



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
METROPOLITANA

UNIDAD IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E
INGENIERÍA

ANÁLISIS DE ESPACIOS-TIEMPO
CLÁSICOS Y NO CONMUTATIVOS
CON ROTACIÓN

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Maestro en Ciencias

QUE PRESENTA:

Eduardo Plácido Flores

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Marco A. Maceda Santamaría

SINODALES:

Presidente: Dra Nora Eva Bretón Báez

Secretario: Dr. Marco A. Maceda Santamaría

Vocal: Dr Luis Octavio Pimentel Rico

Iztapalapa, 30 de enero de 2020

*Dedicado a
mis abuelos y a
mi hermana Mariana*

AGRADECIMIENTOS

Aprovecho este breve espacio para reconocer el enorme apoyo que he recibido y que ha sido fundamental para la culminación de este trabajo.

Agradezco al Dr. Marco Maceda por su tiempo, su paciencia y por ser más que un asesor de tesis; por ser alguien que se preocupa y le importa, un mentor y un modelo a seguir. Cada curso impartido, cada discusión, cada revisión me hizo crecer no sólo en mi vida académica. Nunca podré terminar de agradecer el apoyo que recibí de su parte.

A los miembros del jurado de esta tesis, el Dr. Octavio Pimentel y la Dra. Nora Bretón por su comprensión y disponibilidad; por sus comentarios y críticas que me ayudaron a enriquecer este trabajo.

A Flor también por su paciencia infinita, por estar ahí en todo momento, por confiar en mí y poder confiar en ella; por todo el trabajo que le cargué en esta tesis y por sus observaciones.

A mis abuelos, sin ellos ni siquiera tendría una carrera universitaria, ustedes que me cobijaron cuando no tenía donde ir, son mi motor, mis ganas de superarme.

A mi tía Isabel y mi tío Librado que jamás me han negado su ayuda, a veces me hacen sentir como su hijo mayor ¡Muchas gracias por creer en mí!

A mi hermana por esas noches de charla y mi mamá, a ambas les agradezco por escucharme, por la confianza, su interés, el cariño.

A mi tía Chuchis, Cesar, Javier, Manolo, Héctor, Angélica, a mi familia y amigos que me permitieron continuar sin perder del todo la cabeza.

Agradezco especialmente al CONACyT (CVU:628604, No. de Becario:615261) ya que sin la beca que me fue otorgada no hubiera podido pensar en hacer una maestría.

Me siento muy honrado de haber contado con todos ustedes, de estar rodeado de las personas que aprecio ¡Gracias!

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es analizar y aplicar dos formalismos matemáticos para obtener soluciones con rotación en Relatividad General sin resolver las ecuaciones de Einstein directamente. Se desea aplicar este esquema para generar soluciones con rotación en un espacio tiempo no conmutativo; de esta manera se busca regularizar soluciones de agujero negro, pues es sabido que el comportamiento de los coeficientes métricos de un espacio tiempo no conmutativo cerca de las singularidades clásicas, remueve las divergencias que un espacio-tiempo clásico presenta.

En este trabajo mediante el algoritmo de Janis-Newman y el método de Azreg-Aïnou, se logran reproducir las soluciones clásicas de Kerr y Kerr-Newman, tomando como métricas semilla los espacios tiempo de Schwarzschild y Reissner-Nordström respectivamente. Posteriormente aplicando el mismo método se determinan los espacios tiempo de Kerr y Kerr-Newman en su versión no conmutativa. Con estos elementos se da un breve análisis de las características de los agujeros negros con rotación; además se muestra una modificación de la velocidad de arrastre asociada al efecto de Lense-Thirring en un espacio tiempo no conmutativo respecto del clásico.

Finalmente se aplican ambos métodos a un espacio-tiempo tomando en cuenta el acoplamiento con una electrodinámica no lineal. Para ello consideramos la electrodinámica no lineal de Born-Infeld y usamos la métrica de Einstein-Born-Infeld como métrica semilla para generar una solución con rotación. De este modo analizamos las componentes del tensor de energía-momento de este espacio-tiempo para verificar si cumple o no las condiciones que debe satisfacer el tensor de energía-momento del agujero negro de Einstein-Born-Infeld con rotación.

ÍNDICE GENERAL

Agradecimientos	I
Resumen	III
Índice	VI
Lista de figuras	VII
1. Introducción	1
1.1. Soluciones gravitacionales con rotación	1
1.2. Espacio-tiempo no conmutativo	4
2. Soluciones estáticas No Conmutativas	7
2.1. Distribuciones en geometría no conmutativa	7
2.1.1. Estados coherentes no conmutativos en el espacio de Hilbert-Schmidt	7
2.1.2. Estados propios asociados a operadores de creación y aniquilación no conmutativos en espacio de momentos	9
2.1.3. Función de onda de partícula libre y relación de completez	10
2.2. Soluciones de Agujero Negro	13
2.2.1. Schwarzschild no conmutativo	14
2.2.2. Reissner-Nordström en su versión no conmutativa	15
3. Espacios tiempo con rotación	17
3.1. El algoritmo de Janis-Newman	17
3.1.1. Algoritmo de Janis-Newman aplicado a una métrica general con simetría esférica	18
3.1.2. Coordenadas de Boyer-Lindquist	20
3.1.3. Soluciones clásicas con rotación	21
3.1.3.1. La métrica de Kerr a partir de la métrica de Schwarzschild	22
3.1.3.2. La métrica de Kerr-Newman a partir de Reissner-Nordström	23
3.1.4. Espacios-tiempo NC con rotación por medio de algoritmo de Janis-Newman	24
3.1.4.1. La métrica de Kerr no conmutativa	24
3.1.4.2. La métrica de Kerr-Newman no conmutativa	25
3.2. Soluciones con rotación en Relatividad General sin complexificación	26
3.2.1. Ecuaciones de campo sin complexificación	26
3.2.2. Aplicaciones	31
3.2.2.1. De Schwarzschild a la solución de Kerr	31
3.2.2.2. De RN a la solución de Kerr-Newman	31
3.2.2.3. La solución de Kerr no Conmutativa	32
3.2.3. La solución de Kerr-Newman no Conmutativa	32
3.3. Características de agujeros negros rotantes	33
3.3.1. Horizontes de eventos	33

3.3.1.1.	Kerr	33
3.3.1.2.	Kerr-Newman	34
3.3.1.3.	Kerr NC	34
3.3.1.4.	Kerr-Newman NC	35
3.3.2.	Agujero Negro extremo	35
3.3.2.1.	Kerr	35
3.3.2.2.	Kerr-Newman	35
3.3.2.3.	Kerr no conmutativo	36
3.3.2.4.	Kerr-Newman	37
3.3.3.	Censura cósmica	37
3.3.4.	Ergoesferas	39
3.3.4.1.	Ergoesferas en Kerr	39
3.3.4.2.	Kerr	42
3.3.4.3.	Kerr-Newman	42
3.3.4.4.	Kerr no conmutativo	42
3.3.4.5.	Kerr-Newman no conmutativo	42
3.3.5.	Geodésicas	43
3.3.5.1.	Geodésicas en el espacio-tiempo de Kerr	43
3.3.6.	El efecto de Lense-Thirring	44
3.3.7.	Proceso de Penrose	49
3.3.8.	Núcleo de de-Sitter rotante	50
3.3.8.1.	Kerr NC	50
3.3.8.2.	Kerr-Newmann NC	50
4.	El agujero negro de Einstein-Born-Infeld con rotación	51
4.1.	Einstein-Born-Infeld con rotación mediante el algoritmo de Janis-Newman	51
4.2.	Born-Infeld con rotación por el método de Azreg-Ainou	52
4.3.	Análisis de las componentes del tensor de energía-momento	53
	Conclusiones	57
	A. Espacio-Tiempo de Einstein-Born-Infeld	63
	Referencias	65

ÍNDICE DE FIGURAS

1.	Mapa de las teorías físicas. Siguiendo las líneas punteadas es posible moverse de una teoría a otra, es decir considerando los valores de cada una de las constantes que los ejes representan.	6
2.	Esquema del cambio en la orientación del cono de luz al atravesar los horizontes de eventos	34
3.	Radio del Horizonte de eventos en función de la masa para Kerr NC $a = 0, 1, 3$ (izquierda a derecha) con $\vartheta = 0.001$	36
4.	Radio del Horizonte de eventos en función de la masa para Kerr NC $a = 0, 1, 3$ (izquierda a derecha) con $\vartheta = 1$	37
5.	Radio del Horizonte de eventos en función de la masa para Kerr-Newman NC $a = 0, 1, 3$ (izquierda a derecha) con $\vartheta = 0.001$ y $Q = 1$	38
6.	Radio del Horizonte de eventos en función de la masa para Kerr-Newman NC $a = 0, 1, 3$ (izquierda a derecha) con $\vartheta = 1$ y $Q = 1$	38
7.	Corte polar de un AN de Kerr y extremo de Kerr donde se muestran horizontes de eventos (r_+ y r_-) y fronteras de la ergosuperficie (z_+ y z_-)	40
8.	Geodésicas tipo tiempo en el plano $\theta = \frac{\pi}{2}$ ilustrando el efecto de arrastre	41
9.	Precesión de Lense-Thirring asociada a la métrica de Kerr clásica. Para las curvas de arriba a abajo se utilizaron los ángulos $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$ y 0, con $a = M = 1$	46
10.	Precesión de Lense-Thirring asociado a la métrica de Kerr no conmutativa (líneas sólidas) comparados con la precesión de Kerr clásico (en negro). Se utilizaron distintos valores del parámetro no conmutativo ϑ : a) $\vartheta = \frac{1}{4}$ b) $\vartheta = \frac{1}{10}$ c) $\vartheta = \frac{1}{100}$ d) $\vartheta = \frac{1}{1000}$	47
11.	Precesión de Lense-Thirring asociada a la métrica de Kerr-Newman clásica; de arriba a abajo se utilizaron los ángulos polares $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$ y 0, con $M = 1$ y $a^2 = Q^2 = \frac{1}{2}$	47
12.	Precesión de Lense-Thirring asociada a la métrica de Kerr-Newman no conmutativa (en rojo) comparadas con la precesión de Kerr-Newman clásico (en negro). Se usaron únicamente los valores de $\vartheta = \frac{1}{4}, \frac{1}{10}$ y $\frac{1}{100}$; este último valor se superpone ya al caso clásico. Los valores para el ángulo polar θ son: a) $\theta = \frac{\pi}{4}$ b) $\theta = \frac{\pi}{3}$ c) $\theta = \frac{\pi}{4}$ d) $\theta = 0$	48
13.	Esquema cualitativo del proceso de Penrose	50

INTRODUCCIÓN

1.1 SOLUCIONES GRAVITACIONALES CON ROTACIÓN

Albert Einstein publicó la versión final de las ecuaciones de campo para Relatividad General (RG) en noviembre de 1915 y sólo dos meses después Karl Schwarzschild, quien tenía cierto tiempo trabajando con una versión temprana de la teoría de Einstein, publicó una solución exacta para una partícula puntual sin rotación. Posteriormente Friedmann en 1922 presentó su solución para un universo en expansión, sin embargo, tuvieron que pasar décadas antes de que alguien presentara una solución exacta que describiera el campo gravitacional de una masa con rotación.

Por otra parte Oppenheimer a finales de 1930 se dedicó a estudiar el colapso gravitacional de estrellas pesadas y uno de sus aportes fue la predicción de la existencia de una solución a las ecuaciones de campo gravitacional que hoy conocemos como agujeros negros.

Observaciones astronómicas han permitido determinar que estrellas de neutrones, planetas y cuásares rotan; si una estrella rotante fuese llevada al colapso gravitacional, sería de esperarse que el agujero negro resultante retuviera al menos una fracción de su momento angular inicial. Esto sugiere que debe existir una extensión de la solución de Schwarzschild, una solución a las ecuaciones de Einstein que describa un cuerpo masivo que posee momento angular no nulo.

En 1918 Josef Lense y Hans Thirring publicaron un artículo acerca de la influencia de la rotación del Sol sobre los planetas y la influencia de la rotación de la Tierra sobre la Luna. Para su análisis utilizaron una aproximación de campo débil de un espacio tiempo con rotación, la cual es válida para valores pequeños del momento angular y distancias grandes. El elemento de línea asociado a este espacio tiempo es

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & - \left[1 - \frac{2m}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \right] dt^2 - \left[\frac{4J \sin^2 \theta}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \right] d\phi dt \\
 & + \left[1 + \frac{2m}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \right] [dr^2 + r^2 d\Omega^2],
 \end{aligned} \tag{1}$$

donde $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ es el término asociado al ángulo sólido.

A pesar de que esta métrica es adecuada para casi cualquier cuerpo en el sistema solar, existen los casos en donde no será apropiada, por ejemplo el espacio-tiempo cerca de una estrella de neutrones en rotación o un agujero negro rotante. En 1963 Roy Kerr presentó una solución a las ecuaciones de Einstein que describe el campo gravitacional de un objeto masivo con rotación. Dicha solución es

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{2mr^3}{r^4 + a^2z^2} \left[dt + \frac{r(xdx + ydy)}{a^2 + r^2} + \frac{(a(ydx - xdy))}{a^2 + r^2} + \frac{z}{r}dz \right]^2, \quad (2)$$

la cual es una solución asintóticamente plana. La solución dada por Kerr describe a un agujero negro rotante axialmente simétrico y estacionario.

En 1968 Brandon Carter encontró una manera alternativa de determinar la métrica de un objeto masivo rotante utilizando para ello la ecuación de Klein-Gordon en vez de las ecuaciones de Einstein. Para este procedimiento se debe tomar en cuenta lo siguiente:

- Se impone que la ecuación pueda resolverse mediante separación de variables, siendo las soluciones de la forma

$$\psi = \prod_{i=1}^4 \psi_i. \quad (3)$$

donde cada función ψ_i depende de una única coordenada.

- Se aprovecha la simetría axial de la solución lo que nos produce una métrica cuyos únicos elementos fuera de la diagonal serán los términos $d\varphi dt$.
- La métrica obtenida debe determinar una tétrada ortonormal.

A continuación se mencionan los pasos principales en esta construcción. Empezamos con la ecuación de Klein-Gordon

$$\psi_{;\mu}^{\mu} - m^2\psi = 0, \quad (4)$$

o bien

$$\psi^{-1} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \psi) - m^2 \sqrt{-g} = 0, \quad (5)$$

donde $g = \det(g_{\mu\nu}) = [\det(g^{\mu\nu})]^{-1}$.

Puede observarse que la ecuación de Klein-Gordon utiliza la forma contravariante de la métrica que puede escribirse como

$$\left(\frac{\partial}{\partial s} \right)^2 = g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \right), \quad (6)$$

La forma que se propone para las componentes contravariantes de la métrica es

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 = & \frac{1}{Z} \left[\Delta_\rho \left(\frac{\partial}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\Delta_\rho} \left(Z_\rho \frac{\partial}{\partial t} + Q_\rho \frac{\partial}{\partial \phi} \right)^2 \right] \\ & + \frac{1}{Z} \left[\Delta_r \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{\Delta_r} \left(Z_r \frac{\partial}{\partial t} + Q_r \frac{\partial}{\partial \phi} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (7)$$

donde $\Delta_\rho, Z_\rho, Q_\rho$ son funciones solamente de la variable desconocida ρ y Δ_r, Z_r, Q_r son funciones solamente de la coordenada r .

Sustituyendo las componentes $g^{\mu\nu}$ en la ecuación (5) y mediante la condición de separabilidad de variables obtenemos la condición:

$$Z = Z_r Q_\rho - Z_\rho Q_r, \quad (8)$$

para cumplir con separabilidad de variables Z debe de poder escribirse como la suma de dos términos, cada una de ellas dependiente de sólo una variable, sea $Z = U_\rho + U_r$ donde U_ρ depende solo de ρ y U_r solo depende de r entonces por (8) solo podemos cumplir este requisito si

$$\frac{dZ_r}{dr} \frac{Q_\rho}{d\rho} - \frac{dZ_\rho}{d\rho} \frac{dQ_r}{dr} = 0. \quad (9)$$

De aquí, sin perder generalidad se concluye que las funciones Q_ρ y Q_r son constantes y se reemplazan por los valores C_ρ y C_r respectivamente. Notemos que Δ_ρ y Δ_r en (7) se escogieron de tal manera que no aparezcan en el determinante de la métrica. Este determinante es

$$\sqrt{-g} = |C_\rho Z_r - C_r Z_\rho|. \quad (10)$$

Con esta información se puede reconstruir la métrica en su forma covariante

$$\begin{aligned} ds^2 = & (|C_\rho Z_r - C_r Z_\rho|) \left(\frac{dr^2}{\Delta_r} + \frac{d\rho^2}{\Delta_\rho} \right) \\ & + \frac{\Delta_\rho (C_r dt - Z_r d\phi)^2 - \Delta_r (C_\rho dt - Z_\rho d\phi)^2}{|C_\rho Z_r - C_r Z_\rho|}. \end{aligned} \quad (11)$$

Este elemento de línea a su vez debe ser reescrito en términos de las tétradas canónicas ortogonales, lo que impone nuevas condiciones a las funciones que aparecen en la ecuación (7), pues se requiere que todas sean polinomios cuadráticos. Si fijamos

$$C_\rho = 1, \quad C_r = a, \quad (12)$$

se deben solamente calcular las funciones de r y ρ en términos de las constantes (12) tales que generen una solución de vacío. Esta restricción conduce a las expresiones siguientes

$$\begin{aligned} Z_r &= r^2 + a^2, \\ Z_\rho &= a(1 - \rho^2), \\ \Delta_r &= r^2 - 2Mr + a^2, \\ \Delta_\rho &= 1 - \rho^2, \\ \rho &= \cos\theta. \end{aligned} \tag{13}$$

Finalmente sustituimos las relaciones de la ecuación (13) en la ecuación (11) y obtenemos la solución de Kerr en coordenadas de Boyer-Lindquist

$$\begin{aligned} ds^2 &= (r^2 + a^2 \cos^2\theta) \left\{ \frac{dr^2}{r^2 - 2Mr + a^2} + d\theta^2 \right\} \\ &+ \frac{\sin^2\theta [adt - (r^2 + a^2)d\phi]^2 - (r^2 - 2Mr + a^2)[dt - a\sin^2\theta d\phi]^2}{r^4 + a^2 \cos^2\theta}. \end{aligned} \tag{14}$$

Este método puede generalizarse para determinar la solución de Kerr-Newman para agujeros negros rotantes y con carga al resolver esta vez la ecuación electromagnética de Klein-Gordon. Aunque resulta un método más sencillo que resolver directamente las ecuaciones de campo de RG, sigue siendo un camino largo y relativamente complicado.

Podemos entonces decir que la obtención de soluciones con rotación en RG no es un problema trivial, sin embargo, el estudio de este tipo de soluciones y la obtención de ellas de una manera simplificada es de gran interés pues no solemos observar objetos estáticos en el universo; las estrellas que observamos presentan un momento angular al igual que planetas, cuasares, el agujero negro al centro de una galaxia, etc, y por lo tanto es necesario buscar soluciones a las ecuaciones de Einstein que permitan describir estos sistemas.

1.2 ESPACIO-TIEMPO NO CONMUTATIVO

El descubrimiento teórico de agujeros negros radiantes constituye un primer paso físicamente relevante para entender algunos aspectos de la gravedad cuántica [Di Grezia et al. \[2008\]](#). Después de treinta años de intensa investigación en este campo diversos aspectos del problema siguen siendo objeto de debate, entre ellos, una descripción plenamente satisfactoria de la última etapa de evaporación de un agujero negro. En el caso clásico (conmutativo) la temperatura del agujero negro incrementa mientras que su radio decrece; en su etapa final, el agujero negro desaparece y su temperatura diverge. Un modelo de agujero negro no conmutativo carece de esta divergencia [Nicolini \[2008\]](#).

Una característica de la mecánica cuántica es que de hecho no podemos determinar simultáneamente, con toda precisión algunos pares de observables. Esta es la base del principio

de incertidumbre de Heisenberg. Si ahora se aplica este concepto a las coordenadas (x, y) de un plano, no se podría determinar simultáneamente la coordenada x y la coordenada y con total precisión. De manera general se podrían considerar relaciones de conmutación de la forma

$$[x^\mu, x^\nu] = i\vartheta^{\mu\nu}, \quad (15)$$

para las coordenadas x^μ de un espacio tiempo. El significado o implicaciones físicas de (15) son [Pachol \[2013\]](#), [Fernández \[2002\]](#)

- Ya que las coordenadas no conmutan, cumplen con un principio de incertidumbre.

$$\Delta x^\mu \Delta x^\nu \geq |\vartheta^{\mu\nu}|. \quad (16)$$

- Esto significa que no podemos especificar la posición de una partícula en dicho espacio más allá de decir que está contenida en una región de área dada esencialmente por $|\vartheta^{\mu\nu}|$.
- En un espacio no conmutativo el concepto de punto deja de tener sentido; para fijar un punto hay que dar las dos coordenadas (x, y) . Como esto no es posible el espacio se vuelve difuso.

Cabe destacar que esta es solo una manera de introducir geometría no conmutativa en el espacio-tiempo que nos permitirá obtener soluciones analíticas a las ecuaciones de campo en RG. El análisis será así, no perturbativo.

En algunas teorías como las supercuerdas, loop quantum gravity, modelos matriciales, etc, [Aastrup \[2012\]](#), [Seiberg and Witten \[1999\]](#) el espacio en el que definimos la física adquiere características no conmutativas. Estos son sólo algunos de muchos ejemplos de cómo el desarrollo de la teoría de cuerdas ha afectado a diversos aspectos de la física teórica. Entre los diferentes resultados de la teoría de cuerdas, nos centramos en el resultado que nos dice que las coordenadas del espacio-tiempo se convierten en operadores no conmutativos en una D-brana. De este modo, se ha puesto en evidencia la necesidad de la cuantización del espacio-tiempo.

Ya que el espacio por debajo de la longitud de Planck es inaccesible, el espacio-tiempo a esas escalas se especula que sería no conmutativo [Pachol \[2013\]](#). De hecho esta no-conmutatividad podría librar a la teoría cuántica de campos de los infinitos que contiene, que en muchas ocasiones están asociados a que en dicha teoría se permiten longitudes tan pequeñas como queramos (o equivalentemente momentos tan grandes como queramos).

