente proposición nos ayuda a determinar los cerrados de conexiones de Galois inducidas por ciertos bifuntores casi continuos que definiremos en el capítulo 3.

Proposición 2.13. $\mathscr{C} \in \wp(\mathcal{A})$. *Entonces:*

1. $f^{\mathcal{H}} f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C})$ *es la menor clase de torsión que contiene a* $\mathscr{C}$.
2. $f^{\mathcal{H}} f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C})$ *es la menor clase libre de torsión que contiene a* $\mathscr{C}$.

Demostración.

1. Tenemos que $\mathscr{C} \subseteq f^{\mathcal{H}} f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C})$, pues $f^{\mathcal{H}} f_{\mathcal{H}}$ es un operador cerradura. Sea $\mathbb{T}$ una clase de torsión tal que $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{T}$ entonces $\mathscr{C} \subseteq f^{\mathcal{H}} f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C}) \subseteq f^{\mathcal{H}} f_{\mathcal{H}}(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$, esto significa que $f^{\mathcal{H}} f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C})$ es la menor clase de torsión que contiene a $\mathscr{C}$.
2. Se demuestra de la misma forma que en 1.

□

A continuación damos la Proposición 3.1 que viene en [10] usando la Proposición 1.16 y la conexión de Galois $(f)_{\mathcal{H}}$.

Proposición 2.14. *Para cada $\mathscr{C} \in \wp(\mathcal{A})$ se tiene que:*

1. $f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C}) \cap \mathscr{C} = \{0\}$ *y* $f^{\mathcal{H}}(\mathscr{C}) \cap \mathscr{C} = \{0\}$.
2. *Si* $\{\mathscr{C}_i\}_{i\in X}$ *es una familia de clases de objetos de* $\mathscr{A}$, *entonces* $f_{\mathcal{H}}(\bigcup_{i\in X}\mathscr{C}_i) = \bigcap_{i\in X} f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C}_i)$ *y* $f^{\mathcal{H}}(\bigcup_{i\in X}\mathscr{C}_i) = \bigcap_{i\in X} f^{\mathcal{H}}(\mathscr{C}_i)$.

□

Las teorías de torsión hereditarias también se pueden definir usando una conexión de Galois sobre $\wp(R\text{-Mod})$, así pues vamos a definir la relación que les corresponde.

Notación 2.15. $(R\text{-Mod})^2 := R\text{-Mod} \times R\text{-Mod}$ *y con* $E(N)$ *denotamos la cápsula inyectiva de* N*, además definimos:*

$$\hbar := \{(M,N) \in (R\text{-Mod})^2 \mid \mathrm{Hom}_R(M, E(N)) = 0\}.$$

Con la relación $\hbar$ vamos a definir las teorías de torsión hereditarias (como en la Definición 2.11) usando la conexión de Galois correspondiente, la cual demostraremos que está contenida y es bicerrada con respecto a $\mathcal{H}$. Recordemos que para cada familia $\{N_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq R\text{-Mod}$ se cumple que $E(\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha) \cong \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} E(N_\alpha)$ y por lo tanto $\mathrm{Hom}_R(M, E(\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha)) \cong \mathrm{Hom}_R(M, \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} E(N_\alpha)) \cong \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} \mathrm{Hom}_R(M, E(N_\alpha))$.

Proposición 2.16. *Sea* $(f)_\hbar \in Gal(\wp(R\text{-Mod}), \wp(R\text{-Mod}))$*. Para cada* $\mathscr{C} \in \wp(R\text{-Mod})$*:*

1. $f^\hbar(\mathscr{C})$ *es una clase de torsión hereditaria.*
2. $f_\hbar(\mathscr{C})$ *es una clase libre de torsión hereditaria.*

Demostración. Sea $\mathscr{C} \in \wp(R\text{-Mod})$. Usando el hecho de que para todo $M, N \in R\text{-Mod}$, $\mathrm{Hom}_R(M, E(N)) = 0$ implica que $\mathrm{Hom}_R(M, N) = 0$, usando este hecho, podemos deducir la demostración con en la Proposición 2.9. Así tenemos que $f^\hbar(\mathscr{C})$ es una clase de torsión y $f_\hbar(\mathscr{C})$ es una clase libre de torsión. Sólo falta demostrar lo siguiente:

1. *$f^\hbar(\mathscr{C})$ es cerrada bajo monomorfismos.* Sean $L \xrightarrow{f} M$ un monomorfismo con $M \in f^\hbar(\mathscr{C})$, $L \neq 0$ y $N \in \mathscr{C}$. Sea $g \in \mathrm{Hom}_R(L, E(N))$, entonces $g(L) \cap N = 0$ pues $\mathrm{Hom}_R(M, E(N)) = 0$ y f es un monomorfismo lo que implica que $g = 0$. Por lo tanto $L \in f^\hbar(\mathscr{C})$, concluimos que $f^\hbar(\mathscr{C})$ es una clase de torsión hereditaria.
2. *$f_\hbar(\mathscr{C})$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas.* Sean $N \in f_\hbar(\mathscr{C})$ y $M \in \mathscr{C}$. Sea $g \in \mathrm{Hom}_R(M, E(N))$. Como $g(M) \leq E(N)$ y $\mathrm{Hom}_R(M, N) = 0$ tenemos que $g(M) \cap N = 0$, esto implica que $g(M) = 0$. Por lo tanto $E(N) \in f_\hbar(\mathscr{C})$, concluimos que $f_\hbar(\mathscr{C})$ es una clase libre de torsión hereditaria.

□

Definición 2.17. *Una* ***teoría de torsión hereditaria*** *es una pareja ordenada* $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ *de clases de objetos de* $\mathscr{A}$ *tales que* $f_{\hbar}(\mathbb{T}) = \mathbb{F}$ *y* $f^{\hbar}(\mathbb{F}) = \mathbb{T}$.

Si en la demostración de la Proposición 2.12 consideramos $\hbar$ en vez de $\mathcal{H}$, tenemos la demostración de la siguiente proposición.

Proposición 2.18. *Sean* $(f)_{\hbar} \in Gal(\wp(R\text{-Mod}), \wp(R\text{-Mod}))$ *entonces:*

1. $(f)_{\hbar}$*-cerr* $= \mathcal{T}$*-torsh.*
2. *cerr-*$(f)_{\hbar} = \mathcal{L}$*-torsh.* □

Recordemos que toda clase de torsión hereditaria es clase de torsión y toda clase libre de torsión hereditaria es clase libre de torsión. A continuación demostramos como estan relacionadas las conexiones de Galois $(f)_{\mathcal{H}}$ y $(f)_{\hbar}$.

Proposición 2.19. $\hbar$ *es bicerrada con respecto a las familias de Moore* $\mathcal{T}$*-tors y* $\mathcal{L}$*-tors.*

Demostración. De la Proposición 2.16 tenemos que para todo $M \in R$-Mod, $f^{\hbar}(\{M\}) = \hbar M$ es una clase de torsión hereditaria y $f_{\hbar}(\{M\}) = M\hbar$ es una clase libre de torsión hereditaria. Por lo tanto $f^{\hbar}(\{M\}) \in \mathcal{T}$*-tors* y $f_{\hbar}(\{M\}) \in \mathcal{L}$*-tors*, esto implica que $\hbar$ es una relación bicerrada con respecto a $\mathcal{T}$*-tors* y $\mathcal{L}$*-tors*. □

Observación 2.20. *Algo notable de las relaciones* $\hbar$ *y* $\mathcal{H}$ *es que* $\hbar \subseteq \mathcal{H}$ *y además*

$$(f)_{\hbar}\textit{-cerr} \subseteq (f)_{\mathcal{H}}\textit{-cerr} \text{ y } \textit{cerr-}(f)_{\hbar} \subseteq \textit{cerr-}(f)_{\mathcal{H}}$$

Estas dos situaciones (entre dos relaciones) no siempre se dan, como veremos en la siguiente sección.

2.3. Relaciones bicerradas con respecto a una polaridad

Puesto que nuestro interés es estudiar relaciones bicerradas con respecto a la relación $\mathcal{H}$, en esta sección, a diferencia de la anterior (donde estudiamos relaciones bicerradas con respecto a cualesquiera dos familias de Moore), nos centramos en estudiar relaciones que son bicerradas con respecto a otra relación dada; esto se traduce (como veremos más adelante), en que las familias de Moore sean inducidas por una relación $\mathbf{R} \in \wp(A \times B)$ dada, es decir, $\Phi = (f)_{\mathbf{R}}$*-cerr* y $\Phi' =$ *cerr-*$(f)_{\mathbf{R}}$, y donde los operadores cerradura respectivos son $\varphi = f^{\mathbf{R}} f_{\mathbf{R}}$ y $\varphi' = f_{\mathbf{R}} f^{\mathbf{R}}$. El concepto de *relación bicerrada con respecto a otra relación* surge de la correlación que existe entre las polaridades $(f)_{\mathcal{H}}$ y $(f)_{\hbar}$ (ver Observación 2.20), la cual nos motiva a definir un preorden $\preceq$ en el conglomerado $Gal(A, B)$; este preorden (en el caso de polaridades) induce un preorden en el conglomerado $\wp(A \times B)$, con esto obtendremos una aplicación del Teorema de Domenach-Leclerc cuando las familias de Moore son inducidas por una relación, además con el preorden obtenemos una generalización de este teorema.

En la Observación 2.20 tenemos dos relaciones $\mathbf{R}, \mathbf{S} \in \wp(A \times B)$ que cumplen; $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{R}$ y $(f)_{\mathbf{S}}$-*cerr* $\subseteq (f)_{\mathbf{R}}$-*cerr* y *cerr*-$(f)_{\mathbf{S}} \subseteq$ *cerr*-$(f)_{\mathbf{R}}$, esto en general no se cumple como se demuestra a continuación.

Proposición 2.21. *Sean A y B dos clases. Entonces para toda $\mathbf{R} \in \wp(A \times B)$ se tiene que: $(f)_{A\times B}$-cerr $\subseteq (f)_{\mathbf{R}}$-cerr y cerr-$(f)_{A\times B} \subseteq$ cerr-$(f)_{\mathbf{R}}$.*

Demostración. Sea $\mathbf{R} \in \wp(A \times B)$, entonces

1. Para toda $U \in \wp(A)$, $f_{A\times B}(U) = \{b \in B \mid (a,b) \in A \times B, \forall a \in U\} = B$, por lo tanto *cerr*-$(f)_{A\times B} = \{B\}$.

2. Para $\mathbf{R}$ tenemos que $f_{\mathbf{R}}(\emptyset) = \{b \in B \mid (a,b) \in \mathbf{R}, \forall a \in \emptyset\} = B$ (ver Observación 1.18), es decir, $B \in$ *cerr*-$(f)_{\mathbf{R}}$.

Por lo tanto *cerr*-$(f)_{A\times B} \subseteq$ *cerr*-$(f)_{\mathbf{R}}$ para toda $\mathbf{R} \in \wp(A \times B)$.

De forma análoga se demuestra que $(f)_{A\times B}$-*cerr* $\subseteq (f)_{\mathbf{R}}$-*cerr*.

Concluimos que $(f)_{A\times B}$-*cerr* $\subseteq (f)_{\mathbf{R}}$-*cerr* y *cerr*-$(f)_{A\times B} \subseteq$ *cerr*-$(f)_{\mathbf{R}}$. □

La Observación 2.20 y la Proposición 2.21 motivan la siguiente definición con la que también vamos a tener el concepto de relación bicerrada (como en la definición 2.2), además obtenemos el concepto de conexión de Galois bicerrada con respecto a dos sistemas de cerrados que no necesariamente son familias de Moore.

Definición 2.22. *Sean A y B grandes copos. Definimos la relación $\preceq$ en Gal(A, B) como $f \preceq g$ si y sólo si f-cerr $\subseteq g$-cerr y cerr-$f \subseteq$ cerr-g, luego $\preceq$ es un preorden que induce una relación de equivalencia $\sim$ en Gal(A, B) que a su vez induce un orden en Gal$(A, B)/\sim$.*

Observación 2.23. *Como consecuencia de la Proposición 2.21 y la definición 2.22 tenemos que el conglomerado $\langle$Gal$(\wp(A), \wp(B)), \preceq\rangle$ siempre tiene como elemento menor a $(f)_{A\times B}$.*

Notemos que si $f, g \in$ *Gal*(A, B) son tales que $f \preceq g$ y $g \preceq f$ no necesariamente $f = g$. En el Apéndice D damos ejemplos de conexiones de Galois que cumplen lo anterior y no se da la igualdad.

Observación 2.24. *Sean A y B dos clases. Sean $\mathbf{R} \in \wp(A \times B)$ y $(f)_{\mathbf{R}} \in$ Gal$(\wp(A), \wp(B))$ la polaridad correspondiente, y sean $\Phi = (f)_{\mathbf{R}}$-cerr y $\Phi' =$cerr-$(f)_{\mathbf{R}}$ las familias de Moore que corresponden a los operadores cerradura $\varphi = f^{\mathbf{R}} f_{\mathbf{R}} : A \longrightarrow A$ y $\varphi' = f_{\mathbf{R}} f^{\mathbf{R}} : B \longrightarrow B$ respectivamente. Entonces*

$$\mathbf{S} \in \mathcal{R}_{\varphi\varphi'} \quad \textit{si y sólo si} \quad (f)_{\mathbf{S}} \preceq (f)_{\mathbf{R}}.$$

$\Rightarrow$) *Sea* $\mathbf{S} \in \mathcal{R}_{\varphi\varphi'}$. *Por la Observación 2.7, para toda* $a \in A$, $a\mathbf{S} = f_{\mathbf{S}}(\{a\}) \in$ *cerr*-$(f)_{\mathbf{R}}$, *esto implica que* $f_{\mathbf{S}}(U) = \bigcap_{a \in U} a\mathbf{S} \in$ *cerr*-$(f)_{\mathbf{R}}$ *para toda* $U \in \wp(A)$. *Además para toda* $b \in B$, $\mathbf{S}b = f_{\mathbf{S}}(\{b\}) \in (f)_{\mathbf{R}}$-*cerr, esto implica que* $f^{\mathbf{S}}(V) = \bigcap_{b \in V} \mathbf{S}b \in (f)_{\mathbf{R}}$-*cerr para toda* $V \in \wp(B)$. *Por lo tanto* $(f)_{\mathbf{S}} \preceq (f)_{\mathbf{R}}$.

$\Leftarrow$) *Sea* $\mathbf{S} \in \wp(A \times B)$ *tal que* $(f)_{\mathbf{S}} \preceq (f)_{\mathbf{R}}$, *entonces para toda* $a \in A$ *y* $b \in B$ *tenemos que* $a\mathbf{S} = f_{\mathbf{S}}(\{a\}) \in$ *cerr*-$(f)_{\mathbf{R}}$ *y* $\mathbf{S}b = f^{\mathbf{S}}(\{b\}) \in (f)_{\mathbf{S}}$-*cerr*. *Por lo tanto* $\mathbf{S} \in \mathcal{R}_{\varphi\varphi'}$.

Con la Definición 2.22 vamos a dar el concepto de relación bicerrada con respecto a otra relación dada. Usando el Teorema 1.27 (de Polaridades) y la Observación 2.24 tenemos que el preorden $\preceq$ en $Gal(\wp(A), \wp(B))$ induce un preorden $\preceq$ en $\wp(A \times B)$.

Definición 2.25. *Sean* A *y* B *dos clases. Sean* $\mathbf{R}, \mathbf{S} \in \wp(A \times B)$. *Definimos la relación* $\preceq$ *en* $\wp(A \times B)$ *como:* $\mathbf{S} \preceq \mathbf{R}$ *si y sólo si* $(f)_{\mathbf{S}} \preceq (f)_{\mathbf{R}}$, *luego* $\preceq$ *es un preorden que induce una relación de equivalencia* $\sim$ *en* $\wp(A \times B)$ *definida como sigue:*

$$\mathbf{S} \sim \mathbf{R} \;\; \textit{si y sólo si} \;\; (f)_{\mathbf{S}} \sim (f)_{\mathbf{R}}.$$

1. *Diremos que* $\mathbf{S}$ *es* ***bicerrada*** *con respecto a* $\mathbf{R}$ *si y sólo si* $\mathbf{S} \preceq \mathbf{R}$.
2. *Diremos que* $g \in Gal(\wp(A), \wp(B))$ *es* ***bicerrada*** *con respecto a* $(f)_{\mathbf{R}}$ *si y sólo si* $g \preceq (f)_{\mathbf{R}}$.

De la definición anterior surge de manera natural el concepto de conexión de Galois bicerrada con respecto a otra, como lo vemos a continuación.

Definición 2.26. *Sean* A, B *dos grandes copos y* $f, g \in Gal(A, B)$. *Diremos que* g *es* ***bicerrada*** *con respecto a* f *si y sólo si* $g \preceq f$.

De la observación 2.24 tenemos que la definición anterior coincide con la de la Definición 2.2 cuando las familias de Moore son $\Phi = (f)_{\mathbf{R}}$-*cerr* y $\Phi' =$cerr-$(f)_{\mathbf{R}}$ las familias de Moore que corresponden a los operadores cerradura $\varphi = f^{\mathbf{R}} f_{\mathbf{R}} : A \longrightarrow A$ y $\varphi' = f_{\mathbf{R}} f^{\mathbf{R}} : B \longrightarrow B$ respectivamente, con $\mathbf{R} \in \wp(A \times B)$.

Notación 2.27. *Sean* A *y* B *dos clases. Sean* $f \in Gal(A, B)$ *y* $\mathbf{R} \in \wp(A \times B)$. *Definimos los conglomerados:*

1. $[f]_{\preceq} := \{g \in Gal(A, B) \mid g \preceq f\}$ *(es el conglomerado de conexiones de Galois bicerradas con respecto a* f*).*
2. $[f]_{\sim} := \{g \in Gal(A, B) \mid g \sim f\}$.
3. $[\mathbf{R}]_{\preceq} := \{\mathbf{S} \in \wp(A \times B) \mid \mathbf{S} \preceq \mathbf{R}\}$.
4. $[\mathbf{R}]_{\sim} := \{\mathbf{S} \in \wp(A \times B) \mid \mathbf{S} \sim \mathbf{R}\}$.

Observación 2.28. *De la Proposición 2.21 tenemos que* $A \times B \in [\mathbf{R}]_{\preceq}$ *para toda* $\mathbf{R} \in \wp(A \times B)$.

De la Observación 2.24 tenemos que $\mathcal{R}_{\varphi\varphi'} = [\mathbf{R}]_{\preceq}$ para cada $\mathbf{R} \in \wp(A \times B)$ donde los operadores cerradura son $\varphi = f^{\mathbf{R}} f_{\mathbf{R}}$ y $\varphi' = f_{\mathbf{R}} f^{\mathbf{R}}$ y las familias de Moore correspondientes $\Phi = (f)_{\mathbf{R}}\text{-}cerr$ y $\Phi' = cerr\text{-}(f)_{\mathbf{R}}$; de esta forma obtenemos una aplicación del Teorema de Domenach-Leclerc usando nuestro preorden $\preceq$:

$$\langle Gal((f)_{\mathbf{R}}\text{-}cerr, cerr\text{-}(f)_{\mathbf{R}}), \leq \rangle \cong \langle [\mathbf{R}]_{\preceq}, \subseteq \rangle.$$

Observación 2.29. *De lo anterior tenemos que para toda $\mathbf{R} \in [\mathcal{H}]_{\preceq}$, $(f)_{\mathbf{R}}\text{-}cerr \subseteq \mathcal{T}\text{-}tors$ y $cerr\text{-}(f)_{\mathbf{R}} \subseteq \mathcal{L}\text{-}tors$, es decir, para cada $\mathscr{C} \in \wp(R\text{-Mod})$, $f^{\mathbf{R}}(\mathscr{C})$ es una clase de torsión y $f_{\mathbf{R}}(\mathscr{C})$ es una clase libre de torsión.*

2.4. Un caso particular del Teorema de Domenach-Leclerc

En el Teorema de Domenach-Lecler no se pide que entre las familias de Moore Φ y Φ' exista un anti-isomorfismo, luego surge la pregunta ¿Hay una condición que deba cumplir $\langle Gal(\Phi, \Phi'), \preceq \rangle$ para que exista un anti-isomomorfismo entre las familias de Moore Φ y Φ'?. Esta condición, como veremos más adelante, es que $\langle Gal(\Phi, \Phi'), \preceq \rangle$ tenga elemento mayor, como se demuestra en la Proposición 2.32, de hecho podemos estudiar esta misma condición en el caso general cuando A y B son retículas completas usando el preorden $\preceq$ en $Gal(A, B)$.

En lo que sigue, al igual que en el artículo [11], usaremos conjuntos. Como se explica en el apéndice C, si necesitamos usar una clase o un conglomerado en vez de un conjunto lo podemos hacer, pues esto no afecta los resultados.

Definición 2.30. *Sean A y B copos. Sea $f = \langle f_+, f^+ \rangle \in Gal(A, B)$, decimos que f es un **anti-isomorfismo** cuando f_+ y f^+ son anti-isomorfismos.*

Observación 2.31. *De la Proposición 1.30 tenemos que para cada $a \in A$ y $b \in B$, $\langle p_{a,b}, p_{b,a} \rangle \in Gal(A, B)$ y de la Observación 1.31:*

$$\langle p_{a,b}, p_{b,a} \rangle\text{-}cerr = \{0, a, 1\} \text{ y } cerr\text{-}\langle p_{a,b}, p_{b,a} \rangle = \{0, b, 1\}.$$

Proposición 2.32. *Sean A y B copos. Para $f \in Gal(A, B)$ son equivalentes:*

1. *f es anti-isomorfismo.*
2. *f es un elemento mayor de $\langle Gal(A, B), \preceq \rangle$.*[3]
3. *$f\text{-}cerr = A$ y $cerr\text{-}f = B$.*

[3]Un elemento mayor puede no ser único, pues $\preceq$ es un preorden. Esto se ilustra en el Apéndice D, Ejemplo D.2.

Demostración. $1 \Rightarrow 2$) Sea $f \in Gal(A,B)$ un anti-isomorfismo, luego $f^+(B) = A$ y $f_+(A) = B$ por lo tanto para toda $g \in Gal(A,B)$ tenemos que g-$cerr \subseteq A = f^+(B)$ y $cerr$-$g \subseteq B = f_+(A)$ lo que significa $g \preceq f$, esto implica que f es un elemento mayor de $\langle Gal(A,B), \preceq\rangle$.

$2 \Rightarrow 3$) Sea $f \in Gal(A,B)$ un elemento mayor de $\langle Gal(A,B), \preceq\rangle$ y supongamos que f-$cerr \subsetneqq A$. Tenemos para toda $g \in Gal(A,B)$ que $g \preceq f$, en particular para $\langle p_{a,b}, p_{b,a}\rangle \preceq f$ para toda $a \in A$ y $b \in B$ (Proposición 1.30).

De la Observación 2.31 tenemos que $\langle p_{a,b}, p_{b,a}\rangle$-$cerr = \{0, a, 1\}$ y $cerr$-$\langle p_{a,b}, p_{b,a}\rangle = \{0, b, 1\}$. Tomemos $a \in A \backslash f$-$cerr$, entonces para toda $b \in B$ tenemos que $\langle p_{a,b}, p_{b,a}\rangle \in Gal(A,B)$ y por la Observación 2.31 tenemos que $\langle p_{a,b}, p_{b,a}\rangle$-$cerr \subsetneqq f$-$cerr$ pues $a \notin f$-$cerr$ lo que significa que $\langle p_{a,b}, p_{b,a}\rangle \npreceq f$ y por lo tanto f no es elemento mayor de $\langle Gal(A,B), \preceq\rangle$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto f-$cerr = A$ y de forma análoga $cerr$-$f = B$.

$3 \Rightarrow 1$) La implicación es clara. $\square$

Lema 2.33. *Sea $f_+ : A \longrightarrow B$ un anti-isomorfismo de retículas completas, entonces f_+ es la parte residuada de una conexión de Galois $f \in Gal(A,B)$. En tal caso $f = \langle f_+, f^+\rangle$ es un elemento mayor de $\langle Gal(A,B), \preceq\rangle$ y el conjunto de elementos mayores es $[f]_\sim$.*

Demostración. Sean $f_+ : A \longrightarrow B$ un anti-isomorfismo de retículas y $S \subseteq A$, para todo $s \in S$ tenemos que $s \leq \bigvee S$ por lo tanto $f_+(\bigvee S) \leq f_+(s)$, por lo tanto $f_+(\bigvee S) \leq \bigwedge f_+(S)$.

Como f_+ es biyectiva tenemos que existe un único $x \in A$ tal que $f_+(x) = \bigwedge f_+(S) \in B$, luego $\forall s \in S,\ f_+(x) \leq f_+(s)$ si y sólo si $x \geq s$, se sigue que $x \geq \bigvee S$ lo que implica que $\bigwedge f_+(S) = f_+(x) \leq f_+(\bigvee S)$.

Por lo tanto $f_+(\bigvee S) = \bigwedge f_+(S)$ y f_+ es parte residuada de $f \in Gal(A,B)$ (ver Proposición 1.15).

Además como A y B son retículas completas de la Proposición 1.15 tenemos que existe $f^+ : B \longrightarrow A$ definida como $f^+(b) = \bigvee\{a \in A \mid f_+(a) \geq b\}$ tal que $f^+f_+ = id_A$ y $f_+f^+ = id_B$. Luego por la Proposición 2.32, $f = \langle f_+, f^+\rangle$ es un elemento mayor en $\langle Gal(A,B), \preceq\rangle$.

Sea $g \in Gal(A,B)$ un elemento mayor de $\langle Gal(A,B), \preceq\rangle$, luego f-cerr $= A \subseteq g$-cerr y cerr-$f = B \subseteq$ cerr-g por lo tanto $f \preceq g$ y $f \succeq g$ pues f es también elemento mayor por lo tanto $f \sim g$. Por lo tanto $g \in [f]_\sim$. $\square$

La siguiente proposición responde a la pregunta planteada al principio de esta sección. ¿Que condición debe cumplir $\langle Gal(\Phi, \Phi'), \preceq\rangle$ para que exista un anti-isomomorfismo entre las familias de Moore Φ y Φ'?.

Proposición 2.34. *Sean A y B conjuntos. Sean (A, φ), (B, φ') espacios cerradura y sus familias de Moore correspondientes Φ y Φ'. Entonces $\langle Gal(\Phi, \Phi'), \preceq\rangle$ tiene elemento mayor, si y sólo si existe $f \in Gal(\wp(A), \wp(B))$ tal que f-$cerr = \Phi$ y $cerr$-$f = \Phi'$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Tenemos que $\langle Gal(\Phi, \Phi'), \preceq\rangle$ tiene elemento mayor y por la Proposición 2.32 Φ y Φ' son anti-isomorfos. Por lo tanto por la Proposición 1.25 existe $f \in Gal(\wp(A), \wp(B))$ tal que f-cerr $= \Phi$ y cerr-$f = \Phi'$.

$\Leftarrow$) Sea $f \in Gal(\wp(A), \wp(B))$ tal que f-cerr $= \Phi$ y cerr-$f = \Phi'$, luego por la proposición 1.13 Φ y Φ' son anti-isomorfas como copos. Por lo tanto por la Proposición 2.32 $\langle Gal(\Phi, \Phi'), \preceq\rangle$ tiene elemento mayor. □

La siguiente proposición es un resumen del Teorema de Polaridades 1.27, Teorema de Domenach-Leclerc 2.6, de la Observación 2.24 y de las Proposiciones 2.32 y 2.34.

Proposición 2.35. *Sean A y B conjuntos. Sean $\mathbf{R} \in \wp(A \times B)$ y $(f)_\mathbf{R} \in Gal(\wp(A), \wp(B))$. Consideremos los espacios cerradura (A, φ) y (B, φ'), donde $\varphi = f^\mathbf{R} f_\mathbf{R}$ y $\varphi' = f_\mathbf{R} f^\mathbf{R}$ son los operadores cerradura con sus familias de Moore correspondientes Φ y Φ'. Entonces:*

1. *Existe una correspondencia biunívoca entre $[(f)_\mathbf{R}]_\sim$ y los anti-isomorfismos entre Φ y Φ'.*
2. *Existe una correspondencia biunívoca entre $[(f)_\mathbf{R}]_\sim$ y $[\mathbf{R}]_\sim$.*
3. *Existe un isomorfismo de orden entre $[(f)_\mathbf{R}]_\preceq$ y $[\mathbf{R}]_\preceq$.* □

2.5. Teorema de Domenach-Leclerc generalizado

En esta sección damos el Teorema de Domenach-Leclerc generalizado, el cual no tiene la restricción (como el teorema original) de estar definido para conjuntos potencia. Puesto que este teorema (generalizado) lo hacemos usando retículas completas (que no necesariamente son conjuntos o clases potencia), vamos a usar sistemas de cerrados (ver sección 2.1) en lugar de familias de Moore.

A continuación definimos las *conexiones de Galois bicerradas* con respecto a los sistemas de cerrados $\Phi \subseteq A$ y $\Phi' \subseteq B$.

Definición 2.36. *Sean $\langle A, \Phi\rangle$ y $\langle B, \Phi'\rangle$ donde A, B son retículas completas, $\Phi \subseteq A$ y $\Phi' \subseteq B$ son sistemas de cerrados con φ y φ' los operadores cerradura correspondientes, entonces*

$$[\Phi, \Phi']_\preceq := \{g \in Gal(A, B) \mid g\text{-}cerr \subseteq \Phi \text{ y } cerr\text{-}g \subseteq \Phi'\}.$$

A los elementos del conjunto $[\Phi, \Phi']_\preceq$ les llamaremos ***conexiones de Galois bicerradas*** *con respecto a Φ y Φ'.*

La definición anterior coincide con la Definición 2.26 cuando los sistemas de cerrados son $\Phi = f$-*cerr* y $\Phi' =$ *cerr*-f para alguna $f \in Gal(A, B)$. De esta forma, al igual que en la sección 2.3, donde hablamos de relaciones bicerradas con respecto a otra relación dada, en esta sección, usando las Definiciones 2.22 y 2.36 damos el Teorema de Domenach-Leclerc generalizado, en cual trata de conexiones de Galois con respecto a otra.

En la Proposición 1.25 dimos las condiciones para que una conexión de Galois entre subcopos se pueda extender a una conexión de Galois entre los copos que los contienen, también se demostró que esta extensión es única. En el próximo lema damos las condiciones para que una conexión de Galois entre dos copos la podamos restringir a una conexión de Galois entre subcopos.

Notación 2.37. *Sean $f \in Gal(A, B)$, $A' \subseteq A$ y $B' \subseteq B$. Denotaremos la conexión de Galois f con la restricción-correstricción a los subconjuntos A' y B' como $f|_{A',B'}$.*

Lema 2.38. *Sean A, B copos y $f \in Gal(A, B)$. Sean $A' \subseteq A$ y $B' \subseteq B$ subcopos tales que $f_+(A') \subseteq B'$ y $f^+(B') \subseteq A'$, entonces f induce una única $\mathrm{f} \in Gal(A', B')$ tal que $f|_{A',B'} = \mathrm{f}$.*

Demostración. Sean $f \in Gal(A, B), A' \subseteq A$ y $B' \subseteq B$ tales que $f_+(A') \subseteq B'$ y $f^+(B') \subseteq A'$, luego $b \leq f_+(a)$ si y sólo si $a \leq f^+(b)$ para todo $a \in A$ y $b \in B$, en particular para todo $a' \in A'$ y $b' \in B'$, hacemos $\mathrm{f} = f|_{A',B'}$. Por lo tanto $\mathrm{f} \in Gal(A', B')$ y es única pues es la restricción-correstricción de f. □

A continuación damos el Teorema de Domenach-Leclerc generalizado. Antes vamos definir a los espacios cerradura, usaremos este nombre al igual que en la Definición 2.1 pues no afecta el desarrollo de la demostración.

Definición 2.39. *Sea A un conjunto. Un* ***espacio cerradura*** *es una tripleta $\langle A, \varphi, \Phi\rangle$ donde $\varphi : A \longrightarrow A$ es un operador cerradura y $\Phi = Im(\varphi)$ es su sistema de cerrados.*

Teorema de Domenach-Leclerc Generalizado 2.40. *Sean $\langle A, \varphi, \Phi\rangle$ y $\langle B, \varphi', \Phi'\rangle$ espacios cerradura. Existe un isomorfismo de orden entre $\langle [\Phi, \Phi']_{\preceq}, \leq\rangle$ y $\langle Gal(\Phi, \Phi'), \leq\rangle$.*

Demostración. Sean $\langle A, \varphi, \Phi\rangle$ y $\langle B, \varphi', \Phi'\rangle$ espacios cerradura. Consideremos las correspondencias:

$$\alpha : [\Phi, \Phi']_{\preceq} \longrightarrow Gal(\Phi, \Phi') \quad \text{y} \quad \beta : Gal(\Phi, \Phi') \longrightarrow [\Phi, \Phi']_{\preceq}$$

dadas como $\alpha(g) = \mathrm{g}$, donde g es la restricción-correstricción (como en el Lema 2.38), y $\beta(h) = \mathbf{h} = \langle \mathbf{h}_+, \mathbf{h}^+\rangle$ donde $\mathbf{h}_+ : A \longrightarrow B$ esta dada como $\mathbf{h}_+(a) = h_+(\varphi(a))$ y $\mathbf{h}^+ : B \longrightarrow A$ esta dada como $\mathbf{h}^+(b) = h^+(\varphi'(b))$ es la extensión (que es única) como en la Proposición 1.25.

α y β están bien definidas (ver Lema 2.38 y Proposición 1.25).

Veamos que α *y* β *son inversas una de otra:*

Sea $h \in Gal(\Phi, \Phi')$, luego $\alpha(\beta(h)) = \alpha(\mathbf{h}) = \mathrm{h}$. Es claro que $\mathrm{h} = \mathbf{h}$, pues h es sólo la restricción-correstricción. Por lo tanto $\alpha\beta = id$.

Sea $g \in [\Phi, \Phi']_{\preceq}$, luego $\beta(\alpha(g)) = \beta(\mathrm{g}) = \mathbf{g}$. Notemos g es la restricción-correstricción de g y $\mathbf{g}$ es la extensión que es única. Por lo tanto $\beta\alpha = id$.

Notemos que α y β preservan el orden.

Por lo tanto $\langle [\Phi, \Phi']_{\preceq}, \leq\rangle \cong \langle Gal(\Phi, \Phi'), \leq\rangle$. □

Observemos que para cada $f \in Gal(A,B)$ tenemos que f-*cerr* y *cerr*-f son sistemas de cerrados, así que podemos aplicar la generalización del Teorema de Domenach-Leclerc a los espacios de cerradura $\langle A, \varphi, f\text{-}cerr\rangle$ y $\langle B, \varphi', cerr\text{-}f\rangle$, con $\varphi = f^+f_+$ y $\varphi' = f_+f^+$.

Corolario 2.41. *Sean A, B retículas completas y $f \in Gal(A,B)$. Entonces existe un isomorfismo de orden entre $\langle [f]_\preceq \leq\rangle$ y $\langle Gal(f\text{-}cerr, cerr\text{-}f), \leq\rangle$.* □

En el caso de que las retículas sean $A = \wp(A'), B = \wp(B')$ y los sistemas de cerrados sean $\Phi = f$-*cerr* y $\Phi' = cerr$-f para alguna $f \in Gal(A,B)$ tenemos una aplicación del Teorema de Domenach-Leclerc:

$$\langle [f]_\preceq, \leq\rangle \cong \langle [\Phi, \Phi']_\preceq, \leq\rangle \cong \langle Gal(\Phi, \Phi'), \leq\rangle \cong \langle \mathcal{R}_{\varphi\varphi'}, \subseteq\rangle$$

donde $\varphi = f^+f_+$ y $\varphi' = f_+f^+$.

2.6. Relaciones bicerradas y R-teorías de torsión

En esta sección introducimos el concepto de **R**-teorías de torsión, el cual generaliza el de las Teorías de torsión dado por Dickson en [10]. Existen más generalizaciones de este concepto, por ejemplo; una fue hecha por Barr en [4], considerando una mónada idempotente sobre una categoría (no necesariamente abeliana). Otra noción de teorías de torsión fué introducida por Cassidy en [8]. Aquí se considera una conexión de Galois inducida por la relación $\mathcal{H}$ (también introducida por Dickson en [10]), la cual está definida como $\mathrm{Hom}_\mathcal{A}(M,N) = 0$ para objetos de la categoría $\mathcal{A}$, junto con una conexión de Galois sobre el conglomerado de clases de morfismos, la cual define pares de subcategorías llamadas *sistemas de prefactorización*. La generalización que presentamos en esta tesis, al igual que Barr y Cassidy, es considerando una conexión de Galois pero inducida por cualquier relación bicerrada con respecto a $\mathcal{H}$. Esta generalización relaciona tres conceptos; relaciones bicerradas, teorías de torsión y bifuntores casi continuos, como veremos más adelante.

Recordemos que una teoría de torsión es una pareja de clases de R-módulos $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ que cumple $f_\mathcal{H}(\mathbb{T}) = \mathbb{F}$ y $f^\mathcal{H}(\mathbb{F}) = \mathbb{T}$; así, usando este mismo razonamiento podemos definir para cada $\mathbf{R} \in [\mathcal{H}]_\preceq$ las **R**-teorías de torsión también como parejas de clases de R-módulos que van a cumplir las mismas condiciones como vemos a continuación.

Definición 2.42. *Sea $\mathbf{R} \in [\mathcal{H}]_\preceq$. Una* ***R-teoría de torsión*** *es una pareja de clases de R-módulos $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ tales que $f_\mathbf{R}(\mathbb{T}) = \mathbb{F}$ y $f^\mathbf{R}(\mathbb{F}) = \mathbb{T}$.*[4]

Recordemos que una teoría de torsión $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ es llamada **hereditaria** si $\mathbb{T}$ es cerrada bajo monomorfismos y $\mathbb{F}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas (ver [36] capítulo 4, sección 3).

Ejemplo 2.43. *Para las relaciones bicerradas $\mathcal{H}$ y $\hbar$ tenemos:*

[4]La condiciones de esta definición se pueden aplicar incluso para relaciones que no son bicerradas con respecto a $\mathcal{H}$. Por ejemplo, si definimos la relación $\mathbf{S}$ como $\mathrm{Ext}^1_R(M,N) = 0$, con $M, N \in R$-Mod, entonces las parejas de clases de R-módulos $(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ que cumplen $f_\mathbf{S}(\mathcal{D}) = \mathcal{E}$ y $f^\mathbf{S}(\mathcal{E}) = \mathcal{D}$ no son teorías de torsión, pero si son **teorías de cotorsión**, las cuales fueron originalmente estudiadas por Salce L. en [34], quien dió la definición de teorías de cotorsión para el anillo $\mathbb{Z}$.

1. Las $\mathcal{H}$-teorías de torsión son las teorías de torsión.

2. Las $\hbar$-teorías de torsión son las teorías de torsión hereditarias.

Usando las Proposiciones 1.71, 2.10 y 2.13 tenemos el siguiente resultado que usaremos en la sección 3.3 para describir los cerrados de algunas conexiones inducidas por relaciones bicerradas.

Proposición 2.44. *Para cada $\mathscr{C} \in \wp(R\text{-Mod})$ tenemos que:*

1. $\overline{\bigvee_{M \in \mathscr{C}} \alpha_M^M} = \bigvee_{M \in f^{\mathcal{H}} f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C})} \alpha_M^M = \bigwedge_{N \in f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C})} \omega_0^N.$

2. $\widehat{\bigwedge_{N \in \mathscr{C}} \omega_0^N} = \bigwedge_{N \in f_{\mathcal{H}} f^{\mathcal{H}}(\mathscr{C})} \omega_0^N = \bigvee_{M \in f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C})} \alpha_M^M.$

En la Proposición 2.13 se demostró para la relación $\mathcal{H}$ que $f^{\mathcal{H}} f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C})$ es la menor clase de torsión que contiene a $\mathscr{C} \in \wp(R\text{-Mod})$, sin embargo, esto no es cierto si cambiamos la relación $\mathcal{H}$ por otra relación distinta $\mathbf{R}$, es decir, $f^{\mathbf{R}} f_{\mathbf{R}}(\mathscr{C})$ es una clase de torsión que contiene a $\mathscr{C}$ pero no necesariamente es la menor clase con esta propiedad, a pesar de ser el menor miembro de $(f)_{\mathbf{R}}$-*cerr* que contiene a $\mathscr{C}$. Esta situación la veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.45. *Sea* $\mathbf{R} = (R\text{-Mod})^2$, *entonces para toda* $\mathscr{C} \in \wp(R\text{-Mod})$,

$$f_{\mathbf{R}}(\mathscr{C}) = \{N \in R\text{-Mod} \mid (M, N) \in (R\text{-Mod})^2, \forall M \in \mathscr{C}\} = R\text{-Mod}$$

$$f^{\mathbf{R}} f_{\mathbf{R}}(\mathscr{C}) = \{M \in R\text{-Mod} \mid (M, N) \in (R\text{-Mod})^2, \forall N \in f_{\mathbf{R}}(\mathscr{C})\} = R\text{-Mod}$$

Por lo tanto $f^{\mathbf{R}} f_{\mathbf{R}}(\mathscr{C}) = R\text{-Mod}$ *es el menor miembro de* $(f)_{\mathbf{R}}$-*cerr que contiene a* $\mathscr{C}$ *pero no necesariamente es la menor clase de torsión con esta propiedad, pues si* $\mathscr{C} = \{0\}$ *entonces* $\{0\} \subset f^{\mathbf{R}} f_{\mathbf{R}}(\{0\}) = R\text{-Mod}$. *Similarmente,* $f_{\mathbf{R}} f^{\mathbf{R}}(\mathscr{C})$ *no necesariamente es la menor clase libre de torsión que contiene a* $\mathscr{C}$.

Recordemos que para toda $M \in R\text{-Mod}$, $\alpha_M^M \preccurlyeq \overline{\alpha_M^M}$, además $f_{\mathcal{H}}(\{M\}) = \mathbb{F}_{\alpha_M^M} = \mathbb{F}_{\overline{\alpha_M^M}}$ y $f^{\mathcal{H}}(\{M\}) = \mathbb{T}_{\omega_0^M} = \mathbb{T}_{\widehat{\omega_0^M}}$ (ver Proposiciones 1.74 y 1.75).

Corolario 2.46. *Sea* $M \in R\text{-Mod}$, *entonces*

1. $\mathbb{T}_{\overline{\alpha_M^M}}$ *es la menor clase de torsión que contiene a* $\{M\}$.

2. $\mathbb{F}_{\widehat{\omega_0^M}}$ *es la menor clase libre de torsión que contiene a* $\{M\}$.

Por la Observación 2.29 para cada $\mathbf{R} \in [\mathcal{H}]_{\preceq}$ tenemos que $f^{\mathbf{R}}(R\text{-Mod})$ es clase de torsión y $f_{\mathbf{R}}(R\text{-Mod})$ es clase libre de torsión, así que podemos usar este hecho podemos definir dos radicales idempotentes asociados a estas dos clases de R-módulos.

