

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA- IZTAPALAPA.

ESTABILIZACIÓN DE SISTEMAS DE DATOS MUESTREADOS LINEALES POR UN CONTROL CON RETARDO.

Tesis que presenta:

M. en C. Faustino Ricardo García Sosa.

Para la obtención del grado de Doctor en Ciencias (Matemáticas).

Directores de la tesis:

Dr. Rodolfo Suárez Cortéz.

Dr. Baltazar Aguirre Hernández.

México D.F. Junio de 2010

Agradecimientos.

Deseo expresar mi agradecimiento al Dr. Rodolfo Suárez Cortéz y al Dr. Baltazar Aguirre Hernández por su paciente asesoría en la realización de esta tesis. Así como también al Dr. Jesus Álvarez Calderón, al Dr. Carlos Ibarra Valdez, al Dr. Fernando Verduzco González y al Dr. Eloy Martinez Leal por su accesibilidad para revisar y discutir sobre el trabajo presentado en esta tesis.

Deseo manifestar mi agradecimiento a CONACYT por su apoyo económico por medio de su sistema de becas de posgrado. Así como al departamento de Matemáticas de la UAMI por sus facilidades que me brindó.

Deseo expresar mi agradecimiento a mi familia y en especial a mi esposa Sandra, a mi hija Ahtziri y a mi hijo Ricardo por su cariño, motivación y paciencia durante el desarrollo de esta tesis.

agradezco también a mis amigos por su gran interés mostrado a lo largo de la realización de este trabajo.

ÍNDICE

Introducción	5
CAPÍTULO 1. SISTEMA DE DATOS MUESTREADOS.	
1.1 Elementos de los sistemas muestreados.	9
1.2 Operaciones de Muestreo.	12
1.3 Reconstrucción de la señal de muestreo.	13
1.4 Modelación de los sistemas muestreados.	16
1.5 Ventajas de usar un sistema muestreado.	18
CAPÍTULO 2. CONTROL DE LOS SISTEMAS DE DATOS MUESTREADOS.	
2.1 Principales aproximaciones para diseñar el control discreto.	21
2.2 Sistemas lineales discretos exactos.	24
2.2.1 Solución del sistema de ecuaciones diferenciales discreto.	26
2.3 Aplicación del método CTD por Kart J. Astrom.	28
CAPÍTULO 3. ESTABILIDAD DE LOS SISTEMAS DISCRETOS.	
3.1 Prueba de los sistemas discretos.	30
3.1.1 Prueba de estabilidad.	31
3.2 Criterios para la estabilidad de polinomios.	33
3.2.1 Criterio de Schur-Cohn.	33
3.2.2 Criterio de Routh-Hurwitz.	36
3.2.3 Criterio de Jury.	36
3.2.4 Test de Estabilidad Estabilidad tipo Schur.	39

CAPÍTULO 4. ESTABILIZACIÓN DE UN SISTEMA LINEAL DE DATOS MUESTREADOS POR UN CONTROL CON RETARDO EN EL TIEMPO.

4.1 Sistemas de datos muestreados con retardo en el control.	41
4.2 Condiciones de estabilidad de un sistema muestreado con retardo. en el control.	45
4.3 Ejemplos.	54
CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS.	57
APÉNDICE.	59
BIBLIOGRAFÍA.	64

Introducción

En el presente trabajo se plantea estudiar los problemas de control y estabilidad de sistemas de datos muestreados (sistemas muestreados). Estos sistemas son un caso particular de un tipo general de sistema llamado sistemas de control de red (ver Hespanha [18], [19], Hikichi [20], Meng [26], Ogren [32], Seiler [35], Shirmohammadi [36]). Los sistemas de control de red son objeto de estudio de la Teoría de Control y de la teoría de comunicación (ver Hespanha [18]). Entre los artículos reportados en teoría de control que han investigado acerca de los sistemas de control de red pueden mencionarse los trabajos de Hespanha [18], Tipsuwan [38] y Zhang [43].

Cuando en los sistemas de control de red se satisface que las salidas de la planta y las entradas de control son liberadas al mismo tiempo entonces obtenemos un sistema muestreado. En este trabajo enfocamos nuestra atención en los sistemas muestreados.

Los sistemas muestreados trabajan con señales continuas y discretas y además, tienen la característica de que, para obtener su control de retroalimentación en forma explícita solamente se necesita conocer el estado en un número finito de instantes de muestreo, es decir son sistemas continuos con un control de retroalimentación a lazo cerrado discreto, a diferencia de los sistemas continuos para los cuales se necesita conocer al estado $x(t)$ en todo instante. Un caso particular interesante que nosotros empezaremos a analizar es cuando estos estados tienen argumento $[t]$, donde $[t]$ denota la función máximo entero. Esta función ayuda a reconstruir una señal continua, cuando la señal continua está muestreada (por lo regular a cierto período h).

Los sistemas muestreados han sido ampliamente estudiados debido a la importante aplicación que tienen en Ingeniería (ver Astrom [3], Chen y Francis [7], Franklin [11] y Kolmanovskii [24]); por ejemplo, en los últimos años

se están aplicando en forma extensa, particularmente en sistemas de control de procesos químicos donde han mostrado poder estabilizar y mejorar el proceso de respuesta, en ciertos modelos biomédicos [5] y por su relación con los sistemas de cambio se pueden aplicar a sistemas mecánicos, a la industria automotriz, control de tráfico aéreo y en otros campos [28].

Los problemas de regularización en los sistemas muestreados se presentan cuando se desea que una variable o un conjunto de variables asociadas con el sistema dinámico se mantengan en un valor específico, a pesar de las perturbaciones que pudieran presentarse en el sistema. Para lograr este objetivo se cuenta con un conjunto de parámetros que pueden ser ajustados. Las variables que afectan al sistema se les llama usualmente variables de entrada y a las variables afectadas se les llama variables de salida. Este problema de regularización del sistema muestreado se expresa matemáticamente con el hecho de que la trayectoria solución del sistema de ecuaciones diferenciales lineal o no lineal continuo a lazo abierto tiende posiblemente a un punto estacionario (punto crítico) inestable. Por lo tanto, el objetivo es hallar el diseño de un control lineal o no lineal discreto que sea función de sólo un número finito de estados de tal forma que la trayectoria solución del sistema a lazo cerrado tienda a un punto estable.

Se han desarrollado varias estrategias: Cooke y Wiener [9] analizaron la estabilidad de la trayectoria solución de una ecuación diferencial con coeficientes constantes que tiene un estado retardado del tipo $x[t]$ y hallaron condiciones suficientes para la estabilidad asintótica de la solución cero en términos de los coeficientes de la ecuación diferencial. Más adelante estos mismos autores [39] probaron que la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales que tienen un estado del tipo $X[t]$ es única y se puede hallar explícitamente. Sin embargo en ambas investigaciones se restringen al caso en que la matriz A , asociada al sistema lineal, es no singular.

Para el caso de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales Cooke, Turi y Turner [8] consideran el efecto de retardos en la retroalimentación con salidas muestreadas y proponen un control de retroalimentación estabilizante en forma explícita. Sin embargo se restringen al caso en que las matrices, asociadas al sistema de ecuaciones diferenciales, son cuadradas y no singulares.

En el caso de sistemas no lineales Nesic, Teel y Kokotovic (ver [30],[31]) utilizan el método aproximado DTD para diseñar un control estabilizante discreto. Este método se basa en una aproximación en tiempo discreto del modelo de la planta continua y además ignora el comportamiento que hay entre los puntos muestra. La aproximación en tiempo discreto de una planta continua mencionado anteriormente se obtiene por el método de Euler. Otro importante método de diseño del control discreto es el CTD [34], [37] (que es el más usado), se basa en estabilizar el sistema continuo no lineal por métodos continuos y después discretizar el sistema a lazo cerrado. Sin embargo en ambos métodos de diseño el período muestra tiene que ser suficientemente pequeño para que el control diseñado estabilice al sistema no lineal.

La investigación de esta tesis, está dirigida a diseñar un control discreto que tenga un retardo r , múltiplo del período de muestreo, en la retroalimentación que tenga como datos únicamente un número finito de estados muestreados del tipo $x[t]$ y que el período de muestreo no necesariamente tenga que ser pequeño; que resuelvan los problemas de controlabilidad, y de estabilización asintótica de sistemas muestreados (plantas continuas a lazo cerrado con un control discreto) para sistemas lineales. Algunas referencias recomendables para sistemas con retardo son los libros de Hale y Lunel [17], Kolmanovskii y Myshkis [24].

En relación al estudio de los sistemas muestreados y al problema de proveer la existencia de un control estabilizante es importante mencionar los trabajos de Fridman [13] quien toma como base la solución de una desigualdad matricial. Esta aproximación se ha aplicado en subsecuentes trabajos (ver Fridman [12] y Mirkin [27]). Sin embargo se requiere que el retardo no sea mas grande que el período de muestreo. Otra idea desarrollada por Young y Arapostathis [42] es proponer un control dependiente de un parámetro ϵ y entonces probar que el control estabiliza al sistema cuando ϵ es suficientemente pequeño. Dado que la existencia ha sido probada por estos últimos autores, nosotros nos enfocamos a estimar un intervalo máximo para ϵ que nos proporcionara una estimación del valor máximo del período de muestreo y de la ganancia. Para reducir la dificultad del problema, nos restringimos al estudio de sistemas de datos muestreados de una dimensión. Estos sistemas han atraído la atención de varios investigadores debido a que estos sistemas pueden modelar interesantes fenómenos en Ingeniería (ver Busenberg [5] y Cooke [9]).

La distribución del trabajo, se dá de la siguiente forma:

En el primer capítulo se presentan los elementos de los sistemas muestreados como son las diferentes maneras de muestrear una señal continua y la reconstrucción de la misma. Así como la modelación del sistema.

En el capítulo 2, se presentan las aproximaciones de diseño del control discreto para los sistemas lineales y no lineales.

En el capítulo 3 se analiza la estabilidad de los sistemas discretos a través de diferentes pruebas de estabilidad.

En el capítulo 4 analizaremos los sistemas lineales de datos muestreados invariantes en el tiempo uni-dimensionales que son estabilizados por un control que tiene un retardo en el tiempo. Se considerará el retardo como un múltiplo del período de muestreo. Además se considerará una reconstrucción de la señal muestreada de orden cero(en ingles *zero-order hold*). Se obtendrán condiciones suficientes sobre los coeficientes del polinomio característico asociado con el sistema. Las condiciones se establecen al hallar tanto la cota inferior y superior de los coeficientes. Para el término independiente se acota el parámetro ϵ . Estas condiciones darán una estimación del valor máximo del período de muestreo y una expresión explícita del controlador que garantizan la estabilidad del sistema muestreado.

Capítulo 1

Sistemas de datos muestreados

1.1. Elementos de los Sistemas Muestreados

Las computadoras digitales fueron originalmente usadas como componentes en sistemas de procesos complicados, pero debido a su pequeño tamaño y bajo precio ahora también están siendo usadas en reguladores de lazos de control individuales, en el análisis y diseño de sistemas de control [1]. Una de las dificultades que se encuentra para implementar las computadoras en los lazos de control de un sistema continuo es que las computadoras tienen que recibir las mediciones de un proceso en tiempos discretos y esta a la vez transmitir nuevas señales discretas. De aquí surge una de las necesidades de estudiar los sistemas de datos muestreados.

Un sistema de datos muestreados es una planta continua con un controlador discreto. Es decir estos sistemas de datos muestreados opera en tiempo continuo, pero algunas señales en tiempo continuo son muestreadas en ciertos instantes de muestreo t_k (por lo regular de forma periódica) que produce señales discretas. Así estos sistemas muestreados involucran tanto señales continuas como discretas [2],[3]. Estos sistemas se pueden originar de procedimientos de medición que se presentan por ejemplo en el control de procesos químicos, donde muchas variables (concentraciones químicas, etc.) no pueden ser medidas en línea, por lo que una muestra del producto es analizado fuera de línea por un espectógrafo de masa; en sistemas económicos en donde los procedimientos de contabilidad de estos sistemas están limitados a transacciones de un día. Aunque las transacciones pueden ocurrir

en cualquier tiempo. Otra forma de originarse es debido a la información transmitida por pulsos que ocurre en los circuitos electrónicos.

Un sistema muestreado puede describirse por medio de la Figura 1. De

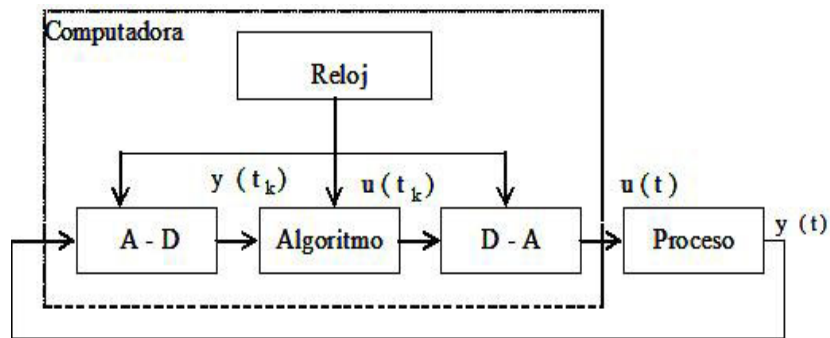


Figura 1. Diagrama esquemático de un sistema muestreado

la Figura 1, se observa que la salida del proceso $y(t)$ es una señal en tiempo continuo y es convertida a una forma digital (discreta) por el convertidor analógico - digital (A-D). La conversión se hace en tiempos muestras t_k , la señal digital es entonces una sucesión de números $y(t_k)$; estas mediciones son procesadas por un algoritmo de la computadora obteniéndose una nueva sucesión de números $u(t_k)$ y ésta es convertida a una señal analógica por el convertidor digital - analógico (D- A), y por último esta señal analógica es aplicada al proceso del sistema, estos eventos por lo normal están siempre sincronizados por un reloj. Regularmente se entiende por muestrear una señal de tiempo continuo $y(t)$ cuando ésta es reemplazada por una sucesión de números $y(t_k)$, los cuales representan los valores de la señal en ciertos tiempos, y el proceso de convertir una sucesión de números a una señal de tiempo continuo se le llama reconstrucción de la señal. Como podría intuirse al muestrear una señal de tiempo continuo se pierde poca información de la señal si los instantes muestra (t_k) están suficientemente cerca, pero si estos instantes muestra (t_k) están muy separados se perdería mucha información de la señal lo que implica que no se podría reconstruir la señal; esto se puede observar por ejemplo al muestrear la señal de la función seno con instantes muy separados (dos muestras por período o si la frecuencia de la función seno es la mitad de la frecuencia muestra) que ésta no se pueda distinguir de

la señal cero (ver Figura 2). Esto implica que la separación de los instantes muestra es muy importante en la reconstrucción de señales.