En la Figura 1 se presentan las teorías físicas según como aparezcan en ellas las tres constantes fundamentales G , \hbar y c . Por ejemplo la gravedad newtoniana se localiza en

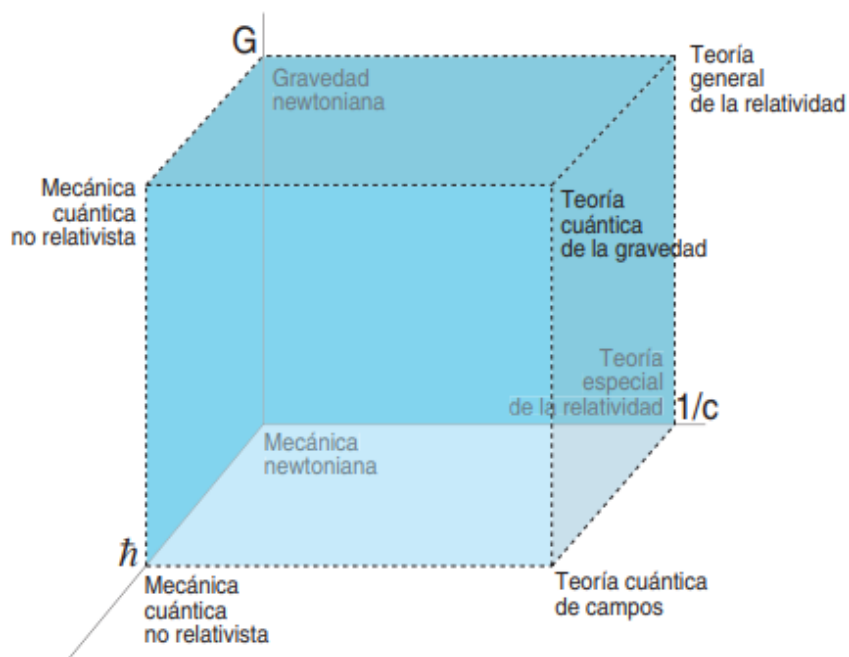


Figura 1: Mapa de las teorías físicas. Siguiendo las líneas punteadas es posible moverse de una teoría a otra, es decir considerando los valores de cada una de las constantes que los ejes representan.

la arista asociada a los límites de $\hbar \rightarrow 0$, $c \rightarrow \infty$ y $G \neq 0$. El objetivo final de una teoría cuántica de la gravitación que recuperaría las demás teorías conocidas como límites particulares, sigue representando un tema de frontera de la física actual; en la figura estaría localizada en la arista donde se consideran los valores de G , \hbar y c distintos de 0.

SOLUCIONES ESTÁTICAS NO CONMUTATIVAS

2.1 DISTRIBUCIONES EN GEOMETRÍA NO CONMUTATIVA

Hay varias maneras de trabajar con geometría no conmutativa (NC) en relatividad general, una de ellas es trabajar con las implicaciones que la geometría no conmutativa tiene en la estructura diferencial y en particular en el tensor de Riemann y trabajar con la parte geométrica de las ecuaciones de Einstein. Nosotros consideraremos un enfoque donde se modifican las fuentes puntuales de materia por distribuciones no conmutativas de materia o en su caso de carga (eléctrica o magnética). Estas modificaciones definen un tensor de energía-momento no conmutativo que permitirá un análisis no perturbativo de las correcciones cuánticas a espacios-tiempo clásicos.

Para entender como surgen estas distribuciones consideraremos la formulación de la mecánica cuántica en un plano no conmutativo. En dos dimensiones las coordenadas del espacio de configuración satisfacen entonces la relación de conmutación

$$[\hat{x}, \hat{y}] = i\vartheta \quad \text{con } \vartheta > 0, \quad (17)$$

dónde ϑ es una constante con dimensión de longitud al cuadrado. Usualmente se toma que $\vartheta \sim (l_p)^2$ donde l_p es la longitud de Planck.

2.1.1 Estados coherentes no conmutativos en el espacio de Hilbert-Schmidt

Definimos ahora los operadores de aniquilación y creación:

$$b \equiv \frac{1}{\sqrt{2\vartheta}}(\hat{x} + i\hat{y}), \quad b^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2\vartheta}}(\hat{x} - i\hat{y}). \quad (18)$$

Estos operadores satisfacen el álgebra de Fock ya que

$$\begin{aligned} [b, b^\dagger] &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\vartheta}} \right)^2 [\hat{x} + i\hat{y}, \hat{x} - i\hat{y}], \\ &= \frac{1}{2\vartheta} ([\hat{x}, -i\hat{y}] + [i\hat{y}, \hat{x}]), \\ &= \frac{1}{2\vartheta} (\vartheta + \vartheta) = 1. \end{aligned} \quad (19)$$

En analogía con lo que sucede con los operadores de creación y aniquilación en mecánica cuántica, hay un espacio de Fock asociado a los operadores b, b^\dagger , es decir, el espacio de configuración NC es isomórfico al espacio bosónico de Fock representado por:

$$\{b, b^\dagger\} \longrightarrow H_c = \left\{ \frac{(b^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle = |n\rangle \right\}. \quad (20)$$

Ahora bien, el espacio de Hilbert del sistema cuántico NC se puede formular a partir del conjunto de operadores de Hilbert-Schmidt actuando en el espacio de configuración NC (20)

$$H_q \equiv \{\psi(\hat{x}, \hat{y}) : \psi(\hat{x}, \hat{y}) \in B(H_c), tr_c[\psi^\dagger(\hat{x}, \hat{y})\psi(\hat{x}, \hat{y})] < \infty\}, \quad (21)$$

dónde tr_c denota la traza sobre el espacio de configuración NC y $B(H_c)$ es el conjunto de operadores acotados en H_c .

El álgebra de Heisenberg asociada a los operadores de posición y momento que actúan sobre los estados del espacio cuántico de Hilbert (21) está definida por las relaciones siguientes

$$\begin{aligned} \hat{X}\Psi(\hat{x}, \hat{y}) &= \hat{x}\Psi(\hat{x}, \hat{y}), \\ \hat{Y}\Psi(\hat{x}, \hat{y}) &= \hat{y}\Psi(\hat{x}, \hat{y}), \\ \hat{P}_x\Psi(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{\hbar}{\vartheta}[\hat{y}, \Psi(\hat{x}, \hat{y})], \\ \hat{P}_y\Psi(\hat{x}, \hat{y}) &= -\frac{\hbar}{\vartheta}[\hat{x}, \Psi(\hat{x}, \hat{y})]. \end{aligned} \quad (22)$$

Para distinguir entre los estados en el espacio de configuración NC y los que estén en el espacio de Hilbert-Schmidt usaremos la notación

$$\begin{aligned} |\cdot\rangle &\quad \text{estados en el espacio de configuraciones NC, y} \\ |\psi\rangle := \psi(\hat{x}, \hat{y}) &\quad \text{estados en el espacio de Hilbert Schmidt.} \end{aligned} \quad (23)$$

2.1.2 Estados propios asociados a operadores de creación y aniquilación no conmutativos en espacio de momentos

En la construcción de los estados coherentes que corresponden a estados propios del operador b usaremos las siguientes 4 propiedades

$$\begin{aligned}
 \text{I)} \quad & [b, b^\dagger] = 1, \\
 \text{II)} \quad & b|z\rangle = z|z\rangle, \quad z := \frac{1}{\sqrt{2\vartheta}}(\hat{x} + i\hat{y}), \\
 \text{III)} \quad & |z\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} e^{zb^\dagger} |0\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \\
 \text{IV)} \quad & |z, \bar{z}\rangle := \frac{1}{\sqrt{\vartheta}} |z\rangle \langle \bar{z}|.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Entonces tenemos

$$B|z, \bar{z}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\vartheta}} (\hat{X} + i\hat{Y})|z, \bar{z}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\vartheta}} (\hat{x} + i\hat{y})|z, \bar{z}\rangle = b|z, \bar{z}\rangle = \frac{b}{\sqrt{\vartheta}} |z\rangle \langle \bar{z}| = z|z, \bar{z}\rangle. \tag{25}$$

Ahora que sabemos como trabajar con estas variables, construyamos los estados propios $|p\rangle$ en el espacio de momentos, Para ello consideremos el problema de valores propios

$$\begin{aligned}
 P_i|p\rangle = p_i|p\rangle \quad \Rightarrow \quad & \frac{\hbar}{\vartheta} [y, |p\rangle] = p_x|p\rangle, \\
 & \frac{\hbar}{\vartheta} [x, |p\rangle] = p_y|p\rangle,
 \end{aligned} \tag{26}$$

donde $|p\rangle \in H_p$ que es el espacio de momentos. Sabemos de la mecánica cuántica que para una función $f(\hat{p})$ se cumple que

$$[\hat{x}, f(\hat{p})] = \frac{\partial f}{\partial \hat{p}} [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \frac{\partial f}{\partial \hat{p}}, \tag{27}$$

por lo que las relaciones anteriores se escriben como

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial |p\rangle}{\partial x} &= \frac{i}{\hbar} p_x |p\rangle, \\
 \frac{\partial |p\rangle}{\partial y} &= \frac{i}{\hbar} p_y |p\rangle.
 \end{aligned} \tag{28}$$

A partir de estas relaciones obtenemos

$$|p\rangle \sim e^{\frac{1}{\hbar} p_x \hat{x}}, \quad \& \quad |p\rangle \sim e^{\frac{1}{\hbar} p_y \hat{y}}, \tag{29}$$

por lo que podemos escribir

$$|p\rangle = c_0 \exp\left[\frac{1}{\hbar} p_x \hat{x} + \frac{1}{\hbar} p_y \hat{y}\right], \quad (30)$$

o bien

$$|p\rangle = c_0 \exp\left[i\sqrt{\frac{\vartheta}{2}}(\bar{p}b + pb^\dagger)\right], \quad (31)$$

donde hemos usado

$$x = \sqrt{\frac{\vartheta}{2}}(b + b^\dagger), \quad y = i\sqrt{\frac{\vartheta}{2}}(b - b^\dagger). \quad (32)$$

Para fijar el valor de la constante c_0 se usa el hecho de que $(p'|p) = \delta(p' - p)$ y obtenemos así

$$|c_0| = \sqrt{\frac{\vartheta}{2\pi\hbar^2}}. \quad (33)$$

El estado coherente $|p\rangle$ se escribe finalmente como

$$|p\rangle = \sqrt{\frac{\vartheta}{2\pi\hbar^2}} \exp\left[i\sqrt{\frac{\vartheta}{2}}(\bar{p}b + pb^\dagger)\right], \quad (34)$$

donde se ha elegido $c_0 = \bar{c}_0$.

2.1.3 Función de onda de partícula libre y relación de completez

Ahora podemos escribir la función de onda de la partícula libre como

$$\psi_p = (p|z, \bar{z}) = (p|z), \quad (35)$$

dónde [Banerjee et al. \[2010\]](#), [Gangopadhyay and Scholtz \[2009\]](#)

$$(z|p) := \text{tr}\left[\frac{|z\rangle\langle z|}{\sqrt{\vartheta}}|p\rangle\right] = \frac{1}{\sqrt{\vartheta}}\langle z|\psi(\hat{x}, \hat{y})|z\rangle. \quad (36)$$

para calcular el valor de este producto interno sabemos que

$$\begin{aligned} \exp\left[\frac{i}{\hbar}\sqrt{\frac{\vartheta}{2}}pb^\dagger\right]\exp\left[\frac{i}{\hbar}\sqrt{\frac{\vartheta}{2}}\bar{p}b\right] &= \exp\left[\frac{i}{\hbar}\sqrt{\frac{\vartheta}{2}}(pb^\dagger + \bar{p}b)\right]\exp\left[\frac{\vartheta}{4\hbar^2 p\bar{p}}\right], \\ \exp\left[\frac{i}{\hbar}\sqrt{\frac{\vartheta}{2}}\bar{p}b\right]\exp\left[\frac{i}{\hbar}\sqrt{\frac{\vartheta}{2}}pb^\dagger\right] &= \exp\left[\frac{i}{\hbar}\sqrt{\frac{\vartheta}{2}}(pb^\dagger + \bar{p}b)\right]\exp\left[\frac{-\vartheta}{4\hbar^2 p\bar{p}}\right]. \end{aligned} \quad (37)$$

Para obtener estas expresiones hemos usado la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff y la relación de conmutación satisfecha por los operadores b y b^\dagger .

En consecuencia, utilizando la primera igualdad de las expresiones anteriores, obtenemos

$$\begin{aligned}
\langle z|p\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\vartheta}} \left\langle z \left| c_0 \exp \left[\frac{i}{\hbar} \sqrt{\frac{\vartheta}{2}} (pb^\dagger + \bar{p}b) \right] \right| z \right\rangle \\
&= \frac{c_0}{\sqrt{\vartheta}} e^{-\frac{\vartheta}{4\hbar^2} p\bar{p}} \left\langle z \left| \exp \left[\frac{i}{\hbar} \sqrt{\frac{\vartheta}{2}} pb^\dagger \right] \exp \left[\frac{i}{\hbar} \sqrt{\frac{\vartheta}{2}} \bar{p}b \right] \right| z \right\rangle \\
&= \frac{c_0}{\sqrt{\vartheta}} e^{-\frac{\vartheta}{4\hbar^2} p\bar{p}} e^{\frac{i}{\hbar} \sqrt{\frac{\vartheta}{2}} (p\bar{z} + \bar{p}z)} \langle z|z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{\vartheta}{4\hbar^2} p\bar{p}} e^{\frac{i}{\hbar} \sqrt{\frac{\vartheta}{2}} (p\bar{z} + \bar{p}z)},
\end{aligned} \tag{38}$$

y en la expresion anterior hemos utilizado $\langle z|z\rangle = 1$.

Hablemos ahora de la relación de completez que deben cumplir nuestros estados. Esta relación está dada por la expresión

$$\int \frac{\vartheta dz d\bar{z}}{2\pi} |z\rangle \star |z\rangle = \mathbb{1}. \tag{39}$$

Aquí hemos utilizado el llamado producto de Voros \star [Banerjee et al. \[2010\]](#), el cual se define a continuación

$$f(z, \bar{z}) \star g(z, \bar{z}) \equiv f(z, \bar{z}) e^{\overleftarrow{\partial_{\bar{z}}} \overrightarrow{\partial_z}} g(z, \bar{z}).$$

Queremos saber entonces si este producto es el apropiado para definir la completez en nuestro espacio; para ello calculamos

$$\begin{aligned}
\langle p'|p\rangle &= \int \frac{\vartheta dz d\bar{z}}{2\pi} \langle p'|z\rangle \star |z\rangle \\
&= \int \frac{\vartheta dz d\bar{z}}{2\pi} c_0^2 e^{-\frac{\vartheta p' \bar{p}'}{4\hbar^2}} e^{-\frac{\vartheta p \bar{p}}{4\hbar^2}} e^{-\frac{i}{\hbar} \sqrt{\frac{\vartheta}{2}} (p' \bar{z} + \bar{p}' z)} e^{\overleftarrow{\partial_{\bar{z}}} \overrightarrow{\partial_z}} e^{\frac{i}{\hbar} \sqrt{\frac{\vartheta}{2}} (p \bar{z} + \bar{p} z)} \\
&= \int \frac{\vartheta dz d\bar{z}}{2\pi} c_0^2 e^{-\frac{\vartheta p' \bar{p}'}{4\hbar^2}} e^{-\frac{\vartheta p \bar{p}}{4\hbar^2}} e^{\frac{\vartheta p \bar{p}'}{2\hbar^2}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \sqrt{\frac{\vartheta}{2}} (\bar{p} - \bar{p}') z + \frac{i}{\hbar} \sqrt{\frac{\vartheta}{2}} (p - p') \bar{z} \right].
\end{aligned} \tag{40}$$

Para realizar esta integración hagamos el cambio de variable siguiente; sea $u = \frac{1}{\hbar} \sqrt{\frac{\vartheta}{2}} z$ de modo que $du = \frac{1}{\hbar} \sqrt{\frac{\vartheta}{2}} dz$ y en consecuencia

$$\langle p'|p\rangle = \exp \left[-\frac{\vartheta p' \bar{p}'}{4\hbar^2} - \frac{\vartheta p \bar{p}}{4\hbar^2} + \frac{\vartheta}{2\hbar^2} p' \bar{p} \right] \frac{1}{2\pi} \int \frac{dud\bar{u}}{\pi} e^{i(\bar{p} - \bar{p}')u - i(p - p')\bar{u}} = \delta(p' - p). \tag{41}$$

Vemos que este resultado reproduce la relación de ortonormalidad de los estados coherentes $|p\rangle$. El producto de Voros (\star) es entonces el adecuado para generar completez.

Ahora consideremos dos estados coherentes inspirados en no conmutatividad $|\zeta\rangle$ y $|\omega\rangle \in H_q$, tenemos entonces

$$|\zeta\rangle = \frac{1}{\sqrt{\vartheta}} |\zeta\rangle \langle \zeta|,$$

$$|\omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{\vartheta}} |\omega\rangle \langle \omega|.$$

El traslape entre estos dos estados coherentes es

$$\langle \omega | \zeta \rangle = \int \frac{\vartheta dz d\bar{z}}{\pi} (\omega | \zeta) \star (\zeta | \omega) = \text{tr} \left[\frac{1}{\vartheta} |\omega\rangle \langle \omega | \zeta \langle \zeta| \right] = \frac{1}{\vartheta} \langle \omega | \zeta \rangle \langle \zeta | \omega \rangle = \frac{1}{\vartheta} |\langle \zeta | \omega \rangle|^2. \quad (42)$$

Utilizando la relación entre operadores coherentes obtenemos la norma

$$|\langle \omega | \zeta \rangle|^2 = e^{-|\omega - \zeta|^2}. \quad (43)$$

Si consideramos ahora que podemos escribir nuestras expresiones en componentes x y y

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2\vartheta}} (\zeta_x + i\zeta_y),$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2\vartheta}} (\omega_x + i\omega_y),$$
(44)

entonces

$$|\zeta - \omega|^2 = \frac{1}{2\vartheta} \sqrt{(\zeta_x - \omega_x)^2 + (\zeta_y - \omega_y)^2} = \frac{r}{\sqrt{2\vartheta}}. \quad (45)$$

Combinando (45) con (43) obtenemos

$$\langle \omega | \zeta \rangle = \frac{1}{\vartheta} e^{-\frac{r^2}{2\vartheta}}. \quad (46)$$

Como se ha mostrado, el efecto del producto de Voros es el de generar completez en nuestro espacio, reemplazando la delta de Dirac obtenida en el caso clásico por una distribución gaussiana dependiente de ϑ la cual sigue siendo válida para grandes escalas; es por ello que la información del espacio no conmutativo está contenida en la distribución gaussiana.

La solución (46) se aproxima a la delta de Dirac en 2 dimensiones en el límite donde ϑ tiende a 0; podemos extender nuestro análisis a 3 dimensiones para obtener la Gaussiana

$$\frac{1}{(4\pi\vartheta)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4\vartheta}} \xrightarrow{\vartheta \rightarrow 0} \delta^{(3)}(r). \quad (47)$$

Este resultado tiene sentido pues recordemos que con la no conmutatividad de las coordenadas el concepto de punto deja de existir, en su lugar en el espacio se trabaja con secciones de volumen; la no conmutatividad hace difuso el espacio, pues recordemos que las coordenadas, satisfacen un principio de incertidumbre por lo que es necesario reemplazar una distribución puntual, como lo es la delta de Dirac con una distribución gaussiana en el espacio.

2.2 SOLUCIONES DE AGUJERO NEGRO

Utilizando el resultado (47) se propone una densidad de masa cuya distribución es una Gaussiana

$$\rho_m(r) = \frac{M}{(4\pi\vartheta)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4\vartheta}\right), \quad (48)$$

donde M es la masa de la partícula clásica [Smailagic and Spallucci \[2003\]](#).

De manera análoga se puede proponer una densidad de carga eléctrica con la misma estructura

$$\rho_{elec}(r) = \frac{Q}{(4\pi\vartheta)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4\vartheta}\right), \quad (49)$$

donde Q es la carga eléctrica clásica de la distribución.

Como puede observarse la no conmutatividad ha deformado únicamente la distribución de las fuentes tanto de materia como de carga, sin embargo no hay ningún cambio en la parte geométrica de las ecuaciones de Einstein, es por ello que el tensor de Einstein queda intacto, es decir, el tensor de Einstein en un espacio-tiempo NC es idéntico al tensor de Einstein clásico.

Por otro lado el tensor de energía-momento será modificado, lo cual es evidente pues las fuentes han sido modificadas; la distribución gaussiana que define la densidad de nuestras fuentes entra en la entrada temporal del tensor de energía-momento $T_{NC0}^0 = -\rho_{NC}(r)$. Este tensor debe cumplir con la condición de conservación $T_{NC}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$. Ya que en este trabajo se requieren soluciones con simetría esférica y de tipo Schwarzschild fijamos la componente de la métrica $g_{00} = -g_{11}^{-1}$ lo que nos deja con

$$T_{NC\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} -\rho_{NC} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & P_r & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & P_{\perp} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & P_{\perp} \end{pmatrix}, \quad (50)$$

con $P_r = -\rho_{NC}$ y $P_{\perp} = -\rho_{NC} - \frac{r}{2}\partial_r\rho_{NC}(r)$. [Nicolini \[2008\]](#)

Ahora sólo resta resolver las ecuaciones de Einstein NC para obtener las soluciones

$$G^{\mu\nu} = 8\pi T_{\text{NC}}^{\mu\nu}. \quad (51)$$

Las soluciones que vamos a obtener a estas ecuaciones no son aproximaciones, serán soluciones exactas. Estas ideas de deformación en las ecuaciones de campo gravitacional se han utilizado para la construcción de métricas inspiradas en no conmutatividad de Schwarzschild, Reissner-Nordström, Kerr, Kerr-Newman y Einstein-Born-Infeld [González et al. \[2015\]](#), [Nicolini \[2008\]](#), [Modesto and Nicolini \[2010\]](#).

