



**UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA
METROPOLITANA**
Unidad Iztapalapa

División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Posgrado en Física

**MODULACIÓN DE CAOS EN BILLARES
MEDIANTE
UN POTENCIAL SUAVE EN LA FRONTERA**

Tesis para obtener el grado académico de Maestro en Ciencias (Física)

Presentado por: **Fís. Adán González Andrade**

Matrícula: **2221801165** Correo: **g.andradeadan@gmail.com**

Co-asesor: **Dr. Miguel Angel Bastarrachea Magnani**

Co-asesora: **Dra. Hilda Noemí Núñez Yépez**

Jurado

Presidenta: **Dra. Lidia Georgina Jiménez Lara**

Vocal: **Dr. Francisco González Montoya**

Secretaria: **Dra. Hilda Noemí Núñez Yépez**

Iztapalapa, Ciudad de México, a 8 de julio de 2024



Índice general

| | |
|--|-----------|
| 1. Introducción | 9 |
| 2. Sistemas Hamiltonianos | 15 |
| 2.1. Ecuaciones de Movimiento | 15 |
| 2.2. Integrabilidad de las ecuaciones de movimiento | 17 |
| 2.2.1. Transformaciones canónicas | 18 |
| 2.3. Teorema Kolmogorov-Arnold-Moser | 20 |
| 2.3.1. Ecuaciones de Hamilton-Jacobi y variables de ángulo acción | 20 |
| 2.3.2. Ruptura de integrabilidad | 24 |
| 3. Caos dinámico | 27 |
| 3.1. Caos en sistemas dinámicos | 27 |
| 3.2. Herramientas para caracterizar el caos | 28 |
| 3.2.1. Mapas reversibles | 28 |
| 3.2.2. Secciones de Poincaré | 29 |
| 3.2.3. Exponentes de Lyapunov | 31 |
| 4. Billares | 37 |
| 4.1. Billares de paredes duras | 37 |
| 4.2. Billares suaves | 39 |
| 4.3. Parametrización de los billares suaves | 41 |
| 4.3.1. Primera aproximación al billar suave: la elipse | 41 |
| 4.3.2. Rigidez de los pozos de potencial | 42 |
| 4.3.3. Frontera: circunferencia y cuadrado | 44 |
| 4.3.4. Billar de <i>squircle</i> de paredes duras | 45 |
| 4.3.5. Billar de <i>squircle</i> de paredes suaves | 46 |
| 5. Descripción cualitativa del caos | 49 |
| 5.1. Colisiones en billares duros y coordenadas de Poincaré-Birkhoff | 49 |
| 5.1.1. Colisiones en billares suaves | 50 |
| 5.1.2. Secciones de Poincaré | 51 |
| 5.1.3. Secciones de Poincaré en el billar de elipse | 53 |
| 5.1.4. Secciones de Poincaré en el billar de <i>squircle</i> | 54 |
| 6. Descripción cuantitativa del caos | 59 |
| 6.1. Cálculo numérico de exponentes de Lyapunov | 59 |

| | |
|--|-----------|
| 6.2. Mapa de caos y regularidad | 61 |
| 7. Perspectivas | 67 |
| 7.1. Perspectivas de caos cuántico en billares | 67 |
| 7.1.1. Órbitas periódicas y cicatrización de estados propios | 68 |
| 7.1.2. Una implementación experimental | 69 |
| 7.1.3. Excitones-polaritones | 70 |
| 7.1.4. Descripción del experimento | 70 |
| 7.2. Conclusiones | 72 |
| Apéndice A. Billar suave de <i>squircle</i> | 73 |
| A.1. Trayectorias | 73 |
| A.1.1. Identificación en secciones de Poincaré | 76 |
| Apéndice B. Código | 79 |

Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas y entidades que hicieron posible la realización de esta tesis.

A mis asesores: Miguel y Noemí, por su constante apoyo a lo largo de más de dos años. Su paciencia y guía fue fundamental para lograr mis objetivos. Gracias por inspirarme a ser mejor.

A mis sinodales por tomarse el tiempo de involucrarse en mi trabajo y brindarme muchos valiosos apuntes y correcciones.

A mi familia, que siempre ha confiado incondicionalmente en mí. Sin ustedes no sería posible nada de esto.

A mis amigos y compañeros que me han hecho sentir bien recibido en esta institución desde el día uno.

Al Dr. Jorge Gustavo Hirsch Ganievich por su generosidad al permitirme acceder remotamente a sus recursos computacionales avanzados, los cuales fueron indispensables para la obtención de muchos de los resultados mostrados en este trabajo.

A las Becas Nacionales para Estudios de Posgrado (CONAHCyT) por el apoyo económico brindado que fue muy importante para la realización de este trabajo.

Finalmente, a todas las personas que están y las que ya no, que de una u otra manera contribuyeron a la realización de este trabajo, muchas gracias.

Resumen

En el presente proyecto se estudia el caos clásico en billares de paredes suaves, motivando este modelo respecto a su contraparte de paredes duras. Se ha implementado una herramienta numérica la cual se ha verificado que funcione adecuadamente, presentando las pruebas suplementarias que corroboran la validez numérica de los resultados obtenidos. Con ésta se evolucionan partículas dentro de un billar de paredes suaves y con frontera de *squircle* la cual es una curva que, mediante la modulación de un parámetro s , se transforma desde un rectángulo hasta una elipse. Se realiza un análisis cualitativo a través del estudio de secciones de Poincaré y uno cuantitativo mediante el cálculo de exponentes de Lyapunov. En este trabajo se muestra que el parámetro s , la excentricidad de la curva y la dureza de las paredes del billar de *squircle*, en conjunto permiten modular la dinámica de un billar de paredes suaves, yendo desde la regularidad y el caos, hasta transiciones de regularidad-caos-regularidad. Finalmente, se motiva un trabajo a futuro que extienda los resultados y desarrollos que se presentan aquí.

Capítulo 1

Introducción

En el año de 1963, el meteorólogo Edward Lorenz publica un artículo titulado *Flujo no periódico determinista* [1], el cual es uno de los artículos científicos más citados en la actualidad [2]. En su publicación, Lorenz considera el fenómeno de convección al modelar una capa de un fluido viscoso situada entre dos placas horizontales, cada una a diferente temperatura, y estudia el movimiento resultante. Él obtiene unas ecuaciones diferenciales que son muy sensibles a las condiciones iniciales, pero además encuentra que algunas trayectorias tienden a acumularse en un conjunto, digamos \mathcal{K} , independientemente de la elección de condición inicial. A \mathcal{K} hoy en día se le conoce como el **atractor de Lorenz**.

Con la finalidad de presentar una interpretación de sus resultados con la comunidad científica, en 1972, Lorenz dio una charla titulada: *Predictibilidad: ¿El aleteo de una mariposa en Brasil puede ocasionar un tornado en Texas?* Este suceso fue un parteaguas, pues desde aquel momento hasta la actualidad el término **caos** ha logrado penetrar en la población no científica a una escala muy amplia [2]. Y es que la referencia al *efecto mariposa* se utiliza como una metáfora accesible para explicar la **teoría del caos** a audiencias ajenas al ámbito científico. Años después, en una publicación Lorenz propone una definición de caos (véase la referencia [3]), que se sintetiza a continuación y se acompaña de una representación pictórica en la figura 1.1.

Definición 1. Caos. *Un sistema presenta caos si el estado presente determina completamente el estado futuro, pero el estado presente aproximado es insuficiente para determinar el estado aproximado en el futuro distante.*

Los estudios de Lorenz le dieron forma a lo que hoy se conoce como la teoría del caos. Sin embargo, no fue el primero en señalar la existencia de estos comportamientos complejos en sistemas dinámicos. El término **sistema dinámico**, hace referencia a cualquier sistema cuyo estado presente exacto determina completamente su estado en algún momento del futuro cercano, de acuerdo con un conjunto de reglas, de donde, por extrapolación y en muchas instancias al menos, todos los estados futuros quedan completamente determinados [3]. A este comportamiento se le denomina determinista.

Los primeros trabajos relacionados al concepto de caos se remontan años atrás. Se puede decir que dichos estudios comenzaron con el trabajo del matemático francés Henri Poincaré [4], que se dedicó principalmente al estudio del problema de los tres cuerpos en

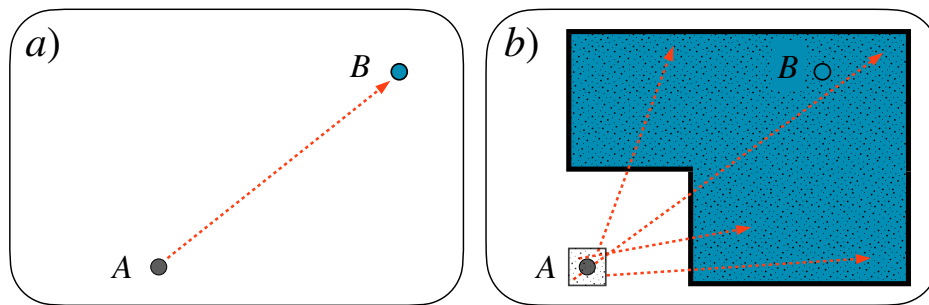


Figura 1.1: Esquematzación del concepto de caos. En *a)* se muestra un punto A que representa un estado de un sistema el cual evoluciona un tiempo largo (flecha roja) y resulta en el punto B . Esto se conoce como una evolución determinista. En *b)* se tiene una región alrededor del punto A (el estado aproximado del sistema en A) del cual se evolucionan puntos en esa región a tiempos largos (flechas rojas), lo que resulta en una región que no representa una vecindad de B (no se obtiene aproximadamente el estado B). Si la evolución de un sistema se comporta de acuerdo a *a)* y *b)* entonces el sistema presenta caos.

la mecánica celeste, prestando especial atención al sistema Tierra-Sol-Luna. En sus estudios, se enfocó en el comportamiento de órbitas generadas por conjuntos de condiciones iniciales, en vez de analizar órbitas individuales. Este enfoque le permitió demostrar la existencia de órbitas de gran complejidad, a las que en la actualidad denominamos órbitas caóticas [5]. Sin embargo, para la búsqueda de una *teoría del caos*, uno no puede limitarse sólo a afirmar que la dinámica es complicada, pues cualquier teoría razonable debe proveer métodos y herramientas que permitan algún tipo de corroboración y entendimiento cuantitativo [2].

En el desarrollo de una teoría moderna del caos, fue importante el sistema dinámico propuesto por Jacques Hadamard en 1898 [6]. Por un lado es lo suficientemente simple para ser investigado por métodos matemáticos, y por el otro, demuestra un comportamiento típico de movimiento irregular [7]. Su sistema tiene dos grados de libertad y consiste en una partícula puntual de masa m que se mueve libremente, es decir, sin fuerzas externas, a lo largo de una superficie bidimensional dada. Dejando de lado aspectos de la curvatura de dicha superficie (los cuales Hadamard tomó en cuenta), el problema se reduce a una partícula puntual que se mueve libremente sobre una superficie plana y cuyo movimiento está limitado a una región $\Omega \in \mathbb{R}^2$ con frontera $\partial\Omega$. Entonces, si consideramos que en la frontera $\partial\Omega$ hay paredes sólidas, obtenemos lo que llamamos un **billar plano de paredes duras**.

Un billar es un modelo matemático para diversos fenómenos físicos en los cuales una o más partículas se mueven dentro de un contenedor y colisionan con sus paredes, o bien, entre sí. Las trayectorias de la partícula consisten en segmentos de línea recta con reflexiones elásticas y especulares en $\partial\Omega$. Las principales propiedades de la dinámica de estos sistemas físicos están determinadas por la forma de las paredes del contenedor en cuestión [8]. Por ejemplo, si la frontera es un círculo o una elipse entonces el sistema es integrable (regular) [9], sin embargo, una frontera deformada conduce a un sistema altamente caótico, como se verá más adelante.

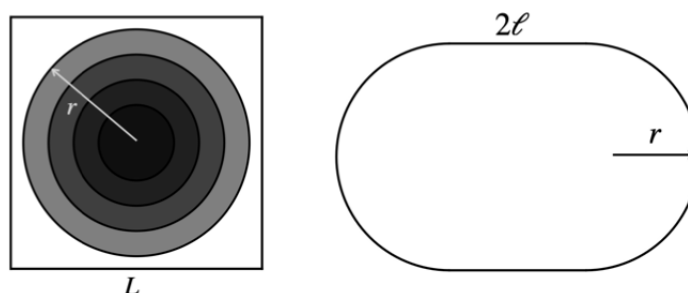


Figura 1.2: Frontera de billar de Sinai con disco de radio r dentro de un cuadrado de lado L y frontera de estadio de Bunimovich con longitud de segmento recto 2ℓ y radio de segmento semicircular r .

En este ámbito, las simulaciones numéricas de dinámicas caóticas, pueden ser difíciles de interpretar e implementar, e incluso engañosas, siendo las herramientas y matemáticas de la teoría de sistemas dinámicos indispensables. Posiblemente, el conjunto más poderoso de dichas herramientas sea la teoría ergódica¹, la cual proporciona una descripción estadística de la dinámica al asociar medidas de probabilidad relevantes [11]. La teoría ergódica, en esencia, establece que la trayectoria de un punto representativo pasa, en el transcurso del tiempo, por cada uno de los puntos de la región de estudio del espacio fase. Sin embargo, si uno busca estudiar la evolución de un sistema de forma numérica, es más práctico establecer que la trayectoria de un punto representativo atraviesa, en el transcurso del tiempo, cualquier vecindad de cualquier punto de la región relevante. A esto se le suele llamar la **hipótesis cuasi-ergódica** [12]. Esto es de nuestro interés, pues la presencia de ergodicidad en un sistema es un indicador de comportamiento caótico, ya que implica que la evolución de una condición inicial dada (y su vecindad) explora toda una región del espacio fase a tiempos largos, característica esencial del caos.

Una de las figuras claves para los primeros estudios del caos en un billar es Yakov G. Sinai, que con su trabajo publicado a mediados del siglo XX [13], conceptualizó lo que hoy se conoce como el billar de Sinai, y que es probablemente la frontera de billar más estudiada. A la par, en 1979, Leonid Bunimovich en su artículo fundacional [14] sobre el estadio de billar que lleva su nombre, estableció las bases para demostrar la ergodicidad y otras propiedades dinámicas importantes de este sistema (véase fig. 1.2). El trabajo de Sinai se considera revolucionario, pues su billar fue el primer modelo físico dentro del cual se pudo mostrar con rigor matemático la presencia de ergodicidad, mientras que en el billar de estadio también fue posible mostrarlo posteriormente.

Como veremos en este trabajo, es común analizar el caos en sistemas clásicos utilizando secciones de Poincaré y exponentes de Lyapunov [15]. Las secciones de Poincaré permiten una evaluación cualitativa de sistemas dinámicos al simplificar su análisis a través de las intersecciones de trayectorias con superficies transversales, facilitando así la identificación de patrones como las órbitas periódicas. Por otro lado, los exponentes de

¹En este escrito, se hace mención de la teoría ergódica desde una perspectiva histórica, sin profundizar en sus detalles técnicos. Este enfoque permite situar las herramientas específicas utilizadas en los cálculos posteriores dentro de un contexto más amplio, sin requerir una familiaridad previa con la ergodicidad por parte del lector. Para aquel interesado en explorar más sobre la teoría ergódica, se recomienda consultar trabajos especializados en el tema, como lo puede ser el libro *Ergodic Theory* [10].

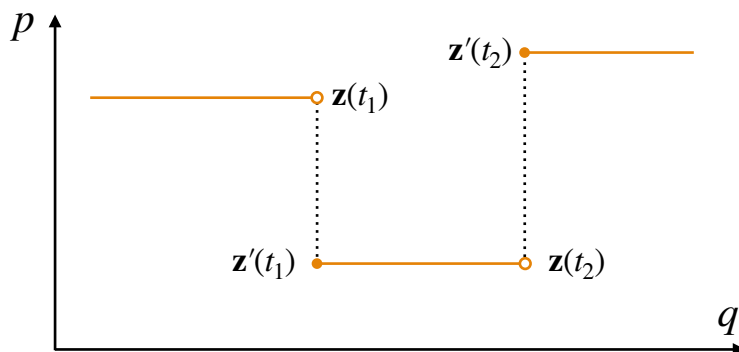


Figura 1.3: Esquema de la proyección del espacio de posiciones q y momentos p (espacio fase), para la evolución de una partícula dentro de un billar de paredes duras. Cuando ocurre una colisión al tiempo t_i , la partícula cambia instantáneamente su estado de $z(t_i)$ a $z'(t_i)$.

Lyapunov ofrecen una medida cuantitativa de la divergencia entre trayectorias inicialmente cercanas, donde un valor positivo indica una sensibilidad exponencial a las condiciones iniciales [5], siendo crucial para clasificar comportamientos caóticos.

Los billares resultan en un modelo matemático fértil con diversas aplicaciones en la física. Sin embargo, los billares de paredes rígidas que se presentaron con anterioridad, tienen la particularidad de introducir una discontinuidad en la evolución del espacio fase (véase fig. 1.3). Esto es, cada que ocurre una colisión, instantáneamente el momento de la partícula cambia, lo cual de ninguna forma se corresponde con algún fenómeno físico. Una manera de darle la vuelta a este artificio es introducir **suavidad en la frontera** del billar. Al hacer esto, la partícula cambia su momento de forma continua durante un lapso, y luego continúa su evolución, evitando las discontinuidades en el espacio fase y permitiendo así la descripción completa de la dinámica resolviendo un conjunto de ecuaciones diferenciales: las ecuaciones de movimiento de Hamilton.

El panorama actual para el estudio de billares (tanto de paredes duras como paredes suaves) es vasto, pues estos modelos se han adaptado a la teoría moderna de sistemas dinámicos y mecánica estadística [8]. Por ejemplo, se ha estudiado el comportamiento de la dinámica de un billar abierto bajo pequeñas perturbaciones [16] y la interacción de partículas en billares suaves [17]. Es importante resaltar que el estudio de los billares no se limita a lo clásico, sino que también abarca sistemas cuánticos de implementación experimental, como los billares opto-atómicos [18] [19] o los billares de fluidos polaritónicos [20]. Con esto se aprovecha la versatilidad de los billares para estudiar, por ejemplo, fenómenos cuánticos de transporte [21] [22].

Hasta el momento se ha discutido la atención histórica que ha recibido el concepto de caos y su relación con los billares de paredes duras. Lo anterior, con la finalidad de extender la descripción del caos a billares con frontera suave. Con esto presente, el siguiente capítulo prepara el terreno para el estudio de la dinámica de un sistema Hamiltoniano, introduciendo inicialmente algunas definiciones básicas de la mecánica clásica. Estos fundamentos son esenciales para abordar, posteriormente, el espacio fase Hamiltoniano, que nos proporciona un marco adecuado no solo para discutir la integrabilidad y la no integra-

bilidad, sino también para explorar cómo ésta última se relaciona intrínsecamente con la manifestación del caos en los sistemas físicos.

Capítulo 2

Sistemas Hamiltonianos

2.1. Ecuaciones de Movimiento

Sean $\mathbf{q} = q_1, q_2, \dots, q_{\mathcal{N}}$ las **coordenadas generalizadas**, donde \mathcal{N} es el número de grados de libertad del sistema, que es el número de direcciones independientes en las cuales puede moverse el sistema a partir de cualquier configuración inicial.¹ Para cualquier sistema holonómico con coordenadas generalizadas \mathbf{q} , energía cinética $E_c(\mathbf{q}, t)$ y energía potencial $E_p(\mathbf{q}, t)$; la evolución temporal queda descrita por \mathcal{N} ecuaciones de Euler-Lagrange [23]

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}, \quad (2.1.1)$$

con $i = 1, \dots, \mathcal{N}$ y donde la función Lagrangiana se define como $\mathcal{L} = E_c - E_p$. De las ecuaciones (2.1.1) se definen los momentos generalizados, o bien, **momentos conjugados** $\mathbf{p} = p_1, p_2, \dots, p_{\mathcal{N}}$, como las \mathcal{N} magnitudes tales que [23]

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}, \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, \mathcal{N}. \quad (2.1.2)$$

A las cantidades $\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ se les llama **variables canónicas** [24].

Una observación clave es la relación entre la función Lagrangiana y las coordenadas. Si \mathcal{L} no depende de una coordenada específica q_i (es decir, $\partial \mathcal{L} / \partial q_i = 0$), el momento generalizado correspondiente, p_i , se mantiene constante a lo largo del tiempo (conservación del momento generalizado). Por lo tanto, una coordenada que no influye en \mathcal{L} se denomina **coordenada cíclica**, esto es, que su momento conjugado se conserva. Existe un marco de trabajo adicional al formalismo Lagrangiano, el cual está especialmente adaptado para tratar con problemas que involucran coordenadas cíclicas: el **formalismo Hamiltoniano** [24].

¹En general, los sistemas con \mathcal{N} grados de libertad tienen \mathcal{N} coordenadas generalizadas. A estos sistemas se les conoce como holonómicos [23]. Para los billares bidimensionales que se estudian en este escrito, basta la descripción holonómica.

La función Lagrangiana combina la energía cinética y potencial del sistema, ofreciendo una descripción de la dinámica a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange. Sin embargo, en ciertos contextos, puede ser beneficioso reformular el problema para explorar propiedades adicionales del sistema o simplificar su análisis. Es aquí donde se introduce la función Hamiltoniana. Para avanzar hacia esta nueva descripción, se realiza una transformación mediante la transformada de Legendre, un proceso matemático que nos permite pasar de un conjunto de variables (las coordenadas generalizadas y sus velocidades) a otro (las coordenadas generalizadas y sus momentos conjugados). En esencia, esta transformación redefine la descripción del sistema, centrándose en la energía total en lugar de la diferencia entre energías cinética y potencial.

Entonces, se hace una transformación tal que [24]

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_i \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}. \quad (2.1.3)$$

A $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ se le conoce como la **función Hamiltoniana**. A partir de esto, se tienen las **ecuaciones canónicas de Hamilton** dadas por [24]

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad (2.1.4a)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i, \quad (2.1.4b)$$

donde $i = 1, 2, 3, \dots, \mathcal{N}$. Se le llama **órbita**, a aquella trayectoria (cerrada o abierta) en el espacio fase (o de configuraciones) que es la solución de un sistema dinámico para un conjunto de condiciones iniciales. Las órbitas pueden ser continuas, discretas, finitas o infinitas [25]. Por ejemplo, una solución para las ecuaciones (2.1.4) representa una órbita continua pues proviene de resolver un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Además, de (2.1.3) se obtiene una relación adicional que relaciona la función Hamiltoniana con la Lagrangiana en términos de evolución temporal

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \quad (2.1.5)$$

Las relaciones (2.1.4) son un conjunto de ecuaciones de movimiento, por lo que contienen toda la información de la dinámica del sistema. En el caso donde la \mathcal{L} no depende explícitamente del tiempo y, además, las fuerzas presentes en el sistema se derivan de potenciales conservativos; se tiene que la función Hamiltoniana es una constante de movimiento y equivale a la energía total del sistema E [24]. Esto puede verse de calcular la derivada temporal de la función Hamiltoniana

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (2.1.6)$$

De aplicar las ecuaciones (2.1.4) y (2.1.3) en la expresión anterior y para el caso donde ni \mathcal{L} ni H dependen de forma explícita de t , se tiene que H será constante en el tiempo

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0. \quad (2.1.7)$$

Cabe resaltar que identificar a H como constante de movimiento y el hecho de que ésta tome el valor de la energía son dos temas aparte. Pues la condición para que una sea necesaria no es suficiente para la otra [24]. Como más adelante se verá, los sistemas que se estudian en este escrito cumplen ambas condiciones y por tanto resulta adecuada la descripción Hamiltoniana de la dinámica.

2.2. Integribilidad de las ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones de Hamilton, como se presentan en (2.1.4), no evidencian alguna simetría entre las coordenadas y momentos. Para esto se puede utilizar una notación alternativa que sintetice las ecuaciones de movimiento y que resulta de utilidad para maniobrarlas. Para esto se construye una matriz columna $\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}$ con $2\mathcal{N}$ elementos tales que

$$U_i = q_i, \quad U_{i+\mathcal{N}} = p_i, \quad i \leq \mathcal{N}. \quad (2.2.1)$$

De forma similar, las matrices columna $\partial H / \partial \mathbf{U}$ tienen por elementos

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{U}} \right)_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{U}} \right)_{i+\mathcal{N}} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i \leq \mathcal{N}. \quad (2.2.2)$$

Adicionalmente, se define \mathbf{J} como la matriz cuadrada $2\mathcal{N} \times 2\mathcal{N}$ compuesta por cuatro submatrices de $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ tal que

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (2.2.3)$$

A \mathbf{J} se le conoce como la matriz simpléctica. Así, las ecuaciones de Hamilton (2.1.4) pueden escribirse de forma compacta como

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{J} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{U}}. \quad (2.2.4)$$

A manera de ejemplo que ilustre cómo esta expresión recupera las ecuaciones de movimiento, se considera el caso de dos coordenadas, de forma que el flujo Hamiltoniano resulta

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{p}_1 \\ -\dot{p}_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix}. \quad (2.2.5)$$

Además, si $\mathbf{U}(t)$ denota el estado del sistema en el tiempo t , el **flujo Hamiltoniano** ϕ^t lleva el estado inicial $\mathbf{U}(0)$ al estado en un tiempo t [26], es decir,

$$\mathbf{U}(t) = \phi^t(\mathbf{U}(0)). \quad (2.2.6)$$

Este concepto resulta de utilidad para estudiar la sensibilidad a las condiciones iniciales de un sistema dinámico, es decir, el cómo una trayectoria de referencia $\mathbf{U}(t)$ se ve alterada al aplicar una perturbación en la condición inicial $\mathbf{U}(0)$, como se verá más adelante.

A continuación, para la descripción de la integrabilidad en un sistema Hamiltoniano se presenta un tipo particular de transformación de variables que preserva la estructura simpléctica de los sistemas y que permite resolver las ecuaciones canónicas de movimiento de forma general.