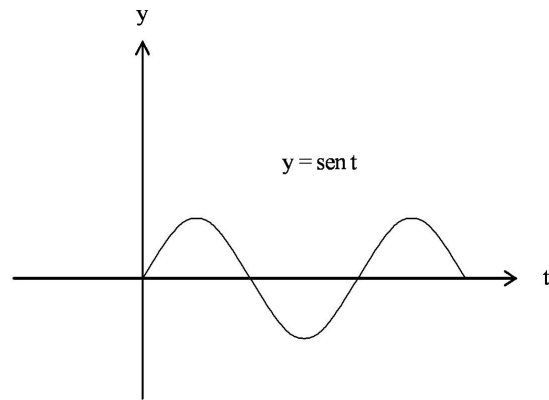


Figura 2. Pérdida de información debido a muestreo lento.

1.2. Operaciones de muestreo

Definición: El instante de muestreo k -ésimo es denotado por t_k ($k = 0, 1, \dots$) y el intervalo entre muestras sucesivas

$$T_k = t_{k+1} - t_k$$

se llama el k -ésimo período de muestreo.

Varias operaciones de muestreo pueden ser caracterizadas como sigue:

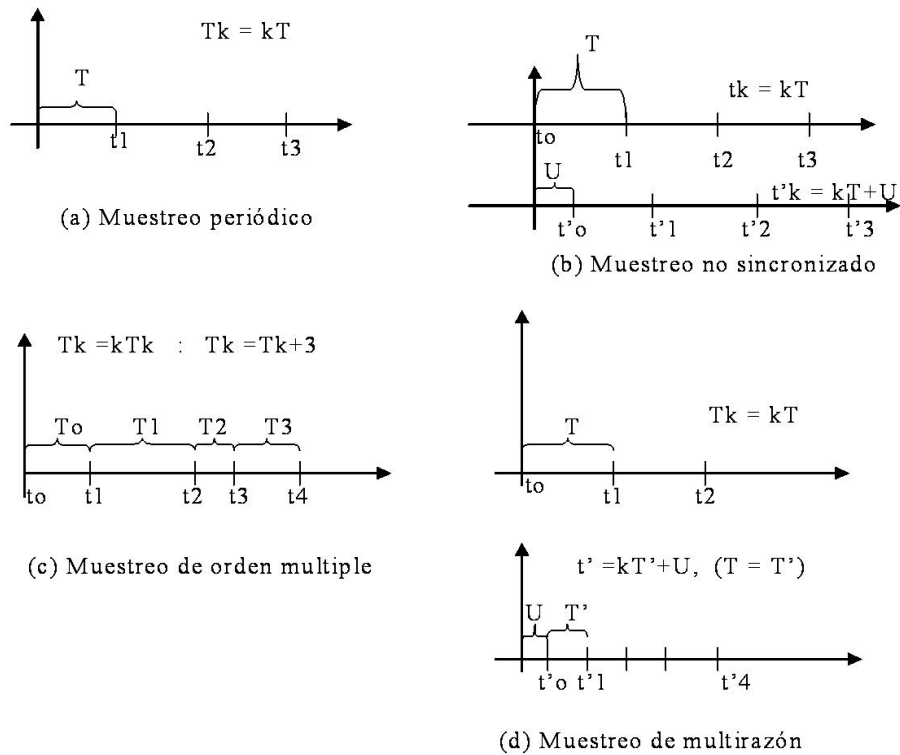
Muestreo periódico. $T_k = h$ que es constante para todo k , para este caso $t_k = kh$, se dice que la señal está muestreada periódicamente, a h se le define como el período de muestreo y a $f_s = (1/h)$ se le llama la frecuencia de muestreo.

Muestreo no sincronizado. Si t_k, t'_k denotan los instantes en que dos diferentes operaciones de muestreo ocurren, entonces $t'_k = t_k + U$ para todo k , donde U es una constante positiva.

Muestreo de orden múltiple. El período de muestreo es una función periódica de k ; es decir, $T_k = T_{k+q}$ donde q es un entero positivo.

Muestreo Multi-Razón. Si T_k y T'_k denotan los períodos muestra de dos operaciones de muestreo diferentes, pero $T_k \neq T'_k$.

Los diferentes tipos de muestreo se observan en la figura 3



1.3. Reconstrucción de la señal de muestreo

En la parte de reconstrucción de señales existe un tipo de reconstrucción importante de señales que regularmente se utiliza en la teoría del control, el cual recibe el nombre de método de reconstrucción de orden cero (zero-order Hold en inglés), este método se define como:

$$f(t) = f(t_k) \quad \forall t, \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad (1.1)$$

y se comporta como en la figura 4. De donde se observa que esta reconstrucción de señales es constante por tramos, continua por la derecha, igual a la señal muestreada en los instantes de muestreo y el valor reconstruido es constante hasta el siguiente instante de muestreo. El método de reconstrucción de señales de orden cero permite tener diferentes períodos de muestreo,

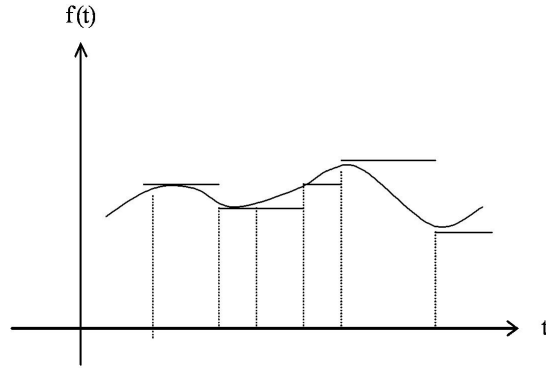


Figura 4. Reconstrucción de una señal continua por el método de cero orden

que a veces es conveniente, que se pueden utilizar en diferentes lazos de control, a esto se le llama multiproporción de muestreo (ver Araki [2] y Hagiwara [16]). Sin embargo en la reconstrucción de señales por el método de orden cero (1.1) se incurre en un error. Para calcular el error máximo se muestrea la señal en forma periódica con una primera derivada suave y se aplica la ecuación:

$$e_{zoH} = \max_k |f(t_{k+1}) - f(t_k)| \leq h \max_k |f'(t)| \quad (1.2)$$

donde f' denota la derivada de f .

La reconstrucción de primer orden se define como

$$f(t) = f(t_k) + \frac{t - t_k}{t_k - t_{k-1}} [f(t_k) - f(t_{k-1})], \quad t_k \leq t < t_{k+1} \quad (1.3)$$

Así ésta reconstrucción se obtiene al trazar una línea entre las dos muestras más recientes

El error más grande cuando se usa una reconstrucción de primer orden es dado por

$$e_{FOH} = \max_k \max_t \left| f(t) - f(t_k) - \frac{t - t_k}{t_k - t_{k-1}} [f(t_k) - f(t_{k-1})] \right| \quad (1.4)$$

La selección de la proporción de muestreo en un sistema de control a lazo cerrado es importante y su elección dependerá de su influencia en el desempeño del sistema de control

1.4. Modelación de los sistemas muestreados.

Un sistema muestreado es un sistema en tiempo continuo (la planta) en conexión con un control de retroalimentación discreto.

Un sistema en tiempo continuo (la planta) puede ser modelado por un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) \\ y &= C(x)\end{aligned}\tag{1.5}$$

en la cual $x \in \mathbb{R}^n$ describe el estado del sistema, $y \in \mathbb{R}^m$ es la salida del sistema, la cual es una cantidad que puede ser medible, u es el control, el cual es elemento de un conjunto $U \subset \mathbb{R}^m$. Además $f : \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $C : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ son funciones continuas.

El problema principal que se plantea para este sistema continuo es su estabilización. Este problema se puede resolver (hacer que la trayectoria sea estable) al seleccionar o construir un control $u(y)$ adecuadamente. Este control $u(y)$ se puede construir basándose únicamente en cantidades que pueden ser medibles, una de ellas es la salida y del sistema y como se conoce en la teoría de control si la salida es $y = C(x) = x$, al control se le llama control de retroalimentación de estados. Además se entenderá que el control de retroalimentación de salidas $u(y)$ continuo es un control que estabiliza al sistema (1.5) mediante la definición siguiente:

Definición. La función continua $u : \mathbb{R}^m \rightarrow U$ es un controlador de salidas que estabiliza el sistema (1.5) si $x = 0$ es un punto globalmente asintóticamente estable del sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{x} = f(x, u(y))\tag{1.6}$$

es decir

i) Para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $x(t)$ es solución del sistema (1.5), y $|x(0)| \leq \delta$, entonces $|x(t)| \leq \varepsilon$ para $t \geq 0$, y

ii) Toda solución $x(t)$ del sistema (1.5) satisface que $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Sin embargo su aplicabilidad en algunas ocasiones es restringida debido a retardos en la retroalimentación del control y también debido a que se conoce el valor de la salida $y = x(t)$ solamente en un número finito de valores del tiempo t . Estos tiempos t_k están separados regularmente a una distancia constante $h = t_{i+1} - t_i$ (período), esto implicará que el control de retroalimentación es discontinuo (discreto); es decir la función $u(y)$ es discreta.

El control discreto $u(x)$ que se propondrá en este trabajo inicialmente para tratar de estabilizar el sistema (1.5) es un control de retroalimentación de estados lineal que tiene la forma:

$$u(x) = Kx[t] \tag{1.7}$$

en donde $[t]$ denota la función máximo entero, la cual se define por medio de la expresión siguiente:

$$[t] = \text{máx} \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq t\}$$

y se representa gráficamente mediante la figura 5.

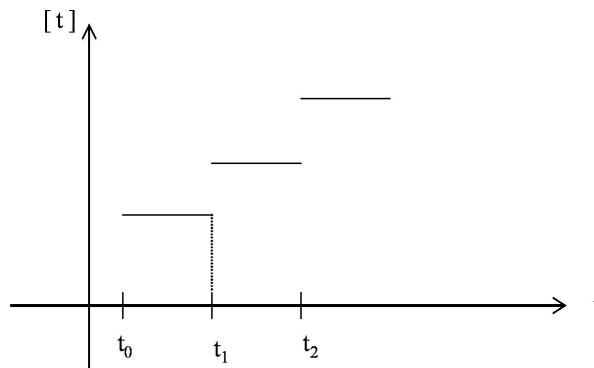


Figura 5. Gráfica de la función máximo entero.

1.5. Ventajas de usar un sistema muestreado

La ventaja de usar un control discreto (en lugar de uno continuo) en un sistema continuo en el tiempo es que el control discreto puede implementar una computadora digital; por lo cual se facilita el uso de cálculos no lineales, se puede incorporar una lógica, así como incorporar tablas usadas para el almacenamiento de datos a fin de acumular un conocimiento de las propiedades del sistema.

Aunque el problema de diseñar un control discreto para un sistema lineal continuo se puede resolver usando primero la teoría de control de tiempo continuo, diseñando un control continuo y después muestrear el sistema a lazo cerrado continuo, obteniendo un sistema discreto muy próximo al sistema continuo. Un ejemplo en que se muestra este tipo de solución aproximada discreta a un sistema continuo es en el sistema doble integrador.

El proceso del doble integrador es descrito por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} = u, \quad (1.8)$$

si se definen $y = x_1$ y $\frac{dy}{dt} = x_2$, la ecuación diferencial anterior se representa en la forma espacio estado por:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (1.9)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \quad (1.10)$$

donde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Este sistema (doble integrador) se puede controlar por una retroalimentación de estados de la forma:

$$u(k) = K[u_c(k) - Y(k) - T_D \dot{Y}(k)] = K[e(k) - T_D \dot{Y}(k)], \quad (1.11)$$

donde u_c es el valor de referencia, $K > 0$ es el valor de ganancia, $\dot{Y}(k)$ es la derivada de la salida, T_D es un parámetro, a este tipo de controlador se le conoce como control descarga (control deadbeat en inglés).

Al hacer una simulación del sistema doble integrador controlado por una ley de retroalimentación de estados continuo (control descarga) y por otro lado por un control discreto equivalente, para valores de los parámetros $K = 0.5$, $T_D = 1.5$ y período de muestreo $h = 0.2$, se obtienen los resultados que se pueden observar en la siguiente figura 6. Como es de esperarse si el

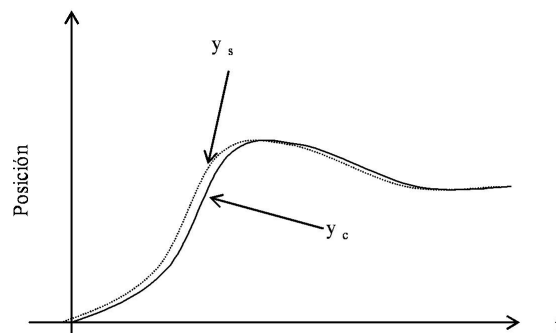


Figura 6 Respuesta de paso del sistema doble integrador con retroalimentación de estados y c es la solución en tiempo continuo y s es la aproximación muestreada con periodo 0.2

período de muestreo es pequeño el control digital tiene el mismo desempeño que el continuo, ver figura 6. En base a lo anterior se podría pensar que la teoría de los sistemas muestreados no sería necesaria. Sin embargo se puede mostrar mediante el mismo ejemplo anterior del doble integrador (Astrom [3]) que este sistema se estabiliza más rápidamente en un tiempo finito con un control construido de un sistema muestreado que de un sistema continuo. Esto es explicado a continuación.

Si el sistema doble integrador se controla con una retroalimentación de estados discreto, igual que la forma anterior (con un control descarga), pero ahora con los valores de los parámetros $K = 1$, $T_D = 1.5$ y período de muestreo $h = 1$, diferentes a los anteriores parámetros, entonces al hacer una simulación se obtienen los resultados que se pueden ver en la Figura 7.

Al hacer una comparación entre las Figuras 6 y 7 se observa que en la Figura 7 el sistema se estabiliza más rápido que el sistema continuo simulado

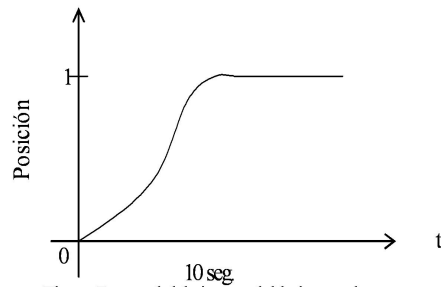


Figura 7 control del sistema doble integrador con una estrategia de descarga. El periodo es de 1 segundo

en la Figura 6. Además en la Figura 7 la señal del sistema se estabiliza sobre una constante después de un tiempo finito.

Esto último no puede pasar en un sistema en tiempo continuo debido a que las soluciones (señales) de los sistemas continuos son sumas de funciones que son producto de polinomios y funciones exponenciales. También debe agregarse que el período de muestra usado en el sistema muestreado es 5 veces mas grande que el período muestreado usado en el sistema discreto que es aproximación del sistema continuo. Por lo que podemos concluir que el período de muestreo es muy importante en el desempeño del sistema.

Capítulo 2

Control de los sistemas de datos muestreados

2.1. Principales aproximaciones para diseñar el control discreto

Existen esencialmente tres aproximaciones de diseño del control discreto que estabiliza un sistema muestreado; los primeros dos son indirectos y el tercero es directo.