2.2.1 Schwarzschild no conmutativo

Si sustituimos la distribución (48) en la componente T_{00} del tensor de energía momento de un fluido anisotrópico inspirado en NC y resolvemos las ecuaciones (51) obtendremos la solución

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}}\gamma\left(\frac{3}{2}; \frac{r^2}{4\vartheta}\right)\right) dt^2 + \left(1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}}\gamma\left(\frac{3}{2}; \frac{r^2}{4\vartheta}\right)\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (52)$$

donde

$$\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\vartheta}\right) \equiv \int_0^{\frac{r^2}{4\vartheta}} dt t^{1/2} e^{-t}, \quad (53)$$

es la función gamma incompleta por abajo. Definiendo

$$m(r) = 2M \frac{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\vartheta}\right)}{\sqrt{\pi}},$$

entonces (52) se puede reescribir en la forma

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (54)$$

Como podemos observar mantiene una gran similitud con la solución de Schwarzschild donde notamos que la masa pasa de ser una constante a ser una función de r .

Esta solución regulariza la singularidad que existe en el caso clásico cuando $r = 0$, ya que el escalar de curvatura en el origen es

$$R(0) = \frac{4M}{\sqrt{\pi}\vartheta^{3/2}}. \quad (55)$$

Como puede observarse no hay divergencias en el escalar de curvatura cuando $r = 0$, siempre que $\vartheta \neq 0$.

Por lo tanto se tiene que para $r \ll \sqrt{\vartheta}$ la curvatura es constante y positiva; en vez de encontrar una singularidad en la curvatura, encontramos para esta métrica un núcleo de de-Sitter cuya constante cosmológica está gobernada por no conmutatividad.

Utilicemos la expansión en serie de Taylor para la gamma incompleta

$$\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+s}}{n!(n+s)}, \quad (56)$$

sustituimos esta forma para la gamma incompleta en la métrica (54) y calculamos la componente g_{00} para $r \ll \sqrt{\vartheta}$

$$\begin{aligned} g_{00} &= - \left(1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}} \left[\frac{(-1)^0 \left(\frac{r^2}{4\vartheta}\right)^{3/2}}{0!(0+\frac{3}{2})} + O^4 \right] \right) \\ &= - \left(1 - \frac{Mr^2}{3\sqrt{\pi}\vartheta^{3/2}} \right). \end{aligned} \quad (57)$$

Como puede observarse en (57) no hay singularidad cuando $r = 0$; la anterior métrica corresponde a un espacio tiempo de de-Sitter cuya constante cosmologica es

$$\Lambda = \frac{M}{3\sqrt{\pi}\vartheta^{3/2}}. \quad (58)$$

La presencia de este núcleo con geometría de de-Sitter contribuye con un efecto de presión que contrarresta los efectos de gravedad en la materia fuera del núcleo, esto nos ayuda a entender como es que la solución (54) es una solución regular.

2.2.2 Reissner-Nordström en su versión no conmutativa

De manera análoga al caso anterior, utilizando (49) para resolver la ecuación de campo para un tensor de energía-momento electromagnético y combinando con la solución del tensor de energía-momento de materia obtenida en (52) obtenemos la solución

$$ds^2 = -f dt^2 + f^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (59)$$

donde

$$f = 1 - \frac{4M}{\sqrt{\pi}r} \gamma\left(\frac{3}{2}; \frac{r^2}{4\vartheta}\right) + \frac{Q^2}{\pi r^2} \left[\left[\gamma^2\left(\frac{1}{2}; \frac{r^2}{4\vartheta}\right) - \frac{r}{\sqrt{2\vartheta}} \gamma\left(\frac{1}{2}; \frac{r^2}{4\vartheta}\right) \right] + \sqrt{\frac{2}{\vartheta}} r \gamma\left(\frac{3}{2}; \frac{r^2}{4\vartheta}\right) \right]. \quad (60)$$

El elemento de línea (59) representa la versión NC de la métrica de Reissner-Nordström (RN), donde M es conocida como la masa ADM y Q es la carga eléctrica en unidades naturales Modesto and Nicolini [2010].

Para comprobar el comportamiento de la métrica (60) cerca de $r = 0$, tomaremos la expansión de gamma (58) para $r \ll \sqrt{\vartheta}$ de manera similar que en la sección pasada y obtenemos

$$g_{00} = -\left(1 - \frac{Mr^2}{3\sqrt{\pi}\vartheta^{3/2}}\right) + O^4. \quad (61)$$

Esta es la misma expresión que obtuvimos para Schwarzschild NC, es por ello que podemos concluir que tenemos un espacio-tiempo con un núcleo de de-Sitter con constante cosmologica

$$\Lambda = \frac{M}{3\sqrt{\pi}\vartheta^{3/2}}.$$

Esta no depende de la carga pues las contribuciones de la carga se encuentran en los términos de orden superior en (61). Este núcleo tiene efectos de presión sobre la materia que se oponen a los efectos gravitacionales, es por ello que la métrica de RN NC es una solución regular.

ESPACIOS TIEMPO CON ROTACIÓN

A continuación se utilizarán 2 métodos matemáticos para obtener soluciones con rotación a las ecuaciones de campo de Einstein a partir de soluciones estáticas; con dichos métodos buscamos generalizar la simetría de un espacio tiempo dado y transformarla para pasar de una solución esféricamente simétrica a una axialmente simétrica. Posteriormente, con los resultados obtenidos, se hace un breve análisis de las características de un espacio tiempo con rotación, y se genera el contraste entre el espacio-tiempo clásico y el no conmutativo mediante estas características.

3.1 EL ALGORITMO DE JANIS-NEWMAN

El algoritmo de Janis-Newman (JN) es un método matemático utilizado para generar soluciones exactas a la ecuaciones de Einstein con simetría axial a partir de soluciones estáticas esféricamente simétricas [Newman and Janis \[1965\]](#). Fue introducido originalmente por Newman y Janis, y fue posteriormente generalizado por Newman al caso cargado obteniendo así la primera solución de un agujero negro cargado con rotación (Kerr-Newman).

El algoritmo de JN presenta ciertos aspectos por los cuales es ampliamente criticado ya que no se sabe con certeza por qué funciona y se considera un procedimiento ad hoc sin fundamento físico. Una de las cosas que más se le recrimina es la arbitrariedad que presenta cuando, en uno de sus pasos, se requiere que las coordenadas tomen valores complejos, puesto que en algunos casos funciona de una manera y de modo distinto en otros. Sin embargo, las ventajas que presenta el algoritmo son grandes, ya que no requiere que se resuelvan ecuaciones diferenciales, sino que basta con verificar que la métrica obtenida de este modo satisface las ecuaciones de RG con rotación; esto hace del cálculo de soluciones con rotación un trabajo relativamente sencillo.

3.1.1 Algoritmo de Janis-Newman aplicado a una métrica general con simetría esférica

Consideremos el siguiente segmento de línea general para un espacio tiempo estático con simetría esférica:

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + e^{2\lambda(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (62)$$

A continuación describimos a los pasos involucrados en el algoritmo de JN para la obtención de una métrica axialmente simétrica a partir de esta métrica semilla.

1. El elemento de línea esféricamente simétrico se escribe en coordenadas nulas avanzadas $\{u, r, \theta, \phi\}$, haciendo el cambio de variable

$$du := dt - e^{\lambda(r) - \Phi(r)} dr,$$

de modo que

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} du^2 - 2e^{\Phi(r) + \lambda(r)} dudr + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (63)$$

2. Se expresa la forma contravariante de la métrica en términos de una tetrad nula $\{l^\mu, n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu\}$ como

$$g^{\mu\nu} = -l^\mu n^\nu - l^\nu n^\mu + m^\mu \bar{m}^\nu + \bar{m}^\mu m^\nu, \quad (64)$$

donde los elementos de la tetrad nula satisfacen

$$l^\mu l_\mu = m^\mu m_\mu = n^\mu n_\mu = 0, \quad l_\mu n^\mu = -m_\mu \bar{m}^\mu = 1, \quad l_\mu m^\mu = n_\mu \bar{m}^\mu = 0.$$

Para nuestra métrica (62) tenemos que

$$\begin{aligned} l^\mu &= \delta_1^\mu, \\ n^\mu &= e^{-\lambda(r) - \Phi(r)} \delta_0^\mu - \frac{1}{2} e^{-2\lambda(r)} \delta_1^\mu, \\ m^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}r} \left(\delta_2^\mu + \frac{i}{\sin\theta} \delta_3^\mu \right). \end{aligned} \quad (65)$$

3. Se permite a las coordenadas u y r tomar valores complejos con las siguientes condiciones:

- l^μ y n^μ deben permanecer reales.
- m^μ y \bar{m}^μ deben seguir siendo complejos conjugados uno de otro.
- Se debe poder regresar a las coordenadas u y r originales.

Este paso es el más difícil de completar pues existen múltiples formas de complexificar la coordenada r tales que satisfagan las tres condiciones anteriores y sólo una será la correcta. Usualmente se trabaja mediante una estrategia de prueba y error checando que la solución resultante satisfaga las ecuaciones de Einstein y que describa la solución con rotación que se desea determinar.

Este paso implica que las funciones $\lambda(r)$ y $\Phi(r)$ deben ser reemplazadas por nuevas funciones $\tilde{\lambda}(r, \bar{r})$ y $\tilde{\Phi}(r, \bar{r})$ tales que satisfagan las condiciones $\tilde{\lambda}(r, r) = \lambda(r)$ y $\tilde{\Phi}(r, r) = \Phi(r)$ lo que transforma nuestras tétradas (65) en

$$\begin{aligned} l^\mu &= \delta_1^\mu, \\ n^\mu &= e^{-\tilde{\lambda}(r, \bar{r}) - \tilde{\Phi}(r, \bar{r})} \delta_0^\mu - \frac{1}{2} e^{-2\tilde{\lambda}(r, \bar{r})} \delta_1^\mu, \\ m^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}\bar{r}} \left(\delta_2^\mu + \frac{i}{\text{sen}\theta} \delta_3^\mu \right). \end{aligned} \quad (66)$$

4. Se lleva cabo un cambio complejo de coordenadas

$$u = u' + i a \cos\theta, \quad r = r' - i a \cos\theta, \quad \theta = \theta', \quad \phi = \phi'. \quad (67)$$

donde se ha introducido el parámetro a que es interpretado en la solución final como el momento angular por unidad de masa, la información acerca de la rotación está contenida en este parámetro; si a es un número muy grande significa que nuestra fuente está rotando a una gran velocidad y si $a = 0$ tenemos una fuente estática.

Recordemos que nuestras tétradas nulas transforman como un vector

$$Z^\mu = \tilde{Z}^\nu \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu}.$$

Debido al cambio de variable en las coordenadas de nuevo cambian nuestras funciones $\tilde{\lambda}(r, \bar{r})$ y $\tilde{\Phi}(r, \bar{r})$, pero esta vez sabemos exactamente cómo. En consecuencia obtenemos

$$\begin{aligned} l^\mu &= \delta_1^\mu, \\ n^\mu &= e^{-\lambda(r, \theta) - \Phi(r, \theta)} \delta_0^\mu - \frac{1}{2} e^{-2\lambda(r, \theta)} \delta_1^\mu, \\ m^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}(r + i a \cos\theta)} \left(i a \text{sen}\theta (\delta_0^\mu - \delta_1^\mu) + \delta_2^\mu + \frac{i}{\text{sen}\theta} \delta_3^\mu \right). \end{aligned} \quad (68)$$

5. Finalmente construimos una métrica con esta nueva tétrada utilizando la ecuación (64). Ya es nuestra solución con rotación donde a es interpretado como el momento

angular por unidad de masa. Al combinar (68) con (64) obtenemos las componentes contravariantes $g^{\mu\nu}$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{a^2 \text{sen}^2 \theta}{\rho^2} & -e^{-\lambda(r,\theta) - \Phi(r,\theta)} - \frac{a^2 \text{sen}^2 \theta}{\Sigma} & 0 & \frac{a}{\rho^2} \\ \cdot & -e^{-2\lambda(r,\theta)} + \frac{a^2 \text{sen}^2 \theta}{\rho^2} & 0 & -\frac{a}{\rho^2} \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{\rho^2 \text{sen}^2 \theta} \end{pmatrix}, \quad (69)$$

donde $\rho^2 := r^2 + a^2 \cos^2 \theta$.

Así tenemos ya nuestra métrica resultante con rotación en su forma contravariante. Calculando la matriz inversa obtenemos la métrica en su forma covariante

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{2\Phi(r,\theta)} & e^{\lambda(r,\theta) + \Phi(r,\theta)} & 0 & a^2 \text{sen}^2 \theta e^{\Phi(r,\theta)} (e^{\lambda(r,\theta)} - e^{\Phi(r,\theta)}) \\ \cdot & 0 & 0 & -a e^{\lambda(r,\theta) + \Phi(r,\theta)} \text{sen}^2 \theta \\ \cdot & \cdot & -\rho^2 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -\text{sen}^2 \theta (\rho^2 + a^2 \text{sen}^2 \theta e^{\Phi(r,\theta)} (2e^{\lambda(r,\theta)} - e^{\Phi(r,\theta)})) \end{pmatrix}. \quad (70)$$

El resultado es una métrica que, en principio, con las transformaciones adecuadas de las funciones λ y Φ , nos permitirá describir un espacio-tiempo con rotación en coordenadas nulas de Eddington-Finkelstein (EF) $\{u, r, \theta, \phi\}$. Esta métrica posee simetría axial.

3.1.2 Coordenadas de Boyer-Lindquist

Aunque ya tenemos nuestra solución expresada en coordenadas de EF, estas coordenadas podrían no ser las más adecuadas para trabajar; algunas de sus desventajas son que la coordenada u no puede ser interpretada naturalmente como el tiempo, el tener tres términos fuera de la diagonal hace difícil encontrar e interpretar sus horizontes y ergoesfera, además en el sistema coordenado que a continuación se presenta es fácil ver que si $a \rightarrow 0$ recuperamos el caso estático de nuestro espacio tiempo.

Realizaremos entonces un cambio de coordenadas, donde llevaremos a la métrica a un sistema coordenado donde el único coeficiente métrico fuera de la diagonal distinto de cero será g_{03} . Este tipo de coordenadas son llamadas de Boyer-Lindquist (BL) $\{t, r, \theta, \varphi\}$ [Boyer and Lindquist \[1967\]](#), [Carroll \[1997\]](#). Para hacer este procedimiento debemos realizar el cambio de variable siguiente

$$du = dt - g(r)dr, \quad d\phi = d\varphi - h(r)dr, \quad (71)$$

donde debemos nosotros encontrar condiciones sobre las funciones $g(r)$ y $h(r)$ tales que $g_{01} = g_{13} = 0$. Al aplicar esta transformación encontramos a partir de la métrica (70) las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} g(r) &= \frac{e^{\lambda(r,\theta)}(\rho^2 + a^2 \text{sen}^2 \theta e^{\lambda(r,\theta) + \Phi(r,\theta)})}{e^{\Phi(r,\theta)}(\rho^2 + a^2 \text{sen}^2 \theta e^{2\lambda(r,\theta)})}, \\ h(r) &= -\frac{ae^{2\lambda(r,\theta)}}{\rho^2 + a^2 \text{sen}^2 \theta e^{2\lambda(r,\theta)}}. \end{aligned} \quad (72)$$

Aplicando entonces este resultado (72) en (70) obtenemos la siguiente métrica

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{2\Phi(r,\theta)} & 0 & 0 & a \text{sen}^2 \theta e^{\Phi(r,\theta)} (e^{\lambda(r,\theta)} - e^{\Phi(r,\theta)}) \\ \cdot & \frac{\rho^2}{\rho^2 e^{-2\lambda(r,\theta)} + a^2 \text{sen}^2 \theta} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \rho^2 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \text{sen}^2 \theta (\rho^2 + a^2 \text{sen}^2 \theta e^{\Phi(r,\theta)} (2e^{\lambda(r,\theta)} - e^{\Phi(r,\theta)})) \end{pmatrix} \quad (73)$$

La solución (73) está ya escrita en las coordenadas usuales $\{t, r, \theta, \phi\}$, lo único que debemos hacer ahora es, sustituir los valores para las funciones $\lambda(r, \theta)$ y $\Phi(r, \theta)$, considerando una complejificación adecuada para cada caso.

Hemos logrado extender la simetría esférica original de la métrica semilla para obtener otra métrica con simetría axial; físicamente hemos pasado de un espacio tiempo estático a uno con rotación.

3.1.3 Soluciones clásicas con rotación

Todo lo realizado en las dos secciones pasadas fue para simplificar nuestro trabajo de determinar soluciones con rotación a partir de soluciones estáticas en RG. Ahora no será necesario repetir todo el proceso anterior, sino que solo debemos sustituir y comprobar nuestras soluciones para cada caso con el fin de asegurarnos que la solución con rotación encontrada por el algoritmo JN corresponda al sistema con rotación que deseamos analizar. A continuación aplicaremos el algoritmo de Janis-Newman a las métricas de Schwarzschild y Reissner-Nordström; estas dos soluciones a las ecuaciones de RG cumplen con la condición de ser soluciones estáticas esféricamente simétricas.

3.1.3.1 La métrica de Kerr a partir de la métrica de Schwarzschild

Consideremos el elemento de línea de Schwarzschild

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \\ &= -f_s dt^2 + f_s^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \\ \text{donde } f_s &:= 1 - \frac{2M}{r}. \end{aligned} \quad (74)$$

Notemos que de acuerdo a (62) podemos identificar $e^{2\Phi} = e^{-2\lambda} = f_s$ o bien $\Phi = -\lambda$. Sustituyendo esta información directamente en (73) obtenemos

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\tilde{f}_s & 0 & 0 & a \operatorname{sen}^2 \theta (1 - \tilde{f}_s) \\ \cdot & \frac{\rho^2}{\rho^2 \tilde{f}_s + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \rho^2 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \operatorname{sen}^2 \theta (\rho^2 + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta (2 - \tilde{f}_s)) \end{pmatrix} \quad (75)$$

donde $\rho^2 = a^2 \cos^2 \theta + r^2$.

Para este caso se ha elegido en el paso 3 del algoritmo de JN la complexificación:

$$f_s \longrightarrow f_s(r, \bar{r}) = 1 - \frac{2Mr}{r\bar{r}}.$$

Cabe destacar que no hay razón en particular para elegir de este modo la complexificación, se eligió así únicamente porque funciona, esta elección es la única que nos llevará a reproducir el espacio-tiempo de Kerr Szekeres [1998]. Con este resultado, después del cuarto paso obtenemos

$$\tilde{f}_s = 1 - \frac{2Mr}{\rho^2}. \quad (76)$$

Después de hacer un poco de algebra llegamos al elemento de línea

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{4Mr a \operatorname{sen}^2 \theta}{\rho^2} d\varphi dt + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \\ &\quad + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mr a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{\rho^2}\right) \operatorname{sen}^2 \theta d\varphi^2, \end{aligned} \quad (77)$$

con $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$. Recordemos que a debe ser interpretado en esta expresión como el momento angular por unidad de masa, es decir $a = \frac{J}{M}$.

La ecuación (77) coincide con la solución de Kerr en coordenadas de BL; hemos llegado así al resultado deseado de obtener una solución a la ecuaciones de RG con rotación a partir

de una solución estática.

3.1.3.2 La métrica de Kerr-Newman a partir de Reissner-Nordström

Consideremos ahora el elemento de línea de RN

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \\ &= -f_q dt^2 + f_q^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \\ \text{donde } f_q &:= 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}. \end{aligned} \quad (78)$$

Notemos de igual manera que de acuerdo a (62) podemos identificar $e^{2\Phi} = e^{-2\lambda} = f_q$ o bien $\Phi = -\lambda$. Sustituyendo en (73) obtenemos exactamente (75) y sólo ha cambiado nuestra f_s por f_q ; de modo que

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\tilde{f}_q & 0 & 0 & a \operatorname{sen}^2 \theta (1 - \tilde{f}_q) \\ \cdot & \frac{\rho^2}{\rho^2 \tilde{f}_q + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \rho^2 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \operatorname{sen}^2 \theta (\rho^2 + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta (2 - \tilde{f}_q)) \end{pmatrix}. \quad (79)$$

Para este caso se ha elegido en el paso 3 del algoritmo de JN una complexificación similar a la que se eligió para f_s

$$f_q \longrightarrow f_q(r, \bar{r}) = 1 - \frac{2Mr}{r\bar{r}} + \frac{Q^2}{r\bar{r}}.$$

Reiteramos el hecho de que no hay una razón particular para elegir esta complexificación frente a otras de no ser porque funciona. De esta manera la función métrica se escribe como

$$\tilde{f}_q = 1 - \frac{2Mr}{\rho^2} + \frac{Q^2}{\rho^2}. \quad (80)$$

Con esta forma se obtiene finalmente para la métrica con rotación

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{\tilde{\Delta} - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{\rho^2} dt^2 - \frac{\rho^2}{\tilde{\Delta}} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 \\ &+ 2a \operatorname{sen}^2 \theta \left(1 - \frac{\tilde{\Delta} - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{\rho^2}\right) dt d\varphi \\ &- \operatorname{sen}^2 \theta \left[\rho^2 + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta \left(2 - \frac{\tilde{\Delta} - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{\rho^2}\right)\right] d\varphi^2, \end{aligned} \quad (81)$$

con $\tilde{\Delta} = r^2 - 2Mr + Q^2 + a^2$.

Esta solución que corresponde a la métrica de Kerr-Newman en coordenadas de Boyer-Lindquist.

3.1.4 Espacios-tiempo NC con rotación por medio de algoritmo de Janis-Newman

Las anteriores métricas fueron calculadas para ilustrar como el algoritmo de JN puede ser implementado para métricas específicas. Deseamos ahora aplicarlo a un espacio-tiempo no conmutativo. Como se vio en el capítulo 2, los espacios tiempo de Schwarzschild y Reissner-Nordström en su versión no conmutativa a simple vista se parecen mucho en su forma funcional a los clásicos. Sin embargo, los coeficientes métricos g_{00} y g_{11} son muy diferentes debido a la presencia de la función gamma incompleta. Ahora procederemos a encontrar una complejificación adecuada para estas métricas no conmutativas que nos permiría obtener métricas no conmutativas con rotación.