2.2.1. Transformaciones canónicas

Se considera el problema de un sistema conservativo que contiene diferentes variables p_i, q_i que describen un movimiento acotado. Teniendo una función Hamiltoniana $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, se busca transformar a un nuevo conjunto de variables canónicas P_i, Q_i , es decir,

$$P_i = P_i(q_1, \dots, q_N; p_1, \dots, p_N), \quad (2.2.7a)$$

$$Q_i = Q_i(q_1, \dots, q_N; p_1, \dots, p_N), \quad (2.2.7b)$$

Nótese que las nuevas coordenadas P_i y Q_i pueden ser, en general, funciones de las viejas variables p_i y q_i , simultáneamente. Así, se dice que una transformación como en (2.2.7) es una **transformación canónica** si la estructura simpléctica del sistema aún se preserva [27]. Esto significa que la forma canónica de las ecuaciones de Hamilton prevalece, es decir,

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial}{\partial P_i} K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial}{\partial Q_i} K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), \quad (2.2.8)$$

donde $\mathbf{Q} = Q_1, Q_2, \dots, Q_N$, $\mathbf{P} = P_1, P_2, \dots, P_N$ y K es una función que juega el papel del nuevo Hamiltoniano para el nuevo sistema coordinado y se suele referir a éste como el *Kamiltoniano* [24]. Es importante destacar que (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) deben ser coordenadas canónicas no sólo para un sistema mecánico en específico, sino para todos los sistemas con el mismo número de grados de libertad [24].

El uso práctico de las transformaciones canónicas es el de hallar aquellas transformaciones que hacen que la integración de las ecuaciones de Hamilton sea tan simple como se pueda. El caso óptimo es aquel donde todas las Q_i son cíclicas, es decir, que el Kamiltoniano dependa sólo de los nuevos momentos P_i

$$H(p_1, \dots, p_N; q_1, \dots, q_N) \rightarrow K(P_1, \dots, P_N). \quad (2.2.9)$$

De aquí, las *nuevas* ecuaciones de Hamilton resultan

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0, \quad \text{entonces } P_i(t) = P_i(0) - \alpha_i. \quad (2.2.10)$$

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = f_i(P_1, \dots, P_N), \quad \text{entonces } Q_i(t) = f_i t + \beta_i, \quad (2.2.11)$$

donde se tienen $2N$ constantes de integración β_i y α_i y, además, las f_i son alguna función independiente del tiempo de las P_i . Se observa que el nuevo conjunto de momentos P_i son constantes de movimiento. Así que una vez que éstas se calculan, es posible efectuar una integración sobre las ecuaciones de movimiento [27]. Se dice que cuando una transformación canónica existe y provee este tipo de soluciones, entonces las ecuaciones de Hamilton asociadas son **integrables** [24].

Para formalizar esto, se considera una función de las variables del espacio fase $f(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ de forma que al derivarla respecto al tiempo se tiene

$$\frac{df}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} + \frac{d\mathbf{q}}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}. \quad (2.2.12)$$

A la expresión que aparece al final de la expresión (2.2.12) se le llama **paréntesis de Poisson** de f y H , y se abrevia como $[f, H]$. Éste en general se define como

$$[g_1, g_2] \equiv \frac{\partial g_1}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial g_2}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial g_1}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial g_2}{\partial \mathbf{q}}. \quad (2.2.13)$$

Entonces, la condición para que una función f sea una constante de movimiento para una función Hamiltoniana independiente del tiempo es que su paréntesis de Poisson con H sea cero, es decir, $[f, H] = 0$.² De aquí se puede proveer la siguiente definición [5]

Definición 2. Integrabilidad. Se dice que un sistema Hamiltoniano independiente del tiempo es integrable si tiene N constantes de movimiento independientes $f_i(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, con $i = 1, \dots, N$. Además, si se cumple que

$$[f_i, f_j] = 0, \quad (2.2.14)$$

para todo i y j .

Cabe resaltar de la definición anterior, que una de esas constantes de movimiento es el Hamiltoniano en sí, y usualmente se suele indicar con la constante $i = 1$, $f_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$. Si la condición (2.2.14) es válida para todo i y j , se dice que las f_i están en involución [5]. El requerimiento de tener N constantes de movimiento independientes implica que las trayectorias del sistema en el espacio fase se restringen a vivir en una superficie N -dimensional

²La función Hamiltoniana en sí es una constante de movimiento dado que $[H, H] = 0$. Usualmente el valor de dicha constante es el de la energía del sistema.

$$f_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = k_i, \quad (2.2.15)$$

con $i = 1, \dots, \mathcal{N}$, y con k_i una de \mathcal{N} constantes. La superficie descrita en (2.2.15) es de un tipo particular: un toro \mathcal{N} -dimensional, como se verá más adelante.

No todos los sistemas son integrables, de hecho para la mayoría de problemas físicos no es posible calcular una solución exacta a las ecuaciones de movimiento [24]. Un caso prototípico de esto es cuando la función Hamiltoniana de un sistema puede separarse en una parte integrable y una adicional que contiene el problema no integrable. Por ejemplo, algún término débil de interacción en el potencial puede llevar a que las ecuaciones de movimiento no sean separables. En algunos casos pueden surgir nuevas soluciones al desacoplar las ecuaciones de movimiento. Estas soluciones pueden comportarse bien ante pequeñas variaciones en las condiciones iniciales, esto es, que el cambio en las trayectorias es pequeño también. Cuando esto ocurre se dice que las **órbitas** son **regulares** o normales [24]. Sin embargo, también se puede dar el caso de que las órbitas resultantes sean muy diferentes para condiciones iniciales casi idénticas. Como se verá más adelante, resulta de utilidad caracterizar en qué casos la pérdida de integrabilidad en un sistema conlleva a una dinámica no regular, pues esta situación servirá de hilo conductor para la caracterización del caos en sistemas dinámicos.

2.3. Teorema Kolmogorov-Arnold-Moser

El teorema de Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) caracteriza la aparición de caos en sistemas integrables que son perturbados al punto de volverse no integrables, lo cual permite un entendimiento del surgimiento del caos en diversos sistemas dinámicos. Para abordar este teorema fundamental, antes se presentan algunos elementos básicos de la mecánica clásica, necesarios para postularlo y comprenderlo.

2.3.1. Ecuaciones de Hamilton-Jacobi y variables de ángulo acción

Se busca expresar las ecuaciones canónicas de movimiento de forma que la solución completa esté relacionada con las constantes de movimiento, lo cual es importante a la hora de caracterizar la integrabilidad. Así, el objetivo es hallar la transformación canónica para un conjunto de momentos conjugados constantes (como en la expresión (2.2.9)). Estas transformaciones se efectúan mediante las llamadas funciones generadoras, las cuales ayudan a asegurar que la estructura de las ecuaciones canónicas de movimiento se mantenga intacta al realizar la transformación. En el caso de funciones Hamiltonianas que no dependen del tiempo, se propone una función generadora [27] $S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha})$ donde $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_1, \dots, \alpha_{\mathcal{N}}$ denota los nuevos momentos. Esta función satisface

$$p_i = \frac{\partial}{\partial q_i} S(q_1, \dots, q_{\mathcal{N}}; \alpha_1, \dots, \alpha_{\mathcal{N}}). \quad (2.3.1)$$

De aquí se puede escribir la relación entre el Kamiltoniano y el Hamiltoniano como [27]

$$H(q_1, \dots, q_N, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_N}) = K(\alpha_1, \dots, \alpha_N). \quad (2.3.2)$$

La ecuación (2.3.2) es una ecuación diferencial parcial de primer orden para S en \mathcal{N} variables independientes y es conocida como **la ecuación de Hamilton-Jacobi independiente del tiempo**. Vale la pena notar que el lado derecho de esta ecuación es una cantidad constante (el valor del Kamiltoniano), debido a que las α_i son constantes de movimiento. Para un sistema conservativo de \mathcal{N} grados de libertad, el valor de $K(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ es usualmente el valor de la energía del sistema E . Las ecuaciones de este tipo tiene una solución completa para \mathcal{N} constantes independientes de integración α_i , por ello, resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi equivale a resolver las ecuaciones canónicas de movimiento para un sistema integrable.

Por simplicidad, se considera un sistema un grado de libertad. Además, se asume que es conservativo, entonces su Hamiltoniano puede ser descrito como $H(q, p) = \alpha_1$. Resolviendo para el momento se obtiene

$$p = p(q, \alpha_1), \quad (2.3.3)$$

que es una ecuación para la órbita resultante de la evolución del sistema en el espacio fase de dos dimensiones.

Un tipo especial de movimiento que puede surgir es el periódico, el cual, en esencia puede generar dos tipos de **órbitas periódicas**. El primer caso es aquel asociado a una **órbita cerrada**, en este caso tanto q como p son funciones periódicas del tiempo con la misma frecuencia. Un movimiento periódico de esta naturaleza se encontrará cuando la posición inicial se sitúe entre dos ceros de la energía cinética. A menudo se designa con el nombre astronómico de **libración**, y tal vez el ejemplo prototípico sea el del oscilador armónico.

El segundo, es aquel donde la órbita en el espacio fase es tal que p es alguna función periódica de q , con periodo q_0 , como se ilustra en la figura 2.1. La coordenada de posición en este tipo de periodicidad es invariablemente un ángulo de rotación, y el movimiento se referirá simplemente como **rotación**, en contraste con la libración. Los valores de q ya no están limitados sino que pueden aumentar indefinidamente. Esta distinción en las órbitas periódicas tomará particular relevancia más adelante, cuando se estudien las órbitas de los billares.

Para cualquiera de estos tipos de movimiento periódico, se puede introducir una nueva variable J que reemplazará al momento transformado α_1 . Esta es la llamada **variable de acción**, y se define como

$$J = \oint pdq, \quad (2.3.4)$$

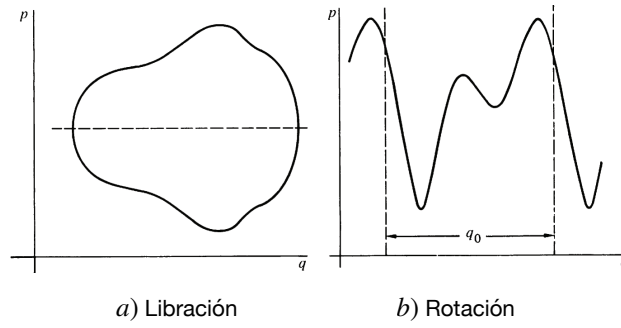


Figura 2.1: Dos tipos de órbitas periódicas en el espacio fase para sistemas de una dimensión. Figura adaptada de [24].

donde la integración se efectúa sobre un periodo completo de la libración o la rotación, dependiendo del caso. Cabe resaltar que J tiene dimensiones de momento angular. Ahora bien, de la ecuación (2.3.3) se sigue que la variable de acción es siempre una función únicamente de α_1

$$\alpha_1 \equiv H = H(J). \quad (2.3.5)$$

Si se considera la función $S = S(q, J)$, entonces, la coordenada generalizada conjugada a J , se conoce como la **coordenada de ángulo** ϑ , y se define por la transformación

$$\vartheta = \frac{\partial S}{\partial J}. \quad (2.3.6)$$

Hay que destacar que ϑ , al ser la coordenada conjugada a un momento angular J , tiene dimensiones de ángulo. Entonces, la ecuación de movimiento para ϑ es

$$\dot{\vartheta} = \frac{\partial H(J)}{\partial J} = \omega(J), \quad (2.3.7)$$

donde ω es una constante sólo de J . La expresión (2.3.7) tiene por solución

$$\vartheta = \omega t + \beta, \quad (2.3.8)$$

donde vemos que ϑ es una función lineal en el tiempo, al igual que en el caso de las ecuaciones de movimiento para la función Hamiltoniana transformada (ec. (2.2.11)).

Para el estudio de sistemas Hamiltonianos acotados donde el movimiento es periódico, se suele imponer un periodo característico de $2\pi/\omega$, con ω la frecuencia de movimiento que completa un ciclo [27]. La elección del valor 2π es una convención que busca que la frecuencia asociada al movimiento periódico de q oscile entre 0 y 1. Este no es el caso más general, pero para los fines de este trabajo resulta adecuado, al momento de mapear las órbitas del espacio fase a la superficie de un toro (ver figura 2.2).

Si ahora se considera un sistema con \mathcal{N} grados de libertad, el conjunto de variables de acción se puede definir como [27]:

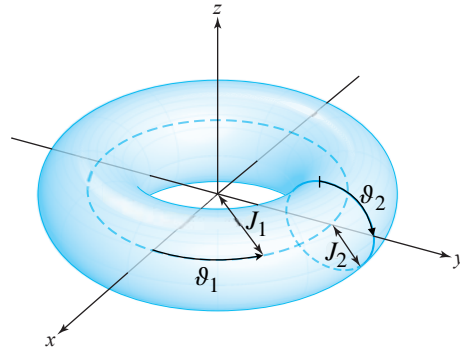


Figura 2.2: Gráfica de un toro bidimensional en el espacio tridimensional xyz , el cual se define como una superficie de revolución generada de rotar un círculo alrededor de una línea recta (eje z) en el espacio tridimensional que se encuentra en el mismo plano del círculo (plano zy) pero no lo intercepta. El parámetro J_1 indica la posición del centro de la circunferencia revolucionada y J_2 es el radio de dicha curva. Por su parte, los ángulos ϑ_1 y ϑ_2 completan la parametrización de un punto sobre la superficie del toro. Figura modificada de [28].

$$J_k = \oint_{\mathcal{C}_k} \sum_{m=1}^{\mathcal{N}} p_m dq_m, \quad (2.3.9)$$

donde $k = 1, \dots, \mathcal{N}$ y \mathcal{C}_k define un camino cerrado en el toro. De aquí, las variables conjugadas de ángulo resultan

$$\vartheta_k = \frac{\partial}{\partial J_k} S(q_1, \dots, q_{\mathcal{N}}; J_1, \dots, J_{\mathcal{N}}). \quad (2.3.10)$$

Entonces, las ecuaciones de Hamilton en la representación de ángulo-acción en general son:

$$\dot{J}_k = -\frac{\partial K(J_1, \dots, J_{\mathcal{N}})}{\partial \vartheta_k} = 0, \quad (2.3.11a)$$

$$\dot{\vartheta}_k = \frac{\partial K(J_1, \dots, J_{\mathcal{N}})}{\partial J_k} = \omega_k(J_1, \dots, J_{\mathcal{N}}). \quad (2.3.11b)$$

Joseph Liouville demostró [29] que para un sistema integrable con \mathcal{N} grados de libertad (equivalente a un espacio fase $2\mathcal{N}$ -dimensional), se cumple que del flujo Hamiltoniano se puede determinar un movimiento periódico, que es lo que se tiene en las ecuaciones (2.3.11). De esta manera, el espacio fase puede representarse como un toro \mathcal{N} -dimensional.

Se denota a un toro \mathcal{N} -dimensional como $T_{\mathcal{N}}(J, \vartheta)$. Para un sistema de dos grados de libertad, se establece la condición (condición de conmensurabilidad) para órbitas cerradas como

$$\frac{\omega_j}{\omega_k} = \sigma = \frac{r}{r'}, \quad \text{con } r, r' \text{ enteros,} \quad (2.3.12)$$

donde ω_j, ω_k son dos de las mismas frecuencias mostradas en (2.3.11b).

La visualización del espacio fase como un toro se revela especialmente útil en el contexto de sistemas con dos grados de libertad y puede extenderse a sistemas de dimensiones superiores bajo ciertas condiciones. Las coordenadas de ángulo describen la posición dentro de estos toros, mientras que las acciones se relacionan con sus tamaños y formas (áreas en el espacio fase), como puede verse en la figura 2.2. En sistemas integrables, las trayectorias se cierran sobre sí mismas (órbitas periódicas) o cubren los toros de manera densa, dependiendo de la relación entre los periodos de las coordenadas de ángulo. Se dice que se tiene una **órbita cuasiperiódica** cuando la razón de las frecuencias σ es un número irracional, y no puede escribirse exactamente como r/r' pero sí puede aproximarse arbitrariamente usando razones σ con valores racionales. Los toros cuyos parámetros satisfacen la relación de conmensurabilidad (2.3.12), y por tanto presentan orbitas periódicas, se les llama toros racionales o resonantes [27]. Siendo los toros irracionales aquellos que no la satisfacen y, además, en estos se presentan órbitas cuasiperiódicas.

En sistemas integrables, el conjunto de los toros resonantes ocupa volumen cero en el espacio de posiciones y momentos (es decir, tiene medida de Lebesgue cero), pero arbitrariamente cerca de cualquier punto del espacio fase vive un toro racional [5]. Así, en una vecindad alrededor de un toro irracional debe haber al menos un toro asociado a órbitas periódicas. El teorema Kolmogorov-Arnold-Moser da información acerca de lo que le ocurre a dichos toros en el caso de sistemas no integrables, pues proporciona una perspectiva sobre la persistencia de órbitas cuasiperiódicas bajo perturbaciones pequeñas. Lo cual es de interés dado que justo en estos casos es cuando surge el caos en sistemas dinámicos, como se verá a continuación.

2.3.2. Ruptura de integrabilidad

Si se considera una función Hamiltoniana H_0 integrable, se puede estudiar lo que sucede con la solución cuando se añaden interacciones, como en el problema de los tres cuerpos del caso gravitacional. Una forma de abordar esta situación es considerando perturbaciones H_1 a la función Hamiltoniana regular H_0 . Así, surge la pregunta de si la solución del sistema perturbado es estable, y si las órbitas se mantendrán cercanas al caso sin perturbar a tiempos largos [24]. Justo el teorema KAM presenta las condiciones con las que un sistema integrable podría perder su regularidad. Este teorema muestra que para una perturbación *suficientemente pequeña* en una función Hamiltoniana integrable, la mayoría de las órbitas cuasiperiódicas experimentarían cambios mínimos. En 1954, Kolmogorov esbozó dicho teorema que a inicios de los años sesenta fue probado por Arnold y Moser [27].

Para establecer con claridad el teorema, se asume que un Hamiltoniano (integrable) H_0 es perturbado por alguna función H_1 tal que

$$H = H_0(\mathbf{J}) + \epsilon H_1(\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta}), \quad (2.3.13)$$

donde H_1 se pide que sea periódico en las variables originales de ángulo ($H_1(\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta} + 2\pi) = H_1(\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta})$) y la cantidad ϵ garantiza que la perturbación sea *suficientemente pequeña* ($\epsilon H_1 \ll 1$). Las ecuaciones de Hamilton resultan

$$\dot{\mathbf{J}}_k = -\frac{\partial H_1}{\partial \theta_i}, \quad \dot{\theta}_k = \omega_k(\mathbf{J}) + \frac{\partial H_1}{\partial J_k}, \quad (2.3.14)$$

donde ω_k son las frecuencias sin perturbar, es decir, $\omega_k = \partial H_0 / \partial J_k$. Ahora bien, para el sistema sin perturbar, se identifica un toro particular T_0 , a través de su conjunto asociado de frecuencias $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{J})$. Específicamente, se elige un vector inconmensurable de frecuencias $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^*$, es decir, tal que $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\kappa} \neq 0$ para todo entero κ_k en $\boldsymbol{\kappa} = \kappa_1, \dots, \kappa_N$. Así, el sistema tiene frecuencias $\boldsymbol{\omega}^*$ en $T_0(\boldsymbol{\omega}^*)$ y $\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\omega}^*$ es el flujo en el toro T_0 .

Con lo anterior presente, se enuncia lo siguiente [27]:

Teorema KAM. Sea $H = H_0 + \epsilon H_1$, con H_0 una función Hamiltoniana integrable y no degenerada. Si ϵH_1 es lo suficientemente pequeño ($\epsilon \ll 1$), entonces para casi todo $\boldsymbol{\omega}^*$ existe un toro invariante $T(\boldsymbol{\omega}^*)$ del sistema perturbado tal que $T(\boldsymbol{\omega}^*)$ es cercano a $T_0(\boldsymbol{\omega}^*)$, con $\boldsymbol{\omega}^*$ un vector de frecuencias suficientemente irracional (condición diofantina).

Lo anterior, en esencia, quiere decir que si consideramos un sistema Hamiltoniano $H = H_0 + \epsilon H_1$ con H_0 integrable, se tiene que la mayoría de los toros invariantes no resonantes (de frecuencias irracionales entre sí) no desaparecerán, a lo más se deformarán. Además, el espacio fase del sistema perturbado tendrá toros invariantes llenados densamente con movimientos cuasiperiódicos. Lo anterior se cumple bajo las siguientes dos condiciones:

- Perturbaciones *muy* pequeñas ($\epsilon \ll 1$).
- Cociente ω_i/ω_j *suficientemente irracional* (condición diofantina):

$$\left| \frac{\omega_i}{\omega_j} - \frac{r}{s} \right| > \frac{\mathcal{F}(\epsilon)}{s^{2.5}}, \quad (2.3.15)$$

para todo r, s . Donde $\mathcal{F}(\epsilon)$ es alguna función tal que $\mathcal{F}(\epsilon) \rightarrow 0$ en tanto $\epsilon \rightarrow 0$.

Así, se rescata la idea de que para una perturbación suficientemente pequeña, casi todos los toros se preservan. De acuerdo al teorema KAM, los toros $T(\boldsymbol{\omega}^*)$ suficientemente irracionales sobreviven a dicha perturbación.

El teorema KAM no nos da información acerca de los toros resonantes y su vecindad. Pero es posible recuperar información a partir de los cortes en el espacio fase. Una elección adecuada para estos cortes son las llamadas **secciones de Poincaré**, las cuales se presentan más adelante.

Capítulo 3

Caos dinámico

3.1. Caos en sistemas dinámicos

Para los fines de este escrito, resulta conveniente distinguir entre dos formas de evolucionar un sistema dinámico: mapeos y ecuaciones de movimiento. El concepto de mapeo proviene de la teoría de funciones, esto es que si se considera alguna función f con dominio \mathcal{A} y rango \mathcal{B} , se dice que f mapea de \mathcal{A} a \mathcal{B} , lo cual se denota como [28]

$$f : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}. \quad (3.1.1)$$

En sistemas dinámicos, se dice que un mapeo es una regla específica que determina la evolución de un estado. Se tiene el caso de un **mapeo discreto** $f_d : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$, cuando éste lleva cada punto $x \in \mathcal{A}$ a un punto $f(x)$ en \mathcal{B} . Este mapeo se aplica repetidamente mediante la operación de composición funcional, para obtener la trayectoria del sistema en pasos de tiempo sucesivos. Por otra parte, para sistemas dinámicos no discretos, los **mapeos continuos** suelen describir la evolución del sistema a lo largo de trayectorias continuas mediante ecuaciones diferenciales, a las que se les llama ecuaciones de movimiento. Independientemente de si se tiene una dinámica continua o discreta, el objetivo es abordar el concepto de caos y sus implicaciones. Por ello se hará distinción entre estos dos casos solo cuando sea necesario.

Un sistema físico dependiente del tiempo es determinista si es posible calcular su comportamiento a futuro dada una condición inicial, ya sea aplicando las iteraciones de un mapeo discreto, o bien, integrando ecuaciones diferenciales. Por supuesto, resolver una ecuación diferencial no siempre es una tarea sencilla, pero esto implica, al menos, el principio del determinismo: la situación presente determina el futuro [2]. En ciertos sistemas no lineales, se observa la característica de que las trayectorias cercanas divergen a un ritmo exponencial dentro de una región delimitada del espacio fase [27]. Cuando sucede que la configuración presente de un sistema lleva a separaciones significativas en la evolución a tiempos largos, se dice que el sistema tiene **sensibilidad a las condiciones iniciales**, o bien, que es irregular en su evolución.

Definición 3. Caos determinista. *El término caos determinista se utiliza para describir el comportamiento irregular de sistemas dinámicos que surge de una evolución temporal estrictamente determinista, sin ninguna fuente de ruido o estocasticidad externa. Esta irregularidad se manifiesta en una dependencia extremadamente sensible a las condiciones iniciales, lo cual impide cualquier predicción a largo plazo de la dinámica [30].*

Así, el caos determinista o simplemente **caos**, se caracteriza por la casi imposibilidad de que la información sobre el futuro de la dinámica sea accesible. De esta manera, uno de los aspectos más importantes sobre los sistemas caóticos es que el futuro distante se vuelve esencialmente independiente de su estado presente y el estado del sistema a tiempos largos, solo puede ser descrito en términos de distribuciones de probabilidad. Lo cual es típico de sistemas ergódicos, para los cuales las propiedades del sistema pueden ser caracterizadas por medidas estadísticas promediadas sobre el espacio fase. En una escala de tiempo amplia, la evolución del sistema se asemeja a un proceso puramente aleatorio; en todos los aspectos prácticos, se comporta de manera estocástica y su estudio involucra medidas de probabilidad y promedios [8].

3.2. Herramientas para caracterizar el caos

Una teoría efectiva no sólo se caracteriza por resaltar las limitaciones, como la impracticabilidad de las predicciones en el contexto del caos, sino también por su capacidad de ofrecer caminos para recuperar información valiosa sobre el sistema de estudio. En este sentido, la teoría del caos, lejos de mostrar un obstáculo insuperable, presenta un campo de estudio para la exploración de elementos ordenados dentro de la aparente aleatoriedad. Para esto, se presenta una herramienta cualitativa para el estudio del caos: las Secciones de Poincaré. Las cuales permiten visualizar, entre otras cosas, las órbitas periódicas y cuasi-periódicas a partir de un mapeo particular que permitirá identificar órbitas periódicas, **puntos fijos** y la evolución del espacio fase ante perturbaciones. Lo cual, como ya se mencionó, es relevante para la caracterización de integrabilidad en un sistema dinámico.