1. Diseño Analógico, implementación a un sistema muestreado (CTD).

Sea K un controlador continuo (analógico) para el sistema dinámico G (la planta) que permite estabilizar este sistema. Haciendo una implementación del controlador K mediante una aproximación por Hk_dS para algún K_d , un muestreo S y una reconstrucción de la señal H .

Las dos selecciones más comunes de K_d son las siguientes

a) K_d es la discretización de K , es decir $K_d = SKH$.

b) La matriz de transferencia de K_d se obtiene desde una transformación bilineal de K .

La ventaja de este método es que el diseño es ejecutado en tiempo continuo, donde las especificaciones de ejecución son más naturales. También

podemos esperar que las especificaciones analógicas sean recuperadas en el límite cuando $h \rightarrow 0$. En la práctica, sin embargo, varios problemas técnicos excluyen este supuesto. Períodos muestra pequeños requieren rapidez y de ahí más hardware costoso, por lo tanto hay un intercambio entre ejecución y costo, en este sentido; la mayoría de los trabajos para sistemas muestreados no lineales usan el método analógico (ver Castillo [6], Gruñe [15], Owens [34]).

2. Discretizar la planta; hacer un diseño en tiempo discreto (DTD)

Discretizar la planta significa introducir un muestreador (S) y una reconstrucción de la señal (H), esta discretización de G será definida de la siguiente forma

$$G_d = SGH$$

Por lo tanto el siguiente paso sería diseñar el controlador discreto K_d para el sistema discretizado G_d , esto se vuelve un problema de control puramente discreto Kazantzis [23], Mareels [25], Ortega [33].

La ventaja de esta aproximación es su simplicidad. Se verá que G_d es invariante en el tiempo (tiempo discreto) si G es invariante en tiempo (tiempo continuo). Pero también hay desventajas: La aproximación ignora completamente que es lo que pasa entre los instantes de muestreo (ahí puede haber grandes amplitudes inter muestra). Especificaciones de ejecución en tiempo continuo no siempre pasan a la otra en una forma obvia a especificaciones en tiempo discreto. Si h es cambiado, K_d debe ser re-diseñado (G_d depende de h en una forma complicada).

En principio este método DTD es más directo para sistemas lineales que para sistemas no lineales debido a que, para sistemas lineales, se puede obtener el modelo en tiempo discreto exacto; mientras que esto no es posible para los sistemas no lineales (sólo se puede encontrar el modelo discreto aproximado). Además el modelo discreto de un sistema lineal continuó seguirá lineal mientras que el modelo en tiempo discreto de un sistema no lineal no conserva generalmente, la estructura de los sistemas no lineales como por ejemplo, los controles relacionados entre ellos. Debido a la incapacidad de calcular

exactamente la matriz exponencial que generaría el modelo discreto exacto, para los sistemas no lineales, se usa su aproximación y de aquí se utiliza el método DTD, pero aproximado.

3. Diseño directo de datos muestreados (SDD)

Esto significa diseñar un controlador discreto K_d directamente del sistema de datos muestreados. Las obvias ventajas de este método es que este resuelve el problema de control sin ninguna aproximación y toma en cuenta lo que pasa entre los instantes de muestreo. La desventaja es que esta aproximación es difícil porque el sistema de datos muestreados es variante en el tiempo Chen y Francis [7].

La principal pregunta en los métodos CTD, DTD es si el controlador diseñado estabiliza al sistema continuo original.

En este trabajo se utilizara el método de diseño DTD pero tomando en cuenta el comportamiento del sistema entre instantes de muestreo.

2.2. Sistemas lineales discretos exactos

Un sistema lineal general expresado en su forma espacio estado es :

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.1)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2.2)$$

que tiene r entradas, p salidas y es de orden n .

Ahora si conocemos los estados x en los instantes muestra t_k , es decir conocemos $x(t_k)$, y utilizamos la reconstrucción de señales de orden cero entonces una solución del sistema es

$$x(t) = e^{A(t-t_k)}x(t_k) + \int_{t_k}^t e^{A(t-s')}Bu(s')ds' \quad (2.3)$$

El estado en el siguiente instante t_{k+1} se obtiene a partir de:

$$x(t_{k+1}) = e^{A(t_{k+1}-t_k)}x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-s')}Bu(s')ds' \quad (2.4)$$

y como $u(t)$ es constante entre los instantes de muestreo, obtenemos:

$$x(t_{k+1}) = e^{A(t_{k+1}-t_k)}x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-s')}ds' Bu(t_k)$$

por lo tanto

$$x(t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1}, t_k)x(t_k) + \Gamma(t_{k+1}, t_k)u(t_k). \quad (2.5)$$

Obsérvese que el vector estado en el tiempo t_{k+1} es una función lineal de $x(t_k)$ y $u(t_k)$. Si los tiempos de conversión de señales de A-D y D-A son insignificantes la entrada u y la salida y pueden ser observadas como una muestra

en los mismos instantes, esto implica que el sistema discreto equivalente del sistema continuo es:

$$x(t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1}, t_k)x(t_k) + \Gamma(t_{k+1}, t_k)u(t_k). \quad (2.6)$$

$$y(t_k) = Cx(t_k) \quad (2.7)$$

en donde:

$$\Phi(t_{k+1}, t_k) = e^{A(t_{k+1}-t_k)} \quad (2.8)$$

$$\Gamma(t_{k+1}, t_k) = \int^{t_{k+1}-t_k} e^{As} ds B \quad (2.9)$$

Para una muestra periódica, de período h , los instantes de muestreo se expresan como $t_k = kh$ y el sistema continuo se simplifica a un modelo discreto invariante en el tiempo siguiente:

$$x(kh + h) = \Phi x(kh) + \Gamma u(kh). \quad (2.10)$$

$$y(kh) = Cx(kh) \quad (2.11)$$

en donde

$$\Phi = e^{Ah} \quad (2.12)$$

$$\Gamma = \int_0^h e^{As} ds B \quad (2.13)$$

Las matrices Φ y Γ pueden ser calculadas a partir de:

a)

$$\Phi = I + A\Psi$$

$$\Gamma = \Psi B$$

donde

$$\Psi = \int_0^h e^{As} ds = Ih + \frac{Ah^2}{2!} + \frac{A^2h^3}{3!} + \dots + \frac{A^i h^{i+1}}{(i+1)!} + \dots$$

Otras formas de calcular las matrices Φ y Γ es mediante:

b) La Transformada de Laplace, ya que $\mathcal{L}(\exp(At)) = (sI - A)^{-1}$.

c) Theorema de Cayley-Hamilton (Astron, Apéndice B).

d) Transformación a la forma de Jordan.

Para el caso particular del sistema doble integrador los valores de las matrices Φ y Γ son:

$$\Phi = e^{Ah} = I + Ah + \frac{Ah^2}{2!} + \dots$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$\Gamma = \int_0^h \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} \frac{h^2}{2} \\ h \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

2.2.1. Solución del sistema de ecuaciones diferenciales discreto

El sistema discreto invariante en el tiempo se puede describir por la ecuación en diferencias

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned}$$

Para resolver este sistema se supone que $x(k_0)$ y las señales de entrada $u(k_0), u(k_0+1)$ son conocidas. El método que se utiliza es el iterativo siguiente

$$\begin{aligned}
 x(k_0 + 1) &= \Phi x(k_0) + \Gamma u(k_0) \\
 x(k_0 + 2) &= \Phi x(k_0 + 1) + \Gamma u(k_0 + 1) \\
 &= \Phi^2 x(k_0) + \Phi \Gamma u(k_0) + \Gamma u(k_0 + 1) \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 x(k) &= \Phi^{k-k_0} x(k_0) + \sum_{j=k_0}^{k-1} \Phi^{k-j-1} \Gamma u(j)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto a partir de las ecuaciones (2.10), (2.11), (2.14) y (2.15) el sistema discreto equivalente del doble integrador continuo es:

$$X(kh + h) = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X(kh) + \begin{bmatrix} \frac{h^2}{2} \\ h \end{bmatrix} u(kh). \quad (2.16)$$

$$Y(kh) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} X(kh). \quad (2.17)$$

2.3. Aplicación del método CTD por Karl J. Astrom

Para hallar el control proporcional discreto de un sistema lineal continuo general (sistema 2.1 - 2.2) primero proponemos un control de la forma:

$$u(t) = Mu_c(t) - LX(t), \quad (2.18)$$

para el sistema continuo, de donde el sistema(2.1, 2.2) se convierte en:

$$\dot{X} = (A - BL)X(t) + BMu_c \quad (2.19)$$

$$Y(t) = CX(t). \quad (2.20)$$

Si $u_c(t)$ es constante sobre el período muestra, entonces

$$X(kh + h) = \Phi_c X(kh) + \Gamma_c Mu_c(kh). \quad (2.21)$$

en donde

$$\Phi_c = e^{A_c h} \quad (2.22)$$

$$\Gamma_c = \int_0^h e^{A_c s} ds B \quad (2.23)$$

Por otro lado supongamos que el controlador en tiempo discreto es

$$u(kh) = \bar{M}u_c(kh) - \bar{L}X(kh) \quad (2.24)$$

entonces

$$X(kh + h) = (\Phi - \Gamma\bar{L})X(kh) + \Gamma\bar{M}u_c(kh), \quad (2.25)$$

donde Φ y Γ son las matrices obtenidas cuando el sistema (2.1 - 2.2) es muestreado. En general no es posible seleccionar \bar{L} tal que

$$\Phi_c = \Phi - \Gamma\bar{L}$$

Sin embargo se puede hacer una expansión en serie y eliminar términos de potencias diferentes de h . suponemos que :

$$\bar{L} = L_0 + L_1\frac{h}{2},$$

entonces los sistemas (2.21) y (2.25) tienen los mismos polos si :

$$\bar{L} = L[I + (A - BL)\frac{h}{2}], \quad (2.26)$$

la \bar{M} se determina al suponer que los estados estacionarios son los mismos para los sistemas (2.21) y (2.25).

$$\bar{M} = (I - LB\frac{h}{2})M. \quad (2.27)$$

Para el sistema doble integrador (sistema 1.9 - 1.10), si consideramos el control en tiempo continuo:

$$u(t) = u_c(t) - [1 \quad 1] X(t)$$

entonces el control discreto del sistema doble integrador es :

$$u(kh) = (1 - 0.5h)u_c(kh) - [1 - 0.5h \quad 1] X(kh)$$

Capítulo 3

Estabilidad de los sistemas discretos

3.1. Prueba de estabilidad de los sistemas discretos

Consideremos un sistema discreto en el espacio estado (posiblemente no lineal y variante en el tiempo) modelado por

$$x(k+1) = f(x(k)) \tag{3.1}$$

que tiene por soluciones a $x^0(k)$ y $x(k)$ donde las condiciones iniciales son $x^0(k_0)$ y $x(k_0)$, respectivamente. En seguida se dan las definiciones de estabilidad y estabilidad asintótica de la solución del sistema discreto (3.1)

Definición Estabilidad. La solución $x^0(k)$ de (3.1) es estable si para cualquier $\epsilon > 0$, existe un $\delta(\epsilon, k_0) > 0$ tal que todas las soluciones $|x(k_0) - x^0(k_0)| < \delta$ son tal que $|x(k) - x^0(k)| < \epsilon$ para todo $k \geq k_0$.

Definición Estabilidad asintótica. La solución $x^0(k)$ de (3.1) es estable asintóticamente si esta es estable y si $\|x(k) - x^0(k)\| \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$ con tal que $\|x(k_0) - x^0(k_0)\|$ es suficientemente pequeño.

Consideremos el sistema lineal

$$x(k+1) = \Phi x(k), \quad x(0) = a \quad (3.2)$$

que tiene solución

$$x(k) = \Phi^k x(0). \quad (3.3)$$

Si es posible diagonalizar Φ , entonces la solución es una combinación de términos λ_i^k , donde λ_i , $i = 1, \dots, n$. son los valores propios de Φ (Método de diagonalización de Jordan). En el caso general cuando Φ no se puede diagonalizar la solución es una combinación de los términos $p_i(k)\lambda_i^k$, donde $p_i(k)$ son polinomios en k que tienen un orden que es una unidad menor que la multiplicidad de los valores propios correspondientes (Método de Cayley-Hamilton).

Teorema 3.1 Un sistema lineal discreto invariante en el tiempo (3.2) es estable asintóticamente si y solo si todos los valores propios de Φ se encuentran estrictamente dentro del círculo unitario. Demostración. Ver Wiener [39]

Definición. Un sistema lineal invariante en el tiempo es estable entrada-acotada-salida-acotada(BIBO stability en inglés) si una entrada acotada produce una salida acotada para todo valor inicial.

Teorema 3.2 Estabilidad asintótica implica estabilidad y estabilidad BIBO. Demostración. Ver Astrom [3]

Observación: Se puede mostrar mediante el ejemplo del oscilador armónico que la estabilidad no implica la estabilidad BIBO y viceversa. Ver Astrom [3]

3.1.1. Pruebas de estabilidad

Algunas formas de determinar la estabilidad de un sistema discreto son las siguientes:

- a) Cálculo directo de los valores propios de Φ .
- b) Método que se basa en las propiedades del polinomio característico
- c) El método lugar-raíz.
- d) El criterio de Nyquist.

e) Método de Lyapunov.

Del teorema (3.1) se sigue que una forma directa de probar la estabilidad de un sistema es mediante el cálculo de los valores propios de la matriz Φ , que fácilmente se pueden calcular con el paquete de Matlab. Sin embargo este método de cálculo de los valores propios no es recomendable cuando la matriz tiene parámetros en sus coeficientes.

En otros casos es más fácil calcular el polinomio característico

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 \quad (3.4)$$

Observación: El polinomio característico es el denominador polinomial de la función transferencia de pulso.

La prueba de estabilidad puede ser obtenida investigando condiciones sobre las raíces del polinomio.

En esta tesis nos enfocaremos solamente en la prueba de estabilidad que se basa en las propiedades del polinomio característico. Las otras pruebas de estabilidad se pueden consultar en el libro de Astrom [3]

3.2. Criterios para la estabilidad de polinomios

La prueba de estabilidad se puede obtener al investigar condiciones para que los ceros de un polinomio estén dentro del círculo unitario. De lo anterior surge la definición de polinomio Schur.

Definición Un polinomio,

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$$

se dice que es un polinomio Schur si todas sus raíces se encuentran en el círculo unitario abierto del plano complejo. Una condición necesaria para la estabilidad Schur es $|a_n| > |a_0|$.

3.2.1. Criterio de Schur-Cohn

Una prueba directa que establece las condiciones necesarias y suficientes para que un polinomio sea Schur estable es el desarrollado por Schur-Cohn que dice lo siguiente(ver Jury [21]).

Consideremos los siguientes determinantes asociados al polinomio (3.4)

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_{n-k+1} \\ a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n & \cdots & a_{n-k+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k-1} & a_{k-2} & a_{k-3} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \\ \bar{a}_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \cdots & \bar{a}_{k-1} \\ \bar{a}_{n-1} & \bar{a}_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & \bar{a}_0 & \cdots & \bar{a}_{k-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{a}_{n-k+1} & \bar{a}_{n-k+2} & \bar{a}_{n-k+3} & \cdots & \bar{a}_n & 0 & 0 & \cdots & \bar{a}_0 \end{vmatrix}$$

donde $k = 1, 2, \dots, n$

y $\bar{a}_k =$ conjugado de a_k

Si todos los Δ_k 's son diferentes de cero, $P(z)$ no tiene ceros sobre el círculo unitario y N números de ceros dentro el círculo que es igual al número de variaciones en signo en la sucesión de determinantes $1, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$.