3.1.4.1 La métrica de Kerr no conmutativa

Tomemos la ecuación (52) que representa la versión no conmutativa del espacio-tiempo de Schwarzschild no conmutativo

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \\ &= -f'_s dt^2 + f_s'^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \end{aligned} \quad (82)$$

donde $f'_s = 1 - \frac{2m(r)}{r}$ y $m(r) = \frac{M\gamma(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta})}{\Gamma(\frac{3}{2})}$.

Como puede observarse de esta expresión, la métrica posee exactamente la misma forma que la ecuación (74) y por lo tanto obtendremos (75) con las modificaciones apropiadas; lo diferente aquí es nuestra f'_s . Explícitamente tenemos que

$$f'_s = 1 - \frac{2m(r)}{r} = 1 - \frac{2M\gamma(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta})}{\Gamma(\frac{3}{2})r} = 1 - \frac{4M\gamma(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta})}{\sqrt{\pi}r}. \quad (83)$$

Para elegir la complejificación apropiada conviene recordar que las métricas que se pueden escribir en la descomposición de Kerr-Schild, son también llamadas de clase tipo Schwarzschild; esta descomposición tiene la forma

$$ds^2 = ds_M^2 - \frac{j(r)}{r^2} (k_\mu dx^\mu)^2, \quad (84)$$

donde ds_M^2 es el elemento de línea de Minkowski, k_μ es un cuadrivector nulo y la función $j(r)$ sólo depende de la coordenada radial r . En el caso de Schwarzschild (conmutativo) tenemos por ejemplo que $k_\mu = (1, -1, 0, 0)$ y $j(r) = 2Mr$ [Smailagic and Spallucci \[2010\]](#).

Si consideramos un espacio-tiempo con simetría esférica y rompemos su simetría para llegar a un espacio tiempo de simetría axial, la función $j(r)$ se mantiene intacta; todas las métricas con rotación conocidas tienen este comportamiento respecto de sus versiones estáticas, es por ello que es de esperarse un comportamiento similar para espacios-tiempo NC con rotación [Modesto and Nicolini \[2010\]](#).

Resulta que la métrica (82) es de clase tipo Schwarzschild con $j(r) = 2m(r)r$, por lo que la función $m(r)$ la cual tiene incluida la información acerca de la NC no cambia, es decir

$$f'_s \longrightarrow f'_s(r, \bar{r}) = 1 - \frac{2m(r)r}{r\bar{r}}.$$

No hemos tocado el producto $m(r)r$ pues es una condición para obtener el resultado deseado. De esta manera obtenemos

$$\tilde{f}'_s = 1 - \frac{2m(r)r}{\rho^2}, \quad (85)$$

que tiene la misma estructura que la función conmutativa clásica por lo que al final obtenemos

$$\begin{aligned} ds^2 = & - \left(1 - \frac{2m(r)r}{\rho^2} \right) dt^2 - \frac{4m(r)r a \sin^2 \theta}{\rho^2} d\varphi dt + \frac{\rho^2}{\Delta'} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \\ & + \left(r^2 + a^2 + \frac{2m(r)r a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta d\varphi^2, \end{aligned} \quad (86)$$

con $\Delta' = r^2 - 2m(r)r + a^2$, la cual corresponde directamente con el resultado deseado, la métrica de Kerr no conmutativa.

3.1.4.2 La métrica de Kerr-Newman no conmutativa

Por último consideremos la métrica de Reissner-Nordström no conmutativa (59)

$$\begin{aligned} ds^2 = & - \left(1 - \frac{2m(r)}{r} + \frac{q(r)^2}{r^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m(r)}{r} + \frac{q(r)^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \\ = & -f'_q dt^2 + f_q{}^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \end{aligned} \quad (87)$$

donde $f'_q = 1 - \frac{2m(r)}{r} + \frac{q(r)^2}{r^2}$.

Analogamente al caso de la derivación de la solución de Kerr no conmutativa, la métrica (87) es de clase tipo Schwarzschild también y ahora $j(r) = 2m(r)r + q(r)^2$ por lo que las expresiones de $m(r)$ y $q(r)$ permanecerán intactas; tenemos que

$$f'_q \longrightarrow f'_q(r, \bar{r}) = 1 - \frac{2m(r)r}{r\bar{r}} + \frac{q(r)^2}{r\bar{r}},$$

en consecuencia

$$\tilde{f}'_q = 1 - \frac{2m(r)r}{\rho^2} + \frac{q(r)^2}{\rho^2}. \quad (88)$$

De nuevo nos encontramos con la misma estructura que la parte clásica, así que directamente obtenemos

$$\begin{aligned} ds^2 = & \frac{\tilde{\Delta}' - a^2 \text{sen}^2 \theta}{\rho} dt^2 - \frac{\rho}{\tilde{\Delta}'} dr^2 - \rho d\theta^2 \\ & + 2a \text{sen}^2 \theta \left(1 - \frac{\tilde{\Delta}' - a^2 \text{sen}^2 \theta}{\rho} \right) dt d\varphi \\ & - \text{sen}^2 \theta \left[\rho + a^2 \text{sen}^2 \left(2 - \frac{\tilde{\Delta}' - a^2 \text{sen}^2 \theta}{\rho} \right) \right] d\varphi^2, \end{aligned} \quad (89)$$

donde $q(r) = \frac{Q^2}{\pi} \left[\left[\gamma^2 \left(\frac{1}{2}; \frac{r^2}{4\theta} \right) - \frac{r}{\sqrt{2\theta}} \gamma \left(\frac{1}{2}; \frac{r^2}{4\theta} \right) \right] + \sqrt{\frac{2}{\theta}} r \gamma \left(\frac{3}{2}; \frac{r^2}{4\theta} \right) \right]$
y $\tilde{\Delta}' = r^2 - 2m(r)r + q(r)^2 + a^2$.

Este elemento de línea corresponde a la solución de Kerr-Newman en su versión no conmutativa que describe una distribución difusa de masa en rotación con carga.

3.2 SOLUCIONES CON ROTACIÓN EN RELATIVIDAD GENERAL SIN COMPLEXIFICACIÓN

Como se ha mencionado, el algoritmo de JN falla al no proporcionar una manera sistemática de conocer la forma que toman las coordenadas del espacio-tiempo luego de permitir que estas tomen valores complejos. Ante esta problemática se desarrolló un método alternativo [Azreg-Aïnou \[2014\]](#) que toma prácticamente todos los pasos del algoritmo de J-N, excepto aquel en el que tenemos esta ambigüedad.

Sin complexificar las coordenadas, en [Azreg-Aïnou \[2014\]](#) se resuelven las ecuaciones de campo tomando como base el tensor de energía-momento de un fluido perfecto y considerando la forma conocida de agujeros negros regulares, se logra obtener una forma para los coeficientes de la métrica con rotación, en términos de los coeficientes de la métrica estática. Este procedimiento es libre de ambigüedades.

3.2.1 Ecuaciones de campo sin complexificación

Al igual que en el algoritmo de JN, partimos de un elemento de línea estático esféricamente simétrico

$$ds^2 = -G(r)dt^2 + \frac{dr^2}{F(r)} + H(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (90)$$

con funciones G , F y H dependientes de la variable radial r . Escribamos ahora este elemento de línea en coordenadas de Eddington-Finkelstein(EF) introduciendo el cambio de variable siguiente

$$du = dt - dr / \sqrt{FG}.$$

Obtenemos así

$$ds^2 = -G(r)du^2 - \frac{2G(r)drdu}{\sqrt{F(r)G(r)}} + H(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (91)$$

A continuación reescribimos la métrica anterior en términos de tetradas nulas usando la ecuación (64). Esto da como resultado las siguientes componentes

$$\begin{aligned} l^\mu &= \delta_r^\mu, \\ n^\mu &= \sqrt{\frac{F}{G}}\delta_u^\mu - \frac{F}{2}\delta_r^\mu, \\ m^\mu &= \frac{(\delta_\theta^\mu + \frac{i}{\sin\theta}\delta_\varphi^\mu)}{\sqrt{2H}}. \end{aligned} \quad (92)$$

Ahora realizaremos la transformación compleja (67), y adicionalmente supondremos que nuestras funciones dependientes de r transforman de la siguiente forma

$$\{G(r), F(r), H(r)\} \rightarrow \{A(r, \theta, a), B(r, \theta, a), \Psi(r, \theta, a)\}, \quad (93)$$

donde $\{A, B, \Psi\}$ son funciones aún desconocidas. Cuando $a \rightarrow 0$, estas funciones deben regresar al conjunto original $\{F, G, H\}$, pues son su forma estática; en consecuencia se debe cumplir

$$\lim_{a \rightarrow 0} A(r, \theta, a) = G(r), \quad \lim_{a \rightarrow 0} B(r, \theta, a) = F(r), \quad \lim_{a \rightarrow 0} \Psi(r, \theta, a) = H(r). \quad (94)$$

La transformación compleja dada por (67) implica que nuestras tétradas quedan como

$$\begin{aligned} l^\mu &= \delta_r^\mu, \\ n^\mu &= \sqrt{\frac{B}{A}}\delta_u^\mu - \frac{B}{2}\delta_r^\mu, \\ m^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2\Psi}} \left[\delta_\theta^\mu + i \sin\theta (\delta_u^\mu - \delta_r^\mu + \frac{i}{\sin\theta} \delta_\varphi^\mu) \right]. \end{aligned} \quad (95)$$

Utilizando esta tétrada y (64) reconstruimos la métrica en su forma contravariante. Las componentes contravariantes son explícitamente

$$\begin{aligned}
g^{uu}(r, \theta) &= -\frac{a^2 \sin^2 \theta}{\Psi}, & g^{u\varphi}(r, \theta) &= -\frac{a}{\Psi}, \\
g^{\varphi\varphi}(r, \theta) &= -\frac{1}{\Psi \sin^2 \theta}, & g^{\theta\theta}(r, \theta) &= -\frac{1}{\Psi}, \\
g^{rr}(r, \theta) &= -B - \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\Psi}, & g^{r\varphi}(r, \theta) &= \frac{a}{\Psi}, \\
g^{ur}(r, \theta) &= \sqrt{\frac{B}{A} + \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\Psi}}.
\end{aligned} \tag{96}$$

La inversión de la matriz $g^{\mu\nu}$ asociada a las componentes contravariantes nos da el elemento de línea siguiente

$$\begin{aligned}
ds^2 = & Adu^2 + 2\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}dudr + 2a\sin^2\theta\left(\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} - A\right)dud\varphi - 2a\sin^2\theta\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}drd\varphi - \Psi d\theta^2 \\
& - \sin^2\theta\left[\Psi + a^2\sin^2\theta\left(2\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} - A\right)\right]d\varphi^2.
\end{aligned} \tag{97}$$

La métrica está escrita en coordenadas de EF. Para hacer la conexión con la forma estándar en términos de las variables $\{t, r, \theta, \phi\}$, realizaremos el cambio de coordenadas (71)

$$du = dt - \lambda(r)dr, \quad d\varphi = d\phi - \chi(r)dr. \tag{98}$$

En consecuencia obtendremos de manera similar a (72) las expresiones,

$$\lambda(r) = \frac{(K + a^2)}{FH + a^2}, \quad \chi(r) = \frac{a}{FH + a^2}, \tag{99}$$

donde

$$K \equiv \sqrt{\frac{F(r)}{G(r)}}H(r). \tag{100}$$

Estas expresiones garantizan que

$$g_{tr} = g_{rt} = 0.$$

Para realizar este paso, donde las transformaciones no dependen de las funciones $\{A, B, \Psi\}$, se impone que λ y χ sean funciones únicamente de r con el objetivo de que (98) sea una

transformación global de coordenadas, es decir, que sea válida para cualquier valor del ángulo polar θ . Se elige además que la forma de las funciones A y B sea como sigue

$$\begin{aligned} A(r, \theta) &= \frac{(FH + a^2 \cos^2 \theta) \Psi}{(K + a^2 \cos^2 \theta)^2}, \\ B(r, \theta) &= \frac{FH + a^2 \cos^2 \theta}{\Psi}, \end{aligned} \quad (101)$$

donde Ψ es una función aún sin determinar y que cumple con las condiciones (94). Utilizando entonces (98), (99), (100) y (101) transformamos la métrica a coordenadas de Boyer-Lindquist obteniendo

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{(FH + a^2 \cos^2 \theta) \Psi dt^2}{(K + a^2 \cos^2 \theta)^2} + \frac{\Psi dr^2}{FH + a^2} - 2a \sin^2 \theta \left[\frac{K - FH}{(K + a^2 \cos^2 \theta)^2} \right] \Psi dt d\phi + \Psi d\theta^2 \\ &+ \Psi \sin^2 \theta \left[1 + a^2 \sin^2 \theta \frac{2K - FH + a^2 \cos^2 \theta}{(K + a^2 \cos^2 \theta)^2} \right] d\phi^2. \end{aligned} \quad (102)$$

La métrica anterior podemos escribirla en su forma de Kerr de la siguiente manera

$$ds^2 = -\frac{\Psi}{\rho^2} \left[\left(1 - \frac{2f}{\rho^2} \right) dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \frac{4af \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\sum \sin^2 \theta}{\rho^2} d\phi^2 \right], \quad (103)$$

donde

$$\begin{aligned} \rho^2 &\equiv K + a^2 \cos^2 \theta, & 2f(r) &\equiv H - FH, \\ \Delta(r) &\equiv FH + a^2, & \Sigma &\equiv (K + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (104)$$

o bien

$$ds^2 = \frac{\Psi}{\rho^2} \left[\frac{\Delta}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [adt - (K + a^2) d\phi]^2 \right]. \quad (105)$$

Para determinar la forma de Ψ , consideramos las ecuaciones de campo

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (106)$$

Se ha elegido $T_{\mu\nu}$ como el tensor de energía-momento de un fluido anisotrópico cuyo eje de rotación es el eje z . La estructura de este tensor está dada por

$$T^{\mu\nu} = \epsilon e_t^\mu e_t^\nu + p_r e_r^\mu e_r^\nu + p_\theta e_\theta^\mu e_\theta^\nu + p_\phi e_\phi^\mu e_\phi^\nu, \quad (107)$$

donde e_t^μ es la cuadrivelocidad del fluido, ϵ es su densidad, $\{p_r, p_\theta, p_\phi\}$ son las componentes de su presión y $\{e_t, e_r, e_\theta, e_\phi\}$ es la base dual ($e_\nu = \omega^\mu g_{\mu\nu}$) de las 1-formas $\{\omega^t, \omega^r, \omega^\theta, \omega^\phi\}$ definidas por (105) de la forma

$$\begin{aligned}\omega^t &\equiv \sqrt{\Psi\Delta}(dt - a\sin^2\theta d\phi)/\rho^2, & \omega^r &\equiv -\sqrt{\Psi}dr/\sqrt{\Delta}, \\ \omega^\theta &\equiv -\sqrt{\Psi}d\theta, & \omega^\phi &\equiv -\sqrt{\Psi}\sin\theta[adt - (K + a^2)d\phi]/\rho^2.\end{aligned}\quad (108)$$

Ya que este tensor $T_{\mu\nu}$ describe un fluido con rotación alrededor del eje z , obtenemos la ecuación $G_{r\theta} = 0$ de (106) o equivalentemente

$$(K + a^2y^2)^2(3\Psi_{,r}\Psi_{,y^2} - 2\Psi\Psi_{,ry^2}) = 3a^2K_{,r}\Psi^2, \quad (109)$$

Por otro lado la consistencia de las ecuaciones de campo y la forma del tensor $T^{\mu\nu}$ implican que

$$[K_{,r^2} + K(2 - K_{,rr}) - a^2y^2(2 + K_{,rr})]\Psi + (K + a^2y^2)(4y^2\Psi_{,y^2} - K_{,r}\Psi_{,r}) = 0, \quad (110)$$

donde $y = \cos\theta$.

Para hacer la conexión con agujeros negros regulares fijemos $G = F$ y $H = r^2$ en (90); esta elección se basa en el hecho de que todos los agujeros negros regulares conocidos cumplen con estas condiciones. La ecuación (100) implica que $K = H = r^2$, ahora es fácil verificar que

$$\Psi = r^2 + a^2\cos^2\theta, \quad (111)$$

Es una solución de (109) y (110) que además cumple con las condiciones (94). Por lo que la métrica (103) tomando $H = K = r^2$ y $G = F$ adquiere la forma

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2f}{\rho^2}\right)dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 - \frac{4af\sin^2\theta}{\rho^2}dtd\phi + \rho^2d\theta^2 + \frac{\Sigma\sin^2\theta}{\rho^2}d\phi^2, \quad (112)$$

donde

$$\begin{aligned}\rho^2 &= r^2 + a^2\cos^2\theta, & 2f &= r^2(1 - F), & \Delta &= r^2F + a^2 = r^2 - 2f + a^2, \\ \Sigma &= (r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta.\end{aligned}\quad (113)$$

La ecuación (112) es entonces la métrica con rotación; nótese que ésta solo depende de los coeficientes métricos del espacio-tiempo estático, por lo que en principio, solo necesitamos una métrica estática esféricamente simétrica que cumpla con $G = F$ y $H = r^2$ para generar un espacio tiempo rotante mediante este método, sin necesidad de realizar ninguna complejización de coordenadas. Este último aspecto elimina la ambigüedad existente en el algoritmo de Janis-Newman.

3.2.2 Aplicaciones

Procederemos ahora a aplicar el método discutido en la sección anterior a las métricas estáticas a las que hemos aplicado ya el algoritmo de JN para comparar ambos procedimientos y verificar su consistencia.

3.2.2.1 De Schwarzschild a la solución de Kerr

Para obtener la solución de Kerr debemos tomar la métrica de Schwarzschild por lo que hacemos las identificaciones

$$G = F = 1 - \frac{2M}{r}. \quad (114)$$

La ecuación (113) toma la forma

$$\begin{aligned} \rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta, & 2f &= 2Mr, & \Delta &= r^2 - 2Mr + a^2, \\ \Sigma &= (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (115)$$

En consecuencia (112) nos arroja

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \frac{4aMr \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\Sigma \sin^2 \theta}{\rho^2} d\phi^2 \quad (116)$$

Esta solución es idéntica a (77).

3.2.2.2 De RN a la solución de Kerr-Newman

Ahora queremos la solución de Kerr-Newman por lo que debemos tomar como métrica semilla la métrica de Reissner-Nordström. En consecuencia identificamos

$$G = F = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}. \quad (117)$$

La ecuación (113) toma la forma

$$\begin{aligned} \rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta, & 2f &= 2Mr - Q^2, & \Delta &= r^2 - 2Mr + Q^2 + a^2, \\ \Sigma &= (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (118)$$

En consecuencia (112) queda como

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{2Mr - Q^2}{\rho^2}\right) dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \frac{2a(2Mr - Q^2) \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi \\ &+ \rho^2 d\theta^2 + \frac{\Sigma \sin^2 \theta}{\rho^2} d\phi^2. \end{aligned} \quad (119)$$

Esta solución es idéntica a (81).

3.2.2.3 La solución de Kerr no Conmutativa

Hagamos lo mismo ahora para obtener la solución de Kerr en su versión no conmutativa; para este fin debemos tomar la métrica de Schwarzschild no conmutativa por lo que

$$G = F = 1 - \frac{2m(r)}{r}, \quad (120)$$

donde $m(r) = 2M \frac{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right)}{\sqrt{\pi}}$. La ecuación (113) toma así la forma

$$\begin{aligned} \rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta, & 2f &= 2m(r)r, & \Delta &= r^2 - 2m(r)r + a^2, \\ \Sigma &= (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (121)$$

Con (112) generamos

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{2m(r)r}{\rho^2}\right) dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \frac{4a m(r)r \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi \\ &+ \rho^2 d\theta^2 + \frac{\Sigma \sin^2 \theta}{\rho^2} d\phi^2. \end{aligned} \quad (122)$$

Esta solución es idéntica a (86) que fue obtenida mediante el algoritmo de JN adaptado al caso no conmutativo.

3.2.3 La solución de Kerr-Newman no Conmutativa

Por último, para la solución de Kerr-Newman no conmutativa debemos tomar la métrica de RN no conmutativa

$$G = F = 1 - \frac{2m(r)}{r} + \frac{q(r)^2}{r^2}, \quad (123)$$

donde $q^2(r) = \frac{Q^2}{\pi} \left[\left[\gamma\left(\frac{1}{2}; \frac{r^2}{4\theta}\right) - \frac{r}{\sqrt{2\theta}} \gamma\left(\frac{1}{2}; \frac{r^2}{4\theta}\right) \right] + \sqrt{\frac{2}{\theta}} r \gamma\left(\frac{3}{2}; \frac{r^2}{4\theta}\right) \right]$.

La ecuación (113) toma la forma

$$\begin{aligned} \rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta, & 2f &= 2m(r)r - q(r)^2, & \Delta &= r^2 - 2m(r)r + q(r)^2 + a^2, \\ \Sigma &= (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (124)$$

de este modo (112) queda como

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{2m(r)r - q(r)^2}{\rho^2}\right) dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \frac{2a[2m(r)r - q(r)^2] \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi \\ &+ \rho^2 d\theta^2 + \frac{\Sigma \sin^2 \theta}{\rho^2} d\phi^2. \end{aligned} \quad (125)$$

Esta solución es idéntica a (89), también obtenida mediante el algoritmo de JN no conmutativo.

3.3 CARACTERÍSTICAS DE AGUJEROS NEGROS ROTANTES

Un espacio-tiempo con rotación posee características únicas, propias de su simetría que no encontramos en los espacios-tiempo estáticos, por ejemplo, es posible extraer energía de un AN con rotación, o es imposible mantenerse estático respecto de un observador en el infinito, si uno se encuentra cerca de un AN rotante, esto es debido al arrastre de marcos inerciales. En seguida se presentan algunas características importantes un espacio-tiempo con simetría axial [Bicak \[2000\]](#) [Smailagic and Spallucci \[2010\]](#) [Modesto and Nicolini \[2010\]](#).

3.3.1 Horizontes de eventos

Como ya se mencionó, tendremos múltiples soluciones para la ecuación que define el horizonte de eventos de un AN rotante, aquí serán analizadas para los casos conmutativos y no conmutativos.