Definición 2.47. *Sea* $\mathbf{R} \in [\mathcal{H}]_{\preceq}$, *entonces:*

1. $\sigma_{\mathbf{R}} := Tr_{f^{\mathbf{R}}(R\text{-Mod})} = \bigvee_{M \in f^{\mathbf{R}}(R\text{-Mod})} \alpha_M^M.$

2. $\tau_{\mathbf{R}} := Rej_{f_{\mathbf{R}}(R\text{-Mod})} = \bigwedge_{N \in f_{\mathbf{R}}(R\text{-Mod})} \omega_0^N.$

Observación 2.48. *Para cada* $\mathbf{R} \in [\mathcal{H}]_{\preceq}$ *tenemos que* $\sigma_{\mathbf{R}}, \tau_{\mathbf{R}} \in R$*-radidem. Además como* $f_{\mathbf{R}}$ *y* $f^{\mathbf{R}}$ *son antítonas, tenemos*

1. $\mathbb{T}_{\sigma_{\mathbf{R}}} = f^{\mathbf{R}}(R\text{-Mod}) = \bigcap (f)_{\mathbf{R}}\text{-}cerr.$

2. $\mathbb{F}_{\tau_{\mathbf{R}}} = f_{\mathbf{R}}(R\text{-Mod}) = \bigcap cerr\text{-}(f)_{\mathbf{R}}.$

Observemos que cada $\mathbb{T}_\sigma \in (f)_{\mathbf{R}}\text{-}cerr$ cumple que $\mathbb{T}_{\sigma_{\mathbf{R}}} \subseteq \mathbb{T}_\sigma$ lo que signifca que $\sigma_{\mathbf{R}} \preccurlyeq \sigma$ (ver Proposición 1.76), y cada $\mathbb{F}_\tau \in cerr\text{-}(f)_{\mathbf{R}}$ cumple que $\mathbb{F}_{\tau_{\mathbf{R}}} \subseteq \mathbb{F}_\tau$ lo que significa que $\tau \preccurlyeq \tau_{\mathbf{R}}$ (ver Proposición 1.77), esto nos permite definir dos conglomerados de radicales idempotentes (uno asociado a $(f)_{\mathbf{R}}\text{-}cerr$ y otro a $cerr\text{-}(f)_{\mathbf{R}}$) que nos van a servir para analizar mejor las relaciones bicerradas a través de los prerradicales.

Notación 2.49. *Sea* $\mathbf{R} \in [\mathcal{H}]_{\preceq}$, *entonces:*

1. $[[\sigma_{\mathbf{R}}, 1]] := \{\sigma \in R\text{-radidem} \mid \mathbb{T}_\sigma \in (f)_{\mathbf{R}}\text{-}cerr\}.$

2. $[[0, \tau_{\mathbf{R}}]] := \{\tau \in R\text{-radidem} \mid \mathbb{F}_\tau \in cerr\text{-}(f)_{\mathbf{R}}\}.$

Por definición $[[\sigma_{\mathbf{R}}, 1]] \subseteq [\sigma_{\mathbf{R}}, 1] \cap R\text{-radidem}$ y $[[0, \tau_{\mathbf{R}}]] \subseteq [0, \tau_{\mathbf{R}}] \cap R\text{-radidem}$. La igualdad no siempre se da, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.50. *Sean* $\sigma, \tau \in R\text{-radidem}$ *tales que* $\sigma \neq \tau$. *Por la Proposición 1.30 tenemos para* $\mathbb{T}_\sigma, \mathbb{F}_\tau$ *que* $\langle p_{\mathbb{T}_\sigma,\mathbb{F}_\tau}, p_{\mathbb{F}_\tau,\mathbb{T}_\sigma}\rangle \in Gal(\mathcal{T}\text{-}tors, \mathcal{F}\text{-}tors)$, *esto implica que su correspondiente relación* $\mathbf{R}_{\langle p_{\mathbb{T}_\sigma,\mathbb{F}_\tau}, p_{\mathbb{F}_\tau,\mathbb{T}_\sigma}\rangle}$ *sobre* R-Mod *es bicerrada con respecto a* $\mathcal{H}$, *pues por la Observación 1.31 tenemos que* $\langle p_{\mathbb{T}_\sigma,\mathbb{F}_\tau}, p_{\mathbb{F}_\tau,\mathbb{T}_\sigma}\rangle\text{-}cerr = \{\{0\}, \mathbb{T}_\sigma, R\text{-Mod}\}$ *y* $cerr\text{-}\langle p_{\mathbb{T},\mathbb{F}}, p_{\mathbb{F},\mathbb{T}}\rangle = \{\{0\}, \mathbb{F}_\tau, R\text{-Mod}\}$, *luego*

$$[[\sigma_{\mathbf{R}}, 1]] = \{0, \sigma, 1\} \quad y \quad [[0, \tau_{\mathbf{R}}]] = \{0, \tau, 1\},\ donde\ \mathbf{R} = \mathbf{R}_{\langle p_{\mathbb{T},\mathbb{F}}, p_{\mathbb{F},\mathbb{T}}\rangle},\ \ \sigma_{\mathbf{R}} = 0 \quad y \quad \tau_{\mathbf{R}} = 1.$$

Notemos que $\{0, \tau, 1\} = [[0, 1]] \subsetneq R\text{-radidem} \cap [0, 1] = R\text{-radidem}$ *pues* $\sigma \in R\text{-radidem}$ *pero* $\sigma \notin \{0, \tau, \tau_{\mathbf{R}}\}$ *ya que* $\sigma \neq \tau$ *por hipótesis. Por la misma razón* $\{0, \sigma, 1\} = [[0, 1]] \subsetneq R\text{-radidem}$ *pues* $\tau \notin \{0, \sigma, 1\}$. *Concluimos que*

1. $[[\sigma_{\mathbf{R}}, 1]] = [[0, 1]] \neq [\sigma_{\mathbf{R}}, 1] \cap R\text{-radidem} = R\text{-radidem}.$

2. $[[0, \tau_{\mathbf{R}}]] \neq [0, \tau_{\mathbf{R}}] \cap R\text{-radidem} = R\text{-radidem}.$

Definición 2.51. *Sea* $\mathbf{R} \in [\mathcal{H}]_{\preceq}$. *Diremos que:*

1. *El intervalo* $[[\sigma_{\mathbf{R}}, 1]]$ *se* ***llena*** *si se da la igualdad* $[[\sigma_{\mathbf{R}}, 1]] = [\sigma_{\mathbf{R}}, 1] \cap R\text{-radidem}$.

2. *El intervalo* $[[0, \tau_{\mathbf{R}}]]$ *se* ***llena*** *si se da la igualdad* $[[0, \tau_{\mathbf{R}}]] = [0, \tau_{\mathbf{R}}] \cap R\text{-radidem}$.

Recordemos que si A y B son dos grandes retículas y $f : A \longrightarrow B$ es un isomorfismo de copos, entonces f es un isomorfismo de grandes retículas.

Observación 2.52. *Para cada* $\sigma \in [[\sigma_{\mathbf{R}}, 1]]$ *tenemos que* $f_{\mathbf{R}}(\mathbb{T}_\sigma) = \mathbb{F}_\tau$ *donde* $\tau = \bigwedge_{N \in f_{\mathbf{R}}(\mathbb{T}_\sigma)} \omega_0^N$, *de forma análoga para cada* $\tau \in [[0, \tau_{\mathbf{R}}]]$ *tenemos que* $f^{\mathbf{R}}(\mathbb{F}_\tau) = \mathbb{T}_\sigma$ *donde* $\sigma = \bigvee_{M \in f^{\mathbf{R}}(\mathbb{F}_\tau)} \alpha_M^M$.

Usando la Proposición 1.78 y la Observación 2.52 vamos a describir en la siguiente proposición dos isomorfismos de orden sobre R-radidem inducidos por $\mathbf{R}$.

Proposición 2.53. *Sea* $\mathbf{R} \in [\mathcal{H}]_{\preceq}$. *Existe un isomorfismo de orden entre* $[[\sigma_{\mathbf{R}}, 1]]$ *y* $[[0, \tau_{\mathbf{R}}]]$.

Demostración. Sean $\overline{\lambda_{\mathbf{R}}} : [[\sigma_{\mathbf{R}}, 1]] \longrightarrow [[0, \tau_{\mathbf{R}}]]$ y $\overline{\mu_{\mathbf{R}}} : [[0, \tau_{\mathbf{R}}]] \longrightarrow [[\sigma_{\mathbf{R}}, 1]]$ asignaciones dadas como $\overline{\lambda_{\mathbf{R}}}(\sigma) = \bigwedge_{N \in f_{\mathbf{R}}(\mathbb{T}_\sigma)} \omega_0^N$ y $\overline{\mu_{\mathbf{R}}}(\tau) = \bigvee_{M \in f^{\mathbf{R}}(\mathbb{F}_\tau)} \alpha_M^M$.

Tenemos que $\overline{\lambda_{\mathbf{R}}}$ y $\overline{\mu_{\mathbf{R}}}$ están bien definidas. Por la Proposición 1.78 y la definicón de $[[\sigma_{\mathbf{R}}, 1]]$ y $[[0, \tau_{\mathbf{R}}]]$ tenemos que $\bigvee_{M \in f^{\mathbf{R}}(\mathbb{F}_\tau)} \alpha_M^M \in [[\sigma_{\mathbf{R}}, 1]]$ y $\bigwedge_{N \in f_{\mathbf{R}}(\mathbb{T}_\sigma)} \omega_0^N \in [[0, \tau_{\mathbf{R}}]]$.

$\overline{\lambda_{\mathbf{R}}}$ y $\overline{\mu_{\mathbf{R}}}$ *son inversas una de la otra*: Sean $\sigma \in [[\sigma_{\mathbf{R}}, 1]]$ luego

$$\overline{\mu_{\mathbf{R}}}(\overline{\lambda_{\mathbf{R}}}(\sigma)) = \bigvee_{M \in f^{\mathbf{R}}(\mathbb{F}_{\overline{\lambda_{\mathbf{R}}}(\sigma)})} \alpha_M^M = \sigma$$

pues $\mathbb{T}_\sigma = f^{\mathbf{R}} f_{\mathbf{R}}(\mathbb{T}_\sigma) = f^{\mathbf{R}}(\mathbb{F}_{\overline{\lambda_{\mathbf{R}}}(\sigma)})$ lo que significa que $\overline{\mu_{\mathbf{R}}}(\overline{\lambda_{\mathbf{R}}}(\sigma)) = \sigma$. De forma análoga, para cada $\tau \in [[0, \tau_{\mathbf{R}}]]$ tenemos que $\mathbb{T}_\tau = f_{\mathbf{R}} f^{\mathbf{R}}(\mathbb{F}_\tau) = f^{\mathbf{R}}(\mathbb{T}_{\overline{\mu_{\mathbf{R}}}(\tau)})$ lo que significa que $\overline{\lambda_{\mathbf{R}}}(\overline{\mu_{\mathbf{R}}}(\tau)) = \tau$.

Por lo tanto $\overline{\lambda_{\mathbf{R}}}$ y $\overline{\mu_{\mathbf{R}}}$ son isomorfismos.

$\overline{\lambda_{\mathbf{R}}}$ *preserva el orden*: Sean $\sigma_1, \sigma_2 \in [[\sigma_{\mathbf{R}}, 1]]$ tales que $\sigma_1 \preccurlyeq \sigma_2$, luego $\mathbb{T}_{\sigma_1} \subseteq \mathbb{T}_{\sigma_2}$ lo que implica que $f_{\mathbf{R}}(\mathbb{T}_{\sigma_2}) \subseteq f_{\mathbf{R}}(\mathbb{T}_{\sigma_1})$, se sigue que $\overline{\lambda_{\mathbf{R}}}(\sigma_1) = \bigwedge_{N \in f_{\mathbf{R}}(\mathbb{T}_{\sigma_1})} \omega_0^N \preccurlyeq \bigwedge_{N \in f_{\mathbf{R}}(\mathbb{T}_{\sigma_2})} \omega_0^N = \overline{\lambda_{\mathbf{R}}}(\sigma_2)$.

$\overline{\mu_{\mathbf{R}}}$ *preserva el orden*: Sean $\tau_1, \tau_2 \in [[0, \tau_{\mathbf{R}}]]$ tales que $\tau_1 \preccurlyeq \tau_2$, luego $\mathbb{F}_{\tau_2} \subseteq \mathbb{F}_{\tau_1}$ lo que implica que $f^{\mathbf{R}}(\mathbb{F}_{\tau_1}) \subseteq f^{\mathbf{R}}(\mathbb{F}_{\tau_2})$ se sigue que, $\overline{\mu_{\mathbf{R}}}(\tau_1) = \bigvee_{M \in f^{\mathbf{R}}(\mathbb{F}_{\tau_1})} \alpha_M^M \preccurlyeq \bigvee_{M \in f^{\mathbf{R}}(\mathbb{F}_{\tau_2})} \alpha_M^M = \overline{\mu_{\mathbf{R}}}(\tau_2)$.

Concluimos que $\overline{\lambda_{\mathbf{R}}}$ y $\overline{\mu_{\mathbf{R}}}$ son isomorfimos de orden. $\square$

2.7. Conexiones de Galois sobre radicales idempotentes.

En esta sección extendemos los isomorfismos de orden $\overline{\lambda_{\mathbf{R}}}$ y $\overline{\mu_{\mathbf{R}}}$ de la Proposición 2.53 a una conexión de Galois isótona sobre R-radidem usando las correspondencias entre clases de R-módulos y radicales idempotentes dadas en las Proposiciones 1.76 y 1.77; esta extensión resulta ser única. En la siguiente proposición se describen las asignaciones que extienden estos isomorfismos de orden.

Proposición 2.54. *Sea* $\mathbf{R} \in [\mathcal{H}]_{\preceq}$. *Sean* $\lambda_{\mathbf{R}}, \mu_{\mathbf{R}} : R\text{-radidem} \longrightarrow R\text{-radidem}$ *asignaciones dadas como* $\lambda_{\mathbf{R}}(\sigma) = \bigwedge_{N \in f_{\mathbf{R}}(\mathbb{T}_\sigma)} \omega_0^N$ *y* $\mu_{\mathbf{R}}(\tau) = \bigvee_{M \in f^{\mathbf{R}}(\mathbb{F}_\tau)} \alpha_M^M$*, entonces*

$$\langle \lambda_{\mathbf{R}}, \mu_{\mathbf{R}} \rangle \in Gal_i(R\text{-radidem}, R\text{-radidem}),$$

además $Im(\mu_{\mathbf{R}}) = [[\sigma_{\mathbf{R}}, 1]]$ *y* $Im(\lambda_{\mathbf{R}}) = [[0, \tau_{\mathbf{R}}]]$.

Demostración. Por la Proposición 2.53 podemos ver que $\lambda_{\mathbf{R}}$ y $\mu_{\mathbf{R}}$ preservan el orden. Por lo tanto basta demostrar que $\mu_{\mathbf{R}}\lambda_{\mathbf{R}}$ es un operador cerradura y $\lambda_{\mathbf{R}}\mu_{\mathbf{R}}$ es un operador interior.

$\mu_{\mathbf{R}}\lambda_{\mathbf{R}}$ *es un operador cerradura*: Sea $\sigma \in R$-radidem, luego $\mathbb{T}_\sigma \subseteq f^{\mathbf{R}} f_{\mathbf{R}}(\mathbb{T}_\sigma)$ por lo tanto por la Observación 2.52 tenemos

$$\sigma = \bigvee_{M \in \mathbb{T}_\sigma} \alpha_M^M \preccurlyeq \bigvee_{M \in f^{\mathbf{R}} f_{\mathbf{R}}(\mathbb{T}_\sigma)} \alpha_M^M = \bigvee_{M \in f^{\mathbf{R}}(\mathbb{F}_{\lambda(\sigma)})} \alpha_M^M = \mu_{\mathbf{R}}(\lambda_{\mathbf{R}}(\sigma))$$

Por lo tanto $\mu_{\mathbf{R}}\lambda_{\mathbf{R}}$ es creciente. Además $f^{\mathbf{R}} f_{\mathbf{R}}$ es un operador cerradura por la tanto preserva el orden, lo que significa que para todo $\sigma, \eta \in R$-radidem tal que $\sigma \preccurlyeq \eta$ (si y sólo si $\mathbb{T}_\sigma \subseteq \mathbb{T}_\eta$), se sigue que $f^{\mathbf{R}} f_{\mathbf{R}}(\mathbb{T}_\sigma) \subseteq f^{\mathbf{R}} f_{\mathbf{R}}(\mathbb{T}_\eta)$, esto significa que

$$\mu_{\mathbf{R}}(\lambda_{\mathbf{R}}(\sigma)) = \bigvee_{M \in f^{\mathbf{R}} f_{\mathbf{R}}(\mathbb{T}_\sigma)} \alpha_M^M \preccurlyeq \bigvee_{M \in f^{\mathbf{R}} f_{\mathbf{R}}(\mathbb{T}_\eta)} \alpha_M^M = \mu_{\mathbf{R}}(\lambda_{\mathbf{R}}(\eta))$$

es decir, $\mu_{\mathbf{R}}\lambda_{\boldsymbol{R}}$ preserva el orden. Además

$$\mu_{\mathbf{R}}\lambda_{\mathbf{R}}(\mu_{\mathbf{R}}\lambda_{\mathbf{R}}(\sigma)) = \bigvee_{M \in f^{\mathbf{R}} f_{\mathbf{R}}(f^{\mathbf{R}} f_{\mathbf{R}}(\mathbb{T}_\sigma))} \alpha_M^M = \bigvee_{M \in f^{\mathbf{R}} f_{\mathbf{R}}(\mathbb{T}_\sigma)} \alpha_M^M = \bigvee_{M \in f^{\mathbf{R}}(\mathbb{F}_{\lambda(\sigma)})} \alpha_M^M = \mu_{\mathbf{R}}\lambda_{\mathbf{R}}(\sigma)$$

por lo tanto $\mu_{\mathbf{R}}\lambda_{\mathbf{R}}$ es idempotente y por lo anterior, es un operador cerradura.

$\lambda_{\mathbf{R}}\mu_{\mathbf{R}}$ *es un operador interior*: Sea $\tau \in R$-radidem, luego $\mathbb{F}_\tau \subseteq f_{\mathbf{R}} f^{\mathbf{R}}(\mathbb{F}_\tau)$ por lo tanto por la Observación 2.52 tenemos

$$\lambda_{\mathbf{R}}(\mu_{\mathbf{R}}(\tau)) = \bigwedge_{N \in f_{\mathbf{R}}(\mathbb{T}_{\mu(\tau)})} \omega_0^N = \bigwedge_{N \in f_{\mathbf{R}} f^{\mathbf{R}}(\mathbb{F}_\tau)} \omega_0^N \preccurlyeq \bigwedge_{N \in \mathbb{F}_\tau} \omega_0^N = \tau.$$

Por lo tanto $\lambda_{\mathbf{R}}\mu_{\mathbf{R}}$ es decreciente. Como $f_{\mathbf{R}} f^{\mathbf{R}}$ es un operador cerradura, tenemos que para toda $\sigma, \eta \in R$-radidem tales que $\sigma \preccurlyeq \eta$ (si y sólo si $\mathbb{F}_\sigma \supseteq \mathbb{F}_\eta$) que $f_{\mathbf{R}} f^{\mathbf{R}}(\mathbb{F}_\sigma) \supseteq f_{\mathbf{R}} f^{\mathbf{R}}(\mathbb{F}_\eta)$ lo que significa que

$$\lambda_{\mathbf{R}}(\mu_{\mathbf{R}}(\sigma)) = \bigwedge_{N \in f_{\mathbf{R}} f^{\mathbf{R}}(\mathbb{F}_\tau)} \omega_0^N \preccurlyeq \bigwedge_{N \in f_{\mathbf{R}} f^{\mathbf{R}}(\mathbb{F}_\tau)} \omega_0^N = \lambda_{\mathbf{R}}(\mu_{\mathbf{R}}(\eta)).$$

es decir, $\lambda_{\mathbf{R}}\mu_{\mathbf{R}}$ preserva orden. Además

$$\lambda_{\mathbf{R}}\mu_{\mathbf{R}}(\lambda_{\mathbf{R}}\mu_{\mathbf{R}}(\tau)) = \bigwedge_{N\in f_{\mathbf{R}}f^{\mathbf{R}}(f_{\mathbf{R}}f^{\mathbf{R}}(\mathbb{F}_\tau))} \omega_0^N = \bigwedge_{N\in f_{\mathbf{R}}f^{\mathbf{R}}(\mathbb{F}_\tau)} \omega_0^N = \bigwedge_{N\in f_{\mathbf{R}}(\mathbb{T}_{\mu(\tau)})} \omega_0^N = \lambda_{\mathbf{R}}\mu_{\mathbf{R}}(\tau)$$

por lo tanto $\lambda_{\mathbf{R}}\mu_{\mathbf{R}}$ es idempotente, se sigue que es un operador interior.

Por lo tanto $\langle\lambda_{\mathbf{R}}, \mu_{\mathbf{R}}\rangle \in Gal_i(R\text{-radidem}, R\text{-radidem})$. Por la Observación 2.52 y la Proposición 2.53 concluimos que $Im(\mu_{\mathbf{R}}) = [[\sigma_{\mathbf{R}}, 1]]$ y $Im(\lambda_{\mathbf{R}}) = [[0, \tau_{\mathbf{R}}]]$. □

De la proposición anterior tenemos que $\langle\lambda_{\mathbf{R}}, \mu_{\mathbf{R}}\rangle \in Gal_i(R\text{-radidem}, R\text{-radidem})$ para cada $\mathbf{R} \in [\mathcal{H}]_{\preceq}$, lo que implica que $\mu_{\mathbf{R}}\lambda_{\mathbf{R}}$ es un operador cerradura y cumple que $Im(\mu_{\mathbf{R}}\lambda_{\mathbf{R}}) = Im(\mu_{\mathbf{R}})$, además $\lambda_{\mathbf{R}}\mu_{\mathbf{R}}$ es un operador interior y cumple que $Im(\lambda_{\mathbf{R}}\mu_{\mathbf{R}}) = Im(\lambda_{\mathbf{R}})$. De esto se deduce el siguiente resultado.

Corolario 2.55. *Sea* $\mathbf{R} \in [\mathcal{H}]_{\preceq}$*, entonces:*

1. $[[\sigma_{\mathbf{R}}, 1]]$ *es cerrado bajo ínfimos arbitrarios.*
2. $[[0, \tau_{\mathbf{R}}]]$ *es cerrado bajo supremos arbitrarios.*

Por lo tanto $[[\sigma_{\mathbf{R}}, 1]]$ *y* $[[0, \tau_{\mathbf{R}}]]$ *son grandes retículas completas.*

Aplicando el Teorema de Domenach-Leclerc a las familias de Moore $(f)_{\mathcal{H}}\text{-}cerr = \mathcal{T}\text{-}tors$ y $cerr\text{-}(f)_{\mathcal{H}} = \mathcal{F}\text{-}tors$, donde $f^{\mathcal{H}}f_{\mathcal{H}}$ y $f_{\mathcal{H}}f^{\mathcal{H}}$ son los operadores cerradura, tenemos el isomorfismo de orden

$$\langle[\mathcal{H}]_{\preceq}, \subseteq\rangle \cong \langle Gal(\mathcal{T}\text{-}tors, \mathcal{L}\text{-}tors), \leq\rangle$$

y partiendo de la Proposición 2.53 tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.56. *Existe un isomorfismo de orden entre:*

$$\langle Gal(\mathcal{T}\text{-}tors, \mathcal{L}\text{-}tors), \leq\rangle \quad y \quad \langle Gal_i(R\text{-radidem}, R\text{-radidem}), \leq\rangle.$$

Demostración. Sea $\Psi : Gal(\mathcal{T}\text{-}tors, \mathcal{L}\text{-}tors) \longrightarrow Gal_i(R\text{-radidem}, R\text{-radidem})$ dada como $\Psi(f) = \langle\lambda_f, \mu_f\rangle$ donde $\lambda_f(\sigma) = \bigwedge_{N\in f_+(\mathbb{T}_\sigma)} \omega_0^N$ y $\mu_f(\tau) = \bigvee_{M\in f^+(\mathbb{F}_\tau)} \alpha_M^M$ (como en la Proposicón 2.54).

Sustituyendo en la Proposición 2.54 a $(f)_{\mathbf{R}}$ por f tenemos que λ_f y μ_f preservan el orden, $\lambda_f\mu_f$ es un operador interior y $\mu_f\lambda_f$ es un operador cerradura. Por lo tanto Ψ está bien definida.

Ψ *preserva el orden*: Sean $f, g \in Gal(\mathcal{T}\text{-}tors, \mathcal{L}\text{-}tors)$ tales que $f \leq g$.

Sean $\Psi(f) = \langle\lambda_f, \mu_f\rangle$ y $\Psi(g) = \langle\lambda_g, \mu_g\rangle$. Como $f_+(\mathbb{T}_\sigma) \subseteq g_+(\mathbb{T}_\sigma)$ y $f^+(\mathbb{F}_\tau) \subseteq g^+(\mathbb{F}_\tau)$ tenemos que

$$\lambda_f(\sigma) = \bigwedge_{N\in f_+(\mathbb{T}_\sigma)} \omega_0^N \succcurlyeq \bigwedge_{N\in g_+(\mathbb{T}_\sigma)} \omega_0^N = \lambda_g(\sigma)$$

$$\mu_f(\tau) = \bigvee_{M\in f^+(\mathbb{F}_\tau)} \alpha_M^M \preccurlyeq \bigvee_{M\in g^+(\mathbb{F}_\tau)} \alpha_M^M = \mu_g(\tau).$$

Por lo tanto $\Psi(f) \leq \Psi(g)$ y Ψ preserva el orden.

Sea $\Theta : Gal_i(R\text{-radidem}, R\text{-radidem}) \longrightarrow Gal(\mathcal{T}\text{-}tors, \mathcal{L}\text{-}tors)$ dada como $\Theta(g) = \langle f_+, f^+\rangle$ donde $f_+(\mathbb{T}_\sigma) = \mathbb{F}_{g_+(\sigma)}$ y $f^+(\mathbb{F}_\tau) = \mathbb{T}_{g^+(\tau)}$.

f_+ y f^+ *invierten el orden*: Sean $\mathbb{T}_{\sigma_1}, \mathbb{T}_{\sigma_2} \in \mathcal{T}\text{-}tors$ tales que $\mathbb{T}_{\sigma_1} \subseteq \mathbb{T}_{\sigma_2}$ entonces $g_+(\sigma_1) \preccurlyeq g_+(\sigma_2)$ si y sólo si $f_+(\mathbb{T}_{\sigma_2}) = \mathbb{F}_{g_+(\sigma_2)} \subseteq \mathbb{F}_{g_+(\sigma_1)} = f_+(\mathbb{T}_{\sigma_1})$. Sean $\mathbb{F}_{\tau_1}, \mathbb{F}_{\tau_2} \in \mathcal{L}\text{-}tors$ tales que $\mathbb{F}_{\tau_1} \subseteq \mathbb{F}_{\tau_2}$ entonces $g^+(\tau_2) \preccurlyeq g^+(\tau_1)$ si y sólo si $f^+(\mathbb{F}_{g^+(\tau_2)}) = \mathbb{T}_{g^+(\tau_2)} \subseteq \mathbb{T}_{g^+(\tau_1)} = f^+(\mathbb{F}_{g^+(\tau_1)})$. Por lo tanto f_+ y f^+ invierten el orden.

Veamos que f_+f^+ y f^+f_+ *son operadores cerradura*. Sea $\mathbb{T}_\sigma \in \mathcal{T}\text{-}tors$, tenemos que $\sigma \preccurlyeq g^+g_+(\sigma)$ pues g^+g_+ es un operador cerradura, por lo tanto

$$f^+f_+(\mathbb{T}_\sigma) = f^+(\mathbb{F}_{g^+(\sigma)}) = \mathbb{T}_{g^+g_+(\sigma)} \supseteq \mathbb{T}_\sigma$$

Por lo tanto f_+f^+ es un operador cerradura.

Sea $\mathbb{F}_\tau \in \mathcal{L}\text{-}tors$, tenemos que $g_+g^+(\tau) \preccurlyeq \tau$ pues g_+g^+ es un operador interior, por lo tanto

$$f_+f^+(\mathbb{F}_\tau) = f_+(\mathbb{T}_{g^+(\tau)}) = \mathbb{F}_{g_+g^+(\tau)} \supseteq \mathbb{F}_\tau$$

Por lo tanto f_+f^+ es un operador cerradura y de esta forma Θ está bien definida.

Θ preserva el orden. Sean $f, g \in Gal_i(R\text{-radidem}, R\text{-radidem})$ tales que $f \leq g$, luego $f_+(\sigma) \succcurlyeq g_+(\sigma)$ y $f^+(\tau) \preccurlyeq g^+(\tau)$. Por lo tanto

$$\mathbb{T}_{f^+(\tau)} \subseteq \mathbb{T}_{g^+(\tau)} \text{ y } \mathbb{F}_{f_+(\sigma)} \subseteq \mathbb{F}_{g_+(\sigma)}$$

Por lo tanto $\Theta(f) \leq \Theta(g)$ y Θ preserva el orden.

Ψ y Θ *son inversas* una de la otra.

Sea $f \in Gal(\mathcal{T}\text{-}tors, \mathcal{L}\text{-}tors)$, tomemos $g = \Theta(\Psi(f)) = \Theta(\langle \lambda_f, \mu_f\rangle)$. Sea $\mathbb{T}_\sigma \in \mathcal{T}\text{-}tors$, luego tenemos que $g_+(\mathbb{T}_\sigma) = \mathbb{F}_{\lambda_f(\sigma)} = f_+(\mathbb{T}_\sigma)$ y $g^+(\mathbb{F}_\tau) = \mathbb{T}_{\mu_f(\tau)} = f^+(\mathbb{F}_\tau)$, lo que implica que $\Theta(\Psi(f)) = f$. Por lo tanto $\Theta\Psi = 1$.

Sea $\langle \lambda, \mu\rangle \in Gal_i(R\text{-radidem}, R\text{-radidem})$, tomemos $g = \Psi(\Theta(\langle \lambda, \mu\rangle))$, con

$$g_+(\sigma) = \bigwedge_{N \in f_+(\mathbb{T}_\sigma)} \omega_0^N = \bigwedge_{N \in \mathbb{F}_{\lambda(\sigma)}} \omega_0^N = \lambda(\sigma)$$

$$g^+(\tau) = \bigvee_{M \in f^+(\mathbb{F}_\tau)} \alpha_M^M = \bigvee_{M \in \mathbb{T}_{\mu(\tau)}} \alpha_M^M = \mu(\tau)$$

lo que implica que $\Psi(\Theta(\langle \lambda, \mu\rangle)) = \langle \lambda, \mu\rangle$. Por lo tanto $\Psi\Theta = 1$.

Por lo tanto Ψ y Θ son isomorfismos de orden. $\square$

De lo anterior se deduce el siguiente corolario que en el capítulo 4, sección 4.2 lo usaremos para determinar la estructura reticular de $[\mathcal{H}]_{\preccurlyeq}$ cuando R es un anillo semisimple artiniano.

Corolario 2.57. *Existe un isomorfismo de orden entre las grandes retículas:*

$$\langle [\mathcal{H}]_{\preceq}, \subseteq\rangle \quad y \quad \langle Gal_i(R\text{-radidem}, R\text{-radidem}), \leq\rangle.$$

Demostración. Del Teorema de Domenach-Leclerc tenemos el isomorfismo de orden entre $[\mathcal{H}]_{\preceq}$ y $Gal(\mathcal{T}\text{-}tors, \mathcal{L}\text{-}tors)$ y de la Proposición 2.56 el isomorfismo de orden entre $Gal(\mathcal{T}\text{-}tors, \mathcal{L}\text{-}tors)$ y $Gal_i(R\text{-radidem}, R\text{-radidem})$. Concluimos que $[\mathcal{H}]_{\preceq} \cong Gal_i(R\text{-radidem}, R\text{-radidem})$ y este isomorfismo es de orden. □

Observación 2.58. *Usando la Proposición 2.54 podemos definir la asignación* $\zeta : [\mathcal{H}]_{\preceq} \longrightarrow (R\text{-radidem})^2$ *como*

$$\begin{aligned}\zeta(\mathbf{R}) &= \{(\mu_{\mathbf{R}}\lambda_{\mathbf{R}}(\sigma), \lambda_{\mathbf{R}}(\sigma)) \mid \sigma \in R\text{-radidem}\}\\ &= \{(\mu_{\mathbf{R}}(\tau), \lambda_{\mathbf{R}}\mu_{\mathbf{R}}(\tau)) \mid \tau \in R\text{-radidem}\}\\ &= \{(\sigma, \lambda_{\mathbf{R}}(\sigma)) \mid \sigma \in [[\sigma_{\mathbf{R}}, 1]]\}\\ &= \{(\mu_{\mathbf{R}}(\tau), \tau) \mid \tau \in [[0, \tau_{\mathbf{R}}]]\}\end{aligned}$$

donde $\langle\lambda_{\mathbf{R}}, \mu_{\mathbf{R}}\rangle \in Gal_i(R\text{-radidem}, R\text{-radidem})$*, entonces* $\zeta(\mathcal{H}) = \{(\sigma, \sigma) \mid \sigma \in R\text{-radidem}\}$ *es la diagonal de* $(R\text{-radidem})^2$*, además* $\zeta(\mathbf{R})$ *son las parejas de prerradicales que le corresponden a las* $\mathbf{R}$*-teorías de torsión, es decir,* $(\mathbb{T}_\sigma, \mathbb{F}_{\lambda_{\mathbf{R}}(\sigma)})$ *y* $(\mathbb{T}_{\mu_{\mathbf{R}}(\tau)}, \mathbb{T}_\tau)$ *son* $\mathbf{R}$*-teorías de torsión para cada* $\sigma \in [[\sigma_{\mathbf{R}}, 1]]$ *y* $\tau \in [[0, \tau_{\mathbf{R}}]]$*. Notemos que* ζ *es inyectiva y que* $\mathcal{H} = \bigcup_{\sigma \in R\text{-radidem}} (\mathbb{T}_\sigma \times \mathbb{F}_\sigma)$*.*

A continuación damos ejemplos de algunas relaciones bicerradas con respecto a $\mathcal{H}$ y en el siguiente capítulo estudiaremos relaciones bicerradas inducidas por bifuntores.

Ejemplos 2.59.

1. $\hbar, \mathcal{H} \in [\mathcal{H}]_{\preceq}$ *(ver Observaciones 2.20 y 2.28). En estos casos*

$$[[\sigma_{\mathcal{H}}, 1]] = R\text{-radidem} = [[0, \tau_{\mathcal{H}}]] \;\text{ y }\; [[\sigma_\hbar, 1]] = R\text{-rad} \cap R\text{-lep} = [[0, \tau_\hbar]].$$

2. $(R\text{-Mod})^2 \in [\mathcal{H}]_{\preceq}$ *pues para toda* $\mathscr{C} \in \wp(R\text{-Mod})$

$$f_{(R\text{-Mod})^2}(\mathscr{C}) = \{N \in R\text{-Mod} \mid (M, N) \in (R\text{-Mod})^2 \;\forall\; M \in R\text{-Mod}\} = R\text{-Mod} = \mathbb{F}_0$$

de forma análoga $f^{(R\text{-Mod})^2}(\mathscr{C}) = R\text{-Mod} = \mathbb{T}_1$*. Por lo tanto*

$$(f)_{(R\text{-Mod})^2}\text{-}cerr \subseteq (f)_{\mathcal{H}}\text{-}cerr \;\; y \;\; cerr\text{-}(f)_{(R\text{-Mod})^2} \subseteq cerr\text{-}(f)_{\mathcal{H}}.$$

En este caso $\sigma_{(R\text{-Mod})^2} = 1$ *y* $\tau_{(R\text{-Mod})^2} = 0$*, por lo tanto* $[[\sigma_{(R\text{-Mod})^2}, 1]] = \{1\}$ *y* $[[0, \tau_{(R\text{-Mod})^2}]] = \{0\}$*.*

3. *Sean* $\mathbb{T} \in \mathcal{T}\text{-}tors$ *y* $\mathbb{F} \in \mathcal{L}\text{-}tors$*, donde* $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ *no necesariamente es una teoría de torsión. Por la Proposición 1.30 y la Observación 1.31,* $\langle p_{\mathbb{T},\mathbb{F}}, p_{\mathbb{F},\mathbb{T}}\rangle \in Gal(\mathcal{T}\text{-}tors, \mathcal{L}\text{-}tors)$ *y está definida como:*

$$p_{\mathbb{T},\mathbb{F}}(\mathcal{T}) = \begin{cases} R\text{-Mod} & si \quad \mathcal{T} = \{0\} \\ \mathbb{F} & si \quad \{0\} \subset \mathcal{T} \subseteq \mathbb{T} \\ \{0\} & si \quad \mathcal{T} \nsubseteq \mathbb{T} \end{cases} \quad y \quad p_{\mathbb{F},\mathbb{T}}(\mathcal{F}) = \begin{cases} R\text{-Mod} & si \quad \mathcal{F} = \{0\} \\ \mathbb{T} & si \quad \{0\} \subset \mathcal{F} \subseteq \mathbb{F} \\ \{0\} & si \quad \mathcal{F} \nsubseteq \mathbb{F} \end{cases}$$

y por el Teorema de Domenach-Leclerc le corresponde la relación

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \{(M,N) \in (R\text{-Mod})^2 \mid M \in p_{\mathbb{F},\mathbb{T}}(\varphi'(\{N\}))\} \\ &= \{(M,N) \in (R\text{-Mod})^2 \mid M \in p_{\mathbb{F},\mathbb{T}}(\mathbb{F}_{\overline{\omega_0^N}})\} \\ &= (R\text{-Mod} \times \{0\}) \cup (\mathbb{T} \times \mathbb{F}) \cup (\{0\} \times R\text{-Mod})\end{aligned}$$

donde $\varphi' = f_{\mathcal{H}} f^{\mathcal{H}}$ *y* $\varphi'(\{N\}) = \mathbb{F}_{\overline{\omega_0^N}}$ *es la menor clase libre de torsión que contiene a* N *(ver Proposición 1.71). Es claro que esta relación* $\mathbf{R}$ *es bicerrada con respeto a* $\mathcal{H}$ *pues cumple que*

$$\begin{aligned}(f)_{\mathbf{R}}\text{-}cerr = \{\{0\}, \mathbb{T}, R\text{-Mod}\} \ &\subseteq (f)_{\mathcal{H}}\text{-}cerr \ \ y \\ cerr\text{-}(f)_{\mathbf{R}} = \{\{0\}, \mathbb{F}, R\text{-Mod}\} &\subseteq cerr\text{-}(f)_{\mathcal{H}},\end{aligned}$$

además $[[\sigma_{\mathbf{R}}, 1]] = \{0, \bigvee_{M \in \mathbb{T}} \alpha_M^M, 1\}$ *y* $[[0, \tau_{\mathbf{R}}]] = \{0, \bigwedge_{N \in \mathbb{F}} \omega_0^N, 1\}$. *En este caso usando la conexión de Galois* $\langle p_{\mathbb{T},\mathbb{F}}, p_{\mathbb{F},\mathbb{T}} \rangle$ *y las Proposiciones 1.76 y 1.77, podemos describir su correspondiente conexión de Galois isótona* $\langle \lambda_{\mathbf{R}}, \mu_{\mathbf{R}} \rangle$ *sobre R-radidem como:*

$$\lambda_{\mathbf{R}}(\sigma) = \begin{cases} 0 & si \quad \sigma = 0 \\ \bigwedge_{N \in \mathbb{F}} \omega_0^N & si \quad 0 \prec \sigma \preccurlyeq \bigvee_{M \in \mathbb{T}} \alpha_M^M \\ 1 & si \quad \sigma \not\preccurlyeq \bigvee_{M \in \mathbb{T}} \alpha_M^M \end{cases} \quad y \quad \mu_{\mathbf{R}}(\tau) = \begin{cases} 1 & si \quad \tau = 1 \\ \bigvee_{M \in \mathbb{T}} \alpha_M^M & si \quad \bigwedge_{N \in \mathbb{F}} \omega_0^N \preccurlyeq \tau \prec 1 \\ 0 & si \quad \bigwedge_{N \in \mathbb{F}} \omega_0^N \not\preccurlyeq \tau \end{cases}$$

pues por la Proposición 2.54 $\lambda_{\mathbf{R}}(\sigma) = \bigwedge_{N \in f_{\mathbf{R}}(\mathbb{T}_\sigma)} \omega_0^N$ *y* $\mu_{\mathbf{R}}(\tau) = \bigvee_{M \in f^{\mathbf{R}}(\mathbb{F}_\tau)} \alpha_M^M$.

Capítulo 3

Bifuntores que inducen relaciones bicerradas

Ya que nuestro objetivo es estudiar las relaciones bicerradas con respecto a $\mathcal{H}$ (o respecto a los conglomerados $\mathcal{T}$-*tors* y $\mathcal{L}$-*tors*), vamos a generar estas relaciones usando bifuntores que tengan propiedades semejantes (más débiles) a las del bifuntor $\mathrm{Hom}_R(\_,\_)$. Por consiguiente introduciremos los conceptos de *funtores covariantes (contravariantes) casi continuos, funtores covariantes (contravariantes) casi cocontinuos* y *bifuntores casi continuos*, veremos sus propiedades como la de composición, coproducto, que sus imagenes inversas preservan clases de torsión o libres de torsión, según sea el caso, etc. Nos enfocamos principalmente en estudiar los bifuntores $\mathrm{Hom}_R(F(\_),\_)$ y $\mathrm{Hom}_R(\_,G(\_))$, para cuando F es un funtor covariante casi cocontinuo y G es un funtor covariante casi continuo, y estudiaremos con más detalle cuando F y G formen un par adjunto. Por consiguiente podemos formular la pregunta: ¿Cada relación bicerrada con respecto a $\mathcal{H}$ es inducida por algún bifuntor de esta clase?.

3.1. Funtores casi continuos y casi cocontinuos

Aunque estamos interesados en R-Mod, las siguientes definiciones las haremos para categorías abelianas bicompletas.[1]

Sean $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$ categorías abelianas. Para el bifuntor $\mathrm{Hom}(\_,\_) : \mathscr{A} \times \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{C}$ podemos definir la relación $\mathcal{H} = \{(A, B) \in \mathscr{A} \times \mathscr{B} \mid \mathrm{Hom}(A, B) = 0\}$ y de forma análoga a Dickson en [10] podemos definir las $\mathbf{R}$-teorías de torsión, donde $\mathbf{R}$ es una relación bicerrada con respecto a $\mathcal{H}$. A continuación definimos funtores con las propiedades suficientes para inducir relaciones bicerradas con respecto a $\mathcal{H}$.

Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ categorías abelianas bicompletas. Para cada $\{N_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq \mathscr{A}$ y cada proyección canónica $p_\beta : \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha \longrightarrow N_\beta$ tenemos que:

1. Cada funtor covariante $G : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ induce morfismos $G(p_\beta) : G(\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha) \longrightarrow G(N_\beta)$ y por la propiedad universal del producto existe un morfismo $\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} G(p_\alpha) : G(\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha) \longrightarrow \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} G(N_\alpha)$ tal que $Ker(\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} G(p_\alpha)) = \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} Ker(G(p_\alpha))$.

[1] Una categoría abeliana es bicompleta si tiene productos y coproductos. Ver apéndice A.