Para que un sistema discreto sea estable todas las raíces del polinomio característico deben estar dentro del círculo unitario, lo cual significa que la sucesión de determinantes $1, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ debe tener n variaciones de signo, donde n es el orden del polinomio característico.

Así el criterio de estabilidad puede ser formulado como

$$\Delta_k < 0, \quad k \text{ impar} \quad (3.5)$$

$$\Delta_k > 0, \quad k \text{ par} \quad (3.6)$$

Para polinomios de grado dos, $n = 2$ las condiciones para los determinantes $1, \Delta_1, \Delta_2$ son:

$$\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0$$

Esto establece dos cambios de signo necesarios para que las raíces del polinomio característico estén dentro del círculo unitario.

En este caso

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_0^2 - a_2^2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & 0 & a_2 \\ a_2 & 0 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & 0 & a_0 \end{vmatrix} = (a_0^2 - a_2^2)^2 - a_1^2(a_0 - a_2)^2$$

las condiciones de estabilidad serían

$$a_0^2 - a_2^2 < 0$$

$$(a_0^2 - a_2^2)^2 - a_1^2(a_0 - a_2)^2 > 0$$

que se pueden expresar en función del valor absoluto y son equivalentes a

$$|a_2| > |a_0| \quad (3.7)$$

$$|a_1| < |a_2 + a_0| \quad (3.8)$$

Similarmente, para un polinomio de tercer grado $P(z) = a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$, $n = 3$ los determinantes $1, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ quedan expresados como:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_3 \\ a_3 & a_0 \end{vmatrix} = a_0^2 - a_3^2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & a_3 & a_2 \\ a_1 & a_0 & 0 & a_3 \\ a_3 & 0 & a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 & 0 & a_0 \end{vmatrix} = (a_0^2 - a_3^2)^2 - (a_1(a_3 - a_0a_2))^2$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_3 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & 0 & 0 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = a_0^2 - a_3^2)^3 + (a_0a_2 - a_1a_3)^2(2a_3^2 - 2a_0^2 + a_2^2 - a_1^2) + (a_0a_1 - a_2a_3)^2(a_3^2 - a_0^2 + 2a_0a_2 - 2a_1a_3).$$

Las condiciones de estabilidad serían

$$\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 < 0$$

estas condiciones son equivalentes a

$$|a_3| > |a_0|, \quad (3.9)$$

$$|a_0a_2| < |a_3^2 - a_0^2|, \quad (3.10)$$

$$|a_0 + a_2| < |a_3|. \quad (3.11)$$

Lo que indica que hay tres cambios de signo para asegurar que tres raíces del polinomio característico están dentro del círculo unitario.

Ejemplo

Si consideramos el polinomio de grado 3, $P(z) = 2z^3 + z^2 + z - 0.5$ entonces los valores de los deltas son:

$$\Delta_1 = (-0.5)^2 - (2)^2 = -3.75 < 0$$

$$\Delta_2 = (0.25 - 4)^2 - [1(2) - 0.5(1)]^2 = \left(-\frac{15}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{189}{16} > 0$$

$$\Delta_3 = (0.25 - 4)^3 + (-0.5 - 2)^2(8 - 0.5 + 1 - 1) + (-0.5 - 2)^2(4 - 0.25 - 1 - 4) = -\frac{975}{64} < 0$$

De donde se observa que los deltas satisfacen las condiciones del criterio de Schur-Cohn. Por lo tanto este polinomio de grado tres si tendría todas sus raíces dentro del círculo unitario. Esto último se puede comprobar al obtener las raíces del polinomio, éstas son $z_1 = -0.412657 - 0.773434i$, $z_2 = -0.412657 + 0.773434i$ y $z_3 = 0.325315$

3.2.2. Criterio de Routh-Hurwitz

El criterio de Routh-Hurwitz es un método alternativo para determinar si el polinomio (3.4) tiene todas sus raíces en el semi plano izquierdo. La transformación de Möbius bilineal

$$w = \frac{z + 1}{z - 1} \tag{3.12}$$

mapea el disco unitario que esta en el plano z al semiplano izquierdo del plano w . por lo tanto la transformación de Möbius puede ser aplicada al polinomio (5.7) y después usar el criterio de Routh-Hurwitz.

Sin embargo es mejor tener condiciones que digan directamente si un polinomio tiene todas sus ceros dentro del círculo unitario. Uno de estos criterios es el de Schur, Cohn y Jury que a continuación describiremos ampliamente.

3.2.3. Criterio de Jury

Este criterio, fue desarrollado por Schur, Cohn y Jury. en el que se determina si el polinomio (3.4) tiene todas sus raíces dentro del círculo unitario.

De la tabla

$$\begin{array}{cccccc}
 a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 & \\
 a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n & \alpha_n = \frac{a_0}{a_n} \\
 \\
 a_n^{n-1} & a_{n-1}^{n-1} & \dots & a_1^{n-1} & & \\
 a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} & & \alpha_{n-1} = \frac{a_1^{n-1}}{a_n^{n-1}} \\
 \\
 \cdot & & & & & \\
 \cdot & & & & & \\
 \\
 \cdot & & & & & \\
 \\
 a_n^0 & & & & &
 \end{array}$$

donde

$$a_i^{k-1} = a_i^k - \alpha_k a_{k-i}^k \quad (3.13)$$

$$\alpha_k = \frac{a_k^k}{a_n^k} \quad (3.14)$$

La primera y segunda fila son los coeficientes del polinomio (3.4) de izquierda a derecha y viceversa respectivamente. La tercera fila se obtiene de multiplicar la segunda por $\alpha_n = \frac{a_0}{a_n}$ y restando el resultado a la primera fila. El último elemento en la tercera fila es cero. La cuarta fila es la tercera fila en orden inverso. El esquema se repite hasta que aparezcan $2n+1$ filas. La última fila consiste de solo un elemento, de donde se obtiene el teorema de prueba de estabilidad de Jury:

Teorema 3.3 (Prueba de estabilidad de Jury) Si $a_n > 0$, entonces el polinomio (3.4) tiene todas sus raíces dentro del círculo unitario si y solo si todas las a_n^k , $k = 0, 1, \dots, n-1$ son positivos. Si ningún a_n^k es cero, entonces, el número de a_n^k negativos es igual al número de raíces fuera del círculo unitario.

Obsérvese que si todas las a_n^k son positivas para $k = 0, 1, \dots, n-1$, entonces la condición $a_n^0 > 0$ es equivalente a las condiciones

$$P(1) > 0 \tag{3.15}$$

$$(-1)^n P(-1) > 0 \tag{3.16}$$

Estas son las condiciones necesarias de estabilidad y deberán revisarse antes de formar la tabla.

Ejemplo

Sea $P(z) = 2z^3 + z^2 + z - 0.5$.

Revisemos primero las condiciones necesarias de estabilidad (3.15) y (3.16).

$$P(1) = 2 + 1 + 1 - 0.5 = 3.5 > 0.$$

$$(-1)^3 P(-1) = (-1)(-2 + 1 - 1 - 0.5) = 2.5 > 0$$

Se observa que el polinomio si cumple las condiciones necesarias. Ahora formaremos la tabla para revisar si el polinomio satisface las condiciones suficientes:

2	1	1	-0.5	
-0.5	1	1	2	$\alpha_3 = \frac{-0.5}{2} = -\frac{1}{4}$
$\frac{15}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$		
$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{15}{8}$		$\alpha_2 = \frac{2}{3}$
$\frac{25}{24}$	$\frac{5}{12}$			
$\frac{5}{12}$	$\frac{25}{24}$			$\alpha_1 = \frac{2}{5}$
$\frac{105}{120}$				

Como $a_3 = 2 > 0$, $a_3^0 = \frac{105}{120}$, $a_3^1 = \frac{25}{24}$ y $a_3^2 = \frac{15}{8}$ son positivos, entonces por la prueba de estabilidad de Jury este polinomio tiene todas sus raíces dentro del círculo unitario.

3.2.4. Test de estabilidad tipo schur

En seguida establecemos una relación entre polinomios Schur de grado n y polinomios Schur de grado $n - 1$. Para esto consideramos al polinomio $P(z)$ de grado n como en la anterior definición y a los polinomios $Q(z)$ y $R(z)$ definidos de la siguiente forma

$$Q(z) = z^n P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \bar{a}_0 z^n + \bar{a}_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + \bar{a}_n, \quad (3.17)$$

$$R(z) = \frac{1}{z} \left[P(z) - \frac{a_0}{a_n} Q(z) \right]. \quad (3.18)$$

Se puede ver que el grado del polinomio $R(z)$ es siempre menor que o igual a $n - 1$. El siguiente lema será importante en la demostración por inducción del resultado principal (Teorema 4.2) porque permite reducir el grado del polinomio que esta a prueba sin perder información de estabilidad.

Lema 1. Si $P(z)$ satisface $|a_n| > |a_0|$, entonces se obtiene la equivalencia siguiente

$P(z)$ es un polinomio Schur si y solo si $R(z)$ es un polinomio Schur.

Demostración. Ver Bhattacharyya [4].

Ejemplo

Si $P(z) = b_3 z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0$, entonces $Q(z) = b_0 z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3$. y

$$\begin{aligned} R(z) &= \frac{1}{z} \left[P(z) - \frac{b_0}{b_3} Q(z) \right] \\ &= \frac{1}{b_3} [(b_3^2 - b_0^2) z^2 + (b_2 b_3 - b_0 b_1) z + (b_1 b_3 - b_0 b_2)], \end{aligned}$$

que es un polinomio que tiene un grado menos que el del polinomio $P(z)$. Y es más fácil verificar si es Schur debido a que podemos utilizar las siguientes condiciones de estabilidad de un polinomio de grado dos (ver Jury [21]).

El polinomio $S(z) = c_2 z^2 + c_1 z + c_0$ es Schur estable si y solo si

$$|c_2| > |c_0|$$

$$|c_1| < |c_2 + c_0|.$$

Para ilustrar el Lema 1 a un ejemplo numérico se fijan los valores de los coeficientes b_3, b_2, b_1, b_0 de un polinomio de grado 3. Considere $b_3 = 1, b_2 = -0.5, b_1 = -0.5, b_0 = 0.25$ entonces

$$P(Z) = z^3 - 0.5z^2 - 0.5z + 0.25$$

$$Q(Z) = 0.25z^3 - 0.5z^2 - 0.5z + 1$$

$$R(Z) = 0.9375z^2 - 0.375z - 0.37$$

Se observa que $P(z)$ satisface la condición del Lema 1 ($|b_3| > |b_0|$). $R(z)$ cumple con las condiciones de Jury, lo cual implica que, $R(z)$ es Schur. En efecto $R(z) = 0$ si y solo si $\lambda_1 = -0.4633$ y $\lambda_2 = 0.8633$. Por lo tanto por el Lema 1 $P(z)$ es Schur estable. Esto se comprueba dado que $P(z) = 0$ si y solo si $\lambda_1 = -0.7071$, $\lambda_2 = 0.5$ y $\lambda_3 = 0.707$; que son raíces de módulo menor a uno.

Capítulo 4

Estabilización de un sistema lineal de datos muestreados por un control con retardo en el tiempo.

4.1. Sistema muestreado con retardo en el control

Un sistema lineal muestreado con retardo fijo en el tiempo en el control de retroalimentación es un sistema continuo tal que el control de retroalimentación del sistema a lazo cerrado es discreto y tiene un retardo r , es decir

$$\dot{X} = Ax(t) + bu_{k-r}(t) \quad (4.1)$$

$$u_{k-r}(t) = Kx\left(\left[\frac{t}{h}\right]h - r\right)$$
$$h = t_{k+1} - t_k$$

donde $[\alpha]$ denota la parte entera de α , A es una matriz $n \times n$, $b \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}$, y h es el intervalo entre los instantes muestras sucesivos t_k y t_{k+1} . A h lo consideraremos constante, es decir h es el período de muestreo y para

este caso se tiene $t_k = kh$. Nosotros estudiaremos el problema de estabilizar el sistema (4.1) para el caso uni-dimensional y retardo arbitrario fijo r , esto es, nosotros consideraremos la ecuación diferencial

$$\dot{x} = ax(t) + bu_{k-r}(t), \quad (4.2)$$

donde a y b son constantes dadas. Nuestro problema es hallar los valores de los parámetros K (ganancia) y del período de muestreo h tal que el control discreto (zero-order hold) con retardo arbitrario r

$$u_{k-r} = Kx\left(\left[\frac{t}{h}\right]h - r\right) \quad (4.3)$$

hace al sistema (4.2) estable asintóticamente. El tiempo de retardo será considerado un entero múltiplo del período de muestreo h en el sentido que $r = Nh$, donde N es un número natural.

Para resolver el problema de estabilidad del sistema (4.2) mediante el control (4.3) primero se hallará su sistema discreto equivalente. Esto se realizará con el procedimiento hecho en la sección 2.2.

Para $t \in [kh, kh + h)$; la función $x(\left[\frac{t}{h}\right]h - Nh)$ es constante y la solución de la ecuación diferencial (4.2) es:

$$x(t) = e^{a(t-kh)}x(kh) + \int_0^{t-kh} e^{a\tau} d\tau bKx(kh - Nh)$$

de donde por continuidad,

$$x((k+1)h) = e^{a(kh+h-kh)}x(kh) + \int_0^{kh+h-kh} e^{a\tau} d\tau bKx(kh - Nh)$$

de donde

$$x((k+1)h) = e^{ah}x(kh) + \int_0^h e^{a\tau} d\tau bKx(kh - Nh) \quad (4.4)$$

Ahora si se define:

$$A_D = e^{ah}, \quad B_D = \int_0^h e^{a\tau} d\tau b \quad \text{y} \quad \varepsilon(k) = x(kh)$$

de la ecuación (4.4) se obtiene la ecuación en diferencias :

$$\varepsilon(k+1) = A_D\varepsilon(k) + B_D K\varepsilon(k-N) \quad (4.5)$$

Sea $J = k - N$, entonces $k = J + N$ y $k + 1 = J + N + 1$

A partir de esta definición, la ecuación en diferencias anterior (4.5) se convierte en una ecuación en diferencias de orden $N + 1$ homogénea:

$$\varepsilon(J + N + 1) - A_D \varepsilon(J + N) - B_D K \varepsilon(J) = 0 \quad (4.6)$$

Esta ecuación en diferencias de orden $N+1$ homogénea se puede reescribir como un sistema de $N+1$ ecuaciones en diferencias de orden uno:

Sea

$$\begin{aligned} \varepsilon(J) &= x_1(J) \\ \varepsilon(J + 1) &= x_1(J + 1) = x_2(J) \\ \varepsilon(J + 2) &= x_2(J + 1) = x_3(J) \\ \varepsilon(J + 3) &= x_3(J + 1) = x_4(J) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \varepsilon(J + N) &= x_N(J + 1) = x_{N+1}(J) \\ \varepsilon(J + N + 1) &= x_{N+1}(J + 1). \end{aligned}$$

Además de la ecuación (4.6)

$$\varepsilon(J + N + 1) = A_D \varepsilon(J + N) + B_D K \varepsilon(J)$$

de donde:

$$\varepsilon(J + N + 1) = A_D x_{N+1}(J) + B_D K x_1(J) \quad (4.7)$$

Por lo tanto el sistema de ecuaciones en diferencias de orden uno es:

$$\begin{aligned} x_1(J + 1) &= x_2(J) \\ x_2(J + 1) &= x_3(J) \\ x_3(J + 1) &= x_4(J) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ x_N(J + 1) &= x_{N+1}(J) \end{aligned}$$

$$x_{N+1}(J+1) = A_D x_{N+1}(J) + B_D K x_1(J)$$

En forma matricial este sistema se expresa como :

$$X(J+1) = AX(J) \tag{4.8}$$

En donde :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ B_D K & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_D \end{bmatrix} \quad X(J) = \begin{bmatrix} x_1(J) \\ x_2(J) \\ x_3(J) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_N(J) \\ x_{N+1}(J) \end{bmatrix}$$

Para establecer las condiciones de estabilidad del sistema de ecuaciones en diferencias de orden uno obtendremos el polinomio característico de la matriz A y después aplicaremos el método (b) del capítulo 3 que se basa en las propiedades del polinomio característico.

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

es decir

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 \\ -B_D K & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - A_D \end{vmatrix}$$

de donde

$$P(\lambda) = \lambda^{N+1} - A_D \lambda^N - B_D K \tag{4.9}$$

Así el problema de estabilizar al sistema (4.2) es equivalente a dar condiciones sobre los coeficientes del polinomio característico (4.9) de modo que éste sea un polinomio Schur.

4.2. Condiciones de estabilidad de un sistema muestreado con retardo en el control.

Consideremos el polinomio $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_0$ tal que $-\frac{n}{n-1} < \frac{a_{n-1}}{a_n} < -1$. Nuestro objetivo en este trabajo es dar valores al coeficiente a_0 , de modo que $P(z)$ sea Schur estable. Nuestro resultado es el siguiente:

Si escogemos $a_0 = -a_{n-1} + a_n(\epsilon - 1)$ tendremos que $P(z)$ es Schur estable si ϵ satisface la desigualdad

$$0 < \epsilon < \frac{3n}{2n-1} + \frac{3(n-1)}{2n-1} \frac{a_{n-1}}{a_n}. \quad (4.10)$$

Comenzamos estableciendo el resultado cuando el grado de $P(z)$ es dos (de hecho aquí se tienen condiciones necesarias y suficientes). Tal resultado fue presentado en [14].

TEOREMA 4.1. Sea $P(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ un polinomio tal que $-2 < \frac{a_1}{a_2} < -1$, donde $a_0 = -a_1 + a_2(\epsilon - 1)$. Entonces $P(z)$ es Schur estable si y solo si ϵ satisface la desigualdad

$$0 < \epsilon < 2 + \frac{a_1}{a_2}. \quad (4.11)$$

Demostración.

$P(z)$ es Schur estable si y solo si sus coeficientes cumplen las desigualdades (Estas desigualdades se establecieron en las desigualdades (3.7) y (3.8) de la sección 3.2) ver Jury [21]:

$$|a_2| > |a_2(\epsilon - 1) - a_1| \quad y$$

$$|a_1| < |a_2 + a_2(\epsilon - 1) - a_1|.$$

si y solo si

$$a_2^2 > [a_2(\epsilon - 1) - a_1]^2$$

$$a_1^2 < |a_2 + a_2\epsilon - a_2 - a_1|.$$

que es equivalente a

$$0 > a_2^2 \epsilon^2 - (2a_2^2 + 2a_2 a_1) \epsilon + 2a_2 a_1 + a_1^2$$

$$0 < \epsilon (a_2^2 \epsilon - 2a_2 a_1).$$

Para demostrar esta última parte definamos:

$$g(\epsilon) = a_2^2 \epsilon^2 - (2a_2^2 + 2a_2 a_1) \epsilon + 2a_2 a_1 + a_1^2.$$

Entonces

$$g(\epsilon) = 0 \Leftrightarrow \epsilon_1 = 2 + \frac{a_1}{a_2}, \epsilon_2 = \frac{a_1}{a_2}.$$

Dado que el coeficiente de ϵ^2 es positivo, $g(\epsilon) < 0$ si y solo si

$$\frac{a_1}{a_2} < \epsilon < 2 + \frac{a_1}{a_2}.$$

Por otro lado $\epsilon (a_2^2 \epsilon - 2a_2 a_1) > 0$ si y solo si $(\epsilon > 0 \text{ y } \epsilon > 2\frac{a_1}{a_2})$. Ahora dado que $\frac{a_1}{a_2} < -1$, tenemos $2\frac{a_1}{a_2} < -2$. Por lo tanto, $\epsilon (a_2^2 \epsilon - 2a_2 a_1) > 0$ si y solo si $\epsilon > 0$,

de modo que

$$[g(\epsilon) < 0 \text{ y } \epsilon (a_2^2 \epsilon - 2a_2 a_1) > 0] \text{ si y solo si } 0 < \epsilon < 2 + \frac{a_1}{a_2}.$$

Ejemplo 4.1

Considerése el polinomio característico asociado al sistema $P(\lambda) = \lambda^2 - A_D \lambda - B_D k$, donde $-B_D k = -(-A_D) + (\epsilon - 1)$. Desde la definición de A_D , se obtiene $-B_D k = e^{ah} + \epsilon - 1$, y para los valores específicos de $a = 1$, $b = 1$, se tiene $P(\lambda) = \lambda^2 - e^h \lambda + e^h + \epsilon - 1$. De acuerdo al resultado del Teorema 4.1 la condición para ϵ es $0 < \epsilon < 2 - e^h$ y la condición para h es $h < \ln 2$. Si se asigna a $\epsilon = 1.9 - e^h$ para $h = 0.5$ se obtiene que $P(\lambda) = 0$ si y solo si $\lambda = 0.82436 \pm 0.04695i$ que son raíces que tienen módulo menor a uno.

Ejemplo 4.2

En éste ejemplo se considera el caso cuando ϵ no cumple la condición del Teorema 4.1. Considere el polinomio $P(\lambda) = \lambda^2 - e^h \lambda + e^h + \epsilon - 1$ y

si se asigna a $\epsilon = 2.5 - e^h$ para $h = 0.5$ entonces $P(\lambda) = 0$ si y solo si $\lambda = 0.82436 \pm 0.90577i$ que son raíces que tienen módulo mayor a uno.

La demostración para el grado arbitrario depende del siguiente lema y de varias proposiciones técnicas cuya demostración puede consultarse en el apéndice.

LEMA 2 [14]: Fijamos un entero arbitrario $n \geq 2$. Dado $P(z) = a_{n+1}z^{n+1} + a_n z^n + a_0$ tal que $-\frac{n+1}{n} < \frac{a_n}{a_{n+1}} < -1$ y un $a_0 = -a_n + a_{n+1}(\epsilon - 1)$, definimos $Q(z) = a_0 z^{n+1} + a_n z + a_{n+1}$ y

$R(z) = \frac{1}{z} \left[P(z) - \frac{a_0}{a_{n+1}} Q(z) \right] = \frac{1}{a_{n+1}} [A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + A_0]$, donde $A_n = a_{n+1}^2 - a_0^2$, $A_0 = -a_0 a_n$. Si ϵ satisface $0 < \epsilon < \frac{3(n+1)}{2n+1} + \frac{3n}{2n+1} \frac{a_n}{a_{n+1}}$, entonces ($|a_{n+1}| > |a_0|$ y $|A_n| > |A_0|$).

Demostración.

Tenemos $|a_{n+1}| > |a_0|$ si y solo si (ver proposición A5):

$$0 < \epsilon < 2 + \frac{a_n}{a_{n+1}} \tag{4.12}$$

De aquí para probar el Lema 2, es suficiente probar que

$$\frac{3(n+1)}{2n+1} + \frac{3n}{2n+1} \frac{a_n}{a_{n+1}} < 2 + \frac{a_n}{a_{n+1}}. \tag{4.13}$$

Por cálculos directos se muestra que la desigualdad(4.13) se cumple si y solo si $\left(\frac{n-1}{2n+1}\right) \frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{n-1}{2n+1}$, que es verdadero debido a que $\frac{a_n}{a_{n+1}} < -1$.

Ahora demostraremos que $|A_n| > |A_0|$. De la definición de A_n y A_0 ,

$$\begin{aligned} |A_n| > |A_0| &\iff |a_{n+1}^2 - a_0^2| > |a_0 a_n| \\ &\iff (a_{n+1}^2 - a_0^2)^2 > (a_0 a_n)^2 \\ &\iff [(a_{n+1}^2 - a_0^2) - a_0 a_n] [a_{n+1}^2 - a_0^2 + a_0 a_n] > 0 \\ &\iff \left\{ (a_{n+1}^2 - a_0^2) - a_0 a_n > 0 \text{ y } a_{n+1}^2 - a_0^2 + a_0 a_n > 0 \right\} \\ &\quad \text{ó } \left\{ (a_{n+1}^2 - a_0^2) - a_0 a_n < 0 \text{ y } a_{n+1}^2 - a_0^2 + a_0 a_n < 0 \right\}. \end{aligned}$$

Dividiremos el análisis en los dos casos siguientes (4.14) y (4.15)

$$(a_{n+1}^2 - a_0^2) - a_0 a_n > 0 \qquad \text{y} \qquad a_{n+1}^2 - a_0^2 + a_0 a_n > 0 \tag{4.14}$$

$$\{(a_{n+1}^2 - a_0^2) - a_0 a_n < 0 \quad y \quad a_{n+1}^2 - a_0^2 + a_0 a_n < 0\} \quad (4.15)$$

Analícemos (4.14).

Por proposición A8, la primera desigualdad en (4.14), es satisfecha si y solo si

$$1 + \frac{1}{2} \frac{a_n}{a_{n+1}} - \sqrt[2]{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^2} < \epsilon < 1 + \frac{1}{2} \frac{a_n}{a_{n+1}} + \sqrt[2]{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^2}.$$

Dado que $1 + \frac{1}{2} \frac{a_n}{a_{n+1}} > 0$, se sigue $1 + \frac{1}{2} \frac{a_n}{a_{n+1}} + \sqrt[2]{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^2} > 0$.

De cálculos directos se obtiene que $1 + \frac{1}{2} \frac{a_n}{a_{n+1}} - \sqrt[2]{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^2} < 0$. Y porque $\epsilon > 0$, ϵ debe satisfacer

$$0 < \epsilon < 1 + \frac{1}{2} \frac{a_n}{a_{n+1}} + \sqrt[2]{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^2}. \quad (4.16)$$

Para la segunda desigualdad en (4.14), usamos la Proposición A9, de modo que

$a_{n+1}^2 - a_0^2 + a_0 a_n > 0$ si y solo si

$$1 + \frac{3a_n}{2a_{n+1}} - \sqrt[2]{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^2} < \epsilon < 1 + \frac{3a_n}{2a_{n+1}} + \sqrt[2]{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^2}.$$

Dado que $-\frac{n+1}{n} < \frac{a_n}{a_{n+1}} < -1$, se sigue

$$1 + \frac{3a_n}{2a_{n+1}} - \sqrt[2]{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^2} < 0 \quad (4.17)$$

y

$$1 + \frac{3a_n}{2a_{n+1}} + \sqrt[2]{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^2} > 0. \quad (4.18)$$

Ahora, como estamos interesados en $\epsilon > 0$, ϵ debe satisfacer:

$$0 < \epsilon < 1 + \frac{3a_n}{2a_{n+1}} + \sqrt[2]{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^2}. \quad (4.19)$$

Además por cálculos directos, se obtiene $1 + \frac{3a_n}{2a_{n+1}} + \sqrt[2]{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^2} < 1 + \frac{1}{2} \frac{a_n}{a_{n+1}} + \sqrt[2]{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^2}$.

Por lo tanto ambas desigualdades en (4.14) se cumplen si y solo si

$$0 < \epsilon < 1 + \frac{3a_n}{2a_{n+1}} + \sqrt[2]{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^2}. \quad (4.20)$$

Estudiamos (4.15). Por Proposición A10, la primera desigualdad de (4.15) se cumple si y solo si $[\epsilon < 1 + \frac{1}{2} \frac{a_n}{a_{n+1}} - \sqrt[2]{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^2}$ ó $\epsilon > 1 + \frac{1}{2} \frac{a_n}{a_{n+1}} + \sqrt[2]{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^2}$]. Además, por Proposición A11 la segunda desigualdad de (4.15) se cumple si y solo si

$$[\epsilon < 1 + \frac{3a_n}{2a_{n+1}} - \sqrt[2]{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^2} \quad \text{ó} \quad \epsilon > 1 + \frac{3a_n}{2a_{n+1}} + \sqrt[2]{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^2}].$$

De modo que (4.15) se satisface si y solo si

$$\epsilon < 1 + \frac{3a_n}{2a_{n+1}} - \sqrt[2]{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^2} \quad \text{ó} \quad \epsilon > 1 + \frac{1}{2} \frac{a_n}{a_{n+1}} + \sqrt[2]{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^2}. \quad (4.21)$$

Debido a que $-\frac{n+1}{n} < \frac{a_n}{a_{n+1}} < -1$, obtenemos $1 + \frac{3a_n}{2a_{n+1}} - \sqrt[2]{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^2} < 0$ y como $\epsilon > 0$ entonces la conclusión es que $|A_n| > |A_0|$ si

$$0 < \epsilon < 1 + \frac{3a_n}{2a_{n+1}} + \sqrt[2]{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^2}. \quad (4.22)$$

Ahora por hipótesis $\epsilon < \frac{3(n+1)}{2n+1} + \frac{3n}{2n+1} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ y por Proposición A12, obtenemos

$$\frac{3(n+1)}{2n+1} + \frac{3n}{2n+1} \frac{a_n}{a_{n+1}} < 1 + \frac{3a_n}{2a_{n+1}} + \sqrt[2]{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^2}. \text{ De donde se sigue}$$

$$\epsilon < 1 + \frac{3a_n}{2a_{n+1}} + \sqrt[2]{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^2} \text{ y consecuentemente } |A_n| > |A_0|.$$

Ahora demostraremos el resultado para grado arbitrario.

TEOREMA 4.2 [14]. Fijemos un entero arbitrario $n \geq 2$.

Sea $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_0$ un polinomio tal que $-\frac{n}{n-1} < \frac{a_{n-1}}{a_n} < -1$, donde $a_0 = -a_{n-1} + a_n(\epsilon - 1)$. Si ϵ satisface la desigualdad $0 < \epsilon < \frac{3n}{2n-1} + \frac{3(n-1)}{2n-1} \frac{a_{n-1}}{a_n}$, entonces tenemos que $|a_n| > |a_0|$ y $P(z)$ es un polinomio Schur estable.