3.3.1.1 Kerr

Localicemos el horizonte de eventos utilizando geodésicas nulas radiales es decir $d\theta = d\phi = 0$

$$0 = -g_{00}dt^2 + g_{11}dr^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{g_{00}}{g_{11}}}. \quad (126)$$

En el horizonte de eventos esta velocidad se anula por lo que el horizonte de eventos es cuando $g_{00} = 0$ o cuando $(g_{11})^{-1} = 0$, ya que la primera expresión corresponde a la ergoesfera, el horizonte de eventos quedará definido por la segunda expresión

$$(g_{11})^{-1} = \frac{\Delta}{\rho^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2 = 0. \quad (127)$$

Puesto que la anterior ecuación es de segundo grado en r , tendremos hasta dos soluciones de la forma

$$r_{H\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}. \quad (128)$$

las cuales describen dos horizontes de eventos. En la figura (2) se puede observar esquemáticamente el cambio en la orientación de un cono de luz al atravesar cada horizonte de eventos.

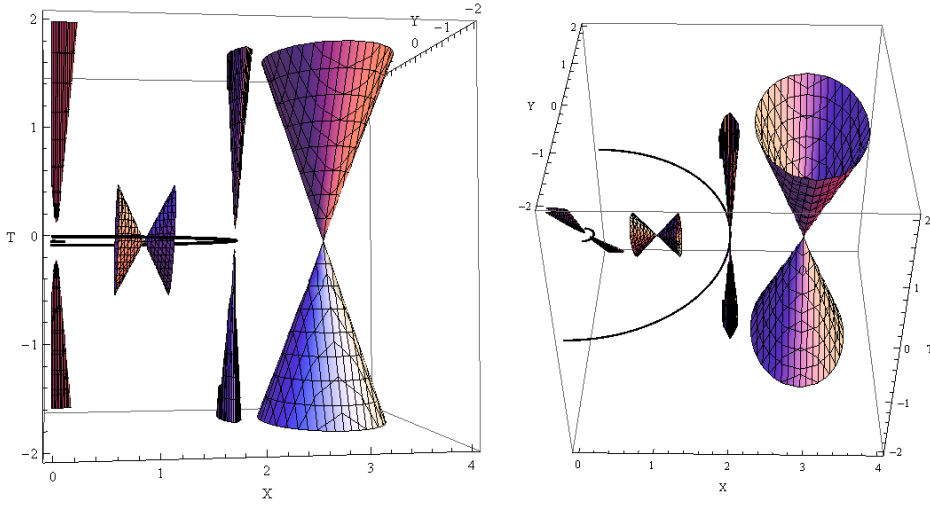


Figura 2: Esquema del cambio en la orientación del cono de luz al atravesar los horizontes de eventos

3.3.1.2 Kerr-Newman

La ecuación que define el horizonte de eventos tendrá hasta dos soluciones de manera análoga al caso de Kerr

$$(g_{11})^{-1} = \frac{\tilde{\Delta}}{\rho^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\Delta} = r^2 - 2Mr + Q^2 + a^2. \quad (129)$$

Esta ecuación tiene por soluciones

$$r_{H\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}. \quad (130)$$

3.3.1.3 Kerr NC

La ecuación que define el horizonte de eventos tendrá dos soluciones de manera análoga al caso de Kerr

$$(g_{11})^{-1} = \frac{\Delta'}{\rho^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta' = r^2 - 2m(r)r + a^2. \quad (131)$$

El horizonte de eventos está dado por la solución a la ecuación trascendente

$$r_{H\pm} = \frac{M\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_H^2}{4\theta}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \pm \sqrt{\left[\frac{M\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_H^2}{4\theta}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\right]^2 - a^2}. \quad (132)$$

Esta ecuación coincide con la ergoesfera cuando $\theta = 0$.

3.3.1.4 Kerr-Newman NC

La ecuación que define el horizonte de eventos tendrá hasta dos soluciones

$$(g_{11})^{-1} = \frac{\tilde{\Delta}'}{\rho^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\Delta}' = r^2 - 2m(r)r + a^2 + q(r)^2. \quad (133)$$

El horizonte de eventos está dado por la solución a la ecuación trascendente

$$r_{H\pm} = \frac{M\gamma\left(\frac{3}{2}; \frac{r_H^2}{4\theta}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \pm \sqrt{\left[\frac{M\gamma\left(\frac{3}{2}; \frac{r_H^2}{4\theta}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\right]^2 - a^2 - \frac{Q^2}{\pi} \left[\gamma^2\left(\frac{1}{2}; \frac{r_H^2}{4\theta}\right) - \frac{r_H}{\sqrt{2\theta}}\gamma\left(\frac{1}{2}; \frac{r_H^2}{4\theta}\right) \right] + \sqrt{\frac{2}{\theta}} r_H \gamma\left(\frac{3}{2}; \frac{r_H^2}{4\theta}\right)}. \quad (134)$$

3.3.2 Agujero Negro extremo

Como arriba se menciona la ecuación que define al horizonte de eventos es cuadrática, es por ello que en general obtendremos 2 soluciones para el horizonte de eventos, sin embargo hay valores para los cuales la relación entre la masa la carga y el momento angular del AN permiten un sólo horizonte de eventos, cuando estas condiciones se presentan obtenemos un AN Extremo

3.3.2.1 Kerr

La ecuación para el horizonte de eventos (128) solo tiene solución real para valores de la masa $M \geq a$, de lo contrario no habría horizonte de eventos y nos encontraríamos con una singularidad desnuda, este ultimo resultado no es posible si tomamos en cuenta la hipótesis de la censura cósmica.

Sin embargo, tenemos aún el caso en que $M = a$, cuando esto sucede, el agujero negro alcanza el máximo valor de momento angular posible y sólo existe un horizonte de eventos

$$r_H = M. \quad (135)$$

El radio del horizonte de eventos

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2},$$

existe solamente para $a < M$. Entonces existe un momento angular máximo J_m para un AN de Kerr que corresponde a

$$a_m = M, \quad J_m = a_m M = M^2.$$

3.3.2.2 Kerr-Newman

La métrica de Kerr-Newman posee sólo una solución para el horizonte de eventos cuando $M^2 = a^2 + Q^2$, si esta condición se cumple el horizonte de eventos es

$$r_H = M, \quad (136)$$

y el AN es extremo

3.3.2.3 Kerr no conmutativo

A partir de $M = M(r_H)$, la condición de agujero negro extremo $M_{,r_H} = 0$ se escribe como

$$(a^2 + r_H^2)e^{-\frac{r_H^2}{4\vartheta}} + \frac{4a^2\vartheta^{3/2}\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_H^2}{4\vartheta}\right)}{r_H^3} - \frac{4\vartheta^{3/2}\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_H^2}{4\vartheta}\right)}{r_H} = 0.$$

En el caso del agujero negro de Kerr, se observa que para un valor dado de la masa M es posible tener dos horizontes mientras que en el caso no conmutativo, los horizontes pueden no estar presentes para el mismo valor de M . Este comportamiento está determinado por la configuración de agujero negro extremo. Para tener una idea más precisa, consideremos el caso de $a = 3$: en el caso conmutativo el horizonte del agujero extremo es $r_H^e = 3$ con una masa $M_e = 3$, mientras que en el caso no conmutativo con $\vartheta = 1$, se tiene que $r_H^e = 4.09972$ con una masa $M_e = 3.27306$. Puede verse también que la separación entre los horizontes interno y externo es mayor en el caso conmutativo que en el no conmutativo para un mismo valor de M .

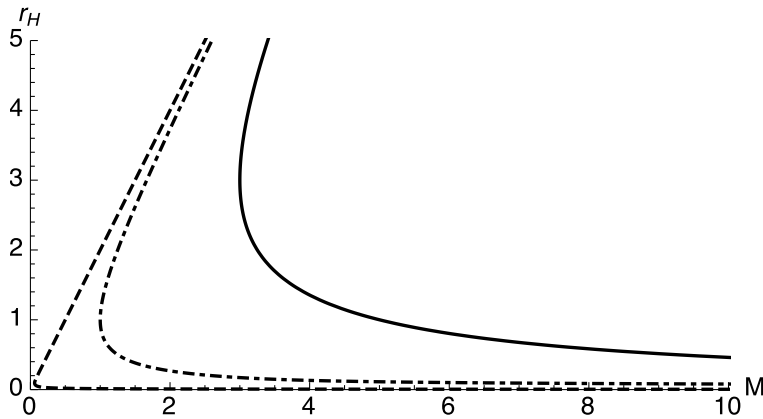


Figura 3: Radio del Horizonte de eventos en función de la masa para Kerr NC $a = 0, 1, 3$ (izquierda a derecha) con $\vartheta = 0.001$.

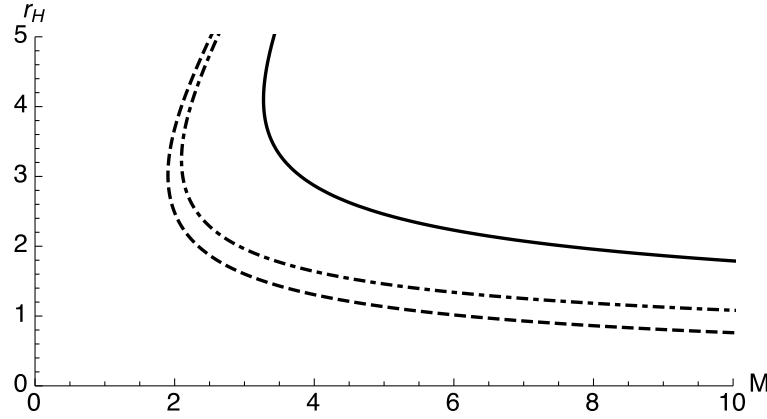


Figura 4: Radio del Horizonte de eventos en función de la masa para Kerr NC $a = 0, 1, 3$ (izquierda a derecha) con $\vartheta = 1$.

3.3.2.4 Kerr-Newman

De manera análoga al caso del agujero negro de Kerr, la condición de agujero negro extremo $M_{,r_H} = 0$ para la métrica de Kerr-Newman se expresa como

$$\begin{aligned}
 & (a^2 + r_H^2)e^{-\frac{r_H^2}{4\vartheta}} + \frac{4a^2\vartheta^{3/2}\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_H^2}{4\vartheta}\right)}{r_H^3} + \frac{q^2e^{-\frac{r_H^2}{4\vartheta}}\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{r_H^2}{4\vartheta}\right)^2}{\pi} - \frac{q^2r_He^{-\frac{r_H^2}{4\vartheta}}\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{r_H^2}{4\vartheta}\right)}{\sqrt{2}\pi\sqrt{\vartheta}} \\
 & - \frac{8\vartheta q^2e^{-\frac{r_H^2}{4\vartheta}}\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{r_H^2}{4\vartheta}\right)\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_H^2}{4\vartheta}\right)}{\pi r_H^2} + \frac{2\sqrt{2}\sqrt{\vartheta}q^2e^{-\frac{r_H^2}{4\vartheta}}\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_H^2}{4\vartheta}\right)}{\pi r_H} \\
 & + \frac{4\vartheta^{3/2}q^2\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{r_H^2}{4\vartheta}\right)^2\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_H^2}{4\vartheta}\right)}{\pi r_H^3} - \frac{4\vartheta^{3/2}\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_H^2}{4\vartheta}\right)}{r_H} = 0.
 \end{aligned} \tag{137}$$

Observamos una situación similar para la existencia de horizontes conforme varía la masa del agujero negro. En este caso tenemos que con $a = 3$ y $\vartheta = 0$ se tiene que la configuración extrema corresponde a $r_H^e = 3.16228$ con una masa $M_e = 3.16228$, mientras que en el caso no conmutativo con $\vartheta = 1$, se tiene $r_H^e = 4.14796$ con $M_e = 3.39117$.

3.3.3 Censura cósmica

La expresión para el horizonte de eventos indica que un horizonte sólo existe bajo ciertas condiciones. Este hecho nos lleva a preguntarnos si una singularidad esencial puede existir en la ausencia de un horizonte de eventos (singularidad desnuda).

La hipótesis de la censura cósmica fue formulada por Roger Penrose [Penrose et al. \[2002\]](#) e indica que la naturaleza “censura” singularidades esenciales de espacio-tiempo, en el sentido

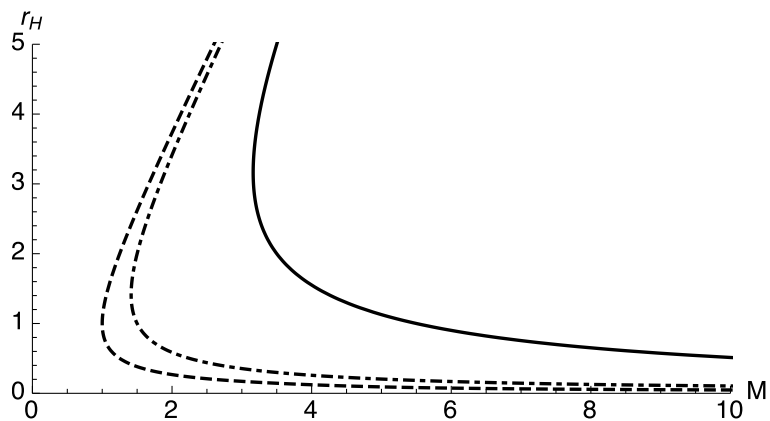


Figura 5: Radio del Horizonte de eventos en función de la masa para Kerr-Newman $NCa = 0, 1, 3$ (izquierda a derecha) con $\vartheta = 0.001$ y $Q = 1$.

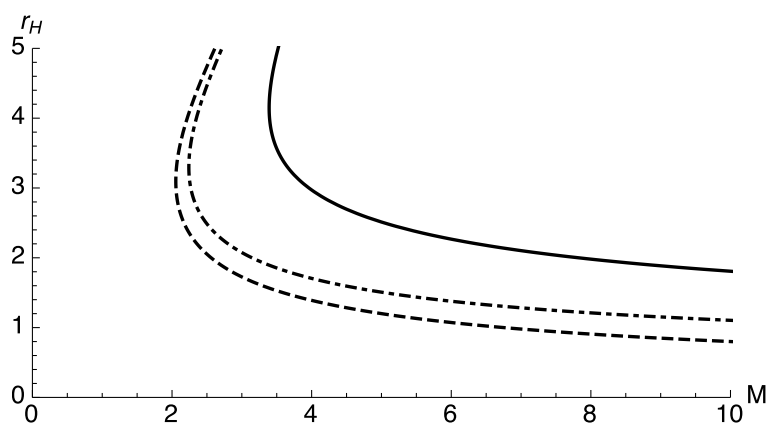


Figura 6: Radio del Horizonte de eventos en función de la masa para Kerr-Newman $NCa = 0, 1, 3$ (izquierda a derecha) con $\vartheta = 1$ y $Q = 1$.

de que todas están dentro de un horizonte de eventos que las hace invisibles al universo. Desafortunadamente la hipótesis no ha sido probada, sin embargo, no hay violaciones a la hipótesis conocidas (observacionales o teóricas) [Risaliti et al. \[2013\]](#).

Para el caso no conmutativo como se observa en las Figuras (3), (4), (5) y (6), aun existen horizontes de eventos. Sin embargo recordemos que una de las ventajas de utilizar soluciones no conmutativas es regularizar la singularidad del AN; es por ello que aunque desaparezca el horizonte de eventos no tendremos una singularidad desnuda pues ya no existe tal singularidad. Por ende se respeta la conjetura de la censura cósmica, una solución NC es una solución regular.

3.3.4 Ergoesferas

3.3.4.1 Ergoesferas en Kerr

Con suficiente propulsión, un observador puede permanecer estacionario en cualquier punto fuera del horizonte de eventos de un AN de Schwarzschild con respecto a un observador en el infinito, sin embargo para un AN rotante existe una zona fuera del horizonte de eventos donde es imposible permanecer estacionario para un observador en el infinito. Esta zona es llamada ergoesfera, y permanecer estático dentro de esta región implicaría una violación de causalidad, ya que se requeriría una velocidad mayor que la velocidad de la luz para que un observador permaneciera estático.

Para entender mejor este concepto consideremos un observador estacionario, con 4-velocidad

$$u^\mu = (u^0, 0, 0, 0) = \left(\frac{dt}{d\tau}, 0, 0, 0 \right). \quad (138)$$

La norma de la 4-velocidad está dada por

$$u^\mu u_\mu = g_{00}(u^0)^2. \quad (139)$$

donde para la métrica de Kerr

$$g_{00} = -\left(1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) = -\frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta - 2Mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}. \quad (140)$$

La norma de la 4-velocidad se anula si $g_{00} = 0$. Esta condición se satisface si $r^2 + a^2 \cos^2 \theta - 2Mr = 0$; resolviendo para r obtenemos una superficie definida por

$$r_{e\pm}(\theta) = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (141)$$

Entonces $g_{00} > 0$ dentro de esta superficie, mientras que $g_{00} < 0$ fuera de ella. Ya que $(u^0)^2$ siempre es positivo, la condición (139) no puede ser satisfecha por un observador ubicado

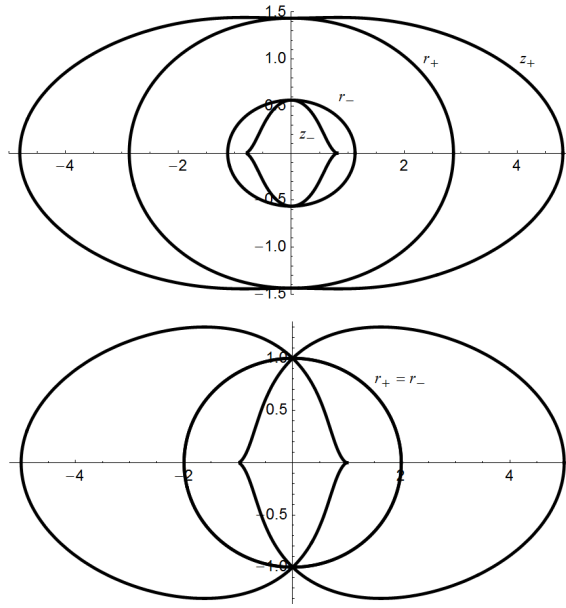


Figura 7: Corte polar de un AN de Kerr y extremo de Kerr donde se muestran horizontes de eventos(r_+ y r_-) y fronteras de la ergosuperficie(z_+ y z_-)

en $r \leq r_{e+}$ ó $r \geq r_{e-}$; en la Figura (7) observamos la ergosfera de un AN regular y uno extremo. En ambos casos una gran parte de la ergosuperficie está fuera del horizonte de eventos.

Esto es más evidente si comparamos

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2} \quad r_{e\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta},$$

ya que si $a \neq 0$ la superficie r_e generalmente está fuera del horizonte excepto en los polos ($\theta = 0, \pi$) donde ambas superficies coinciden.

El efecto de arrastre debido a la rotación de AN afecta también a partículas prueba no masivas dentro de la ergosuperficie. Consideremos una partícula no masiva dentro de la ergosuperficie moviéndose tangente a un círculo de r constante en el plano ecuatorial $\theta = \frac{\pi}{2}$. Entonces $dr = d\theta = 0$ y ya que es una partícula prueba no masiva sigue geodésicas nulas, es decir $ds^2 = 0$; el elemento de línea de Kerr se reduce a

$$g_{00}dt^2 + 2g_{03}dtd\phi + g_{33}d\phi^2 = 0. \quad (142)$$

A partir de esta expresión obtenemos una ecuación cuadrática para $\frac{d\phi}{dt}$

$$g_{00} + 2g_{03}\frac{d\phi}{dt} + g_{33}\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = 0. \quad (143)$$

Resolviendo para $\frac{d\phi}{dt}$ tenemos

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{g_{03}}{g_{33}} \pm \sqrt{\left(\frac{g_{03}}{g_{33}}\right)^2 - \frac{g_{00}}{g_{33}}}, \quad (144)$$

donde tomaremos el signo $+$ cuando el movimiento es opuesto a la rotación del AN y el signo $-$ cuando se mueve con la rotación del AN, tomando el valor $g_{00} = 0$ cuando la partícula prueba no masiva se encuentra en la frontera de la ergoesfera, la cual constituye una superficie que define el límite estático; obtenemos así 2 soluciones

$$\frac{d\phi}{dt} = 0, \quad (145)$$

cuando la partícula prueba no masiva viaja en sentido contrario a la rotación del AN.

$$\frac{d\phi}{dt} = -2\frac{g_{03}}{g_{33}}, \quad (146)$$

cuando viaja de acuerdo a la rotación del AN.

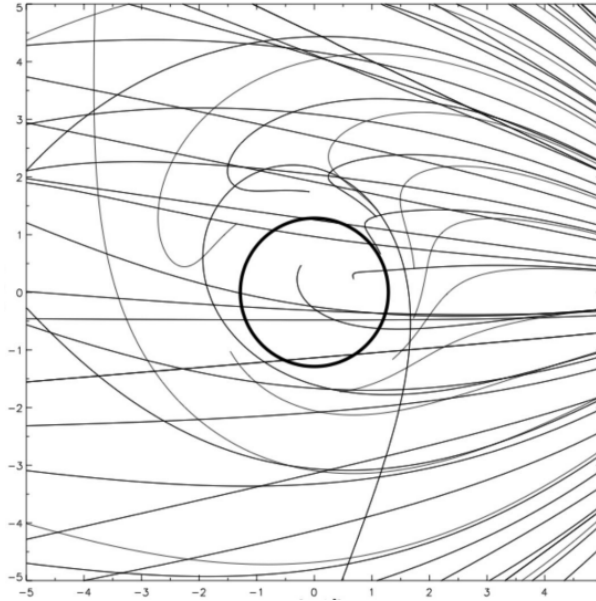


Figura 8: Geodésicas tipo tiempo en el plano $\theta = \frac{\pi}{2}$ ilustrando el efecto de arrastre

Esto quiere decir que una partícula de prueba no masiva dentro de la ergosuperficie es arrastrada en dirección contraria a su dirección original si viaja en contra de la rotación dentro de la ergoesfera. Si una partícula de prueba no masiva que viaja a la velocidad de la luz es arrastrada, entonces cualquier objeto también lo será y es imposible evitarlo, pues tendría que viajar con una velocidad superior a la de la luz para mantenerse estático respecto de un observador en el infinito. En la figura (8) se ilustran las geodésicas que siguen partículas prueba no masivas cerca del horizonte de eventos del AN de Kerr.