3.2.1. Mapas reversibles

Considérese un sistema Hamiltoniano conservativo (que no depende explícitamente del tiempo) con dos grados de libertad, o bien, que tenga un sólo grado de libertad y que dependa del tiempo de manera periódica. Se denota por M a un **mapeo de Poincaré** en una sección transversal del espacio fase Σ . Se dice que este mapa es reversible si puede expresarse como el producto (la composición) de dos involuciones:

$$M = I_1 I_0, \quad (3.2.1)$$

donde una involución I es una transformación tal que su cuadrado es la identidad, es decir, $I_i I_i = 1$.

La evolución en el tiempo dada por un mapeo de Poincaré M es invariante bajo la transformación de inversión en las velocidades y el tiempo I_0 , cuyo operador inverso es:

$M^{-1} = I_0 M I_0$. Con esto en mente se propone una forma general de escribir involuciones. Por ejemplo

$$I_1 = M I_0, \quad (3.2.2)$$

que satisface ser una involución pues

$$I_1^2 = M I_0 M I_0. \quad (3.2.3)$$

Entonces a M se le llama **transformación simétrica** respecto de I_0 . Para M , un mapa reversible se puede definir la transformación I_j con j un entero arbitrario:

$$I_j = M^j I_0, \quad (3.2.4)$$

que es también involución $I_j I_j = 1$. El conjunto de transformaciones $\{1, I_j, M^k\}$, con j y k en \mathbb{Z} (enteros), es un grupo infinito discreto:

$$M^j M^k = I_{j+k}, \quad (3.2.5a)$$

$$M_j M_k = M^{j-k}, \quad (3.2.5b)$$

$$M_j M^k = I_{j-k}. \quad (3.2.5c)$$

Ahora bien, definimos al subconjunto Γ_j de Σ como el conjunto invariante bajo I_j :

$$\Gamma_j = \{\mathbf{x} \in \Sigma \mid I_j \mathbf{x} = \mathbf{x}\}. \quad (3.2.6)$$

A Γ_j se le llama la **línea de simetría j** [31]. Denotando además por \mathcal{P}_n al conjunto de puntos fijos bajo M^n

$$\mathcal{P}_n = \{\mathbf{x} \in \Sigma \mid M^n \mathbf{x} = \mathbf{x}\}. \quad (3.2.7)$$

Si n es el menor entero positivo tal que $M^n \mathbf{x} = \mathbf{x}$, se dice entonces que la evolución $M^{n-1} \circ \dots \circ M^2 \circ M \circ \mathbf{x}$, es una **órbita periódica** de periodo n . Las líneas de simetría sirven como herramienta para rastrear órbitas periódicas. La identificación de trayectorias (órbitas) cerradas es útil para caracterizar a los sistemas integrables y no integrables.

3.2.2. Secciones de Poincaré

Es útil convertir la evolución de un sistema Hamiltoniano en un mapa de tiempos discretos mediante la técnica denominada método de la sección transversal de Poincaré o simplemente, secciones de Poincaré. Se consideran \mathcal{N} grados de libertad, entonces el

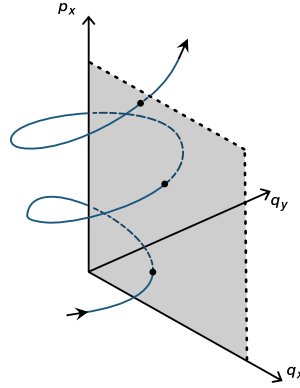


Figura 3.1: Una trayectoria en el espacio fase que interseca con una superficie de energía constante. El plano (región sombreada) sería una superficie de Poincaré.

mapa de Poincaré M representa una reducción del flujo \mathcal{N} -dimensional a un mapa $(\mathcal{N} - 1)$ -dimensional [5].

Acorde a los fines de este escrito se toma $\mathcal{N} = 2$ grados de libertad lo que genera un espacio fase de 4 variables (q_x, q_y, p_x, p_y) . Se considera un sistema Hamiltoniano cuadrático en las velocidades, que conserva energía E y con un potencial V , es decir,

$$E = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + V(q_x, q_y), \quad (3.2.8)$$

entonces una de las componentes del momento lineal queda determinada por la otra y por la energía mecánica del sistema, lo que reduce el problema de visualizar de cuatro componentes del espacio fase a tres. Además, se fija una componente de posición, por ejemplo $q_y = 0$. Así, ésta queda representada como

$$p_y = \sqrt{2mE - p_x^2 - 2mV(q_x, 0)}. \quad (3.2.9)$$

En la figura 3.1 se esquematiza una trayectoria que atraviesa una superficie de energía (la sección de superficie). El plano está definido por $q_y = 0$ y la condición (3.2.8) establecida. El mapeo de Poincaré, en este caso, da la regla para encontrar todas las intersecciones de una órbita con la sección de superficie. Al conjunto de puntos generados por dicho mapa se le llama la sección de Poincaré.

La sección de Poincaré es una técnica que transforma una evolución continua en un mapeo discreto, donde cada punto de este representa una perforación de la sección de superficie por dicha trayectoria en el espacio fase. Esto facilita la identificación de órbitas periódicas y cuasiperiódicas que son clave para comprender la naturaleza del comportamiento caótico. Al reducir la dimensionalidad del problema, las secciones de Poincaré hacen manejable el estudio de sistemas dinámicos, permitiendo visualizar y analizar la sensibilidad a las condiciones iniciales. A pesar de la utilidad de esta herramienta, la información que se le puede recuperar es únicamente cualitativa. Las secciones de Poincaré nos permiten rastrear regiones tanto de regularidad como caos, y la transición de la di-

námica entre estas. Para cuantificar el caos presente en la dinámica se necesita de una herramienta adicional.

3.2.3. Exponentes de Lyapunov

El hecho de que el mapeo de Poincaré transforma una dinámica continua en una evolución discreta, y viceversa, sirve de motivación para primero definir el exponente de Lyapunov para un mapa dado y, naturalmente, extenderlo al caso continuo. Esto porque en la literatura típicamente se estudian tanto modelos discretos como continuos en el tiempo [32].

La noción del exponente de Lyapunov surge naturalmente cuando se estudia la estabilidad de trayectorias de un sistema dinámico. Lo cual consiste en evolucionar trayectorias cercanas y revisar si mantienen esta cercanía a lo largo del tiempo. Por simplicidad, se comienza con el **caso discreto** dada una evolución determinista de un sistema dinámico (un mapeo) mediante la siguiente relación recursiva:

$$\mathbf{U}(t+1) = \mathbf{F}(\mathbf{U}(t)), \quad (3.2.10)$$

donde t es una variable de valor entero que denota al tiempo, \mathbf{U} es un vector η -dimensional (dimensión del espacio fase) que contiene el estado de una partícula del sistema en t y \mathbf{F} es simplemente una función que transforma de $\mathbb{R}^\eta \rightarrow \mathbb{R}^\eta$. Una condición inicial $\mathbf{U}(0)$ determina de forma única la trayectoria completa $\mathbf{U}(t)$, la cual se puede obtener de integrar (3.2.10).

Se busca estudiar la dinámica bajo pequeñas (infinitesimales) perturbaciones, lo cual requiere de linealizar el mapeo. Entonces, una perturbación $\mathbf{u}(t)$ de la trayectoria $\mathbf{U}(t)$ se transforma de acuerdo a¹

$$\mathbf{u}(t+1) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}(t)\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{J}(t)\mathbf{u}(t), \quad (3.2.11)$$

donde \mathbf{J} es la matriz Jacobiana del sistema. El valor de la perturbación $\mathbf{u}(t)$ se puede obtener iterando, es decir,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= \mathbf{J}(t-1)\mathbf{u}(t-1) = \mathbf{J}(t-1)\mathbf{J}(t-2)\mathbf{u}(t-2) \\ &= \prod_{k=0}^{t-1} \mathbf{J}(k)\mathbf{u}(0) \\ &= \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{u}(0), \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

donde la matriz $\mathbf{\Phi}(t)$ define la evolución en pasos de t . Entonces, para determinar si al evolucionar la perturbación esta crece o disminuye, se necesita estudiar el efecto que se

¹En la literatura puede encontrarse también la notación $t+1 \equiv t_{i+1}$, donde i denota el i -ésimo instante en algún intervalo Δt .

tiene de aplicar el producto de matrices anterior en algún vector de estado inicial, para tiempos largos.

Una forma de ver a la perturbación \mathbf{u} en términos de la órbita de referencia \mathbf{U} , es proponer una órbita separada paramétricamente de la órbita de referencia. Si denotamos a éste parámetro como σ y a dicha órbita desviada como \mathbf{U}_σ , entonces uno puede definir al vector de la perturbación tal que [26]

$$\mathbf{u}(t) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\mathbf{U}_\sigma(t) - \mathbf{U}(t)}{\sigma}. \quad (3.2.13)$$

Así, la cantidad $\mathbf{u}(0)$ expresa dos condiciones iniciales infinitesimalmente cercanas. Con esto, el problema de caracterizar el caos se reduce a cuantificar el tamaño de $\mathbf{u}(t)$ dadas unas condiciones iniciales $\mathbf{u}(0)$, cuando se evoluciona a tiempos largos.

Por sencillez, se considera primero como ejemplo el caso de un mapeo unidimensional $\eta = 1$. En este caso, $F(U)$ es una función escalar y la matriz Jacobiana se reduce a la derivada $F'(U)$. Entonces, una perturbación escalar u obedece

$$u(t) = \prod_{k=0}^{t-1} F'(U(k))u(0). \quad (3.2.14)$$

Esta perturbación puede o bien acrecentarse o disminuir, por lo cual resulta adecuado introducir el valor absoluto para estudiar la magnitud de ésta, de forma que

$$|u(t)| = |u(0)| \prod_{k=0}^{t-1} |F'(U(k))|. \quad (3.2.15)$$

En lugar de trabajar con productos resulta más conveniente hacerlo con sumas, para esto aprovechamos las propiedades de los logaritmos los cuales también proporcionan información sobre la escala. Así, reescribimos la expresión anterior como:

$$\ln |u(t)| = \ln |u(0)| + \sum_{k=0}^{t-1} \ln |F'(U(k))|. \quad (3.2.16)$$

Se considera que la órbita original $U(t)$ se comporta de manera uniforme a lo largo del tiempo, es decir, que por sí sola sus características no cambian cuando la observamos durante periodos largos, lo que nos da pauta para entender cómo varía en promedio la cantidad $\ln |F'(U(k))|$. Entonces, se analiza cómo se distribuyen estas variaciones en el conjunto completo de posibles estados del sistema, en lugar de seguir la trayectoria durante un largo periodo. Esto es como tomar una foto de todos los posibles estados del sistema y calcular el promedio en ese instante. Dicho de otra forma, se asume que la trayectoria original es un proceso ergódico estadísticamente estacionario, entonces el promedio temporal de la observable $\ln |F'(U(k))|$ puede representarse típicamente² como un promedio sobre la correspondiente medida de probabilidad [32], que en el caso del mapeo es

²Esto gracias al teorema ergódico de Birkhoff. Véase [33].

$$\frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} \ln |F'(U(k))| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \langle \ln |F'(U)| \rangle. \quad (3.2.17)$$

Usando este resultado y resolviendo (3.2.16) nos queda una expresión aproximada, cuya precisión aumentará conforme se haga más grande el tiempo de la evolución:

$$|u(t)| \approx |u(0)| e^{\langle \ln |F'(U)| \rangle t} = |u(0)| e^{\lambda t}, \quad (3.2.18)$$

donde la cantidad λ es llamada el **exponente de Lyapunov** de un mapeo unidimensional. Se pueden inferir tres comportamientos de la dinámica a partir del signo de λ en la ecuación (3.2.18).

1. ($\lambda < 0$). En este caso, el factor exponencial $e^{\lambda t}$ decrece hacia cero a medida que t aumenta. Esto significa que la magnitud de cualquier perturbación inicial $|u(0)|$ tiende a disminuir exponencialmente rápido hacia cero. En términos de la dinámica del sistema, las trayectorias que inicialmente están cerca una de la otra tienden a converger con el tiempo. El sistema, por lo tanto, tiene la capacidad de retornar a un estado estable después de ser perturbado, y pequeñas variaciones o errores tienden a amortiguarse con el tiempo. Se dice entonces, que un exponente de Lyapunov negativo mide el ritmo al que un sistema se aproxima a un tipo de punto particular: un **atractor regular** [24].
2. ($\lambda = 0$). Aquí se tiene que la parte $e^{\lambda t}$ se reduce a 1, independientemente del valor de t . Esto significa que la magnitud de cualquier perturbación inicial $|u(0)|$ se mantiene constante a lo largo del tiempo. Desde el punto de vista de la dinámica del sistema, las trayectorias que inicialmente están cerca una de la otra ni convergen ni divergen significativamente a medida que el tiempo avanza. El sistema ni gana ni pierde estabilidad a partir de sus perturbaciones iniciales. Este es el caso de movimiento regular [34].
3. ($\lambda > 0$). Se tiene que el factor $e^{\lambda t}$ aumenta exponencialmente a medida que t se hace grande. Esto indica que la magnitud de cualquier perturbación inicial $|u(0)|$ crece exponencialmente con el tiempo. Esto refleja una inestabilidad: las trayectorias que inicialmente están cercanas comienzan a divergir rápidamente una de otra. Pequeñas diferencias en las condiciones iniciales pueden llevar a diferencias muy grandes en el comportamiento a largo plazo. Esto cuantifica el promedio de crecimiento de una desviación infinitesimal de una órbita regular a partir de una perturbación. En este caso se dice que el movimiento es caótico [24].

Si ahora se lleva este concepto a un caso de mayor dimensionalidad η , lo que se estudia es la amplitud de la perturbación $\|\mathbf{u}(t)\|^2$, dada por la norma como

$$\|\mathbf{u}(t)\|^2 = \|\Phi(t)\mathbf{u}(0)\|^2 = \mathbf{u}^T(0)\Phi^T(t)\Phi(t)\mathbf{u}(0), \quad (3.2.19)$$

donde el superíndice T denota la operación de transponer una matriz y Φ puede operar tanto para el caso discreto como el continuo. Ahora bien, si se reescribe la matriz simétrica

$$\mathbf{G}(t) = \Phi^T(t)\Phi(t), \quad (3.2.20)$$

entonces del teorema de Oseledets³, que establece que una secuencia ergódica de matrices estadísticamente estacionarias (es decir, que el proceso $\mathbf{U}(t)$ sea ergódico de forma equivalente al promedio que se propone en el caso unidimensional), se tiene que el límite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{G}(t)]^{1/2t}$$

existe y es una matriz η -dimensional con eigenvalores positivos $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_\eta$. Así, se definen los η **exponentes de Lyapunov** como

$$\lambda_k = \ln \mu_k, \quad k = 1, 2, \dots, \eta. \quad (3.2.21)$$

Al conjunto de exponentes de Lyapunov en (3.2.21) se le llama **espectro de Lyapunov**. Geométricamente, cada exponente del espectro puede interpretarse como la razón de crecimiento promedio de los ejes principales de una elipsoide infinitesimal, que rodea un punto del espacio fase y evoluciona de acuerdo a la regla dada para $\dot{\mathbf{u}}$ (para el caso continuo se muestra más adelante). Por tanto, el espectro de Lyapunov describe el ensanchamiento y contracción característico del flujo Φ [26]. Los exponentes de Lyapunov en sistemas simplécticos exhiben la llamada simetría de pares de Smale $\lambda_i + \lambda_{\eta-i+1} = 0$, con $i = 1, 2, 3, \dots, \eta$ [26], la cual codifica el hecho de que el volumen del espacio fase se comprime y expande en diferentes direcciones. Esta simetría, de cierta forma, reduce el espectro de Lyapunov a la mitad. Además, por cada cantidad conservada en las ecuaciones de movimiento uno de los exponentes de Lyapunov se anula.

Para los fines de este escrito, en un espacio fase de cuatro dimensiones (q_1, q_2, p_1, p_2) todos los vectores de perturbación crecen asintóticamente con el máximo exponente de Lyapunov del espectro λ_1 . Además, se cumple en este caso que $\lambda_2 = -\lambda_3$ y $\lambda_4 = -\lambda_1$ [32], lo cual proviene de la simetría anteriormente mencionada, y por ello se anulan dos exponentes de Lyapunov por cada simetría. Así, para sistemas que conservan la energía, se tiene que $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ [36]. Por tanto, para el estudio del caos en billares bidimensionales basta con calcular el máximo exponente de Lyapunov λ_1 para tener acceso al espectro completo.

El máximo exponente de Lyapunov $\lambda_1 \equiv \lambda$, para la cuantificación del caos, es el más importante de todo el espectro puesto que con el tiempo superará todas las demás tasas de cambio. Aunque el espectro también se puede utilizar para proporcionar una definición cuantitativa del caos determinista: si la evolución dinámica produce al menos un exponente de Lyapunov positivo, y el estado del sistema permanece acotado en el espacio de estados, entonces esto significa caos determinista [34].

La idea también se extiende para el caso de sistemas dinámicos continuos, donde típicamente la evolución la dicta una ecuación diferencial (ordinaria o parcial), como se tiene en la ecuación (2.2.4). Ésta también se escribe de forma usual como

³Para más detalles sobre este teorema revisar [35].

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{F}(\mathbf{U}, t), \quad (3.2.22)$$

donde \mathbf{U} es un vector de estado de dimensión η y \mathbf{F} es un campo vectorial que puede depender del tiempo. De forma análoga, al linealizar se obtiene

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}(t)\mathbf{u}(t) = \mathcal{J}(\mathbf{U}, t)\mathbf{u}, \quad (3.2.23)$$

aquí \mathcal{J} es la matriz Jacobiana del sistema. De integrar esta ecuación en t , se obtiene

$$\mathbf{u}(t) = \Phi(\mathbf{U}_0, t)\mathbf{u}, \quad (3.2.24)$$

donde $\Phi(\mathbf{U}_0, t) = \exp \left[\int_0^t dt' \mathcal{J}(\mathbf{U}(t'), t') \right]$ depende de la trayectoria $\mathbf{U}(t')$ en todos los instantes. En la práctica, la matriz $\Phi(\mathbf{U}_0, t)$ se obtiene de resolver el sistema de ecuaciones (3.2.23).

Finalmente, para completar el estudio de los exponentes de Lyapunov, se reformula la expresión (3.2.18) para una perturbación inicial $\mathbf{u}(0)$ que evoluciona exponencialmente y de manera continua en el tiempo, cuya razón de crecimiento está cuantificada por los exponentes de Lyapunov como

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\Phi(t)\mathbf{u}(0)\|}{\|\mathbf{u}(0)\|} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\mathbf{u}(t)\|}{\|\mathbf{u}(0)\|}. \quad (3.2.25)$$

Así, se tienen dos herramientas: las secciones de Poincaré las cuales ofrecerán información cualitativa del caos y el exponente de Lyapunov, el cual ofrece una medida cuantitativa.

Capítulo 4

Billares

4.1. Billares de paredes duras

En el estudio de los sistemas dinámicos, los billares ocupan un lugar central y son ampliamente reconocidos como los modelos más comunes y fundamentales en la literatura. Se puede decir que la teoría matemática de los billares inició en 1970 con el trabajo de Sinai. Pero posterior a eso, la teoría creció y se desarrolló con gran rapidez para convertirse ahora en un área bien establecida y próspera dentro la teoría moderna de los sistemas dinámicos y de la física estadística [8]. A continuación, se presenta una definición concisa y formal de los billares de paredes duras.

Definición 4. *Billar de paredes duras.* *Consiste en una región D dentro de la cual, una partícula que evoluciona bajo la acción de un potencial, puede colisionar con la frontera ∂D de forma instantánea y especular; es decir, siguiendo la regla de que el ángulo de incidencia es igual al ángulo reflejado.*

Así, la dinámica de una partícula en un billar queda enteramente determinada por la forma de ∂D . Para los fines de este escrito, se consideran billares bidimensionales, entonces ∂D es una curva en el plano. Una partícula que evoluciona dentro de un billar tiene dos grados de libertad y se establece que las colisiones son perfectamente elásticas: conservan energía cinética y momento lineal. Usualmente, se pide que el potencial V que media la evolución de la partícula dentro del billar sea el de una partícula libre. Sin embargo, es posible elegir otro potencial dentro del billar, por ejemplo, algún campo magnético uniforme [37].

La evolución de una partícula dentro de un billar de paredes duras no es continua. Pues dentro del dominio D se tiene la evolución bajo la acción de un potencial V , y en el momento en que ocurre una colisión, los valores de momento cambian instantáneamente $\mathbf{p}_{\text{incidente}} \rightarrow \mathbf{p}_{\text{reflejado}}$. En general, la evolución de una partícula durante un tiempo t en un billar de paredes duras equivale a la composición de mapeos continuos \mathcal{J} y discretos \mathbf{J} , a lo largo de intervalos $\tau_i = t_{i+1} - t_i$, con i denotando la i -ésima colisión. Es decir, la evolución de una partícula durante un tiempo t en el que ocurren n colisiones, se puede expresar como

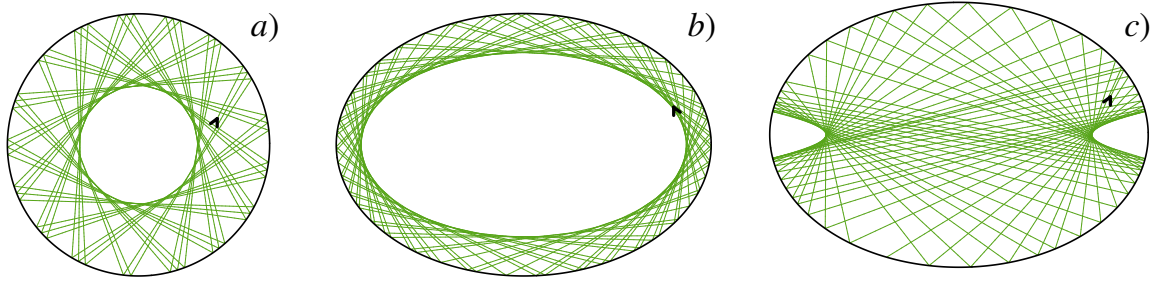


Figura 4.1: *a)* Un billar con frontera de circunferencia de radio $a = 1$. Se evoluciona (línea verde) una condición inicial (flecha) y de forma característica se forma una envolvente (o caústica) la cual es una circunferencia concéntrica. *b)* Se evoluciona otra condición inicial en un billar con frontera de elipse, con $a = 1$ y $b = 0.7$. De forma análoga, se observa una envolvente elíptica en este caso. *c)* También se tiene el billar de elipse pero se cambia la condición inicial, la cual forma una envolvente que ahora es una hipérbola.

$$\begin{aligned} U(t) &= \mathbf{J}_n(\tau_n) \circ \mathcal{J}_n(\tau_n) \circ \dots \circ \mathbf{J}_i(\tau_i) \circ \mathcal{J}_i(\tau_i) \circ \dots \circ \mathbf{J}_0(\tau_0) \circ \mathcal{J}_0(\tau_0) \circ U(0) \\ &= \mathbf{B}(t)U(0), \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

donde \mathbf{B} se denomina **mapeo de billar** y da la evolución de una partícula dentro de un billar, donde cada aplicación sucede en el instante de la colisión.

En la figura 4.1, se muestra la evolución (líneas verdes) para una condición inicial (flecha) en dos fronteras de billar diferentes: círculo y elipse. Para ambos casos, la dinámica puede caracterizarse mediante las curvas envolventes generadas por las órbitas, es decir, que cualquier condición inicial generada resulta en alguna de las curvas envolventes mostradas. Lo que se relaciona con que la dinámica en estos billares sea regular [38]. Esto es que las condiciones iniciales exploran regiones específicas (del espacio de configuraciones en este caso) y libran otras completamente, esta separación de regiones está dada por la respectiva curva envolvente. Y de lo discutido en capítulos anteriores se espera que para un sistema dinámico caótico (irregular), al evolucionar una partícula dada una condición inicial, en promedio, ésta explore de manera uniforme el espacio accesible. Así, se dice que el billar circular y de elipse son, en ese sentido, regulares.

Se tiene conocimiento de que modelar billares de paredes duras como pozos de potencial infinito dentro del cual una partícula evoluciona bajo la acción de una función Hamiltoniana, es conceptualmente útil para una amplia gama de aplicaciones que van desde los átomos fríos, dinámica molecular, hasta problemas fundamentales de física estadística [39]. Esto significa que la evolución entre dos colisiones en un billar, de acuerdo a (4.1.1), estaría determinada al resolver las ecuaciones de Hamilton en ese lapso. Esto se esquematiza en la figura 4.2, para el caso de la evolución de una partícula en un billar circular y uno de elipse.

Pero naturalmente, las barreras de potencial no son en realidad potenciales escalonados, así que es comprensible preguntarse acerca de los límites de validez de una aproximación de este estilo. Para lidiar con esto, se propone el problema una partícula que evoluciona en un pozo de potencial suavizado en la frontera. Para abordarlo, se necesita

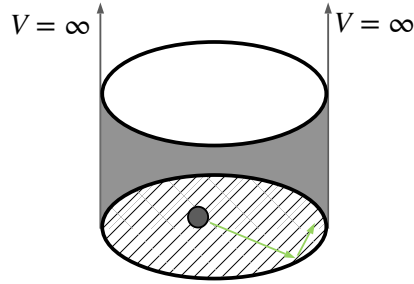


Figura 4.2: Esquema de una partícula que evoluciona en un billar circular de paredes duras. La evolución ocurre en la parte inferior del pozo (región achurada) y al llegar a los bordes ocurre una colisión. El pozo es tridimensional pero la evolución de la partícula está restringida a un plano.

introducir un nuevo parámetro que module dicha suavidad en la frontera, como se discute a continuación.

4.2. Billares suaves

Hasta este punto se ha proporcionado una descripción del marco de trabajo y las herramientas a utilizar, resta establecer el modelo de interés para este escrito: los billares de paredes suaves. El punto de referencia para el estudio presente es el artículo de Kroetz *et al.* [40]. En el cual se muestra que introducir suavidad en las paredes de un billar de frontera elíptica puede inducir y modular caos. Así, se busca extender las ideas ahí presentadas para un billar más general.