2. Cada funtor contravariante $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ induce morfismos $F(p_\beta) : F(N_\beta) \longrightarrow F(\prod_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha)$ y por la propiedad universal del coproducto existe un morfismo $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} F(p_\alpha) : \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} F(N_\alpha) \longrightarrow F(\prod_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha)$ tal que $Im(\prod_{\alpha\in\Lambda} F(p_\alpha)) = \sum_{\alpha\in\Lambda} Im(F(p_\alpha))$.

De forma análoga, para cada $\{N_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq \mathscr{A}$ y cada inclusión canónica $i_\beta : N_\beta \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha$ tenemos que:

1. Cada funtor covariante $G : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ induce morfismos $G(i_\beta) : G(N_\beta) \longrightarrow G(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha)$ y por la propiedad universal del coproducto existe un morfismo $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} G(i_\alpha) : \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} G(N_\alpha) \longrightarrow G(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha)$ tal que $Im(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} G(i_\alpha)) = \sum_{\alpha\in\Lambda} Im(G(i_\alpha))$.
2. Cada funtor contravariante $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ induce morfismos $F(i_\beta) : F(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha) \longrightarrow F(N_\beta)$ y por la propiedad universal del producto existe un morfismo $\prod_{\alpha\in\Lambda} F(i_\alpha) : \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} F(N_\alpha) \longrightarrow F(\prod_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha)$ tal que $Ker(\prod_{\alpha\in\Lambda} F(i_\alpha)) = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} Ker(F(i_\alpha))$.

Definición 3.1. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías bicompletas.*

1. *Un funtor $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es* ***continuo*** *si preserva todos los límites pequeños.*
2. *Un funtor $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es* ***cocontinuo*** *si preserva todos los colímites pequeños.*

Notemos que un funtor cocontinuo en particular preserva coproductos y un funtor cocontinuo en particular preserva productos (ver Apéndice B), esto motiva a usar los nombres de "casi continuo" y "casi cocontinuo" para nombrar a los funtores que tienen propiedades más débiles pero si suficientes para definir relaciones bicerradas con respecto a $\mathcal{H}$.

Definición 3.2. *Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ categorías abelianas bicompletas y $\{N_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq \mathscr{A}$. Un funtor covariante $G : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ se llama:*

1. ***Casi continuo*** *si exacto izquierdo y cumple que $Ker(\prod_{\alpha\in\Lambda} G(p_\alpha)) = 0$, es decir, $\prod_{\alpha\in\Lambda} G(p_\alpha) : G(\prod_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha) \longrightarrow \prod_{\alpha\in\Lambda} G(N_\alpha)$ es un monomorfismo donde $p_\beta : \prod_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha \longrightarrow N_\beta$ es la proyección canónica.*
2. ***Casi cocontinuo*** *si es exacto derecho y cumple que $Im(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} G(i_\alpha)) = G(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha)$, es decir, $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} G(i_\alpha) : \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} G(N_\alpha) \longrightarrow G(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha)$ es un epimorfismo donde $i_\beta : N_\beta \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha$ es la inclusión canónica.*

Definición 3.3. *Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ categorías abelianas bicompletas y $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq \mathscr{A}$. Un funtor contravariante $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ se llama:*

1. ***Casi continuo*** *si es exacto izquierdo y cumple que* $Ker(\prod_{\alpha\in\Lambda} F(i_\alpha)) = 0$, *es decir,* $\prod_{\alpha\in\Lambda} F(i_\alpha) : F(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha) \longrightarrow \prod_{\alpha\in\Lambda} F(M_\alpha)$ *es un monomorfismo donde* $i_\beta : M_\beta \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ *es la inclusión canónica.*

2. ***Casi cocontinuo*** *si es exacto derecho y cumple que* $Im(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} F(p_\alpha)) = F(\prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha)$, *es decir,* $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} F(p_\alpha) : \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} F(M_\alpha) \longrightarrow F(\prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha)$ *es un epimorfismo donde* $p_\beta : \prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha \longrightarrow M_\beta$ *es la proyección canónica.*

Para dar ejemplos de funtores covariantes y contravariantes casi continuos y casi cocontinuos necesitamos las siguientes definiciones y la siguiente proposición.

Definición 3.4. ([33], Definición 0.1.6) *Sean R y S dos anillos. Un R-S-bimódulo M es tanto un R-módulo izquierdo como un S-módulo derecho, y además, para todo $r \in R$, $s \in S$ y $m \in M$, $(rm)s = r(ms)$. Por consiguiente, R-*Mod*-S es la categoría cuyos objetos son R-S-bimódulos y cuyos morfismos $f : M \longrightarrow N$, son* ***morfismos de R-S-bimódulos*** *que son tanto morfismos de módulos R-módulos izquierdos como morfismos de S-módulos derechos, es decir, $f(m+m') = f(m) + f(m')$ y $f(rms) = rf(m)s$ para todo $m, m' \in M$, $r \in R$ y $s \in S$*

Observación 3.5. *Un R-S-bimódulo es escencialmente un módulo izquierdo sobre el anillo $R \otimes_{\mathbb{Z}} S^{op}$, donde S^{op} es el anillo opuesto de S (ver [2], capítulo I). Por consiguiente, un morfismo de R-S-bimódulos es un morfismo de $R \otimes_{\mathbb{Z}} S^{op}$-módulos izquierdos.*

De la observación anterior tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.6. ([33], Proposición 1.7.31) *Sea R un anillo. Cualquier $R \otimes_{\mathbb{Z}} R^{op}$-módulo M puede verse como un R-R-bimódulo bajo la multiplicación escalar $rx = (r\otimes 1)x$ y $xr' = (1 \otimes r')x$, esto induce un isomorfismo entre las categorías $R \otimes_{\mathbb{Z}} R^{op}$-*Mod *y R-*Mod*-R.* ☐

Notación 3.7. $R\text{-BiMod} := \{M \in R\text{-Mod} \mid M \in R \otimes_{\mathbb{Z}} R^{op}\text{-Mod}\}$.

Definición 3.8. ([31]) *Un R-módulo izquierdo M es* ***Mittag-Leffler*** *si el homomorfimo canónico*

$$(\prod_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha) \otimes_R M \longrightarrow \prod_{\alpha\in\Lambda} (N_\alpha \otimes_R M)$$

*es un monomorfismo para cada familia $\{N_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq$ *Mod*-R. Análogamente se define un R-módulo derecho Mittag-Leffler.*

Por ejemplo, cada R-módulo finitamente presentado es un R-módulo Mittag-Leffler. Además, la clase de todos los R-módulos Mittag-Leffler es cerrada bajo coproductos arbitrarios, submódulos puros y extensiones.

Observemos que todo funtor covariante continuo es un funtor covariante casi continuo y todo funtor covariante cocontinuo es un funtor covariante casi cocontinuo.

Ejemplos 3.9. *A continuación damos ejemplos de funtores covariantes casi continuos, casi cocontinuos, funtores contravariantes casi continuos y casi cocontinuos.*

1. *En los siguientes tres ejemplos* $L \in R\text{-BiMod}$.

   a) $L \otimes_R \_ : R\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}$ *es un funtor covariante exacto derecho y preserva coproductos, por lo tanto un funtor covariante cocontinuo.*

   b) $\mathrm{Hom}_R(L, \_) : R\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}$ *es un funtor covariante exacto izquierdo y preserva productos, por lo tanto un funtor covariante continuo .*

   c) $\mathrm{Hom}_R(\_, L) : R\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}$ *es un funtor contravariante exacto izquierdo y para toda* $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq R\text{-Mod}$ *cumple* $\mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha, N) \cong \prod_{\alpha\in\Lambda} \mathrm{Hom}_R(M_\alpha, N)$*, por lo tanto es un funtor contravariante continuo.*

2. *Todo prerradical preserva coproductos (ver Proposición 1.40) y monomorfismos, por lo tanto los prerradicales exactos derechos son funtores covariantes cocontinuos, los cuales por el Corolario 1.93 son todos los* α_I^R *con* $I \leq R$ *ideal puro.*

3. *Sea* $\langle F, G\rangle : R\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}$ *un par adjunto. Entonces* F *es un funtor covariante cocontinuo y* G *es un funtor covariante continuo (ver Teoremas 1.105 y 1.106).*

4. *Los siguientes son ejemplos de funtores que son casi continuos pero que no necesariamente son continuos.*

   a) *Todo prerradical* σ *cumple* $\sigma(\prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha) \leq \prod_{\alpha\in\Lambda} \sigma(M_\alpha)$ *para toda* $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq R\text{-Mod}$ *(ver Proposición 1.40), por lo tanto los prerradicales exactos izquierdos son funtores covariantes casi continuos que no necesariamente son continuos. Por ejemplo, tenemos al prerradical* $\mathrm{t} : \mathbb{Z}\text{-Mod} \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$*, el cual asigna a cada* $\mathbb{Z}$*-módulo* M*, su submódulo de torsión* $\mathrm{t}(M)$*. Este es un prerradical exacto izquierdo que no preserva productos en general.*

   b) *Para cada* R*-módulo derecho* M*,* $M \otimes_R \_$ *es un funtor covariante casi continuo si y sólo si* M_R *es plano y Mittag-Leffler. Como el funtor* $M \otimes_R \_$ *es exacto derecho, entonces es exacto si y sólo si* M *es plano. La definición de un módulo Mittag-Leffler* M *es justo la condición 1 de la Definición 3.2 aplicado al funtor* $M \otimes_R \_$ *(ver Definición 3.8).*

      Además, si $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq R\text{-Mod}$ *es una familia de* R*-módulos derechos planos Mittag-Leffler, entonces* $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ *es un* R*-módulo derecho plano Mittag-Leffler, lo que implica que* $(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha) \otimes_R \_$ *es un funtor covariante casi cocontinuo.*

   c) *Para cada* $M \in R\text{-Mod}$, $\mathrm{Hom}_R(M, \_)$ *es un funtor covariante casi cocontinuo si y sólo si* M *es proyectivo (lo cual es equivalente a decir que el funtor* $\mathrm{Hom}_R(M, \_)$ *es exacto derecho) y tiene la siguiente propiedad: para cada familia* $\{N_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq R\text{-Mod}$*, la imagen de cada morfismo* $M \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha$ *está contenido en* $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda'} N_\alpha$ *donde* Λ' *es un conjunto finito de* Λ*. Esta propiedad es justo la condición 2 de la Definición 3.2. aplicada al funtor* $\mathrm{Hom}_R(M, \_)$ *y puede considerarse como una propiedad dual a la de ser Mittag-Leffler.*

3.1.1. Propiedades de funtores casi continuos y casi cocontinuos

En esta sección damos propiedades de los funtores casi cocontinuos y continuos, las cuales son muy importantes para generar relaciones bicerradas. Demostramos que el producto y coproducto de funtores casi continuos (cocontinuos) es un funtor continuo (cocontinuo), también estudiamos la composición de este tipo de funtores.

De aquí en adelante $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ denotarán categorías abelianas bicompletas.

Proposición 3.10. *Sean $\{F_i : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}\}_{i\in X}$ y $\{G_i : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}\}_{i\in X}$ familias de funtores.*

1. *Si F_i es un funtor covariante casi cocontinuo para toda $i \in X$, entonces $\bigoplus\limits_{i\in X} F_i$ y $\prod\limits_{i\in X} F_i$ son funtores covariantes casi cocontinuos.*

2. *Si G_i es un funtor covariante casi continuo para toda $i \in X$, entonces $\bigoplus\limits_{i\in X} G_i$ y $\prod\limits_{i\in X} G_i$ son funtores covariantes casi continuos.*

Demostración. Sólo probaremos 1), pues la parte 2) es completamente análoga. Por la Proposición A.9, $\bigoplus\limits_{i\in X} F_i$ es un funtor exacto derecho pues cada F_i es un funtor exacto derecho. Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de objetos en $\mathscr{A}$. Por hipótesis, para cada $i \in X$ el morfismo inducido $\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} F_i(i_\alpha) : \bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} F_i(M_\alpha) \longrightarrow F_i(\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha)$ es un epimorfismo. Si llamamos ψ_i a este morfismo entonces el morfismo inducido $\psi : \bigoplus\limits_{i\in X}\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} F_i(M_\alpha) \longrightarrow \bigoplus\limits_{i\in X} F_i(\bigoplus\limits_{\alpha\in X} M_\alpha)$ es un epimorfismo. Usando el hecho que $\bigoplus\limits_{i\in X}\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} F_i(M_\alpha) \cong \bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda}\bigoplus\limits_{i\in X} F_i(M_\alpha)$ concluimos que el morfismo inducido $\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda}(\bigoplus\limits_{i\in X} F_i)(i_\alpha)$ es un epimorfismo.

Por lo tanto $\bigoplus\limits_{i\in X} F_i$ es un funtor covariante casi cocontinuo. El caso contravariante se demuestra de manera similar. □

De la proposición anterior tenemos el producto y coproducto de funtores covariantes casi continuos resulta ser covariantes casi continuos. De igual manera, nos interesa saber que pasa si componemos funtores covariantes casi continuos y funtores covariantes casi cocontinuos y ver en qué casos siguen siendo casi continuo (casi cocontinuo).

Observación 3.11. *Para un funtor covariante casi continuo $G : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$, la condición $Ker(\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} G(p_\alpha)) = 0$ es más débil que la propiedad de que preserve productos directos, sólo significa que $\varphi : G(\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha) \longrightarrow \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} G(N_\alpha)$ es un monomorfismo para toda $\{N_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq \mathscr{A}$, donde $p_\beta : \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha \longrightarrow N_\beta$ es la proyección canónica. Notemos que si φ es un isomorfismo, entonces G es un funtor covariante continuo.*

Para simplificar la notación denotaremos la composición $G \circ F$ como GF. Demostraremos las dos composiciones que usaremos más adelante, el resto de ellas la mencionamos en otra proposición.

Proposición 3.12. *Sean $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ y $G : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{C}$ dos funtores covariantes casi continuos. Entonces GF es un funtor covariante casi continuo.*

Demostración. Sea $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $\mathscr{A}$, luego la sucesión $0 \longrightarrow F(N) \longrightarrow F(M) \longrightarrow F(L)$ es exacta en $\mathscr{B}$. Por la Proposición 1.99, la sucesión

$$0 \longrightarrow GF(N) \longrightarrow GF(M) \longrightarrow GF(L)$$

es exacta en $\mathscr{C}$. Por lo tanto GF es un funtor exacto izquierdo. Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq \mathscr{A}$, para cada proyección canónica $p_\beta : \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha \longrightarrow M_\beta$ tenemos que F y GF inducen los morfismos:

$$F(p_\beta) : F(\prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha) \longrightarrow F(M_\beta) \;\text{ y }\; GF(p_\beta) : GF(\prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha) \longrightarrow GF(M_\beta)$$

que inducen el morfismo $\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} F(p_\beta) : G(\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha) \longrightarrow \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} G(M_\alpha)$ que es monomorfismo por hipótesis y el morfismo $\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} GF(p_\beta) : GF(\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha) \longrightarrow \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} GF(M_\alpha)$ el cual vamos a demostrar que es monomorfismo.

Como G es exacto izquierdo tenemos que $G(\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} F(p_\beta)) : GF(\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha) \longrightarrow G(\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} F(M_\alpha))$ es monomorfismo y tenemos siguiente diagrama conmutativo al cual le aplicamos G:

$$\begin{tikzcd}
F(\prod\limits_{\alpha\in I} M_\alpha) \arrow[r, tail, dashed, "\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} F(p_\alpha)"] \arrow[d, "F(p_\beta)"'] & \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} F(M_\alpha) \arrow[dl, "q_\beta"] & \longmapsto & GF(\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha) \arrow[r, tail, "G(\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} F(p_\alpha))"] \arrow[d, "GF(p_\beta)"'] & G(\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} F(M_\alpha)) \arrow[dl, "G(q_\beta)"] \arrow[d, tail, "\prod G(q_\alpha)"] \\
F(M_\beta) & & & GF(M_\beta) & \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} GF(M_\alpha)) \arrow[l, "\pi_\beta"]
\end{tikzcd}$$

es decir, para cada proyección canónica $q_\beta : \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} F(M_\alpha) \longrightarrow F(M_\beta)$ tenemos que G induce un morfismo $G(q_\beta) : G(\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} F(M_\alpha)) \longrightarrow GF(M_\beta)$ y por lo tanto existe el morfismo $\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} G(q_\alpha) : G(\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} F(M_\alpha)) \longrightarrow \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} GF(M_\alpha)$ que es un monomorfismo por hipótesis. De esta forma tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
GF(\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha) \arrow[rr, tail, "G(\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} F(p_\alpha))"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & G(\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} F(M_\alpha)) \arrow[dl, "\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} G(q_\alpha)"] \\
& \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} GF(M_\alpha) &
\end{tikzcd}$$

donde $\varphi = \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} G(q_\alpha) G(\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} F(p_\alpha))$ es un monomorfismo, sea $\pi_\beta : \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} GF(M_\alpha) \longrightarrow GF(M_\beta)$ la proyección canónica, se sigue que

$$\pi_\beta\varphi = \pi_\beta \prod_{\alpha\in\Lambda} G(q_\alpha) G(\prod_{\alpha\in\Lambda} F(p_\alpha)) = G(q_\beta) G(\prod_{\alpha\in\Lambda} G(p_\alpha)) = GF(p_\beta) = \pi_\beta \prod_{\alpha\in\Lambda} GF(p_\alpha)$$

por la unicidad del morfismo $\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} GF(p_\alpha)$ tenemos que $\varphi = \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} GF(p_\alpha)$.

Por lo tanto $Ker(\varphi) = Ker(\prod\limits_{\alpha\in I} GF(p_\alpha)) = 0$, como ya demostramos GF exacto izquierdo, entonces es casi continuo. $\square$

Observación 3.13. *Para un funtor covariante casi cocontinuo $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$, la condición $Im(\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} F(i_\alpha)) = F(\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha)$ significa que $\psi : \bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} F(M_\alpha) \longrightarrow F(\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha)$ es un epimorfismo que es más débil que la propiedad de preservar coproductos, donde $i_\beta : M_\beta \longrightarrow \bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ es la inclusión canónica. Notemos que si ψ es un isomorfismo, entonces F es un funtor covariante cocontinuo.*

Proposición 3.14. *Sean $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ un funtor covariante casi cocontinuo y $G : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{C}$ un funtor contravariante casi continuo, entonces GF es un funtor contravariante casi continuo.*

Demostración. Sea $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta $\mathscr{A}$, luego como F es un funtor covariante exacto derecho, la sucesión $F(M') \longrightarrow F(M) \longrightarrow F(M'') \longrightarrow 0$ es exacta en $\mathscr{B}$, además como G es un funtor contravariante exacto izquierdo, la sucesión $0 \longrightarrow GF(M'') \longrightarrow GF(M) \longrightarrow GF(M')$ es exacta, por lo tanto GF es un funtor contravariante exacto izquierdo.

Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq \mathscr{A}$, los funtores F y GF inducen para cada inclusión canónica $i_\beta : M_\beta \longrightarrow \bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ los morfismos

$$F(i_\beta) : F(M_\beta) \longrightarrow F(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha) \;\text{ y }\; GF(i_\beta) : GF(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha) \longrightarrow GF(M_\beta)$$

como F es un funtor covariante casi cocontinuo $\bigoplus\limits_{\alpha\in I} F(i_\beta) : \bigoplus\limits_{\alpha\in I} F(M_\alpha) \longrightarrow F(\bigoplus\limits_{\alpha\in I} M_\alpha)$ es un epimorfismo lo que implica que $G(\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} F(i_\beta)) : GF(\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha) \longrightarrow G(\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} F(M_\alpha))$ es un monomorfismo, además tenemos el siguiente diagrama conmutativo al que le aplicamos G:

$$\begin{tikzcd}
F(M_\beta) \arrow[r, "F(i_\beta)"] \arrow[dr, "\iota_\beta"'] & F(\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha) & \arrow[r, mapsto] & {} & GF(M_\beta) & GF(\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha) \arrow[l, "GF(i_\beta)"'] \arrow[d, tail, "G(\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} F(i_\beta))"] \\
& \bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} F(M_\beta) \arrow[u, dashed, two heads, "\bigoplus\limits_{\alpha\in I} F(i_\beta)"'] & & & \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} GF(M_\beta)) \arrow[u, "\pi_\beta"] & G(\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} F(M_\beta)) \arrow[l, dashed] \arrow[ul, "G(\iota_\beta)"']
\end{tikzcd}$$

De forma anólaga para cada inclusión canónica $\iota_\beta : F(M_\beta) \longrightarrow \bigoplus\limits_{\alpha\in I} F(M_\alpha)$ el funtor G induce un morfismo $G(\iota_\beta) : G(\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} F(M_\alpha)) \longrightarrow GF(M_\beta)$ y por lo tanto existe el morfismo $\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} G(\iota_\beta) : GF(\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha) \longrightarrow \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} GF(M_\alpha)$, por consiguiente tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
GF(\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha) \arrow[rr, tail, "G(\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} F(i_\beta))"] \arrow[dr, "\eta"'] & & G(\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} F(M_\alpha)) \arrow[dl, "\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} G(\iota_\alpha)"] \\
& \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} GF(M_\alpha) &
\end{tikzcd}$$

donde $\eta = \prod G(\iota_\alpha)G(\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} F(i_\beta))$ es un monomorfismo, sea $\pi_\beta : \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} GF(M_\alpha) \longrightarrow GF(M_\beta)$ la proyección canónica, luego

$$\pi_\beta\eta = \pi_\beta \prod G(j_\alpha)G(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} F(i_\beta)) = G(\iota_\beta)G(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} F(i_\beta)) = GF(i_\beta) = \pi_\beta \prod_{\alpha\in\Lambda} GF(i_\alpha)$$

Por la unicidad del morfismo inducido, $\eta = \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} GF(i_\alpha)$ tenemos que $\prod G(\iota_\alpha)G(\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} F(i_\beta)) = \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} GF(i_\alpha)$, por lo tanto $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} ker(GF(i_\alpha)) = 0$. Por lo tanto GF es un funtor contravariante casi continuo. □

En la siguiente proposición hacemos una lista de composiciones de funtores covariantes y contravariantes, casi continuos y casi cocontinuos como en las Proposiciones 3.12 y 3.14.

Notemos que si $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta y $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es un funtor contravariante exacto derecho y $G : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ es un funtor covariante exacto izquierdo, entonces la sucesión $F(M'') \longrightarrow F(M) \longrightarrow F(M) \longrightarrow 0$ es exacta y la sucesión $GF(M'') \longrightarrow GF(M) \longrightarrow GF(M)$ es exacta, sin embargo, el primer morfismo no necesariamente es monomorfismo ni el segundo epimorfismo. Luego estamos interasados en composiciones de funtores que den como resultado que el primer morfismo sea monomorfismo o que el segundo sea epimorfismo (según se necesite), asi que en la siguiente proposición sólo damos una lista de las composiciones que nos van a ser útiles.

Proposición 3.15. *Sean $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ funtores.*

1. *Si F y G son covariantes casi continuos entonces GF es covariante casi continuo.*

2. *Si F y G son covariantes casi cocontinuos entonces GF es covariante casi continuo.*

3. *Si F es covariante casi continuo y G es contravariante casi cocontinuo entonces GF es contravariante casi continuo.*

4. *Si F es covariante casi cocontinuo y G es contravariante casi continuo entonces GF es contravariante casi continuo.*

5. *Si F es contravariante casi continuo G es contravariante casi cocontinuo entonces GF es covariante casi cocontinuo.*

6. *Si F es contravariante casi cocontinuo y G es contravariante casi continuo entonces GF es covariante casi continuo.*

7. *Si F es contravariante casi continuo y G es covariante casi continuo GF es contravariante casi continuo.*

8. *Si F es contravariante casi cocontinuo y G es covariante casi cocontinuo entonces GF es contravariante casi cocontinuo.* □

Esto lo podemos resumir en el siguiente cuadro. Denotamos:

1. Cov CC := funtor covariante casi continuo:

2. Cov CCoc := funtor covariante casi cocontinuo:

3. Contra CC := funtor contravariante casi continuo:

4. Contra CCoc := funtor contravariante casi cocontinuo:

G \ F	Cov CC	Cov CCoc	Contra CC	Contra CCoc	
Cov CC	Cov CC	———	Contra CC	———	$G \circ F$
Cov CCoc	———	Cov CCoc	———	Contra CCoc	
Contra CC	———	Contra CC	———	Cov CC	
Contra CCoc	Contra CC	———	Cov CCoc	———	

Observación 3.16. *Sea un funtor $F : R$-Mod $\longrightarrow R$-Mod. Entonces F induce dos asignaciones que preservan el orden*

$$\overrightarrow{F}\colon \wp(R\text{-Mod}) \longrightarrow \wp(R\text{-Mod}) \quad y \quad \overleftarrow{F}\colon \wp(R\text{-Mod}) \longrightarrow \wp(R\text{-Mod})$$

definidas como $\overrightarrow{F}(\mathscr{C}) = \{F(M) \mid M \in \mathscr{C}\}$ y $\overleftarrow{F}(\mathscr{D}) = \{M \in R\text{-Mod} \mid F(M) \in \mathscr{D}\}$, y cumplen que $\overrightarrow{F} \circ \overleftarrow{F}$ es un operador cerradura y $\overleftarrow{F} \circ \overrightarrow{F}$ un operador interior, esto significa que (ver [13], Ejemplo 2)

$$\langle \overrightarrow{F}, \overleftarrow{F} \rangle \in Gal_i(\wp(R\text{-Mod}), \wp(R\text{-Mod})).$$

Los funtores covariantes casi continuos y casi cocontinuos tienen una muy importante propiedad que nos ayuda a calcular los cerrados de las conexiones de Galois que inducen.

Proposición 3.17. *Sea $F : R$-Mod $\longrightarrow R$-Mod un funtor casi cocontinuo. Entonces $\overleftarrow{F}$ preserva clases de torsión.*

Demostración. Sea $\mathbb{T}$ una clase de torsión.

$\overleftarrow{F}(\mathbb{T})$ *es cerrada bajo epimorfismos.* Sean $M \in \overleftarrow{F}(\mathbb{T})$, $M' \in R$-Mod y $M \longrightarrow M'$ un epimorfismo, por hipótesis F es exacto derecho y por lo tanto $F(M) \longrightarrow F(M')$ es un epimorfismo con $F(M) \in \mathbb{T}$ esto implica que $F(M') \in \mathbb{T}$. Por lo tanto $M' \in \overleftarrow{F}(\mathbb{T})$.

$\overleftarrow{F}(\mathbb{T})$ *es cerrada bajo sumas directas.* Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq \overleftarrow{F}(\mathbb{T})$, luego para cada $\alpha \in \Lambda$, $F(M_\alpha) \in \mathbb{T}$, lo que implica que $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} F(M_\alpha) \in \mathbb{T}$ pues es una clase de torsión. Por hipótesis $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} F(i_\alpha) : \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} F(M_\alpha) \longrightarrow F(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha)$ es un epimorfismo con $i_\beta : M_\beta \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ la inclusión canónica, y por hipótesis $\mathbb{T}$ es cerrada bajo epimorfismos. Por lo tanto $F(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha) \in \mathbb{T}$, lo que significa que $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha \in \overleftarrow{F}(\mathbb{T})$.

$\overleftarrow{F}(\mathbb{T})$ *es cerrada bajo extensiones*) Sea $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta con $M', M'' \in \overleftarrow{F}(\mathbb{T})$ y $M \in R$-Mod, luego $F(M') \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(M'') \longrightarrow 0$ es exacta con $F(M'), F(M'') \in \mathbb{T}$. Sea $\sigma \in R$-radidem tal que que $\mathbb{T} = \mathbb{T}_\sigma$, aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_R(\_, F(M)/\sigma(F(M)))$ tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(F(M''), F(M)/\sigma(F(M))) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(F(M), F(M)/\sigma(F(M))) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(F(M'), F(M)/\sigma(F(M)))$$

Como $F(M)/\sigma(F(M)) \in \mathbb{F}_\sigma$ entonces

$$\mathrm{Hom}_R(F(M'), F(M)/\sigma(F(M))) = \mathrm{Hom}_R(F(M''), F(M)/\sigma(F(M))) = 0$$

Por lo tanto $\mathrm{Hom}_R(F(M), F(M)/\sigma(F(M))) = 0$, luego $F(M)/\sigma(F(M)) = 0$ lo que significa que $\sigma(F(M)) = F(M)$, se sigue que $F(M) \in \mathbb{T}_\sigma$. Por lo tanto $M \in \overleftarrow{F}(\mathbb{T}_\sigma)$.

Concluimos que $\overleftarrow{F}(\mathbb{T})$ es clase de torsión. □

Proposición 3.18. *Sea* $G : R\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}$ *un funtor casi continuo. Entonces* $\overleftarrow{G}$ *preserva clases libres de torsión.*

Demostración. Sea $\mathbb{F}$ una clase libre de torsión.

$\overleftarrow{G}(\mathbb{F})$ *es cerrada bajo monomorfismos*) Sea $N \in \overleftarrow{G}(\mathbb{F})$ y $N' \longrightarrow N$ un monomorfismo, como G es exacto izquierdo, $G(N') \longrightarrow G(N)$ es un monomorfismo con $G(N) \in \mathbb{F}$, lo que significa que $G(N') \in \mathbb{F}$. Por lo tanto $N' \in \overleftarrow{G}(\mathbb{F})$.

$\overleftarrow{G}(\mathbb{F})$ *es cerrada bajo productos directos*) Sea $\{N_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq \overleftarrow{G}(\mathbb{F})$, luego para cada $\alpha \in \Lambda$, $G(N_\alpha) \in \mathbb{F}$ y como $\mathbb{F}$ es cerrada bajo productos, entonces $\prod_{\alpha\in\Lambda} G(N_\alpha) \in \mathbb{F}$. Por hipótesis G es casi continuo esto implica que $\prod_{\alpha\in\Lambda} G(p_\alpha) : G(\prod_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha) \longrightarrow \prod_{\alpha\in\Lambda} G(N_\alpha)$ es un monomorfismo con $p_\beta : \prod_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha \longrightarrow N_\beta$ la proyección canónica, como $\mathbb{F}$ es cerrada bajo monomorfismos se cumple que $G(\prod_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha) \in \mathbb{F}$ lo que significa que $\prod_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha \in \overleftarrow{G}(\mathbb{F})$.

$\overleftarrow{G}(\mathbb{F})$ *es cerrada bajo extensiones*) Sea $0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta con $N', N'' \in \overleftarrow{G}(\mathbb{F})$ y $N \in R$-Mod, luego $0 \longrightarrow G(N') \xrightarrow{G(f)} G(N) \xrightarrow{G(g)} G(N'')$ es exacta con $G(N'), G(N'') \in \mathbb{F}$. Sea $\sigma \in R$-radidem tal que $\mathbb{F} = \mathbb{F}_\sigma$, aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_R(\sigma(G(N)), \_)$ tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\sigma(G(N)), G(N')) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\sigma(G(N)), G(N)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\sigma(G(N)), G(N''))$$

Como $\sigma(G(N)) \in \mathbb{T}_\sigma$ entonces $\mathrm{Hom}_R(\sigma(G(N)), G(N')) = \mathrm{Hom}_R(\sigma(G(N)), G(N'')) = 0$, por lo tanto $\mathrm{Hom}_R(\sigma(G(N)), G(N)) = 0$ lo que significa que $\sigma(G(N)) = 0$. Por lo tanto $G(N) \in \mathbb{F}_\sigma$, y así $N \in \overleftarrow{G}(\mathbb{F}_\sigma)$.

Concluimos que $\overleftarrow{G}(\mathbb{F})$ es clase de libre torsión. $\square$

3.2. Relaciones bicerradas inducidas por bifuntores casi continuos

En esta sección definimos un tipo de bifuntor, el cual es casi continuo en cada una de sus variables, y que tiene propiedades suficientes para inducir relaciones bicerradas con respecto a $\mathcal{H}$. Estos bifuntores extienden al bifuntor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\_, \_)$ que es continuo en cada una de sus variables. Además damos ejemplos de este tipo de bifuntores.

Definición 3.19. *Sean $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$ categorías abelianas bicompletas. A un bifuntor $K(\_, \_) : \mathscr{A} \times \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{C}$ lo llamaremos* ***bifuntor casi continuo*** *si cumple:*

1. *Para toda $M \in \mathcal{A}$, $K(M, \_)$ es un funtor covariante casi continuo.*
2. *Para toda $M \in \mathcal{B}$, $K(\_, M)$ es un funtor contravariante casi continuo.*

Ejemplos 3.20. *Damos algunos ejemplos de bifuntores continuos:*

1. *El funtor* $\mathrm{Hom}_R(\_, \_)$ *es un bifuntor continuo pues para toda $M \in R$-*Mod*:*
   - a) $\mathrm{Hom}_R(M, \_)$ *es un funtor covariante continuo.*
   - b) $\mathrm{Hom}_R(\_, M)$ *es un funtor contravariante continuo.*
2. *Sea $\langle F, G\rangle : R$-*Mod $\longrightarrow R$-Mod *un par adjunto, entonces F es un funtor covariante cocontinuo y G un funtor covariante continuo (Teoremas 1.105 y 1.106), por lo tanto por la Proposiciones 3.12 y 3.14 los bifuntores* $\mathrm{Hom}_R(F(\_), \_)$ *y* $\mathrm{Hom}_R(\_, G(\_))$ *son continuos.*
3. *Sean I un ideal puro de R y $F = \alpha_I^R$. Por las Proposiciones 1.40 y 1.92, F es un funtor covariante cocontinuo, entonces* $\mathrm{Hom}_R(F(\_), \_)$ *es un bifuntor continuo pues para toda $M \in R$-*Mod*:*
   - a) $\mathrm{Hom}_R(F(M), \_)$ *es un funtor covariante continuo.*

b) $\mathrm{Hom}_R(F(\_), M)$ *es un funtor contravariante continuo por la Proposición 3.14.*

Ejemplos 3.21. *Los siguientes son ejemplos de bifuntores casi continuos (que no necesariamente son continuos).*

1. *Sea* $R = \mathbb{Z}$ *y* $\mathrm{t} : \mathbb{Z}\text{-Mod} \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$ *el funtor de torsión. Este funtor es un funtor covariante casi continuo ver Ejemplo 3.9-4-a. De esta forma para toda* $M \in \mathbb{Z}\text{-Mod}$ *tenemos que:*

   a) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathrm{t}(\_))$ *es un funtor covariante casi continuo que no es continuo (Proposición 3.12), pues para toda* $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq \mathbb{Z}\text{-Mod}$ *tenemos que* $\mathrm{t}(\prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha) \longrightarrow \prod_{\alpha\in\Lambda} \mathrm{t}(M_\alpha)$ *es un monomorfismo que no necesariamente es un isomorfismo, esto implica que* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathrm{t}(\prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \prod_{\alpha\in\Lambda} \mathrm{t}(M_\alpha) \xrightarrow{\cong} \prod_{\alpha\in\Lambda} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathrm{t}(M_\alpha))$ *sea un monomorfismo que no necesariamente es un isomorfismo.*

   b) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\_, \mathrm{t}(M))$ *es un funtor contravariante continuo.*

   Por lo tanto $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\_, \mathrm{t}(\_))$ *es un bifuntor casi continuo (que no es continuo).*

2. *Para todo* $M \in R\text{-Mod}$ *tenemos*

   a) *Del Ejemplo 3.9-4-b tenemos que si* N_R *es plano y Mittag-Leffler, entonces* $N \otimes_R \_$ *es un funtor covariante casi continuo. Por lo tanto* $\mathrm{Hom}_R(M, N \otimes_R \_)$ *es un funtor covariante casi continuo que no es continuo necesariamente.*

   b) $\mathrm{Hom}_R(\_, N \otimes_R M)$ *es un bifuntor contravariante continuo.*

   Por lo tanto si N_R *es plano y Mittag-Leffler,* $\mathrm{Hom}_R(\_, N \otimes_R \_)$ *es un bifuntor casi continuo que no es continuo.*

3. *Si* $\{N_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq R\text{-Mod}$ *es una familia de* R*-módulos derechos planos y Mittag-Leffler, entonces* $(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha) \otimes_R \_$ *es un funtor covariante casi cocontinuo (ver Ejemplo 3.9-4-b). Por lo tanto, por el ejemplo anterior,* $\mathrm{Hom}_R(\_, (\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha) \otimes_R \_)$ *es un bifuntor casi continuo que no es continuo necesariamente.*

4. *Para todo* $M \in R\text{-Mod}$ *tenemos*

   a) *Si tomamos al* R*-módulo* N *como en el Ejemplo Ejemplo 3.9-4-c, entonces* $\mathrm{Hom}_R(N, \_)$ *es un funtor covariante casi cocontinuo y por lo tanto el funtor* $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(N, \_), M)$ *es contravariante casi continuo.*

   b) $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(N, M), \_)$ *es un funtor covariante continuo.*

   Por lo tanto el bifuntor $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(N, \_), \_)$ *es un bifuntor casi continuo que no es continuo necesariamente.*

De ahora en adelante nos enfocaremos en la categoría R-Mod, la cual es la que nos interesa estudiar pues cada relación bicerrada induce una conexión de Galois sobre R-radidem (ver Proposición 2.54).

Notación 3.22. *Sean* $K(\_\,,\_) : (R\text{-Mod})^{op} \times R\text{-Mod} \longrightarrow \mathcal{A}b$ *un bifuntor y* $H : R\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}$ *un funtor, denotamos:*

1. $\mathbf{R}_{(K)} := \{(M,N) \in (R\text{-Mod})^2 \mid K(M,N) = 0\}$.
2. $\mathbf{R}^{(K;H)} := \{(M,N) \in (R\text{-Mod})^2 \mid K(H(M),N) = 0\}$.
3. $\mathbf{R}_{(K;H)} := \{(M,N) \in (R\text{-Mod})^2 \mid K(M,H(N)) = 0\}$.

Proposición 3.23. *Sean* $K_1(\_\,,\_), K_2(\_\,,\_) : (R\text{-Mod})^{op} \times R\text{-Mod} \longrightarrow \mathcal{A}b$ *bifuntores tales que* $K_1(\_\,,\_) \cong K_2(\_\,,\_)$, *entonces* $\mathbf{R}_{(K_1)} = \mathbf{R}_{(K_2)}$.

Demostración. $\subseteq$) Sea $(M,N) \in \mathbf{R}_{(K_1)}$, luego $0 = K_1(M,N) \cong K_2(M,N)$. Por lo tanto $(M,N) \in \mathbf{R}_{(K_2)}$ lo que significa que $\mathbf{R}_{(K_1)} \subseteq \mathbf{R}_{(K_2)}$. La demostración de $\mathbf{R}_{(K_2)} \subseteq \mathbf{R}_{(K_1)}$ es análoga. □

El siguiente teorema es muy importante, pues en él demostramos que cada bifuntor casi continuo cumple con las condiciones suficientes para inducir una relación bicerrada con respecto a $\mathcal{H}$.

Teorema 3.24. *Sea* $K(\_\,,\_) : (R\text{-Mod})^{op} \times R\text{-Mod} \longrightarrow \mathcal{A}b$ *un bifuntor casi continuo. Entonces* $\mathbf{R}_{(K)} \in [\mathcal{H}]_{\preceq}$.

Demostración. Primero se demostrará: $f^{\mathbf{R}_{(K)}}(\mathscr{C})$ es clase de torsión para toda $\mathscr{C} \in \wp(R\text{-Mod})$.

1. $f^{\mathbf{R}_{(K)}}(\mathscr{C})$ *es cerrada bajo epimorfismos:* Sean $M \in f^{\mathbf{R}_{(K)}}(\mathscr{C})$ y $g : M \longrightarrow M''$ un epimorfismo.

   Sea $N \in \mathscr{C}$, como $K(\_\,,N)$ es exacto izquierdo, $K(M'',N) \longrightarrow K(M,N)$ es un monomorfismo con $K(M,N) = 0$ lo que implica $K(M'',N) = 0$. Por lo tanto $M'' \in f^{\mathbf{R}_{(K)}}(\mathscr{C})$.

2. $f^{\mathbf{R}_{(K)}}(\mathscr{C})$ *es cerrada bajo coproductos:* Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq f^{\mathbf{R}_{(K)}}(\mathscr{C})$ y $N \in \mathscr{C}$. Para cada $\alpha \in \Lambda$ se tiene que $K(M_\alpha, N) = 0$ y por hipótesis $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} Ker(K(i_\alpha, N)) = 0$ donde $i_\beta : M_\beta \longrightarrow \bigoplus M_\alpha$ es la inclusión canónica, por lo tanto $K(\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha, N) \longrightarrow \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} K(M_\alpha, N)$ es un monomorfismo con $\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} K(M_\alpha, N) = 0$, luego tenemos que $K(\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha, N) = 0$. Por lo tanto $\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha \in f^{\mathbf{R}_{(K)}}(\mathscr{C})$.

3. $f^{\mathbf{R}_{(K)}}(\mathscr{C})$ *es cerrada bajo extensiones:*
   Sea $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta con $M', M'' \in f^{\mathbf{R}_{(K)}}(\mathscr{C})$ y $M \in R\text{-Mod}$. Sea $N \in \mathscr{C}$, como $K(\_\,,N)$ es exacto izquierdo, la sucesión

   $$0 \longrightarrow K(M'',N) \xrightarrow{K(g,N)} K(M,N) \xrightarrow{K(f,N)} K(M',N)$$

   es exacta, con $K(M'',N) = K(M',N) = 0$, esto implica que $Im(K(f,N)) = 0$, por lo que $K(M,N) = Ker(K(f,N)) = Im(K(g,N)) = 0$. Por lo tanto $M \in f^{\mathbf{R}_{(K)}}(\mathscr{C})$.

   Por lo tanto $f^{\mathbf{R}_{(K)}}(\mathscr{C})$ es clase de torsión.

Ahora se demostrará: $f_{\mathbf{R}_{(K)}}(\mathscr{C})$ es clase libre de torsión para toda $\mathscr{C} \in \wp(R\text{-Mod})$.

1. $f^{\mathbf{R}_{(K)}}(\mathscr{C})$ *es cerrada bajo monomorfismos:* Sean $N \in f_{\mathbf{R}_{(K)}}(\mathscr{C})$ y $N' \longrightarrow N$ un monomorfismo.

   Sea $M \in \mathscr{C}$, como $K(M, \_)$ es exacto izquierdo, tenemos que $K(M, N') \longrightarrow K(M, N)$ es un monomorfismo con $K(M, N) = 0$ por lo tanto $K(M, N') = 0$. Por lo tanto $N' \in f_{\mathbf{R}_{(K)}}(\mathscr{C})$.

2. $f^{\mathbf{R}_{(K)}}(\mathscr{C})$ *es cerrada bajo productos directos:* Sean $\{N_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq f_{\mathbf{R}_{(K)}}(\mathscr{C})$ y $M \in \mathscr{C}$. Tenemos que $K(M, N_\alpha) = 0$ para toda $\alpha \in \Lambda$ donde $p_\beta : \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha \longrightarrow N_\beta$ es la proyección canónica, luego por hipótesis $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} Ker(K(M, p_\alpha)) = 0$, lo que implica que

$$\prod_{\alpha\in\Lambda} K(M, p_\alpha) : K(M, \prod_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha) \longrightarrow \prod_{\alpha\in\Lambda} K(M, N_\alpha)$$

   es monomorfismo con $\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} K(M, N_\alpha) = 0$. Por lo tanto $K(M, \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha) = 0$ esto implica que $K(M, \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha) = 0$ y por lo tanto $\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha \in f_{\mathbf{R}_{(K)}}(\mathscr{C})$.