3.3.4.2 *Kerr*

Ergoesfera

Ya se tiene una idea entonces de lo que es una ergoesfera, sin necesidad del uso de cuadrivelocidades la podemos definir como la superficie en la que la norma del vector de Killing temporal $k^\mu = (1, 0, 0, 0)$ se anula. Similar al caso resuelto en la ecuación (139) obtenemos

$$k^\mu k_\mu = -g_{00} = 1 - \frac{2Mr}{\rho^2} = 0. \quad (147)$$

Por lo que la ergoesfera está dada por la ecuación

$$r_{e\pm}(\theta) = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (148)$$

3.3.4.3 *Kerr-Newman*

La superficie en la que la norma del vector de Killing temporal se anula en este espacio-tiempo es

$$r_{e\pm}(\theta) = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta - Q^2}. \quad (149)$$

Esta es entonces la ecuación de la ergoesfera.

3.3.4.4 *Kerr no conmutativo*

La superficie en la que la norma del vector de Killing temporal se anula en este espacio-tiempo está dada por

$$-g_{00} = 1 - \frac{2m(r)r}{\rho^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 + a^2 \cos^2 \theta - 2m(r)r = 0, \quad (150)$$

cuya solución analítica no existe, la ergoesfera es la solución de la ecuación trascendente

$$r_{e\pm}(\theta) = \frac{M\gamma(\frac{3}{2}, \frac{r_e^2}{4\theta})}{\Gamma(\frac{3}{2})} \pm \sqrt{\left[\frac{M\gamma(\frac{3}{2}, \frac{r_e^2}{4\theta})}{\Gamma(\frac{3}{2})} \right]^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (151)$$

3.3.4.5 *Kerr-Newman no conmutativo*

La ergosuperficie está dada por

$$-g_{00} = r^2 - 2m(r)r + q(r)^2 + a^2 - a^2 \sin^2 \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 + a^2 \cos^2 \theta + q(r)^2 - 2m(r)r = 0, \quad (152)$$

cuya solución analítica no existe; la ergoesfera es la solución de la ecuación trascendente

$$r_{e\pm}(\theta) = \frac{M\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_e^2}{4\theta}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \pm \sqrt{\left[\frac{M\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_e^2}{4\theta}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\right]^2 - a^2 \cos^2\theta - \frac{Q^2}{\pi} \left[\gamma^2\left(\frac{1}{2}, \frac{r_e^2}{4\theta}\right) - \frac{r_e}{\sqrt{2\theta}} \gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{r_e^2}{4\theta}\right) \right] + \sqrt{\frac{2}{\theta}} r_e \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_e^2}{4\theta}\right)}. \quad (153)$$

3.3.5 Geodésicas

3.3.5.1 Geodésicas en el espacio-tiempo de Kerr

Para simplificar cálculos nos restringiremos al plano $\theta = \frac{\pi}{2}$ (geodésicas ecuatoriales). El elemento de línea con esta restricción queda

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{4Ma}{r} d\phi dt + \frac{r^2}{\Delta} dr^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right) d\phi^2. \quad (154)$$

Hay dos cantidades que se conservan debido a que la métrica es independiente del tiempo coordenado t y el ángulo azimutal ϕ

$$\epsilon := -\xi_t u^\mu, \quad (155)$$

$$\lambda := -\xi_\phi u^\mu, \quad (156)$$

ϵ es la energía por unidad de masa en reposo y λ es momento angular por unidad de masa. Calculamos de (154) cantidades conservadas; tenemos así

$$-\epsilon = g_{tt} u^t + g_{t\phi} u^\phi, \quad (157)$$

$$\lambda = g_{\phi t} u^t + g_{\phi\phi} u^\phi. \quad (158)$$

Resolviendo para las componentes $u^t = \frac{dt}{d\tau}$ y $u^\phi = \frac{d\phi}{d\tau}$ con τ igual al tiempo propio obtenemos

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\Delta} \left[\left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right) \epsilon - \frac{2Ma}{r} \lambda \right], \quad (159)$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{1}{\Delta} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \lambda + \frac{2Ma}{r} \epsilon \right], \quad (160)$$

donde hemos usado las expresiones explícitas de los coeficientes métricos.

Con la normalización $ds^2 = -d\tau^2$ tenemos que

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{2M}{r} - \frac{\lambda^2 - a^2(\epsilon^2 - 1)}{r^2} + \frac{2M(\lambda - a\epsilon)^2}{r^3} + (\epsilon^2 - 1). \quad (161)$$

donde hemos usado (159) y (160). Aunque se puede dejar la ecuación así, también se puede escribir en una forma más familiar si consideramos a $\frac{\epsilon^2-1}{2}$ como la energía total asociada a la partícula prueba. Esto nos permite reescribir (161) como

$$\frac{\epsilon^2-1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V_{eff}(r, \epsilon, \lambda), \quad (162)$$

donde

$$V_{eff}(r, \epsilon, \lambda) \equiv -\frac{M}{r} + \frac{\lambda^2 - a^2(\epsilon^2 - 1)}{2r^2} - \frac{M(\lambda - a\epsilon)^2}{r^3}, \quad (163)$$

se denomina el potencial efectivo. Una partícula prueba en caída libre en el espacio-tiempo de Kerr seguiría una trayectoria cuya evolución es descrita por una ecuación Newtoniana con este potencial [Chandrasekhar \[2002\]](#).

3.3.6 El efecto de Lense-Thirring

Una característica que no aparece en agujeros negros sin rotación es el arrastre de marcos inerciales; el AN arrastra espacio-tiempo con él mientras rota. Una consecuencia de este arrastre es que una partícula que se suelta radialmente hacia el centro de un AN de Kerr va a adquirir componentes no radiales de movimiento mientras cae libremente en el campo gravitacional del AN. Puede calcularse $\frac{d\phi}{dr}$ para una partícula liberada del reposo utilizando la métrica de Kerr para ilustrar mejor el arrastre de marcos inerciales.

Consideremos una partícula liberada desde el reposo sin momento angular inicial. Su energía será así igual a su masa en reposo, por lo tanto las cantidades conservadas (155) y (156) tendrán los valores:

$$\epsilon = 1, \quad \lambda = 0.$$

En este caso las ecuaciones (160) y (162) toman la forma

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{2Ma}{r} \right), \quad (164)$$

$$\frac{dr}{d\tau} = \sqrt{\frac{2M}{r} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right)}, \quad (165)$$

que al combinarlas obtenemos

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{d\phi/d\tau}{dr/d\tau} = -\frac{2Ma}{r\Delta} \left[\frac{2M}{r} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (166)$$

La partícula es arrastrada un ángulo ϕ conforme se dirige radialmente hacia el interior del AN, aunque ninguna fuerza actúe sobre ella. Este efecto se denomina arrastre de marcos inerciales y produce una precesión detectable llamada *precesión de Lense-Thirring* o *efecto de*

Lense-Thirring [Lense and Thirring \[1918\]](#).

A continuación se hará el cálculo de la precesión de *Lense-Thirring* utilizando el 4-momento en la métrica de Kerr. Escribimos primero que

$$p^\phi \equiv p^3 = g^{3\mu} p_\mu = g^{33} p_3 + g^{30} p_0, \quad (167)$$

$$p^t \equiv p^0 = g^{0\mu} p_\mu = g^{00} p_0 + g^{03} p_3, \quad (168)$$

donde

$$p^0 = m \frac{dt}{d\tau}, \quad p^3 = m \frac{d\phi}{d\tau}. \quad (169)$$

Combinando (167) y (168) tenemos

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{p^3}{p^0} = \frac{g^{33} p_3 + g^{30} p_0}{g^{00} p_0 + g^{03} p_3}. \quad (170)$$

Si consideramos que el momento angular de la partícula prueba es nulo entonces $p_3 = 0$ y (170) se convierte en

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{p^3}{p^0} = \frac{g^{30} p_0}{g^{00} p_0} = \omega(r, \theta). \quad (171)$$

Consideremos ahora un elemento de línea de un espacio-tiempo general con rotación como (112) con (113) obtenemos

$$\omega(r, \theta) = \frac{4af}{\Sigma}. \quad (172)$$

Para la métrica de Kerr se tiene explícitamente que

$$\omega(r, \theta) = \frac{4Mra}{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \text{sen}^2 \theta}, \quad (173)$$

con $\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2$.

En la Figura 9 se presenta la gráfica de (173) a distintos ángulos; como puede apreciarse mientras crece el ángulo también lo hace la velocidad de arrastre.

Utilizando (172) podemos calcular fácilmente para la métrica de Kerr NC la velocidad angular de precesión; el resultado es

$$\omega_{\text{NC}}(r, \theta) = \frac{4m(r)ra}{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta_{\text{NC}} \text{sen}^2 \theta}, \quad (174)$$

con $\Delta_{\text{NC}} \equiv r^2 - 2m(r)r + a^2$.

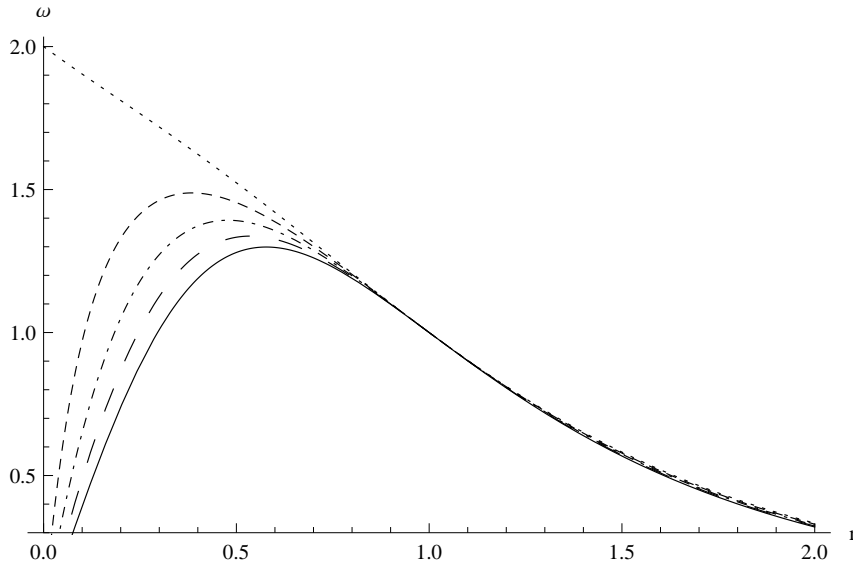


Figura 9: Precesión de Lense-Thirring asociada a la métrica de Kerr clásica. Para las curvas de arriba a abajo se utilizaron los ángulos $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$ y 0, con $a = M = 1$.

El valor de $\omega_{\text{NC}}(r, \theta)$ se ve modificado de acuerdo al parámetro de no conmutatividad. Este comportamiento tendría consecuencias observacionales ya que un posible experimento podría estimar el valor de parámetro NC, encontrando desviaciones en la teoría clásica. En la Figura 10 se comparan el caso clásico y no el conmutativo a distintos valores de θ , como se observa el efecto de no conmutatividad disminuye el arrastre para un mismo valor de la masa y del momento angular de un AN.

La ecuación (172) es muy útil y con ella obtenemos la precesión de Kerr-Newman y Kerr-Newman NC respectivamente

$$\tilde{\omega}(r, \theta) = \frac{4a(Mr - Q^2)}{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \tilde{\Delta} \text{sen}^2 \theta}, \quad (175)$$

donde $\tilde{\Delta} = r^2 - 2Mr + Q^2 + a^2$, y

$$\tilde{\omega}_{\text{NC}}(r, \theta) = \frac{4a(m(r)r - q^2(r)^2)}{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \tilde{\Delta}_{\text{NC}} \text{sen}^2 \theta}, \quad (176)$$

con $\tilde{\Delta}_{\text{NC}} \equiv r^2 - 2m(r)r + q^2(r) + a^2$.

Este cálculo resulta importante pues nos da una clara diferencia entre el caso no conmutativo y el caso clásico de una propiedad medible de un AN, es decir, mediante una medición directa del arrastre de marcos inerciales podría ser estimado el parámetro de no conmutatividad. En las Figuras 11 y 12 se hace evidente este cambio en la velocidad angular del espacio-tiempo que es arrastrado debido a la rotación del AN.

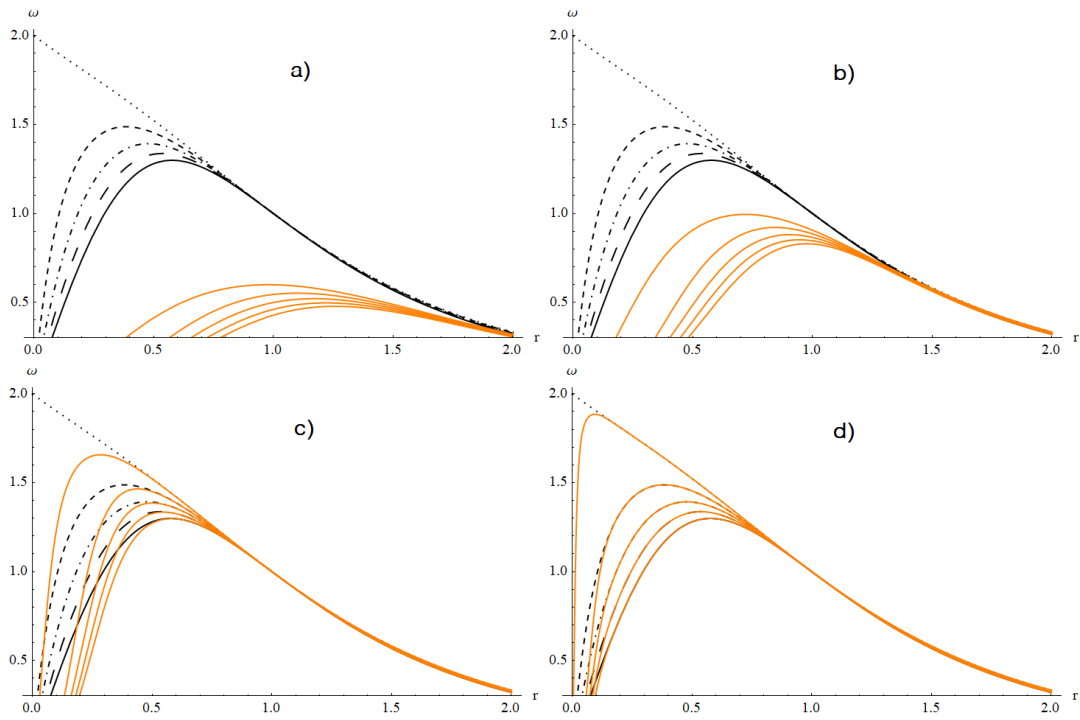


Figura 10: Precesión de Lense-Thirring asociado a la métrica de Kerr no conmutativa (líneas sólidas) comparados con la precesión de Kerr clásico (en negro). Se utilizaron distintos valores del parámetro no conmutativo ϑ : a) $\vartheta = \frac{1}{4}$ b) $\vartheta = \frac{1}{10}$ c) $\vartheta = \frac{1}{100}$ d) $\vartheta = \frac{1}{1000}$.

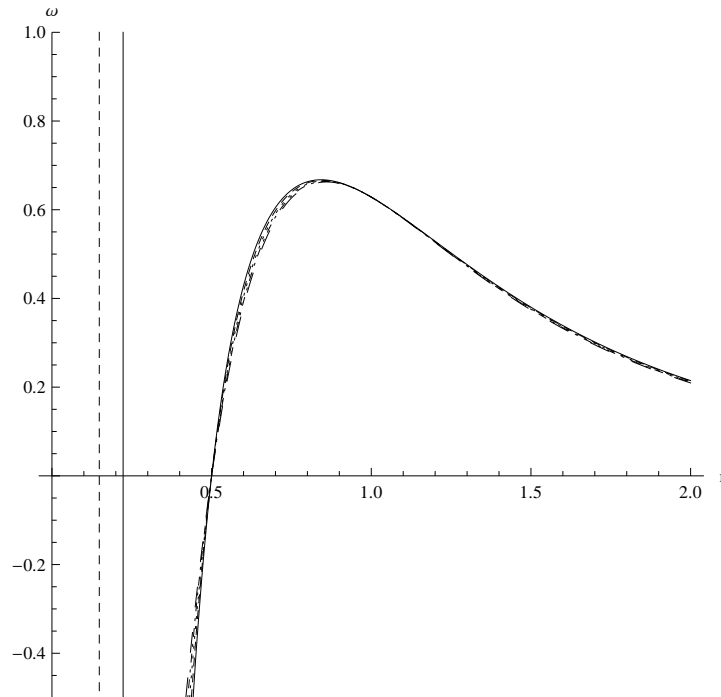


Figura 11: Precesión de Lense-Thirring asociada a la métrica de Kerr-Newman clásica; de arriba a abajo se utilizaron los ángulos polares $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$ y 0, con $M = 1$ y $a^2 = Q^2 = \frac{1}{2}$.

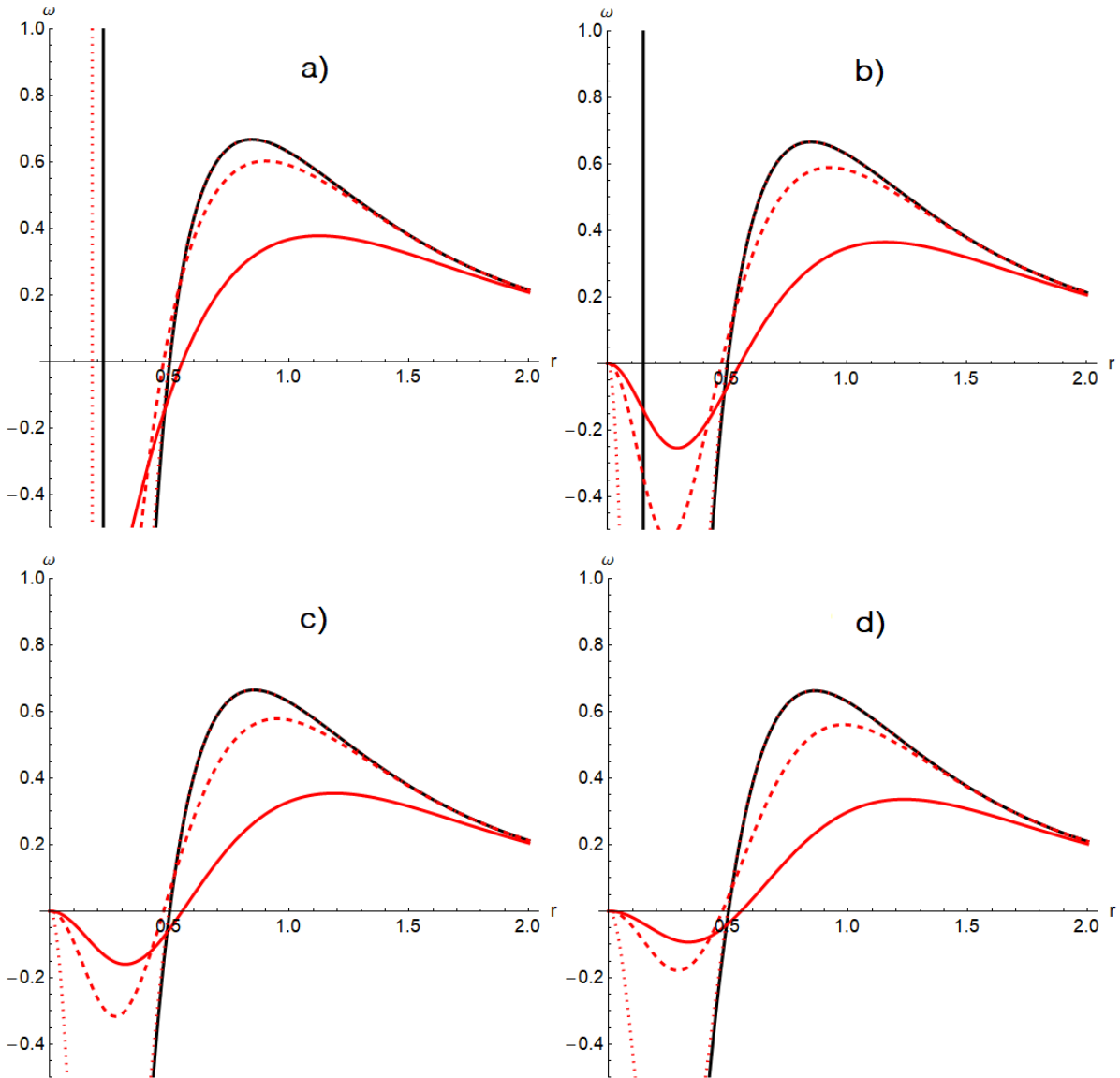


Figura 12: Precesión de Lense-Thirring asociada a la métrica de Kerr-Newman no conmutativa (en rojo) comparadas con la precesión de Kerr-Newman clásico (en negro). Se usaron únicamente los valores de $\vartheta = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{10}$ y $\frac{1}{100}$; este último valor se superpone ya al caso clásico. Los valores para el ángulo polar θ son: a) $\theta = \frac{\pi}{4}$ b) $\theta = \frac{\pi}{3}$ c) $\theta = \frac{\pi}{4}$ d) $\theta = 0$.