El punto de partida es escribir una función Hamiltoniana para un pozo de potencial que es suave en su frontera, es decir,

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + V(x, y; h), \quad (4.2.1)$$

donde h es un nuevo parámetro el cual modula la **dureza** del billar. Este parámetro se entiende mejor si se revisan sus casos límite, pues cuando $h \rightarrow 0$ se tiene la situación donde la contribución de las fronteras es nula y se recupera el potencial de una partícula libre.¹ Mientras que en el límite $h \rightarrow \infty$ se tiene un pozo de potencial infinito, lo que recupera el caso típico presentado con anterioridad, el billar de paredes duras.

Cabe resaltar, que para un billar de paredes suaves ya no se tiene un mapeo B como el presentado en (4.1.1). En este caso se tiene una evolución continua de inicio a fin, así, la trayectoria de una partícula dentro de un billar de paredes suaves se obtiene de integrar las correspondientes ecuaciones de Hamilton asociadas a (4.2.1). Dado lo anterior, se

¹El caso $h \rightarrow 0$ no se corresponde con un billar, por eso, usualmente se eligen valores de dureza $h > 0$.

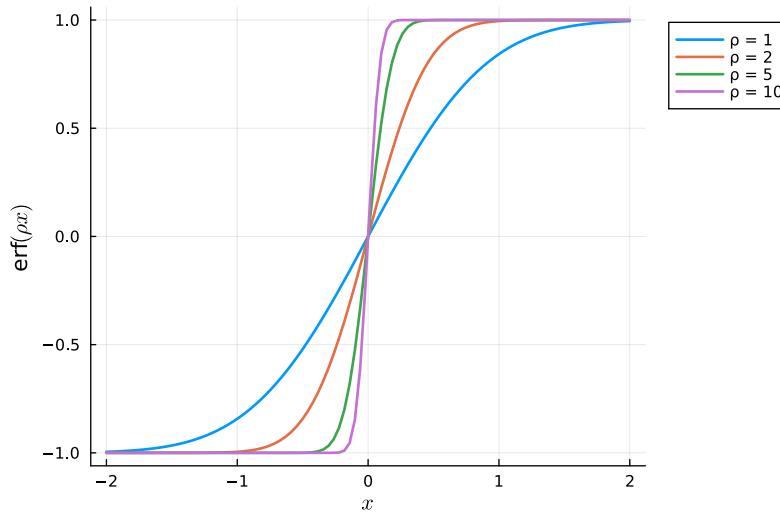


Figura 4.3: Gráfica de la función error: $\text{erf}(\rho x)$. Para diferentes valores del parámetro ρ , el cual está asociado con la suavidad de la curva alrededor de $x = 0$.

pueden usar todas las herramientas desarrolladas para este tipo de dinámica, presentando una ventaja directa sobre los billares de paredes duras.

Un potencial de billar suave proviene de una función que suaviza la frontera.² Para esto, se toma en cuenta la función error $\text{erf}(\rho x)$, donde ρ es un parámetro que modifica el perfil de la función, como se puede ver en la figura 4.3. A mayor el valor de ρ , asintóticamente se aproxima la función a una vertical. Con base en lo anterior y en la literatura [40], se elige la función error para suavizar el potencial, es decir,

$$V(x, y; h) = \text{erf}[h(\partial D)] , \tag{4.2.2}$$

donde ∂D corresponde a la ecuación de la curva para la frontera. Dicha curva debe escribirse como una función implícita, de forma que el potencial sea siempre negativo y por tanto, atractivo. Esto introduce un concepto importante para el estudio de billares suaves: las equipotenciales, que son superficies para las cuales el potencial es constante [41]. Debido a que los billares que se estudian en este escrito son bidimensionales, en su lugar, se hará mención de las proyecciones en dos dimensiones de estas superficies: las curvas equipotenciales. Como más adelante se verá, estas curvas surgen del hecho de que la energía en los billares es constante, lo que establece un punto de retorno en la evolución dentro del billar, y con esto es posible identificar los puntos donde la sufre una colisión.

Por ejemplo, si se considera un billar con frontera de elipse, el potencial para el billar suave resulta como

²Una primera opción puede ser un potencial tipo polinomial de la forma $V(r) = r^h - 1$ con r una coordenada radial. Este potencial satisface que para $h \rightarrow 0$, el potencial se vuelve partícula libre y en el límite $h \rightarrow \infty$ se tiene una curva cada vez más escalonada. Sin embargo, numéricamente es más complejo abordar el problema para un potencial de esta forma, aunado a eso, el perfil presente en los potenciales de los laboratorios es Gaussiano y no polinomial [20]. Por tanto, se descarta esta opción para el presente trabajo.

$$V(x, y; h) = \operatorname{erf} \left[h \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \right],$$

donde a y b son los semiejes mayor y menor, respectivamente. Con esto, es posible realizar la descripción de la dinámica de un billar de paredes suaves.

4.3. Parametrización de los billares suaves

En términos de parámetros que permiten modular la dinámica de un billar la dureza h de las paredes, surge como un factor adicional, pues al introducirse tiene un efecto estabilizador en la dinámica [40]. Por otro lado, la elección de un valor de energía E determina el tamaño del espacio fase accesible para la partícula en el billar. Por esto podría parecer que para un pozo de potencial, E no juega el papel de parámetro que module la dinámica, sin embargo, como se verá más adelante, cuando se toma un potencial de billar que permite que la partícula escape para un valor suficientemente grande de energía E , entonces ésta magnitud se vuelve un parámetro adicional, que es relevante para el estudio de la dinámica. En general, para contrastar la dinámica de un billar suave con uno de paredes duras se elige $E = 0$, pues su equipotencial asociada coincide con la frontera ∂D del caso de paredes duras. Más allá de esto, en principio no hay restricción alguna para elegir valores mayores o menores a $E = 0$.

En la sección subsiguiente, se expone una descripción del potencial que rige la dinámica de una partícula en una geometría específica, estableciendo las bases para comprender la relación entre la **geometría, dureza y energía**. Primero, se presenta el caso de un billar suave con frontera de elipse y posteriormente se propone una geometría más general: el *squircle*. En ésta última introduce un parámetro adicional al que llamaremos *cuadradez*, el cual modifica directamente la dinámica y, como se verá, en este caso el valor de la energía E afecta directamente la dinámica.

4.3.1. Primera aproximación al billar suave: la elipse

A diferencia de un billar de paredes duras, donde se necesita un mapeo para la evolución de una partícula, en el caso de un billar suave toda la dinámica queda determinada por una función Hamiltoniana. Primero, para el caso del billar suave de frontera circular o elíptica, se tiene un Hamiltoniano de la forma

$$H_{\text{el}}(x, y, h) = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}p_y^2 + V_{\text{el}}(x, y, h) = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}p_y^2 + \operatorname{erf} \left[h \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \right], \quad (4.3.1)$$

con h la dureza del billar, erf la función error, a y b el valor del semieje mayor y menor, respectivamente. El potencial para este billar se muestra para algunos valores de dureza en la figura 4.4, donde se observa que la energía del sistema, en adición con la suavidad modifican el espacio accesible para una partícula que evoluciona.

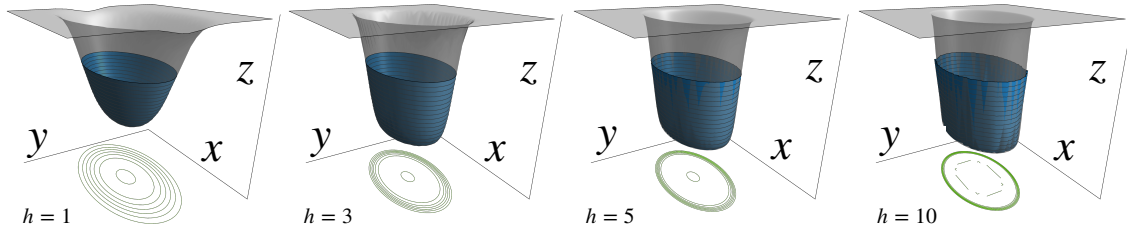


Figura 4.4: Gráfica del potencial suave V_{el} presente en (4.3.1), para diferentes valores de dureza h . La energía está fija $E = 0$ y eso determina el espacio accesible (región azul). Además, se eligen los valores arbitrarios $a = 1$, $b = 0.6$. En verde se proyectan las curvas equipotenciales con las cuales ocurren las colisiones.

Entonces, a partir de la función Hamiltoniana (4.3.1), las ecuaciones de movimiento que describen la dinámica de una partícula en el billar suave de elipse son

$$\dot{x} = p_x, \quad (4.3.2a)$$

$$\dot{p}_x = \frac{-4hx}{a^2\sqrt{\pi}} \exp \left[-h^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2 \right], \quad (4.3.2b)$$

$$\dot{y} = p_y, \quad (4.3.2c)$$

$$\dot{p}_y = \frac{-4hy}{b^2\sqrt{\pi}} \exp \left[-h^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2 \right]. \quad (4.3.2d)$$

Ahora bien, Kroetz *et al.* mostraron en su artículo [40] la presencia de caos en un billar suave con frontera de elipse, lo cual es llamativo pues en el caso de paredes duras este billar es completamente regular. Se tomará como referencia a éste para contrastar las herramientas numéricas desarrolladas para el presente escrito, con la finalidad de extender el análisis a una geometría más general.

4.3.2. Rigidez de los pozos de potencial

Un aspecto que a primera vista puede no destacar pero que en realidad es crucial para resolver un billar suave, es que su dinámica permite acercarse al límite de paredes duras de manera continua, es decir, el caso donde las colisiones que ocurren con la frontera son instantáneas. Lo anterior resulta en que las ecuaciones de movimiento presentan rigidez o acartonamiento (en inglés llamado *stiffness*). La rigidez es un problema entendido y estudiado en el contexto de la resolución de ecuaciones diferenciales numéricas. Para clarificar lo anterior, se provee la siguiente definición [42]:

Definición 5. Rigidez de una ecuación diferencial. *Un problema de condiciones iniciales se dice que es rígido si éste es sumamente difícil de resolver mediante métodos explícitos ordinarios de paso a paso, mientras que ciertos métodos implícitos tienen un desempeño bastante bueno.*

En esencia, el acartonamiento de ecuaciones ocurre si el tamaño del paso más grande del método de integración h_n^* , que garantiza la estabilidad numérica es mucho más pequeño que el paso más grande h_n para el cual la discretización local del error es aún suficientemente pequeña en magnitud: $h_n^* \ll h_n$. Es decir, cuando el tamaño natural del paso para integrar requiere ser más pequeño que el tamaño del error estimado.

En un billar suave, el potencial se asemeja mucho al potencial de paredes infinitas para valores altos de dureza y esto queda en evidencia en la figura 4.4. También de las ecuaciones (4.3.2) es posible vislumbrar y anticipar la complejidad de las derivadas para valores altos de la dureza cerca de la frontera. Así, el reto para resolver las ecuaciones de movimiento en un billar suave es garantizar un tamaño de paso lo suficientemente pequeño cerca de la frontera tal que evite errores numéricos en las soluciones pero que preserve la estabilidad numérica evitando desbordamientos. Para lograr resolver las ecuaciones de forma óptima, se usa un método numérico de paso adaptativo. Los métodos numéricos de paso adaptativo son esenciales para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) de manera eficiente. Estos métodos ajustan dinámicamente el tamaño del paso de integración para equilibrar la precisión con el costo computacional. Los métodos de Runge-Kutta, conocidos por su robustez, son particularmente adecuados para implementar estrategias de paso adaptativo debido a su estructura flexible que permite fácilmente la comparación entre diferentes órdenes de precisión.

En los métodos de Runge-Kutta, la idea es utilizar un par de esquemas con diferentes órdenes de precisión para controlar el error de integración. Por ejemplo, un método frecuentemente utilizado combina un Runge-Kutta de cuarto orden (RK4) y un Runge-Kutta de tercer orden (RK3). Este enfoque permite calcular dos aproximaciones del valor de la función en el siguiente paso temporal usando el mismo punto de partida pero con órdenes distintos, y utilizar la diferencia entre estas dos aproximaciones para estimar el error.

El proceso comienza con la evaluación de la función en el siguiente paso temporal usando ambos, RK4 y RK3. La diferencia entre los dos resultados proporciona una estimación del error, que se compara con un umbral de tolerancia. Si el error supera la tolerancia, esto indica que el paso temporal es demasiado grande y se debe reducir. Por otro lado, si el error es menor que la tolerancia, el paso temporal puede aumentarse, permitiendo una integración más rápida sin sacrificar significativamente la precisión.

El tamaño del paso se ajusta típicamente usando la relación [43]

$$h_{\text{nuevo}} = h_{\text{viejo}} \left(\frac{\text{Tolerancia}}{\text{Error estimado}} \right)^{\frac{1}{p+1}}, \quad (4.3.3)$$

donde p es el orden menor de los métodos en uso (por ejemplo, 3 para RK43). Este ajuste se realiza iterativamente en cada paso de la integración, optimizando así los recursos computacionales y aumentando la eficacia del método en áreas problemáticas de la EDO.

En particular, para este trabajo se usa el método de Runge-Kutta-Oliver de 6 etapas y 5to orden (RKO65) de Tsitouras, presente en la biblioteca *DifferentialEquations* del lenguaje *Julia* [44].

4.3.3. Frontera: circunferencia y cuadrado

En el siglo XIX, el físico francés Gabriel Lamé propuso una generalización para la elipse dada por la expresión

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1. \quad (4.3.4)$$

Estas curvas llamadas **curvas de Lamé** recuperan una elipse en el caso $n = 2$ y son usualmente llamadas **superelipses**³ para el caso $n > 2$ [45]. En un sentido matemático, un aspecto llamativo es que las curvas de Lamé permiten modificar una elipse para hacerla tender al caso de un rectángulo. En esta dirección, se presenta una variante de estas curvas, cuya parametrización es conocida como el **squircle**. Este nombre proviene de la combinación anglosajona *square* y *circle*. Así, como su apelativo sugiere, el *squircle* es una curva que va desde un círculo hasta un cuadrado y viceversa. En el caso anisotrópico que se presenta a continuación [46], se puede mapear un rectángulo a una elipse. La curva de un *squircle* es

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{s^2 x^2 y^2}{\alpha^2 \beta^2} = 1, \quad (4.3.5)$$

donde α y β son los lados del rectángulo, o bien, el semieje mayor y semieje menor de la elipse, de acuerdo al caso límite correspondiente y dependiendo de la orientación de la curva. Se destaca la introducción de un nuevo parámetro asociado a la geometría: la **cuadradez** s , el cual toma valores $0 \geq s \geq 1$, donde se recupera un rectángulo si la cuadradez es $s = 1$ y una elipse cuando es nula $s = 0$. Véase la figura 4.5

Se aprovechan las cualidades de la curva (4.3.5) para definir un billar con una frontera de geometría regulable, que va desde una elipse hasta un rectángulo, sirviendo así la literatura existente sobre el caso elíptico [40] como un punto de referencia. De manera adicional y por extensión, haciendo una analogía con el trabajo de Kroetz *et al.* se define la **excentricidad de la squircle** como

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}}, \quad (4.3.6)$$

que puede tomar los valores $0 \leq \varepsilon < 1$, con el caso $\varepsilon = 0$ tenemos una circunferencia o cuadrado, dependiendo del valor de s .⁴

Por simplicidad, para este trabajo se consideran *squircles* horizontales, es decir $\alpha \geq \beta$. Lo cual permite la consistencia del análisis ulterior, sabiendo que la alta simetría de esta curva permite replicar los cálculos realizados al caso $\alpha \leq \beta$. En particular se elige $\alpha = 1$, para así estudiar la dinámica, en relación con la geometría, únicamente modulando el

³Para el caso $n < 1$ se suelen llamar *subelipses*.

⁴Es posible parametrizar la geometría de una *squircle* mediante la excentricidad, sin embargo, para este estudio resulta conveniente caracterizar esta curva modificando directamente los semiejes, puesto que la excentricidad $\varepsilon(\alpha, \beta)$ no es una función lineal y no es práctico a la hora de construir un espacio de parámetros. Esto resultará evidente más adelante.

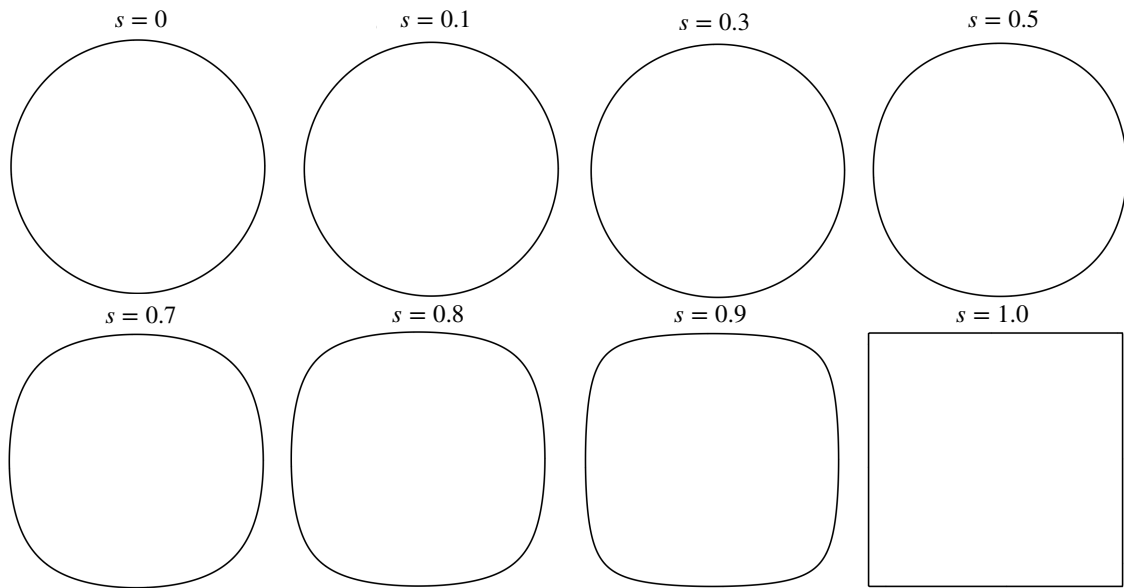


Figura 4.5: Gráficas de la curva (4.3.5) para diferentes valores del parámetro de cuadradez s y fijando $\alpha = \beta$.

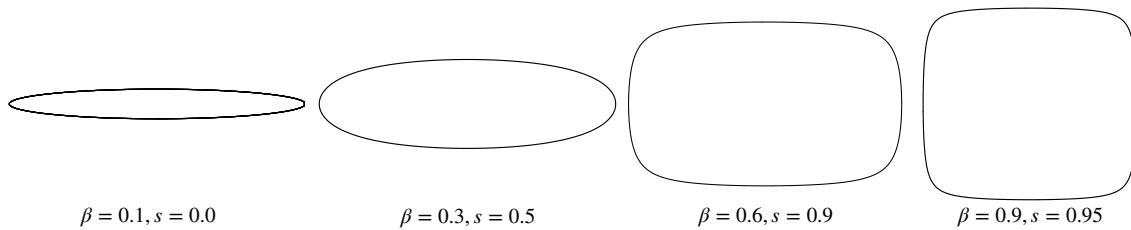


Figura 4.6: Gráficas de la curva (4.3.5) para diferentes valores del parámetro de cuadradez s y variando el semieje libre β (con $\alpha = 1$).

valor del semieje menor β al cual se le llamará **semieje libre**. En la figura 4.6 se muestran diferentes *squircles* al modificar el valor del semieje libre y s .

4.3.4. Billar de *squircle* de paredes duras

La frontera de un *squircle* permite estudiar la transición de una elipse hasta un rectángulo, por lo que es natural que para poseer un parámetro geométrico adicional se construya un billar de *squircle* y se analice la dinámica en él. Dado que la geometría determina completamente la dinámica de un billar de paredes duras, primero se utiliza un mapeo de billar como el mostrado en la ecuación (4.1.1), el cual evoluciona una partícula y la refleja especular e instantáneamente cada que colisiona con la frontera. En la figura 4.7 se muestran diferentes trayectorias para diferentes parámetros de cuadradez s en el billar.

La exploración de una geometría novedosa en el contexto de billares es fundamental, ya que la forma y las características de las fronteras influyen significativamente en el comportamiento caótico y regular de las trayectorias dentro del sistema. Además, el hecho

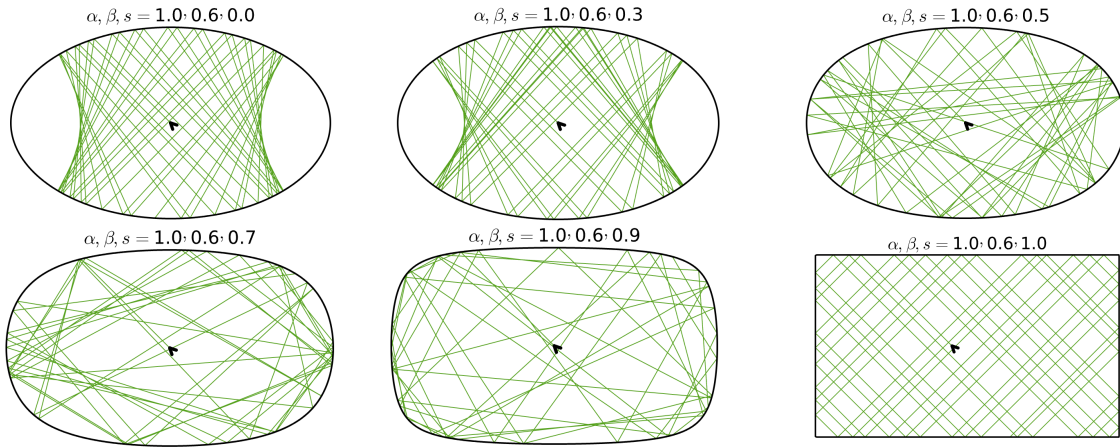


Figura 4.7: Trayectorias para una partícula en un billar duro de *squirle*, tomando diferentes valores de dureza.

de que la geometría sea directamente modulable mediante un parámetro s , implica tener control adicional sobre la dinámica. Un estudio de la dinámica de este sistema es valiosa, sin embargo, con base en los objetivos de este escrito, se exploran a mayor profundidad los aspectos de la dinámica en el caso de un billar con paredes suaves en forma de *squirle*.

4.3.5. Billar de *squirle* de paredes suaves

La dinámica de una partícula dentro de un billar de *squirle* se rige por la función Hamiltoniana

$$H(x, y; h, s, \beta) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \text{erf} \left[h \left(x^2 + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{s^2 x^2 y^2}{\beta^2} - 1 \right) \right], \quad (4.3.7)$$

notando que la dinámica del billar regida por la expresión (4.3.7) depende explícitamente de la dureza de la frontera h , su geometría β y su cuadradez s . El pozo de potencial asociado a este billar se muestra en la figura 4.8. Donde, de manera similar al potencial de elipse, la introducción del parámetro de dureza parece tener un efecto directo en la dinámica.

Vale la pena destacar que el potencial que se muestra en 4.4, genera una red de pozos contiguos hacia los cuales una partícula puede “escapar” si tiene la suficiente energía. Se debe tener cuidado en todo momento con la elección de energía que se le da al sistema si se quiere evitar que sucedan estos efectos de escape. Debido a que en este trabajo no se consideran efectos disipativos, se elige en todo momento $E = 0$ para controlar dicha situación.

Las ecuaciones de movimiento a resolver, para obtener la trayectoria de partícula pun-

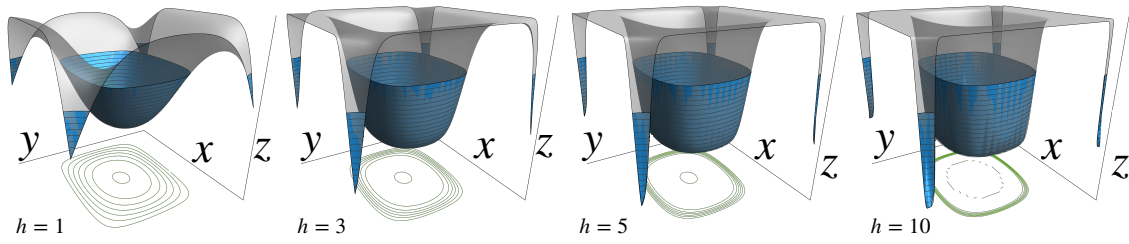


Figura 4.8: Gráfica del potencial suave presente en (4.3.7), para diferentes valores de dureza h . La energía está fija $E = 0$ y eso determina el espacio accesible (región azul). Además, se eligen los valores arbitrarios $s = 0.8$, $\beta = 0.8$. En verde se proyectan las curvas equipotenciales con las cuales ocurren las colisiones.

tual de masa unitaria en el billar de paredes suaves son

$$\dot{x} = p_x \quad (4.3.8a)$$

$$\frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{4hx}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{s^2 y^2}{\beta^2}\right) \exp \left[-h^2 \left(x^2 + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{s^2 x^2 y^2}{\beta^2} - 1 \right)^2 \right] \quad (4.3.8b)$$

$$\dot{y} = p_y \quad (4.3.8c)$$

$$\frac{dp_y}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{4hy}{\beta^2 \sqrt{\pi}} (1 - s^2 x^2) \exp \left[-h^2 \left(x^2 + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{s^2 x^2 y^2}{\beta^2} - 1 \right)^2 \right]. \quad (4.3.8d)$$

Además de los parámetros geométricos y de dureza, entra en juego la energía E que determina el espacio accesible. Algunas trayectorias para diferentes valores de dureza y condiciones iniciales, se muestran en la figura 4.9. Ahí se exhibe, como es de esperarse, la dependencia de la dinámica a la modulación de la dureza h . De forma horizontal se varía el valor de h mientras que en sentido vertical se cambia la condición inicial, evidenciando la variedad de trayectorias posibles dado un conjunto de parámetros del billar. En el apéndice A.1 se muestran más trayectorias para diferentes parámetros del billar.