Demostración (inducción sobre n).

La prueba para $n = 2$ es parte del teorema 1.

La prueba cuando el grado de P es $n + 1$ es la siguiente.

Sea $P(z) = a_{n+1} z^{n+1} + a_n z^n + a_0$ tal que

$$-\frac{n+1}{n} < \frac{a_n}{a_{n+1}} < -1 \text{ y } a_0 = -a_n + a_{n+1}(\epsilon - 1) \quad (4.23)$$

si definimos los polinomios $Q(z)$ y $R(z)$ como en el Lema 2, al sustituir $P(z)$ y $Q(z)$ en el polinomio $R(z)$, obtenemos

$$\begin{aligned} R(z) &= \frac{1}{z} \left[a_{n+1} z^{n+1} + a_n z^n + a_0 - \frac{a_0}{a_{n+1}} (a_0 z^{n+1} + a_n z + a_{n+1}) \right] \\ &= \frac{1}{z} \left[\frac{(a_{n+1}^2 - a_0^2) z^{n+1} + a_{n+1} a_n z^n - a_0 a_n z}{a_{n+1}} \right] \\ &= \frac{(a_{n+1}^2 - a_0^2) z^n + a_{n+1} a_n z^{n-1} - a_0 a_n}{a_{n+1}} \end{aligned}$$

Si $|a_{n+1}| > |a_0|$ entonces (ver Bhattacharyya [4]): $a_{n+1} R(z) = (a_{n+1}^2 - a_0^2) z^n + a_{n+1} a_n z^{n-1} - a_0 a_n$ es un polinomio Schur estable si y solo si $P(z)$ es Schur estable. La desigualdad $|a_{n+1}| > |a_0|$ se probó en el Lema 2.

Si definimos: $A_n = a_{n+1}^2 - a_0^2$, $A_{n-1} = a_{n+1} a_n$ y $A_0 = -a_0 a_n$ y dado que la desigualdad $|A_n| > |A_0|$ se satisface (se probó en el Lema 2) entonces por hipótesis de inducción el polinomio $a_{n+1} R(z) = A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + A_0$ es Schur estable si $A_0 = -A_{n-1} + A_n(\tilde{\epsilon} - 1)$ y $\tilde{\epsilon}$ satisface $0 < \tilde{\epsilon} < \frac{3n}{2n-1} + \frac{3(n-1)}{2n-1} \left(\frac{A_{n-1}}{A_n} \right)$.

De la igualdad $A_0 = -A_{n-1} + A_n(\tilde{\epsilon} - 1)$ se sigue

$$A_0 = -A_{n-1} - A_n + A_n \tilde{\epsilon}. \quad (4.24)$$

Por la igualdad (4.23), $-a_0 a_n = a_n^2 + a_n a_{n+1} - a_n a_{n+1} \epsilon$ que es equivalente

a

$$-a_0a_n = -a_na_{n+1} - (a_{n+1}^2 - a_0^2) + \left[\frac{(a_{n+1}^2 - a_0^2) + a_n^2 + 2a_na_{n+1} - a_na_{n+1}\epsilon}{a_{n+1}^2 - a_0^2} \right] (a_{n+1}^2 - a_0^2)$$

esto es

$$A_0 = -A_{n-1} - A_n + \left[\frac{(a_{n+1}^2 - a_0^2) + a_n^2 + 2a_na_{n+1} - a_na_{n+1}\epsilon}{a_{n+1}^2 - a_0^2} \right] A_n$$

comparando esta con la ecuación (4.24) se tiene que:

$$\tilde{\epsilon} = \frac{a_{n+1}^2 - a_0^2 + a_n^2 + 2a_na_{n+1} - a_na_{n+1}\epsilon}{a_{n+1}^2 - a_0^2}. \quad (4.25)$$

Además por hipótesis de inducción $\tilde{\epsilon}$ debe cumplir la condición:

$$0 < \tilde{\epsilon} < \frac{3n}{2n-1} + \frac{3(n-1)}{2n-1} \left(\frac{A_{n-1}}{A_n} \right) \quad (4.26)$$

Sustituyendo $\tilde{\epsilon}$, A_{n-1} y A_n en (4.26) obtenemos

$$0 < \frac{a_{n+1}^2 - a_0^2 + a_n^2 + 2a_na_{n+1} - a_na_{n+1}\epsilon}{a_{n+1}^2 - a_0^2} < \frac{3n}{2n-1} + \frac{3(n-1)}{2n-1} \frac{a_{n+1}a_n}{a_{n+1}^2 - a_0^2} \quad (4.27)$$

La primera desigualdad de (4.27) es equivalente a

$$0 < a_{n+1}^2 - a_0^2 + a_n^2 + 2a_na_{n+1} - a_na_{n+1}\epsilon \quad (4.28)$$

Por proposición A1 esta desigualdad se cumple si y solo si

$$0 < \epsilon < 2 + \frac{a_n}{a_{n+1}} \quad (4.29)$$

Veamos la segunda desigualdad de (4.27) que es equivalente a

$$a_{n+1}^2 - a_0^2 + a_n^2 + 2a_na_{n+1} - a_na_{n+1}\epsilon < \frac{3n(a_{n+1}^2 - a_0^2)}{2n-1} + \frac{3(n-1)}{2n-1} a_{n+1}a_n \quad (4.30)$$

Por proposición A2 la desigualdad (4.30) se cumple si y solo si

$$1 + \frac{4n+1}{2(n+1)} \frac{a_n}{a_{n+1}} - \sqrt{1 + \frac{(n-2)}{(n+1)} \frac{a_n}{a_{n+1}} + \left(\frac{n-\frac{1}{2}}{n+1} \right)^2 \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^2} < \epsilon < 1 + \frac{4n+1}{2(n+1)} \frac{a_n}{a_{n+1}} + \sqrt{1 + \frac{(n-2)}{(n+1)} \frac{a_n}{a_{n+1}} + \left(\frac{n-\frac{1}{2}}{n+1} \right)^2 \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^2}.$$

De proposición A3,

$$1 + \frac{4n+1}{2(n+1)} \frac{a_n}{a_{n+1}} - \sqrt[2]{1 + \frac{(n-2)}{(n+1)} \frac{a_n}{a_{n+1}} + \left(\frac{n-\frac{1}{2}}{n+1}\right)^2 \left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^2} < 0.$$

Por lo tanto la segunda condición (4.30) se cumple si y solo si

$$0 < \epsilon < 1 + \frac{4n+1}{2(n+1)} \frac{a_n}{a_{n+1}} + \sqrt[2]{1 + \frac{(n-2)}{(n+1)} \frac{a_n}{a_{n+1}} + \left(\frac{n-\frac{1}{2}}{n+1}\right)^2 \left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^2} \quad (4.31)$$

Además por proposición A4,

$$1 + \frac{4n+1}{2(n+1)} \frac{a_n}{a_{n+1}} + \sqrt[2]{1 + \frac{(n-2)}{(n+1)} \frac{a_n}{a_{n+1}} + \left(\frac{n-\frac{1}{2}}{n+1}\right)^2 \left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^2} \leq 2 + \frac{a_n}{a_{n+1}} \quad \forall n \geq 1$$

Así (4.28) y segunda (4.30) se cumplen si y solo si

$$0 < \epsilon < 1 + \frac{4n+1}{2(n+1)} \frac{a_n}{a_{n+1}} + \sqrt[2]{1 + \frac{(n-2)}{(n+1)} \frac{a_n}{a_{n+1}} + \left(\frac{n-\frac{1}{2}}{n+1}\right)^2 \left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^2} \quad (4.32)$$

Analicemos ahora la parte derecha de la segunda desigualdad de (4.32)

Sea

$$a = \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

$$F(a) = 1 + \frac{4n+1}{2(n+1)} a + \sqrt[2]{1 + \frac{(n-2)}{(n+1)} a + \left(\frac{n-\frac{1}{2}}{n+1}\right)^2 a^2}$$

Por proposición A7 $F(a)$ satisface:

- $F(a)$ es creciente.
- $F(a)$ es cóncava hacia arriba.

Veamos ahora cual es la ecuación de la recta tangente a la función $F(a)$ en el punto $a = -\frac{n+1}{n}$, dado que a está en el intervalo $-\frac{n+1}{n} < a < -1$, para esto hallemos los valores de $F(a)$ y $F'(a)$.

De proposición A7, $F\left(-\frac{n+1}{n}\right) = 0$ y $F'\left(-\frac{n+1}{n}\right) = \frac{3n}{(2n+1)}$.

por lo tanto la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto $\left(-\frac{n+1}{n}, 0\right)$ es

$$y - 0 = \frac{3n}{2n+1} \left(a + \frac{n+1}{n}\right)$$

de donde

$$y = \frac{3n}{2n+1} a + \frac{3(n+1)}{2n+1}$$

por lo tanto si

$$0 < \epsilon < \frac{3(n+1)}{2n+1} + \frac{3n}{2n+1} a \quad (4.33)$$

entonces

$$0 < \epsilon < 1 + \frac{4n+1}{2(n+1)} \frac{a_n}{a_{n+1}} + \sqrt{1 + \frac{(n-2)}{(n+1)} \frac{a_n}{a_{n+1}} + \left(\frac{n-\frac{1}{2}}{n+1}\right)^2 \left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^2}$$

de donde se sigue el teorema 4.2.

Corolario 1. Sea el sistema (4.2) con un control proporcional (4.3) teniendo un retardo $r = Nh$ y $a, b > 0$. Si el período de muestreo (h) y la ganancia del controlador (K) satisfacen las desigualdades siguientes respectivamente:

$$h < \frac{\ln \frac{3(N+1)}{3N}}{a} \quad (4.34)$$

$$-\frac{a}{b} \left[1 - \frac{3N}{2N+1} + \frac{3}{(2N+1)(e^{ah}-1)} \right] < K < -\frac{a}{b}, \quad (4.35)$$

entonces el sistema de datos muestreados (4.2) y (4.3) es estabilizable, y además el retardo debe satisfacer:

$$r < \frac{1}{a}$$

Para el caso $b < 0$ se pueden obtener otras condiciones similares a (4.34) y (4.35) y obtener el corolario siguiente

Corolario 2. Supóngase que el sistema (4.2) tiene un control proporcional (4.3) con retardo $r = Nh$ y $a > 0$ y $b < 0$. Si el período de muestreo (h) y la ganancia del control (K) satisfacen las desigualdades siguientes respectivamente:

$$h < \frac{\ln \left[\frac{3(N+1)}{3N} \right]}{a} \quad (4.36)$$

$$-\frac{a}{b} < K < -\frac{a}{b} \left[1 - \frac{3N}{2N+1} + \frac{3}{(2N+1)(e^{ah}-1)} \right] \quad (4.37)$$

entonces el sistema de datos muestreados es estabilizable, y además el retardo debe satisfacer:

$$r < \frac{1}{a}$$

Observación. La desigualdad $r < \frac{1}{a}$ debe interpretarse como sigue: Si se toma el período de muestreo de manera que

$$h < \frac{\ln \left[\frac{3(N+1)}{3N} \right]}{a}$$

entonces la información a introducir al sistema no puede tardar más de $\frac{1}{a}$ ya que $r < \frac{1}{a}$.

4.3. Ejemplos

En esta sección se presentan otros ejemplos para ilustrar el resultado principal (Teorema 4.2), el cual es válido para polinomios de grado arbitrario y un ejemplo para el corolario 1.

EJEMPLO 4.3

Consideremos el sistema de datos muestreados

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax(t) + bu_{k-r}(t), \\ u_{k-r}(t) &= Kx\left(\left[\frac{t}{h}\right]h - 3h\right), \end{aligned}$$

donde los valores de los parámetros son $a = 1$, $b = 1$, $N = 3$ y $r = 3h$. La ecuación en diferencias (4.5) es:

$$\epsilon(k+1) = e^h \epsilon(k) + (1 - e^h)K\epsilon(k-3).$$

y el polinomio característico asociado al sistema (4.9) es:

$$P(\lambda) = \lambda^4 - e^h \lambda^3 + e^h - 1 + \epsilon.$$

De acuerdo al resultado del teorema 4.2 la condición para que este polinomio sea Schur estable es que ϵ cumpla la desigualdad:

$$0 < \epsilon < \frac{12 - 9e^h}{7}.$$

y la condición para h es

$$h < \ln \frac{12}{9}.$$

Si $\epsilon = \frac{11-9e^h}{7}$ para $h = 0.10$ entonces $P(\lambda) = \lambda^4 - 1.105\lambda^3 + 0.255$ y $P(\lambda) = 0$ si y solo si $\lambda = -0.324309 \pm 0.449373i$ y $\lambda = -0.876809 \pm 0.248036i$ que son raíces de módulo menor a uno.

EJEMPLO 4.4

Considérese ahora el sistema de datos muestreados:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax(t) + bu_{k-r}(t), \\ u_{k-r}(t) &= Kx([\frac{t}{h}]h - r),\end{aligned}$$

Para los valores de los parámetros $a = 1$, $b = 1$, $N = 4$ y $r = 4h$. La ecuación en diferencias (4.5) es

$$\epsilon(k+1) = e^h \epsilon(k) + (1 - e^h)K\epsilon(k-4)$$

y el polinomio característico asociado al sistema (4.9) de grado 5 es:

$$P(\lambda) = \lambda^5 - e^h \lambda^4 + e^h + \epsilon - 1.$$

De acuerdo al resultado del teorema 4.2 la condición para que este polinomio sea Schur estable es que ϵ cumpla la desigualdad:

$$0 < \epsilon < \frac{3(5) + 3(4)(-e^h)}{9} = \frac{5 - 4e^h}{3}.$$

y la condición para h es

$$h < \ln \frac{5}{4}.$$

Se analizará primero el caso cuando el valor de ϵ no cumple con la condición del teorema 4.2 (el valor de ϵ no es el indicado). Si se asigna $\epsilon = 0.03$ y $h = 0.22$, entonces $P(\lambda) = \lambda^5 - 1.246\lambda^4 + 0.276$ se observa que se cumple la hipótesis del trabajo de Arapostathis $-\frac{n}{n-1} < \frac{a_{n-1}}{a_n} < -1$ si y solo si $-\frac{5}{4} < -\frac{e^h}{1} < -1$. Sin embargo $P(\lambda) = 0$ si y solo si $\lambda = 1.00843 \pm 0.10781i$, $\lambda = 0.0753615 \pm 0.65347i$ y $\lambda = -0.620142$. En estas raíces dos tienen módulo mayor a uno.

Para el segundo caso cuando el valor de ϵ cumple con la condición del teorema 4.2. Para $h = 0.22$ se obtiene $\epsilon = 0.0053$, $P(\lambda) = \lambda^5 - 1.246\lambda^4 + 0.2513$. Por lo tanto $P(\lambda) = 0$ si y solo si $\lambda = 0.99892 \pm 0.04598i$, $\lambda = -0.07249 \pm 0.6394i$ y $\lambda = -0.606$. Que son raíces con módulo menor a uno.

EJEMPLO 4.5

Consideremos el sistema de datos muestreados

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(t) + u_{k-r}(t), \\ u_{k-r}(t) &= Kx\left(\left[\frac{t}{h}\right]h - h\right),\end{aligned}$$

donde los valores de los parámetros son $a = 1$, $b = 1$, $N = 1$ y $r = h$. El polinomio característico asociado con el sistema es

$$P(\lambda) = \lambda^2 - e^h \lambda + e^h - 1 + \epsilon$$

que es Schur estable si ϵ satisface (por Teorema 4.1) $0 < \epsilon < 2 - e^h$. Además por Corolario 1 el período de muestreo máximo es

$$h < \ln 2$$

y el intervalo para la ganancia del controlador proporcional es:

$$-\frac{1}{e^h - 1} < k < -1.$$

Ahora para $h = 0.30$ el intervalo de la ganancia que garantiza la estabilización del sistema a lazo cerrado es:

$$-2.85 < k < -1$$

Para $k = -2$ el sistema de datos muestreados es estable debido a que el polinomio característico tiene raíces con módulo menor que uno:

$$\lambda_1 = 0.6749 + 0.49407i, \lambda_2 = 0.6749 - 0.49407i.$$

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

En este trabajo, dado un sistema de datos muestreado lineal, invariante en el tiempo y uni-dimensional se propuso un controlador lineal discreto dependiente de un parámetro ϵ y que tiene un retardo múltiplo del período de muestreo en la retroalimentación. Obtuvimos una estimación del intervalo del parámetro ϵ que garantiza la estabilización del sistema de datos muestreado.

La estimación del intervalo del parámetro ϵ se hizo estableciendo condiciones suficientes sobre los coeficientes del polinomio característico en términos de desigualdades que son fáciles de verificar. Dichas condiciones nos proporcionan una estimación del período máximo de muestreo de la señal continua y una expresión explícita del controlador (un intervalo para la ganancia del control proporcional) y con ellas, podemos garantizar la estabilidad del sistema muestreado.

Para lograr obtener los resultados de estimar el intervalo exacto del parámetro ϵ se utilizó una reconstrucción de orden cero para la reconstrucción de una señal muestreada, se aplicó el criterio del test de estabilidad de polinomios Schur que se basa en las propiedades del polinomio característico asociado al sistema y se utilizó la relación que existe entre polinomios Schur de grado n y $n - 1$.

Relacionados con la idea de proponer un control que depende del parámetro ϵ y que estabilice a un sistema de datos muestreados para el caso uni-dimensional se encuentran los siguientes problemas abiertos

a) Encontrar una aproximación mejor para el intervalo donde toma valores el parámetro ϵ cuando es pequeño.

b) Encontrar el intervalo máximo $[0, \alpha]$ donde ϵ puede tomar valores y conseguir estabilidad del sistema.

c) Además podría darse el caso de que exista un valor ϵ fuera del intervalo máximo $[0, \alpha]$ y que estabilizara al sistema, por lo que nos planteamos primero encontrar ejemplos donde esto suceda, y entonces sería interesante investigar técnicas para encontrar el conjunto completo de valores de ϵ o alguna aproximación de este conjunto.

Para generalizar y hallar las condiciones de estabilidad del sistema lineales de cualquier orden, se sugiere resolver una desigualdad polinomial con

coeficientes matriciales, resultando, claro, un problema difícil de resolver. Pero, lograríamos controlar el retardo en procesos químicos automatizados, procesamiento de datos para diversas señales.

Para la estabilización de sistemas muestreados no lineales está el problema de que los métodos de diseño tienen que utilizar períodos de muestreo suficientemente pequeños. Por lo que está abierto el problema de encontrar los intervalos para el período de muestreo y la ganancia del controlador en el cual se garantiza la estabilidad del sistema.

El establecer condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad robusta de sistemas de datos muestreados variantes en el tiempo y el desarrollo de un eficiente algoritmo numérico para calcular estas condiciones; es un problema abierto

APÉNDICE

Proposición A1.- Si $-\frac{n+1}{n} < \frac{a_n}{a_{n+1}} < -1$ y $a_0 = -a_n + a_{n+1}(\epsilon - 1)$, entonces $0 < a_{n+1}^2 - a_0^2 + a_n^2 + 2a_n a_{n+1} - a_n a_{n+1} \epsilon$ si y solo si $0 < \epsilon < 2 + \frac{a_n}{a_{n+1}}$.

Demostración

si $a_0 = -a_n + a_{n+1}(\epsilon - 1)$ se sustituye en la primera desigualdad obtenemos

$$0 < a_{n+1}^2 - [-a_n + a_{n+1}(\epsilon - 1)]^2 + a_n^2 + 2a_n a_{n+1} - a_n a_{n+1} \epsilon.$$

$$\Leftrightarrow 0 < \epsilon [-a_{n+1}^2 \epsilon + 2a_{n+1}^2 + a_n a_{n+1}]$$

$$\Leftrightarrow 0 < \epsilon < 2 + \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Además por hipótesis $-\frac{n+1}{n} < \frac{a_n}{a_{n+1}} < -1$ que es equivalente a $\frac{n-1}{n} < \frac{a_n}{a_{n+1}} + 2 < 1$. Más aún $\frac{n-1}{n} \geq 0 \quad \forall n \geq 2$. Entonces $\frac{a_n}{a_{n+1}} + 2 > 0$. Por lo tanto la primera desigualdad se cumple si y solo si $0 < \epsilon < 2 + \frac{a_n}{a_{n+1}}$.

Proposición A2.- Si $a_0 = -a_n + a_{n+1}(\epsilon - 1)$, entonces

$$a_{n+1}^2 - a_0^2 + a_n^2 + 2a_n a_{n+1} - a_n a_{n+1} \epsilon < \frac{3n(a_{n+1}^2 - a_0^2)}{2n-1} + \frac{3(n-1)}{2n-1} a_{n+1} a_n$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{4n+1}{2(n+1)} \frac{a_n}{a_{n+1}} - \sqrt[2]{H_n} < \epsilon < 1 + \frac{4n+1}{2(n+1)} \frac{a_n}{a_{n+1}} + \sqrt[2]{H_n}$$

$$\text{donde: } H_n = 1 + \frac{(n-2)}{(n+1)} \frac{a_n}{a_{n+1}} + \left(\frac{n-\frac{1}{2}}{n+1}\right)^2 \left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^2.$$

Demostración.

La desigualdad

$$a_{n+1}^2 - a_0^2 + a_n^2 + 2a_n a_{n+1} - a_n a_{n+1} \epsilon < \frac{3n(a_{n+1}^2 - a_0^2)}{2n-1} + \frac{3(n-1)}{2n-1} a_{n+1} a_n$$

es equivalente a $-a_n a_{n+1} \epsilon < \frac{n+1}{2n-1} (a_{n+1}^2 - a_0^2) + \frac{-(n+1)}{2n-1} a_{n+1} a_n - a_n^2$.

Sustituyendo a_0 vemos que esta es equivalente a $0 < f(\epsilon)$ donde

$$f(\epsilon) = -(n+1) a_{n+1}^2 \epsilon^2 + [2(n+1) a_{n+1}^2 + (4n+1) a_n a_{n+1}] \epsilon - 3n a_n^2 - 3(n+1) a_n a_{n+1}$$

$$f(\epsilon) = 0 \Leftrightarrow \epsilon = 1 + \frac{4n+1}{2(n+1)} \frac{a_n}{a_{n+1}} \pm \sqrt[2]{1 + \frac{(n-2)}{(n+1)} \frac{a_n}{a_{n+1}} + \left(\frac{n-\frac{1}{2}}{n+1}\right)^2 \left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^2}.$$

Como el coeficiente de ϵ^2 es negativo, entonces

$$f(\epsilon) > 0 \iff 1 + \frac{4n+1}{2(n+1)} \frac{a_n}{a_{n+1}} - \sqrt[2]{H_n} < \epsilon < 1 + \frac{4n+1}{2(n+1)} \frac{a_n}{a_{n+1}} + \sqrt{H_n}.$$

Proposición A3.- Fijamos un arbitrario $n \in N$. Si $-\frac{n+1}{n} < \frac{a_n}{a_{n+1}} < -1$, entonces

$$1 + \frac{4n+1}{2(n+1)} \frac{a_n}{a_{n+1}} - \sqrt[2]{1 + \frac{(n-2)}{(n+1)} \frac{a_n}{a_{n+1}} + \left(\frac{n-\frac{1}{2}}{n+1}\right)^2 \left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^2} < 0 \text{ for } n \geq 1$$

Demostración

Tenemos que $-\frac{n+1}{n} < \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq -1$ si y solo si

$-\frac{(4n+1)}{2n} + 1 < \frac{4n+1}{2(n+1)} \frac{a_n}{a_{n+1}} + 1 \leq -\frac{4n+1}{2(n+1)} + 1 = \frac{-2n+1}{2(n+1)} < 0 \forall n \geq 1$. La proposición se sigue.

Proposición A4.- Si $-\frac{n+1}{n} < \frac{a_n}{a_{n+1}} < -1$ entonces

$$1 + \frac{4n+1}{2(n+1)} \frac{a_n}{a_{n+1}} + \sqrt[2]{1 + \frac{(n-2)}{(n+1)} \frac{a_n}{a_{n+1}} + \left(\frac{n-\frac{1}{2}}{n+1}\right)^2 \left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^2} < 2 + \frac{a_n}{a_{n+1}} \forall n \geq 1$$

Demostración Tenemos que

$$1 + \frac{4n+1}{2(n+1)} \frac{a_n}{a_{n+1}} + \sqrt[2]{1 + \frac{(n-2)}{(n+1)} \frac{a_n}{a_{n+1}} + \left(\frac{n-\frac{1}{2}}{n+1}\right)^2 \left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^2} \leq 2 + \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

si y solo si

$$\sqrt[2]{1 + \frac{(n-2)}{(n+1)} \frac{a_n}{a_{n+1}} + \left(\frac{n-\frac{1}{2}}{n+1}\right)^2 \left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^2} \leq 1 + \left[1 - \frac{4n+1}{2(n+1)}\right] \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Sea $a = \frac{a_n}{a_{n+1}}$. Entonces la última desigualdad puede ser escrita como:

$$\sqrt[2]{1 + \frac{(n-2)}{(n+1)}a + \left(\frac{n-\frac{1}{2}}{n+1}\right)^2 a^2} \leq 1 + \left[1 - \frac{4n+1}{2(n+1)}\right] a, \text{ que es verdadera}$$

si y solo si

$$1 + \frac{(n-2)}{(n+1)}a + \left(\frac{n-\frac{1}{2}}{n+1}\right)^2 a^2 \leq 1 + \left(\frac{-2n+1}{n+1}\right)a + \frac{(-2n+1)^2}{4(n+1)^2}a^2 \text{ si y solo si}$$

$\frac{3n-3}{n+1}a \leq 0$ como $a < 0$ y $(3n-3) \geq 0 \forall n \geq 11$, entonces la desigualdad se cumple.

Proposición A5.- Si $-\frac{n+1}{n} < \frac{a_n}{a_{n+1}} < -1$ y $a_0 = -a_n + a_{n+1}(\epsilon - 1)$, entonces

$$|a_{n+1}| > |a_0| \iff 0 < \epsilon < 2 + \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Demostración

Sustituyendo el valor de a_0 obtenemos que

$$\begin{aligned} |a_{n+1}| > |a_0| &\iff a_{n+1}^2 > [-a_n + a_{n+1}(\epsilon - 1)]^2 \\ &\iff 0 > a_{n+1}^2 \epsilon^2 - 2a_{n+1}(a_n + a_{n+1})\epsilon + a_n(2a_{n+1} + a_n). \end{aligned}$$

Sea $h(\epsilon) = a_{n+1}^2 \epsilon^2 - 2a_{n+1}(a_n + a_{n+1})\epsilon + a_n(2a_{n+1} + a_n)$. Entonces

$h(\epsilon) = 0$ si y sólo si $\epsilon_1 = 2 + \frac{a_n}{a_{n+1}}$ o $\epsilon_2 = \frac{a_n}{a_{n+1}}$. Dado que el coeficiente de ϵ^2 es positivo entonces $h(\epsilon) < 0$ si y solo si $\frac{a_n}{a_{n+1}} < \epsilon < 2 + \frac{a_n}{a_{n+1}}$. Pero debido a que $\frac{a_n}{a_{n+1}} < 0$, obtenemos $0 < \epsilon < 2 + \frac{a_n}{a_{n+1}}$.

Proposición A6.- Fijamos un arbitrario $n \in \mathbb{N}$ y $a < 0$, y sea $J(a) = 4n(n - \frac{1}{2})^2 a^2 + 4n(n - 2)(n + 1)a + (n + 1)(5n^2 + 4n - 1)$. Entonces $J(a) > 0$.

Demostración

Si $n = 1$, $J(a) = a^2 + 4(-1)(2)a + 2(5 + 4 - 1) = (a - 4)^2 > 0$ para $a < 0$.

Si $n \geq 2$, las raíces de J son los números complejos

$$a = \frac{-n^2 + n + 2}{2(n - \frac{1}{2})^2} \pm \frac{1}{2n(n - \frac{1}{2})^2} \sqrt{[-4n^4 - 2n^3 + \frac{15}{4}n^2 + 2n + \frac{1}{4}]n(n + 1)}. \text{ Y debido a que } 4n(n - \frac{1}{2})^2 \text{ es el coeficiente de } a^2, J(a) > 0.$$

Proposición A7.- Sea $F(a) = 1 + \frac{4n+1}{2(n+1)}a + \sqrt{1 + \frac{(n-2)}{(n+1)}a + \left(\frac{n-\frac{1}{2}}{n+1}\right)^2 a^2}$, entonces

- $F'(a) > 0$
- $F''(a) > 0$ (implica que $F(a)$ es cóncava hacia arriba) y
- $F(-\frac{n+1}{n}) = 0$ y $F'(-\frac{n+1}{n}) = \frac{3n}{(2n+1)}$.

Demostración Calculos directos

Proposición A8.- Si $a_0 = -a_n + a_{n+1}(\epsilon - 1)$, entonces

$$(a_{n+1}^2 - a_0^2) - a_0 a_n > 0 \iff 1 + \frac{1}{2} \frac{a_n}{a_{n+1}} - \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^2} < \epsilon < 1 + \frac{1}{2} \frac{a_n}{a_{n+1}} + \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^2}$$

Demostración

Sustituyendo a_0 en la primera desigualdad, vemos que

$$a_{n+1}^2 - [-a_n + a_{n+1}(\epsilon - 1)]^2 - [-a_n + a_{n+1}(\epsilon - 1)]a_n > 0.$$

Si y solo si

$$-a_{n+1}^2\epsilon^2 + (2a_{n+1}^2 + a_n a_{n+1})\epsilon - a_n a_{n+1} > 0.$$

Sea $g(\epsilon) = -a_{n+1}^2\epsilon^2 + (2a_{n+1}^2 + a_n a_{n+1})\epsilon - a_n a_{n+1}$, entonces

$$g(\epsilon) = 0 \iff \epsilon = 1 + \frac{1}{2} \frac{a_n}{a_{n+1}} \pm \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^2}.$$

Dado que el coeficiente de ϵ^2 es negativo entonces

$$g(\epsilon) > 0 \iff 1 + \frac{1}{2} \frac{a_n}{a_{n+1}} - \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^2} < \epsilon < 1 + \frac{1}{2} \frac{a_n}{a_{n+1}} + \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^2}.$$

Proposición A9.- Si $a_0 = -a_n + a_{n+1}(\epsilon - 1)$, entonces $a_{n+1}^2 - a_0^2 + a_0 a_n > 0$ si y solo si

$$1 + \frac{3a_n}{2a_{n+1}} - \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^2} < \epsilon < 1 + \frac{3a_n}{2a_{n+1}} + \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^2}.$$

Demostración Si sustituimos a_0 en la desigualdad $a_{n+1}^2 - a_0^2 + a_0 a_n > 0$, entonces

$$a_{n+1}^2 - [-a_n + a_{n+1}(\epsilon - 1)]^2 + [-a_n + a_{n+1}(\epsilon - 1)]a_n > 0, \text{ esto es}$$

$$-a_{n+1}^2\epsilon^2 + (2a_{n+1}^2 + 3a_n a_{n+1})\epsilon - (2a_n^2 + 3a_n a_{n+1}) > 0.$$

Sea $h(\epsilon) = -a_{n+1}^2\epsilon^2 + (2a_{n+1}^2 + 3a_n a_{n+1})\epsilon - (2a_n^2 + 3a_n a_{n+1})$ entonces

$$h(\epsilon) = 0 \iff \epsilon = 1 + \frac{3a_n}{2a_{n+1}} \pm \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^2}.$$

Como el coeficiente $-a_{n+1}^2$ of ϵ^2 es negativo, entonces

$$h(\epsilon) > 0 \iff 1 + \frac{3a_n}{2a_{n+1}} - \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^2} < \epsilon < 1 + \frac{3a_n}{2a_{n+1}} + \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^2}.$$

Proposición A10.- Si $a_0 = -a_n + a_{n+1}(\epsilon - 1)$, entonces $(a_{n+1}^2 - a_0^2) - a_0 a_n < 0$ si y solo si

$$\left[\epsilon < 1 + \frac{1}{2} \frac{a_n}{a_{n+1}} - \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^2} \quad \text{o} \quad \epsilon > 1 + \frac{1}{2} \frac{a_n}{a_{n+1}} + \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^2} \right].$$

Demostración

Para la desigualdad, $(a_{n+1}^2 - a_0^2) - a_0 a_n < 0$, utilizamos las raíces de $g(\epsilon)$ definida en proposición A8 para deducir que:

$$g(\epsilon) < 0 \Leftrightarrow \epsilon < 1 + \frac{1}{2} \frac{a_n}{a_{n+1}} - \sqrt[2]{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^2} \quad \text{ó} \quad \epsilon > 1 + \frac{1}{2} \frac{a_n}{a_{n+1}} + \sqrt[2]{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^2}$$

Proposición A11.- Si $a_0 = -a_n + a_{n+1}(\epsilon - 1)$, entonces $(a_{n+1}^2 - a_0^2) + a_0 a_n < 0$ si y solo si

$$\left[\epsilon < 1 + \frac{3a_n}{2a_{n+1}} - \sqrt[2]{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^2} \quad \text{o} \quad \epsilon > 1 + \frac{3a_n}{2a_{n+1}} + \sqrt[2]{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^2} \right].$$

Demostración.

Supongase que $(a_{n+1}^2 - a_0^2) + a_0 a_n < 0$, utilizamos las raíces de $h(\epsilon)$ definida en proposición A9 para concluir que: $h(\epsilon) < 0$ si y solo si

$$\left[\epsilon < 1 + \frac{3a_n}{2a_{n+1}} - \sqrt[2]{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^2} \quad \text{o} \quad \epsilon > 1 + \frac{3a_n}{2a_{n+1}} + \sqrt[2]{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^2} \right].$$

Proposición A12.- Si $-\frac{n+1}{n} + \frac{a_n}{a_{n+1}} < -1$, entonces

$$\frac{3(n+1)}{2n+1} + \frac{3n}{2n+1} \frac{a_n}{a_{n+1}} < 1 + \frac{3a_n}{2a_{n+1}} + \sqrt[2]{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^2}.$$

Demostración.

Si denotamos $a = \frac{a_n}{a_{n+1}}$, entonces la desigualdad previa es:

$$\frac{3(n+1)}{2n+1} + \frac{3n}{2n+1} a < 1 + \frac{3}{2} a + \sqrt[2]{1 + \frac{1}{4} a^2}$$

que se cumple si y solo si

$$0 < [(2n+1)^2 - 9] a^2 + 12(n+2)a - 4[(n+2)^2 - (2n+1)^2].$$

La última función cuadrática tiene el discriminante $-4n^4 - 4n^3 + 15n^2 + 16n + 4$ que es negativo para $n \geq 3$. Además como el coeficiente de a^2 es positivo, entonces

$$0 < [(2n+1)^2 - 9] a^2 + 12(n+2)a - 4[(n+2)^2 - (2n+1)^2].$$

Por lo que la proposición se cumple.

Bibliografía

- [1] Ackerman, J. *Sampled-Data Control systems: Analysis and Synthesis, Robust System Design*, Springer-Verlag.(1985).
- [2] Araki, M. and Hagiwara, T., "Pole assignment by multirate sample-data output feedback". *Int. J. Contr.*, vol 44, pp.1661 -1673 (1986).
- [3] Astrom, K.J. and Wittenmark *Computer-controlled systems*, 3rd ed. Englewood Cliffs, Nj: Prentice -Hall. (1997).
- [4] Bhattacharyya, S.P., H.Chapellat, L.H.Keel, *Robust control. The parametric approach*, Prentice Hall. (1995).
- [5] Busenberg, S. and Cooke, K.L., *Models of vertically transmitted diseases with sequential-continuous dynamics*, in "Nonlinear phenomena in Mathematical Sciences" (V. Laksh mikantham, Ed.), pp 179-187, Academic Press, Nueva York. (1982)
- [6] Castillo, B., Di Gennaro, S., Monaco, S. and Normand-Cyrot, D., "On regulation under sampling". *IEEE Trans. Automat. Control.*, Vol.42, pp. 864-868 (1997).
- [7] Chen, T. and Francis, B.A., *Optimal sampled-data control systems*, Springer, London. (1995).
- [8] Cooke, K.L., Turi, J. and Turner, G., "Spectral Conditions and an Explicit Expression for Stabilization of Hybrid the systems in the Presense of Feedback Delays". *Quarterly of Applied Mathematics.*, Vol. 11, No. 1, pp. 147-159(1993).
- [9] Cooke, K.L. and Wiener, J. "Retarded differential equations with piecewise constant delays". *J.Math. Anal.Appl.*, Vol. 99, No. 1, 265-297 (1984).

- [10] Francis, B.A. and Georgiou, T.T., "Stability theory for linear time-invariant plants with periodic digital controller". *IEEE T.Automat Contr.*, vol 33, no.9,pp 820-832 (1988).
- [11] Franklin, G.F., Powell, J.D. and Workman,M.L., *Digital control of dynamic systems*, Addison-Wesley. (1990).
- [12] Fridman, E., Shaked, U. and Suplin, V., "Input/output delay approach to robust sampled-data H_∞ control". *Systems Control Letters.*, Vol. 54, pp. 271-282 (2005).
- [13] Fridman, E., Seuret, A. and Richard J. P., "Robust sampled-data stabilization of linear systems: an input delay approach". *automatica.*, Vol. 40, pp. 1441-1446 (2004).
- [14] García, F.R., Aguirre, B., Suárez, R., "Stabilization of Linear sampled-data Systems By A Time-Delay Feedback Control". Por aparecer en *Mathematical Problems in Engineering.*, (2008).
- [15] Gruñe L., "Asymptotic controllability and exponential stabilization of nonlinear control systems at singular points". *SIAM J. Control Optim.*, Vol. 36, pp. 1485-1503 (1998).
- [16] Hagiwara, T. and Araki, T. "Design of a stable feedback controller based on the multirate sampling of the plant output". *IEEE trans. Automat. Contr.*, vol.33, no.9, pp. 812 - 819 (1988).
- [17] Hale, J.K., and Lunel S.M., *Introduction to functional differential equations*, Springer-Verlag. (1993).
- [18] Hespanha, J.P., Payam Naghshtabrizi and Yonggang Xu., "A Survey of recent results in networked control systems". *Proceedings of the IEEE .*, Vol. 95, No. 1, 138-162 (2007).
- [19] Hespanha,J.P., McLaughlin, M.I., and Sukhatme G., "Haptic collaboration over the internet". *in proc. 5th phantom Users group workshop .*, oct. (2000).
- [20] Hikichi,K., Morino, H. Arimoto, I., Sezaki,K. and Yasuda, Y., "The eevaluation of delay jitter for hapticscollaboration over the internet". *in proc. IEEE Global Telecomm. Conf. (GLOBECOM) .*, Vol. 2, PP. 1492-1496 (2002).

- [21] Jury, E.I., "A simplified stability criterion for linear discrete systems". *IRE Proc.*, Vol. **50** No 6, 1493-1500 (1962).
- [22] Kamamba, P.T. "Control of linear systems using generalized sampled-data hold functions". *IEEE. Trans. Autom. Control.*, Ac-32, pp 772-783 (1987).
- [23] Kazantzis, N., and Kravaris, C. "System-theoretic properties of sampled-data representations of nonlinear systems obtained via Taylor-Lie series". *Int. J. Control* Vol. 67, pp. 997-1020 (1997).
- [24] Kolmanovskii, V.B., and Myshkis, A.D., *Introduction to the theory and Applications of functional differential equations*, Kluwer academic publishers. (1999).
- [25] Mareels, I.M.Y., Penfold, H.B. and Evans, R.J. "Controlling nonlinear time-varying systems via Euler approximations". *Automatica*, Vol. 28, pp. 681-696 (1992).
- [26] Meng, C., Wang, T., Chou, W., Luan, S., Zhang Y. and Tian, Z., "Remote surgery case: Robot-assisted teleneurosurgery ". *in IEEE Int. Conf. Robot. and Auto. (ICRA '04)*, Vol. **1**, 819-823 (2004).
- [27] Mirkin, L., "Some Remarks on the Use of Time-Varying Delay to Model Sampled-and-Hold Circuits". *IEEE Transactions on automatic control.*, Vol. **52**, No. **6**, 1109-1112 (2007).
- [28] Morse, A.S. *Control Using Logic-Based Switching*, London SpringerVerlag (1997).
- [29] Naghshtabrizi, P., Hespanha J.P., "Designing an observer-based controller for a network control system". *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference.*, December 12-15, (2005).
- [30] Nesić, D., Teel, A.R., Kokotović, P.V. "Sufficient conditions for stabilization of sampled-data nonlinear systems via discrete-time approximations". *Systems control letters*, vol 38, pp 259-270 (1999).
- [31] Nesić, D., Teel, A.R., Sontag, E.D. "Formulas relating $H\mathcal{L}$ stability estimates of discrete-time and sampled -data nonlinear systems". *Systems control lett.*, vol 38 pp 49-60 (1999).

- [32] Ogren, P., Fiorelli, E., and Leonard, N.E., "Cooperative control of mobile sensor networks: Adaptive gradient climbing in a distributed environment". *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. **49** No. 8, 1292-1302 (2004).
- [33] Ortega, R., Taoutaou, D., "A globally stable discrete-time controller for current-fed induction motors". *Systems Control Lett.* Vol.28, pp. 123-128 (1996).
- [34] Owens, D.H., Zheng, Y., Billings, S.A., "fast sampling and stability of nonlinear sampled-data systems:Part 1. Existence theorems", *IMA J. Math.Control Inform.* vol 7, pp. 1- 11 (1990).
- [35] Seiler, P., Sengupta, R., "Analysis of communication losses in vehicle control problems ". *in Proc. 2001 Amer. Contr. Conf.*, Vol. **2**, 1491-1496 (2001).
- [36] Shirmohammadi, S., and Woo, N.H., "Evaluating decorators for haptic collaboration over the internet". *in proc. 3rd IEEE Int. Workshop Haptic. Audio and Visual Env. Applic.*, PP. 105-109 (2004).
- [37] Teel, A.R., Nesic,D., Kokotovic, P.V., "A note on input-to-state stability of sampled-data nonlinear systems". *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control, Tampa, FL*, pp.2473-2478 (1998).
- [38] Tipsuwan, Y. and Chow, M-Y. "Control methodologies in networked control systems". *Control Engineering practice*, Vol. 11, 1099-1111 (2003).
- [39] Wiener, J. and Cooke, K.L. " Oscillations in Systems of Differential Equations with piecewise constant Argument", *Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 137, No. 1 (1989).
- [40] Yong, J., "Stabilization of linear systems by time-delay feedback controls". *Quart. Appl. Math.*, Vol. 45, No. **2**, 377-388 (1987).
- [41] Yong, J., "Stabilization of linear systems by time-delay feedback controls II". *Quart. Appl. Math*, Vol. 46 No. **4**, 593-603 (1988b).
- [42] Yong, J. and A. Arapostathis, "Stabilization of discrete-time linear systems with a time delay in the feedback loop". *Internat. J. Control*, Vol. 48, No. **4**, 1475-1485 (1988a).

- [43] Zhang, W., Branicky, M.S. and Phillips, S.M., “Stability of networked control systems ”. *IEEE Contr. Syst. Mag.*, Vol. 21, No. 1, 84-99 (2001).



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE DISERTACIÓN PÚBLICA

No. 00016

Matrícula: 200181060

ESTABILIZACION DE SISTEMAS DE DATOS MUESTREADOS LINEALES POR UN CONTROL CON RETARDO

En México, D.F., se presentaron a las 14:00 horas del día 18 del mes de junio del año 2010 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

- DR. JESUS ALVAREZ CALDERON
- DR. CARLOS IBARRA VALDEZ
- DR. FERNANDO VERDUZCO GONZALEZ
- DR. ELOY MARTINEZ LEAL
- DR. BALTAZAR AGUIRRE HERNANDEZ

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron a la presentación de la Disertación Pública cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)
DE: FAUSTINO RICARDO GARCIA SOSA

y de acuerdo con el artículo 78 fracción IV del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.



FAUSTINO RICARDO GARCIA SOSA
ALUMNO

REVISÓ

LIC. JULIO CESAR DE LARA ISASSI
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JOSE ANTONIO DE LOS REYES
HEREDIA

PRESIDENTE

DR. JESUS ALVAREZ CALDERON

VOCAL

DR. CARLOS IBARRA VALDEZ

VOCAL

DR. FERNANDO VERDUZCO GONZALEZ

VOCAL

DR. ELOY MARTINEZ LEAL

SECRETARIO

DR. BALTAZAR AGUIRRE HERNANDEZ