3. $f^{\mathbf{R}_{(K)}}(\mathscr{C})$ *es cerrada bajo extensiones:*
   Sea $0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta con $N', N'' \in f_{\mathbf{R}_{(K)}}(\mathscr{C})$ y $N \in R$-Mod. Sea $M \in \mathscr{C}$, como $K(M, \_)$ es exacto izquierdo, tenemos que la sucesión

$$0 \longrightarrow K(M, N') \xrightarrow{K(M,f)} K(M, N) \xrightarrow{K(M,g)} K(M, N'')$$

   es exacta con $K(M, N') = K(M, N'') = 0$ lo que implica que $Im(K(M, g)) = 0$, por lo tanto $K(M, N) = Ker(K(M, g)) = Im(K(M, f)) = 0$. Por lo tanto $N \in f_{\mathbf{R}_{(K)}}(\mathscr{C})$.

   Por lo tanto $f_{\mathbf{R}_{(K)}}(\mathscr{C})$ es clase libre de torsión.

Concluimos que $(f)_{\mathbf{R}_{(K)}} \preceq (f)_{\mathcal{H}}$, lo que significa que $\mathbf{R}_{(K)} \in [\mathcal{H}]_{\preceq}$. □

Ahora vamos a analizar los casos de los bifuntores $K(F(\_), \_)$ con F un funtor casi cocontinuo y $K(\_, G(\_))$ con G un funtor casi continuo. Estas composiciones nos van a dar muchos ejemplos de bifuntores casi continuos.

Proposición 3.25. *Sea $F : R$-Mod $\longrightarrow R$-Mod un funtor casi cocontinuo y sea $K(\_, \_)$ un bifuntor casi continuo, entonces $K(F(\_), \_)$ es un bifuntor casi continuo y* $\mathbf{R}^{(K;F)} \in [\mathcal{H}]_{\preceq}$.

Demostración. Para cada $N \in R$-Mod tenemos que $K(\_, N)$ es un funtor contravariante casi continuo y como por hipótesis F es un funtor casi cocontinuo entonces por la Proposición 3.14 $K(F(\_), N)$ es un funtor contravariante casi continuo. Por hipótesis para toda $M \in R$-Mod, $K(M, \_)$ es un funtor covariante casi continuo lo que implica que $K(F(M), \_)$ es un funtor covariante casi continuo. Por lo tanto $K(F(\_), \_)$ es un bifuntor casi continuo por el Teorema 3.24, $\mathbf{R}^{(K;F)} \in [\mathcal{H}]_{\preceq}$. □

Usando las Proposiciones 3.10 y 3.14, y el Teorema 3.24 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.26. *Sea $K(\_,\_)$ un bifuntor casi continuo, entonces:*

1. *Si $F : R\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}$ un funtor casi cocontinuo, entonces $\mathbf{R}^{(K;F)} \in [\mathcal{H}]_{\preceq}$.*
2. *Si $\{F_i : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}\}_{i\in X}$ una familia de funtores casi cocontinuos, entonces $\mathbf{R}^{(K;\oplus_{i\in X}F_i)} \in [\mathcal{H}]_{\preceq}$.*

□

De la Proposición 3.17 tenemos para cada funtor covariante casi continuo F, que $\overleftarrow{F}$ preserva clases de torsión. Luego tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.27. *Sea $F : R\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}$ un funtor casi cocontinuo y sea $K(\_,\_)$ un bifuntor casi continuo. Entonces $f^{\mathbf{R}^{(K;F)}} = \overleftarrow{F}\, f_{\mathbf{R}_{(K)}}$ y $f_{\mathbf{R}^{(K;F)}} = f_{\mathbf{R}_{(K)}}\, \overrightarrow{F}$.*

Demostración. Sea $\mathscr{C} \in \wp(R\text{-Mod})$, se sigue que

$$\begin{aligned} f^{\mathbf{R}^{(K;F)}}(\mathscr{C}) &= \{M \in R\text{-Mod} \mid K(F(M),N) = 0\ \forall N \in \mathscr{C}\} \\ &= \{M \in R\text{-Mod} \mid F(M) \in f^{\mathbf{R}_{(K)}}(\mathscr{C})\} \\ &= \overleftarrow{F}\,(f^{\mathbf{R}_{(K)}}(\mathscr{C})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{R}^{(K;F)}}(\mathscr{C}) &= \{N \in R\text{-Mod} \mid K(F(M),N) = 0\ \forall M \in \mathscr{C}\} \\ &= \{N \in R\text{-Mod} \mid K(M,N) = 0\ \forall\ M \in \overrightarrow{F}\,(\mathscr{C})\} \\ &= f_{\mathbf{R}_{(K)}}(\overrightarrow{F}\,(\mathscr{C})) \end{aligned}$$

Por lo tanto $f^{\mathbf{R}^{(K;F)}} = \overleftarrow{F}\, f^{\mathbf{R}_{(K)}}$ y $f_{\mathbf{R}^{(K;F)}} = f_{\mathbf{R}_{(K)}}\, \overrightarrow{F}$. □

Las factorizaciónes de $f_{\mathbf{R}^{(K;F)}}$ y $f^{\mathbf{R}^{(K;F)}}$ las podemos ver en los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} \wp(R\text{-Mod}) \arrow[r, "f_{\mathbf{R}^{(K;F)}}"] \arrow[d, "\overrightarrow{F}"] & \wp(R\text{-Mod}) \\ \wp(R\text{-Mod}) \arrow[ur, "f_{\mathbf{R}_{(K)}}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \wp(R\text{-Mod}) \arrow[r, "f^{\mathbf{R}^{(K;F)}}"] \arrow[dr, "f^{\mathbf{R}_{(K)}}"'] & \wp(R\text{-Mod}) \\ & \wp(R\text{-Mod}) \arrow[u, "\overleftarrow{F}"'] \end{tikzcd}$$

Proposición 3.28. *Sea $G : R\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}$ un funtor covariante casi continuo y sea $K(\_,\_) : (R\text{-Mod})^{op} \times R\text{-Mod} \longrightarrow \mathcal{A}b$ un bifuntor casi continuo, entonces $K(\_,G(\_))$ es un bifuntor casi continuo y $\mathbf{R}_{(K;G)} \in [\mathcal{H}]_{\preceq}$.*

Demostración. Por hipótesis para cada $M \in R$-Mod, $K(M, \_)$ es un funtor covariante casi continuo y G es un funtor covariante casi continuo, luego por la Proposición 3.12 tenemos que $K(M, G(\_))$ es un funtor covariante casi continuo, además por hipótesis para toda $N \in R$-Mod, $K(\_, N)$ es un funtor contravariante casi continuo lo que significa que $K(\_, G(N))$ es un funtor contravariante casi continuo. Por lo tanto es $K(\_, G(\_))$ es un bifuntor casi continuo y por el Teorema 3.24, $\mathbf{R}_{(K;G)} \in [\mathcal{H}]_{\preceq}$. □

Usando las Proposición 3.10 y 3.12, y el Teorema 3.24 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.29. *Sea $K(\_, \_)$ un bifuntor casi continuo, entonces:*

1. *Si $G : R$-Mod $\longrightarrow R$-Mod un funtor casi continuo, entonces $\mathbf{R}_{(K;G)} \in [\mathcal{H}]_{\preceq}$.*
2. *Si $\{G_i : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}\}_{i \in X}$ una familia de funtores casi continuos, entonces $\mathbf{R}_{(K;\oplus_{i\in X} G_i)} \in [\mathcal{H}]_{\preceq}$.*

En la Proposición 3.18 demostramos que para cada funtor casi continuo G, $\overleftarrow{G}$ preserva clases libres de torsión. Esta propiedad nos ayuda a calcular los cerrados de la conexión de Galois que induce.

Proposición 3.30. *Sean $G : R$-Mod $\longrightarrow R$-Mod un funtor casi continuo y $K(\_, \_)$ un bifuntor casi continuo. Entonces $f^{\mathbf{R}_{(K;G)}} = f^{\mathbf{R}_{(K;G)}} \overrightarrow{G}$ y $f_{\mathbf{R}_{(K;G)}} = \overleftarrow{G} f_{\mathbf{R}_{(K)}}$.*

Demostración. Sea $\mathscr{C} \in \wp(R\text{-Mod})$, se sigue que

$$\begin{aligned} f^{\mathbf{R}_{(K;G)}}(\mathscr{C}) &= \{M \in R\text{-Mod} \mid K(M, G(N)) = 0 \ \forall N \in \mathscr{C}\} \\ &= \{M \in R\text{-Mod} \mid K(M, N) = 0 \ \forall N \in \overrightarrow{G}(\mathscr{C})\} \\ &= f^{\mathbf{R}_{(K;G)}}(\overrightarrow{G}(\mathscr{C})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{R}_{(K;G)}}(\mathscr{C}) &= \{N \in R\text{-Mod} \mid K(M, G(N)) = 0 \ \forall M \in \mathscr{C}\} \\ &= \{N \in R\text{-Mod} \mid G(N) \in f_{\mathbf{R}_{(K)}}(\mathscr{C})\} \\ &= \overleftarrow{G}(f_{\mathbf{R}_{(K)}}(\mathscr{C})) \end{aligned}$$

Por lo tanto $f^{\mathbf{R}_{(K;G)}} = f^{\mathbf{R}_{(K)}} \overrightarrow{G}$ y $f_{\mathbf{R}_{(K;G)}} = \overleftarrow{G} f_{\mathbf{R}_{(K)}}$. □

Las factorizaciones de $f^{\mathbf{R}_{(K;G)}}$ y $f_{\mathbf{R}_{(K;G)}}$ se pueden ver en los siguientes diagramas conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & \wp(R\text{-Mod}) \arrow[d, "\overleftarrow{G}"] \\ \wp(R\text{-Mod}) \arrow[ur, "f_{\mathbf{R}_{(K)}}"] \arrow[r, "f_{\mathbf{R}_{(K;G)}}"] & \wp(R\text{-Mod}) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \wp(R\text{-Mod}) \arrow[d, "\overrightarrow{G}"] \arrow[dr, "f^{\mathbf{R}_{(K;G)}}"] & \\ (R\text{-Mod}) \arrow[r, "f^{\mathbf{R}_{(K)}}"] & \wp(R\text{-Mod}) \end{tikzcd}$$

3.3. Relaciones inducidas por el bifuntor $\mathrm{Hom}_R(\_,\_)$.

De aquí en adelante nos enfocamos en los bifuntores casi continuos $\mathrm{Hom}_R(F(\_),\_)$ y $\mathrm{Hom}_R(\_,G(\_))$ cuando F es un funtor covariante casi cocontinuo y G es un bifuntor casi continuo; primero estudiamos cuando F y G no forman un par adjunto, esto va a implicar que las relaciones bicerradas inducidas por estos bifuntores sean diferentes, después cuando que F y G formen un par adjunto, pues en este caso inducen la misma relación. Calcularemos los cerrados de las conexiones de Galois que inducen estos dos bifuntores casi continuos. Además demostramos que las relaciones bicerradas inducidas por pares adjuntos contienen a $\mathcal{H}$.

Denotaremos así a las siguientes relaciones:

$$\mathbf{R}^F := \{(M,N) \in (R\text{-Mod})^2 \mid \mathrm{Hom}_R(F(M),N) = 0\}.$$

$$\mathbf{R}_G := \{(M,N) \in (R\text{-Mod})^2 \mid \mathrm{Hom}_R(M,G(N)) = 0\}.$$

3.3.1. $\mathrm{Hom}_R(F(\_),\_)$ con F un funtor covariante casi cocontinuo

En esta sección describimos los cerrados de la conexión de Galois asociada a $\mathbf{R}^F$, las $\mathbf{R}^F$-teorías de torsión y la correspondiente conexión de Galois isótona sobre R-radidem. Recordemos que para cada funtor $F : R\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}$, $\mathscr{C} \in \wp(\overrightarrow{F}(R\text{-Mod}))$ si y sólo si $\forall M \in \mathscr{C}$, $M \in \overrightarrow{F}(R\text{-Mod})$.

De aquí en adelante F denotará un funtor covariante casi cocontinuo.

Proposición 3.31.

1. $(f)_{\mathbf{R}^F}$*-cerr* $= \{\overleftarrow{F}(\mathbb{T}_\sigma) \mid \sigma \in R\text{-radidem}\}$.

2. *cerr-*$(f)_{\mathbf{R}^F} = \{f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C}) \mid \mathscr{C} \in \wp(\overrightarrow{F}(R\text{-Mod}))\}$.

Demostración. Por la proposición 3.27 tenemos que $f^{\mathbf{R}^F} = \overleftarrow{F} f^{\mathcal{H}}$ y $f_{\mathbf{R}^F} = f_{\mathcal{H}} \overrightarrow{F}$, luego para cada $\mathscr{C} \in \wp(R\text{-Mod})$ tenemos que $f^{\mathcal{H}}(\mathscr{C})$ es una clase de torsión, por lo tanto $f^{\mathcal{H}}(\mathscr{C}) = \mathbb{T}_\sigma$ para alguna $\sigma \in R$-radidem, se sigue que $\overleftarrow{F} f^{\mathcal{H}}(\mathscr{C}) = \overleftarrow{F}(\mathbb{T}_\sigma)$, esto que implica que:

$$(f)_{\mathbf{R}^F}\text{-}cerr = \{\overleftarrow{F}(\mathbb{T}_\sigma) \mid \sigma \in R\text{-radidem}\},$$

Además *cerr-*$(f)_{\mathbf{R}^F} = \{f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C}) \mid \mathscr{C} \in \wp(\overrightarrow{F}(R\text{-Mod}))\}$. $\square$

En la siguiente proposición vemos una propiedad de $\overrightarrow{F}(R\text{-Mod})$ que es útil para describir los cerrados de $(f)_{\mathbf{R}^F}$. Recordemos que definimos al prerradical $\tau_{\mathbf{R}^F} = \bigwedge_{N \in f_{\mathbf{R}^F}(R\text{-Mod})} \omega_0^N$ (ver Definición 2.47).

Proposición 3.32. $\mathbb{T}_{\tau_{\mathbf{R}^F}}$ *es la menor clase de torsión que contiene a* $\overrightarrow{F}(R\text{-Mod})$.

Demostración. Dado que $f^{\mathcal{H}} f_{\mathcal{H}} : \wp(R\text{-Mod}) \longrightarrow \wp(R\text{-Mod})$ es un operador cerradura y $f_{\mathbf{R}^F} = f_{\mathcal{H}} \overrightarrow{F}$ (Proposición 3.31), y además $\mathbb{F}_{\tau_{\mathbf{R}^F}} = f_{\mathbf{R}^F}(R\text{-Mod})$ (Observación 2.48), entonces tenemos que

$$\overrightarrow{F}(R\text{-Mod}) \subseteq f^{\mathcal{H}} f_{\mathcal{H}}(\overrightarrow{F}(R\text{-Mod})) = f^{\mathcal{H}}(f_{\mathbf{R}^F}(R\text{-Mod})) = f^{\mathcal{H}}(\mathbb{F}_{\tau_{\mathbf{R}^F}}) = \mathbb{T}_{\tau_{\mathbf{R}^F}}.$$

Sea $\mathbb{T}$ una clase de torsión tal que $\overrightarrow{F}(R\text{-Mod}) \subseteq \mathbb{T}$, entonces

$$\mathbb{T}_{\tau_{\mathbf{R}^F}} = f^{\mathcal{H}} f_{\mathcal{H}}(\overrightarrow{F}(R\text{-Mod})) \subseteq f^{\mathcal{H}} f_{\mathcal{H}}(\mathbb{T}) = f^{\mathcal{H}}(\mathbb{F}) = \mathbb{T}.$$

Por lo tanto $\mathbb{T}_{\tau_{\mathbf{R}^F}}$ es la menor clase de torsión que contiene a $\overrightarrow{F}(R\text{-Mod})$. □

Notemos que $\overrightarrow{F}(R\text{-Mod})$ no siempre resulta ser una clase de torsión en R-Mod como veremos en el siguiente ejemplo. Recordemos que $M \in R/I\text{-Mod}$ si y sólo si $IM = 0$, además $R/I \otimes_R M \cong M/IM$ (ver Lema 1.95).

Ejemplo 3.33. *Sean $2\mathbb{Z}$ ideal de $\mathbb{Z}$ y el funtor covariante cocontinuo $F = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \_$. Veamos que $\overrightarrow{F}(\mathbb{Z}\text{-Mod}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\text{-Mod}$ es una clase en $\mathbb{Z}$-Mod que no es cerrada bajo extesiones. Sea $0 \to \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_2 \to 0$ una sucesión exacta con $f(\bar{1}) = \bar{2}$, $g(\bar{1}) = g(\bar{3}) = \bar{1}$ y $g(\bar{2}) = \bar{0}$ donde $\mathbb{Z}_2 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\text{-Mod}$. Tenemos que $2\mathbb{Z}\mathbb{Z}_4 \neq 0$, es decir, $\mathbb{Z}_4 \notin \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\text{-Mod}$. Por lo tanto $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\text{-Mod}$ no es cerrada bajo extensiones lo que implica que no es una clase de torsión (ni clase libre de torsión) en $\mathbb{Z}$-Mod.*

Observación 3.34. *Usando la Proposición 1.71 podemos describir al prerradical $\tau_{\mathbf{R}^F}$ asociado a la relación $\mathbf{R}^F$ como*

$$\tau_{\mathbf{R}^F} = \overline{\bigvee_{M \in \overrightarrow{F}(R\text{-Mod})} \alpha_M^M} = \bigvee_{M \in \mathbb{T}_{\tau_{\mathbf{R}^F}}} \alpha_M^M = \bigwedge_{N \in \mathbb{F}_{\tau_{\mathbf{R}^F}}} \omega_0^N.$$

Proposición 3.35. *Sea $\mathbb{T} \in \mathcal{T}$-tors. Si $\mathbb{T} \in \wp(\overrightarrow{F}(R\text{-Mod}))$, entonces $\mathbb{F} \in cerr\text{-}(f)_{\mathbf{R}^F}$, donde $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ es una teoría de torsión.*

Demostración. Sea $\mathbb{T} \in \mathcal{T}$-*tors* tal que $\mathbb{T} \in \wp(\overrightarrow{F}(R\text{-Mod}))$, entonces $\mathbb{T} = \overrightarrow{F}(\mathscr{C})$ para alguna $\mathscr{C} \in \wp(R\text{-Mod})$, lo que implica que $f_{\mathbf{R}^F}(\mathscr{C}) = f_{\mathcal{H}} \overrightarrow{F}(\mathscr{C}) = f_{\mathcal{H}}(\mathbb{T}) = \mathbb{F}$, por lo tanto $\mathbb{F} \in cerr\text{-}(f)_{\mathbf{R}^F}$. □

El recíproco de la proposición anterior en general no se cumple, es decir, si $\mathbb{F} \in cerr\text{-}(f)_{\mathbf{R}^F}$ entonces no necesariamente $\mathbb{T} \in \wp(\overrightarrow{F}(R\text{-Mod}))$, donde $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ es una teoría de torsión como vemos a continuación.

Ejemplo 3.36. *Para el funtor covariante cocontinuo $F = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \_$ tenemos por el Ejemplo 3.33 que $\overrightarrow{F}(\mathbb{Z}\text{-Mod}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\text{-Mod}$ no es una clase de torsión, luego por la Proposición 3.32 tenemos que $\mathbb{T}_{\tau_{\mathbf{R}^F}}$ es la menor clase de torsión que contiene a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\text{-Mod}$, esto significa por la Proposición 3.31 que*

$$f_{\mathbf{R}^F}(\mathbb{Z}\text{-Mod}) = f_{\mathcal{H}} \overrightarrow{F}(\mathbb{Z}\text{-Mod}) = f_{\mathcal{H}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\text{-Mod}) = f_{\mathcal{H}}(\mathbb{T}_{\tau_{\mathbf{R}^F}}) = \mathbb{F}_{\tau_{\mathbf{R}^F}}$$

Luego $\mathbb{F}_{\tau_{\mathbf{R}^F}} \in (f)_{\mathbf{R}^F}$*-cerr pero* $\mathbb{T}_{\tau_{\mathbf{R}^F}} \subsetneqq \overrightarrow{F}(\mathbb{Z}\text{-Mod})$ *aún cuando* $(\mathbb{T}_{\tau_{\mathbf{R}^F}}, \mathbb{F}_{\tau_{\mathbf{R}^F}})$ *es una teoría de torsión.*

La Proposición 3.35 motiva a la siguiente proposición.

Proposición 3.37. $\tau \in [[0, \tau_{\mathbf{R}^F}]]$ *si y sólo si existe* $\mathscr{C} \in \wp(R\text{-Mod})$ *tal que* $\tau = \overline{\bigvee_{M \in \overrightarrow{F}(\mathscr{C})} \alpha_M^M}$.

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $\tau \in [[0, \tau_{\mathbf{R}^F}]]$, esto que significa que $\mathbb{F}_\tau \in cerr\text{-}(f)_{\mathbf{R}^F}$, se sigue que $\mathbb{F}_\tau = f_{\mathcal{H}}(\overrightarrow{F}(\mathscr{C}))$ para alguna $\mathscr{C} \in \wp(R\text{-Mod})$, por lo tanto por las Proposiciones 1.78 y 2.44 tenemos que $\tau = \bigwedge_{N \in \mathbb{F}_\tau} \omega_0^N = \bigvee_{M \in \mathbb{T}_\tau} \alpha_M^M = \overline{\bigvee_{M \in \overrightarrow{F}(\mathscr{C})} \alpha_M^M}$.

$\Leftarrow$) Sean $\mathscr{C} \in \wp(R\text{-Mod})$ y $\tau = \overline{\bigvee_{M \in \overrightarrow{F}(\mathscr{C})} \alpha_M^M}$, por la Proposición 2.44 $\tau = \bigwedge_{N \in \mathbb{F}_\tau} \omega_0^N = \bigwedge_{N \in f_{\mathcal{H}}(\overrightarrow{F}(\mathscr{C}))} \omega_0^N$, luego $\mathbb{F}_\tau = f_{\mathcal{H}}(\overrightarrow{F}(\mathscr{C})) \in cerr\text{-}(f)_{\mathbf{R}^F}$. Por lo tanto $\tau \in [[0, \tau_{\mathbf{R}^F}]]$. □

Recordemos que para toda $\mathbf{R} \in [\mathcal{H}]_{\preceq}$ tenemos que $[[0, \tau_{\mathbf{R}}]] \subseteq [0, \tau_{\mathbf{R}}] \cap R$-radidem y en el Ejemplo 2.50 vimos que para ciertas relaciones bicerradas no se da la igualdad. Una condición suficiente para que se de la igualdad la damos en la siguiente proposición.

Proposición 3.38. *Si* $\overrightarrow{F}(R\text{-Mod})$ *es clase de torsión, entonces* $[[0, \tau_{\mathbf{R}^F}]] = [0, \tau_{\mathbf{R}^F}] \cap R$-radidem. *Además en este caso* $\overrightarrow{F}(R\text{-Mod}) = \mathbb{T}_{\tau_{\mathbf{R}^F}}$.

Demostración. Siempre tenemos que $[[0, \tau_{\mathbf{R}^F}]] \subseteq [0, \tau_{\mathbf{R}^F}] \cap R$-radidem.

Sea $\tau \in R$-radidem $\cap [0, \tau_{\mathbf{R}^F}]$, entonces $\tau \preccurlyeq \tau_{\mathbf{R}^F}$ lo que significa que $\mathbb{T}_\tau \subseteq \mathbb{T}_{\tau_{\mathbf{R}^F}}$. Por hipótesis $\overrightarrow{F}(R\text{-Mod})$ es una clase de torsión y debido a la Proposición 3.32 $\overrightarrow{F}(R\text{-Mod}) = \mathbb{T}_{\tau_{\mathbf{R}^F}}$, por lo tanto tenemos $\mathbb{T}_\tau \subseteq \overrightarrow{F}(R\text{-Mod})$, de modod que por la Proposición 3.35, $\mathbb{F}_\tau \in cerr\text{-}(f)_{\mathbf{R}^F}$ lo que significa que $\tau \in [[0, \tau_{\mathbf{R}^F}]]$.

Por lo tanto $[[0, \tau_{\mathbf{R}^F}]] \supseteq [0, \tau_{\mathbf{R}^F}] \cap R$-radidem. Concluimos que $[[0, \tau_{\mathbf{R}^F}]] = [0, \tau_{\mathbf{R}^F}] \cap R$-radidem. □

Usando el hecho de que $\overleftarrow{F}$ preserva orden, tenemos una descripción de la clase de R-módulos $\bigcap (f)_{\mathbf{R}^F}$*-cerr*.

Proposición 3.39. $\overleftarrow{F}(\{0\}) = \bigcap (f)_{\mathbf{R}^F}$*-cerr*.

Demostración. Tenemos que $(f)_{\mathbf{R}^F}$*-cerr* $= \{\overleftarrow{F}(\mathbb{T}_\sigma) \mid \sigma \in R\text{-}radidem\}$ (Proposición 3.31). Como $\overleftarrow{F}$ preserva orden entonces $\overleftarrow{F}(\{0\}) = \overleftarrow{F}(\mathbb{T}_0) \subseteq \overleftarrow{F}(\mathbb{T}_\sigma)$ para todo $\sigma \in R$*-radidem*. Por lo tanto $\overleftarrow{F}(\{0\}) \subseteq \bigcap (f)_{\mathbf{R}^F}$*-cerr*. Como $\overleftarrow{F}(\{0\}) \in (f)_{\mathbf{R}^F}$*-cerr* entonces $\bigcap (f)_{\mathbf{R}^F}$*-cerr* $\subseteq \overleftarrow{F}(\{0\})$.

Por lo tanto $\overleftarrow{F}(\{0\}) = \bigcap (f)_{\mathbf{R}^F}$*-cerr*. □

Notemos que $\overleftarrow{F}(\{0\})$ es el "núcleo" del funtor F.

Usando la conexión de Galois inducida por una relación bicerrada $\mathbf{R} \in [\mathcal{H}]_{\preceq}$ (ver Proposición 2.54) tenemos una descripción de el conglomerado de todas las $\mathbf{R}^F$-teorías de torsión (ver Observación 2.58):

$$\{(\overleftarrow{F}(\mathbb{T}_\tau), \mathbb{F}_\tau) \mid \tau \in [[0, \tau_{\mathbf{R}^F}]]\} = \{(\mathbb{T}_{\mu_{\mathbf{R}^F}(\tau)}, \mathbb{F}_\tau) \mid \tau \in [[0, \tau_{\mathbf{R}^F}]]\}.$$

Partiendo de la Proposición 3.10 estudiaremos la relación que existe entre el coproducto de funtores covariantes casi cocontinuos y las relaciones bicerradas que inducen. Esto nos ayuda a saber la estructura reticular de $\langle [\mathcal{H}]_{\preceq}, \subseteq \rangle$, como veremos en el capítulo 4, en el caso de que R sea un anillo semisimple artiniano.

Recordemos que si $\{\mathbf{R}_\alpha\} \subseteq [\mathcal{H}]_{\preceq}$, entonces $\bigcap \mathbf{R}_\alpha \in [\mathcal{H}]_{\preceq}$ (ver Proposición 2.4).

Proposición 3.40. *Sea $\{F_i : R\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}\}_{i\in X}$ una familia de funtores covariantes casi cocontinuos y $F : R\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}$ un funtor covariante casi cocontinuo. Entonces:*

1. $\mathbf{R}^{\oplus_{i\in X} F_i} = \bigcap_{i\in X} \mathbf{R}^{F_i}$.
2. $\mathbf{R}^{F^{(X)}} = \mathbf{R}^F$.
3. $(\overleftarrow{\bigoplus_{i\in X} F_i})(\mathbb{T}) = \bigcap_{i\in X} \overleftarrow{F_i}(\mathbb{T})$ *para toda* $\mathbb{T} \in \mathcal{T}$*-tors.*
4. $(f_{\mathbf{R}^{\oplus_{i\in X} F_i}})(\mathscr{C}) = \bigcap_{i\in X} f_{\mathcal{H}} \overrightarrow{F_i}(\mathscr{C})$ *para toda* $\mathscr{C} \in \wp(R\text{-Mod})$.

Demostración.

1. Tenemos por la Proposición 3.10 que $\bigoplus_{i\in X} F_i$ es un funtor casi cocontinuo, esto significa por el Teorema 3.24 que $\mathbf{R}^{\oplus_{i\in X} F_i} \in [\mathcal{H}]_{\preceq}$. Además para toda $M \in R$-Mod, $(\bigoplus_{i\in X} F_i)(M) = \bigoplus_{i\in X} F_i(M)$ (ver Apéndice A, Observación A.6). Se sigue que

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}^{\bigoplus_{i\in X} F_i} &= \{(M,N) \in (R\text{-Mod})^2 \mid \mathrm{Hom}_R((\bigoplus_{i\in X} F_i)(M), N) = 0\} \\
&= \{(M,N) \in (R\text{-Mod})^2 \mid \mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{i\in X} F_i(M), N) = 0\} \\
&= \{(M,N) \in (R\text{-Mod})^2 \mid \prod_{i\in X} \mathrm{Hom}_R(F_i(M), N) = 0\} \\
&= \{(M,N) \in (R\text{-Mod})^2 \mid \mathrm{Hom}_R(F_i(M), N) = 0, \forall i \in X\} \\
&= \bigcap_{i\in X} \mathbf{R}^{F_i}.
\end{aligned}$$

   y por el Teorema de Polaridades tenemos que $(f)_{\mathbf{R}^{\oplus F_i}} = (f)_{\bigcap \mathbf{R}^{F_i}}$, esto implica que el ínfimo de la familia $\{(f)_{\mathbf{R}^{F_i}}\}_{i\in X}$ de conexiones de Galois es $\bigwedge (f)_{\mathbf{R}^{F_i}} = (f)_{\mathbf{R}^{\oplus F_i}}$ (ver Definición 1.21).

2. Por 1 tenemos que $\mathbf{R}^{F^{(X)}} = \bigcap \mathbf{R}^F = \mathbf{R}^F$.

3. Recordemos que si $M \in R$-Mod y $\mathbb{T}$ es una clase de torsión tal que $\bigoplus_{i \in X} F_i(M) \in \mathbb{T}_\sigma$, entonces $F_i(M) \in \mathbb{T}$ para toda $i \in X$, pues $\mathbb{T}$ es cerrada bajo epimorfismos y para $j \in X$ existe un epimorfismo $p_j : \bigoplus_{i \in X} F_i(M) \longrightarrow F_j(M)$. Por la Proposición 3.10 $\bigoplus_{i \in X} F_i$ es un funtor covariante casi cocontinuo, se sigue que

$$\begin{aligned}
\overleftarrow{(\bigoplus_{i \in X} F_i)}(\mathbb{T}) &= \{M \in R\text{-Mod} \mid (\bigoplus_{i \in X} F_i)(M) \in \mathbb{T}\} \\
&= \{M \in R\text{-Mod} \mid \bigoplus_{i \in X} F_i(M) \in \mathbb{T}\} \\
&= \{M \in R\text{-Mod} \mid F_i(M) \in \mathbb{T}_\sigma, \forall i \in X\} \\
&= \bigcap_{i \in X} \{M \in R\text{-Mod} \mid F_i(M) \in \mathbb{T}\} \\
&= \bigcap_{i \in X} \overleftarrow{F_i}\ (\mathbb{T}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\overleftarrow{(\bigoplus_{i \in X} F_i)}(\mathbb{T}) = \bigcap_{i \in X} \overleftarrow{F_i}(\mathbb{T})$.

4. Sea $\mathscr{C} \in \wp(R\text{-Mod})$, entonces

$$\begin{aligned}
(f_{\mathbf{R}^{\oplus_{i \in X} F_i}})(\mathscr{C}) &= \{N \in R\text{-Mod} \mid \mathrm{Hom}_R((\bigoplus_{i \in X} F_i)(M), N) = 0, \forall M \in \mathscr{C}\} \\
&= \{N \in R\text{-Mod} \mid \mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{i \in X} F_i(M), N) = 0, \forall M \in \mathscr{C}\} \\
&= \{N \in R\text{-Mod} \mid \prod_{i \in X} \mathrm{Hom}_R(F_i(M), N) = 0, \forall M \in \mathscr{C}\} \\
&= \{N \in R\text{-Mod} \mid \mathrm{Hom}_R(F_i(M), N) = 0, \forall M \in \mathscr{C}, \forall i \in X\} \\
&= \{N \in R\text{-Mod} \mid \mathrm{Hom}_R(M, N) = 0, \forall M \in F_i(\mathscr{C}), \forall i \in X\} \\
&= \bigcap_{i \in X} f_{\mathcal{H}}(\overrightarrow{F_i}(\mathscr{C})).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $(f_{\mathbf{R}^{\oplus_{i \in X} F_i}})(\mathscr{C}) = \bigcap_{i \in X} f_{\mathcal{H}} \overrightarrow{F_i}(\mathscr{C})$.

□

Los prerradicales exactos derechos son ejemplos de funtores covariantes cocontinuos. Por el Teorema B.4 (Watts-Eilenberg) tenemos que si $\eta \in R$-trad, entonces $\eta \cong \eta(R) \otimes_R \_$ y por la Proposición 1.94 $\eta = \alpha_I^R \cong I \otimes_R \_$ con $\eta(R) = I \leq R$ ideal puro. Luego para un prerradical σ tenemos las siguientes equivalencias (ver Proposiciones 1.56 y 1.94)

σ es exacto derecho $\Leftrightarrow$ σ es exacto izquierdo y preserva epimorfismos $\Leftrightarrow$ σ es t-radical exacto izquierdo $\Leftrightarrow$ $\sigma = \alpha_I^R$ con I un ideal puro de R.

Ejemplo 3.41. *Para cada $\eta \in R$-trad tenemos la relación bicerrada*

$$\mathbf{R}^\eta = \{(M, N) \in (R\text{-Mod})^2 \mid \mathrm{Hom}_R(\eta(M), N) = 0\}$$

Esta relación bicerrada $\mathbf{R}^\eta$ es la misma que la inducida por un par adjunto $\langle I \otimes_R \_, \mathrm{Hom}_R(I, \_)\rangle$ (cuando I es un ideal puro) que se estudiará mas adelante, cuando veamos relaciones bicerradas inducidas por pares adjuntos.

3.3.2. $\mathrm{Hom}_R(\_, G(\_))$ con G un funtor covariante casi continuo

En esta sección se describen los cerrados de la conexiones de Galois asociada a la relación $\mathbf{R}_G$ con G un funtor covariante casi continuo, las $\mathbf{R}_G$-teorías de torsión y la correspondiente conexión de Galois isótona sobre R-radidem. Primero probaremos una propiedad muy importante de los funtores covariantes casi cocontinuos.

De aquí en adelante G denotará a un funtor covariante casi continuo.

Proposición 3.42.

1. $(f)_{\mathbf{R}_G}$-*cerr* $= \{f^{\mathcal{H}}(\mathscr{C}) \mid \mathscr{C} \in \wp(\overrightarrow{G}\,(R\text{-Mod}))\}$.
2. *cerr*-$(f)_{\mathbf{R}} = \{\overleftarrow{G}\,(\mathbb{F}_\sigma) \mid \sigma \in R\text{-radidem}\}$.

Demostración. Por la proposición 3.30 tenemos que $f^{\mathbf{R}_G} = f^{\mathcal{H}}\,\overrightarrow{G}$ y $f_{\mathbf{R}_G} = \overleftarrow{G}\,f_{\mathcal{H}}$, se sigue que

$$(f)_{\mathbf{R}_G}\text{-}cerr = \{f^{\mathcal{H}}(\mathscr{C}) \mid \mathscr{C} \in \wp(\overrightarrow{G}\,(R\text{-Mod}))\},$$

y para cada $\mathscr{C} \in \wp(R\text{-Mod})$ tenemos que $f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C})$ es una clase libre de torsión, se sigue que $\overleftarrow{G}\,f_{\mathcal{H}}(\mathscr{C}) = \overleftarrow{G}\,(\mathbb{F}_\tau)$ donde $\tau \in R$-radidem, esto implica que:

$$cerr\text{-}(f)_{\mathbf{R}_G} = \{\overleftarrow{G}\,(\mathbb{F}_\tau) \mid \tau \in R\text{-radidem}\}.$$

□

Para cada $\mathbf{R} \in [\mathcal{H}]_{\preceq}$ tenemos definida la clase libre de torsión $\mathbb{F}_{\tau_{\mathbf{R}}}$ (Observación 2.48) que cumple la siguiente propiedad.

Proposición 3.43. *$\mathbb{F}_{\sigma_{\mathbf{R}_G}}$ es la menor clase libre de torsión que contiene a $\overrightarrow{G}\,(R\text{-Mod})$.*

Demostración. Como $f_{\mathcal{H}}f^{\mathcal{H}}$ es un operador cerradura, por la Proposición 3.42 $f^{\mathbf{R}_G} = f^{\mathcal{H}}\,\overrightarrow{G}$ y $f^{\mathbf{R}_G}(R\text{-Mod}) = \mathbb{T}_{\sigma_{\mathbf{R}_G}}$ (Observación 2.48), se tiene que

$$\overrightarrow{G}\,(R\text{-Mod}) \subseteq f_{\mathcal{H}}f^{\mathcal{H}}(\overrightarrow{G}\,(R\text{-Mod})) = f_{\mathcal{H}}(f^{\mathbf{R}_G}(R\text{-Mod})) = f^{\mathcal{H}}(\mathbb{T}_{\sigma_{\mathbf{R}_G}}) = \mathbb{F}_{\sigma_{\mathbf{R}_G}}.$$

Sea $\mathbb{F}$ una clase libre de torsión tal que $\overrightarrow{G}\,(R\text{-Mod}) \subseteq \mathbb{F}$, entonces

$$\mathbb{F}_{\sigma_{\mathbf{R}_G}} = f_{\mathcal{H}}f^{\mathcal{H}}(\overrightarrow{G}\,(R\text{-Mod})) \subseteq f_{\mathcal{H}}f^{\mathcal{H}}(\mathbb{F}) = \mathbb{F}.$$

Por lo tanto $\mathbb{F}_{\sigma_{\mathbf{R}_G}}$ es la menor clase libre de torsión que contiene a $\overrightarrow{G}\,(R\text{-Mod})$. □

Observación 3.44. *Usando la Proposición 1.71 podemos describir al prerradical $\sigma_{\mathbf{R}_G}$ acosiado a la relación $\mathbf{R}_G$ como*

$$\sigma_{\mathbf{R}_G} = \widehat{\bigwedge_{N\in\vec{G}(R\text{-Mod})}} \omega_0^N = \bigwedge_{N\in\mathbb{F}_{\sigma_{\mathbf{R}_G}}} \omega_0^N = \bigvee_{M\in\mathbb{T}_{\sigma_{\mathbf{R}_G}}} \alpha_M^M.$$

Proposición 3.45. *Si $\mathbb{F}$ es una clase libre de torsión tal que $\mathbb{F}\in\wp(\vec{G}\,(R\text{-Mod}))$, entonces $\mathbb{T}\in(f)_{\mathbf{R}_G}$-cerr, donde $(\mathbb{T},\mathbb{F})$ es una teoría de torsión.*

Demostración. Sea $\mathbb{F}\in\mathcal{L}$-*tors* tal que $\mathbb{F}\in\wp(\vec{G}\,(R\text{-Mod}))$, entonces $\mathbb{F}=\vec{G}\,(\mathscr{C})$ para alguna $\mathscr{C}\in\wp(R\text{-Mod})$, lo que implica que $f^{\mathbf{R}_G}(\mathscr{C}) = f^{\mathcal{H}}\,\vec{G}\,(\mathscr{C}) = f^{\mathcal{H}}(\mathbb{F}) = \mathbb{T}$, por lo tanto $\mathbb{T}\in(f)_{\mathbf{R}_G}$-*cerr*. □

El recíproco de la Proposición 3.45 no se cumple en general, es decir, si $\mathbb{T}\in(f)_{\mathbf{R}_G}$-*cerr* no necesariamente $\mathbb{F}\in\wp(\vec{G}\,(R\text{-Mod}))$, donde $(\mathbb{T},\mathbb{F})$ es una teoría de torsión como lo mostramos en el siguiente ejemplo. Recordemos que para cada ideal I de R y cada $M\in R$-Mod que $\mathrm{Hom}_R(R/I,M)\cong M/IM$.

Ejemplo 3.46. *Sea $2\mathbb{Z}$ un ideal de $\mathbb{Z}$ y consideremos el funtor covariante casi continuo $G=\mathrm{Hom}_R(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\_)$, luego $\vec{G}\,(\mathbb{Z}\text{-Mod})=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\text{-Mod}$ no es una clase libre de torsión en $\mathbb{Z}$-Mod (ver Ejemplo 3.33). Por lo tanto $\mathbb{F}_{\sigma_{\mathbf{R}_G}}\nsubseteq\vec{G}\,(\mathbb{Z}\text{-Mod})$ aunque $\mathbb{T}_{\sigma_{\mathbf{R}_G}}\in(f)_{\mathbf{R}_G}$-cerr.*

Recordemos que definimos el prerradical $\sigma_{\mathbf{R}_G} = \bigvee_{M\in f^{\mathbf{R}_G}(R\text{-Mod})} \alpha_M^M$ (ver Definción 2.47).

Proposición 3.47. $\sigma\in[[\sigma_{\mathbf{R}_G},1]]$ *si y sólo si existe $\mathscr{D}\in\wp(R\text{-Mod})$ tal que* $\sigma=\widehat{\bigwedge_{N\in\vec{G}(\mathscr{D})}}\omega_0^N$.

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $\sigma\in[[\sigma_{\mathbf{R}_G},1]]$, luego $\mathbb{T}_\sigma=f^{\mathcal{H}}(\vec{G}\,(\mathscr{D}))$ para alguna $\mathscr{D}\in\wp(R\text{-Mod})$, por lo tanto por las Proposiciones 1.78 y 2.44 tenemos que $\sigma=\bigvee_{M\in\mathbb{T}_\sigma}\alpha_M^M=\bigwedge_{M\in\mathbb{F}_\sigma}\omega_0^N=\widehat{\bigwedge_{M\in\vec{G}(\mathscr{D})}}\omega_0^N$.

$\Leftarrow$) Sea $\sigma=\widehat{\bigwedge_{M\in\vec{G}(\mathscr{D})}}\omega_0^N$ con $\mathscr{D}\in\wp(R\text{-Mod})$, por la Proposición 2.44 $\sigma=\bigvee_{M\in\mathbb{T}_\sigma}\alpha_M^M=\bigvee_{M\in f^{\mathcal{H}}(\vec{G}(\mathscr{D}))}\alpha_M^M$, luego $\mathbb{T}_\sigma=f^{\mathcal{H}}(\vec{G}\,(\mathscr{D}))\in(f)_{\mathbf{R}_G}$-*cerr*. Por lo tanto $\sigma\in[[\sigma_{\mathbf{R}_G},1]]$. □

Recordemos que $\sigma\in[[\sigma_{\mathbf{R}_G},1]]$ es cerrado bajo ínfimos arbitrarios (Observación 2.55) pues es un sistema de cerrados.