Si bien, algunas de las trayectorias mostradas hasta el momento parecieran tener un comportamiento caótico, en el sentido de irregularidades, es necesario realizar un estudio de la dinámica para determinar cualitativa y cuantitativamente la presencia de caos. Con esta intención, a continuación se presenta el procedimiento para el cálculo de secciones de Poincaré, para el billar suave de *squircle*.

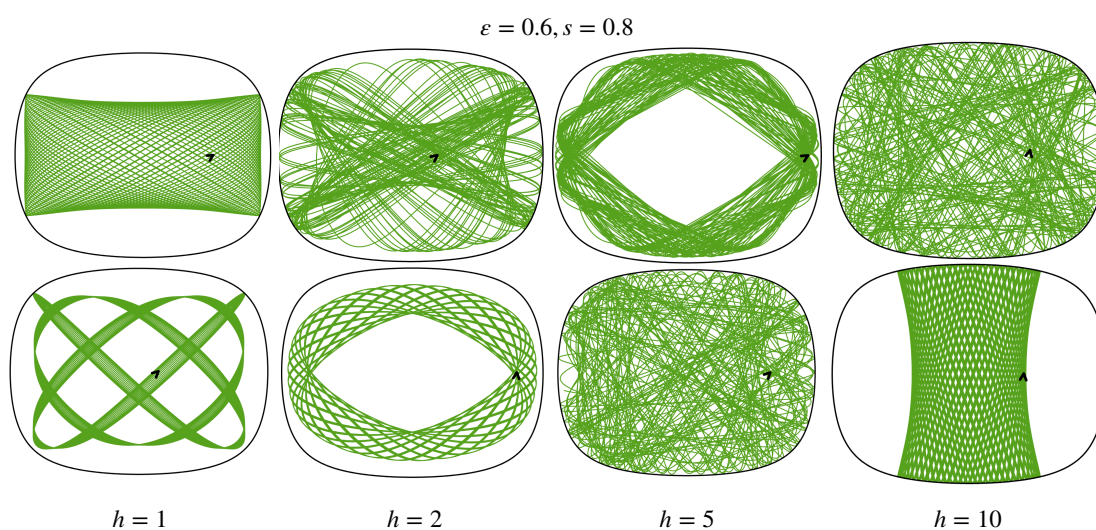


Figura 4.9: Trayectorias para una partícula en un billar suave de *squirle*, fijando la cuadrada y el semieje libre, variando sólo los valores de dureza h y la condición inicial. Todo con energía $E = 0$.

Capítulo 5

Descripción cualitativa del caos

5.1. Colisiones en billares duros y coordenadas de Poincaré-Birkhoff

Como ya se mencionó con anterioridad, las secciones de Poincaré son una gran herramienta para visualizar regiones caóticas en sistemas dinámicos. Para el cálculo de éstas lo primero que se debe hacer es identificar un corte en el espacio fase adecuado para visualizar. Es común en el estudio de sistemas dinámicos reducir una evolución continua (flujo) a una mapeo asociando una sección transversal con los puntos de dicho mapa. En particular, para los billares se construye la hipersuperficie de estudio sobre la frontera [8]. Esto genera lo que se suele llamar **espacio de colisiones**. La línea de pensamiento detrás de esta aproximación se esboza a continuación.

Consideremos un mapeo de billar como en (4.1.1), el cual consiste de una sucesión de mapeos continuos y discretos aplicados a una condición inicial. Se debe notar que aquello que fragmenta la dinámica de un billar de paredes duras son las colisiones. Usualmente, la partícula evoluciona de forma continua y libre hasta llegar a la frontera nuevamente, en este lapso nada particularmente interesante ocurre con la dinámica. Por tanto, las colisiones contienen la información más relevante de la evolución. De esta manera, se puede caracterizar completamente la dinámica de un billar en términos de dónde y cómo ocurren las colisiones. Con esta finalidad se introducen un par de coordenadas adecuadas para el estudio de secciones de Poincaré.

Las **coordenadas de frontera**, también llamadas **coordenadas de Poincaré-Birkhoff** $(\xi, \sin \gamma)$ [47], son aquellas que codifican la naturaleza continua de un billar a un mapeo, considerando los puntos donde ocurren las colisiones y cierta componente de la velocidad. Usualmente, la primera coordenada ξ es la longitud de arco del obstáculo en cuestión. La segunda coordenada $\sin \gamma$ nos da la velocidad tangencial en el punto de colisión (rapidez unitaria en billar de paredes duras), donde γ es el ángulo entre el vector de velocidad y el vector normal al obstáculo, medido a partir del vector normal.

Es necesario extender esta idea para el caso de billares suaves, donde las colisiones no son instantáneas y la evolución de la partícula no es libre (debido a la presencia de un

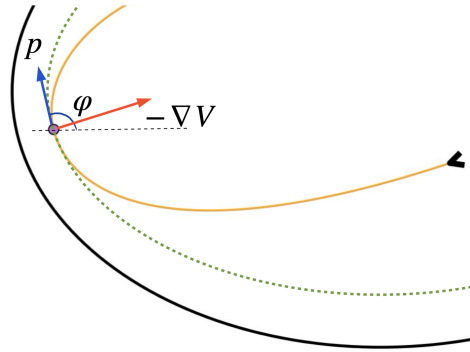


Figura 5.1: Instante de la colisión definida por el momento totalmente paralelo a la curva equipotencial (curva punteada verde). Dicho momento forma un ángulo φ con la horizontal. La trayectoria de la partícula en naranja, la equipotencial de $E = 0$ en negro y la dirección de la fuerza del potencial en rojo.

potencial distinto de cero en la función Hamiltoniana). En el caso de un billar suave el concepto de frontera se vuelve difuso, pues fuera del límite de paredes duras la partícula colisiona con diferentes **equipotenciales** de la curva original (esto es la equipotencial asociada a $E = 0$). Así, el primer paso para redefinir las coordenadas de Poincaré-Birkhoff para el caso de un billar suave es establecer lo que es una colisión.

5.1.1. Colisiones en billares suaves

La noción de colisión es fundamental en los billares de paredes duras, éstas son especulares e instantáneas, sin embargo, para el caso de frontera suave no existen estas discontinuidades en la dinámica. Por esto, se tiene que encontrar el punto exacto donde la partícula alcanza una curva equipotencial y cambia la dirección de su momento en consecuencia. El potencial de billar suave busca siempre regresar a la partícula hacia el centro, por ello, se establece que la colisión ocurre cuando el momento de la partícula es tangente a la curva equipotencial, es decir, perpendicular a la dirección de la fuerza (véase fig. 5.1). Así, para el billar suave de *squirle* se tiene que la condición de colisión es

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{p} \cdot (-\nabla V) = xp_x + \frac{yp_y}{\beta^2} - \frac{s^2xy}{\beta^2} (xp_y + yp_x) = 0. \quad (5.1.1)$$

De la ecuación anterior puede determinarse el instante en el cual la partícula sufre una colisión, sin embargo, a la hora de detectar numéricamente los choques hay que tomar consideraciones adicionales. Debido a que el cálculo numérico de la evolución temporal es discreto, es imposible satisfacer (5.1.1) exactamente. Por tanto, se rastrea el intervalo de la evolución en el cual ocurre un cambio de signo en $\mathbf{p} \cdot \mathbf{F}$. Es decir, se dice que el instante t_{i+1} posterior a la colisión es tal que satisface que

$$(\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{F}_i)(\mathbf{p}_{i+1} \cdot \mathbf{F}_{i+1}) < 0. \quad (5.1.2)$$

Puede decirse que la condición (5.1.2) determina el mapeo de Poincaré y el espacio de colisiones que se utiliza en billares suaves. En términos numéricos, una vez que se tiene toda la evolución de la partícula en el billar, se usa el criterio (5.1.2) para determinar el estado de la partícula z_j posterior a la j -ésima colisión. Es importante definir de manera explícita la orientación para el cambio de signo en la expresión (5.1.2), optando consistentemente por un cambio de más a menos o de menos a más. Esta elección es fundamental al construir una sección de Poincaré, ya que establece la dirección precisa en la que la trayectoria perfora el corte transversal, dándole una orientación a este. Ignorar esta situación podría resultar en intersecciones en las secciones de Poincaré, generando una interpretación que compromete la unicidad de los puntos en el espacio fase. Tal ambigüedad en los cruces puede llevar a interpretaciones erróneas o inconsistentes de la dinámica.

De lo anterior, y con base en la literatura [40] se establecen las coordenadas de Poincaré-Birkhoff para un billar de paredes suaves como: (θ, p_t) . Donde θ es el **ángulo polar** medido desde el eje horizontal para una curva centrada en el origen y p_t es el **momento tangencial** de la partícula en el instante de la colisión (normalizado). La idea es que en el instante en que sucede una colisión, todo el momento proyectado sobre la superficie equipotencial correspondiente, es tangente. De aquí se pueden escribir

$$p_x = p_t \cos \varphi, \quad p_y = p_t \sin \varphi, \quad (5.1.3)$$

donde φ es el ángulo entre la equipotencial y la dirección horizontal. Este ángulo se calcula mediante la derivada en el punto de colisión (q_x, q_y) :

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{q_y}{q_x} \right), \quad (5.1.4)$$

que para el caso de la *squircle* es

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{\beta x (s^2 - 1)}{\sqrt{(1 - x^2) (1 - s^2 x^2)^3}} \right). \quad (5.1.5)$$

A la hora de calcular el momento a partir de φ , es necesario tener cautela con el cuadrante donde ocurre la colisión para evitar un desfase de 2π en el valor real.

5.1.2. Secciones de Poincaré

Con la finalidad de entender la información que puede recuperarse de una sección de Poincaré, se procede a mostrar cómo algunas trayectorias específicas en el espacio de configuraciones se mapean (vía el mapeo de Poincaré) al espacio de colisiones. Esto resulta más ilustrativo en lugar de sólo presentar un espacio de colisiones denso.

En la figura 5.2, la cual muestra la sección de Poincaré para trayectorias individuales en cada caso. Primero, en *a*) se tiene una órbita periódica elemental, aquella que rebota verticalmente. Si bien, esta órbita no es particularmente llamativa, es muy útil para entender cómo se mapean las colisiones a la sección de Poincaré. Las colisiones que ocurren en

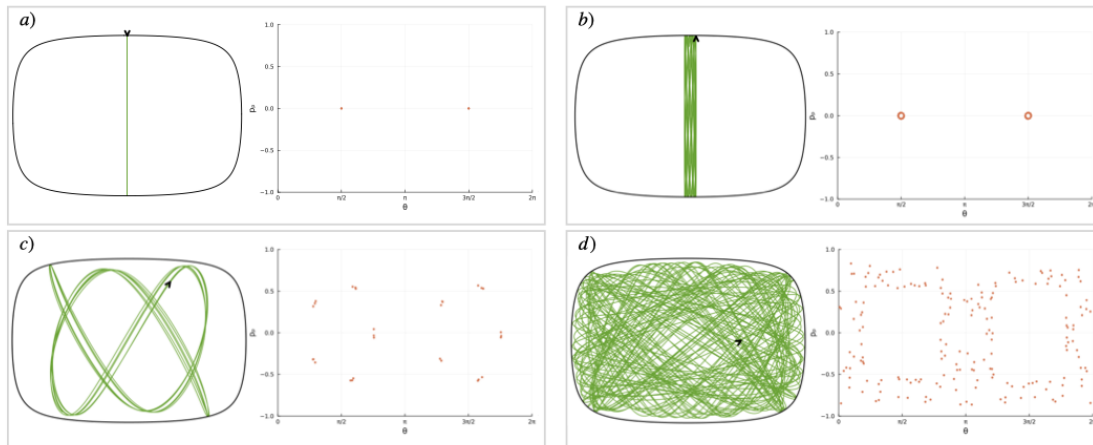


Figura 5.2: En cada caso se muestra un billar suave de *squircle* donde se ha evolucionado una condición inicial, al lado se tiene la sección de Poincaré asociada a dicha trayectoria. En todos los casos $E = 0$, $s = 0.9$ y $\beta = 0.7$. Además, $h = 1$ para $a)$, $b)$, $c)$, mientras que para $d)$ se tiene $h = 3$.

extremos opuestos de la frontera se corresponden con puntos que se encuentran distantes en magnitud π , es decir, $\theta = \pi/2$ y $\theta = 3\pi/2$. Además, las colisiones son verticales, lo que implica que la partícula incide en la frontera de manera perpendicular, haciendo que la componente del momento tangente p_t sea cero.

Ahora bien, en $b)$ se busca mostrar una trayectoria que se aleja ligeramente de la posición en $a)$. Sin embargo, se debe tener claro que simplemente mover espacialmente una condición altera el valor de la energía de éste, lo cual es importante pues los puntos en el espacio de colisiones están restringidos a una superficie de energía constante. Las secciones de Poincaré intersectan estas superficies en conjuntos de puntos, cada uno de los cuales refleja una trayectoria del sistema a esa energía fija. Por tanto, cuando se genera un espacio de colisiones debe de garantizarse que la energía mantenga un valor constante. Dicho lo anterior, se observa en $b)$ que se dibuja una isla alrededor de la órbita periódica de $a)$. Muchas de las órbitas periódicas iniciales se conservan, formando islas de estabilidad en el espacio fase, vemos que éstas se observan en la secciones de Poincaré como acumulaciones de puntos que demuestran la persistencia de las órbitas periódicas y la estabilidad.

En $c)$ se aprecia una órbita cuasiperiódica, que es evidente de observar su sección de Poincaré, ya que conforme el sistema evoluciona, pareciera repetir el mismo patrón de puntos, pero éstos no siempre caen donde mismo. Esto es un indicador de que se está muy cerca de una órbita periódica, pero numéricamente es improbable construir una órbita periódica arbitraria. Para lograr esto existen métodos especializados, como el uso de las líneas de simetría que se mencionaron en secciones anteriores.

Finalmente, en $d)$ se muestra una órbita caótica¹, la cual parece explorar todo el espa-

¹Lo cual se comprueba con la herramienta para el cálculo de exponentes de Lyapunov que se discute en la siguiente sección.

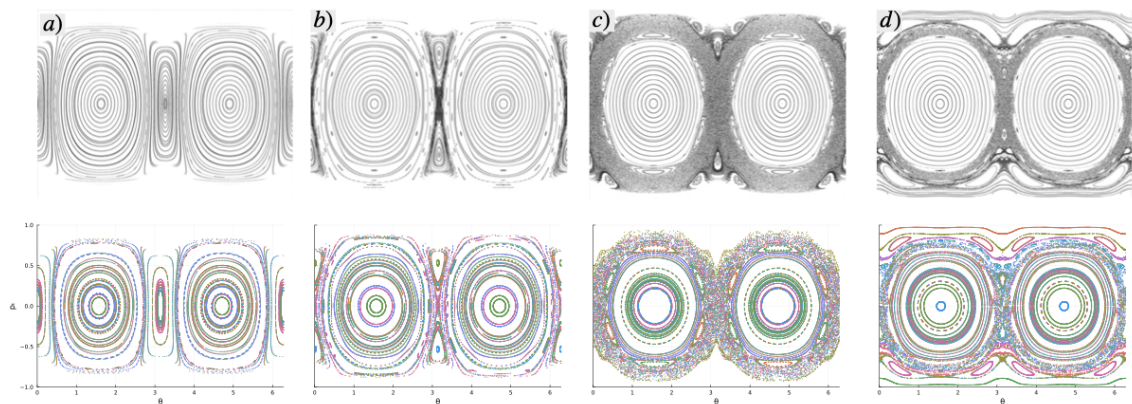


Figura 5.3: Se compara en cada columna, las secciones de Poincaré para el billar suave de elipse que se encuentra en la literatura [40] (fila superior) y las secciones de Poincaré (fila inferior) para los mismos parámetros pero calculados con las herramientas numéricas desarrolladas para este trabajo. En ambos casos $E = 0$, $a = 1$ y $b = \sqrt{1 - 0.72^2}$. Mientras que la dureza vale: a) $h = 1$, b) $h = 1.7$, c) $h = 2.5$ y d) $h = 6$.

cio de colisiones y que se corresponde con una sección de Poincaré que muestra puntos dispersos. Esta situación, en la que por simple observación resulta casi imposible identificar puntos del mapa con colisiones en el espacio de configuraciones (ausencia de un patrón) es lo que en una sección de Poincaré se identifica como caos.

A continuación, se presentan las secciones de Poincaré calculadas a partir de la discusión anterior (incluyendo algunas en el apéndice A.1.1). Primero para verificar la validez de la herramienta numérica a partir de la concordancia con los resultados de la literatura. Posteriormente, explorando la dinámica del billar suave de *squirle* el cual no ha sido estudiado con anterioridad.

5.1.3. Secciones de Poincaré en el billar de elipse

Para verificar que la herramienta implementada funciona correctamente, se realiza una comparación entre los cálculos obtenidos y los resultados ya establecidos en la literatura [40]. Esto se hace en la figura 5.3, donde columna a columna se aprecia que se recupera el comportamiento esperado de la sección de Poincaré. Es evidente que no se replica de forma exacta el gráfico de la referencia, debido a que no se tiene acceso al valor preciso de las condiciones iniciales utilizadas para generarlas. Sin embargo, lo que se muestra en la fila inferior parte de un muestro de condiciones iniciales aleatorias.

Tal vez el aspecto más llamativo, al analizar billares con paredes suaves, reside en cómo la modulación del parámetro de dureza, h , influye de manera determinante en la dinámica del sistema. Inicialmente, a valores bajos de h , el sistema exhibe un comportamiento en el cual predomina la regularidad. Sin embargo, al aumentar el valor del parámetro se induce caos en la dinámica, manifestado por puntos dispersos en la sección de Poincaré que ocupan áreas mayores. La dinámica caótica persiste hasta alcanzar un umbral h , momento en el cual el sistema experimenta una transición hacia una fase de mayor regula-

ridad, donde las regiones de puntos dispersos ocupan menos área del espacio y vuelven a aparecer patrones asociados a regularidad. Este efecto al modular la dureza de la frontera muestra una relación compleja y no lineal entre h y la dinámica del sistema. Este fenómeno, caracterizado por una secuencia de transiciones de caos a regularidad y viceversa, subraya la importancia de h como un parámetro determinante de la dinámica en billares con paredes suaves.

Con este preámbulo, resulta interesante estudiar otro billar de paredes suaves en busca de estas transiciones de caos-regularidad. A continuación, se muestran las secciones de Poincaré para el billar suave de *squircle*, el cual adiciona el parámetro de cuadradez como un grado extra de control de la dinámica además de la suavidad generalizando también el billar elíptico.

5.1.4. Secciones de Poincaré en el billar de *squircle*

A continuación se presentan algunas secciones de Poincaré, seleccionadas para un conjunto de parámetros particulares. Dada la impracticabilidad de exhibir todas las posibles combinaciones de parámetros se ha realizado un esfuerzo consciente para asegurar que las configuraciones elegidas proporcionen una muestra representativa de la dinámica inherente al billar que se estudia. Se espera que, aunque limitadas en número, estas secciones de Poincaré sirvan como un punto de partida sólido para comprender la dinámica subyacente y motivar la exploración futura de otras configuraciones de parámetros.

Primero, se presenta la figura 5.4, donde se tiene algo similar a lo mostrado con anterioridad, dado que el parámetro que se varía es la dureza. En *a*) se observa la presencia de regiones caóticas y regiones de estabilidad. Siendo las regiones más estables, usualmente alrededor de los múltiplos de $\pi/2$, esto se interpreta directamente como aquellas trayectorias que no visitan las esquinas del billar. Notando que a diferencia de un billar circular o de elipse, en el caso de la *squircle* las esquinas juegan un papel importante en el billar. Al observar *b*) resulta llamativo que muchas regiones de estabilidad desaparecen, lo cual evidencia que al aumentar la dureza la predominancia del caos se hace notar. Sin embargo, y como era de esperarse, al continuar el aumento de la dureza las regiones de regularidad vuelven a emerger como se observa en *c*). Finalmente, en *d*) se observa que al seguir subiendo la dureza, la dinámica no presenta mayores cambios, en términos del tamaño y distribución de regiones regulares. Esto sugiere que posiblemente exista algún valor crítico de h para el cual la dinámica tiende a estabilizarse.

Vale la pena destacar, que no hay información que en este caso pueda recuperarse al continuar aumentando h . Pues la mayor riqueza de la modulación de un billar de frontera suave es la región en la que aún se dista de un pozo de potencial de paredes infinitas. Además, a mayor sea el acartonamiento de las ecuaciones de movimiento, menor será la precisión de las soluciones numéricas. Así que, si se busca mayor precisión, estudiar regiones de baja dureza resultaría en la mejor opción. Por estas razones, en el presente escrito se determinó acotar los valores de dureza hasta $h \leq 10$, siendo este valor una elección arbitraria.

Ahora bien, se estudian las secciones de Poincaré para diferentes valores del parámetro

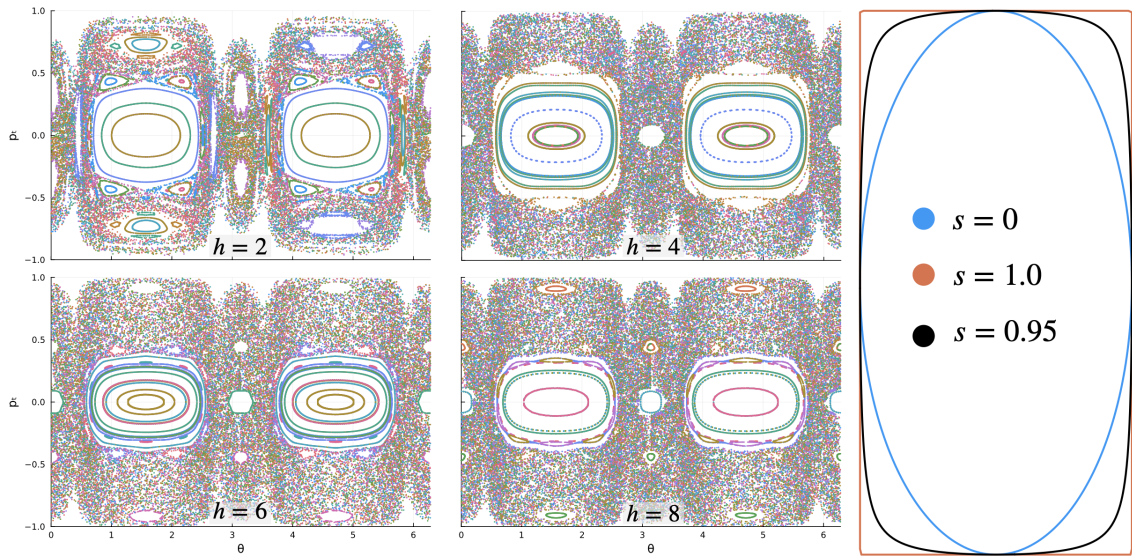


Figura 5.4: De lado izquierdo se tienen las secciones de Poincaré para el billar suave de *squirle* a partir de un barrido de condiciones iniciales al azar. En todos los casos la energía es cero, $s = 0.95$, $\beta = 0.5$, y se varía la dureza. De lado derecho se tiene la curva de nivel $E = 0$ para los casos de valores s indicados, esto para ilustrar qué tan cerca está el valor de $s = 0.95$ de una elipse y un rectángulo (rotado $\pi/2$ para visualizarlo de forma contigua).

de cuadradez de la *squirle* (ver figura 5.5). Para este caso se observa que el aumento paulatino de la cuadradez del billar promueve la aparición gradual de caos en el billar. En los casos *a*) y *b*) la dinámica tiene semejanzas, el área del espacio fase asociada a trayectorias irregulares es similar en ambos. Por su parte, para una *squirle* más cerca del caso rectangular, la dinámica es caótica excepto en la vecindad de $p_t = 0$ para $\theta = \pi/2, 3\pi/2$. Esta figura exhibe el hecho de que la dinámica del billar de *squirle* es también sensible al valor del parámetro s , el cual va deformando la región caótica y conteniendo la regularidad. En el apéndice A.1.1 se pueden ver con más detalle algunas trayectorias aisladas, lo que resulta útil para entender cómo obtener información a partir de una sección de Poincaré de este tipo.

Uno de los aspectos claves para el estudio de billares de paredes duras, es el reconocimiento de que la dinámica queda determinada por la geometría de la frontera. Así, es de esperarse que mover la geometría de un billar de paredes suaves introduzca o disminuya el caos en la dinámica. Esto se aprecia en la figura 5.6, donde para el caso $\beta = 0.4$ (más cercano a la elipse) se observan regiones tanto de estabilidad como de inestabilidad. Mientras que para el caso $\beta = 0.8$ (más cercano al rectángulo), no sólo cambia el tamaño de las regiones de regularidad, sino que también aparecen nuevas ($\theta = \pi, 2\pi$).