3.3.7 Proceso de Penrose

La existencia de superficies separadas definiendo la ergoesfera y el horizonte de eventos de un AN de Kerr, implica la posibilidad de extraer energía rotacional del AN. Una manera posible de extraer energía de un AN con rotación es mediante el proceso de Penrose [Penrose et al. \[2002\]](#) que consiste en lo siguiente:

Una partícula cae en la ergoesfera de un AN de Kerr y decae en 2 partículas, una cae dentro del horizonte de eventos, la otra escapa de la ergoesfera hacia el infinito. El decaimiento dentro de la ergoesfera es un proceso local por lo que el 4-momento se conserva

$$p_0^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu. \quad (177)$$

La energía de la partícula que fue lanzada al infinito con masa m_2 puede calcularse por medio de la definición (155) con el resultado

$$E_2 = -p_2^\mu \xi_t = m_2 \epsilon. \quad (178)$$

Aplicando esta misma definición a p_0 para obtener la energía inicial obtenemos

$$E_0 = -p_0^\mu \xi_t = E_2 + E_1, \quad (179)$$

por lo que

$$E_2 = E_0 - E_1. \quad (180)$$

Si la partícula 1 fuera hacia el infinito, E_1 sería positiva por lo que $E_2 < E_0$ y obtendríamos menos energía que la que se introdujo; sin embargo por la ecuación geodésica (162), si la partícula 1 entra al horizonte de eventos, seguirá una trayectoria tal que $E_1 < 0$. Esto es posible haciendo una comparación con la radiación de Hawking, donde E_1 no es una energía dentro de la ergosuperficie sino una componente del momento espacial, la cual puede tomar valores positivos o negativos; para estos decaimientos se tiene

$$E_2 > E_0. \quad (181)$$

Esto quiere decir que energía neta está siendo extraída en el proceso de Penrose, algo que no es una posibilidad en un AN sin rotación. Sin embargo no se puede extraer energía infinita del AN, pues cada vez que se extrae energía mecánica de él, éste pierde momento angular, y después de un número finito de procesos de Penrose el AN pierde su momento angular por completo.

Como puede observarse en nuestro análisis cualitativo, esto no depende de la no conmutatividad del AN es por ello que concluimos que de un AN rotante NC podemos extraer también energía mediante el Proceso de Penrose.

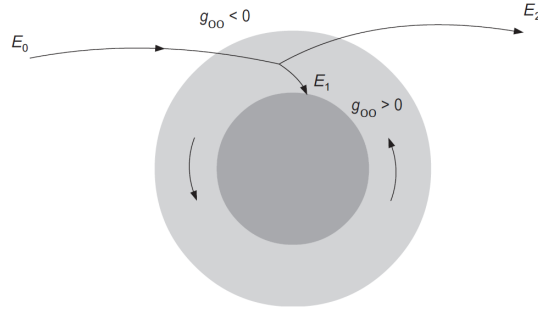


Figura 13: Esquema cualitativo del proceso de Penrose

3.3.8 Núcleo de de-Sitter rotante

3.3.8.1 Kerr NC

Uno de los objetivos de realizar las versiones no conmutativas de estos AN es la de regularizarlos, ya que este tipo de AN es regular no presentan singularidades, pues para $r \ll 1$ la curvatura está dada por

$$R = 4\Lambda \frac{r^2}{\rho^2} \quad \text{con} \quad \Lambda = \frac{M}{\sqrt{\pi}\theta^3}. \quad (182)$$

Como se observa R no tiene problemas para ningún valor de r , es por ello que no hay singularidades.

En vez de singularidad obtenemos un núcleo de de-Sitter con rotación cuya constante cosmologica Λ está dada por (182)

$$ds^2 = \frac{r^2}{\Delta_\Lambda} dr^2 - \frac{1}{r^2} [adt - (r^2 + a^2)d\phi]^2 + \frac{\Delta_\Lambda}{r^2} [dt - ad\phi]^2, \quad (183)$$

con $\Delta_\Lambda = r^2 + a^2 - \frac{\Lambda}{3}r^4$

3.3.8.2 Kerr-Newmann NC

Esta métrica es regular, no posee singularidades. Para mostrar esto analicemos el comportamiento del escalar de curvatura en el límite en que $r \rightarrow 0$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} R = \frac{\sqrt{2}Q^2 - 4M\sqrt{\pi}\vartheta}{\pi\vartheta^2}, \quad (184)$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \lim_{r \rightarrow 0} R = 0.$$

Obtenemos valores distinto dependiendo de nuestra aproximación, sin embargo el escalar es constante en ambos casos y no presenta singularidades.

EL AGUJERO NEGRO DE EINSTEIN-BORN-INFELD CON ROTACIÓN

Los ejemplos de métricas discutidos en capítulos anteriores están basados en el uso de electrodinámica de Maxwell, la cual es una electrodinámica lineal.

Tomemos ahora un ejemplo donde los coeficientes métricos son de hecho más complicados debido al acoplamiento con una electrodinámica no lineal y veamos si podemos encontrar su respectiva métrica con rotación mediante los métodos descritos anteriormente.

4.1 EINSTEIN-BORN-INFELD CON ROTACIÓN MEDIANTE EL ALGORITMO DE JANIS-NEWMAN

Consideremos el segmento de línea del espacio tiempo de Einstein-Born-Infeld (EBI)

$$\begin{aligned}
ds^2 &= -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2(r)}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2(r)}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \\
&= -f_q dt^2 + f_q^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \\
Q^2(r) &= Q^2 \left\{ 2 \left[\frac{\bar{r}^4}{3} - \frac{\sqrt{1+\bar{r}^4}}{3} \bar{r}^2 - \frac{2}{3} (\bar{r}^2) {}_2F_1[1/4, 1/2, 5/4, -\bar{r}^4] \right] \right\},
\end{aligned} \tag{185}$$

donde $\bar{r} := \frac{r}{r_0}$ y $r_0 := \sqrt{\frac{Q}{b}}$.

Notemos que de acuerdo a (62) $e^{2\Phi} = e^{-2\lambda} = f_q$ o bien $\Phi = -\lambda$. Sustituyendo en (73) obtenemos:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\tilde{f}_q & 0 & 0 & a \operatorname{sen}^2 \theta (1 - \tilde{f}_q) \\ \cdot & \frac{\rho^2}{\rho^2 \tilde{f}_q + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \rho^2 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \operatorname{sen}^2 \theta (\rho^2 + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta (2 - \tilde{f}_q)) \end{pmatrix}. \tag{186}$$

Para este caso no sabemos como complexificar la coordenada r que aparece en la función hipergeométrica, ya que no es posible llevar la métrica de EBI a la descomposición de Kerr-Schild. Es por ello que la prescripción dada en la ecuación (84) no es útil en este caso;

sin embargo tomaremos del artículo [Julio and Lombardo \[2004\]](#), la aproximación donde se realiza una expansión en serie de Taylor de la variable $\frac{r}{a}$ y encuentra que una forma aproximada de la función hipergeométrica con rotación es precisamente la misma función hipergeométrica estática sin cambio alguno por lo que

$$\tilde{f}_q = 1 - \frac{2Mr - Q(r)}{\rho^2}. \quad (187)$$

Esto nos deja después de hacer un poco de algebra con el elemento de línea

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Mr - Q(r)}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + 2a \text{sen}^2 \theta \frac{2Mr - Q(r)}{\rho^2} dt d\phi - \rho^2 d\theta^2 - \frac{\Sigma \text{sen}^2 \theta}{\rho^2} d\phi^2, \quad (188)$$

donde $\Sigma := (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \text{sen}^2 \theta$ y $\Delta := r^2 - 2Mr + Q^2 + a^2$.

Para saber si este es el espacio tiempo deseado utilizaremos las relaciones

$$-T_{00} = T_{22} = \frac{b^2}{4\pi}(1 - \tilde{u}), \quad T_{11} = T_{33} = \frac{b^2}{4\pi}(1 - \tilde{u}^{-1}). \quad (189)$$

Estas ecuaciones nos dice las relaciones que siempre cumplen las componentes del tensor de energía momento del electromagnetismo de Born-Infeld y que la forma de \tilde{u} es entonces

$$\tilde{u} = \frac{T_{00}}{T_{33}} = \frac{r^4}{\rho^4} \left(\sqrt{\frac{r_0^4}{r^4} + 1} - 1 \right) \frac{1}{\frac{r^4}{\rho^4} \left(\sqrt{\frac{r_0^4}{r^4} + 1} - 1 \right) + \frac{r^2}{\rho^2} \left(2 - \frac{\frac{r_0^4}{r^4} + 2}{\sqrt{\frac{r_0^4}{r^4} + 1}} \right)}. \quad (190)$$

Queremos entonces que nuestra métrica (192) genere un tensor de energía-momento que cumpla con las relaciones (189). Podemos verificar mediante un cálculo directo que con la métrica obtenida no podemos obtener \tilde{u} tal que satisfaga las ecuaciones de campo. En consecuencia este no es el espacio-tiempo deseado correspondiente al monopolo rotante de EBI.

4.2 BORN-INFELD CON ROTACIÓN POR EL MÉTODO DE AZREG-AÏNOU

Consideramos el segmento de línea del espacio-tiempo estático de Einstein-Born-Infeld (EBI)

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2(r)}{r^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2(r)}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (191)$$

$$Q^2(r) = Q^2 \left\{ 2 \left[\frac{\bar{r}^4}{3} - \frac{\sqrt{1 + \bar{r}^4}}{3} \bar{r}^2 - \frac{2}{3} (\bar{r}^2) {}_2F_1[1/4, 1/2, 5/4, -\bar{r}^4] \right] \right\},$$

donde $\bar{r} = \frac{r}{r_0}$ y $r_0 = \sqrt{\frac{Q}{b}}$.

Ya que esta métrica cumple con las condiciones que requiere (112) podemos en principio obtener una métrica con rotación a partir del coeficiente g_{00} de (191); utilizando el algoritmo de A-A discutido en el capítulo anterior obtenemos

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Mr - Q^2}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + 2a \operatorname{sen}^2 \theta \frac{2Mr - Q^2}{\rho^2} dt d\phi - \rho^2 d\theta^2 - \frac{\Sigma \operatorname{sen}^2 \theta}{\rho^2} d\phi^2.$$

Ya que $F = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2(r)}{r^2}\right) \Rightarrow 2f = 2Mr - Q^2, \quad \Delta = r^2 - 2Mr + Q^2 + a^2.$

(192)

Podemos ver que esta solución es idéntica a (188), la cual sabemos ya que no corresponde a un monopolo rotante con electrodinámica de EBI

4.3 ANÁLISIS DE LAS COMPONENTES DEL TENSOR DE ENERGÍA-MOMENTO

Sabemos de [Julio and Lombardo \[2004\]](#) el valor que debe tener el cociente de las componentes del tensor de energía-momento $\frac{T_{tt}}{T_{\theta\theta}}$ asociado a la métrica de EBI

$$\frac{T_{tt}}{T_{\theta\theta}} = \frac{r^4}{\rho^4} \left(\sqrt{1 + \frac{r_0^4}{r^4}} - 1 \right) \left[\frac{r^4}{\rho^4} \left(\sqrt{1 + \frac{r_0^4}{r^4}} - 1 \right) + \frac{r^2}{\rho^2} \left(2 - \frac{2 + \frac{r_0^4}{r^4}}{\sqrt{1 + \frac{r_0^4}{r^4}}} \right) \right]^{-1}, \quad (193)$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} \frac{T_{tt}}{T_{\theta\theta}} &= \left[1 + \frac{r^2}{r_0^4} \left(2 - \sqrt{1 + \frac{r_0^4}{r^4}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r_0^4}{r^4}}} \right) \left(1 + \sqrt{1 + \frac{r_0^4}{r^4}} \right) \rho^2 \right]^{-1} \\ &= \left[1 + \frac{r^2}{r_0^4} \left(\sqrt{1 + \frac{r_0^4}{r^4}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r_0^4}{r^4}}} - \frac{r_0^4}{r^4} \right) \rho^2 \right]^{-1} \\ &= \left[1 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r_0^4}{r^4}}} - 1 \right) \rho^2 \right]^{-1} = \left[1 - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r_0^4}{r^4}}} \right) \rho^2 \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (194)$$

Para conocer exactamente la función f de la métrica (112), utilizaremos las siguientes relaciones [Azreg-Aïnou \[2014\]](#)

$$T_{tt} = \epsilon = \frac{2(rf_{,r} - f)}{\rho^4} \quad T_{\theta\theta} = p_\theta = \frac{2(rf_{,r} - f)}{\rho^4} - \frac{f_{,rr}}{\rho^2}. \quad (195)$$

Entonces el cociente $\frac{T_{tt}}{T_{\theta\theta}}$ se puede escribir

$$\frac{T_{tt}}{T_{\theta\theta}} = \frac{\epsilon}{p_\theta} = \frac{2(rf_{,r} - f)}{\rho^4} \left[\frac{2(rf_{,r} - f)}{\rho^4} - \frac{f_{,rr}}{\rho^2} \right]^{-1}, \quad (196)$$

o en términos de $\frac{f}{r}$

$$\begin{aligned} \frac{T_{tt}}{T_{\theta\theta}} &= \left[1 - \frac{f_{,rr}}{2(rf_{,r} - f)} \rho^2 \right]^{-1} \\ &= \left[1 - \frac{2(f/r)_{,r} + r(f/r)_{,rr}}{2r^2(f/r)_{,r}} \rho^2 \right], \\ &= \left[1 - \frac{1}{r^2} \left[1 + \frac{r(f/r)_{,rr}}{2(f/r)_{,r}} \right] \rho^2 \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (197)$$

Tomemos la métrica estática de EBI (191); si aplicamos el formalismo del capítulo anterior obtenemos para (113) específicamente

$$2f = r^2(1 - F) = 2mr - \frac{2b^2r^4}{3} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{q^2}{b^2r^4}} \right) - \frac{4}{3} q^2 F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}; \frac{5}{4}, -\frac{q^2}{b^2r^4} \right), \quad (198)$$

y también $\Delta = r^2F + a^2$ y $\Sigma = (r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta$.

Utilizando la expresión anterior para f es entonces fácil obtener

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{r} \right)_{,r} &= -\frac{q^2r^2}{r_0^4} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{r_0^4}{r^4}} \right), \\ \left(\frac{f}{r} \right)_{,rr} &= \frac{2q^2r}{r_0^4 \sqrt{1 + \frac{r_0^4}{r^4}}} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{r_0^4}{r^4}} \right), \end{aligned} \quad (199)$$

donde se ha usado la identidad

$$\int_r^\infty \frac{ds}{\sqrt{x^4 + r_0^4}} = \frac{1}{r_2} F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}; \frac{5}{4}; -\frac{r_0^4}{r^4} \right). \quad (200)$$

Mediante estas dos últimas expresiones podemos verificar que (197) conduce a la expresión conocida para el cociente de las componentes del tensor de energía-momento (194) de manera exacta.

Esto nos indica que la solución generada mediante el método de J-N o A-A nos reproduce la razón (194) la cual es conocida para el monopolo rotante, sin embargo no reproducen las

componentes individuales T_{tt} y $T_{\theta\theta}$ que se asocian al monopolo rotante con electrodinámica de BI. Analizar a mayor detalle este tema para posteriormente construir soluciones no conmutativas con rotación con electrodinámicas no lineales es de gran interés; por ejemplo reproducir el método de A-A sin utilizar el tensor de energía-momento de un fluido perfecto podría darnos pistas de como conseguir la solución correcta.

A pesar de no conocer la forma de la métrica de EBI con rotación, ya tenemos algunas pistas; sabemos la forma que debe tener el tensor de energía-momento y que no es del tipo D en la clasificación de Petrov como se demuestra en el siguiente trabajo [A. García](#), por lo que debemos considerar algo más general.

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Generar soluciones con rotación en Relatividad General no es una tarea sencilla. Como es sabido, pasaron muchos años antes de que se obtuviera una por primera vez. En este trabajo se analizó el algoritmo de Janis-Newman y el método de Azreg-Aïnou que proveen de este tipo de soluciones de una manera sencilla, transformando la simetría de un espacio-tiempo estático esféricamente simétrico a una simetría axial. Se logró así transformar la simetría de un espacio-tiempo estático que describe una fuente con masa, cargada o no, a un espacio-tiempo con rotación utilizando ambos métodos.

Mediante el algoritmo de Janis-Newman obtuvimos la siguiente forma para una métrica general con rotación

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{2\Phi(r,\theta)} & 0 & 0 & a\text{sen}^2\theta e^{\Phi(r,\theta)}(e^{\lambda(r,\theta)} - e^{\Phi(r,\theta)}) \\ \cdot & \frac{\rho^2}{\rho^2 e^{-2\lambda(r,\theta)} + a^2 \text{sen}^2\theta} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \rho^2 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \text{sen}^2\theta(\rho^2 + a^2 \text{sen}^2\theta e^{\Phi(r,\theta)}(2e^{\lambda(r,\theta)} - e^{\Phi(r,\theta)})) \end{pmatrix},$$

a partir de una métrica semilla con simetría esférica

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + e^{2\lambda(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2).$$

En este resultado sólo hace falta sustituir los coeficientes métricos, que se han transformado una vez que se ha permitido a las coordenadas (u, r) tomar valores complejos.

El paso en el método del algoritmo de Janis-Newman en que permitimos una complejificación de las coordenadas ha creado controversia alrededor del método, pues no se conoce una manera sistemática de realizar este cambio y mantiene cierta arbitrariedad al respecto. Para resolver este aspecto, aunque no se pierde del todo esta arbitrariedad, se ha propuesto una nueva prescripción para la complejificación de las coordenadas [Modesto and Nicolini \[2010\]](#). Esta prescripción ha sido propuesta luego de observar la forma matemática de los coeficientes métricos de los espacios-tiempo de Schwarzschild y Reissner-Nordström al transformarse en los de Kerr y Kerr-Newman escritos en la descomposición de Kerr-Schild

$$ds_{\text{estática}}^2 = ds_{\text{Mink}}^2 - \frac{j(r)}{r^2} (k_{\mu} dx^{\mu})^2.$$

Con la misma fuente de materia pero diferentes simetrías, todas las soluciones con rotación conocidas hasta el momento, escritas en la descomposición de Kerr-Schild mantienen la misma función $j(r)$ que las soluciones estáticas, esto es, tienen la forma

$$ds_{rotante}^2 = ds_{Mink}^2 - \frac{j(r)}{r\bar{r}} (\tilde{k}_\mu dx^\mu)^2,$$

después de realizar la complejificación. Por lo tanto la nueva información que incluye la rotación, se encuentra en el cambio de $k_\mu \rightarrow \tilde{k}_\mu$ y en la transformación de la coordenada r en el denominador del segundo término en la descomposición; si bien aún no sabemos con exactitud la forma que adquiere \tilde{k}_μ al menos sabemos que la función $j(r)$ no debe ser cambiada al pasar de una simetría a otra.

Aplicando estos resultados a las métricas de Schwarzschild y Reissner-Nordström en sus versiones no conmutativas

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

$$\text{con } m(r) = 2M \frac{\gamma\left(\frac{3}{2}; \frac{r^2}{4\vartheta}\right)}{\sqrt{\pi}}$$

$$ds^2 = -f dt^2 + f^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

donde

$$f = 1 - \frac{4M}{\sqrt{\pi r}} \gamma\left(\frac{3}{2}; \frac{r^2}{4\vartheta}\right) + \frac{Q^2}{\pi r^2} \left[\left[\gamma^2\left(\frac{1}{2}; \frac{r^2}{4\vartheta}\right) - \frac{r}{\sqrt{2\vartheta}} \gamma\left(\frac{1}{2}; \frac{r^2}{4\vartheta}\right) \right] + \sqrt{\frac{2}{\vartheta}} r \gamma\left(\frac{3}{2}; \frac{r^2}{4\vartheta}\right) \right].$$

respectivamente, logramos obtener los siguientes elementos de línea

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m(r)r}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{4m(r)r \text{sen}^2\theta}{\rho^2} d\varphi dt + \frac{\rho^2}{\Delta'} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \\ + \left(r^2 + a^2 + \frac{2m(r)ra^2 \text{sen}^2\theta}{\rho^2}\right) \text{sen}^2\theta d\varphi^2.$$

Con $\Delta' = r^2 - 2m(r)r + a^2$, esta es la métrica de Kerr no conmutativa en coordenadas de Boyer-Lindquist. Además

$$ds^2 = \frac{\tilde{\Delta}' - a^2 \text{sen}^2\theta}{\Sigma} dt^2 - \frac{\Sigma}{\tilde{\Delta}'} dr^2 - \Sigma d\theta^2 \\ + 2a \text{sen}^2\theta \left(1 - \frac{\tilde{\Delta}' - a^2 \text{sen}^2\theta}{\Sigma}\right) dt d\varphi \\ - \text{sen}^2\theta \left[\Sigma + a^2 \text{sen}^2\theta \left(2 - \frac{\tilde{\Delta}' - a^2 \text{sen}^2\theta}{\Sigma}\right) \right] d\varphi^2,$$

donde $\tilde{\Delta}' = r^2 - 2m(r)r + q(r)^2 + a^2$, es la solución que corresponde a la métrica de Kerr-Newman no conmutativa en coordenadas de Boyer-Lindquist. Gracias a la prescripción antes descrita concluimos que $m(r)$ y $q(r)$ forman parte de $j(r)$ en la descomposición de Kerr-Schild, por lo que se mantuvieron intactas al cambiar la simetría del espacio tiempo no conmutativo para incluir rotación.

Por otro lado, el método de Azreg-Ainou nos dio la ventaja de generar soluciones con rotación sin complejificar coordenadas, por lo que se elimina la ambigüedad del algoritmo de Janis-Newman. Esto se logra aplicando nuevas condiciones que nos imponen las ecuaciones de Einstein para el tensor de energía-momento de un fluido perfecto. Se obtuvo así el siguiente elemento de línea para una métrica general con rotación

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2f}{\rho^2}\right)dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 - \frac{4af\text{sen}^2\theta}{\rho^2}dtd\phi + \rho^2d\theta^2 + \frac{\Sigma\text{sen}^2\theta}{\rho^2}d\phi^2,$$

donde

$$\begin{aligned}\rho^2 &= r^2 + a^2\cos^2\theta, & 2f &= r^2(1-F), & \Delta &= r^2F + a^2 = r^2 - 2f + a^2, \\ \Sigma &= (r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta\text{sen}^2\theta.\end{aligned}$$

Este elemento de línea se obtuvo a partir de la métrica semilla estática

$$ds^2 = -G(r)dt^2 + \frac{dr^2}{F(r)} + H(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

donde tomamos el caso en que $G = F$ y $H = r^2$.