Para toda $\mathbf{R}\in[\mathcal{H}]_{\preceq}$ siempre tenemos que $[[\sigma_{\mathbf{R}},1]]\subseteq[\sigma_{\mathbf{R}},1]\cap R$-radidem. Las condiciones para que se de la igualdad ve en el siguiente corolario.

Proposición 3.48. *Si $\vec{G}\,(R\text{-Mod})$ es una clase libre de torsión, entonces $[[\sigma_{\mathbf{R}_G},1]]=[\sigma_{\mathbf{R}_G},1]\cap$ R-radidem. Además en este caso $\vec{G}\,(R\text{-Mod})=\mathbb{F}_{\sigma_{\mathbf{R}_G}}$.*

Demostración. Siempre tenemos que $[[\sigma_{\mathbf{R}_G}, 1]] \subseteq [\sigma_{\mathbf{R}_G}, 1] \cap R$-radidem.

Sea $\sigma \in [\sigma_{\mathbf{R}^F}, 1] \cap R$-radidem, entonces $\sigma_{\mathbf{R}^F} \preccurlyeq \sigma$ lo que significa que $\mathbb{F}_\sigma \subseteq \mathbb{F}_{\sigma_{\mathbf{R}_G}}$. Por hipótesis $\overrightarrow{G}$ (R-Mod) es una clase libre de torsión, entonces por la Proposición 3.43 $\overrightarrow{G}$ (R-Mod) $= \mathbb{F}_{\sigma_{\mathbf{R}_G}}$, por lo tanto $\mathbb{F}_\sigma \in \wp(\overrightarrow{G}$ (R-Mod)), así por la Proposición 3.45 $\mathbb{T}_\sigma \in (f)_{\mathbf{R}_G}$-*cerr* lo que significa que $\sigma \in [[\sigma_{\mathbf{R}_G}, 1]]$.

Por lo tanto $[[\sigma_{\mathbf{R}_G}, 1]] \supseteq [\sigma_{\mathbf{R}_G}, 1] \cap R$-radidem, se sigue por lo anterior que $[[\sigma_{\mathbf{R}_G}, 1]] = [\sigma_{\mathbf{R}_G}, 1] \cap R$-radidem. $\square$

$\overrightarrow{G}$ (R-Mod) no siempre es una clase libre de torsión. Sea $G = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \_)$, luego $\overrightarrow{G}$ ($\mathbb{Z}$-Mod) $= \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Mod y del Ejemplo 3.33 sabemos que es una clase en $\mathbb{Z}$-Mod que no es cerrada bajo extensiones.

Partiendo del hecho que $\overleftarrow{G}$ preserva orden tenemos una descripción de $\bigcap cerr\text{-}(f)_{\mathbf{R}_G}$.

Proposición 3.49. $\overleftarrow{G}$ $(\{0\}) = \bigcap cerr\text{-}(f)_{\mathbf{R}_G}$.

Demostración. Tenemos que $cerr\text{-}(f)_{\mathbf{R}_G} = \{\overleftarrow{G}(\mathbb{F}_\sigma) \mid \sigma \in R\text{-}radidem\}$, como $\overleftarrow{G}$ preserva orden entonces $\overleftarrow{G}(\{0\}) \subseteq \overleftarrow{G}(\mathbb{F}_\sigma)$ para todo $\sigma \in R$-*radidem*. Por lo tanto $\overleftarrow{G}(\{0\}) \subseteq \bigcap cerr\text{-}(f)_{\mathbf{R}_G}$. Como $\overleftarrow{G}(\{0\}) \in cerr\text{-}(f)_{\mathbf{R}_G}$ entonces $\bigcap cerr\text{-}(f)_{\mathbf{R}_G}\text{-}cerr \subseteq \overleftarrow{G}(\{0\})$.

Por lo tanto $\overleftarrow{G}(\{0\}) = \bigcap cerr\text{-}(f)_{\mathbf{R}_G}$. $\square$

La clase de las $\mathbf{R}_G$-teorías de torsión es (ver Observación 2.58):

$$\{(\mathbb{T}_\sigma, \overleftarrow{G}(\mathbb{F}_\sigma)) \mid \sigma \in [[\sigma_{\mathbf{R}_G}, 1]] = \{(\mathbb{T}_\sigma, \mathbb{F}_{\lambda_{\mathbf{R}_G}(\sigma)}) \mid \sigma \in [[\sigma_{\mathbf{R}_G}, 1]]\}.$$

Observación 3.50. *Las teorías de torsión hereditarias son inducidas por el bifuntor* $\mathrm{Hom}_R(\_, E(\_))$, *el cual no es casi continuo pues la asignación* $E(\_) : R\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}$ *considerada como un funtor (usando un axioma de elección sobre clases) no es un funtor covariante casi continuo pues no es exacto izquierdo, pero induce la relación que es* $\hbar$ *bicerrada con respecto a* $[\mathcal{H}]_{\preceq}$. *Queda la pregunta, si* $\hbar$ *puede ser inducida por un bifuntor casi continuo.*

Tenemos resultados similares para funtores covariantes casi continuos y para el producto de funtores covariantes casi continuos.

Proposición 3.51. *Sean* $\{G_i : R\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}\}_{i\in X}$ *una familia de funtores covariantes casi continuos y* $G : R\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}$ *un funtor casi continuo, entonces:*

1. $\mathbf{R}_{\prod\limits_{i\in X} G_i} = \bigcap\limits_{i\in X} \mathbf{R}_{G_i}$.

2. $\mathbf{R}_{G^X} = \mathbf{R}_G$, *donde* X *es un conjunto.*

3. $(\overleftarrow{\prod_{i\in X} G_i})(\mathbb{F}) = \bigcap_{i\in X} \overleftarrow{G_i}(\mathbb{F})$ *para toda* $\mathbb{F} \in \mathcal{F}$*-tors.*

4. $(f^{\mathbf{R}_{\prod_{i\in X} G_i}})(\mathscr{C}) = \bigcap_{i\in X} f^{\mathbf{R}_{G_i}}(\mathscr{C})$ *para toda* $\mathscr{C} \in \wp(R\text{-Mod})$.

Demostración.

1. Por la Proposición 3.10 tenemos que $\prod\limits_{i\in X} G_i$ es un funtor casi continuo, esto significa por el Teorema 3.24 que $\mathbf{R}_{\prod\limits_{i\in X} G_i} \in [\mathcal{H}]_{\preceq}$. Además para toda $N \in R$-Mod, $(\prod\limits_{i\in X} G_i)(N) = \prod\limits_{i\in X} G_i(N)$ (ver Apéndice A, Observación A.6). Se sigue que

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{\prod\limits_{i\in X} G_i} &= \{(M,N) \in (R\text{-Mod})^2 \mid \mathrm{Hom}_R(M, (\prod_{i\in X} G_i)(N)) = 0\} \\
&= \{(M,N) \in (R\text{-Mod})^2 \mid \mathrm{Hom}_R(M, \prod_{i\in X} G_i(N)) = 0\} \\
&= \{(M,N) \in (R\text{-Mod})^2 \mid \prod_{i\in X} \mathrm{Hom}_R(M, G_i(N)) = 0\} \\
&= \{(M,N) \in (R\text{-Mod})^2 \mid \mathrm{Hom}_R(M, G_i(N)) = 0, \forall i \in X\} \\
&= \bigcap_{i\in X} \mathbf{R}_{G_i}.
\end{aligned}$$

además por el Teorema de Polaridades tenemos que $(f)_{\mathbf{R}_{\prod\limits_{i\in X} G_i}} = \bigcap\limits_{i\in X} (f)_{\mathbf{R}_{G_i}}$, esto implica que el ínfimo de la familia de polaridades $\{(f)_{\mathbf{R}_{G_i}}\}_{i\in X}$ es $\bigwedge\limits_{i\in X} (f)_{\mathbf{R}_{G_i}} = (f)_{\mathbf{R}_{\prod\limits_{i\in X} G_i}}$ (ver Definición 1.21).

2. Por 1 tenemos que $\mathbf{R}_{G^X} = \bigcap \mathbf{R}_G = \mathbf{R}_G$.

3. Sea $\mathbb{F}$ es una clase libre de torsión. Recordemos que si $N \in R$-Mod tal que $\prod G_i(N) \in \mathbb{F}$, entonces $G_i(N) \in \mathbb{F}$ para todo $i \in X$, pues $\mathbb{F}$ es cerrada bajo monomorfismos y para cada $j \in X$ existe un monomorfismo $h_j : G_j(N) \longrightarrow \prod G_i(N)$. Sea $\tau \in R$-radidem, luego

$$\begin{aligned}
\overleftarrow{\prod_{i\in X}} G_i(\mathbb{F}) &= \{N \in R\text{-Mod} \mid \prod_{i\in X} G_i(N) \in \mathbb{F}\} \\
&= \{N \in R\text{-Mod} \mid G_i(N) \in \mathbb{F}, \forall i \in X\} \\
&= \bigcap_{i\in X} \{N \in R\text{-Mod} \mid G_i(N) \in \mathbb{F}\} \\
&= \bigcap_{i\in X} \overleftarrow{G_i}\ (\mathbb{F}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $(\overleftarrow{\prod_{i\in X} G_i})(\mathbb{F}) = \bigcap_{i\in X} \overleftarrow{G_i}(\mathbb{F})$.

4. Sea $\mathscr{C} \in \wp(R\text{-Mod})$, entonces
$$\begin{aligned}
f^{\mathbf{R}_{\prod_{i\in X} G_i}}(\mathscr{C}) &= \{M \in R\text{-Mod} \mid \mathrm{Hom}_R(M, \prod_{i\in X} G_i(N)) = 0, \forall N \in \mathscr{C}\} \\
&= \{M \in R\text{-Mod} \mid \prod_{i\in X} \mathrm{Hom}_R(M, G_i(N)) = 0, \forall N \in \mathscr{C}\} \\
&= \{M \in R\text{-Mod} \mid \mathrm{Hom}_R(M, G_i(N)) = 0, \forall N \in \mathscr{C}, \forall i \in X\} \\
&= \{M \in R\text{-Mod} \mid \mathrm{Hom}_R(M, N) = 0, \forall N \in G_i(\mathscr{C}), \forall i \in X\} \\
&= \bigcap_{i\in X} f^{\mathcal{H}}(\overrightarrow{G_i}(\mathscr{C})).
\end{aligned}$$
Por lo tanto $(f^{\mathbf{R}_{\prod_{i\in X} G_i}})(\mathscr{C}) = \bigcap_{i\in X} f^{\mathbf{R}_{G_i}}(\mathscr{C})$.

□

Algunos prerradicales exactos izquierdos son ejemplos de funtores casi continuos que no necesariamente son continuos (ver Ejemplo 3.9-4-a), así para cada $\nu \in R$-lep tenemos al bifuntor casi continuo $\mathrm{Hom}_R(\_, \nu(\_))$ y $\mathbf{R}_\nu$ la relación que induce. En el capítulo 4 damos un ejemplo de este tipo de relaciones bicerradas cuando el prerradical es $t(\alpha_I^R)$ con I un ideal de R.

3.4. Relaciones bicerradas inducidas por pares adjuntos

En este sección estudiaremos relaciones bicerradas inducidas por pares adjuntos. Nos basaremos en los *Teoremas de Watts-Eilenberg* (ver Apéndice B, Teoremas B.4 y B.10) que a grandes rasgos dicen:

1. Un funtor entre categorías de módulos es un adjunto derecho si y sólo si preserva límites.
2. Un funtor entre categorías de módulos es un adjunto izquierdo si y sólo si preserva colímites.
3. En un par adjunto $\langle F, G\rangle$, F preserva colímites y G preserva límites.
4. Para cada par adjunto $\langle F, G\rangle$, existe $L \in R$-BiMod (único salvo ismorfismo) tal que $F \cong L \otimes_R \_$ y $G \cong \mathrm{Hom}_R(L, \_)$.

De esta forma podemos estudiar las relaciones $\mathbf{R}^{(K; L\otimes_R \_)}$ y $\mathbf{R}_{(K;\mathrm{Hom}_R(L,\_))}$ en lugar de $\mathbf{R}^{(K;F)}$ y $\mathbf{R}_{(K;G)}$, esto con el fin de tener una mejor descripción de las relaciones bicerradas inducidas por pares adjuntos. De esta forma tenemos
$$\mathbf{R}^{(K; L\otimes_R \_)} = \{(M, N) \in (R\text{-Mod})^2 \mid K(L \otimes_R M, N) = 0\} \text{ y}$$
$$\mathbf{R}_{(K;\mathrm{Hom}_R(L,\_))} = \{(M, N) \in (R\text{-Mod})^2 \mid K(M, \mathrm{Hom}_R(L, N)) = 0\}$$

En esta sección seguiremos estudiando las relaciones bicerradas inducidas por los bifuntores $\mathrm{Hom}_R(F(\_), \_) \cong \mathrm{Hom}_R(\_, G(\_))$ con $\langle F, G\rangle : R\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}$ un par adjunto, en este caso $\mathbf{R}^F = \mathbf{R}_G$.

De los Teoremas 1.105 y 1.106 se deduce el siguiente resultado.

Proposición 3.52. *Sea $\langle F, G\rangle : R\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}$ un par adjunto, entonces F es un funtor covariante cocontinuo y G es un funtor covariante continuo.* $\square$

Nótese que por lo anterior tenemos una asignación de la categoría de funtores covariantes cocontinuos $Func_{coc}(R\text{-Mod}, R\text{-Mod})$ a $[\mathcal{H}]_{\preceq}$ dada como $F \mapsto \mathbf{R}^F$ y además existe una equivalencia entre las categorías $Func_{coc}(R\text{-Mod}, R\text{-Mod})$ y R-BiMod (ver Teorema B.11); por consiguiente para cada funtor covariante continuo F podemos estudiar la relación $\mathbf{R}^{L\otimes_R -}$ en vez de la relación $\mathbf{R}^F$, ya que para F existe $L \in R$-BiMod tal que $F \cong L \otimes_R \_$ (ver Teorema B.5) y esto implica que $\mathrm{Hom}_R(F(\_), \_) \cong \mathrm{Hom}_R(L \otimes_R \_, \_)$ y de esta forma $\mathbf{R}^F = \mathbf{R}^{L\otimes_R -}$ (ver Proposición 3.23).

Notación 3.53. *Por el Teorema B.10, cada par adjunto $\langle F, G\rangle : R\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}$ se puede describir como $F \cong L\otimes_R \_$ y $G \cong \mathrm{Hom}_R(L, \_)$ para alguna $L \in R$-BiMod, que es única salvo isomorfismo, de esta forma denotaremos:*

$$\mathbf{R}_{[L]} := \mathbf{R}^F = \mathbf{R}_G.$$

La relación $\mathbf{R}_{[L]}$ es independiente del representante como se demuestra a continuación.

Proposición 3.54. *Sea $\langle F, G\rangle : R\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}$ un par adjunto. Sean $L, K \in R$-BiMod tales que $F \cong L \otimes_R \_$, $F \cong K \otimes_R \_$, $G \cong \mathrm{Hom}_R(L, \_)$ y $G \cong \mathrm{Hom}_R(K, \_)$. Entonces $\mathbf{R}_{[L]} = \mathbf{R}_{[K]}$.*

Demostración. $\subseteq$) Sea $(M, N) \in \mathbf{R}_{[L]}$, entonces $\mathrm{Hom}_R(L \otimes_R M, N) = 0$. Por hipótesis $L \otimes_R M \cong K \otimes_R M$, esto implica que $\mathrm{Hom}_R(K \otimes_R M, N) = \mathrm{Hom}_R(K \otimes_R M, N) = 0$. Por lo tanto $(M, N) \in \mathbf{R}_{[K]}$.

$\supseteq$) Se demuestra de forma similar. $\square$

A continuación demostramos propiedades de las relaciones bicerradas inducidas por pares adjuntos (o por R-bimódulos), así pues definimos una relación $\preceq$ en la clase de todos los R-bimódulos, la cual será útil para describir mejor a las relaciones bicerradas inducidas por bimódulos.

Recordemos que dados $L, K \in R$-Mod, decimos que L *genera* a K si existe un epimorfismo $L^{(X)} \longrightarrow K$, con X un conjunto, en este caso L genera a K como R-módulo izquierdo. Por lo tanto si L y K son dos R-bimódulos tales que L genera a K, entonces L genera a K como R-bimódulos, es decir, el epimorfismo $L^{(X)} \longrightarrow K$ es un morfismo de R-bimódulos (o de forma equivalente, un morfismo de $R \otimes_{\mathbb{Z}} R^{op}$-módulos izquierdos, ver Observación 3.5 y Proposición 3.6).

Proposición 3.55.

1. *Para cada familia $\{L_i\}_{i\in X} \subseteq R$-BiMod, $\mathbf{R}_{[\bigoplus_{i\in X} L_i]} = \bigcap_{i\in X} \mathbf{R}_{[L_i]}$.*
2. *Para cada $L \in R$-BiMod, $\mathbf{R}_{[L^{(X)}]} = \mathbf{R}_{[L]}$.*

3. Sean $L, K \in R$-BiMod. Si L genera a K (como R-bimódulos), entonces $\mathbf{R}_{[L]} \subseteq \mathbf{R}_{[K]}$.

Demostración.

1. Sea $\{L_i\}_{i \in X} \subseteq R$-BiMod. Sea $F_i \cong L_i \otimes_R \_$ para toda $i \in X$, entonces $\bigoplus_{i \in X} F_i \cong \bigoplus_{i \in X} L_i \otimes_R \_$, luego por la Proposición 3.40 tenemos las siguientes igualdades

$$\mathbf{R}_{[\bigoplus_{i \in X} L_i]} = \mathbf{R}^{\bigoplus_{i \in X} F_i} = \bigcap_{i \in X} \mathbf{R}^{F_i} = \bigcap_{i \in X} \mathbf{R}_{[L_i]}.$$

2. Por 1, $\mathbf{R}_{[L^{(X)}]} = \bigcap \mathbf{R}_{[L]} = \mathbf{R}_{[L]}$.

3. Si L genera a K, entonces existe un epimorfismo $L^{(X)} \longrightarrow K$. Entonces, para cada $M \in R$-Mod, $L^{(X)} \otimes_R M \longrightarrow K \otimes_R M$ es un epimorfismo y por lo tanto

$$\mathrm{Hom}_R(K \otimes_R M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(L^{(X)} \otimes_R M, N)$$

es un monomorfismo para toda $N \in R$-Mod, se sigue que $\mathrm{Hom}_R(L^{(X)} \otimes_R M, N) = 0$ implica que $\mathrm{Hom}_R(K \otimes_R M, N) = 0$. Concluimos que $\mathbf{R}_{[L]} = \mathbf{R}_{[L^{(X)}]} \subseteq \mathbf{R}_{[K]}$.

□

Corolario 3.56. *Sean $I, J \leq R$ ideales tales que $I \subseteq J$, entonces $\mathbf{R}_{[R/I]} \subseteq \mathbf{R}_{[R/J]}$.*

Dado que para todo $M \in R$-Mod, $M \cong R \otimes_R M$, tenemos que $\mathcal{H} = \mathbf{R}_{[R]}$, por consiguiente en la siguiente proposición mostramos como se relacionan $\mathcal{H}$ y $\mathbf{R}_{[L]}$, donde L es un R-bimódulo.

Proposición 3.57. *Sea $L \in R$-BiMod, entonces $\mathcal{H} \subseteq \mathbf{R}_{[L]}$.*

Demostración. Para todo $L \in R$-BiMod tenemos que existe un epimorfismo $R^{(X)} \longrightarrow L$ para algún conjunto X, esto implica por la Proposición 3.55 que $\mathcal{H} = \mathbf{R}_{[R]} = \mathbf{R}_{[R^{(X)}]} \subseteq \mathbf{R}_{[L]}$. □

En el capítulo 4, sección 4.2 damos un ejemplo de un anillo donde se cumple que si $\mathbf{R}$ es una relación bicerrada tal que $\mathcal{H} \subseteq \mathbf{R}$, entonces $\mathbf{R}$ es inducida por un par adjunto.

Por la Proposición 3.55-3 tenemos que si L genera a K, entonces $\mathbf{R}_{[L]} \subseteq \mathbf{R}_{[K]}$ y si K genera a L, entonces $\mathbf{R}_{[K]} \subseteq \mathbf{R}_{[L]}$, esto implica que si L y K se generan uno al otro, entonces $\mathbf{R}_{[L]} = \mathbf{R}_{[K]}$.

Notación 3.58. *Para $L \in R$-BiMod denotamos por $[L]_\sim$ a la clase de equivalencia de L y por R-BiMod$/\sim$ al conglomerado de todas las clases de equivalencia, de esta forma tenemos un orden parcial definido como $[L]_\sim \preceq [K]_\sim$ si y sólo si L genera a K.*

La siguiente proposición es importante para tener una mejor descripción de las relaciones bicerradas inducidas por pares adjuntos y nos da una ubicación de estas relaciones. Denotaremos $[\mathcal{H}, (R\text{-Mod})^2] := \{\mathbf{R} \in [\mathcal{H}]_\preceq \mid \mathcal{H} \subseteq \mathbf{R}\}$.

Proposición 3.59. *Existe un morfismo de orden* $\Psi : R\text{-BiMod}/\sim \longrightarrow [\mathcal{H}]_{\preceq}$ *definido como* $\Psi([L]_\sim) = \mathbf{R}_{[L]}$. *Además* $Im(\Psi) \subseteq [\mathcal{H}, (R\text{-Mod})^2]$.

Demostración. Por la Proposición 3.55-3 tenemos que si L genera a K entonces $\mathbf{R}_{[L]} \subseteq \mathbf{R}_{[K]}$, luego si $K \in [L]_\sim$, entonces $K \sim L$ y $\mathbf{R}_{[L]} = \mathbf{R}_{[K]}$ pues por la Proposición 3.54 esta asignación es independiente del representante. Por lo tanto la asignación $\Psi([L]_\sim) = \mathbf{R}_{[L]}$ está bien definida.

Sean $L, K \in R\text{-BiMod}/\sim$ tales que $[L]_\sim \preceq [K]_\sim$, entonces por definición del orden parcial $\preceq$ en $R\text{-BiMod}/\sim$ tenemos que L genera K y por la Proposición 3.55-3 $\Psi([L]_\sim) = \mathbf{R}_{[L]} \subseteq \mathbf{R}_{[K]} = \Psi([K]_\sim)$. Por lo tanto Ψ preserva el orden.

Por la Proposición 3.57 tenemos que para toda $L \in R\text{-BiMod}$, $\mathcal{H} \subseteq \mathbf{R}_{[L]}$ y esto implica que $\mathcal{H} \subseteq \mathbf{R}_{[L]} = \Psi([L]_\sim)$ para toda $[L]_\sim \in R\text{-BiMod}/\sim$. Concluimos que $Im(\Psi) \subseteq [\mathcal{H}, (R\text{-Mod})^2]$. □

Observación 3.60. *En el Teorema B.11 tenemos una equivalencia entre las categorías* R-BiMod *y* $Func_{coc}(R\text{-Mod}, R\text{-Mod})$*, luego podemos definir un relación* $\sim$ *en* $Func_{coc}(R\text{-Mod}, R\text{-Mod})$ *dada como* $F \sim F'$ *si y sólo si* $\mathbf{R}^F = \mathbf{R}^{F'}$ *y de esta forma tenemos una asignación de* $Func_{coc}(R\text{-Mod}, R\text{-Mod})/\sim$ *a* $[\mathcal{H}]_{\preceq}$ *como se ve en el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
R\text{-BiMod}/\sim \arrow[rr, "\Psi"] \arrow[dr, "\cong"'] & & {[\mathcal{H}]_{\preceq}} \\
& Func_{coc}(R\text{-Mod}, R\text{-Mod})/\sim \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Ψ no necesariamente es inyectiva, como lo mostramos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.61. *Sean* $R = \mathbb{Z}$ *y* $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$*, donde* $\mathbb{T}$ *es la clase de todos los grupos abelianos divisibles y* $\mathbb{F}$ *es la clase de los grupos abelianos reducidos. Luego* $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ *es una teoría de torsión que no es hereditaria, pues* $\mathbb{Q} \in \mathbb{T}$*, pero* $\mathbb{Z}$ *es un submódulo de* $\mathbb{Q}$ *que no es divisible, es decir,* $\mathbb{T}$ *es una clase de torsión que no es cerrada bajo monomorfismos, lo cual implica que* $\mathbb{F}$ *es una clase libre de torsión que no es cerrada bajo cápsulas inyectivas.*

Por lo tanto $\mathbb{T} \notin (f)_\hbar$*-cerr y* $\mathbb{F} \notin$ *cerr-*$(f)_\hbar$*, esto implica que* $(f)_\hbar$*-cerr* $\neq (f)_{\mathcal{H}}$*-cerr y cerr-*$(f)_\hbar \neq$ *cerr-*$(f)_{\mathcal{H}}$*. Se sigue por el Teorema de Polaridades que* $(f)_\hbar \neq (f)_{\mathcal{H}}$ *y* $\hbar \neq \mathcal{H}$*, es decir, la contención* $\hbar \subset \mathcal{H}$ *es estricta. Se concluye por las Proposiciones 3.57 y 3.59 que* $\hbar \notin Im(\Psi)$*, es decir, en este caso* Ψ *no es suprayectiva.*

El siguiente teorema es muy importante para describir la conexión de Galois correspondiente a la relación bicerrada $\mathbf{R}_{[L]}$ con $L \in R$-BiMod; nos sirve para calcular $(f)_{\mathbf{R}_{[L]}}$-*cerr* y *cerr*-$(f)_{\mathbf{R}_{[L]}}$, para tener una mejor descripción de las $\mathbf{R}_{[L]}$-teorías de torsión; además en él se relacionan resultados para funtores covariantes continuos y cocontinuos obtenidos en las secciones 3.2 y 3.3.

De aquí en adelante $\langle F, G \rangle : R\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}$ denotará un par adjunto, L denotará al R-bimódulo que lo representa y $\mathbf{R}_{[L]}$ la relación bicerrada inducida.

Teorema 3.62. *Sean $\langle F, G\rangle$ y $\mathbf{R}_{[L]} \in [\mathcal{H}]_{\preceq}$. Entonces*

$$f^{\mathbf{R}_{[L]}} = f^{\mathcal{H}} \overrightarrow{G} = \overleftarrow{F} f^{\mathcal{H}}$$

$$f_{\mathbf{R}_{[L]}} = f_{\mathcal{H}} \overrightarrow{F} = \overleftarrow{G} f_{\mathcal{H}}$$

Demostración. Sea $\langle F, G\rangle$, luego $\mathbf{R}^F = \mathbf{R}_G$ lo que implica por el Teorema de Polaridades que $(f)_{\mathbf{R}^F} = (f)_{\mathbf{R}_G}$ y combinando las igualdades de las Proposiciones 3.31 y 3.42 tenemos

$$f^{\mathbf{R}_{[L]}} = f^{\mathcal{H}} \overrightarrow{G} = \overleftarrow{F} f^{\mathcal{H}}$$
$$f_{\mathbf{R}_{[L]}} = f_{\mathcal{H}} \overrightarrow{F} = \overleftarrow{G} f_{\mathcal{H}}$$

□

La factorización de $f^{\mathbf{R}_{[L]}}$ y $f_{\mathbf{R}_{[L]}}$ del teorema anterior puede verse en los siguientes diagramas comutativos.

$$\begin{tikzcd}
 & \wp(R\text{-Mod}) \arrow[d, "\overleftarrow{G}"] \\
\wp(R\text{-Mod}) \arrow[ur, "f_{\mathcal{H}}"] \arrow[r, "f_{\mathbf{R}_{[L]}}"] \arrow[d, "\overrightarrow{F}"] & \wp(R\text{-Mod}) \\
\wp(R\text{-Mod}) \arrow[ur, "f_{\mathcal{H}}"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\wp(R\text{-Mod}) \arrow[d, "\overleftarrow{F}"] & \\
\wp(R\text{-Mod}) & \wp(R\text{-Mod}) \arrow[ul, "f^{\mathcal{H}}"'] \arrow[l, "f^{\mathbf{R}_{[L]}}"'] \arrow[d, "\overrightarrow{G}"] \\
 & \wp(R\text{-Mod}) \arrow[ul, "f^{\mathcal{H}}"]
\end{tikzcd}$$

Estas igualdades van a ser muy importantes pues nos van a ayudar a determinar los cerrados de la conexión de Galois inducida por el par adjunto $\langle F, G\rangle$. Usando el teorema anterior tenemos una descripción más clara y sencilla de $(f)_{\mathbf{R}_{[L]}}$-*cerr* y *cerr*-$(f)_{\mathbf{R}_{[L]}}$.

En el caso de un par adjunto podemos usar las Proposiciones 3.31, 3.42 y el Teorema 3.62 para calcular de los cerrados de la conexión de Galois correspondiente.

Proposición 3.63. *Sean $\langle F, G\rangle$ y $\mathbf{R}_{[L]}$ su relación bicerrada correspondiente. Entonces:*

1. $(f)_{\mathbf{R}_{[L]}}$-*cerr* $= \{\overleftarrow{F}(\mathbb{T}_\sigma) \mid \sigma \in R\text{-radidem}\}$.

2. *cerr*-$(f)_{\mathbf{R}_{[L]}} = \{\overleftarrow{G}(\mathbb{F}_\sigma) \mid \sigma \in R\text{-radidem}\}$.

□

Usando la proposición anterior para cada $L \in R$-Bimod podemos describir la clase de todas $\mathbf{R}_{[L]}$-teorías de torsión como (ver Observación 2.58):

$$\{(\overleftarrow{F}(\mathbb{T}_\tau), \mathbb{F}_\tau) \mid \tau \in [[0, \tau_{\mathbf{R}_{[L]}}]]\} = \{(\mathbb{T}_\sigma, \overleftarrow{G}(\mathbb{F}_\sigma)) \mid \sigma \in [[\sigma_{\mathbf{R}_{[L]}}, 1]]\}$$

Como $\overleftarrow{F}$ y $\overleftarrow{G}$ preservan orden, siempre tenemos las dos $\mathbf{R}_{[L]}$-teorías de torsión

$$(\overleftarrow{F}(\{0\}), R\text{-Mod}) \text{ y } (R\text{-Mod}, \overleftarrow{G}(\{0\})).$$

Además tenemos tres formas de describir a las clases de R-módulos $\overleftarrow{F}(\{0\})$ y $\overleftarrow{G}(\{0\})$ usando prerradiciales. Para esto tenemos la siguiente definición.

Definición 3.64. *Sea $L \in R$-BiMod y $M \in R$-Mod. Definimos el* ***anulador*** *en M de L como*

$$Ann_L(M) = \{m \in M \mid l \otimes m = 0, \forall\, l \in L\}.$$

Proposición 3.65. [36] *Sea $L \in R$-BiMod, entonces $Ann_L(\_)$ es un prerradical.* □

Observación 3.66. *$Ann_L(M) = M$ si y sólo si $L \otimes_R M = 0$. Por lo tanto*

$$\mathbb{T}_{Ann_L} = \{M \in R\text{-Mod} \mid Ann_L(M) = M\} = \{M \in R\text{-Mod} \mid L \otimes_R M = 0\}.$$

Para cada $\mathbf{R} \in [\mathcal{H}]_{\preceq}$ es importante tener una descripción de las clases de R-módulos $\bigcap(f)_{\mathbf{R}}$-*cerr* y $\bigcap$*cerr*-$(f)_{\mathbf{R}}$ pues son las que nos determinan donde empiezan y donde terminan los subintervalos de prerradicales $[[\sigma_{\mathbf{R}}, 1]]$, $[[0, \tau_{\mathbf{R}}]]$ y los dos subintervalos de clases de R-módulos donde están los cerrados $(f)_{\mathbf{R}}$.

Proposición 3.67. *Sean $\langle F, G\rangle$ y $\mathbf{R}_{[L]} \in [\mathcal{H}]_{\preceq}$. Las siguientes clases de R-módulos son iguales:*

1. $\bigcap(f)_{\mathbf{R}_{[L]}}$-*cerr*.
2. $\overleftarrow{F}(\{0\})$.
3. $\{M \in R\text{-Mod} \mid \mathrm{Hom}_R(M, N) = 0,\ \forall N \in \overrightarrow{G}(R\text{-Mod})\}$.
4. $\mathbb{T}_{Ann_L}$.

Demostración. **1=2)** Se demostró en la Proposición 3.39.

2=3) Tenemos que

$$f^{\mathbf{R}_{[L]}}(R\text{-Mod}) = f^{\mathcal{H}}(\overrightarrow{G}(R\text{-Mod})) = \overleftarrow{F}(f^{\mathcal{H}}(R\text{-Mod})) = \overleftarrow{F}(\{0\}).$$

2=4) Por hipótesis $F \cong L \otimes_R \_$ con $L \in R$-BiMod, entonces

$$\begin{aligned}\overleftarrow{F}(\{0\}) &= \{M \in R\text{-Mod} \mid F(M) = 0\}\\ &= \{M \in R\text{-Mod} \mid L \otimes_R M = 0\}\\ &= \{M \in R\text{-Mod} \mid Ann_L(M) = M\}\\ &= \mathbb{T}_{Ann_L}\end{aligned}$$

□

Proposición 3.68. *Sea $\langle F,G\rangle$ y $\mathbf{R}_{[L]}\in[\mathcal{H}]_{\preceq}$. Las siguientes clases R-módulos son iguales:*

1. $\bigcap cerr\text{-}(f)_{\mathbf{R}_{[L]}}$.
2. $\overleftarrow{G}(\{0\})$.
3. $\{N\in R\text{-Mod}\mid \mathrm{Hom}_R(M,N)=0\ \forall M\in \overrightarrow{F}(R\text{-Mod})\}$.
4. $\mathbb{F}_{\alpha_L^L}$
5. $f_{\mathcal{H}}(\{L\})$

Demostración. **1=2)** Se demostró en la Proposición 3.49.

2=3) Tenemos que

$$f_{\mathbf{R}_{[L]}}(R\text{-Mod})=f_{\mathcal{H}}(\overrightarrow{F}(R\text{-Mod}))=\overleftarrow{G}(f_{\mathcal{H}}(R\text{-Mod}))=\overleftarrow{G}(\{0\}).$$

2=4). Por hipótesis $G\cong \mathrm{Hom}_R(L,\_)$ con $L\in R$-BiMod, entonces

$$\begin{aligned}\overleftarrow{G}(\{0\})&=\{N\in R\text{-Mod}\mid G(N)=0\}\\&=\{N\in R\text{-Mod}\mid \mathrm{Hom}_R(L,N)=0\}\\&=\mathbb{F}_{\alpha_L^L}\end{aligned}$$

4=5) Tenemos que $f_{\mathcal{H}}(\{L\})=\{N\in R\text{-Mod}\mid \mathrm{Hom}_R(L,N)=0\}=\mathbb{F}_{\alpha_L^L}$. □

Observación 3.69. *Por la Proposición 3.63 y la proposición anterior, para $\langle F,G\rangle$ tenemos:*

1. $\overleftarrow{F}(\mathbb{T}_\sigma)=\{M\in R\text{-Mod}\mid L\otimes_R M\in\mathbb{T}_\sigma\}=\{M\in R\text{-Mod}\mid \sigma(L\otimes_R M)=L\otimes_R M\}$.
2. $\overleftarrow{G}(\mathbb{F}_\tau)=\{N\in R\text{-Mod}\mid \mathrm{Hom}_R(L,N)\in\mathbb{F}_\tau\}=\{N\in R\text{-Mod}\mid \tau\alpha_L^L(N)=0\}$.

Como resultado de las Proposiciones 3.35 y 3.45 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.70. *Sea $\langle F,G\rangle$. Entonces:*

1. *Si $\mathbb{T}\in\wp(\overrightarrow{F}(R\text{-Mod}))$, entonces $\mathbb{F}\in cerr\text{-}(f)_{\mathbf{R}_{[L]}}$, donde $(\mathbb{T},\mathbb{F})$ es una teoría de torsión.*
2. *Si $\mathbb{F}\in\wp(\overrightarrow{G}(R\text{-Mod}))$, entonces $\mathbb{F}\in(f)_{\mathbf{R}_{[L]}}\text{-}cerr$, donde $(\mathbb{T},\mathbb{F})$ es una teoría de torsión.*

El siguiente corolario es una consecuencia de las Proposiciones 3.38 y 3.48.

Corolario 3.71. *Sea $\langle F,G\rangle$ tal que $\overrightarrow{F}(R\text{-Mod})$ es clase de torsión y $\overrightarrow{G}(R\text{-Mod})$ es clase libre de torsión. Entonces*

1. $\overrightarrow{F}(R\text{-Mod})=\mathbb{T}_{\tau_{\mathbf{R}_{[L]}}}$ *y* $\overrightarrow{G}(R\text{-Mod})=\mathbb{F}_{\sigma_{\mathbf{R}_{[L]}}}$.

2. $[[\sigma_{\mathbf{R}_{[L]}},1]] = [\sigma_{\mathbf{R}_{[L]}},1] \cap R\text{-radidem}$ *y* $[[0,\tau_{\mathbf{R}_{[L]}}]] = [0,\tau_{\mathbf{R}_{[L]}}] \cap R\text{-radidem}$*, es decir, los dos intervalos se llenan.*

3. $\langle [\sigma_{\mathbf{R}_{[L]}},1] \cap R\text{-radidem}, \preccurlyeq \rangle \cong \langle [0,\tau_{\mathbf{R}_{[L]}}] \cap R\text{-radidem}, \preccurlyeq \rangle.$ □

Recordemos que cada relación bicerrada $\mathbf{R} \in [\mathcal{H}]_{\preceq}$ induce una conexión de Galois isótona sobre R-radidem (ver Proposición 2.53). Luego en el caso de un par adjunto tenemos una descripción de esta conexión de Galois.

Observación 3.72. *Usando las Proposiciones 2.54, 3.37, y 3.47, para cada* $L \in R\text{-BiMod}$ *podemos describir a* $\langle \lambda_{\mathbf{R}_{[L]}}, \mu_{\mathbf{R}_{[L]}} \rangle \in Gal_i(R\text{-radidem}, R\text{-radidem})$ *como*

$$\lambda_{\mathbf{R}_{[L]}}(\sigma) = \overline{\bigvee_{M \in \overrightarrow{F}(\mathbb{T}_\sigma)} \alpha_M^M} = \bigwedge_{N \in \overleftarrow{G}(\mathbb{F}_\sigma)} \omega_0^N \quad y \quad \mu_{\mathbf{R}_{[L]}}(\tau) = \widehat{\bigwedge_{N \in \overrightarrow{G}(\mathbb{F}_\tau)} \omega_0^N} = \bigvee_{M \in \overleftarrow{F}(\mathbb{T}_\tau)} \alpha_M^M.$$

donde $F \cong L \otimes_R \_$ *y* $G \cong \mathrm{Hom}_R(L, \_)$*. Además*

$$\overleftarrow{F}(\mathbb{T}_\tau) = \mathbb{T}_{\mu_{\mathbf{R}_{[L]}}(\tau)},\ \tau \in R\text{-radidem} \quad y \quad \overleftarrow{G}(\mathbb{F}_\sigma) = \mathbb{F}_{\lambda_{\mathbf{R}_{[L]}}(\sigma)},\ \sigma \in R\text{-radidem}.$$

y las $\mathbf{R}_{[L]}$*-teorías de torsión son (ver Observación 2.58):*

$$(\mathbb{T}_\sigma, \overleftarrow{G}(\mathbb{F}_\sigma)) = (\overleftarrow{F}(\mathbb{T}_{\lambda_{\mathbf{R}_{[L]}}(\sigma)}), \mathbb{F}_{\lambda_{\mathbf{R}_{[L]}}(\sigma)}) \quad \sigma \in [[\sigma_{\mathbf{R}}, 1]]$$

$$(\overleftarrow{G}(\mathbb{T}_\tau), \mathbb{F}_\tau) = (\mathbb{T}_{\mu_{\mathbf{R}_{[L]}}(\tau)}, \overleftarrow{G}(\mathbb{F}_{\mu_{\mathbf{R}_{[L]}}(\tau)})), \quad \tau \in [[0, \tau_{\mathbf{R}}]].$$

3.5. Relaciones inducidas por un ideal puro

En esta sección tomaremos como ejemplo de par adjunto a $\langle I \otimes_R \_, \mathrm{Hom}_R(I, \_) \rangle$ donde el R-bimódulo es I, un ideal de R. Principalmente nos enfocaremos en estudiar cuando I es un ideal puro, pues esta condición simplifica los cálculos para determinar $(f)_{\mathbf{R}_{[I]}}$-*cerr* y *cerr*-$(f)_{\mathbf{R}_{[I]}}$. Para lograr esto vamos a usar un isomorfismo natural entre un prerradical σ y el funtor $I \otimes_R \_$. Para un ideal I de R y su relación correspondiente $\mathbf{R}_{[I]}$ tenemos por el Teorema 3.62 y la Proposición 3.63:

1. $f^{\mathbf{R}_{[I]}} = f^{\mathcal{H}} \circ \overrightarrow{\mathrm{Hom}_R(I, \_)} = \overleftarrow{I \otimes_R \_} \circ f^{\mathcal{H}}$.
2. $f_{\mathbf{R}_{[I]}} = f_{\mathcal{H}} \circ \overrightarrow{I \otimes_R \_} = \overleftarrow{\mathrm{Hom}_R(I, \_)} \circ f_{\mathcal{H}}$.
3. $(f)_{\mathbf{R}_{[I]}}$-*cerr* $= \{\{M \in R\text{-Mod} \mid I \otimes_R M \in \mathbb{T}_\sigma\} \mid \sigma \in R\textit{-radidem}\}$.
4. *cerr*-$(f)_{\mathbf{R}_{[I]}} = \{\{N \in R\text{-Mod} \mid \mathrm{Hom}_R(I, N) \in \mathbb{F}_\tau\} \mid \tau \in R\textit{-radidem}\}$.

Para cualquier ideal I de R, estas clases de R-módulos $\{M \in R\text{-Mod} \mid I \otimes_R M \in \mathbb{T}_\sigma\}$ y $\{N \in R\text{-Mod} \mid \mathrm{Hom}_R(I, N) \in \mathbb{F}_\tau\}$ son difíciles de describir; sin embargo, si al funtor $I \otimes_R \_$ lo podemos describir como un prerradical, es decir, que exista $\sigma \in R$-pr tal que $I \otimes_R \_ \cong \sigma$, entonces esta descripción se simplifica bastante. Para ver al funtor $I \otimes_R \_$ en términos de un prerradical, este debe preservar monomorfismos, es decir, ser exacto. Recordemos que si $\sigma \in R$-lep, entonces $\sigma = \alpha_I^R$ con $I \leq R$ un ideal puro (ver Proposición 1.92), luego por la Proposición 1.94 tenemos que $I \otimes_R \_ \cong \alpha_I^R$. Usaremos este hecho para estudiar la relación $\mathbf{R}_{[I]}$ usando el prerradical α_I^R, es decir,

$$\mathbf{R}_{[I]} = \{(M, N) \in R\text{-Mod} \mid \mathrm{Hom}_R(\alpha_I^R(M), N) = 0\}.$$

en este caso tenemos las igualdades $f^{\mathbf{R}_{[I]}} = \overleftarrow{\alpha_I^R}\, f^{\mathcal{H}}$ y $f_{\mathbf{R}_{[I]}} = f_{\mathcal{H}}\, \overrightarrow{\alpha_I^R}$. Primero vamos a calcular a los ínfimos de las familias de Moore $(f)_{\mathbf{R}_{[I]}}$-*cerr* y *cerr*-$(f)_{\mathbf{R}_{[I]}}$.

Proposición 3.73. *Sea $I \leq R$ un ideal puro, entonces:*

1. $\mathbb{T}_{t(\alpha_I^R)} = \bigcap (f)_{\mathbf{R}_{[I]}}$-*cerr*.
2. $\mathbb{F}_{\alpha_I^R} = \bigcap$ *cerr*-$(f)_{\mathbf{R}_{[I]}}$.
3. $\mathbb{T}_{t(\alpha_I^R)} = \mathbb{F}_{\alpha_I^R}$.

Demostración.

1. Recordemos que $f^{\mathbf{R}_{[I]}}(R\text{-Mod}) = \bigcap (f)_{\mathbf{R}_{[I]}}$-*cerr* y $t(\alpha_I^R)(M) = M$ si y sólo si $IM = 0$.

   $\subseteq$) Sea $M \in \mathbb{T}_{t(\alpha_I^R)}$, se sigue que $\mathrm{Hom}_R(\alpha_I^R(M), N) = \mathrm{Hom}_R(IM, N) = \mathrm{Hom}_R(0, N) = 0$ para toda $N \in R$-Mod. Por lo tanto $M \in \bigcap (f)_{\mathbf{R}_{[I]}}$-*cerr* y $\mathbb{T}_{t(\alpha_I^R)} \subseteq \bigcap (f)_{\mathbf{R}_{[I]}}$-*cerr*.

   $\supseteq$) Sea $M \in \bigcap (f)_{\mathbf{R}_{[I]}}$-*cerr*, luego $\mathrm{Hom}_R(\alpha_I^R(M), N) = 0$ para toda $N \in R$-Mod, por lo tanto $\mathrm{Hom}_R(\alpha_I^R(M), M) = 0$, esto implica que $IM = 0$ lo que es equivalente a que $t(\alpha_I^R)(M) = M$. Por lo tanto $M \in \mathbb{T}_{t(\alpha_I^R)}$, luego $f^{\mathbf{R}_{[I]}}(R\text{-Mod}) \subseteq \mathbb{T}_{t(\alpha_I^R)}$.

   Por lo tanto, por el Corolario 1.69, $t(\alpha_I^R)$ es un radical idempotente lo que implica que $\mathbb{T}_{t(\alpha_I^R)} = \bigcap (f)_{\mathbf{R}_{[I]}}$-*cerr*.

2. Recordemos que $f_{\mathbf{R}_{[I]}}(R\text{-Mod}) = \bigcap$ *cerr*-$(f)_{\mathbf{R}_{[I]}}$ y $\alpha_I^R(N) = IN = 0$ si y sólo si $t(\alpha_I^R)(N) = N$.

   $\subseteq$) Sean $N \in \mathbb{F}_{\alpha_I^R}$, $M \in R$-Mod y $f \in \mathrm{Hom}_R(IM, N)$. Sea $m \in IM$, luego $m = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i m_i$ con $m_i \in M$ y $r_i \in I$, por lo tanto $f(m) = f(\sum\limits_{i=1}^{n} r_i m_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i f(m_i) = 0$, pues $IN = 0$. Concluimos que $\mathrm{Hom}_R(IM, N) = 0$, luego $N \in f_{\mathbf{R}_{[I]}}(R\text{-Mod})$.

   $\supseteq$) Sea $N \in f_{\mathbf{R}_{[I]}}(R\text{-Mod})$, luego $\mathrm{Hom}_R(IM, N) = 0$ para toda $M \in R$-Mod, por lo tanto $\mathrm{Hom}_R(IN, N) = 0$, se sigue que $IN = 0$. Concluimos que $N \in \mathbb{F}_{\alpha_I^R}$, luego $f_{\mathbf{R}_{[I]}}(R\text{-Mod}) \subseteq \mathbb{F}_{\alpha_I^R}$.

   Por lo tanto $\mathbb{F}_{\alpha_I^R} = \bigcap (f)_{\mathbf{R}_{[I]}}$-*cerr*.

3. De las Proposiciones 3.67 y 3.68 tenemos que $\overleftarrow{\alpha_I^R}(\{0\}) = \{M \in R\text{-Mod} \mid \alpha_I^R(M) = 0\} = \mathbb{T}_{t(\alpha_I^R)}$ y $\{N \in R\text{-Mod} \mid \mathrm{Hom}_R(I, N) = 0\} = \mathbb{F}_{\alpha_I^I} = \mathbb{F}_{\overline{\alpha_I^I}}$. Como I es un ideal puro, entonces α_I^R y $t(\alpha_I^R)$ son radicales idempotentes (ver Corolario 1.69), esto implica por 2 que $\overline{\alpha_I^I} = \alpha_I^R$.

   Por lo tanto $\mathbb{F}_{\overline{\alpha_I^I}} = \mathbb{F}_{\alpha_I^R}$, lo que implica por 1 y 2, que $t(\alpha_I^R)(M) = M$ si y sólo si $\alpha_I^R(M) = 0$, es decir, $\mathbb{T}_{t(\alpha_I^R)} = \mathbb{F}_{\alpha_I^R}$.

□

Nótese que $\overline{\alpha_I^I} = \alpha_I^R$ cuando I es idempotente.

En [36], Capítulo IV, Proposiciones 2.1 y 2.2 se demuestra que si $\mathbb{T}$ es una clase de torsión, entonces existe una clase libre de torsión $\mathbb{F}$ tal que $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ es una teoría de torsión. También se demuestra que toda clase libre de torsión $\mathbb{F}$ es parte de una teoría de torsión.

Observación 3.74. *De la Proposición 3.73 tenemos que si I es un ideal puro de R, entonces $\mathbb{T}_{t(\alpha_I^R)} = \mathbb{F}_{\alpha_I^R}$, esto significa que existen clases de R-módulos $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Z}$ tales que $(\mathcal{X}, \mathbb{F}_{\alpha_I^R})$ y $(\mathbb{T}_{t(\alpha_I^R)}, \mathcal{Z})$ son teorías de torsión.*

Uno de los conceptos importantes relacionados con la teoría de torsión es el de *teoría de torsión y libre de torsión* (llamada terna TTF) introducida por J.P. Jans en [21]. Consiste en una terna $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ de clases de una categoría abeliana tal que ambos pares $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ y $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ son teorías de torsión. En este caso se dice que $\mathcal{Y}$ és una clase TTF. Cuando la categoría abeliana es R-Mod entonces tenemos el siguiente resultado de J.P. Jans:

Teorema 3.75. ([21], Corolario 2.2.) *Las ternas TTF en* R-Mod *están en biyección con los ideales bilaterales idempotentes de R. La asignación está dada como:*

$$I \mapsto \{N \in R\text{-Mod} \mid IN = 0\} = \mathbb{F}_{\alpha_I^R}.$$

Observación 3.76. *De la Proposición 3.73 tenemos que para cada ideal puro I de R, $\mathbb{T}_{t(\alpha_I^R)} = \mathbb{F}_{\alpha_I^R}$ es una clase TTF.*

Del Teorema 3.75 y la Proposición 3.73 tenemos que si I es un ideal idempotente de R (que no necesariamente es puro), entonces tenemos la clase TTF, $\mathbb{T}_{t(\alpha_I^R)} = \mathbb{F}_{\alpha_I^R}$, pero ser idempotente no es suficiente para que el funtor covariante $\alpha_I^R \cong I \otimes_R \_$ sea continuo (exacto derecho y que preserve coproductos), por consiguiente hemos pedido que el ideal sea puro.

Proposición 3.77. *Sea $I \leq R$ ideal puro, entonces $\overrightarrow{\alpha_I^R}(R\text{-Mod})$ es clase de torsión.*

Demostración. Por hipótesis I es puro, lo que implica por la Proposiciones 1.56 y 1.90 que α_I^R es radical exacto izquierdo, así pues $\overrightarrow{\alpha_I^R}(R\text{-Mod}) = \{\alpha_I^R(M) \mid M \in R\text{-Mod}\} = \mathbb{T}_{\alpha_I^R}$ es una clase de torsión que además es hereditaria. □

Corolario 3.78. *Sea $I \leq R$ un ideal puro, entonces* $[[0, \tau_{\mathbf{R}_{[I]}}]] = [0, \alpha_I^R] \cap R\text{-radidem}$.

Demostración. Por hipótesis I es puro y por la Proposición 3.77 tenemos que $\overrightarrow{\alpha_I^R}$ (R-Mod) es una clase de torsión. Por lo tanto por la Proposición 3.38 tenemos la igualdad $[[0, \tau_{\mathbf{R}_{[I]}}]] = [0, \alpha_I^R] \cap R\text{-radidem}$. $\square$

Para un ideal puro I tenemos que $(f)_{\mathbf{R}_{[I]}}$-*cerr* $= \{\overleftarrow{\alpha_I^R}(\mathbb{T}_\sigma) \mid \sigma \in R\text{-}radidem\}$ y

$$\begin{aligned}\overleftarrow{\alpha_I^R}(\mathbb{T}_\sigma) &= \{M \in R\text{-Mod} \mid \alpha_I^R(M) \in \mathbb{T}_\sigma\} \\ &= \{M \in R\text{-Mod} \mid \sigma(IM) = IM\} \\ &= \mathbb{T}_\eta\end{aligned}$$

donde $\eta = \bigvee_{M \in \overleftarrow{\alpha_I^R}(\mathbb{T}_\sigma)} \alpha_M^M$.

En este caso, de la Proposición 3.73 tenemos que $\sigma_{\mathbf{R}_{[I]}} = t(\alpha_I^R)$ y $\tau_{\mathbf{R}_{[I]}} = \alpha_I^R$, y por el Corolario 3.78 tenemos un isomorfismo de orden entre los intervalos $[[\sigma_{\mathbf{R}_{[I]}}, 1]]$ y $[[0, \tau_{\mathbf{R}_{[I]}}] = [0, \alpha_I^R] \cap R\text{-radidem}$. Notemos que si $\mathbf{R} \in [\mathcal{H}]_\preceq$ y uno de los intervalos $[[\sigma_\mathbf{R}, 1]]$ ó $[[0, \tau_\mathbf{R}]]$ se llena, entonces el otro intervalo no necesariamente se llena, como lo veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.79. *Sea R un anillo semisimple artiniano tal que $R = I \oplus J$, con $I, J \leq R$ ideales mínimos, en este caso R-radidem $= \{0, \alpha_I^R, \alpha_J^R, 1\}$ y es una retícula booleana (ver* [29], *Teorema 11). Ahora sea $\mathbb{F}_{\alpha_I^R}$ una clase libre de torsión. Por la Proposición 1.30 tenemos que $f = \langle p_{R\text{-Mod}, \mathbb{F}_{\alpha_I^R}}, p_{\mathbb{F}_{\alpha_I^R}, R\text{-Mod}} \rangle \in Gal(\mathcal{T}\text{-}tors, \mathcal{F}\text{-}tors)$, con f-cerr $= \{\{0\}, R\text{-Mod}\}$ y cerr-f = $\{\mathbb{F}_{\alpha_I^R}, R\text{-Mod}\}$; esto significa que $[[\sigma_{\mathbf{R}_f}, 1]] = \{0, 1\} \neq R$-radidem, es decir, $[[\sigma_{\mathbf{R}_f}, 1]]$ no es un intervalo que se llena porque le faltan los prerradicales α_I^R, α_J^R. Sin embargo, el intervalo* $[[0, \tau_{\mathbf{R}_f}]] = \{0, \alpha_I^R\} = [0, \alpha_I^R] \cap R\text{-radidem}$ *sí se llena.*

Para concluir el estudio de este caso, nos ayudaría saber si $\{\mathrm{Hom}_R(I, N) \mid N \in R\text{-Mod}\}$ es una clase libre torsión (ver Corolario 3.71). Para más detalles ver en sección de preguntas. En el siguiente capítulo estudiaremos a la relación inducida por el R-bimódulo R/I.

Notemos si $\{I_i\}_{i \in X}$ es una familia de ideales puros de R, entonces $\mathbf{R}_{[\bigoplus_{i \in X} I_i]} = \bigcap_{i \in X} \mathbf{R}_{[I_i]}$ (ver Proposición 3.55), es decir, existe una asignación (antítona) de la retícula de todos los ideales puros de R a $[\mathcal{H}]_\preceq$, dada como $I \mapsto \mathbf{R}_{[I]}$; esta asignación se estudiará más a detalle en el capítulo 4 para el caso de un anillo semisimple artiniano.

Capítulo 4

Relaciones bicerradas $\mathrm{R}_{[R/I]}$

Aunque definimos a los bifuntores casi continuos, en este capítulo sólo tomaremos bifuntores continuos, esto porque vamos a seguir usando pares adjuntos y al bifuntor $\mathrm{Hom}_R(\_,\_)$. Queda pendiente estudiar las relaciones inducidas por bifuntores casi continuos que no sean continuos. En este capítulo estudiaremos las relaciones bicerradas inducidas por el R-bimódulo R/I o equivalentemente por el par adjunto $\langle R/I \otimes_R \_, \mathrm{Hom}_R(R/I,\_)\rangle$, donde I es un ideal de R; en este caso los bifuntores continuos asociados al par adjunto son $\mathrm{Hom}_R(R/I \otimes_R \_,\_)$ y $\mathrm{Hom}_R(\_,\mathrm{Hom}_R(R/I,\_))$. Calcularemos los cerrados de las conexiones de Galois correspondiente a $\mathbf{R}_{[R/I]}$ y las $\mathbf{R}_{[R/I]}$-teorías de torsión. Para estudiar de forma más sencilla la conexión de Galois que induce $\mathbf{R}_{[R/I]}$ usaremos los isomorfismos naturales del Lema 1.96:

$$(\alpha_I^R)^* \cong R/I \otimes_R \_ \quad \text{y} \quad t(\alpha_I^R) \cong \mathrm{Hom}_R(R/I,\_).$$

De esta forma estudiamos la relación $\mathbf{R}_{[R/I]}$ inducida por los bifuntores casi continuos $\mathrm{Hom}_R((\alpha_I^R)^*,\_) \cong \mathrm{Hom}_R(\_,t(\alpha_I^R))$. Observemos por el Teorema 1.105 que $(\alpha_I^R)^*$ es exacto derecho y preserva coproductos, $t(\alpha_I^R)$ es exacto izquierdo y preserva productos.

Ahora describiremos $(f)_{\mathbf{R}_{[R/I]}}$-*cerr*, *cerr*-$(f)_{\mathbf{R}_{[R/I]}}$ y las $\mathbf{R}_{[R/I]}$-teorías de torsión.

Proposición 4.1. *Sea $I \leq R$ un ideal. Entonces* $\overrightarrow{(\alpha_I^R)^*}\,(R\text{-Mod}) = \overrightarrow{t(\alpha_I^R)}\,(R\text{-Mod}) = R/I\text{-Mod}$.

Demostración. Sea $M \in R$-Mod, entonces $(\alpha_I^R)^*(M)$, $t(\alpha_I^R)^*(M) \in R/I$-Mod si y sólo si respectivamente $I((\alpha_I^R)^*(M)) = I(M/IM) = 0$ y $It(\alpha_I^R)(M) = 0$.

Por lo tanto $\overrightarrow{(\alpha_I^R)^*}\,(R\text{-Mod}) = \overrightarrow{t(\alpha_I^R)}\,(R\text{-Mod}) = R/I\text{-Mod}$. □

Recordemos que por el Teorema 3.62 que

$$f^{\mathbf{R}_{[R/I]}} = \overleftarrow{(\alpha_I^R)^*}\; f^{\mathcal{H}} = f^{\mathcal{H}}\; \overrightarrow{t(\alpha_I^R)} \quad \text{y} \quad f_{\mathbf{R}_{[R/I]}} = \overleftarrow{t(\alpha_I^R)}\; f_{\mathcal{H}} = f_{\mathcal{H}}\; \overrightarrow{(\alpha_I^R)^*}$$

Para este par adjunto tenemos una descripción más explicita del ínfimo de cada familia de Moore $(f)_{\mathbf{R}_{[R/I]}}$-*cerr* y *cerr*-$(f)_{\mathbf{R}_{[R/I]}}$.

Tenemos para cada ideal I de R que $\overleftarrow{(\alpha_I^R)^*}(\{0\}) = \{M \in R\text{-Mod} \mid (\alpha_I^R)^*(M) = 0\} = \mathbb{T}_{\alpha_I^R}$ y $\overrightarrow{(\alpha_I^R)^*}(R\text{-Mod}) = R/I\text{-Mod}$, luego por la Proposición 3.67 tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.2. *Sea I un ideal de R. Las siguientes clases de R-módulos son iguales:*

1. $\mathbb{T}_{\alpha_I^R}$.
2. $\{M \in R\text{-Mod} \mid \mathrm{Hom}_R(M, N) = 0,\ \forall\ N \in R/I\text{-Mod}\}$.
3. $\bigcap (f)_{\mathbf{R}_{[R/I]}}$-*cerr*. □

De forma similar, tenemos para cada ideal I de R que $\overrightarrow{t(\alpha_I^R)}(R\text{-Mod}) = R/I\text{-Mod}$ y $\overleftarrow{t(\alpha_I^R)}(\{0\}) = \{N \in R\text{-Mod} \mid t(\alpha_I^R)(N) = 0\} = \mathbb{F}_{t(\alpha_I^R)}$, luego por la Proposición 3.68 tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.3. *Sea I un ideal de R. Las siguientes clases de R-módulos son iguales:*

1. $\mathbb{F}_{t(\alpha_I^R)}$.
2. $\{N \in R\text{-Mod} \mid \mathrm{Hom}_R(M, N) = 0\ \forall M \in R/I\text{-Mod}\}$.
3. $\bigcap$ *cerr*-$(f)_{\mathbf{R}_{[R/I]}}$. □

Usando el Teorema 3.62 podemos describir a los cerrados correspondientes a $(f)_{\mathbf{R}_{[R/I]}}$ usando prerradicales.

Proposición 4.4. *Para $(f)_{\mathbf{R}_{[R/I]}}$ tenemos:*

1. *Para todo $\tau \in R$-radidem tenemos que $f^{\mathbf{R}_{[R/I]}}(\mathbb{F}_\tau) = \mathbb{T}_{(\alpha_I^R:\tau)}$.*
2. *Para todo $\sigma \in R$-radidem tenemos que $f_{\mathbf{R}_{[R/I]}}(\mathbb{T}_\sigma) = \mathbb{F}_{\sigma t(\alpha_I^R)}$.*

Demostración.

1. Sea $\tau \in R$-radidem, entonces tenemos

$$\begin{aligned}\overleftarrow{(\alpha_I^R)^*}(\mathbb{T}_\tau) &= \{M \in R\text{-Mod} \mid M/\alpha_I^R(M) \in \mathbb{T}_\tau\} \\ &= \{M \in R\text{-Mod} \mid \tau(M/\alpha_I^R(M)) = M/\alpha_I^R(M)\} \\ &= \mathbb{T}_{(\alpha_I^R:\tau)}\end{aligned}$$

2. Sea $\sigma \in R$-radidem, entonces tenemos

$$\begin{aligned}\overleftarrow{t(\alpha_I^R)}(\mathbb{F}_\sigma) &= \{N \in R\text{-Mod} \mid t(\alpha_I^R)(N) \in \mathbb{F}_\sigma\} \\ &= \{N \in R\text{-Mod} \mid \sigma t(\alpha_I^R)(N) = 0\} \\ &= \mathbb{F}_{\sigma t(\alpha_I^R)}\end{aligned}$$

□

De la proposición anterior tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.5. *Para* $(f)_{\mathbf{R}_{[R/I]}}$ *tenemos:*

1. $(f)_{\mathbf{R}_{[R/I]}}$*-cerr* $= \{\mathbb{T}_{(\alpha_I^R:\tau)} \mid \tau \in R\text{-radidem}\}$.
2. *cerr-*$(f)_{\mathbf{R}_{[R/I]}} = \{\mathbb{F}_{\sigma t(\alpha_I^R)} \mid \sigma \in R\text{-radidem}\}$.

En [36], Capítulo VI tenemos que si $\sigma, \tau \in R$-idem, entonces $(\sigma : \tau) \in R$-idem, y en [36] Capítulo VI y en [23] § 4, Proposición 1, tenemos que si $\sigma, \tau \in R$-rad, entonces $\sigma\tau \in R$-rad. La Proposición 4.4 motiva las siguientes dos proposiciones de Teoría de prerradicales, estos resultados no aparecen en la literatura. Recordemos que para toda $\sigma, \tau, \nu \in R$-pr se cumple la propiedad asociativa para el coproducto, es decir, $((\sigma : \tau) : \nu) = (\sigma : (\tau : \nu))$.

Proposición 4.6. *Sean* $\tau \in R$-rad *y* σ *un t-radical, entonces* $(\sigma : \tau) \in R$-rad.

Demostración. Sea $M \in R$-Mod, como $\sigma(M) \leq (\sigma : \tau)(M)$ tenemos que existe un epimorfismo $M/\sigma(M) \longrightarrow M/(\sigma : \tau)(M)$ y como σ es t-radical, preserva epimorfismos. Por lo tanto $0 = \sigma(M/\sigma(M)) \longrightarrow \sigma(M/(\sigma : \tau)(M))$ es un epimorfismo, luego $\sigma(M/(\sigma : \tau)(M)) = 0$, con esto tenemos:

$$(\sigma : \tau)[M/(\sigma : \tau)(M)]/\sigma[M/(\sigma : \tau)(M)] = \tau([M/(\sigma : \tau)(M)]/\sigma([M/(\sigma : \tau)(M)])$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}(\sigma : \tau)(M/(\sigma : \tau)(M)) &= \tau(M/(\sigma : \tau)(M)) \\ &= ((\sigma : \tau) : \tau)(M)/(\sigma : \tau)(M) \\ &= (\sigma : (\tau : \tau))(M)/(\sigma : \tau)(M) \\ &= (\sigma : \tau)(M)/(\sigma : \tau)(M) \\ &= 0\end{aligned}$$

pues τ es radical y $(\sigma : (\tau : \tau)) = (\sigma : \tau)$. Por lo tanto $(\sigma : \tau)$ es radical. □

Proposición 4.7. *Sean* $\sigma \in R$-idem *y* $\tau \in R$-lep. *Entonces* $\sigma\tau \in R$-idem.

Demostración. Sea $M \in R$-Mod, luego $\sigma\tau(M) \leq \tau(M)$ por lo tanto

$$\tau(\sigma\tau(M)) = \sigma\tau(M) \cap \tau(\tau(M)) = \sigma\tau(M) \cap \tau(M) = \sigma\tau(M)$$

Se sigue que $\sigma(\tau\sigma\tau(M)) = \sigma(\sigma\tau(M)) = \sigma\tau(M)$. Por lo tanto $\sigma\tau \in R$-idem. □

De las dos proposiciones tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.8. *Sea I ideal de R. Entonces*

1. *Para cada* $\tau \in R$-radidem, $(\alpha_I^R : \tau) \in R$-rad, *pues* α_I^R *es un t-radical.*

2. *Para cada* $\sigma \in R$-radidem, $\sigma t(\alpha_I^R) \in R$-idem, *pues* $t(\alpha_I^R)$ *es exacto izquierdo.* $\square$

Recordemos (ver Proposición 4.4) que para cada $\sigma \in R$-radidem, $\lambda_{\mathbf{R}_{[R/I]}}(\sigma)$ es el único radical idempotente tal que $f_{\mathbf{R}_{[R/I]}}(\mathbb{T}_\sigma) = \mathbb{F}_{\lambda_{\mathbf{R}_{[R/I]}}(\sigma)}$ y para cada $\tau \in R$-radidem, $\mu_{\mathbf{R}_{[R/I]}}(\tau)$ es el único radical idempotente tal que $f^{\mathbf{R}_{[R/I]}}(\mathbb{F}_\tau) = \mathbb{T}_{\mu_{\mathbf{R}_{[R/I]}}(\tau)}$ (ver Observación 3.72).

Corolario 4.9. *La conexión de Galois isótona* $\langle \lambda_{\mathbf{R}_{[R/I]}}, \mu_{\mathbf{R}_{[R/I]}} \rangle$ *sobre* R-radidem *está descrita como:*

1. $\lambda_{\mathbf{R}_{[R/I]}}(\sigma) = \overline{\sigma t(\alpha_I^R)}$, *para cada* $\sigma \in R$-radidem.

2. $\mu_{\mathbf{R}_{[R/I]}}(\tau) = \widehat{(\alpha_I^R : \tau)}$, *para cada* $\tau \in R$-radidem. $\square$

Una consecuencia de la observación 2.58 y del corolario anterior es el siguiente corolario.

Corolario 4.10. *El conglomerado de todas las* $\mathbf{R}_{[R/I]}$*-teorías de torsión es*

$$\{(\mathbb{T}_{\widehat{(\alpha_I^R:\tau)}}, \mathbb{F}_\tau) \mid \tau \in [[0, \tau_{\mathbf{R}_{[R/I]}}]]\} = \{(\mathbb{T}_\sigma, \mathbb{F}_{\overline{\sigma t(\alpha_I^R)}}) \mid \sigma \in [[\sigma_{\mathbf{R}_{[R/I]}}, 1]]\}.$$

$\square$

En la siguiente sección nos enfocaremos principalmente a estudiar relaciones $\mathbf{R}_{[R/I]}$ donde el ideal I es idempotente.

4.1. Relaciones $\mathbf{R}_{[R/I]}$ con I un ideal idempotente

En esta sección, al igual que la anterior, vamos a estudiar relaciones bicerradas inducidas por pares adjuntos, sólo que ahora estamos interesados en saber qué pasa si el par adjunto $\langle F, G\rangle$ cumple que $\vec{F}(R\text{-Mod}) = R/I$-Mod es una clase de torsión y $\vec{G}(R\text{-Mod}) = R/I$-Mod es una clase libre de torsión. En el Ejemplo 3.33 se mostró que para el funtor covariante cocontinuo $F = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \_$, $\vec{F}(\mathbb{Z}\text{-Mod}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Mod no es una clase de torsión (ni clase libre de torsión) en $\mathbb{Z}$-Mod, esto mostró que no todos los ideales I de un anillo R hacen que R/I-Mod sea una clase de torsión o libre de torsión. Además estamos interesados en ver qué pasa cuando los intervalos de prerradicales $[[\sigma_{\mathbf{R}_{[R/I]}}, 1]]$ y $[[0, \tau_{\mathbf{R}_{[R/I]}}]]$ se llenan (ver Corolario 3.71) y saber que características tienen los prerradicales que pertenecen a estos intervalos.

A continuación vemos que la condición de que el ideal I sea idempotente es suficiente para que R/I-Mod sea una clase de torsión.

Proposición 4.11. *Sean* $I \leq R$ *ideal y* $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$ *una sucesión exacta. Si* $IN = IL = 0$, *entonces* $I^2M = 0$.

Demostración. Sea $m \in M$, luego por hipótesis $Ig(m) = 0$. Por lo tanto para toda $i \in I$ tenemos que $g(im) = ig(m) \in Ker(g) = Im(f)$, luego existe $n \in N$ tal que $f(n) = im$ y para toda $j \in I$ tenemos que $jn = 0$, se sigue que $0 = f(jn) = jf(n) = j(im) = ji(m)$. Por lo tanto cada $m \in M$ es anulado por ji con $i, j \in I$, es decir, $I^2M = 0$. □

Corolario 4.12. *Sean $I \leq R$ un ideal idempotente y $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$ una sucesión exacta tal que $IN = IL = 0$, entonces $IM = 0$.*

Proposición 4.13. *Sea $I \leq R$ un ideal idempotente, entonces R/I-*Mod *es clase de torsión y clase libre de torsión en R-*Mod.

Demostración. Sea $I \leq R$ un ideal idempotente, luego por el Corolario 1.69 tenemos que α_I^R es idempotente y $t(\alpha_I^R)$ un radical. Además α_I^R es radical y $t(\alpha_I^R)$ es idempotente, por lo tanto $\mathbb{T}_{t(\alpha_I^R)}$ es una clase de torsión y $\mathbb{F}_{\alpha_I^R}$ es una clase libre de torsión, y por la Proposición 4.1 $\mathbb{T}_{t(\alpha_I^R)} = \mathbb{F}_{\alpha_I^R} = R/I$-Mod. □

Una consecuencia de la Proposición 4.13 es que si $I \leq R$ es un ideal idempotente entonces se cumplen las hipótesis del Corolario 3.71, es decir, $\overrightarrow{(\alpha_I^R)^*}$ (R-Mod) es una clase de torsión y $\overrightarrow{t(\alpha_I^R)}$ (R-Mod) es una clase libre de torsión, luego tenemos la siguiente proposición.

Proposición 4.14. *Sea $I \leq R$ ideal idempotente, entonces $[[\sigma_{\mathbf{R}_{[R/I]}}, 1]] = [\alpha_I^R, 1] \cap R$-*radidem *y $[[0, \tau_{\mathbf{R}_{[R/I]}}]] = [0, t(\alpha_I^R)] \cap R$-*radidem.

Demostración. Sean I un ideal idempotente y el par adjunto $\langle (\alpha_I^R)^*, t(\alpha_I^R)\rangle$. Por la Proposición 4.13 tenemos que $\overrightarrow{t(\alpha_I^R)}$ (R-Mod) $= R/I$-Mod es una clase libre de torsión, esto implica por la Proposición 3.38 que $[[\sigma_{\mathbf{R}_{[R/I]}}, 1]] = [\alpha_I^R, 1] \cap R$-radidem.

De forma similar, por la Proposición 4.13 tenemos que $\overrightarrow{(\alpha_I^R)^*}$ (R-Mod) $= R/I$-Mod es una clase de torsión, esto implica por la Proposición 3.48 que $[[0, \tau_{\mathbf{R}_{[R/I]}}]] = [0, t(\alpha_I^R)] \cap R$-radidem. □

Recordemos del Ejemplo 3.79 que si $\mathbf{R} \in [\mathcal{H}]_{\preceq}$ es una relación tal que $[[\sigma_{\mathbf{R}}, 1]]$ es un intervalo que se llena, entonces no necesariamente implica que el intervalo $[[0, \tau_{\mathbf{R}}]]$ se llene (y viceversa), luego es interesante cuando los dos intervalos se llenan, pues los prerradicales que pertencen a los intervalos de la Proposición 4.14 se pueden describir de manera explicita. El siguiente teorema se deduce de las Proposiciones 2.53 y 4.14.

Teorema 4.15. *Sea $I \leq R$ ideal idempotente, entonces existe un isomorfismo de orden entre $\langle [\alpha_I^R, 1] \cap R$-*radidem*$, \preccurlyeq\rangle$ y $\langle [0, t(\alpha_I^R)] \cap R$-*radidem*$, \preccurlyeq\rangle$.* □

La conexión de Galois isótona $\langle \lambda_{\mathbf{R}_{[R/I]}}, \mu_{\mathbf{R}_{[R/I]}}\rangle$ sobre R-radidem que dimos en el Corolario 4.9 se pueden simplificar cuando I es un ideal idempotente. De las Proposiciones 1.57, 1.58, 4.6, 4.7 y el Corolario 4.8 se deduce el siguiente corolario. Recordemos que I es un ideal idempotene si y sólo si α_I^R es idempotente y $t(\alpha_I^R)$ es radical exacto izquierdo (ver Corolario 1.69 y Lema 1.96).

Corolario 4.16. *Si I es un ideal idempotente de R entonces:*

1. *Para cada $\tau \in R$-radidem, $(\alpha_I^R : \tau) \in R$-radidem.*
2. *Para cada $\sigma \in R$-radidem, $\sigma t(\alpha_I^R) \in R$-radidem.* □

Partiendo del corolario anterior, la conexión de Galois isótona $\langle \lambda_{\mathbf{R}_{[R/I]}}, \mu_{\mathbf{R}_{[R/I]}} \rangle$ sobre R-radidem inducida por el R-bimódulo R/I queda como sigue.

Corolario 4.17. *Si I es un ideal idempotente de R, la conexión de Galois isótona $\langle \lambda_{\mathbf{R}_{[R/I]}}, \mu_{\mathbf{R}_{[R/I]}} \rangle$ sobre R-radidem se describe como:*

$$\lambda_{\mathbf{R}_{[R/I]}}(\sigma) = \sigma t(\alpha_I^R), \text{ para todo } \sigma \in R\text{-radidem},$$
$$\mu_{\mathbf{R}_{[R/I]}}(\tau) = (\alpha_I^R : \tau), \text{ para todo } \tau \in R\text{-radidem}.$$

además,

1. *$Im(\mu_{\mathbf{R}_{[R/I]}}) = [\alpha_I^R, 1] \cap R$-radidem.*
2. *$Im(\lambda_{\mathbf{R}_{[R/I]}}) = [0, t(\alpha_I^R)] \cap R$-radidem.*
3. *$\langle [\alpha_I^R, 1] \cap R\text{-radidem}, \preccurlyeq \rangle \cong \langle [0, t(\alpha_I^R)] \cap R\text{-radidem}, \preccurlyeq \rangle$.*
4. *El conglomerado de todas $\mathbf{R}_{[R/I]}$-teorías de torsión es (ver Observación 2.58)*

$$\{(\mathbb{T}_\sigma, \mathbb{F}_{\sigma t(\alpha_I^R)}) \mid \sigma \in [\alpha_I^R, 1] \cap R\text{-radidem}\}) = \{(\mathbb{T}_{(\alpha_I^R : \tau)}, \mathbb{F}_\tau) \mid \tau \in [0, t(\alpha_I^R)] \cap R\text{-radidem}\}).$$

□

De la Proposición 4.14 tenemos que si I es un ideal idempotente, entonces tenemos las igualdades $[[\sigma_{\mathbf{R}_{[R/I]}}, 1]] = [\alpha_I^R, 1] \cap R$-radidem y $[[0, \tau_{\mathbf{R}_{[R/I]}}]] = [0, t(\alpha_I^R)] \cap R$-radidem, esto significa por el Corolario anterior que para todo $\sigma \in [\alpha_I^R, 1] \cap R$-radidem existe $\tau \in R$-radidem tal que $\sigma = \mu_{\mathbf{R}_{[R/I]}}(\tau) = (\alpha_I^R : \tau)$, de la misma forma si $\tau \in [0, t(\alpha_I^R)] \cap R$-radidem, entonces $\tau = \lambda_{\mathbf{R}_{[R/I]}}(\sigma) = \sigma t(\alpha_I^R)$ para algún $\sigma \in R$-radidem. Esto demuestra los siguientes dos resultados Teoría de Prerradicales.

Corolario 4.18. *Sea R un anillo y $I \leq R$ ideal idempotente. Para $\tau \in R$-radidem son equivalentes:*

1. *$\tau \preccurlyeq t(\alpha_I^R)$.*
2. *Existe $\sigma \in R$-radidem tal que $\tau = \sigma t(\alpha_I^R)$.* □

Corolario 4.19. *Sea R un anillo y $I \leq R$ ideal idempotente. Para $\sigma \in R$-radidem son equivalentes:*

1. *$\alpha_I^R \preccurlyeq \sigma$.*
2. *Existe $\tau \in R$-radidem tal que $\sigma = (\alpha_I^R : \tau)$.* □

4.2. Relaciones bicerradas en anillos semisimples

En esta sección demostramos que si R es un anillo semisimple artiniano, entonces no todas las relaciones bicerradas con respecto a $\mathcal{H}$ son inducidas por pares adjuntos, también determinamos la estructura retícular de $[\mathcal{H}]_{\preceq}$; si R es un anillo semisimple con $|R\text{-simp}| = n$, entonces $\langle [\mathcal{H}]_{\preceq}, \subseteq \rangle$ (o equivalentemente $Gal(\mathcal{T}\text{-}tors, \mathcal{L}\text{-}tors)$) es una gran retícula Boolenana con 2^{n^2} elementos y las relaciones bicerradas inducidas por pares adjuntos forman una retícula Booleana en $[\mathcal{H}]_{\preceq}$ con 2^n elementos, más aún, demostramos que el intervalo de relaciones bicerradas $[\mathcal{H}, (R\text{-Mod})^2] = Im(\Psi)$.

Notación 4.20. R-simp *denota un conjunto de representantes de clases de isomorfismos de R-módulos simples.*

En esta sección aplicamos los resultados previos a los anillos semisimple artinianos. Recordemos que las siguientes condiciones son equivalentes (ver [29], Teorema 11):

1. R es un anillo semisimple artiniano con $|R\text{-simp}| = n$;

2. R-pr es una gran retícula Booleana de 2^n elementos;

3. Para cada $\sigma \in R\text{-p}r,\ \sigma = \bigvee_{S \in \mathcal{S}} \alpha_S^S$ para algún $\mathcal{S} \subseteq R$-simp.

En este caso, cada prerradical es un radical idempotente, de hecho, es un radical exacto izquierdo. La siguiente proposición la usamos para describir de forma más simple la conexión de Galois isótona sobre R-radidem inducida por $\mathbf{R}_{[R/I]}$.

Proposición 4.21. *Sean R un anillo semisimple artiniano y $\sigma, \tau \in R$-pr.*

1. *Si σ es un prerradical exacto izquierdo entonces $\sigma\tau = \sigma \wedge \tau$.*

2. *Si τ es un t-radical entonces $(\sigma : \tau) = \sigma \vee \tau$.*

Demostración.

1. Si σ es un prerradical exacto izquierdo y $M \in R$-Mod entonces $\sigma(\tau M) = \sigma(M) \cap \tau(M)$.

2. Si τ es un t-radical y $M \in R$-Mod entonces $\tau(M) = IM$ para algún ideal I de R. Por lo tanto $(\sigma : \tau)(M)/\sigma M = \tau(M/\sigma M) = I(M/\sigma M) = (IM + \sigma M)/\sigma M$: concluimos que $(\sigma : \tau)(M) = \tau(M) + \sigma(M)$.

□

El Teorema de Domenach-Leclerc nos permite saber la cardinalidad y la estructura reticular de $[\mathcal{H}]_{\preceq}$ cuando R es un anillo semisimple artiniano, como lo demostramos a continuación.

Proposición 4.22. *Si R es un anillo semisimple artiniano con $|R\text{-simp}| = n$, entonces $[\mathcal{H}]_{\preceq}$ es una gran retícula Booleana de cardinalidad 2^{n^2}.*

Demostración. Si R es un anillo semisimple artiniano con $|R\text{-simp}| = n$ entonces $R\text{-pr} = R\text{-radidem}$ es una gran retícula Booleana con 2^n elementos. Por lo tanto $\mathcal{T}\text{-}tors$ y $\mathcal{L}\text{-}tors$ también son grandes retículas Booleanas isomorfas a un conjunto potencia $\wp(X_n)$, donde $X_n = \{1, \ldots n\}$. Como fué definido en (1.1) y (1.2) Teorema 1.27, y usando el Corolario 2.57, tenemos los isomorfismos de retículas:

$$[\mathcal{H}]_{\preceq} \cong Gal(\mathcal{T}\text{-}tors, \mathcal{L}\text{-}tors) \cong Gal(\wp(X_n), \wp(X_n)) \cong \wp(X_n \times X_n)$$

Por lo tanto $\#[\mathcal{H}]_{\preceq} = \#\wp(X_n \times X_n) = 2^{n^2}$. □

Si R es un anillo semisimple artiniano entonces cada ideal es idempotente. Por lo tanto, aplicando el Corolario 4.17 y las Proposiciones 4.14 y 4.21 tenemos:

Corolario 4.23. *Si R es un anillo semisimple artiniano e I es un ideal de R entonces:*

1. $[[\sigma_{\mathbf{R}_{[R/I]}}, 1]] = [\alpha_I^R, 1] \cap R\text{-radidem}$ *y* $[[0, \tau_{\mathbf{R}_{[R/I]}}]] = [0, t(\alpha_I^R)] \cap R\text{-radidem}$.

2. *La conexión de Galois isótona* $\langle \lambda_{\mathbf{R}_{[R/I]}}, \mu_{\mathbf{R}_{[R/I]}} \rangle$ *sobre* $R\text{-radidem} = R\text{-pr}$ *está descrita como:*

$$\lambda_{\mathbf{R}_{[R/I]}}(\sigma) = \sigma t(\alpha_I^R) = \sigma \wedge t(\alpha_I^R), \ \textit{para todo } \sigma \in R\text{-pr},$$
$$\mu_{\mathbf{R}_{[R/I]}}(\tau) = (\alpha_I^R : \tau) = \alpha_I^R \vee \tau, \ \textit{para todo } \tau \in R\text{-pr}.$$

3. *El conglomerado de todas $\mathbf{R}_{[R/I]}$-teorías de torsión es*

$$\{(\mathbb{T}_\sigma, \mathbb{F}_{\sigma \wedge t(\alpha_I^R)}) \mid \sigma \in [\alpha_I^R, 1] \cap R\text{-radidem}\} = \{(\mathbb{T}_{\alpha_I^R \vee \tau}, \mathbb{F}_\tau) \mid \tau \in [0, t(\alpha_I^R)] \cap R\text{-radidem}\}.$$

4. *Esta conexión de Galois isótona induce los isomorfismos de orden:*

$$\langle [\alpha_I^R, 1] \cap R\text{-radidem}, \preccurlyeq \rangle \cong \langle [0, t(\alpha_I^R)] \cap R\text{-radidem}, \preccurlyeq \rangle$$

$$\langle [0, \alpha_I^R] \cap R\text{-radidem}, \preccurlyeq \rangle \cong \langle [t(\alpha_I^R), 1] \cap R\text{-radidem}, \preccurlyeq \rangle.$$

□

El primer isomorfismo es el que viene en el Corolario 4.17. El último isomorfismo es debido a que si I es un ideal de R entonces existe un ideal J de R tal que $R = I \oplus J$, esto significa que $J \cong R/I$, $t(\alpha_I^R) = \alpha_J^R$ y $\alpha_I^R = t(\alpha_J^R)$, pues en este caso para cada $M \in R\text{-Mod}$, $M = IM \oplus JM$, luego $M/IM \cong JM$. Por lo tanto $R/I \otimes_R \_ \cong (\alpha_I^R)^* \cong \alpha_J^R$. Por el Lema 1.96 tenemos, para todo J un isomorfismo natural entre los funtores $J \otimes_R \_$ y α_J^R, de esta forma por la Proposición 3.23 tenemos que $\mathbf{R}_{[J]} = \mathbf{R}_{[R/I]}$.

En la Proposición 3.59 demostramos que existe un morfismo de orden $\Psi : R\text{-BiMod}/\sim \longrightarrow [\mathcal{H}]_{\preceq}$ que está definido como $\Psi([L]_\sim) = \mathbf{R}_{[L]}$.

Proposición 4.24. *Si R es un anillo semisimple artiniano entonces Ψ es inyectiva.*

Demostración. Si $L \in R$-BiMod y $N \in R$-Mod entonces $\mathrm{Hom}_R(L, N) = 0$ si y sólo si $\mathrm{Hom}_R(L \otimes_R R, N) = 0$. Por la Proposición 3.68 tenemos que $f_{\mathbf{R}_{[L]}}(\{R\}) = f_{\mathcal{H}}(\{L\}) = \mathbb{F}_{\alpha_L^L}$. Por lo tanto, si $L, K \in R$-BiMod son tales que $\mathbf{R}_{[L]} = \mathbf{R}_{[K]}$ entonces $\mathbb{F}_{\alpha_L^L} = f_{\mathbf{R}_{[L]}}(\{R\}) = f_{\mathbf{R}_{[K]}}(\{R\}) = \mathbb{F}_{\alpha_K^K}$.