Así que, de lo mencionado con anterioridad, se exhibe que la dinámica del billar de paredes suaves es también sensible a la geometría de la frontera, más allá de la dureza que ésta presente. En conjunto, la dureza (h) y la geometría (β, s) son parámetros que permiten modular el caos en un sistema, permitiendo transiciones caos-regularidad-caos. Así, una gran virtud de los billares de paredes suaves, y en particular, de aquellos con frontera de

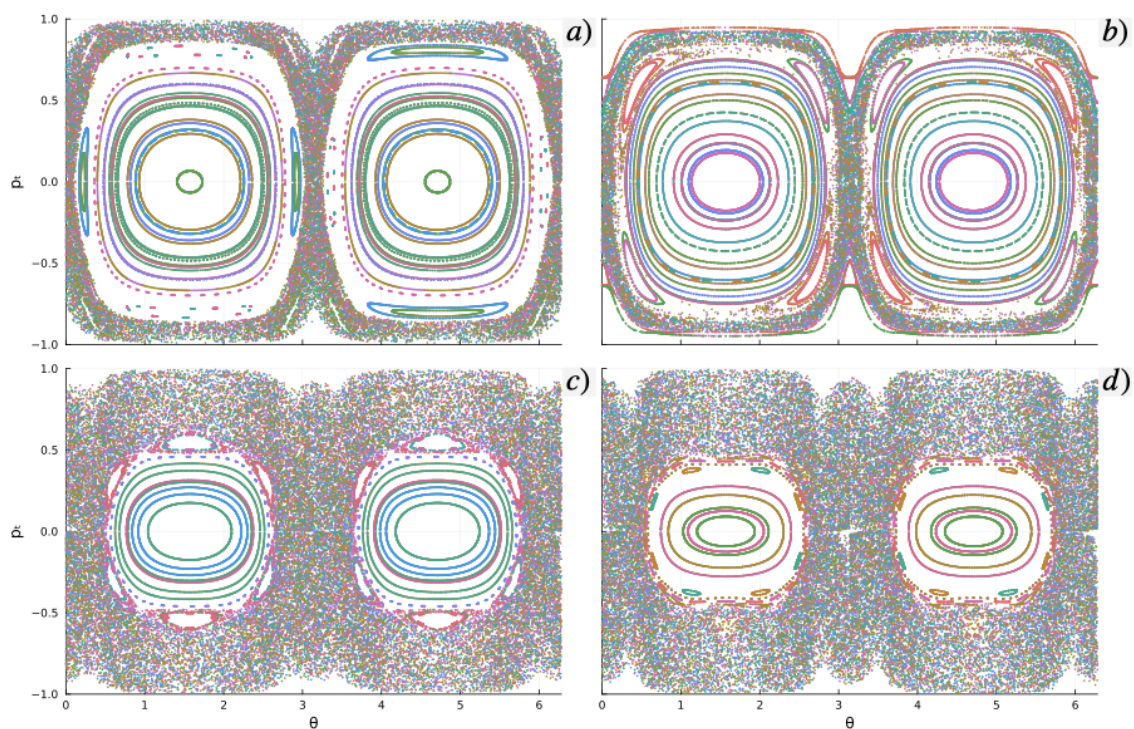


Figura 5.5: Secciones de Poincaré para el billar suave de *squircle* a partir de un barrido de condiciones iniciales al azar. En todos los casos $E = 0$, $\beta = 0.5$ y $h = 5.5$. Se varía la cuadradez en valores de: a) $s = 0.3$, b) $s = 0.5$, c) $s = 0.8$, $s = 0.9$.

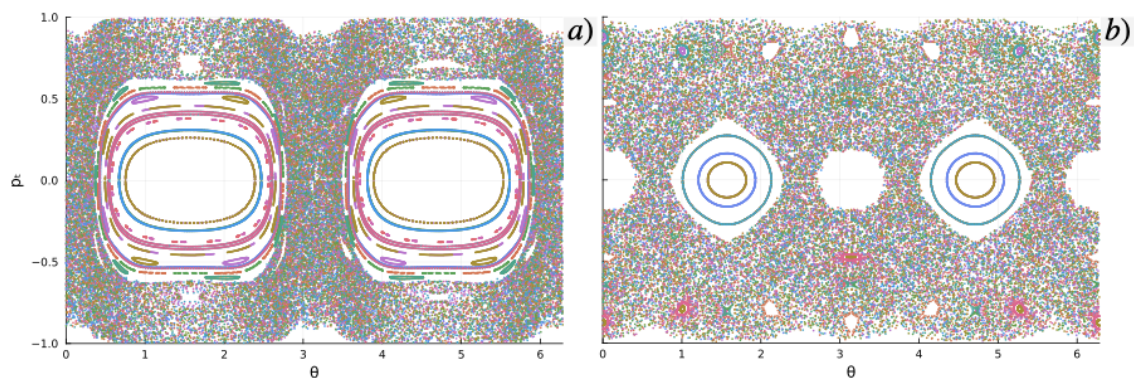


Figura 5.6: Secciones de Poincaré para el billar suave de *squircle* a partir de un barrido de condiciones iniciales al azar. En todos los casos $E = 0$, $s = 0.8$ y $h = 7$. Se varía el semieje libre en valores de: a) $\beta = 0.4$, b) $\beta = 0.8$.

squircle es que con una misma herramienta numérica se pueden estudiar diversos aspectos de la dinámica simplemente modificando los parámetros adecuados.

En este punto resulta natural preguntarse sobre la dinámica del billar suave de *squircle* para combinaciones de parámetros cuyas secciones de Poincaré no se presentan en este trabajo. Sin embargo, se debe tener presente que estas secciones de superficie son una herramienta cualitativa, lo cual por sí mismo es una limitante para la caracterización del caos en sistemas con varios parámetros. Ahora que ya se visualizaron los aspectos de la dinámica del billar asociados a los parámetros, se procede a desarrollar una herramienta cuantitativa para este estudio

Capítulo 6

Descripción cuantitativa del caos

6.1. Cálculo numérico de exponentes de Lyapunov

Para calcular numéricamente los exponentes de Lyapunov en un billar bidimensional, con base en lo discutido con anterioridad, idealmente se debe tomar la ecuación para la evolución del vector de perturbación \mathbf{u} dada por (3.2.23). Y dada una separación inicial entre condiciones iniciales $\mathbf{u}(0)$ se usa la expresión (3.2.25) y se resuelve para un tiempo t suficientemente largo.

El problema con esta metodología es que el cálculo de la matriz Jacobiana \mathcal{J} del flujo sufre de múltiples problemas numéricos para valores de t grandes, debidos al desbordamiento numérico (el cual resulta de que se tenga una matriz cuyos elementos aumentan o decrecen exponencialmente) [34]. Para evitar este problema, la solución usual es hacer una N -partición regular del intervalo temporal $t \in [t, N]$ en subintervalos Δt .

Entonces, se toma un estado inicial de la perturbación $\mathbf{u}(0)$ y se evoluciona hasta el tiempo $t_1 = 1 \cdot \delta t$, se calcula el valor $\ln |\mathbf{u}(t_1)/\mathbf{u}(0)|$ y se almacena. Ahora, el valor $\mathbf{u}(t_1)$ será la nueva condición inicial, la cual se reescala de forma que tome el mismo valor que $\mathbf{u}(0)$. Se hace esto de forma sucesiva con el i -ésimo intervalo temporal $t_i = i \cdot \Delta t$ y se calcula $\ln |\mathbf{u}(t_i)/\mathbf{u}(0)|$. Así, el máximo exponente de Lyapunov (MEL) se puede aproximar haciendo promedios temporales sobre el logaritmo de la razón de las distancias [34]

$$\lambda \approx \frac{1}{t_N - t_0} \sum_{i=1}^N \ln \left(\frac{\mathbf{u}(t_i)}{\mathbf{u}(0)} \right). \quad (6.1.1)$$

Este procedimiento se esquematiza en la figura 6.1. Usualmente se normaliza la condición inicial $\mathbf{u}(0)$ para simplificar aún más los cálculos numéricos. Se espera que a mayor el tiempo de evolución, mejor converge el promedio temporal del exponente de Lyapunov.

Como ya se mencionó con anterioridad, cuando se busca integrar numéricamente un conjunto de ecuaciones diferenciales con rigidez, se pueden esperar desbordamientos numéricos si no se elige el método de resolución adecuado. Por sí solas, las ecuaciones

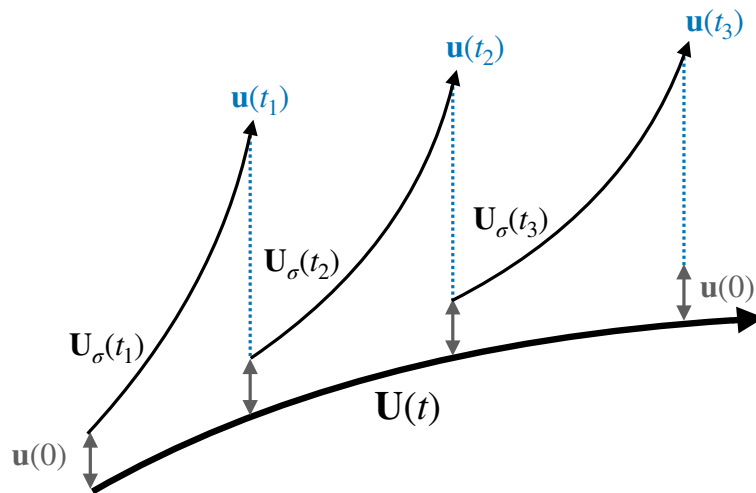


Figura 6.1: Esquemización del cálculo del máximo exponente de Lyapunov promedioado en intervalos temporales. $U(t)$ es una órbita que se toma de referencia, $U_\sigma(t)$ es una órbita perturbada y $u(t)$ es la separación entre ambas trayectorias. Cada que se da un paso Δt se redimensiona $u(t_i)$ para siempre tener el mismo valor inicial $u(0)$ antes de volver a evolucionar.

de movimiento para el billar suave son un reto numérico. Por esta razón, para este trabajo se elige utilizar una herramienta numérica preexistente para el cálculo del máximo exponente de Lyapunov (para billares planos conservativos es suficiente para construir el espectro completo). Dicha herramienta es la función *lyapunov* dentro de la biblioteca llamada *DynamicalSystems.jl* y se encuentra disponible para el lenguaje *Julia*. Gracias a esta herramienta súper optimizada, se pueden calcular los exponentes de Lyapunov que se muestran adelante. Sin embargo, la metodología presentada anteriormente es la esencia del funcionamiento de la ya mencionada herramienta [34].

Es necesario señalar que la definición de exponente de Lyapunov (3.2.25) tiene sentido sólo para el límite donde $t \rightarrow \infty$. Lo cual es un reto en términos de implementación numérica, por tanto, al calcular exponentes de Lyapunov se debe tener especial atención con el tiempo finito al que se evoluciona la dinámica, pues si el tiempo no es suficientemente grande, el exponente de Lyapunov podría no converger a un valor y esto puede conllevar a interpretaciones erróneas de la dinámica.

Para lidiar con esto, es importante hacer una revisión preliminar de la dinámica, tal y como se muestra en la figura 6.2. Aquí, se grafica el valor del máximo exponente de Lyapunov en función del tiempo lo cual provee una noción de qué tanto hay que evolucionar la dinámica para obtener un resultado fiable. En particular, para el caso de billares suaves, la demanda numérica obliga a buscar formas de hacer cálculos lo más eficientes posibles, por eso es de gran importancia identificar hasta qué tiempo es necesario evolucionar la dinámica.

Con la finalidad de estudiar la relación entre la dinámica y los tres parámetros del billar suave de *squiracle*: β, h, s ; se estudiará el valor del máximo exponente de Lyapunov para diferentes combinaciones de estos parámetros. La manera de visualizar esto es fijar

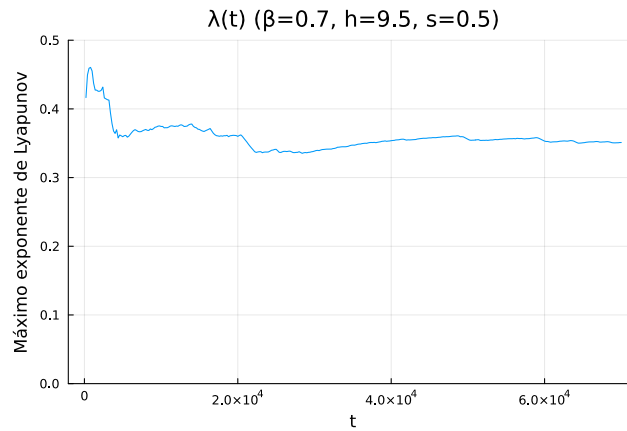


Figura 6.2: Ritmo de convergencia del máximo exponente de Lyapunov hacia un valor positivo, para los parámetros indicados.

un parámetro y dejar libres los demás en un intervalo, y para cada combinación calcular el exponente de Lyapunov.

6.2. Mapa de caos y regularidad

Se construye un **espacio de parámetros** para el análisis del MEL $\lambda(h, s, \beta)$, donde sea directo visualizar aspectos del caos en el billar suave de *squircle*. Para ello se hace un barrido de condiciones iniciales al azar, buscando que formen una muestra representativa del espacio. Esto se consigue generando un conjunto de valores iniciales para cada coordenada de posición, primero x y luego y . Después, de manera aleatoria, a cada elemento se le asigna el resto de valores que determinan el estado inicial de la partícula $(x_0, y_0, p_{x,0}, p_{y,0})$, siempre garantizando que mantengan el mismo valor de energía ($E = 0$).

Para todas las condiciones iniciales generadas, se evoluciona la dinámica hasta un tiempo donde converja el MEL (usualmente alrededor de $t = 4 \times 10^4$). En un caso, se calcula el exponente promedio de entre estas condiciones iniciales al cual se le denota como $\bar{\lambda}$. Por otro lado, se calcula el valor máximo que puede alcanzar el exponente de Lyapunov, al que se le etiqueta como λ_{\max} . A partir de este espacio de parámetros, es fácil localizar condiciones iniciales que generen trayectorias muy caóticas, o al menos, identificar regiones donde es más probable encontrarlas.

Por una parte, en la primer columna de la figura 6.3 se muestra un espacio donde lo que varía es la cuadradez de la frontera para una excentricidad fija. Aquí, es llamativo notar que conforme este parámetro aumenta (desde 0 hasta 0.9), en promedio, el caos se hace predominante. Para valores de s pequeños casi no hay caos, pero empieza a formarse algo en las regiones de dureza muy baja. Luego, cuando s se incrementa se empiezan a formar *estrías* de caos en el mapa. Se han estudiado billares en los cuales se introduce algún parámetro no lineal, del cual resultan estructuras tipo estrías cuando se grafica condiciones iniciales contra el parámetro en cuestión. Este comportamiento de intermitencia entre caos y regularidad es característico de sistemas Hamiltonianos integrables en los cuales

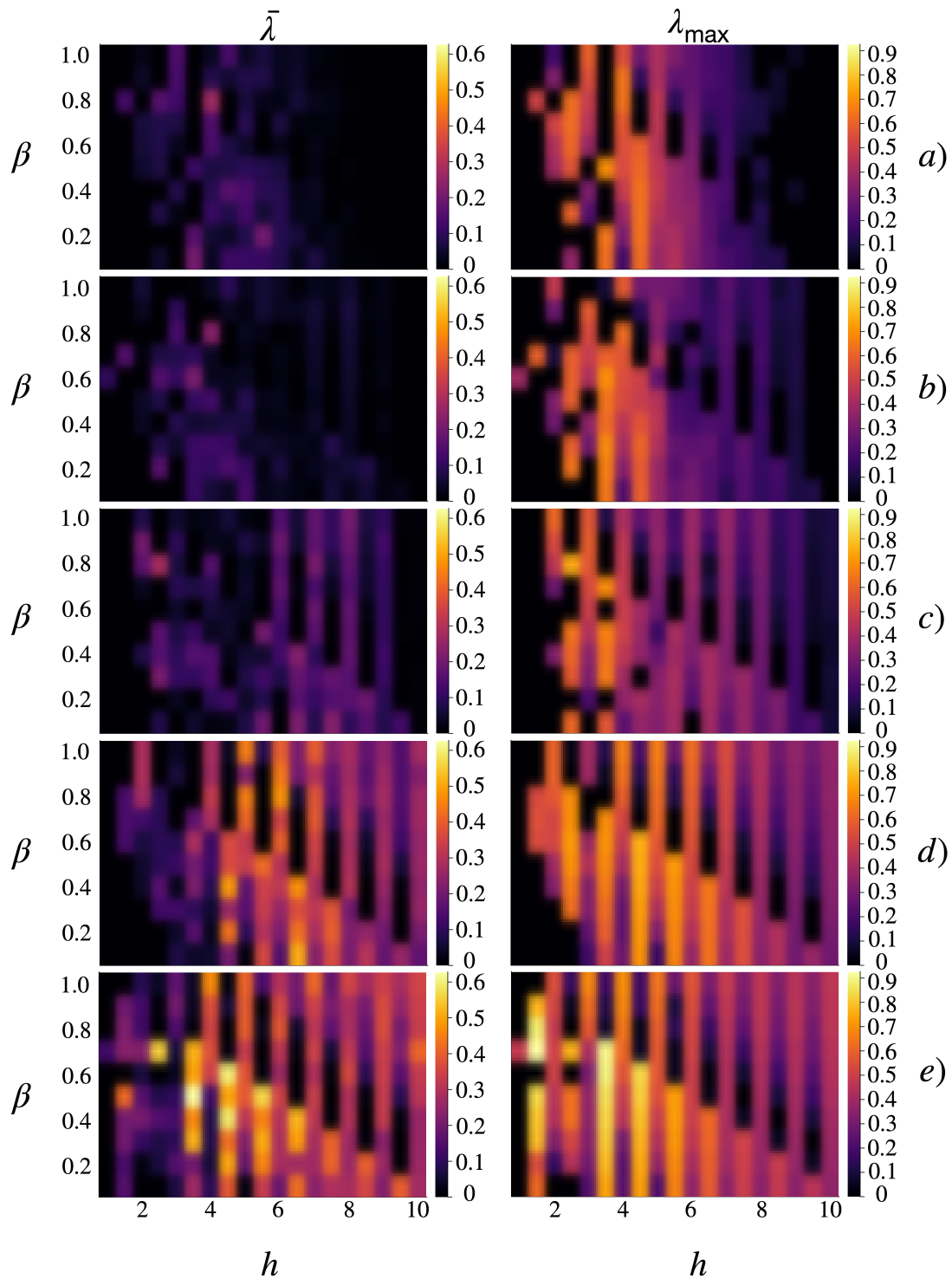


Figura 6.3: Cálculo de $\bar{\lambda}$ en la primer columna y λ_{\max} en la segunda. En cada fila se toman los valores: a) $s = 0.0$, b) $s = 0.3$, c) $s = 0.5$, d) $s = 0.8$, e) $s = 0.9$. Se fija $E = 0$ en todos los casos. Notar que cada columna maneja una escala de color con diferente valor máximo, esto permite estudiar el cambio de una misma cantidad al variar s (misma columna) y observar variaciones muy sutiles que de otra forma serían difíciles de apreciar.

se introduce caos débilmente [16]. Lo anterior sugiere que el parámetro s en un billar suave de *squirle* es capaz de romper la integrabilidad e introducir caos en la dinámica.

Este comportamiento intermitente entre regularidad y caos se vislumbra incluso en las secciones de Poincaré de la figura 5.5. Sin embargo, en la segunda columna figura 6.3 se muestra el mayor valor del MEL obtenido para cada combinación de parámetros. Así, se pone en evidencia que variar la cuadradez afecta las regiones dentro del espacio de parámetros y las estabilidad de las condiciones iniciales, aunque no necesariamente éstas son más inestables. Lo anterior se muestra por el hecho de que para valores de $s = 0, 0.3, 0.5, 0.8$ el mayor valor que toma el MEL está alrededor de $\lambda_{\max} \approx 0.8$. Es hasta $s = 0.9$, donde el mayor valor posible del exponente de Lyapunov aumenta.

Además, en ambas figuras se aprecia una intercalación entre regularidad y caos, en concordancia con las observaciones obtenidas previamente de las secciones de Poincaré. Esto es, que conforme mantenemos fijo un valor del semieje libre, al variar la dureza, nos encontramos transiciones regularidad-caos-regularidad. Así, se ve que la dinámica de un billar suave de *squirle* exhibe una particular sensibilidad a la cuadradez y dureza de la frontera.

Por otro lado, en la figura 6.4 para el caso donde lo que se varía es la dureza, se muestra el MEL promedio en términos del semieje libre y la cuadradez. Este espacio en particular, muestra la dependencia de la dinámica del billar a la variación de parámetros exclusivamente geométricos. La principal anotación es que conforme la frontera tiende al límite rectangular, en promedio, el caos se hace predominante. Y en este caso, las transiciones regularidad-caos-regularidad no son tan acentuadas.

Por su parte, en la figura 6.4 se recupera esencialmente la misma información salvo el hecho de que se esperan exponentes de Lyapunov de mayor magnitud conforme la dureza aumenta. Información que concuerda con los espacios de parámetros mostrados con anterioridad.

En adición, en la figura 6.5 se muestra el espacio de parámetros para h y s , considerando dos valores del semieje libre. En *a*) se observa cómo el aumento de la dureza genera transiciones regularidad-caos-regularidad, lo cual es consistente con lo discutido hasta el momento. Sin embargo, de acuerdo a *b*) estas transiciones dejan de estar presentes para un valor mayor de β . Lo cual resulta llamativo pues aporta información sobre el efecto estabilizador del parámetro geométrico β en relación a la cuadradez de la frontera y la dureza del billar.

Lo anterior, queda aún en mayor evidencia al considerar la figura 6.5. Dado lo que se muestra en *a*), aparecen regiones de transición donde el mayor valor del MEL puede variar de manera abrupta, yendo desde $\lambda_{\max} = 0$ hasta $\lambda_{\max} \approx 0.7$. De acuerdo, a *b*), esto ya no sucede si se aumenta el valor de β , pues el espacio de parámetros se segmenta de manera más uniforme. Así, para durezas y valores de s bajos, se espera una dinámica poco caótica, mientras que ocurre lo contrario para h y s grandes.

Un aspecto muy interesante de visualizar los espacios de parámetros anteriores, es que sirven de guía al momento de construir un billar. Pues si se busca estudiar la dinámica de partículas de manera que en ésta predomine la regularidad (y viceversa), entonces

se pueden elegir las combinaciones de parámetros de geometría y dureza, tales que la mayoría de condiciones iniciales que se coloquen evolucionen de la manera esperada. Este entendimiento de la dinámica de un sistema toma gran relevancia en estudios sobre el control del caos.

Se concluye la exploración del modelo de billar suave, donde se destaca la riqueza y complejidad inherente a su dinámica. Aunque en este escrito no procedemos a la cuantización directa del billar, en la próxima sección se presentan aspectos de la transición hacia los billares cuánticos como un horizonte intrigante y prometedor. El caos en el sentido cuántico, ofrece un terreno fértil para investigaciones futuras las cuales cuentan con algunas implementaciones experimentales. La presente sección, por lo tanto, no solo representa el cierre de un análisis clásico, sino el preámbulo a un trabajo futuro que cuenta con diferentes e interesantes vertientes.

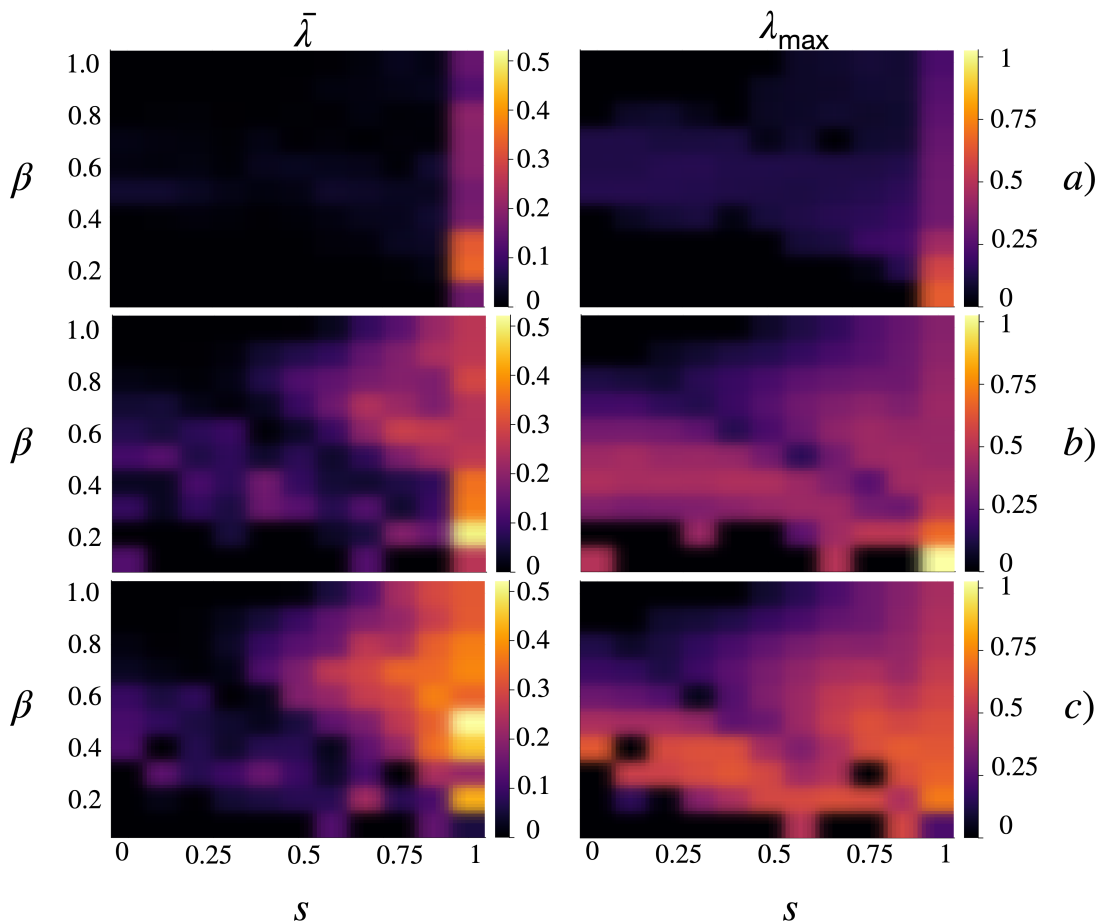


Figura 6.4: Cálculo de $\bar{\lambda}$ en la primer columna y λ_{\max} en la segunda. En cada fila se toman los valores: a) $h = 2$, b) $h = 4$, c) $h = 6$. Se fija $E = 0$ en todos los casos. Notar que cada columna maneja una escala de color con diferente valor máximo, esto permite estudiar el cambio de una misma cantidad al variar h (misma columna) y observar variaciones muy sutiles que de otra forma serían difíciles de apreciar.