Notemos que en este resultado solo falta sustituir los coeficientes métricos del espacio-tiempo estático, sin ningún otro cambio. Si tomamos de nuevo como métricas semillas las métricas de Schwarzschild y Reissner-Nordström, en sus versiones no conmutativas generamos las métricas

$$\begin{aligned}ds^2 &= -\left(1 - \frac{2m(r)r}{\rho^2}\right)dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 - \frac{4a m(r)r\text{sen}^2\theta}{\rho^2}dtd\phi \\ &+ \rho^2d\theta^2 + \frac{\Sigma\text{sen}^2\theta}{\rho^2}d\phi^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}ds^2 &= -\left(1 - \frac{2m(r)r - q(r)^2}{\rho^2}\right)dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 - \frac{2a[2m(r)r - q(r)^2]\text{sen}^2\theta}{\rho^2}dtd\phi \\ &+ \rho^2d\theta^2 + \frac{\Sigma\text{sen}^2\theta}{\rho^2}d\phi^2,\end{aligned}$$

las cuales respectivamente corresponden a las métricas de Kerr y Kerr-Newman no conmutativas. Ambas soluciones son idénticas a las encontradas mediante el algoritmo de Janis Newman lo cual fortalece el argumento de utilizar la prescripción que dejó intactas las funciones dependientes de r en los coeficientes métricos.

Las características de un AN rotante se ven afectadas al considerar no conmutatividad. En el caso de la velocidad angular del arrastre de marcos inerciales pudo observarse que ésta disminuye cuando el parámetro de no conmutatividad aumenta.

Al analizar la gráfica ω vs r de la velocidad angular del AN de Kerr clásico y Kerr NC, se utilizaron los mismos valores para la masa y para el momento angular, sin embargo los valores de ω para el espacio-tiempo NC decaen más rápido al acercarse a $r = 0$; es necesario un parámetro de no conmutatividad del orden de 10^{-3} para que la velocidad emule el comportamiento de Kerr clásico.

Por otro lado al comparar las gráficas ω vs r de Kerr-Newman clásico y NC se observa un comportamiento similar al de Kerr; para valores iguales de momento angular, masa y carga, la velocidad angular decae más rápido para el caso NC que para el clásico; a valores más grandes del parámetro NC ϑ más rápido decae y para emular el comportamiento clásico fue necesario que ϑ tuviera un orden de 10^{-2} .

Es importante encontrar posibles efectos medibles de las consecuencias de la existencia de no conmutatividad, el comportamiento de la velocidad angular es un posible efecto medible para estimar el valor del parámetro NC que aún no ha sido publicado.

Otros posibles observables que no han sido publicados y que pueden explorarse en el futuro son:

- El horizonte de eventos sin restringirnos al caso extremo. Recordemos que con la reciente imagen del Event Horizon Telescope, fue posible estimar el radio del AN.
- La ergoesfera. Esta deformará el efecto de lente gravitacional, por lo que en principio podría ser medible indirectamente.
- La sombra del agujero negro, la cual se verá afectada por el arrastre de marcos inerciales.

Un caso de interés que nos puede proporcionar mayor información sobre métricas clásicas y no conmutativas surge al acoplar una electrodinámica no lineal con el campo gravitacional. Es por ello que finalmente se consideró un espacio-tiempo con este tipo de electrodinámica,

en este caso fueron aplicados los dos métodos aquí estudiados a la métrica de Einstein-Born-Infeld (EBI) (A). Ambos métodos arrojaron el mismo resultado mostrado a continuación

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Mr - Q(r)^2}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + 2a \sin^2 \theta \frac{2Mr - Q(r)^2}{\rho^2} dt d\phi - \rho^2 d\theta^2 - \frac{\Sigma \sin^2 \theta}{\rho^2} d\phi^2,$$

donde $\Sigma = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta$ $\Delta = r^2 - 2Mr + Q^2 + a^2$.

Esta métrica sin embargo no corresponde a el espacio tiempo de EBI con rotación puesto que no reproduce las expresiones conocidas para las componentes del tensor de energía momento del espacio tiempo de EBI.

El algoritmo de Janis-Newman no nos dio la solución adecuada, ya que no es posible llevar la métrica de EBI a la descomposición de Kerr-Schild; la prescripción propuesta en el Capítulo 3.1 no es aplicable en este caso y no podemos concluir entonces que el algoritmo de JN no funciona para EBI, sólo que no se ha encontrado la complexificación adecuada de las coordenadas en la métrica de EBI.

Por otro lado el método de Azreg-Aïnou tampoco funcionó ya que obtuvimos el comportamiento adecuado de las relaciones del tensor de energía momento sin embargo, las componentes una a una no eran las que se esperan de este espacio-tiempo. Este comportamiento era de esperarse; recordemos que AA obtiene su métrica con rotación al resolver las ecuaciones de Einstein para el tensor de energía-momento de un fluido anisotrópico, es por ello que el tensor de energía momento resultante no se puede esperar que sea el de un monopolo rotante, sino el de un fluido anisotrópico acoplado a la electrodinámica de Born-Infeld.

Para un trabajo posterior uno podría inspirarse en el método de AA pero resolviendo esta vez las ecuaciones de Einstein para el tensor de energía momento de un monopolo rotante; las condiciones que resulten podrían ayudar a resolver el problema de encontrar el agujero negro de EBI con rotación.

ESPACIO-TIEMPO DE EINSTEIN-BORN-INFELD

La teoría electromagnética de Born-Infeld está motivada por el deseo de regularizar el problema de divergencia asociado a una fuente de carga puntual en la teoría clásica de Maxwell. Existe una solución esféricamente simétrica a las ecuaciones de campo de Einstein acoplada con la electrodinámica no lineal de Born-Infeld, la cual es regular en todo el espacio.

Recordemos que una solución esféricamente simétrica tiene la forma

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta\phi^2), \quad (201)$$

donde ν y λ son funciones únicamente de r .

El campo electromagnético está determinado por un tensor antisimétrico $F_{\mu\nu}$, el cual está relacionado con el potencial A_μ de la forma usual $F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$. Los campos eléctrico y magnético están definidos por las relaciones

$$E_\nu = F_{\mu\nu}u^\mu, \quad B^\nu = -\tilde{F}^{\mu\nu}u_\mu, \quad (202)$$

donde $\tilde{F}^{\mu\nu}$ es el tensor dual a $F_{\mu\nu}$, u^μ es la cuadrivelocidad de un observador. Los dos invariantes del tensor de campo electromagnético $S = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ y $P = -\frac{1}{4}\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ se usan para construir el Lagrangiano que toma la forma

$$L = b^2[1 - \sqrt{1 - 2b^{-2}S - b^{-4}P^2}], \quad (203)$$

donde b es una constante.

Utilizando los campos auxiliares D y H los cuales se definen a partir del tensor auxiliar $H^{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial F_{\mu\nu}}$,

$$D^\nu = H^{\mu\nu}u_\mu, \quad H_\nu = H_{\mu\nu}u^\mu, \quad (204)$$

las ecuaciones de campo toman la forma

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad \nabla_\mu H^{\mu\nu} = 4\pi j^\nu. \quad (205)$$

La solución esféricamente simétrica de las ecuaciones de Born-Infeld de un campo producido por una carga puntual q es

$$D_r = \frac{q}{r^2}e^{-\frac{1}{2}(\nu+\lambda)}, \quad E_r = \frac{q}{\sqrt{r^4 + \frac{q^2}{b^2}}}e^{\frac{1}{2}(\nu+\lambda)}. \quad (206)$$

El tensor de energía momento es

$$4\pi T_{\nu}^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{1-2b^{-2}S-b^{-4}P^2}} F^{\mu\lambda} F_{\lambda\nu} + g_{\nu}^{\mu} b^2 \left[\frac{1-2b^{-2}S}{\sqrt{1-2b^{-2}S-b^{-4}P^2}} - 1 \right]. \quad (207)$$

Para el campo de una carga puntual se tiene

$$4\pi T_0^0 = 4\pi T_1^1 = \frac{E_r^2 e^{-(\nu+\lambda)}}{\sqrt{1-E_r^2 b^{-2} e^{-(\nu+\lambda)}}} + b^2 [\sqrt{1-E_r^2 b^{-2} e^{-(\nu+\lambda)}} - 1], \quad (208)$$

$$4\pi T_2^2 = 4\pi T_3^3 = b^2 [\sqrt{1-E_r^2 b^{-2} e^{-(\nu+\lambda)}} - 1].$$

En consecuencia, las ecuaciones de Einstein toman la forma

$$\begin{aligned} -8\pi T_0^0 &= e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2}, \\ -8\pi T_1^1 &= e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2}, \\ -8\pi T_2^2 &= -8\pi T_3^3 = \frac{1}{2} e^{-\lambda} \left(\nu'' + \frac{\nu'2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2} \right). \end{aligned} \quad (209)$$

Ya que se tiene $T_0^0 = T_1^1$ obtenemos $\nu' + \lambda' = 0$ y sin perder generalidad $\nu + \lambda = 0$. Por lo que podemos reescribir

$$-2b^2 \left(\frac{\sqrt{r^4 + a^4}}{r^2} - 1 \right) = \frac{1}{r^2} (r e^{-\lambda})' - \frac{1}{r^2}, \quad (210)$$

donde $a^2 = \frac{q}{b}$. La solución general esféricamente simétrica es

$$e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 - \frac{2m}{r} - \frac{2q^2}{3} \frac{1}{\sqrt{r^4 + a^4} + r^2} - \frac{4q^2}{3} \frac{1}{r} \int \frac{dr}{\sqrt{r^4 + a^4}}, \quad (211)$$

donde m es una constante de integración que se interpreta como la masa intrínseca. Integrando obtenemos

$$e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 - \frac{2m}{r} - \frac{2q^2}{3} \frac{1}{\sqrt{r^4 + a^4} + r^2} - \frac{4q^2}{3} \frac{1}{r} F \left(\frac{1}{2}, \arccos \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2} \right), \quad (212)$$

o bien

$$e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 - \frac{2m}{r} - \frac{2q^2}{3} \frac{1}{\sqrt{r^4 + a^4} + r^2} - \frac{4q^2}{3} \frac{1}{r^2} {}_2F_1 \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{a^4}{r^4} \right), \quad (213)$$

la cual corresponde a la componente g_{00} de la solución de Einstein-Born-Infeld (EBI).

BIBLIOGRAFÍA

- J. Plebanski A. García, H. Salazar. Type-D Solutions of the Einstein and Born . Infeld Nonlinear-Electrodynamics Equations. *Il Nuovo Cimento*, (84):65–90.
- Johannes Aastrup. with Noncommutative Geometry – a Review. *Quantum*, 8, 2012. doi: 10.3842/SIGMA.2012.018.
- Tim Adamo and E. T. Newman. The Kerr-Newman metric: A Review. 9(10), 2014. URL <http://arxiv.org/abs/1410.6626>.
- S. A. Alavi. Reissner-Nordstrom black hole in noncommutative spaces. *Acta Physica Polonica B*, 40(10):2679–2687, 2009. ISSN 05874254.
- Paolo Aschieri, Marija Dimitrijevic, Petr P Kulish, Fedele Lizzi, and Julius Wess. Non-commutative Spacetimes. 774:89–109, 2009. doi: 10.1007/978-3-540-89793-4. URL <http://www.springerlink.com/index/10.1007/978-3-540-89793-4>.
- Mustapha Azreg-Aïnou. Generating rotating regular black hole solutions without complexification. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, 90(6):1–13, 2014. ISSN 15502368. doi: 10.1103/PhysRevD.90.064041.
- Carter B. Global Structure of the Kerr Family of Gravitational Fields. 1776(1967), 1968.
- Rabin Banerjee, Biswajit Chakraborty, Subir Ghosh, Pradip Mukherjee, and Saurav Samanta. Topics in noncommutative geometry inspired physics. *Foundations of Physics*, 39(12): 1297–1345, 2009. ISSN 00159018. doi: 10.1007/s10701-009-9349-y.
- Rabin Banerjee, Sunandan Gangopadhyay, and Sujoy Kumar Modak. Voros product, non-commutative Schwarzschild black hole and corrected area law. *Physics Letters, Section B: Nuclear, Elementary Particle and High-Energy Physics*, 686(2-3):181–187, 2010. ISSN 03702693. doi: 10.1016/j.physletb.2010.02.034.
- Jiri Bicak. Selected solutions of Einstein’s field equations: their role in general relativity and astrophysics. 2000. URL <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0004016>.
- Neven Bilic. Black-hole phenomenology. *Proceedings of Science*, 34, 2006. ISSN 18248039.
- Robert H. Boyer and Richard W. Lindquist. Maximal Analytic Extension of the Kerr Metric. *Journal of Mathematical Physics*, 8(2):265–281, 1967. ISSN 00222488. doi: 10.1063/1.1705193.

- O. Brauer, H. A. Camargo, and M. Socolovsky. Newman-Janis Algorithm Revisited. *International Journal of Theoretical Physics*, 54(1):302–314, 2014. ISSN 15729575. doi: 10.1007/s10773-014-2225-3.
- Mark Bugden. Spherical photon orbits around a 5D Myers–Perry black hole. *General Relativity and Gravitation*, 50(3):1–19, 2018. ISSN 15729532. doi: 10.1007/s10714-018-2352-x.
- Rosangela Canonico and Luca Parisi. The Newman Janis Algorithm: A Review of Some Results. pages 159–169, 2012. doi: 10.7546/giq-12-2011-159-169. URL http://www.bio21.bas.bg/proceedings/Proceedings_files/vol12content.htm.
- Sean M. Carroll. Lecture Notes on General Relativity. 1997. ISSN <null>. doi: 10.1134/S1061934810080083. URL <http://arxiv.org/abs/gr-qc/9712019>.
- Brandon Carter. *Republication of: Black hole equilibrium states part i analytic and geometric properties of the kerr solutions*, volume 41. 2009. ISBN 1071400908. doi: 10.1007/s10714-009-0888-5.
- S Chandrasekhar. *The mathematical theory of black holes*. Oxford classic texts in the physical sciences. Oxford Univ. Press, Oxford, 2002.
- Elisabetta Di Grezia, Giampiero Esposito, and Gennaro Miele. Black hole evaporation in a spherically symmetric non-commutative spacetime. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 41(16), 2008. ISSN 17518113. doi: 10.1088/1751-8113/41/16/164063.
- Harold Erbin. Janis-Newman algorithm: simplifications and gauge field transformation. *General Relativity and Gravitation*, 47(3):1–11, 2015. ISSN 15729532. doi: 10.1007/s10714-015-1860-1.
- J Fernández. Geometría no conmutativa y espaciotiempo cuántico. 2002.
- Sunandan Gangopadhyay and Frederik G. Scholtz. Path-integral action of a particle in the noncommutative plane. *Physical Review Letters*, 102(24):1–4, 2009. ISSN 00319007. doi: 10.1103/PhysRevLett.102.241602.
- Maurizio Gasperini. Theory of Gravitational Interactions. pages 199–208, 2013. ISSN 2192-4805(electronic). doi: 10.1007/978-88-470-2691-9. URL <http://link.springer.com/10.1007/978-88-470-2691-9>.
- Angélica González, Román Linares, Marco Maceda, and Oscar Sánchez-Santos. Thermodynamics of a higher dimensional noncommutative anti-de Sitter-Einstein-Born-infeld black hole. pages 1–13, 2015. URL <http://arxiv.org/abs/1508.01284>.
- Sharmila Gunasekaran, David Kubizňák, and Robert B. Manna. Extended phase space thermodynamics for charged and rotating black holes and Born-Infeld vacuum polarization. *Journal of High Energy Physics*, 2012(11), 2012. ISSN 11266708. doi: 10.1007/JHEP11(2012)110.

- Diego Julio and Cirilo Lombardo. The Newman-Janis algorithm, rotating solutions and Einstein-Born-Infeld black holes. *Classical and Quantum Gravity*, 21(6):1407–1417, 2004. ISSN 02649381. doi: 10.1088/0264-9381/21/6/009.
- Masoud Khalkhali. A Beginner's Guide to Noncommutative Geometry. pages 1–12, 2000.
- Archil Kobakhidze. Noncommutative corrections to classical black holes. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, 79(4):1–5, 2009. ISSN 15507998. doi: 10.1103/PhysRevD.79.047701.
- Wolfram Koepf. Hypergeometric Summation. pages 11–34, 2014. doi: 10.1007/978-1-4471-6464-7. URL <http://link.springer.com/10.1007/978-1-4471-6464-7>.
- J. Lense and H. Thirring. On the influence of the proper rotation of a central body on the motion of the planets and the moon, according to Einstein's theory of gravitation. 1918. URL http://www.neo-classical-physics.info/uploads/3/4/3/6/34363841/lense_thirring_-_lense-thirring_effect.pdf.
- Alan P. Lightman, William H. Press, Richard H. Price, and Saul A. Teukolsky. Problem Book in Relativity and Gravitation, 1975.
- D. J. Cirilo Lombardo. Nonlinear monopole, regularity conditions and the electromagnetic mass in Einstein-Born-Infeld theories. (November), 2005. URL <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0507127>.
- Marco Maceda and Alfredo Macías. Non-commutative inspired black holes in Euler–Heisenberg non-linear electrodynamics. *Physics Letters, Section B: Nuclear, Elementary Particle and High-Energy Physics*, 788:446–452, 2019. ISSN 03702693. doi: 10.1016/j.physletb.2018.11.048.
- Leonardo Modesto and Piero Nicolini. Charged rotating noncommutative black holes. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, 82(10), 2010. ISSN 15507998. doi: 10.1103/PhysRevD.82.104035.
- E. T. Newman and A. I. Janis. Note on the Kerr spinning-particle metric. *Journal of Mathematical Physics*, 6(6):915–917, 1965. ISSN 00222488. doi: 10.1063/1.1704350.
- E. T. Newman, E. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash, and R. Torrence. Metric of a rotating, charged mass. *Journal of Mathematical Physics*, 6(6):918–919, 1965. ISSN 00222488. doi: 10.1063/1.1704351.
- P Nicolini, a Smailagic, and E Spallucci. Noncommutative geometry inspired Schwarzschild black hole. *Physics Letters B*, 632(4):547–551, 2006. ISSN 03702693. doi: 10.1016/j.physletb.2005.11.004. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269305016126>.

- Piero Nicolini. Noncommutative Black Holes, The Final Appeal To Quantum Gravity: A Review. pages 1–77, 2008. ISSN 0217-751X. doi: 10.1142/S0217751X09043353. URL <http://arxiv.org/abs/0807.1939v0><http://dx.doi.org/10.1142/S0217751X09043353>.
- A. Pachol. Short review on noncommutative spacetimes. *Journal of Physics: Conference Series*, 442(1), 2013. ISSN 17426596. doi: 10.1088/1742-6596/442/1/012039.
- T. Padmanabhan. *Gravitation-Foundations-and-Frontiers*, volume 91. 2017. ISBN 9780521882231.
- R. Penrose, Andrzej Królak, and Werner Israel. Gravitational collapse: The role of general relativity. *General Relativity and Gravitation*, 34(7):1135–1139, 2002. ISSN 00017701. doi: 10.1023/A:1016534604511.
- Glauber R. Coherent and Incoherent States of the Radiation Field. *Physical Review*, 131 (638):2766, 1963. doi: /10.1103/PhysRev.131.2766.
- Wolfgang Rindler and Donald Salisbury. Relativity: Special, General, and Cosmological. *American Journal of Physics*, 71:1085, 2003. ISSN 00029505. doi: 10.1119/1.1622355.
- A.C. Ripken. Coordinate systems in De Sitter spacetime. *Radboud University Nijmegen*, (Radboud Honours Academy), 2013.
- G Risaliti, F A Harrison, K K Madsen, D J Walton, S E Boggs, F E Christensen, W W Craig, B W Grefenstette, C J Hailey, E Nardini, Daniel Stern, and W W Zhang. Unambiguous Determination of the Spin of the Black Hole in NGC 1365. pages 1–22, 2013. URL <http://arxiv.org/pdf/1302.7002v5><http://arxiv.org/pdf/1302.7002v5Cnpapers2://publication/uuid/9F3B057D-ABD2-4CA0-BBBD-D95D4FD4861F>.
- K. Schwarzschild. On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory. pages 1–7, 1999. ISSN <null>. doi: 10.1023/A:1022971926521. URL <http://arxiv.org/abs/physics/9905030>.
- Nathan Seiberg and Edward Witten. String Theory and Noncommutative Geometry. 1999. ISSN 1029-8479. doi: 10.1088/1126-6708/1999/09/032. URL <http://arxiv.org/abs/hep-th/9908142v0><http://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/1999/09/032>.
- Anais Smailagic and Euro Spallucci. UV divergence-free QFT on noncommutative plane. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 36(39), 2003. ISSN 03054470. doi: 10.1088/0305-4470/36/39/103.
- Anais Smailagic and Euro Spallucci. "Kerr"black hole: The lord of the string. *Physics Letters, Section B: Nuclear, Elementary Particle and High-Energy Physics*, 688(1):82–87, 2010. ISSN 03702693. doi: 10.1016/j.physletb.2010.03.075.
- Marta Macho Stadler and Pa. ¿Qué es la geometría no conmutativa? pages 129–142, 1989.

An Introduction To the Study of Stellar Structure. Chandrasekhar, S., 101.

S. P. Drake P. Szekeres. An explanation of the Newman-Janis Algorithm. pages 1–14, 1998.
doi: 10.1023/A:1001920232180. URL <http://arxiv.org/abs/gr-qc/9807001>.

Matt Visser. The Kerr spacetime: A brief introduction. 2007. doi: 10.1109/ISORC.2005.34.
URL <http://arxiv.org/abs/0706.0622>.



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00084

Matricula: 2163802964

Análisis de espacios-tiempo clásicos y no conmutativos con rotación.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 16:00 horas del día 30 del mes de enero del año 2020 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DRA. NORA EVA BRETON BAEZ
DR. LUIS OCTAVIO PIMENTEL RICO
DR. MARCO ANTONIO MACEDA SANTAMARIA



EDUARDO PLACIDO FLORES
ALUMNO

Bajo la Presidencia de la primera y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA)

DE: EDUARDO PLACIDO FLORES

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, la presidenta del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

REVISÓ

MTRA. ROSALÍA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA

PRESIDENTA

DRA. NORA EVA BRETON BAEZ

VOCAL

DR. LUIS OCTAVIO PIMENTEL RICO

SECRETARIO

DR. MARCO ANTONIO MACEDA SANTAMARIA