Como R es un anillo semisimple Artiniano, α_L^L y α_K^K son radicales idempotentes, se sigue por la correspondencia biunívoca entre clases libres de torsión y radicales idempotentes que $\alpha_L^L = \alpha_K^K$, es decir, existen epimorfismos $L^{(X)} \longrightarrow K$ y $K^{(Y)} \longrightarrow L$ con X y Y conjuntos. Concluimos que $[L]_\sim = [K]_\sim$ y por lo tanto Ψ es inyectiva. □

Recordemos (ver [7], §7 y §8) que si R es un anillo semisimple artiniano entonces cada elemento de R-BiMod es isomorfo a una suma directa de ideales de R, de hecho, es una suma directa de ideales mínimos de R. Sean $I_1, I_2, \dots I_n$ los ideales mínimos, considerando que $|R\text{-simp}| = n$ y R es un producto de n anillos de matrices sobre anillos con división. Sea $\mathcal{I}(R)$ la retícula de ideales de R. Observemos que al ser R semisimple artiniano, $\mathcal{I}(R)$ es una retícula Booleana con 2^n elementos. Cada ideal de R puede ser escrito de forma única como $I = \bigoplus_{i \in A} I_i$ para $A \subseteq \{1, \dots n\}$. Consideremos la siguiente asignación.

Proposición 4.25. *Sea R es un anillo semisimple artiniano. Entonces existe un anti-isomorfismo de orden:*

$$\Phi : \mathcal{I}(R) \longrightarrow R\text{-BiMod}/\sim$$

definido como $\Phi(I) := [I]_\sim$.

Demostración. Si I, J son ideales de R tales que $J \subseteq I$ entonces, como R es semisimple artiniano, la inclusión $J \hookrightarrow I$ se escinde, esto significa que $I = J \oplus I'$ para algún ideal I', así que existe un epimorfismo $I \twoheadrightarrow J$, es decir, I genera a J y por la Proposición 3.55-3 y la notación 3.58 $[I]_\sim \preceq [J]_\sim$. Esto prueba que Φ es un morfismo que invierte el orden.

Ahora supongamos que I genera a J. Entonces existe un epimorfismo $I^{(X)} \twoheadrightarrow J$. Supongamos que $I = \bigoplus_{i \in A} I_i$ y $J = \bigoplus_{j \in B} I_j$. Para cada $j \in B$ existe un epimorfismo $g_j : I^{(X)} \twoheadrightarrow I_j$, y para cada $i \in A$ existe una inclusión $\iota_i : I_i \longrightarrow I^{(X)}$. Luego, para cada $j \in B$ existe $i_0 \in A$ tal que $g_j \circ \iota_{i_0} \neq 0$. Como cada R-módulo es inyectivo, existe un endomorfismo $f : R \longrightarrow R$ tal que $f = h_j \circ g_j \circ \iota_{i_0}$, donde $h_j : I_j \hookrightarrow R$ es la inclusión y como I_{i_0} y I_j son ideales mínimos debemos tener que $I_{i_0} = f(I_{i_0}) = I_j$. Concluimos que $B \subseteq A$, es decir, $J \subseteq I$. Análogamente, si $[J]_\sim \preceq [I]_\sim$, entonces $I \subseteq J$. Esto implica que Φ es inyectiva.

Ahora sea $[L]_\sim \in R$-BiMod$/\sim$. Entonces podemos escribir $L \cong \bigoplus_{i \in A} I_i^{(X_i)}$, donde $A \subseteq \{1, \dots n\}$ y $[L]_\sim = [\bigoplus_{i \in A} I_i]_\sim$. Esto prueba que Φ es sobreyectiva, y de esta forma se prueba que Φ es un anti-isomorfismo. □

Para cada ideal I tenemos $(\Psi \circ \Phi)(I) = \mathbf{R}_{[I]}$. Esto se puede ver en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{I}(R) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\Psi\circ\Phi"'] & R\text{-BiMod}/\sim \arrow[d, "\Psi"] \\ & {[\mathcal{H}]_{\preceq}} \end{tikzcd}$$

De esta forma, podemos describir la imagen de Ψ, la cual es también imagen de $\Psi\circ\Phi$. Por la Proposición 3.55, para cada $I \in \mathcal{I}(R)$, tal que $I = \bigoplus_{i\in A} I_i$, tenemos que $(\Psi\circ\Phi)(I) = \bigcap_{i\in A} \mathbf{R}_{[I_i]}$.

Corolario 4.26. *Si R es un anillo semisimple artiniano con $|R\text{-simp}| = n$, entonces:*

1. R-BiMod$/\sim$ *es una retícula Booleana con 2^n elementos.*
2. $Im(\Psi) = \{\bigcap_{i\in A} \mathbf{R}_{[I_i]} \mid A \subseteq \{1,\ldots,n\}\}$ *es una retícula Booleana con 2^n elementos.*

□

Una consecuencia de lo anterior es que si $n \geq 2$, entonces Ψ no es sobreyectiva, es decir, en este caso existen relaciones bicerradas que no son inducidas por bimódulos (o pares adjuntos). Observar que, en particular, el elemento más grande de $Im(\Psi)$ es $(\Psi\circ\Phi)(0) = (R\text{-Mod})^2$ y el elemento mínimo de $Im(\Psi)$ es $(\Psi\circ\Phi)(R) = \mathcal{H}$, pues $\mathcal{H} = \mathbf{R}_{[R]} = \mathbf{R}_{[\bigoplus I_i]} = \bigcap \mathbf{R}_{[I_i]}$. De hecho, es interesante que $Im(\Psi) = \{\mathbf{R} \in [\mathcal{H}]_{\preceq} \mid \mathcal{H} \subseteq \mathbf{R}\}$. Para probar esto necesitamos el siguiente lema.

Lema 4.27. *Sea R un anillo cualquiera. Sea $\mathbf{R} \in [\mathcal{H}]_{\preceq}$. Si $\{M_i\}_{i\in A}$ y $\{N_j\}_{j\in B}$ son familias de R-módulos tales que $(M_i, N_j) \in \mathbf{R}$ para todo $i \in A,\ j \in B$, entonces $(\bigoplus_{i\in A} M_i, \bigoplus_{j\in B} N_j) \in \mathbf{R}$.*

Demostración. Por hipótesis, para todo $i \in A,\ j \in B$ tenemos $M_i \in f^{\mathbf{R}}(\{N_j\})$, la cual es una clase de torsión, pues $\mathbf{R} \in [\mathcal{H}]_{\preceq}$. Por lo tanto $\bigoplus_{i\in A} M_i \in f^{\mathbf{R}}(\{N_j\})$, es decir, $(\bigoplus_{i\in A} M_i, N_j) \in \mathbf{R}$. Esto implica que $N_j \in f_{\mathbf{R}}(\{\bigoplus_{i\in A} M_i\})$, la cual es una clase libre de torsión, de nuevo usando el hecho que $\mathbf{R} \in [\mathcal{H}]_{\preceq}$. Concluimos que $\bigoplus_{j\in B} N_j \in f_{\mathbf{R}}(\{\bigoplus_{i\in A} M_i\})$, es decir, $(\bigoplus_{i\in A} M_i, \bigoplus_{j\in B} N_j) \in \mathbf{R}$. □

Proposición 4.28. *Si R es un anillo semisimple artiniano, entonces:*

$$Im(\Psi) = \{\mathbf{R} \in [\mathcal{H}]_{\preceq} \mid \mathcal{H} \subseteq \mathbf{R}\}.$$

Demostración. Supongamos que R-simp $= \{S_1, \ldots S_n\}$, $I_1, \ldots, I_n$ son los ideales mínimos de R tales que existen monomorfismos $S_i \rightarrowtail I_i$, y como antes, denotamos con $X_n = \{1, \ldots n\}$. Sea $\mathbf{R} \in [\mathcal{H}]_{\preceq}$ tal que $\mathcal{H} \subseteq \mathbf{R}$. Consideremos $C = \{i \in X_n \mid (S_i, S_i) \notin \mathbf{R}\}$ y $I = \bigoplus_{i\in C} I_i$. Observemos que, para cada $S \in R$-simp, existe un monomorfismo $S \rightarrowtail I$ si y sólo si $(S, S) \notin \mathbf{R}$.

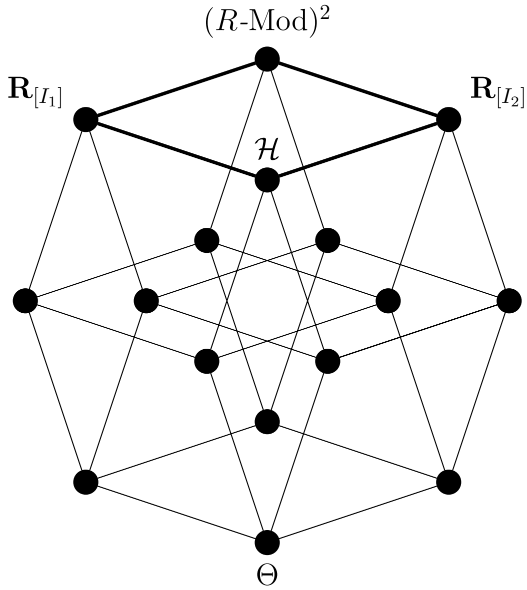
Afirmamos que $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{[I]} = \bigcap_{i\in C} \mathbf{R}_{[I_i]}$. Sea $(M, N) \in \mathbf{R}$. Supongamos que $S \in R$-Simp es tal que existen monomorfismos $S \rightarrowtail IM$ y $S \rightarrowtail N$. Como $(M, N) \in \mathbf{R}$ tenemos que $M \in f^{\mathbf{R}}(\{N\})$, la cual es una clase de torsión, pues $\mathbf{R} \in [\mathcal{H}]_{\preceq}$. Dado que R es semisimple artiniano, el monomorfismo $S \rightarrowtail M$ se escinde, luego existe un epimorfismo $M \twoheadrightarrow S$. Por lo tanto $S \in f^{\mathbf{R}}(\{N\})$ (pues es una clase de torsión), lo que implica que $(S, N) \in \mathbf{R}$. Esto implica que $N \in f_{\mathbf{R}}(\{S\})$, la cual es una clase libre de torsión. De esta forma, también $S \in f_{\mathbf{R}}(\{S\})$, se sigue que $(S, S) \in \mathbf{R}$, esto contradice el hecho de que existe un monomorfismo $S \rightarrowtail I$. Concluimos que si $S, T \in R$-simp son tales que existen monomorfismos $S \rightarrowtail IM$ y $T \rightarrowtail N$ entonces $S \neq T$. Por lo tanto $\mathrm{Hom}_R(IM, N) = 0$, es decir, $(M, N) \in \mathbf{R}_{[I]}$.

Por otra parte, si $(M, N) \in \mathbf{R}_{[I]}$, como R es semisimple artiniano, podemos escribir $M \cong \bigoplus_{i\in A} S_i^{(X_i)}$ y $N \cong \bigoplus_{j\in B} S_j^{(Y_j)}$, donde $A, B \subseteq X_n$ y $X_i, Y_i \neq \varnothing$ para cada $i \in A$ y $j \in B$.

Tomemos cualquier $i \in A$ y $j \in B$. Si $i = j$ entonces, como $\mathrm{Hom}_R(IM, N) = 0$ y en este caso existen monomorfismos $S_i \rightarrowtail M$ y $S_i \rightarrowtail N$ entonces no existe un monomorfismo $S_i \rightarrowtail I$, es decir, $(S_i, S_i) \in \mathbf{R}$. Si $i \neq j$ entonces $\mathrm{Hom}_R(S_i, S_j) = 0$ y como $\mathcal{H} \subseteq \mathbf{R}$, tenemos que en este caso $(S_i, S_j) \in \mathbf{R}$. Por el Lema 4.27 concluimos que $(M, N) \in \mathbf{R}$ y con esto terminamos la prueba. $\square$

Lo anterior lo ilustramos con un ejemplo de un anillo semisimple artiniano que tiene sólo dos ideales simples.

Ejemplo 4.29. *La siguiente figura muestra la retícula Booleana de 16 elementos que consta de relaciones bicerradas sobre un anillo semisimple artiniano R con $|R\text{-simp}| = 2$. El elemento mayor es $(R\text{-Mod})^2$ y el elemento menor es $\Theta = \{(M, N) \mid M = 0 \text{ ó } N = 0\}$. En la parte superior de la retícula esta remarcada la imagen de Ψ, la cual es isomorfa a la retícula Booleana de los 4 ideales de R.*



Además

$$\mathcal{H} = (R\text{-Mod} \times \{0\}) \cup (\mathbb{T}_{\alpha^R_{I_1}} \times \mathbb{F}_{\alpha^R_{I_1}}) \cup (\mathbb{T}_{\alpha^R_{I_2}} \times \mathbb{F}_{\alpha^R_{I_2}}) \cup (\{0\} \times R\text{-Mod}).$$

donde

$(R\text{-Mod} \times \{0\}) \cup (\mathbb{T}_{\alpha^R_{I_1}} \times \mathbb{F}_{\alpha^R_{I_1}}) \cup (\{0\} \times R\text{-Mod})$, $(R\text{-Mod} \times \{0\}) \cup (\mathbb{T}_{\alpha^R_{I_2}} \times \mathbb{F}_{\alpha^R_{I_2}}) \cup (\{0\} \times R\text{-Mod}) \in [\mathcal{H}]_{\preceq}$ *y son las relaciones correspondientes a las conexiones de Galois* $\langle p_{\mathbb{T}_{\alpha^R_{I_1}}, \mathbb{F}_{\alpha^R_{I_1}}}, p_{\mathbb{F}_{\alpha^R_{I_1}}, \mathbb{T}_{\alpha^R_{I_1}}} \rangle$ *y* $\langle p_{\mathbb{T}_{\alpha^R_{I_2}}, \mathbb{F}_{\alpha^R_{I_2}}}, p_{\mathbb{F}_{\alpha^R_{I_2}}, \mathbb{T}_{\alpha^R_{I_2}}} \rangle$ *respectivamente, esto usando la Proposición 1.30 y la Observación 1.31.*

En el capítulo anterior y este obtuvimos para los pares adjuntos $\langle I \otimes_R \_, \mathrm{Hom}_R(I, \_) \rangle$ y $\langle R/I \otimes_R \_, \mathrm{Hom}_R(R/I, \_) \rangle$ y sus relaciones bicerradas inducidas $\mathbf{R}_{[I]}, \mathbf{R}_{[R/I]}$ respectivamente:

1. Si I es un ideal puro, entonces para $\mathbf{R}_{[I]}$ obtuvimos el isomorfismo de orden entre los intervalos $[[\sigma_{\mathbf{R}_{[I]}}, 1]]$ y $[[0, \tau_{\mathbf{R}_{[I]}}]] = [0, \alpha^R_I] \cap R\text{-radidem}$.

2. Si I es idempotente, entonces para $\mathbf{R}_{[R/I]}$ obtuvimos el isomorfismo de orden entre los intervalos $[[\sigma_{\mathbf{R}_{[R/I]}}, 1]] = [\alpha_I^R, 1] \cap R$-radidem y $[[0, \tau_{\mathbf{R}_{[R/I]}}]] = [0, t(\alpha_I^R)] \cap R$-radidem.

3. Si R es un anillo semisimple artiniano tenemos los isomorfismos de orden (ver Corolario 4.23):
$$\langle [0, \alpha_I^R], \preccurlyeq \rangle \cong \langle [t(\alpha_I^R), 1], \preccurlyeq \rangle,$$
$$\langle [\alpha_I^R, 1], \preccurlyeq \rangle \cong \langle [0, t(\alpha_I^R)], \preccurlyeq \rangle.$$

Capítulo 5

Preguntas y problemas

En esta sección enunciamos algunas preguntas, problemas y conjeturas.

Preguntas relacionadas con bifuntores.

1. La pregunta más general relacionada con bifuntores es: ¿Toda relación $\mathbf{R} \in [\mathcal{H}]_{\preceq}$ es inducida por un bifuntor?

2. La asignación $\mathrm{Hom}_R(\_, E(\_))$ no es un bifuntor casi continuo, pues E es una asignación que no es un funtor. Sin embargo, induce la relación $\hbar$ que es bicerrada con respecto a $\mathcal{H}$. Luego ¿Existe un bifuntor casi continuo con el que se pueda definir a las teorías de torsión hereditarias?

3. Para cada $L \in R$-BiMod tenemos la relación bicerrada $\mathbf{R}_{[L]}$, que es inducida por el bifuntor continuo $\mathrm{Hom}_R(L \otimes_R \_, \_) \cong \mathrm{Hom}(\_, \mathrm{Hom}_R(L, \_))$, esta relación cumple que $\mathcal{H} \subseteq \mathbf{R}_{[L]}$ (ver Proposición 3.57). ¿Existe alguna relación entre las relaciones bicerradas $\mathbf{R}$ tales que $\mathcal{H} \subseteq \mathbf{R}$ y los bifuntores casi continuos?, pues en el caso de un anillo semisimple artiniano, todas estas relaciones están inducidas por un bifuntor continuo.

Preguntas y problemas relacionadas con pares adjuntos.

1. Para el par adjunto $\langle (\alpha_I^R)^*, t(\alpha_I^R) \rangle$ tenemos que si I es un ideal que no es idempotente, entonces $\overrightarrow{(\alpha_I^R)^*}$ (R-Mod) y $\overrightarrow{t(\alpha_I^R)}$ (R-Mod) no son clase de torsión y clase libre de torsión en R-Mod respectivamente (ver Ejemplo 3.33), sin embargo, si I es idempotente estas dos clases sí son de torsión y libre de torsión respectivamente en R-Mod (ver Proposición 4.13). Luego tenemos la siguiente conjetura:

   Si $\langle F, G \rangle$ es un par adjunto, entonces: $\vec{F}$ (R-Mod) es clase de torsión si y sólo si $\vec{G}$ (R-Mod) es clase libre de torsión.

2. Sabemos que si $\langle F, G \rangle$ es un par adjunto tal que $\vec{F}$ (R-Mod) es clase de torsión y $\vec{G}$ (R-Mod) es clase libre de torsión, entonces los intervalos $[[\sigma_{\mathbf{R}_{[L]}}, 1]]$ y $[[0, \tau_{\mathbf{R}_{[L]}}]]$ se llenan (ver Corolario 3.71).

   El recíproco es: si los intervalos $[[\sigma_{\mathbf{R}_{[L]}}, 1]]$ y $[[0, \tau_{\mathbf{R}_{[L]}}]]$ se llenan, entonces ¿$\vec{F}$ (R-Mod) es clase de torsión y $\vec{G}$ (R-Mod) es clase libre de torsión?.

3. Sea $\langle F, G\rangle$ un par adjunto tal que $\vec{F}$ (R-Mod) y $\vec{G}$ (R-Mod) son clase de torsión y clase libre de torsión en R-Mod respectivamente, entonces ¿$F \cong \alpha_I^R$ y $G \cong \mathrm{Hom}_R(I, \_)$, con I un ideal puro ó $F \cong (\alpha_I^R)^*$ y $G \cong t(\alpha_I^R)$, con I un idel idempotente?, es decir, en este caso, ¿para F y G sólo hay estas dos opciones?

4. Para el par adjunto $\langle I \otimes_R \_, \mathrm{Hom}_R(I, \_)\rangle$, donde I es un ideal de R, nos falta determinar $(f)_{\mathbf{R}_{[I]}}$-*cerr* y *cerr*-$(f)_{\mathbf{R}_{[I]}}$. Si I es un ideal puro se simplifica la descripción, pero aún no hemos demostrado que la clase de R-módulos $\{\mathrm{Hom}_R(I, N) \mid N \in R\text{-Mod})\}$ es una clase libre de torsión. Esto nos ayudaría a implicaría:

   a) $[[\sigma_{\mathbf{R}_{[I]}}, 1]] = [t(\alpha_I^R), 1] \cap R$-radidem.

   b) $\mathbb{F}_{t(\alpha_I^R)} = \{\mathrm{Hom}_R(I, N) \mid N \in R\text{-Mod}\}$, pues esto implicaría que

   $$[[\sigma_{\mathbf{R}_{[I]}}, 1]] = [t(\alpha_I^R), 1] \cap R\text{-radidem} \ \text{ y } \ [t(\alpha_I^R), 1] \cap R\text{-radidem} \cong [0, \alpha_I^R] \cap R\text{-radidem}.$$

   Pues al ser I un ideal puro tenemos que $[[0, \tau_{\mathbf{R}_{[I]}}]] = [0, \alpha_I^R] \cap R$-radidem (ver Corolario 3.78) y una condición suficiente para responder los puntos a) y b) es que $\{\mathrm{Hom}_R(I, N) \mid N \in R\text{-Mod}\}$ sea una clase libre torsión (ver Corolario 3.71).

Preguntas relacionadas con anillos e ideales.

1. De la Proposición 4.22 tenemos que si R es un anillo semisimiple artiniano, entonces $[\mathcal{H}]_{\preceq}$ y $Im(\Psi)$ son retículas booleanas. Luego tenemos la siguiente conjetura:

   $Im(\Psi) = \{\mathbf{R} \in [\mathcal{H}]_{\preceq} \mid \mathcal{H} \subseteq \mathbf{R}\}$ y es una retícula booleana si y sólo si R es semisimple artiniano.

2. Si R es un anillo tal que todos sus ideales son idempotentes, entonces ¿Cómo es la imagen del morfismo $\Psi \circ \Phi : \mathcal{I}(R) \longrightarrow [\mathcal{H}]_{\preceq}$?.

3. Para cada I ideal de R tenemos la cadena de ideales $I \supseteq I^2 \supseteq \cdots \supseteq I^n \supseteq \cdots \supseteq \{0\}$ y cada ideal de esta cadena induce una relación bicerrada, de modo que por el Corolario 3.56 tenemos la cadena de relaciones bicerradas

   $$\mathbf{R}_{[R/I]} \supseteq \mathbf{R}_{[R/I^2]} \supseteq \cdots \supseteq \mathbf{R}_{[R/I^n]} \supseteq \cdots \supseteq \mathbf{R}_{[R]} = \mathcal{H}.$$

   Usando las contrucciones de Amitsur podemos encontrar al mayor idempotente por debajo de cada $\alpha_{I^n}^R$, denotado $\widehat{\alpha_I^R}$ y al menor radical por encima de cada $t(\alpha_{I^n}^R)$, denotado $\overline{t(\alpha_I^R)}$. De esta forma tenemos para todo $n \in \mathbb{N}$ que $\mathbb{T}_{\alpha_{I^n}^R} = \mathbb{T}_{\widehat{\alpha_I^R}}$ y $\mathbb{F}_{t(\alpha_{I^n}^R)} = \mathbb{F}_{\overline{t(\alpha_I^R)}}$. Luego

   $$f_{\mathbf{R}_{[R/I^n]}}(R\text{-Mod}) = f_{\mathcal{H}}(R/I^n\text{-Mod}) = \mathbb{F}_{t(\alpha_{I^n}^R)} = \mathbb{F}_{\overline{t(\alpha_I^R)}}, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

   $$f^{\mathbf{R}_{[R/I^n]}}(R\text{-Mod}) = f^{\mathcal{H}}(R/I^n\text{-Mod}) = \mathbb{T}_{\alpha_{I^n}^R} = \mathbb{T}_{\widehat{\alpha_I^R}}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

   Es decir, $\sigma_{\mathbf{R}_{[R/I]}} = \sigma_{\mathbf{R}_{[R/I^n]}}$ y $\tau_{\mathbf{R}_{[R/I]}} = \tau_{\mathbf{R}_{[R/I^n]}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así surge la pregunta:

   ¿$\mathbf{R}_{[R/I^i]} \sim \mathbf{R}_{[R/I^j]}$ para cada $i, j \in \{1, \cdots, n\}$?, o de forma equivalente

$$¿[[\sigma_{\mathbf{R}_{[R/I^i]}}, 1]] = [[\sigma_{\mathbf{R}_{[R/I^j]}}, 1]] \text{ y } [[0, \tau_{\mathbf{R}_{[R/I^i]}}]] = [[0, \tau_{\mathbf{R}_{[R/I^j]}}]]?.$$

Este caso es interesante, pues en la Proposición 2.21 se demostró que si $\mathbf{R}, \mathbf{S} \in [\mathcal{H}]_{\preceq}$ son tales que $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{S}$, entonces no necesariamente $\mathbf{R} \preceq \mathbf{S}$. En el caso de un anillo semisimple artiniano R, ya tenemos una descripción de todas las relaciones inducidas por ideales.

Problemas a desarrollar: bifuntores casi continuos que no necesariamente son continuos.

En la parte final de la tesis nos centramos principalmente en inducir relaciones bicerradas con bifuntores continuos y en estudiar las conexiones de Galois correspondientes. Quedan por desarrollar más casos de bifuntores continuos y los casos de bifuntores casi continuos (que no sean continuos) como los del Ejemplo 3.21:

1. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\_, \mathrm{t}(\_))$, donde t es el funtor de torsión.

2. $\mathrm{Hom}_R(\_, N \otimes_R \_)$, donde N_R es plano y Mittag-Leffler.

3. $\mathrm{Hom}_R(\_, (\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha) \otimes_R \_)$, donde $\{N_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq R$-Mod es una familia de R-módulos derechos Mittag-Leffler.

4. $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(N, \_), \_)$, donde N es como en el Ejemplo 3.9-4-c.

Problema a desarrollar: Relaciones bicerradas sobre $\mathbb{Z}$.

El caso del anillo $\mathbb{Z}$ es interesante estudiar pues no tiene ideales idempotentes y para todo ideal propio $n\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ ($n \in \mathbb{N}$) tenemos que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Mod no es una clase de torsión ni clase libre de torsión. Para este anillo tenemos a el funtor de torsión que es un funtor covariante casi continuo y que no es continuo.

Proposición 5.1. ([13], Proposición 3 (6)) *Sean A y B dos retículas completas y sea $f \in Gal_i(A, B)$. Entonces las funciones f_+ y f^+ están determinadas de forma única (una por la otra) como:*

$$f_+(a) = \bigwedge\{b \in B \mid a \leq f^+(b)\} \text{ y } f^+(b) = \bigvee\{a \in A \mid f_+(a) \leq b\}.$$

Ejemplo 5.2. *El funtor de torsión* $\mathrm{t} \in \mathbb{Z}$-pr *es covariante casi continuo (ver Ejemplo 3.9-4a) e induce la relación bicerrada*

$$\mathbf{R}_{\mathrm{t}} = \{(M, N) \in (\mathbb{Z}\text{-Mod})^2 \mid \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathrm{t}(N)) = 0\}.$$

la cual induce la conexión de Galois isótona $\langle \lambda_{\mathbf{R}_{\mathrm{t}}}, \mu_{\mathbf{R}_{\mathrm{t}}} \rangle$ sobre $\mathbb{Z}$-radidem *(ver Proposición 2.54). Como* t *es radical exacto izquierdo, para cada $\tau \in \mathbb{Z}$*-radidem, $\tau\mathrm{t} \in \mathbb{Z}$-radidem *(proposiciones 1.58 y 4.7) y por lo tanto por la Proposición 3.42*

$$cerr\text{-}(f)_{\mathbf{R}_{\mathrm{t}}} = \{\overleftarrow{\mathrm{t}}(\mathbb{F}_\tau) \mid \tau \in \mathbb{Z}\text{-radidem}\} = \{\mathbb{F}_{\tau\mathrm{t}} \mid \tau \in \mathbb{Z}\text{-radidem}\}$$

asi tenemos que $\lambda_{\mathbf{R}_{\mathrm{t}}} : \mathbb{Z}\text{-radidem} \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-radidem}$ *está dada como* $\lambda_{\mathbf{R}_{\mathrm{t}}}(\tau) = \tau\mathrm{t}$. *Por la Proposición 5.1 tenemos que* $\mu_{\mathbf{R}_{\mathrm{t}}}$ *está determinada de forma única como:*

$$\mu_{\mathbf{R}_{\mathrm{t}}}(\tau) = \bigvee\{\sigma \in \mathbb{Z}\text{-radidem} \mid \lambda_{\mathbf{R}_{\mathrm{t}}}(\sigma) \preccurlyeq \tau\} = \bigvee\{\sigma \in \mathbb{Z}\text{-radidem} \mid \sigma\mathrm{t} \preccurlyeq \tau\}.$$

Tenemos que $\overleftarrow{\mathrm{t}}\ (\{0\}) = \mathbb{F}_{\mathrm{t}}$, *esto implica que* $\tau_{\mathbf{R}_{\mathrm{t}}} = \mathrm{t}$ *y* $\sigma_{\mathbf{R}_{\mathrm{t}}} = \bigvee\{\sigma \in \mathbb{Z}\text{-radidem} \mid \sigma\mathrm{t} = 0\}$.

1. *¿En este caso cómo son los intervalos* $[[\sigma_{\mathbf{R}_{\mathrm{t}}}, 1]]$ *y* $[[0, \tau_{\mathbf{R}_{\mathrm{t}}}]] = [0, \mathrm{t}] \cap \mathbb{Z}\text{-radidem}$*?.*
2. *¿Como son las* $\mathbf{R}_{\mathrm{t}}$*-teorías de torsión?.*
3. *¿Los elementos de* $[0, \mathrm{t}] \cap \mathbb{Z}\text{-radidem}$ *son de la forma* $\tau\mathrm{t}$ *con* $\tau \in \mathbb{Z}\text{-radidem}$ *(como en el Corolario 4.18)?*

Relaciones inducidas por otros bifuntores en R-Mod

El Teorema de Polaridades nos permite para toda $\mathbf{S} \in \wp((R\text{-Mod})^2)$ tener a las familias de Moore $(f)_{\mathbf{S}}$-*cerr*, *cerr*-$(f)_{\mathbf{S}}$ y con esto obtener conglomerado de relaciones bicerradas $[\mathbf{S}]_{\preceq}$. Por consiguiente, también podemos definir parejas de clases de R-módulos $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ que cumplan: $f_{\mathbf{S}}(\mathcal{X}) = \mathcal{Y}$ y $f^{\mathbf{S}}(\mathcal{Y}) = \mathcal{X}$. Por ejemplo, podemos tomar el bifuntor $\mathrm{Ext}^1_R(\_,\_)$ y a la relación

$$\mathbf{S} = \{(M, N) \in (R\text{-Mod})^2 \mid \mathrm{Ext}^1_R(M, N) = 0\}.$$

Observemos que esta relación está inducida por un bifuntor que no es casi continuo.

Con la relación $\mathbf{S}$ podemos definir a las teorías de cotorsión, la cuales fueron originalmente estudiadas por Salce L. en [34], quien dió la siguiente definición para el anillo $\mathbb{Z}$.

Definición 5.3. (Ver [34]) *Una* ***teoría de cotorsión*** *en una categoría abeliana* $\mathcal{A}$ *es una pareja* $(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ *de clases de objetos de* $\mathcal{A}$ *tal que* $f_{\mathbf{S}}(\mathcal{D}) = \mathcal{E}$ *y* $f^{\mathbf{S}}(\mathcal{E}) = \mathcal{D}$.

$\mathcal{D}$ *es llamada una* ***clase de cotorsión*** *y* $\mathcal{E}$ *una* ***clase libre de cotorsión***.

Ejemplos de teorías de cotorsión:

1. $(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ si $\mathcal{D} = \mathcal{A}$, entonces $\mathcal{E}$ es la clase de objetos inyectivos.
2. $(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ si $\mathcal{E} = \mathcal{A}$, entonces $\mathcal{D}$ es la clase de objetos proyectivos.
3. $(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ si $\mathcal{D} = R$-Mod, entonces $\mathcal{E}$ es la clase de módulos inyectivos.
4. $(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ si $\mathcal{E} = R$-Mod, entonces $\mathcal{D}$ es la clase de módulos proyectivos.

El bifuntor $\mathrm{Ext}^n_R(\_,\_)$ tiene las siguientes propiedades:

1. $\mathrm{Ext}^0_R(M, N) \cong \mathrm{Hom}_R(M, N)$ para toda $M, N \in R$-Mod.
2. Para toda $\{M_\alpha\} \subseteq R$-Mod y $N \in R$-Mod, $\mathrm{Ext}^n_R(\bigoplus M_\alpha, N) \cong \prod \mathrm{Ext}^n_R(M_\alpha, N)$ y para toda $M \in R$-Mod, $\mathrm{Ext}^n_R(\_, M)$ es un funtor contravariante y que no es exacto.

3. Para toda $\{N_\alpha\} \subseteq R$-Mod y $M \in R$-Mod, $\mathrm{Ext}^n_R(M, \prod N_\alpha) \cong \prod \mathrm{Ext}^n_R(M, N_\alpha)$ y para toda $M \in R$-Mod, $\mathrm{Ext}^n_R(M, \_)$ es un funtor convariante y que no es exacto.

Por consiguiente el bifuntor $\mathrm{Ext}^n_R(\_,\_)$ no es casi continuo.

Para la conexión de Galois $(f)_{\mathbf{S}} \in Gal(\wp(\mathcal{A}), \wp(\mathcal{A}))$,

1. ¿Cómo son los conglomerados $(f)_{\mathbf{S}}$-*cerr* y *cerr*-$(f)_{\mathbf{S}}$?

2. ¿Cómo generamos relaciones bicerradas con respecto a $\mathbf{S}$?

3. ¿Se pueden generar relaciones bicerradas con respecto a $\mathbf{S}$ con bifuntores?

4. Para cada $\mathbf{T} \in [\mathbf{S}]_{\preceq}$ ¿Podemos definir a las $\mathbf{T}$-teorías de cotorsión?.

Conclusiones

El planteamiento de esta investigación fué aplicar las conexiones de Galois a las teorías de torsión. Esto resultó en una extensión del concepto de teorías de torsión sobre la categoría de R-módulos a $\mathbf{R}$-teorías de torsión; esta extensión relaciona tres conceptos; relaciones bicerradas, teorías de torsión y bifuntores casi continuos.

Para estudiar relaciones bicerradas con respecto a $\mathcal{H}$ usamos el Teorema de Domenach-Leclerc y definimos un preorden $\preceq$ en $Gal(A, B)$, que en caso de que A y B fueran conjuntos potencia o conglomerados de todas las subclases de algunas clases, induce un preorden en $\wp(A \times B)$. Con este preorden dimos el concepto de una relación con respecto a otra relación, y el concepto de conexión de Galois bicerrada con respecto a otra conexión de Galois y con esto obtuvimos el que llamamos Teorema de Domenach-Leclerc generalizado.

Dado que nuestro objetivo es estudiar relaciones biceradas con respecto a $\mathcal{H}$, por lo que tuvimos que generarlas; para esto creamos los conceptos de funtor casi continuo, funtor casi cocontinuo y bifuntor casi continuo, los cual extiende los conceptos de funtor continuo, funtor cocontinuo, y bifuntor continuo respectivamente. Estos funtores casi continuos (cocontinuos) resultan tener propiedades interesantes como las de que sus imágenes inversas preservan clases de torsión (libres de torsión), que los podemos componer, hacer el producto y coproducto de ellos y mantienen sus propiedades. Además estas propiedades nos ayudaron a describir los cerrados de las conexiones de Galois que inducen.

En la parte final de la tesis nos centramos principalmente en inducir relaciones bicerradas con bifuntores continuos y en estudiar sus conexiones de Galois correspondientes. Usamos los Teoremas de Watts-Eilenberg para describir los funtores covariantes continuos y cocontinuos con un R-bimódulo, así desarrollamos como ejemplo particular los casos de los pares adjuntos $\langle I \otimes_R \_, \mathrm{Hom}_R(I, \_)\rangle$ y $\langle R/I \otimes_R \_, \mathrm{Hom}_R(R/I, \_)\rangle$ y sus relaciones bicerradas inducidas $\mathbf{R}_{[I]}$ y $\mathbf{R}_{[R/I]}$, respectivamente donde I es un ideal de R y obtuvimos:

1. Si I es un ideal puro, entonces para $\mathbf{R}_{[I]}$ obtuvimos el isomorfismo de orden entre los intervalos $[[\sigma_{\mathbf{R}_{[I]}}, 1]]$ y $[0, \alpha_I^R] \cap R$-radidem, donde $\sigma_{\mathbf{R}_{[I]}} = t(\alpha_I^R)$.

2. Si I es idempotente, entonces para $\mathbf{R}_{[R/I]}$ obtuvimos el isomorfismo de orden entre los intervalos $[\alpha_I^R, 1] \cap R$-radidem y $[0, t(\alpha_I^R)] \cap R$-radidem. Esto nos llevo a saber exactamente cuales son los elementos de estos intervalos, esto se enuncia en los Corolarios 4.18 y 4.19.

3. Si R es un anillo semisimple artiniano obtuvimos la conexión de Galois isótona $\langle \lambda_{\mathbf{R}_{[R/I]}}, \mu_{\mathbf{R}_{[R/I]}} \rangle$ sobre R-radidem descrita como (ver Corolario 4.23):

$$\lambda_{\mathbf{R}_{[R/I]}}(\sigma) = \sigma t(\alpha_I^R) = \sigma \wedge t(\alpha_I^R), \text{ para todo } \sigma \in R\text{-pr},$$
$$\mu_{\mathbf{R}_{[R/I]}}(\tau) = (\alpha_I^R : \tau) = \alpha_I^R \vee \tau, \text{ para todo } \tau \in R\text{-pr}.$$

y obtuvimos los isomorfimos $\langle [0, \alpha_I^R], \preccurlyeq \rangle \cong \langle [t(\alpha_I^R), 1], \preccurlyeq \rangle$ y $\langle [\alpha_I^R, 1], \preccurlyeq \rangle \cong \langle [0, t(\alpha_I^R)], \preccurlyeq \rangle$. Además, demostramos que en este caso $[\mathcal{H}]_{\preceq}$ es una retiucla booleana de cardinalidad 2^{n^2}, donde $n = |R\text{-simp}|$ y que todas las relaciones bicerradas inducidas por pares adjuntos forman una retícula booleana en $[\mathcal{H}]_{\preceq}$ de cardinalidad 2^n.

En el Ejemplo 4.29 ilustramos esta situación para un anillo semisimple tal que $R = I_1 \oplus I_2$ y mostramos en la figura de este ejemplo como quedan las relaciones bicerradas con respecto a $[\mathcal{H}]_{\preceq}$ y las relaciones bicerradas inducidas por pares adjuntos.

Queda por desarrollar más casos de bifuntores continuos y bifuntores que no necesariamente son continuos como los del Ejemplo 3.21 y las preguntas que tienen que ver con pares adjuntos.

Apéndice A

Categorías abelianas

En este apéndice damos definiciones, equivalencias y propiedades de las categorías abelianas, puesto que en ellas surgen de forma natural los conceptos de sucesiones exactas, sucesiones exactas cortas, funtores derivados entre otros; algunos ejemplos de teoremas importantes en el estudio de categorías abelianas son el lema de los cinco, lema de los cinco corto y el lema de la serpiente entre otros.

Definición A.1. *Una $\mathcal{A}$ una categoría se dice:*

1. ***Completa** si todos los diagramas pequeños en $\mathcal{A}$ tienen límite en $\mathcal{A}$.*
2. ***Cocompleta** si todos los diagramas pequeños en $\mathcal{A}$ tienen colímite en $\mathcal{A}$.*
3. ***Bicompleta** si es completa y cocompleta.*

De la definición anterior tenemos que la categoría R-Mod es bicompleta.

Definición A.2. *Una categoría $\mathscr{A}$ es **preaditiva** si:*

1. *La composición de funciones $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B, C) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, C)$ es bilineal.*
2. *Para cada par $A, B \in \mathscr{A}$, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B)$ es un grupo abeliano.*
3. *Cada grupo abeliano $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B)$ tiene elemento cero.*

*Además $\mathscr{A}$ es **aditiva** si cada par de objetos tiene producto y coproducto.*

Definición A.3. ([24], Capítulo VIII) *Una categoría $\mathscr{A}$ es **abeliana** si es preaditiva y cumple:*

1. *$\mathscr{A}$ tiene objeto cero.*
2. *Para cada par de objetos de $\mathscr{A}$ existe un producto y un coproducto.*
3. *Todo morfismo de $\mathscr{A}$ tiene kernel y cokernel.*
4. *Cada monomorfismo es kernel de algún morfismo.*
5. *Cada epimorfismo es cokernel de algún morfismo.*

Esta definición es equivalente a la siguiente:

1. Una categoría es preaditiva si todos los conjuntos de homomorfismos son grupos abelianos, tiene objeto cero, y la composición de morfismos es bilineal.

2. Una categoría preaditiva es aditiva si todo par de objetos tiene producto y coproducto.

3. Una categoría preaditiva es abeliana si todo monomorfismo y epimorfismo es normal. Esto significa que todo monomorfismo es el núcleo de algún morfismo y que todo epimorfismo es el conúcleo de algún morfismo.

De 1 tenemos que dado cualquier par de objetos A, B de una categoría abeliana $\mathcal{A}$, el morfismo cero de A a B está definido como el único elemento cero del conjunto de homomorfismos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$, ya que es un grupo abeliano. También, puede ser definido como la única composición $A \longrightarrow 0 \longrightarrow B$, donde 0 es el objeto cero de la categoría.

Proposición A.4. ([24], Capítulo VIII) *En una categoría abeliana $\mathscr{A}$ cada morfismo $f : A \to B$ tiene una factorización $f = me$, con m un monomorfismo y e un epimorfismo.*

Definición A.5. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría normal y conormal con kerneles y cokerneles. Diremos que es $\mathcal{A}$ es una* ***categoría exacta*** *si cada morfismo $f : A \longrightarrow B$ puede escribirse como una composición $f = me$, donde e es un epimorfismo y m es un monomorfismo.*

De la Proposición A.4 tenemos que una categoría abeliana es una categoría exacta (que además es aditiva con productos finitos), es decir, el concepto de sucesión exacta surge de manera natural en este entorno y esto da lugar al concepto de funtor exacto.

A.1. Propiedades de funtores exactos

A continuación vemos algunas propiedades de los funtores exactos. La siguiente propiedad no sólo la cumplen las funciones sino también los funtores.

Observación A.6. *Sea $\{f_i : M_i \longrightarrow N_i\}_{i\in X}$ una familia de morfismos. Entonces:*

1. $Im(\bigoplus_{i\in X} f_i) = \bigoplus_{i\in X} Im(f_i)$ *y* $Ker(\bigoplus_{i\in X} f_i) = \bigoplus_{i\in X} Ker(f_i)$.

2. $Im(\prod_{i\in X} f_i) = \prod_{i\in X} Im(f_i)$ *y* $Ker(\prod_{i\in X} f_i) = \prod_{i\in X} Ker(f_i)$.

Proposición A.7. *Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana bicompleta y $\{0 \to N_i \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{g_i} L_i \to 0\}_{i\in X}$ una familia de sucesiones exactas en $\mathscr{A}$, entonces las sucesiones:*

1. $0 \longrightarrow \bigoplus_{i\in X} N_i \xrightarrow{\bigoplus f_i} \bigoplus_{i\in X} M_i \xrightarrow{\bigoplus g_i} \bigoplus_{i\in X} L_i \longrightarrow 0.$

2. $0 \longrightarrow \prod_{i\in X} N_i \xrightarrow{\prod f_i} \prod_{i\in X} M_i \xrightarrow{\prod g_i} \prod_{i\in X} L_i \longrightarrow 0.$

son exactas.