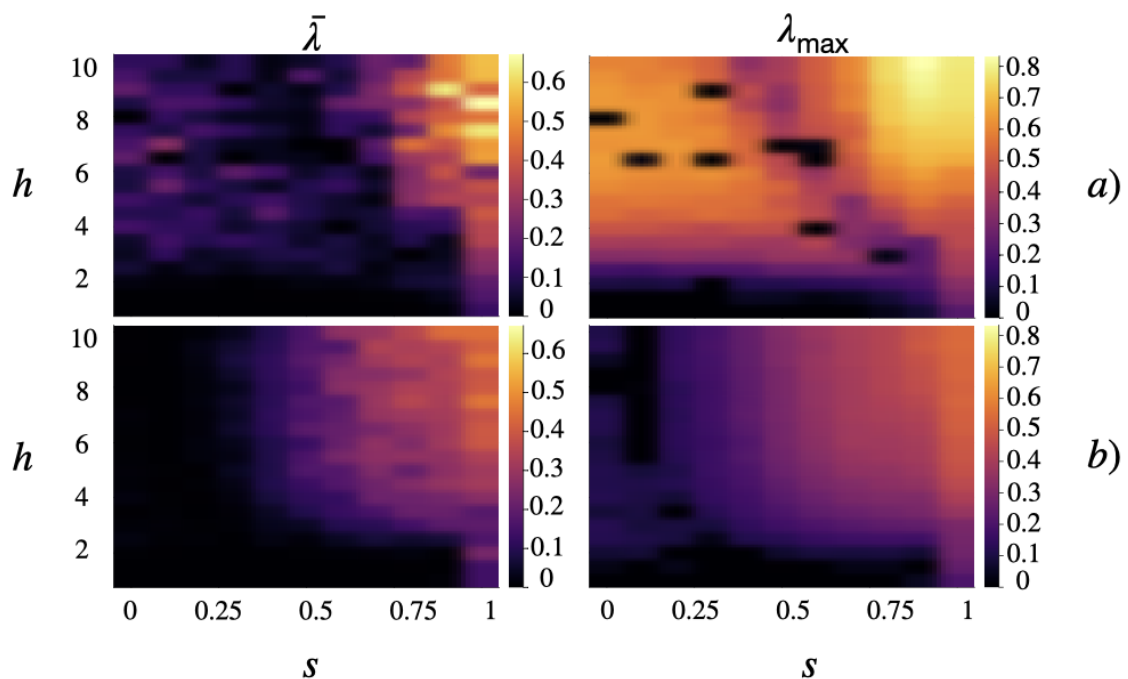


Figura 6.5: Cálculo de $\bar{\lambda}$ en la primer columna y λ_{\max} en la segunda. En cada fila se toman los valores: a) $\beta = 0.4$ y b) $\beta = 0.8$. Se fija $E = 0$ en todos los casos. Notar que cada columna maneja una escala de color con diferente valor máximo, esto permite estudiar el cambio de una misma cantidad al variar β (misma columna) y observar variaciones muy sutiles que de otra forma serían difíciles de apreciar.

Capítulo 7

Perspectivas

Hasta el momento, se ha provisto de una descripción clásica de billares, aludiendo a conceptos como estabilidad de trayectorias y caos. Sin embargo, los billares suaves se han estudiado previamente para analizar también la robustez de las trayectorias en el límite de paredes duras [48], la aparición de islas de regularidad en el espacio fase [49, 50], la hiperbolicidad [51], impactos en esquinas [52] y modelos de gas de Lorentz [53, 54]. Además, el potencial tipo *squircle* tiene un estructura similar a los llamados potenciales tipo Caldera [55], que tienen uso para modelar reacciones químicas aunado a la posibilidad de modelar el confinamiento de partículas.

De lo anterior, se evidencia que el presente trabajo tiene varias direcciones para extender su estudio. Sin embargo, estos sistemas también han sido un modelo fértil de estudio en la mecánica cuántica y a continuación se esboza el panorama de los billares cuánticos.

7.1. Perspectivas de caos cuántico en billares

El **caos cuántico** aparece como la disciplina encargada de estudiar los rasgos de los sistemas cuánticos cuyos correspondientes clásicos son caóticos y de identificar los rasgos propios de los sistemas cuánticos no integrables. Debido al principio de correspondencia (el cual establece que el comportamiento de los sistemas cuánticos debe converger con las leyes de la mecánica clásica cuando la constante de Planck efectivamente tiende a cero y el tamaño del sistema se hace muy grande, es decir, en el límite de grandes escalas o energías altas), en el límite clásico, los aspectos que inducen una dinámica caótica deberían prevalecer en los sistemas cuánticos [47]. Esto se hace particularmente claro al estudiar billares.

Se define un **billar cuántico** plano [56] (en el sentido de paredes duras) como un pozo bidimensional con paredes infinitas y potencial nulo en su interior. La posición de las paredes queda determinada por una curva cerrada \mathcal{C} , y en el interior por un dominio \mathcal{D} haciendo que este sistema sea ligado para cualquier energía. La dinámica está regida por la ecuación de Schrödinger estacionaria en el interior del pozo que se anula en el contorno.

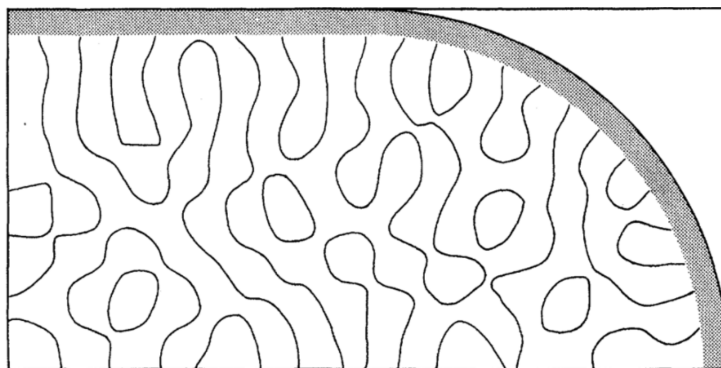


Figura 7.1: Curvas nodales $|\varphi_k|(x, y) = 0$ para un cuadrante de un estadio de Bunimovich. Figura de [58].

Si se expresa la energía en términos del número de onda $k = \sqrt{2mE}/\hbar$, el problema se reduce a resolver la ecuación de Helmholtz con condición de Dirichlet en la frontera

$$\nabla^2 \varphi = -k^2 \varphi \text{ en } \mathcal{D}, \quad \varphi = 0 \text{ en } \mathcal{C}. \tag{7.1.1}$$

En un billar cuántico comúnmente se estudia el espectro, el cual consiste en un número infinito de valores propios $0 > k_1^2 \geq k_2^2 \geq \dots$, con sus respectivas funciones propias asociadas $\varphi_1, \varphi_2, \dots$. Un aspecto interesante de estos billares es que los estados propios están influenciados no sólo por la superficies de energía, sino también por las órbitas cerradas del sistema clásico. Esto es que, de alguna manera, las órbitas cerradas dejan una huella que persiste a través de miles de estados y probablemente sobreviven hasta el límite clásico [57]. A estas huellas se les conoce como **cicatrices**.

7.1.1. Órbitas periódicas y cicatrización de estados propios

Históricamente, para el problema de un estadio de Bunimovich cuántico, Steven McDonald y Allan Kaufman [58] abordaron la solución de la ecuación de Helmholtz de forma numérica. Encontraron el conjunto de puntos donde cada *eigenfunción* φ_i se anula, dicho conjunto es llamado conjunto nodal, el cual consiste de curvas infinitamente diferenciables en el interior del billar [56]. Su resultado se presentan en la figura 7.1. Inspirado por este trabajo, Eric Heller [59] identifica a estas huellas generadas por las curvas nodales y las llama **cicatrices cuánticas**.

De acuerdo a Heller [60] se establece la definición:

Definición 6. Cicatriz cuántica. *Un estado propio cuántico de un sistema que es clásicamente caótico tiene una cicatriz de una órbita periódica inestable si su densidad en las variedades clásicas, cerca de la órbita periódica, difiere de forma significativa de la densidad estadísticamente esperada.*

El fenómeno de cicatrización cuántica indica una clara correspondencia entre los billares cuánticos y clásicos, en el sentido de que estas cicatrices sugieren que las órbitas

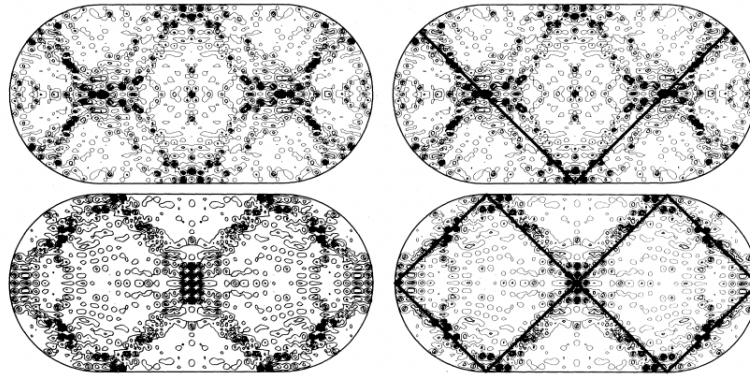


Figura 7.2: Dos estados cicatrizados para el estadio de Bunimovich. A la derecha se indica con una línea una órbita periódica clásica del billar. Figura tomada de [59].

periódicas presentes en los billares clásicos no son independientes del todo de la descripción de su análogo cuántico. En la figura 7.2 se muestran dos estados cicatrizados para el estadio cuántico de Bunimovich calculado por Heller [59], siendo este trabajo el precursor en el estudio del fenómeno de cicatrización cuántica.

Si bien, la cicatrización de estados propios surgió del estudio de los billares, el fenómeno no es exclusivo de éstos. Así, el estudio de billares en el terreno clásico no sólo es de interés para los sistemas dinámicos en general, sino dentro de la correspondencia clásico-cuántica. En este sentido, para darse a la tarea de estudiar la *caoticidad* de un sistema cuántico conviene tener una descripción suficiente del mismo en el límite clásico. Es justo esta la razón por la cual en el presente escrito se hace particular énfasis en presentar una descripción completa de los aspectos clásicos de la dinámica de billares, teniendo como objetivo el estudio a futuro de estos sistemas en su versión cuántica.

7.1.2. Una implementación experimental

En los últimos años, el estudio de los billares en sistemas cuánticos ha cobrado un notable interés, dada su capacidad para revelar fenómenos fundamentales de la mecánica cuántica y el comportamiento colectivo de partículas. En el contexto de bosones, se ha llevado a cabo un experimento pionero que explora las propiedades dinámicas y de transporte en un billar para un tipo particular de cuasipartícula, los excitones-polaritones. La investigación se centra en el estudio de las degeneraciones en el espectro, fundamental para comprender las dinámicas en sistemas caóticos y no-Hermitianos, así como en la observación de la condensación de Bose-Einstein de estos excitones-polaritones, que se presenta incluso a temperatura ambiente. Se provee de una sucinta definición de estas cuasipartículas, con la motivación de presentar dicho experimento de reciente implementación.

7.1.3. Excitones-polaritones

Los **excitones** son los estados electrónicamente excitados de los sólidos no metálicos, cada excitón consiste de un electrón y un agujero, los cuales realizan varios movimientos correlacionados [61]. Por su parte, los **polaritones** comúnmente son definidos como cuasipartículas que comparten propiedades tanto de luz como de materia. Se puede definir [62] un polaritón como una superposición cuántica de un fotón con una excitación de la materia. Esto último pueden ser los modos colectivos en sólidos, un electrón en átomos y moléculas, o bien, ondas electromagnéticas en dieléctricos. Así, los **excitones-polaritones** son cuasi-partículas bosónicas que se originan de la interacción de fotones hibridizados con electrones hidrogenoides ligados a pares agujero-electrón.

La no-hermiticidad (característica de los sistemas disipativos) modifica de manera dramática la estructura de los modos y las degeneraciones en sistemas de excitones-polaritones, lo que afectaría a los fenómenos de transporte, localización y demás propiedades cuánticas del sistema. Para estudiar estas implicaciones, Gao *et al.* [20] implementan un experimento mediante un bombeo óptico estructurado espacialmente, con el cual crean un billar de excitones-polaritones, esto es un área bidimensional delimitada por una curva generada por una barrera de potencial. Así, variando los parámetros del billar, ellos observan los cruces y cruces evitados de los niveles de energía.

Las degeneraciones en el espectro son cruciales para determinar las propiedades dinámicas y de transporte en sistemas tanto caóticos como no Hermitianos. La relevancia de introducir un billar, o bien, un pozo de potencial $2D$ con una geometría no trivial, es la aparición natural en éstos de niveles de energía fuertemente correlacionados y la transición al caos cuántico.

Al ser bosones, los excitones-polaritones exhiben un comportamiento colectivo cuántico, que es la condensación de Bose-Einstein (BEC por sus siglas en inglés), cuando éstos ocupan un estado cuántico de una sola partícula [63]. Los excitones-polaritones han mostrado ser sistemas muy accesibles para el estudio del comportamiento cuántico colectivo pues éstos condensan a temperaturas que van de los $10K$ hasta temperatura ambiente y no requieren de un meticuloso aislamiento para su estudio.

7.1.4. Descripción del experimento

El experimento [20] consiste en un bombeo óptico, que se sintoniza lejos de la resonancia del excitón en una cavidad, lo que efectivamente crea un baño térmico incoherente de excitones-polaritones “calientes”. Así, un estado de BEC coherente de excitones-polaritones domina la dinámica. El condensado, bajo un bombeo continuo, decae y libera fotones coherentes (fotones en fase con la misma frecuencia entre sí, formando un haz de luz uniforme), los cuales escapan de la cavidad llevando consigo toda la información sobre el estado condensado. Las interacciones entre el baño térmico y el condensado de excitones-polaritones son responsables de la formación de un potencial efectivo inducido por bombeo. Ellos usan un bombeo óptico estructurado para crear un potencial no Hermitiano (con disipación) en la forma de un billar de Sinai con defecto circular de radio R , para un condensado de excitones-polaritones. El billar tiene paredes suaves (inelásticas)

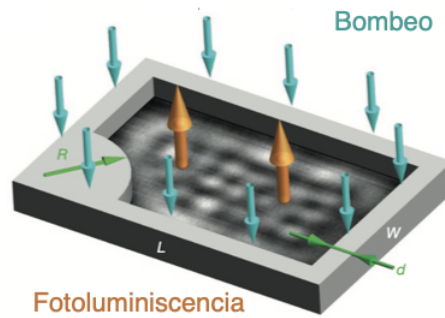


Figura 7.3: Representación esquemática de un billar de Sinai de excitones-polaritones formado en el plano de un pozo cuántico incrustado en una microcavidad. (Figura de [20]).

de alto y ancho finito, y éstas forman una envolvente Gaussiana. La no linealidad afecta principalmente a la población relativa de la energía de los estados propios. Al variar el radio del defecto R , se modifica la geometría, lo cual afecta por tanto los niveles de energía. Así, se pueden modular los valores propios de diferentes modos a diferentes ritmos variando la forma del potencial bidimensional.

En este experimento, cuya implementación se esquematiza en la figura 7.3, se introduce un grosor d como un parámetro para la pared del billar, el cual no afecta la geometría del billar, pero controla la parte no-Hermitiana de la barrera de potencial. La información se recupera vía fotoluminiscencia, pues ésta provee información sobre los valores propios complejos así como de la estructura espacial de los *eigenmodos* (funciones de onda). Este experimento abre nuevas vías para la investigación de la transición al caos cuántico, los efectos de la no linealidad en la dinámica de sistemas cuánticos complejos y, en general, abona un marco de estudio para el problema de la correspondencia clásico-cuántica.

7.2. Conclusiones

En conclusión, este estudio ha abordado una serie de cuestiones fundamentales acerca de los sistemas dinámicos, tales como la integrabilidad, la ruptura de ésta bajo pequeñas perturbaciones y la caracterización de las irregularidades en la dinámica; discutiendo aspectos cruciales sobre el caos. A través de un enfoque cualitativo y cuantitativo, se han analizado las complejidades asociadas con el cálculo numérico implicado en la modulación de billares de paredes suaves, lo que nos ha permitido ahondar en el problema de la modulación del caos. Los resultados presentados no solo subrayan la importancia de los parámetros de dureza y geometría de un billar, sino que también abren el camino para futuras investigaciones tales como el problema de la correspondencia clásico-cuántica, la dinámica de billares disipativos y problemas de transporte en billares cuánticos.

Mientras que este trabajo contribuye a la discusión sobre el estudio de billares aportando una novedosa geometría (la curva de *squircle*) a partir de una única parametrización, se pudo recuperar el billar elíptico y el rectangular. Asimismo, se desarrolló una herramienta teórica y numérica para el estudio cualitativo y cuantitativo de los billares suaves. Gracias a estas herramientas fue posible, por una parte, mostrar la presencia de caos de forma cualitativa; mostrando la ruptura gradual de la integrabilidad al variar los parámetros geométricos y de dureza en el billar. Se corroboró que la dureza del billar tiene un efecto que estabiliza la dinámica. En adición, mediante el cálculo de exponentes de Lyapunov fue posible generar un espacio de parámetros el cual evidenció que el parámetro de cuadradez en el billar suave de *squircle* es no lineal y permite romper la integrabilidad del billar introduciendo gradualmente caos.

Es evidente que aún quedan muchos aspectos por explorar. La relevancia de los billares en la física es tal, que cada aporte implica por sí sólo un campo fértil de estudio con variedad de vertientes. Estas posibles direcciones de trabajo no sólo se limitan a estudios teóricos sobre caos clásico y su contraparte cuántica, sino que también tienen cabida en implementaciones experimentales relacionadas con el desarrollo de nuevas tecnologías.

Queda como trabajo a futuro el estudio de los billares de paredes suaves para el caso de durezas mayores, en busca del entendimiento de la transición de paredes suaves a duras. Además, el considerar a la energía del sistema como un parámetro adicional se propone como un estudio posterior, para el caso de sistemas que presentan disipación. Adicionalmente, la cuantización de billares suaves y su relación con el fenómeno de cicatrización resulta ampliamente llamativo como una extensión de este trabajo.

Con todo lo anterior queda en evidencia que el billar suave de *squircle* tiene una dinámica muy peculiar e interesante. La introducción de parámetros que permiten estabilizar o perturbar el sistema de forma directa, convierte a este modelo en un objeto valioso para el estudio e implementación en sistemas dinámicos, tanto en el sentido clásico como cuántico.

Apéndice A

Billar suave de *squircle*

A.1. Trayectorias

En esta sección se presentan algunas gráficas que complementan lo mostrado anteriormente. Para el caso del billar suave de *squircle* se muestra el pozo de potencial A.1 y cómo éste cambia en función del parámetro s , para valores cercanos a los límite; evidenciando que cerca del caso rectangular aparecen puntos de escape en las esquinas, los cuales hay que tomar en cuenta a la hora de resolver la dinámica. Como se puede apreciar en la figura, para un valor de s muy cercano a uno, los puntos de escape aparecen incluso para $E = 0$, por lo cual resulta prudente evitar las esquinas si se busca evitar que la partícula escape.

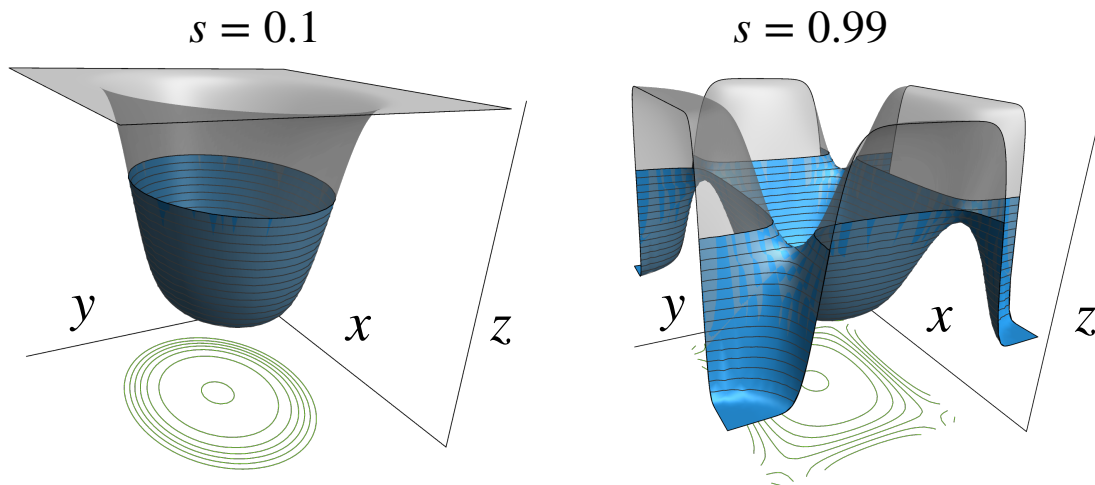


Figura A.1: Se muestran dos pozos del potencial de billar suave de *squircle*. En ambos casos $\beta = 0.6$ y $h = 2$. El color azul representa el espacio accesible cuando la energía del sistema es $E = 0$, y la proyección de esta región en la superficie genera las curvas de nivel que se pueden observar en el plano XY . Se toman valores de dureza que se acerquen al caso de la elipse y el rectángulo. Se eligen estos valores para evidenciar que al acercarse al caso rectangular aparecen regiones cerca de las esquinas por las cuales una partícula puede escapar.

Por otra parte, en la figura A.2 se muestran algunas trayectorias en el espacio de configuraciones. Se fijan los valores $\beta = 0.6$ y $h = 2$. Y se varía la energía y el parámetro s . En color negro se tiene la curva de nivel de $E = 0$, como referencia, por ello, para trayectorias de energía positiva se ve que la órbita parece salir del billar, pero simplemente se tiene que la partícula rebasó el umbral de energía cero, lo cual es permitido debido a la energía que se le dio. Un aspecto a tomar en consideración son los posibles escapes que una partícula puede tener al acercarse a una de las esquinas de la *squircle*. Conforme la energía aumenta, la posibilidad de que una partícula escape cerca de la orilla también crece. Así, la energía en combinación con el parámetro s nos dan un fenómeno a tomar en cuenta: el del escape de una partícula entre pozos. Sin embargo, en el presente trabajo no se aborda esta situación más allá de lo aquí presentado.

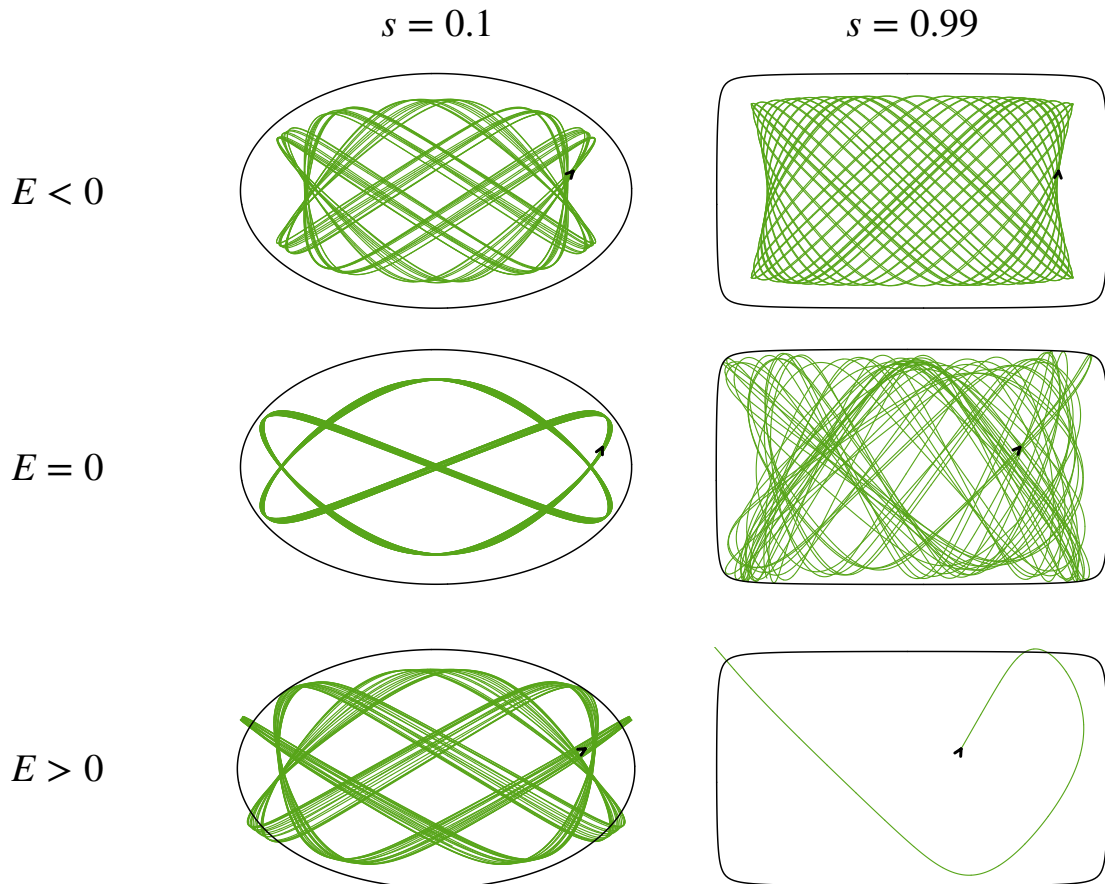


Figura A.2: Se presentan trayectorias de condiciones iniciales al azar (diferentes en cada caso pero que garantizan un valor fijo de energía) dentro de un billar suave de *squircle*. En todos los casos $\beta = 0.6$ y $h = 2$. Se varía la energía: $E = -0.3, 0, 0.3$. La curva verde representa la equipotencial $E = 0$, que sería la frontera en el caso de un billar de paredes duras. Se busca evidenciar que el parámetro s tiende a converger al rectángulo $s = 1$ mucho más lento que en el caso de una elipse $s = 0.0$. Para energías bajas el espacio accesible se reduce, en el caso de energía positiva las trayectorias alcanzan puntos fuera de la curva $E = 0$, como es de esperarse. En el caso $s = 0.99$ y $E > 0$ se observa que la partícula escapa del pozo de potencial, lo cual puede entenderse mejor de analizar el pozo de potencial en este caso. Estos efectos relacionados con el escape de la partícula no son considerados en este trabajo.