Demostración. Por la Observación A.6, $ker(\bigoplus_{i\in X} g_i) = \bigoplus_{i\in X} ker(g_i) = \bigoplus_{i\in X} Im(f_i) = Im(\bigoplus_{i\in X} f_i)$, además como cada f_i es monomorfismo, entonces $\bigoplus_{i\in X} f_i$ es monomorfismo y cada g_i es un epimorfismo, entonces $\bigoplus_{i\in X} g_i$ es epimorfismo por lo tanto la sucesión es exacta.

De forma análoga se demuestra que la sucesión en 2 es exacta. $\square$

Proposición A.8. *Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ categorías abelianas bicompletas. Sea $\{F_i : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}\}_{i\in X}$ una familia de funtores covariantes. Entonces $\prod_{i\in X} F_i$ y $\bigoplus_{i\in X} F_i$ son funtores covariantes.*

Demostración. Tenemos que $\prod_{i\in X} F_i : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ es una asignación definida como $(\prod_{i\in X} F_i)(M) = \prod_{i\in X} F_i(M)$ para todo $M \in \mathscr{A}$ y a cada morfismo $f : M \longrightarrow N$ le asigna el morfismo $(\prod_{i\in X} F_i)(f) : (\prod_{i\in X} F_i)(M) \longrightarrow (\prod_{i\in X} F_i)(N)$ dado como

$$((\textstyle\prod_{i\in X} F_i)(f))(M) = (\prod_{i\in X}(F_i(f)))(M) = \prod_{i\in X}(F_i(f))(M),$$

además $(\prod_{i\in X} F_i)(1_M) = \prod_{i\in X} F_i(1_M) = \prod_{i\in X} 1_{F_i(M)} = 1_{\prod_{i\in X} F_i(M)}$.

Sean $f : N \longrightarrow M$ y $g : M \longrightarrow L$ dos morfismos, se sigue por la Observación A.6 que $(\prod_{i\in X} F_i)(g\circ f) = \prod_{i\in X} F_i(g\circ f) = \prod_{i\in X}(F_i(g)\circ F_i(f)) = (\prod_{i\in X} F_i(g))\circ(\prod_{i\in X} F_i(f))$. Por lo tanto $\prod_{i\in X} F_i$ es un funtor covariante.

De forma análoga para $\bigoplus_{i\in X} F_i$. $\square$

Proposición A.9. *Sea $\{F_i : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}\}_{i\in X}$ una familia de funtores:*

1. *Si F_i es exacto izquierdo para cada $i \in X$, entonces $\prod_{i\in X} F_i$ y $\bigoplus_{i\in X} F_i$ son funtores exactos izquierdos.*

2. *Si F_i es exacto derecho para cada $i \in X$, entonces $\prod_{i\in X} F_i$ y $\bigoplus_{i\in X} F_i$ son funtores exactos derechos.*

Demostración. Sea $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $\mathscr{A}$.

1. Tenemos la sucesión $\prod_{i\in X} F_i(N_i) \xrightarrow{\prod F_i(f_i)} \prod_{i\in X} F_i(M_i) \xrightarrow{\prod F_i(g_i)} \prod_{i\in X} F_i(L_i)$. Como F_i es un funtor exacto para cada $i \in X$, además tenemos que $F_i(f)$ es un monomorfismo para toda $i \in X$, por lo tanto $Ker(\prod_{i\in X} F_i(f)) = \prod_{i\in X} Ker(F_i(f)) = 0$. Luego $Im(\prod_{i\in X} F_i(f_i)) = \prod_{i\in X} Im(F_i(f_i)) = \prod_{i\in X} Ker(F_i(g_i)) = Ker(\prod_{i\in X} F_i(g_i))$. Por lo tanto $\prod_{i\in X} F_i$ es un funtor exacto izquierdo.

   De forma análoga para $\bigoplus_{i\in X} F_i$.

2. La demostración es simliar para funtores exactos derechos.

$\square$

Se dice que un funtor $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ preserva un *límite* $\mathcal{L} = \{J \xrightarrow{l_i} D_i\}$ del diagrama $D : J \longrightarrow \mathcal{A}$ siempre que $F(\mathcal{L}) = \{F(J) \xrightarrow{F(l_i)} F(D_i)\}$ es un límite del diagrama $F\circ D : J \longrightarrow \mathcal{B}$. Noción dual: F preserva colímites.

Definición A.10. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías completas. Un funtor $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es* ***continuo*** *si preserva todos los límites pequeños.*

Como ejemplo tenemos que el funtor continuo $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, \_)$ es continuo para todo objeto M de $\mathcal{A}$.

Definición A.11. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías cocompletas. Un funtor $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$* ***cocontinuo*** *si preserva todos los colímites pequeños.*

Como ejemplo tenemos que el funtor $M \otimes_R \_$ es cocontinuo para todo R-módulo derecho M.

Apéndice B

Teoremas de Watts-Eilenberg

Los Teoremas de Watts-Eilenberg nos ayudan en nuestro estudio de relaciones bicerradas con respecto a $\mathcal{H}$ inducidas por pares adjuntos, y nos ayudan a caracterizar a cada prerradical exacto derecho que preserva productos con un funtor $\mathrm{Hom}_R(R/I, \_)$, donde I es un ideal de R y a cada prerradical exacto izquierdo como un producto tensorial α_I^R con I ideal puro de R.

En esté apéndice damos las demostraciones de los Teoremas de Watts-Eilenberg, que a grandes rasgos dicen:

1. Un funtor entre categorías de módulos es un adjunto derecho si y sólo si preserva límites.
2. Un funtor entre categorías de módulos es un adjunto izquierdo si y sólo si preserva colímites.
3. Si $\langle F, G\rangle$ es un par adjunto, entonces F preserva colímites y G preserva límites.
4. Para cada par adjunto $\langle F, G\rangle$, existe $L \in R$-BiMod (único salvo ismorfismo) tal que $F \cong L \otimes_R \_$ y $G \cong \mathrm{Hom}_R(L, \_)$, es decir, F es un funtor covariante cocontinuo y G es un funtor covariante continuo (ver Definiciones A.10 y A.11).

Proposición B.1. [2] *Sean R y S anillos y sea $U = {}_SU_R$ un bimódulo. Entonces:*

1. $\mathrm{Hom}_S(U, \_) : S\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}$ *es un funtor.*

2. $U \otimes_R \_ : R\text{-Mod} \longrightarrow S\text{-Mod}$ *es un funtor.*

□

Definición B.2. *Una **resolución libre** de un R-módulo M es una sucesión exacta*

$$\ldots \longrightarrow F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \longrightarrow \ldots F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

en la cual cada F_n es un R-módulo libre.

Proposición B.3. [32] *Cada R-módulo M tiene una resolución libre.* □

Teorema B.4. ([32], Teorema 5.45) *Sea* $F : R\text{-Mod} \longrightarrow S\text{-Mod}$ *un funtor exacto derecho que preserva sumas directas. Entonces* $F \cong L \otimes_R \_$ *para algún* ${}_SL_R$ *bimódulo. Además, podemos escoger* $L = F(R)$.

Demostración. Primero le daremos estructura a $F(R)$ de S-izquierdo-R-derecho-bimódulo. Por la Proposición B.1 tenemos que $F(R)$ es un S-módulo izquierdo. Ahora daremos a $F(R)$ una estructura de R-módulo derecho. Para cada $M \in R\text{-Mod}$ y $m \in M$ tenemos un morfismo $d_m : R \longrightarrow M$ definido como $d_m(r) = mr$.

Luego $F(d_m) : F(R) \longrightarrow F(M)$ es un morfismo. Definimos $\tau_M : F(R) \times M \longrightarrow F(M)$ como $\tau_M((r, m)) = F(d_m)(r)$ donde $r \in F(R)$. Si tomamos $M = R$, entonces $\tau_R : F(R) \times R \longrightarrow F(R)$ da una estructura de R-módulo derecho a $F(R)$. Tenemos que $\tau_M : F(R) \times M \longrightarrow F(M)$ es bilineal, y τ_M induce un morfismo $\lambda_M : F(R) \otimes_R M \longrightarrow F(M)$. Si denotamos $L = F(R)$, entonces $\lambda : L \otimes_R \_ \longrightarrow F$ es una transformación natural.

Observemos que $\lambda_R : L \otimes_R R \longrightarrow F(R)$ es un isomorfismo (para $L = F(R)$); además, como $L \otimes_R \_$ y F preservan sumas, $\lambda_M : L \otimes_R M \longrightarrow F(M)$ es un isomorfismo para cada R-módulo libre M.

Sea M un R-módulo derecho cualquiera. Por la Proposición B.3, existe una sucesión exacta $C \longrightarrow A \longrightarrow M \longrightarrow 0$, donde C y A son libres. Como $L \otimes_R \_$ y F son exactos derechos, existe un diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{tikzcd}
L \otimes_R C \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_C"] & L \otimes_R A \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_A"] & L \otimes_R M \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_M"] & 0 \\
F(C) \arrow[r] & F(A) \arrow[r] & F(M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Se tiene que λ_C y λ_A son isomorfismos, por el Lema 1.68 tenemos que λ_M es un isomorfismo. Por lo tanto $\lambda : L \otimes_R \_ \longrightarrow F$ es un isomorfismo natural. □

Teorema B.5. ([32], Teorema 5.51) *Para un funtor* $F : R\text{-Mod} \longrightarrow S\text{-Mod}$, *las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *F preserva límites, es decir, F es cocontinuo.*
2. *F es exacto derecho y preserva sumas directas.*
3. *$F \cong L \otimes_R \_$ para algún ${}_SL_R$ bimódulo.*
4. *Existe un funtor $G : S\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}$ tal que $\langle F, G\rangle$ es un par adjunto.*

Demostración. $1 \Rightarrow 2$) Los conúcleos y sumas directas son límites.

$2 \Rightarrow 3$) Teorema B.4.

$3 \Rightarrow 4$) Tenemos que $\langle L \otimes_R \_, \mathrm{Hom}_S(L, \_)\rangle$ es un par adjunto. Podemos tomar $G \cong \mathrm{Hom}_S(L, \_)$, así $\langle F, G\rangle$ es un par adjunto.

$4 \Rightarrow 1$) Teorema 1.106. □

Definición B.6. *Un R-módulo C es un* **cogenerador** *para R-*Mod *si, para cada R-módulo M y cada $m \in M$ diferente de cero, existe $f : M \longrightarrow C$ con $f(m) \neq 0$.*

Teorema B.7. ([32], Lema 5.49) *Existe un cogenerador inyectivo para R-*Mod.

Demostración. Definimos C un R-módulo inyectivo que contiene a $\bigoplus_{I \leq R} R/I$, donde $I \leq R$ es un ideal izquierdo. Si $M \in R$-Mod y $m \in M$ distinto de cero, entonces $Rm \cong R/I$ para algún ideal $I \leq R$. Consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & C & \\ 0 \arrow[r] & Rm \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & M \arrow[ul, dashed, "g"'] \end{tikzcd}$$

donde i es la inclusión y f es un isomorfismo de $< m >$ a un submódulo de C isomorfo a R/I. Como C es inyectivo, existe un homomorfismo $g : M \longrightarrow C$ que extiende a f y así $g(m) \neq 0$. $\square$

Teorema B.8. ([32], Teorema 5.50) *Sea G : S-*Mod $\longrightarrow$ R-Mod *un funtor que es exacto izquierdo y preserva productos. Entonces $G \cong$* $\mathrm{Hom}_S(L, \_)$ *para algún ${}_SL_R$-bimódulo.*

Demostración. Para $M \in S$-Mod y un conjunto X, tenemos $M^X = \prod_{x \in X} M_x$ donde $M_x = M$ para todo $x \in X$. Consideremos M^X como el conjunto de todas las funciones $X \longrightarrow M$; en particular, podemos considerar $e = 1_M \in M^M$. Si $x \in M$ entonces la x-ésima coordenada de e es x, luego

$$p_x(e) = x$$

donde $p_x : M^M \longrightarrow M$ es la proyección canónica. Escogemos un cogenerador inyectivo C de S-Mod y sea $\prod C = C^{G(C)}$. Para cada $x \in G(C)$ tenemos una proyección $p_x : \prod C \longrightarrow C$ que induce el morfismo $G(p_x) : G(\prod C) \longrightarrow G(C)$

$$\begin{tikzcd} G(C)^{G(C)} \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "\pi_x"'] & & G(\prod C) \arrow[dl, "G(p_x)"] \\ & G(C) & \end{tikzcd}$$

Es decir, $G(p_x)\theta = \pi_x$ para todo $x \in G(C)$. Como G preserva productos sea

$$e = 1_{G(C)} \in G(C)^{G(C)}$$

Definimos $\tau : \mathrm{Hom}_S(\prod C, C) \longrightarrow G(C)$ como $\tau(f) = G(f)(\theta(e))$. La asignación τ es un epimorfismo, si $x \in G(C)$, entonces la x-ésima proyección $p_x : \prod C \longrightarrow C$ existe. Como G preserva productos, $G(p_x)$ es la proyección de $G(\prod C) = G(C)^{G(C)}$, luego $G(p_x)(\theta(e)) = \pi_x(\theta(e)) = x$. Entonces $\tau(p_x) = x$ y τ es epimorfismo.

Describiremos a $Ker(\tau)$. Si N es un submódulo de $\prod C$ con inclusión $i : N \longrightarrow \prod C$, podemos identificar $G(N)$ como el submódulo $Im(G(i))$ de $G(\prod C)$, pues G es exacto izquierdo, es decir, preserva monomorfismos (el kernel es un límite inverso).

Definimos $L = \bigcap\{N \leq \prod C \mid \theta(e) \in G(N)\}$, $L = \varprojlim N$; se sigue que $G(L) = \varprojlim G(N) = \bigcap G(N)$; tenemos que $\theta(e) \in G(L)$.

Para $f : \prod C \longrightarrow C$ tenemos:

$f \in Ker(\tau)$ si y sólo si $0 = \tau(f) = G(f)(\theta(e))$ si y sólo si $\theta(e) \in Ker(G(f))$ si y sólo si $e \in G(Ker(f))$ (pues G es exacto izquierdo) si y sólo si $L \subseteq Ker(f)$ (por definición de L).

Si $j : L \longrightarrow \prod C$ es la inclusión, entonces $j^* : \mathrm{Hom}_S(\prod C, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(L, C)$ es epimorfismo pues C es inyectivo y $f \in Ker(j^*)$ si y sólo si $j^*(f) = fj = 0$. Entonces $f \in Ker(j^*)$ si y sólo si $L = Im(j) \subseteq Ker(f)$, luego $Ker(j^*) = Ker(\tau)$.

La sucesión exacta $0 \longrightarrow L \xrightarrow{j} \prod C \xrightarrow{p} \prod C/L \longrightarrow 0$ y C inyectivo nos da que la fila de arriba es una sucesión exacta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Ker(\tau) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_S(\prod C, C) \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_S(L, C) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\lambda_C"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Ker(\tau) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_S(\prod C, C) \arrow[r, "\tau"] & G(C) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

De nuestros cálculos obtenemos que la sucesión de abajo es exacta. Como $Ker(\tau) = Ker(j^*)$, los dos cokerneles son isomorfos vía:

$$\lambda_C : \mathrm{Hom}_S(L, C) \longrightarrow G(C)$$

dada como $\lambda_C(f) = G(f)(e)$ (este hecho es en general: Si $\alpha : A \longrightarrow X$ y $\beta : A \longrightarrow Y$ son epimorfismos con el mismo kernel, entonces $X \cong Y$ vía $x \mapsto \beta(\overleftarrow{\alpha}(x))$). Es fácil comprobar que $\lambda : \mathrm{Hom}_R(L, \_) \longrightarrow G$ es una transformación natural, donde $\lambda_M : \mathrm{Hom}_R(L, M) \longrightarrow G(M)$ está dada por $\lambda_M(f) = G(f)(e)$.

Para cualquier R-módulo M, existe un monomorfismo $M \longrightarrow C^{\mathrm{Hom}_S(M,C)}$ dado como $m \mapsto f_m$, el vector cuya f-ésima coordenada es f_m. Existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow C^X \longrightarrow C^Y$$

para conjuntos X y Y, pues tenemos la epi-mono factorización $C^X \longrightarrow C^X/M \longrightarrow C^Y$. Como G y $\mathrm{Hom}_S(L, \_)$ son exactos izquierdos, existe un diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_S(L, M) \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_M"] & \mathrm{Hom}_S(L, C^X) \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_{C^X}"] & \mathrm{Hom}_S(L, C^Y) \arrow[d, "\lambda_{C^Y}"] \\
0 \arrow[r] & G(M) \arrow[r] & G(C^X) \arrow[r] & G(C^Y)
\end{tikzcd}$$

Las asignaciones λ_{C^X} y λ_{C^Y} son isomorfismos, pues λ_C es un isomorfismo y ambos preservan productos; por el lema del tres tenemos que λ_M es un isomorfismo.

Concluimos que $\mathrm{Hom}_S(L, \_) \cong G$. Recordemos que $L \in S$-Mod y por la Proposición B.1 L es también un R-módulo derecho. $\square$

Teorema B.9. ([32], Teorema 5.52) *Para un funtor $G : S\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}$ son equivalentes:*

1. *G preserva colímites, es decir, G es continuo.*
2. *G es exacto izquierdo y preserva productos.*
3. *$G \cong \mathrm{Hom}_S(L, \_)$ para algún ${}_SL_R$-bimódulo.*
4. *Existe un funtor $F : R\text{-Mod} \longrightarrow S\text{-Mod}$ tal que $\langle F, G\rangle$ es un par adjunto.*

Demostración. $1 \Rightarrow 2$) Los kerneles y productos directos son colímites.

$2 \Rightarrow 3$) Teorema B.8.

$3 \Rightarrow 4$) Tomamos $F = L \otimes_R \_$, donde ${}_SL_R$ es un bimódulo (Proposición B.1 y Teorema B.8). De esta forma $\langle F, G\rangle = \langle L \otimes_R \_, \mathrm{Hom}_S(L, \_)\rangle$ es un par adjunto.

$4 \Rightarrow 1$) Teorema 1.106. □

En el siguiente teorema se relacionan los Teoremas B.5 y B.9.

Teorema B.10. *Sea $\langle F, G\rangle : R\text{-Mod} \longrightarrow S\text{-Mod}$ un par adjunto, entonces existe un ${}_SL_R$ bimódulo tal que $F \cong L \otimes_R \_$ y $G \cong \mathrm{Hom}_S(L, \_)$. Además L es única salvo isomorfismo.*

Demostración. Por el Teorema B.4 tenemos que $F \cong L \otimes_R \_$ para algún ${}_SL_R$-bimódulo, veamos que este mismo bimódulo sirve para G. Para toda $M, N \in R\text{-Mod}$ tenemos:

$$\mathrm{Hom}_R(M, G(N)) \cong \mathrm{Hom}_S(F(M), N) \cong \mathrm{Hom}_S(L \otimes_R M, N) \cong \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_S(L, N))$$

por lo tanto tomando $M = R$ tenemos que

$$G(N) \cong \mathrm{Hom}_R(R, G(N)) \cong \mathrm{Hom}_R(R, \mathrm{Hom}_S(L, N)) \cong \mathrm{Hom}_S(L, N)$$

esto es para toda $N \in R\text{-Mod}$. Por lo tanto $G \cong \mathrm{Hom}_S(L, \_)$.

Sean L_1, L_2 bimódulos tales que $F \cong L_1 \otimes_R \_$ y $F \cong L_2 \otimes_R \_$, entonces

$$L_1 \cong L_1 \otimes_R R \cong F(R) \cong L_2 \otimes_R R \cong L_2$$

y como $F(R) \in S\text{-Mod}$, entonces $L_1 \cong L_2$ como R-S-bimódulos. □

De los resultados anteriores se tiene el siguiente teorema:

Teorema B.11. *Sean R y S anillos. Entonces existe una equivalencia de categorías:*

$$S\text{-Mod-}R \xrightarrow{\cong} Func_{coc}(R\text{-Mod}, S\text{-Mod}).$$

Donde $Func_{coc}(R\text{-Mod}, S\text{-Mod})$ es la categoría de funtores cocontinuos.

Apéndice C

Los tres niveles y fundamentación de Grothendieck

A lo largo de esta tesis trabajamos con colecciones de clases propias, es decir, que no son conjuntos, como por ejemplo: $\wp(R\text{-Mod}), \mathcal{T}\text{-}tors$ y $\mathcal{L}\text{-}tors$; luego necesitamos un marco de referencia suficientemente amplio que no sólo incluya a conjuntos y a clases sino también a estas colecciones de clases. Damos dos fundamentaciones que incluyen a colecciones que tienen como elementos a clases propias; una es la llamada de los *tres niveles; conjunto, clase y conglomerado* y la otra son los universos de Grothendiek. Esto se puede consultar en [1] (capítulo 0, Fundamentaciones) y en [3] (capítulo I).

C.1. Tres niveles: conjunto, clase y conglomerado

Ya conocemos la axiomática usual de conjuntos (ZFC), así que sólo mencionaremos de forma resumida la de clases y la de conglomerados.

Clases: El concepto de "clase" ha sido creado para hacer frente a "grandes colecciones de conjuntos". En particular, requerimos que:

1. Los elementos de cada clase son conjuntos.

2. Para cada "propiedad" P, podemos construir a la clase de todos los conjuntos con la propiedad P.

   Por lo tanto existe la clase más grande; la clase de todos los conjuntos, llamado universo, denotado por $\mathcal{U}$. Las clases son precisamente subcolecciones de $\mathcal{U}$. Así, dadas dos clases A y B, uno puede formar las clases $A \cap B$, $A \cup B$ y $A \times B$. Debido a esto, no hay problema al definir asignaciones entre clases, relaciones de equivalencia entre clases, etc. Una familia $(A_i)_{i \in X}$ de conjuntos es una función $A : I \longrightarrow \mathcal{U}$ (envía a cada $i \in X$ a $A(i) = A_i$). En particular si X es un conjunto, entonces se dice que $(A_i)_{i \in X}$ está indicada por un conjunto.

3. Si $X_1, ..., X_n$ son clases, entonces también lo es la n-ada $(X_1, ..., X_n)$.

4. Cada conjunto es una clase (de forma equivalente; cada miembro de un conjunto es un conjunto).

Luego los conjuntos son clases especiales. Las clases que no son conjuntos se llaman clases propias. Ellas no pueden ser miembro de alguna clase, esto debido a la paradoja de Russell; "Consideremos las clases que no son miembros de sí misma. ¿Una clase es o no un miembro de sí misma?. Si es un miembro de sí misma, debería poseer las propiedades que definen a dicha clase, que consisten en no ser miembros de sí mismas. Si no es un miembro de sí misma, no debe poseer la propiedad definitoria de la clase, y por tanto debe ser un miembro de sí misma. Así cada alternativa lleva a su opuesta y existe una contradicción."

5. No existe una sobreyección de una clase a un conjunto.

   Esto significa que cada conjunto debe tener "menos" elementos que una clase propia. Entonces las clases son llamadas **clases pequeñas**, y las clases propias **clases grandes**. Esta distinción entre pequeñas y grandes llega a ser crucial para muchas consideraciones categóricas.

Las limitaciones del marco de referencia descrito arriba se hacen evidentes cuando tratamos de realizar ciertas construcciones con categorías, por ejemplo, cuando se forman extensiones de categorías o cuando se forman categorías que tienen categorías o funtores como objetos. Cada miembro de una clase debe ser un conjunto y $\mathcal{U}$ no es un conjunto, así que no podemos formar la clase $\{\mathcal{U}\}$ cuyo único miembro es una clase, mucho menos formar una clase cuyos miembros son subclases de $\mathcal{U}$ o todas las asignaciones de $\mathcal{U}$ a $\mathcal{U}$.

Conglomerados: El concepto de "conglomerado" ha sido creado para hacer frente a "colecciones de clases". En particular, requerimos que:

1. Cada clase es un conglomerado.

2. Para cada "propiedad" P, uno puede formar el conglomerado de todas las clases con la propiedad P.

3. Los conglomerados son cerrados bajo los mismas construcciones que en la teoría de conjuntos, es decir, son cerrados bajo la formaciones de pares, uniones, productos (de familias indexadas por un conglomerado), etc.

   Por lo tanto podemos formar el conglomerado de todas las clases así como "asignaciones" entre conglomerados y familias de conglomerados.

   Además requerimos:

4. El *Axioma de Elección para Conglomerados*; esto es, para cada sobreyección entre dos conglomerados $f : X \longrightarrow Y$ existe una inyección $g : Y \longrightarrow X$ con $f \circ g = id_Y$.

   En otras palabras, cada relación de equivalencia en un conglomerado tiene un sistema de representantes. Observemos que este axioma de elección implica un *Axioma de Elección para Clases* y también el conocido *Axioma de Elección para Conjuntos*.

Como nuestro proposito es tener un marco de referencia que incluya a colecciones de clases, no necesitamos algo más grande que considere por ejemplo, a la colección de todos los conglomerados. Sin embargo, en la siguiente sección mencionamos a los universos de Grohtendieck que incluyen a todo tipo de colecciones.

C.2. Universo de Grothendieck

Otra forma de tener una fundamentación en la cual se permite tener a colecciones de clases son los universos de Grohtendieck. Esto se puede consultar en [3] capítulo I.

Un universo de Grothendieck tiene por objeto proporcionar un conjunto en el que todas las matemáticas se pueden realizar. Los elementos de un universo de Grothendieck a veces se llaman los pequeños conjuntos. Para cada conjunto x, existe un universo $\mathbf{U}$ que tiene como elemento a x, es decir, $x \in \mathbf{U}$. De esta manera, cada vez que cualquier operación lleva a uno fuera de un universo de Grothendieck dado, se garantiza que no sea más grande que algún universo de Grothendieck. La existencia de un universo de Grothendieck equivale a la existencia de cardinales fuertemente inaccesibles.

La propuesta original de Grothendieck fue agregar el siguiente axioma de universos a los axiomas usuales de la teoría de conjuntos:

Definición C.1. *Un* ***universo de Grothendieck*** *es un conjunto no vacío* $\boldsymbol{U}$ *que tiene las siguientes propiedades:*

- $\boldsymbol{U}_1$ *Si* $x \in \boldsymbol{U}$ *y si* $y \in x$, *entonces* $y \in \boldsymbol{U}$, *es decir,* $\boldsymbol{U}$ *es transitiva.*
- $\boldsymbol{U}_2$ *Si* $x, y \in \boldsymbol{U}$, *entonces* $\{x, y\} \in \boldsymbol{U}$.
- $\boldsymbol{U}_3$ *Si* $x \in \boldsymbol{U}$, *entonces* $\wp(x) \in \boldsymbol{U}$, *donde* $\wp(x)$ *es el conjunto potencia.*
- $\boldsymbol{U}_4$ *Si* $\{x_i\}_{i\in X}$ *es una familia de elementos de* $\boldsymbol{U}$, *entonces* $\bigcup_{i\in I} x_i \in U$.

De los axiomas anteriores se deduce:

1. Si $x \in \mathbf{U}$, entonces $\{x\} \in \mathbf{U}$.
2. Si x es un subconjunto de y y $y \in \mathbf{U}$, entonces $x \in \mathbf{U}$.
3. Si $x, y \in \mathbf{U}$, entonces $(x, y) = \{\{x, y\}, x\} \in \mathbf{U}$ (definición de Kuratowski).
4. Si $x, y \in \mathbf{U}$, entonces $x \cup y,\ x \times y \in \mathbf{U}$.
5. Si $\{x_i\}_{i\in X}$ es una familia de elementos de $\mathbf{U}$, entonces $\prod_{i\in X} x_i \in \mathbf{U}$.
6. Si $x \in \mathbf{U}$, entonces $card(x) < card(\mathbf{U})$ (estrictamente). En particular la relación $\mathbf{U} \in \mathbf{U}$ no se satisface.

Con lo anterior se pueden hacer todas las operaciones usuales de teoría de conjuntos partiendo de elementos del universo, sin que por ello el resultado final deje de ser un elemento del universo. La noción de universo tiene por principal interés el de permitir una definición de las categorías usuales:

1. La categoría de los conjuntos que pertenece al universo $\mathbf{U}$ ($\mathbf{U}$-Conj).
2. La categoría de los espacios topológicos que pertenece al universo $\mathbf{U}$.
3. La categoría de los grupos abelianos que pertenece al universo $\mathbf{U}$ ($\mathbf{U}$-Ab).
4. La categoría de todas las categorías que pertenece al universo $\mathbf{U}$.

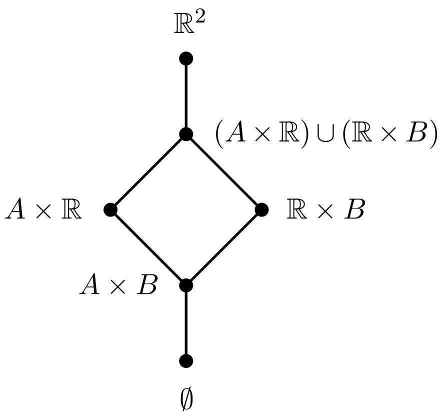
Apéndice D

Conexiones de Galois sobre $\mathbb{R}^2$

D.1. Relaciones bicerradas en el plano

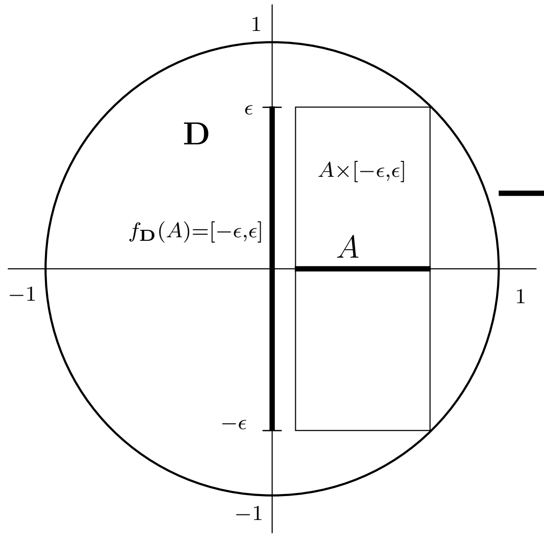
En este apéndice damos ejemplos de polaridades sobre $\mathbb{R}$, pues en este caso las relaciones de $\mathbb{R}^2$ se pueden visualizar y esto nos puede ayudar a entender mejor a las polaridades y a las relaciones bicerradas en general. Presentamos el ejemplo del disco unitario con centro en el origen el cual es interesante de estudiar.

Ejemplo D.1. *Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Para $A \times B$ tenemos que $(f)_{A\times B} \in Gal(\wp(\mathbb{R}), \wp(\mathbb{R}))$ y $(f)_{A\times B}$-cerr $= \{\emptyset, A, \mathbb{R}\}$ y cerr-$(f)_{A\times B} = \{\emptyset, B, \mathbb{R}\}$ (ver Observación 1.31). En este caso $\#Gal((f)_{A\times B}\text{-}cerr, cerr\text{-}(f)_{A\times B}) = 6$ y por lo tanto $\#[A\times B]_{\preceq} = 6$. Así en la siguiente figura vemos como queda la retícula $\langle [A \times B]_{\preceq}, \subseteq \rangle$:*



Por la Proposición 1.30 tenemos que para toda $f \in Gal(\wp(\mathbb{R}), \wp(\mathbb{R}))$ existen $\{A_i\}_{i\in X}, \{B_j\}_{j\in Y} \subseteq \mathbb{R}$ tales que f es supremo de $\{p_{A,B}, p_{B,A}\}_{i\in X, j\in Y} \subseteq Gal(\wp(\mathbb{R}), \wp(\mathbb{R}))$.

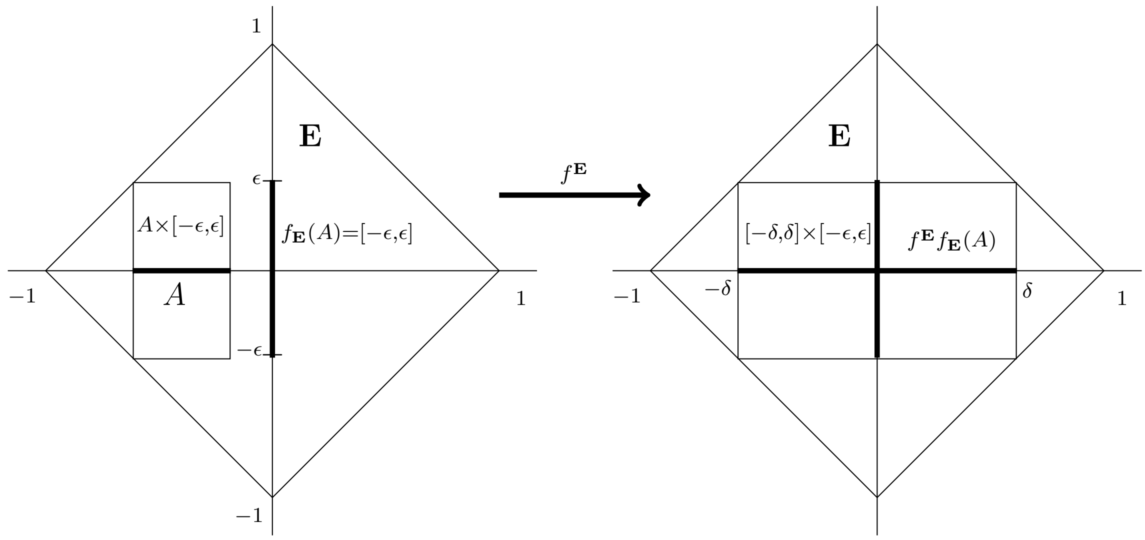
Ejemplo D.2. *Sea $\mathbf{D} \in \wp(\mathbb{R}^2)$ el disco unitario con centro en el origen, luego para toda $A \in \wp(\mathbb{R})$, $f_{\mathbf{D}}(A) = \{B \in \mathbb{R} \mid (a,b) \in \mathbf{D}, \forall a \in A\}$ y $f^{\mathbf{D}} f_{\mathbf{D}}(A) = \{A \in \mathbb{R} \mid (a,b) \in \mathbf{D}, \forall b \in f_{\mathbf{D}}(A)\}$. Tomemos $A \subseteq [0,1]$, entonces como podemos ver en la primera figura $f_{\mathbf{D}}(A) = [-\epsilon, \epsilon]$ con $0 \le \epsilon \le 1$ y en la segunda figura $f^{\mathbf{D}} f_{\mathbf{D}}(A) = [-\delta, \delta]$ con $0 \le \delta \le 1$.*



De las figura anteriores vemos que $(f)_{\mathbf{D}}$*-cerr* $= \{\emptyset\} \cup \{[-\epsilon,\epsilon] \mid 0 \le \epsilon \le 1\} \cup \{\mathbb{R}\} =$ *cerr-*$(f)_{\mathbf{D}}$*, pues*

$$f_{\mathbf{D}}(A) = \begin{cases} \mathbb{R} & si \quad A = \emptyset \\ [-\epsilon,\epsilon] & si \quad \emptyset \subset A \subseteq [-1,1]\,,\ con\ 0 \le \epsilon \le 1 \\ \emptyset & si \quad A \not\subseteq [-1,1] \end{cases}$$

Sea $\mathbf{E}$ *la región simétrica con respecto a los ejes y delimitada por* $f(x) = 1 - x,\ 0 \le x \le 1$*, como se ve en las siguientes figuras. Luego para toda* $A \subseteq [-1,1]$ *tenemos que* $f_{\mathbf{E}}(A) = [-\epsilon,\epsilon]$ *con* $0 \le \epsilon \le 1$ *y* $f^{\mathbf{E}}f_{\mathbf{E}}(A) = [-\delta,\delta]$ *con* $0 \le \delta \le 1$ *(igual que para el disco unitario). Esto se puede ver en la siguiente figura.*



De esta forma $(f)_{\mathbf{E}}$*-cerr* $= \{\emptyset\} \cup \{[-\epsilon,\epsilon] \mid 0 \le \epsilon \le 1\} \cup \{\mathbb{R}\} =$ *cerr-*$(f)_{\mathbf{E}}$*, es decir,* $\mathbf{E} \in [\mathbf{D}]_{\sim}$*. De hecho, todas las relaciones* $\mathbf{F} \in \wp(\mathbb{R}^2)$ *tales que* $\mathbf{F} \sim \mathbf{D}$ *son las regiones simétricas con respecto a los ejes que están delimitadas por las funciones* $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *tales que son biyectivas monótonas estrictamente decrecientes y por lo tanto continuas. Probemos esta afirmación:*

Sea $\mathbf{F} \in \wp(\mathbb{R}^2)$ *tal que* $\mathbf{F} \sim \mathbf{D}$*, esto implica que para cada* $A, B \in \wp(\mathbb{R})$*,* $f_{\mathbf{F}}(A) = [-\epsilon,\epsilon]$ *y* $f^{\mathbf{F}}(B) = [-\delta,\delta]$ *con* $\epsilon,\delta \in [0,1]$*. Esto significa que* $\mathbf{F}$ *es simétrica con respecto a los ejes.*

Supongamos que $\mathbf{F}$ *está delimitada en* $[0,1] \times [0,1]$ *por una función* $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *que no es dececiente. Como* f *no es decreciente y delimita a* $\mathbf{F}$ *en* $[0,1] \times [0,1]$*, entonces existen* $x_1, x_2 \in [0,1]$ *tales que* $x_1 < x_2$ *y* $f(x_1) < f(x_2)$*, esto significa que el punto* $(x_1, f(x_2)) \notin \mathbf{F}$ *pues se sale de la región delimitada. Esto contradice el hecho de que* f *es no decreciente. Por lo tanto* f *es una función decreciente y debe ser biyectiva, pues sino lo es, encontremos un punto de* $[0,1]$ *que no está en algún intervalo* $[-\epsilon, \epsilon]$ *contradiciendo el hecho de que ese intervalo pertenezca a cerr-*$\mathbf{F}$*. Con esto concluimos lo que queriamos mostrar.*

Bibliografía

[1] Adámek, J. Herrlick, H., Strecker, G. *Abstract and concrete categories.* John Wiley and Sons, New York. (1990).

[2] Anderson, F. W., Fuller, K.R., *Ring and Categories of Modules,* Springer-Verlag, (1992).

[3] Artin M., Grothendieck A., Verdier J. L., *Théorie des topos et cohomologie étale des schemas. Tome 1: théorie des topos.* Lectures Notes in Math., Vol. 269, Springer (1972), Séminaire de Geómetrie Algébrique dus Bois-Marie 1963-1964 (SGA4).

[4] Barr, M., *Non-abelian torsion theories.* Can. J. Math. 25: 1224-1237 . (1973).

[5] Bican, L., Kepka, T. Němec, P. (1982). *Rings, Modules and Preradicals.* Marcel Dekker, New York.

[6] Birkhoff, G. *Lattice theory.* Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, Providence, Rhode Island, 1st edition, (1940) (3rd edition, 1967).

[7] Bourbaki, N,. *Algèbre (Eléments de Mathématique), Chapitre 8.* Springer-Verlag, Heidelberg Berlin. (1958).

[8] Cassidy, C. Hébert, M. Kelly, G.M., *Reflective subcategories, localizations and factorizations systems* J. Austral. Math. Soc. 38(A): 287-329. (1985).

[9] Dauns, J., Yiqiang Zhou, *Classes of Modules,* Chapman & Hall/CRC (2006).

[10] Dickson, E., *A torsion theory for abelian categories,* Trans. Amer. Math. Soc. (1964).

[11] Domenach, F; Leclerc, B., *Biclosed binary relations and Galois connections,* Order Vol. pag. 89-104. (2000).

[12] Eilenberg, S., *Abstract description of some basic functors.* J. Indian Math. Soc (N.S) 24: 231-234. (1960).

[13] Erné, M., Koslowski, J., Melton, A., and G. Strecker,E., *A primer on Galois connections,* in: Papers on general topology and applications (Madison, WI, 1991), Ann. New York Acad. Sci., Vol. 704, (1993), pp. 103 -125.

[14] Everett C. J., *Closure operators and Galois theory in lattices,* Trans. Amer. Math. Soc. 55 (1944), 514-525.

[15] Fernández-Alonso, R. *Algunas propiedades sobre clases TTF*, Tesis licenciatura, UNAM, México D.F. Julio 1986.

[16] Fisher, J., Newel, C., *Bifunctors and adjoint pairs,* Transaction of the American Mathematical Society Vol. 155, Number 2, april (1971).

[17] Golan, J., *Localization of noncommutative rings,* Marcel Dekker, Inc. (1975).

[18] Golan, J., *Torsion theories,* Longman Scientific & Technical. (1986).

[19] Grätzer, G. *General lattice theory,* Birkhäuser Verlag, (2003).

[20] Herrlich, H., Strecker, G. E., *Category theory an introduction,* Allyn and Bacon, Inc. (1973).

[21] Jans J.P., *Some aspects of torsion*, Pacific J. Math 15, 1249-1259, (1965).

[22] Lluis-Puebla, E., *Álgebra homológica, cohomología de grupos y K-teoría algebraica clásica,* Addison Wesley lb. (1990).

[23] Maranda, J.-M., *Injective structures,* Trans. Amer. Math. Soc. 110 (1964), 98-135.

[24] Mc. Lane, S. *Categories for the working mathematician,* Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin (1971).

[25] Nyman, A., Smith, S.P. *A Generalization of the Watt's Theorem: Right Exact Functors on Module categories,* (2007).

[26] Ore, O., *Galois connexions.* Trans. Amer. Math. Soc. 55 (1944), 493-153.

[27] Picado, J., *On two extensions of Dickson's torsion theory.* Comm. in Alg. 21(8): 2749-2769. (1993).

[28] Picado, J. *The quantal of Galois connections.* Algebra Univers. **52** (2004) pp. 527-540.

[29] Raggi, F., Ríos, J., Rincón, H., Fernández-Alonso, R., Carlos, S., *The lattice structure of preradicals,* Commun, Algebra, 30(3), 1533-1544 (2002).

[30] Raggi, F., Ríos, J., Rincón, H., Fernández-Alonso, R. , Carlos, S., *The lattice structure of preradicals II,* Journal of Algebra and its Applications, Vol. 1, No. 2 (2002) 201-214.

[31] Raynaud, M., Gruson, L., *Critères de platitude et de projectivé. Techniques de "planification" d 'un module.* Invent Math. 13: 1-89. (1971).

[32] Rotman, J., *An introduction to homological algebra,* Academic Press, Inc. (1979).

[33] Rowen L. H., *Ring theory,* Academic Press, Inc. (1991).

[34] Salce L., *Cotorsion theories for abelian groups,* Symp. Math. 23 (1979), 12-32.

[35] Shmuely, Z. *The structure of Galois connections,* Pacific journal of mathematics vol. 54, No. 2, (1974).

[36] Strenstrom, B. *Rings of quotients,* Springer-Verlag, New York Heidelberg (1975).

[37] Watts, C. E., *Intrinsic characterization of some additive functors,* Proc. Amer. Math. Soc., 11 (1966) 5-8.

[38] Wisbauer, R., *Foundations of Module and Ring Theory,* Gordon and Breach Science Publisher, Philadelphia. (1991).