A.1.1. Identificación en secciones de Poincaré

A continuación se muestran algunas trayectorias aisladas de una sección de Poincaré mostrada en 5.5. Esto con la finalidad de ayudar a visualizar los comportamientos de la dinámica en el billar a partir del espacio de colisiones. En particular, se ha elegido una condición inicial en *a*) tal que se identifique con una curva regular en la sección de Poincaré. Luego, en *c*) se observa una trayectoria caótica para finalmente en *e*) tener una regular nuevamente. Estas transiciones de regularidad a caos y viceversa, son de gran importancia a lo largo del presente escrito.

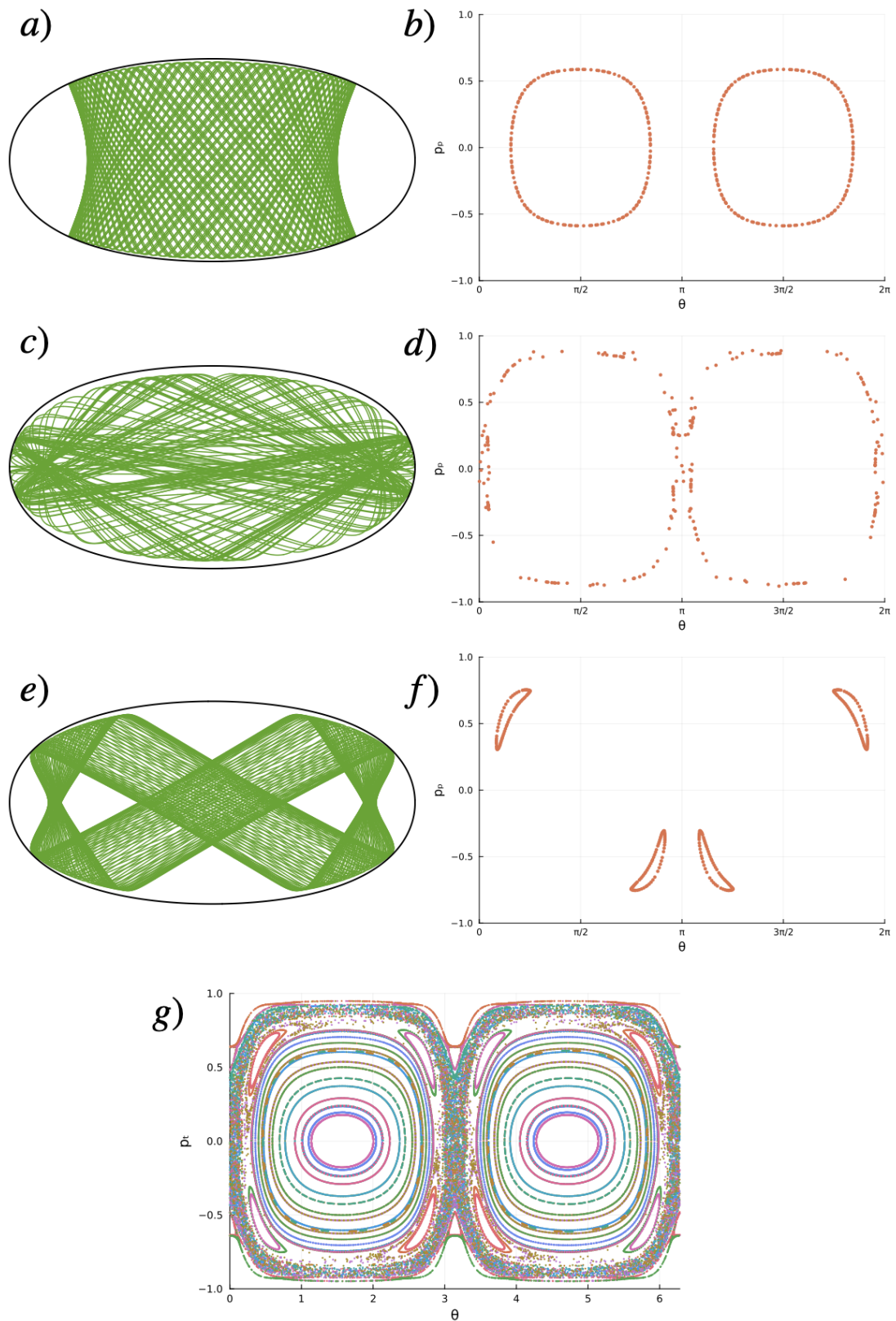


Figura A.3: En las figuras de a) a f) se muestran trayectorias en el espacio de configuraciones al lado de su respectivo mapeo al espacio de colisiones. Todas estas se identifican con trayectorias dentro de la sección de Poincaré g) que es la misma que 5.5b).

Apéndice B

Código

Se presentan los elementos fundamentales del código utilizado para los resultados mostrados en este trabajo. Todo se realizó en el lenguaje *Julia*, versión 1.6.

```
1 ### BIBLIOTECAS
2 using DynamicalSystems: columns #Para resolver la dinamica y calcular
   exponentes de Lyapunov
3 using Plots #Biblioteca "nativa" de Julia para graficar
4 using DifferentialEquations #Resolucion de ecuaciones diferenciales
5 using SpecialFunctions: erf, erfinv #Funcion error y su inversa
6 using LinearAlgebra: norm #Norma
7 using LaTeXStrings #Para poner etiquetas en formato LaTeX
8 ### DEFINIENDO FUNCIONES Y RUTINAS
9 #Rutina para suavizado con funcion error
10 ###Notacion
11 sin2(x) = sin(x)^2
12 cos2(x) = cos(x)^2
13 csc2(x) = csc(x)^2
14 # Color verde para trayectorias: linecolor="#57A519"
15 # Funcion que calcula el valor del potencial en el punto (x,y) y
   parametros [h,s,kx,ky]
16 function Vxy(qx, qy, par)
17     pot = erf(par[1] * (qx^2 / par[3]^2 + qy^2 / par[4]^2 - (par[2]^2 *
   qx^2 * qy^2)/(par[3]^2 * par[4]^2) - 1))
18     return pot
19 end
20 # Parametriza la coordenada radial de los puntos en la frontera del
   billar
21 function rPolar(φ,s,kx,ky) #angulo polar, cuadradez, kx, ky
22     valorespeligrosos = [0, π/2, pi, 3*π/2, 2*π]
23     if φ in valorespeligrosos
24         erre = 1
25     elseif φ == pi
26         erre = 1
27     elseif s == 0
28         erre = (kx * ky) / sqrt(ky^2 * cos2(φ) + kx^2 * sin2(φ))
29     else
30         A = (ky^2 * cos2(φ) * csc2(2 * φ))/s^2
31         B = (kx^2 * sin2(φ) * csc2(2 * φ))/s^2
```

```

32     C = csc2(2 * phi) * sqrt((-4 * ky^2 * cos2(phi) - 4 * kx^2 * sin2(phi)
33     )^2 - 16 * kx^2 * ky^2 * s^2 * sin2(2 * phi))
34     erre = sqrt(2) * sqrt(A + B - C/(4 * s^2))
35     end
36     return erre
37 end
38 # Funcion que dibuja la frontera del billar
39 function pintar_squircle(pars)
40     paso = range(0, stop = 2*pi, length = 500)[2] #Mayor el rango,
41     mas nitidas las esquinas
42 theta = vcat(collect(paso:paso:2*pi-paso), paso) #valores del angulo polar
43     (malla)
44 rcoor = rPolar.(theta, pars[2], pars[3], pars[4])
45 plot!(rcoor .* cos.(theta), rcoor .* sin.(theta), legend=false,
46     aspect_ratio=:equal, ticks=false, line = 2, linecolor = :black,
47     showaxis=false,
48     ylims=(-pars[4]-0.1, pars[4]+0.1), xlims=(-pars[3]-0.1, pars[3]+0.1))
49 end
50 # Funcion que calcula la energia del sistema
51 function En(coordenadas, parametros)
52     ham = 0.5*(coordenadas[3]^2 + coordenadas[4]^2) +
53     Vxy(coordenadas[1], coordenadas[2], parametros)
54     return ham
55 end
56 # Funcion que grafica la condicion inicial
57 function flecha(xs, ys, escala) # pinta las condiciones iniciales
58     plot!([xs[1], xs[2]], [ys[1], ys[2]],
59     arrow = true, linewidth = 4, color=:black, label="")
60 end
61 # Da una condicion inicial dado un qy que garantiza conservacion de la
62 energia
63 function condiciones_dadoy(y, epsilon, pars) #[h,s,ax,ay]
64     gamma = y^2/pars[4]^2
65     x = rand(0:0.05:pars[3]*sqrt(((erfinv(epsilon)/pars[1]) + 1 - gamma) / (1 -
66     pars[2]^2*gamma)))
67     vxy = Vxy(x, y, pars)
68     px = rand(0:0.05:sqrt(2*epsilon - 2*vxy))
69     py = sqrt(2*epsilon - px^2 - 2*vxy)
70     return [x, y, px, py]
71 end
72 # Da una condicion inicial dado un qx que garantiza conservacion de la
73 energia
74 function condiciones_dadox(x, epsilon, pars) #[h,s,ax,ay]
75     gamma = x^2/pars[3]^2
76     y = rand(0:0.05:pars[4]*sqrt(((erfinv(epsilon)/pars[1]) + 1 - gamma) / (1 -
77     pars[2]^2*gamma)))
78     vxy = Vxy(x, y, pars)
79     px = rand(0:0.05:sqrt(2*epsilon - 2*vxy))
80     py = sqrt(2*epsilon - px^2 - 2*vxy)
81     return [x, y, px, py]
82 end
83 ### SE DEFINE EL BILLAR SUAWE
84 # Se definen las ecuaciones de movimiento
85 function dinamicaSquircle(du, u, p, t) # p = [h,s,alpha,beta] :
86     # Parametros de dureza y semi ejes de la squircle

```



```

79     h = p[1]
80     s = p[2];
81     ax = p[3];
82     ay = p[4];
83     # Variables del espacio fase
84     qx = u[1]
85     qy = u[2]
86     px = u[3]
87     py = u[4]
88     # Ecuaciones de Hamilton
89     du[1] = px
90     du[2] = py
91     du[3] = -((4*h*qx)/(ax^2 * sqrt(pi)))*
92         exp(-h^2*(qx^2/ax^2 + qy^2/ay^2 - s^2*qx^2*qy^2/(ax^2*ay^2) -
93         1)^2) *
94         (1 - s^2*qy^2/ay^2)
95     du[4] = -((4*h*qy)/(ay^2 * sqrt(pi)))*
96         exp(-h^2*(qx^2/ax^2 + qy^2/ay^2 - s^2*qx^2*qy^2/(ax^2*ay^2) -
97         1)^2) *
98         (1 - s^2*qx^2/ax^2)
99 end
100 ### DINAMICA
101 # Funcion que detecta las posibles colisiones
102 function colisiones(seriedetiempo, cis, params, energia)
103     seriedtMat = reduce(vcat, [reshape(row, 1, :) for row in serieDt.u
104     ])#como matriz
105     xs = seriedtMat[:,1]
106     ys = seriedtMat[:,2]
107     pxs = seriedtMat[:,3]
108     pys = seriedtMat[:,4]
109     hs, ss, kxs, kys = params
110     colsx, colsy, colsp, colspy, angs, condicion, cambiosDsigno,
111     contador = [[] for i=1:8] #Se declaran arreglos vacios para
112     hacerles append!
113     pseudocols = zeros(1,4) #Arreglo 4D que almacena las coordenadas
114     del espacio fase en los puntos de colisiones
115 # Identificar si un punto es una colision #
116 for i in 1:size(xs,1)
117     gamma = (ss^2 *xs[i] *ys[i])/((kxs^2 * kys^2)
118     append!(condicion, (pxs[i] *xs[i])/((kxs^2) + (pys[i] * ys[i])/((
119     kys^2) - gamma * (xs[i]*pys[i] + ys[i]*pxs[i]))
120     #Evalua la condicion de colision en todo punto
121 end
122 # condicion de que <p,F> cambie de signo: positivo a negativo
123 for j in 2:size(xs,1)
124     if (condicion[j-1] * condicion[j] < 0)&&(condicion[j-1]>0) #Si
125     hay un cambio de signo positivo a negativo
126         append!(cambiosDsigno, j) #El estado al instante (un
127     paso despues) posterior a la colision se almacena
128     end
129 end
130 if size(cambiosDsigno,1)>0 # Por si se elige un tiempo tan corto
131     que no considere una colision
132     for m in 1:size(cambiosDsigno,1)

```

```

123     pseudocols = [ pseudocols ; transpose(seriedetiempo[
124     cambiosDsigno[m]]) ]
125     end
126     return pseudocols
127 end
128 # Angulo respecto a la horizontal (se aplica la ecuacion)
129 function  $\phi$ (qx, qy, params,  $\epsilon$ ) #params = [h,s,alpha,beta]
130     apx = params[3]*sqrt(erfinv( $\epsilon$ )/params[1] + 1)
131     apy = params[4]*sqrt(erfinv( $\epsilon$ )/params[1] + 1)
132      $\kappa$  = sqrt((qx^2/apx^2 + qy^2/apy^2)/(1 + (params[2]^2 *qx*qy)/(apx*
133     apy)))
134      $\alpha$  =  $\kappa$ *apx
135      $\beta$  =  $\kappa$ *apy
136     b = 1 - (params[2]*qx/params[3])^2
137     value = atan(( $\beta$ *qx*(params[2]^2 - 1))/( $\alpha$ ^2*sqrt(abs((1-(qx/ $\alpha$ )^2)
138     *(1-(params[2]*qx/ $\alpha$ )^2)^3))))
139     return value
140 end
141 # Coordenadas de Poincare-Birkhoff
142 function PB(seriedetiempo, cis, params)
143     energ = En(cis, params)
144     ppar,  $\theta$  = [] for i=1:2]
145     #Primero se calculan los puntos de colision y se almacenan en
146     cartesianas
147     cols = colisiones(seriedetiempo, cis, params, energ)
148     colsx = cols[1:end,1]
149     colsy = cols[1:end,2]
150     colspx = cols[1:end,3]
151     colspy = cols[1:end,4]
152     # Cambio de coordenadas
153     for i in 1:size(colsx,1)
154         # El angulo polar
155         ihyp = norm([colsx[i], colsy[i]])
156         if colsy[i] >= 0 #1o y 2o cuadrante
157             append!( $\theta$ , acos(colsx[i] / ihyp))
158         else
159             append!( $\theta$ , 2*pi - acos(colsx[i] / ihyp))
160         end
161         # La otra coordenada
162         ienerg = En([colsx[i], colsy[i], colspx[i], colspy[i]], params)
163         ipmax = sqrt(2 * (ienerg + erf(params[1])))
164          $\phi$ i =  $\phi$ (colsx[i], colsy[i], params, energ)
165         signo = sign(colspx[i] / cos( $\phi$ i))
166         if 0 <  $\theta$ [i] < pi
167             ppi = signo * sqrt(colspx[i]^2 + colspy[i]^2)
168         else
169             ppi = (-1)*signo * sqrt(colspx[i]^2 + colspy[i]^2)
170         end
171         append!(ppar, ppi / abs(ipmax)) #se almacena normalizado
172     end
173     return  $\theta$ , ppar
174 end
175 #
176 #####

```

```

174 #EJEMPLOS
175 #####
176 # Rutina para generar una trayectoria en el billar
177 fig = plot() #Se genera (y se limpia) el espacio en memoria para la
        figura
178 h = 2 ; s = 0.9 # dureza , cuadradez
179 kx = 1.0 ; ky = 0.6 #alpha=1 , beta
180 time = 150 # tiempo de evolucion
181  $\epsilon$  = 0 # energia
182 params = [h,s,kx,ky] # arreglo de parametros
183 y0 = 0.1 # qy inicial propuesta
184 CIs = condiciones_dadoy(y0, $\epsilon$ ,params) # se generan CIs aleatorias
185 tintervalo = (0.0,time) # estructura para el intervalo de evolucion
186 EDOProb = ODEProblem(dinamicaSquircle,CIs,tintervalo,params) # Se
        define el problema dinamico
187 serieDt = solve(EDOProb, RK065(), dt = 1e-5 + abs(1e-3 * abs(Vxy(CIs
        [1],CIs[2],params))))
188 # Se evolucina con el metodo RK065, se da un paso adaptativo
        dependiente del potencial Vxy
189 xs = [serieDt.u[i][1] for i in 1:size(serieDt.u,1)] # Valores de qx(t)
190 ys = [serieDt.u[i][2] for i in 1:size(serieDt.u,1)] # Valores de qy(t)
191 plot!(xs,ys,legend=false,aspect_ratio=:equal,
192        ticks = false,boxed=false,showaxis=false,lw=1.5,linewidth="57A519"
        )
193 # Se grafica la trayectoria
194 fig = pintar_squircle(params) # Se dibuja la frontera
195 #####
196 # Rutina para generar la seccion de Poincare de la trayectoria anterior
197 psos = scatter() #Se limpia el espacio para la figura
198 theta , pp = PB(serieDt.u,CIs,params) #Se hace el cambio a coordenadas
        de Poincare-Birkhoff (esto ya calcula las colisiones)
199 psos = scatter!(theta,pp,label="",xlabel=" $\theta$ ",ylabel=" $p_p$ ",
200        markersize = 1.5,markerstrokewidth=0,ylims=(-1,1),legend = false) #
        Se grafica

```


Bibliografía

- [1] E. N. Lorenz, *Journal of atmospheric sciences* **20**, 130 (1963).
- [2] É. Ghys, en *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and attitudinal challenges* (Springer International Publishing, 2015), págs. 19-39.
- [3] E. N. Lorenz, *Tellus a* **42**, 378 (1990).
- [4] H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, vol. 2 (Gauthier-Villars et fils, imprimeurs-libraires, 1893).
- [5] E. Ott, *Chaos in dynamical systems* (Cambridge university press, 2002).
- [6] J. Hadamard, *Bulletin de la Société Mathématique de France* **26**, 195 (1898).
- [7] F. Steiner, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics* **2**, 214 (2006).
- [8] N. Chernov y R. Markarian, *Chaotic billiards*, 127 (American Mathematical Soc., 2006).
- [9] H. Poritsky, *Annals of Mathematics*, 446 (1950).
- [10] I. P. Cornfeld, S. V. Fomin e Y. G. Sinai, *Ergodic theory*, vol. 245 (Springer Science & Business Media, 2012).
- [11] J. Buzzi, en *Ergodic Theory* (Springer, 2023), págs. 633-664.
- [12] R. K. Pathria, *Statistical mechanics* (Elsevier, 2016).
- [13] Y. G. Sinai, en *Doklady Akademii Nauk*, vol. 153, 6 (Russian Academy of Sciences, 1963), págs. 1261-1264.
- [14] L. A. Bunimovich, *Communications in Mathematical Physics* **65**, 295 (1979).
- [15] R. C. Hilborn y N. B. Tufillaro, *American Journal of Physics* **65**, 822 (1997).
- [16] M. S. Custódio, C. Manchein y M. W. Beims, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **22** (2012).
- [17] H. Oliveira, C. Manchein y M. Beims, *Physical Review E* **78**, 046208 (2008).
- [18] A. Kaplan, N. Friedman, M. Andersen y N. Davidson, *Physical review letters* **87**, 274101 (2001).
- [19] A. Kaplan, N. Friedman, M. Andersen y N. Davidson, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **187**, 136 (2004).
- [20] T. Gao, E. Estrecho, K. Bliokh, T. Liew, M. Fraser, S. Brodbeck, M. Kamp, C. Schneider, S. Höfling, Y. Yamamoto et al., *Nature* **526**, 554 (2015).

- [21] S. Rotter, B. Weingartner, N. Rohringer y J. Burgdörfer, *Physical Review B* **68**, 165302 (2003).
- [22] B. Weingartner, S. Rotter y J. Burgdörfer, *Physical Review B* **72**, 115342 (2005).
- [23] J. R. Taylor y J. R. Taylor, *Classical mechanics*, vol. 1 (Springer, 2005).
- [24] H. Goldstein, C. Poole y J. Safko, *Classical mechanics*, 2002.
- [25] S. Wimberger, *Nonlinear dynamics and quantum chaos*, vol. 10 (Springer, 2014).
- [26] C. Dellago, H. A. Posch y W. G. Hoover, *Physical Review E* **53**, 1485 (1996).
- [27] M. Tabor, WileyInterscience (1989).
- [28] J. E. Marsden y A. Tromba, *Vector calculus* (Macmillan, 2003).
- [29] V. I. Arnol'd, *Mathematical methods of classical mechanics*, vol. 60 (Springer Science & Business Media, 2013).
- [30] H. J. Korsch, H.-J. Jodl y T. Hartmann, *Chaos: a program collection for the PC* (Springer Science & Business Media, 2007).
- [31] E. Piña y L. J. Lara, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **26**, 369 (1987).
- [32] A. Pikovsky y A. Politi, *Lyapunov exponents: a tool to explore complex dynamics* (Cambridge University Press, 2016).
- [33] P. Walters, *An introduction to ergodic theory*, vol. 79 (Springer Science & Business Media, 1982).
- [34] G. Datsleris y U. Parlitz, *Nonlinear dynamics: a concise introduction interlaced with code* (Springer Nature, 2022).
- [35] M. Viana, *Lectures on Lyapunov exponents*, vol. 145 (Cambridge University Press, 2014).
- [36] C. Dellago, L. Glatz y H. Posch, *Physical Review E* **52**, 4817 (1995).
- [37] M. Robnik y M. V. Berry, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **18**, 1361 (1985).
- [38] S. Tabachnikov, *Geometry and billiards*, vol. 30 (American Mathematical Soc., 2005).
- [39] D. Turaev y V. Rom-Kedar, *Journal of statistical physics* **112**, 765 (2003).
- [40] T. Kroetz, H. A. Oliveira, J. S. Portela y R. L. Viana, *Physical Review E* **94**, 022218 (2016).
- [41] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 4.^a ed. (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2017).
- [42] M. N. Spijker, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **72**, 393 (1996).
- [43] G. Wanner y E. Hairer, *Solving ordinary differential equations II*, vol. 375 (Springer Berlin Heidelberg New York, 1996).
- [44] SciML, *DifferentialEquations.jl Documentation*, <https://docs.sciml.ai/DiffEqDocs/stable/>, Accedido el 21 de febrero de 2024, 2022.
- [45] N. T. Gridgeman, *The Mathematical Gazette* **54**, 31 (1970).

- [46] M. F. Guasti, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol* **23**, 895 (1992).
- [47] Č. Lozej, “Transport and Localization in Classical and Quantum Billiards”, Tesis doct. (Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, 2020).
- [48] A. Rapoport, V. Rom-Kedar y D. Turaev, *Communications in Mathematical Physics* **272**, 567 (2007).
- [49] D. Turaev y V. Rom-Kedar, *Nonlinearity* **11**, 575 (1998).
- [50] V. Rom-Kedar y D. Turaev, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **130**, 187 (1999).
- [51] P. Bálint e I. P. Tóth, *Discrete and Continuous Dynamical Systems* **15**, 37 (2006).
- [52] D. Turaev y V. Rom-Kedar, *Journal of Statistical Physics* **112**, 765 (2003).
- [53] P. Baldwin, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **29**, 321 (1988).
- [54] A. Knauf, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **36**, 259 (1989).
- [55] M. Katsanikas, V. Garcia-Garrido y S. Wiggins, *Chemical Physics Letters* **743**, 137199 (2020).
- [56] E. G. Vergini, “Estudio cuántico y semiclásico de billares clásicamente caóticos”, Tesis doct. (Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, 1995).
- [57] M. V. Berry, *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* **423**, 219 (1989).
- [58] S. W. McDonald y A. N. Kaufman, *Physical Review Letters* **42**, 1189 (1979).
- [59] E. J. Heller, *Physical Review Letters* **53**, 1515 (1984).
- [60] E. Heller, *Wave Packet Dynamics and Quantum Chaology. Lectures in the 1989 NATO Les Houches. Summer School on Chaos and Quantum Physics; Giannoni, M.-J., Voros, A., Zinn-Justin, J., Eds*, 1991.
- [61] P. Dean, B. Fischer, D. Herbert, J. Lagois y P. Yu, *Excitons*, vol. 14 (Springer Science & Business Media, 2012).
- [62] D. Basov, A. Asenjo-Garcia, P. J. Schuck, X. Zhu y A. Rubio, *Nanophotonics* **10**, 549 (2021).
- [63] C. J. Pethick y H. Smith, *Bose–Einstein condensation in dilute gases* (Cambridge university press, 2008).



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00136

Matrícula: 2221801165

Modulación de caos en billares mediante un potencial suave en la frontera.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 16:00 horas del día 8 del mes de julio del año 2024 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DRA. LIDIA GEORGINA JIMENEZ LARA
DR. FRANCISCO GONZALEZ MONTOYA
DRA. HILDA NOEMI NUÑEZ YEPEZ

Bajo la Presidencia de la primera y con carácter de Secretaria la última, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

DE: ADAN GONZALEZ ANDRADE

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, la presidenta del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

Roman Linares Romero
DR. ROMAN LINARES ROMERO

PRESIDENTA

Lidia Jiménez Lara
DRA. LIDIA GEORGINA JIMENEZ LARA

VOCAL

Francisco GM
DR. FRANCISCO GONZALEZ MONTOYA

SECRETARIA

Hilda Noemi Nuñez Yepez
DRA. HILDA NOEMI NUÑEZ YEPEZ

REVISÓ

Rosa Lía Serrano de la Paz
MTRA. ROSALÍA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES