Algunos aspectos de resolubilidad en espacios topológicos y de conexidad en grupos topológicos

Tesis que presenta

M. en C. Luis Miguel Villegas Silva

Para la obtención del grado de

Doctor en Ciencias

Junio 1996

Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa
División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Asesor: Dr. Mijail Tkachenko

Jurado Asignado:

Dr. Adalberto García-Máynez C.

Dr. Salvador García F.

Dr. Mijail G. Tkachenko

Dr. Angel Tamariz M.

Dr. Richard G. Wilson

Agradecimientos

Quiero expresar mi profundo agradecimiento al Dr. Mijail Tkachenko por su continuo interés en mi desarrollo matemático, sus valiosos consejos y su gran amistad. A mi amigo el Dr. Angel Tamariz por su disponibilidad para resolver mis inumerables dudas a pesar de distraerlo de sus actividades y su entusiasmo al discutir conmigo algunos de los resultados de esta tesis.

Al Dr. Adalberto García-Máynez C. le agradezco el cuidado que puso al revisar esta tesis, tanto en su aspecto matemático como en su redacción. Agradezco el apoyo que siempre me ha brindado el Dr. Richard Wilson. En diversas ocasiones he recibido consejos y enseñanzas del Dr. Salvador García F.

Esta obra no se hubiese logrado sin el apoyo decidido e incondicional de mi esposa Enriqueta, mis hijos Emilio y Nicolás y mis Padres. A ellos dedico esta obra como un pequeño reconocimiento a su paciencia conmigo.

También agradezco el apoyo que siempre me han brindado mis hermanos.

Inevitable es, en toda obra matemática, la aridez y cortedad del lenguaje. Espero que el lector encuentre gratificante el trabajo, al menos en su aspecto matemático.

> *Nur die haben ein Recht zu kritisieren die zugleich ein Herz haben, zu helfen*

T. Storm

> *Mientras más rápidamente avance la cultura y la educación, junto a la organización de los trabajadores, más cerca estaremos del porvenir, es decir, del Socialismo.*

Luis Emilio Recabarren, Fundador del Partido Comunista de Chile

Indice

Agradecimientos i

Introducción v

CAPÍTULO I. Generalidades 1

1. **Notación** 1
2. **Funciones Cardinales** 1
3. **Familias centradas** 4
4. **Grupos κ-acotados** 5
5. **Resultados auxiliares** 7

CAPÍTULO II. Resolubilidad y Topologías Maximales 11

1. **Introducción** 11
2. **Generalidades** 12
3. **Topologías Maximales** 15
4. **Resolubilidad y convergencia** 20
5. **Resolubilidad en grupos κ-acotados** 26
6. **Resolubilidad en grupos libres** 30
7. **Resolubilidad en espacios producto** 33

CAPÍTULO III. Refinación de Topologías en Grupos Conexos 35

1. **Introducción** 35
2. **Preliminares** 36
3. **Grupos con subgrupo de torsión pequeño** 40

4. Grupos con torsión 44

5. Aplicaciones 52

Notación 55

Bibliografía 57

Indice 60

Introducción

La presente obra comprende el estudio de dos temas independientes: la resolubilidad de un espacio topológico y la refinación de topologías conexas en grupos topológicos. Al Capítulo II concierne la resolubilidad y al Capítulo III la refinación de topologías. Al inicio de ambos Capítulos se da una breve introducción al problema correspondiente así como las definiciones pertinentes.

El Capítulo I contiene definiciones y resultados requeridos en todo el resto de la tesis.

El Capítulo II se divide en varias secciones, cada una de las cuales presenta la resolubilidad de espacios con ciertas propiedadades topológicas. Varios de los teoremas y corolarios allí presentados generalizan resultados publicados en [V1].

En este capítulo se demostrará la máxima resolubilidad de grupos κ-acotados cuando la cardinalidad de los mismos es regular y mayor que κ. En algunos otros casos se obtiene cierto grado de resolubilidad de los mismos. En particular, se prueba que todo grupo seudocompacto (totalmente acotado) es maximal resoluble.

Otra propiedad considerada es la presencia de algún tipo de convergencia. Se demuestra que todo espacio de Frechet-Urysohn es maximal resoluble, misma propiedad que comparten una nueva clase de espacios introducida por Arkhangel'skii: los espacios birradiales. Los espacios topológicos homogéneos (en particular los grupos topológicos) que contienen una sucesión convergente no trivial son maximal resolubles.

La siguiente sección considera la resolubilidad de grupos libres. Se consigue demostrar que todo grupo libre en el sentido de Graev (aún sobre un espacio irresoluble) es $\aleph_0$-resoluble. Si imponemos la restricción $d(X) < |X|$ para un espacio X se puede probar que el grupo libre sobre X es maximal resoluble.

Finalmente se presentan ciertos grados de resolubilidad en espacios producto con la topología κ-producto.

Adicionalmente en el Capítulo II existe un apartado que considera topologías maximales. En el mismo se demuestra la equivalencia de varios criterios de maximalidad presentes en la literatura.

El Capítulo III se divide esencialmente en dos partes: la primera, cuyos reultados se publican en [TkV1], contempla grupos abelianos libres de torsión o con un subgrupo de torsión pequeño. Aquí se demuestra que bajo ciertas restricciones cardinales en un grupo conexo, siempre podemos encontrar una topología de grupo aún conexa estrictamente más fina con las mismas restricciones cardinales. También se demuestra que si la topología original es separable también se puede lograr esa característica para la nueva topología.

La segunda parte, que en su mayoría está contenida en el artículo [TkV2], involucra grupos abelianos con torsión de orden acotado y se alcanzan resultados similares para esta clase de grupos.

En la tesis usaré libremente algunos conceptos bien conocidos de la teoría de conjuntos, de la teoría de grupos topológicos, de la topología general y de la teoría de grupos. Las referencias para estas disciplinas son: [De] para teoría de conjuntos, [En] para topología general, [HR] para grupos topológicos y finalmente [Robin] para la teoría de grupos.

Una advertencia muy importante: en esta tesis espacio significa espacio topológico Tykhonov y denso en sí mismo. Además, nunca consideraremos espacios o subespacios triviales, es decir, los abiertos siempre serán no vacíos, los grupos seran infinitos, etc.

En toda la obra trabajaremos en el sistema ZFE, es decir, supondremos válidos los axiomas de Zermelo-Fraenkel y el axioma de elección. Algunos resultados requieren un axioma adicional lo cual se denotará mediante abreviaturas, por ejemplo: HC significa la Hipótesis del Continuo; AM el axioma de Martin y el principio combinatorio ($\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$), que es más débil que AM. Su definicón se presenta en el Capítulo I.

La numeración de los teoremas, lemas, etc. se da de la siguiente forma: Teorema I.3, Lema II.5, donde el número romano indica el capítulo y el número arabigo indica el número consecutivo.

La relación entre los capítulos es simple: los capítulos II y III dependen del capítulo I pero son independientes entre sí.

Al final de la obra se presenta la notación utilizada en la misma.

CAPÍTULO I

Generalidades

1. Notación

La notación que usaremos es la siguiente: Los números reales, naturales y enteros se denotarán, respectivamente por: $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$. El grupo del círculo es $\mathbb{T}$, es decir $\mathbb{T} = \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x|| = 1\}$. El conjunto de enteros positivos se representa por $\mathbb{N}^+$.

En cuanto a topología usaremos: el peso, la densidad, el grado de dispersión, el carácter y la celularidad de un espacio topológico X los que se simbolizan, respectivamente por: $w(X)$, $d(X)$, $\Delta(X)$, $\chi(X)$ y $c(X)$. La clausura de un subconjunto $F \subseteq X$ es $\overline{F}$ y su interior $\mathrm{Int}(F)$.

El número cardinal $2^{\aleph_0}$ se representa por $\mathfrak{c}$. El subgrupo generado por un subconjunto D de un grupo es escrito como $\langle D \rangle$, es decir, $D = \{d_1^{r_1} \cdots d_n^{r_n} : d_i \in D, r_i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq n\}$. La notación $\mathcal{P}(A)$ indica el conjunto potencia de A. La cofinalidad de un cardinal κ se denota $cf(\kappa)$. Si A es un conjunto, $|A|$ es su cardinalidad, y si κ es un cardinal entonces $[A]^\kappa = \{B \subseteq A : |B| = \kappa\}$. El símbolo κ^+ denota al cardinal sucesor de κ.

2. Funciones Cardinales

El *peso* de un espacio topológico X, que se simboliza por $w(X)$, se define como

$$w(X) = \text{mín}\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es una base para } X\} + \aleph_0.$$

La densidad de un espacio topológico X, denotada por $d(X)$ es

$$d(X) = \text{mín}\{|S| : S \text{ es denso en } X\} + \aleph_0.$$

Claramente $d(X) \leq w(X)$ para cualquier espacio topológico X.

Una colección mutuamente ajena de abiertos no vacíos en un espacio topológico, es llamada una familia *celular*. Ahora podemos definir la *celularidad* de un espacio X:

$$c(X) = \sup\{|\mathcal{C}| : \mathcal{C} \text{ es una familia celular en } X\} + \omega.$$

Se sigue de las definiciones que $c(X) \leq d(X)$. En los grupos compactos o σ-compactos la celularidad es numerable (véase [Tk]).

El *número de Lindelöf* de un espacio topológico X, que se denota por $l(X)$, se define como el cardinal infinito más pequeño κ tal que toda cubierta abierta de X tiene una subfamilia de cardinalidad $\leq \kappa$ que cubre a X. Así que un espacio X es Lindelöf si y sólo si $l(X) = \aleph_0$.

Una *π-base* para X es una colección $\mathcal{V}$ de subconjuntos abiertos no vacíos de X tal que si O es un abierto no vacío en X, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V \subseteq O$. El *π-peso* de un espacio X es:

$$\pi w(X) = \min\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V} \text{ es una } \pi\text{-base para } X\} + \omega.$$

Una red en un espacio X es una colección $\mathcal{N}$ de subconjuntos de X tales que todo abierto de X es unión de elementos de $\mathcal{N}$. El *peso de red* $nw(X)$ de X se define como:

$$nw(X) = \text{mín}\{|\mathcal{N}| : \mathcal{N} \text{ es una red en } X\} + \omega.$$

Una *red local* para un punto x en un espacio X es una colección $\mathcal{N}_x$ de subconjuntos de X tales que para todo abierto U de X que contiene a x, existe un elemento $N \in \mathcal{N}$ tal que $x \in N \subseteq U$.

Sean X un espacio, $\mathcal{V}$ una familia de abiertos no vacíos en X y $p \in X$. Entonces $\mathcal{V}$ es una *π-base* local en p si para cada vecindad U de p se tiene $V \subseteq U$ para alguna $V \in \mathcal{V}$. Si además se tiene que $p \in V$ para toda $V \in \mathcal{V}$, entonces $\mathcal{V}$ es una *base local* en p. Definimos las siguientes funciones cardinales para un punto $p \in X$:

$$\chi(p, X) = \text{mín}\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V} \text{ es una base local en } p\},$$
$$\pi\chi(p, X) = \text{mín}\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V} \text{ es una } \pi\text{-base local en } p\}.$$

Ahora definimos el *carácter* y el *π-carácter* de un espacio X:

$$\chi(X) = \sup\{\chi(p, X) : p \in X\} + \aleph_0,$$
$$\pi\chi(X) = \sup\{\pi\chi(p, X) : p \in X\} + \aleph_0$$

Para cualquier grupo topológico G se cumple la relación $w(G) = \pi w(G)$ y $\pi\chi(G) = \chi(G)$. Además, si para un grupo G se cumple $\chi(G) = \aleph_0$, entonces G es metrizable (véase [Co]).

Para todo espacio Hausdorff X se cumple $|X| \leq 2^{l(X)\cdot\chi(X)}$ (véase [Ar5]). Sea (X, τ) un espacio con topología τ. Definimos

$$\Delta(X, \tau) = \text{mín}\{|O| : O \text{ es abierto no vacío en } X\} + \aleph_0.$$

$\Delta(X, \tau)$ es el *grado de dispersión* del espacio X.

Obviamente $\Delta(X,\tau) \geq \aleph_0$ para todo espacio X. Si no hay ambigüedad respecto a la topología considerada, usaremos $\Delta(X)$ para denotar el grado de dispersión de un espacio X.

DEFINICIÓN I.1. Definimos la *la estrechez* para cada punto p de un espacio X:

$$t(p,X) = \text{mín}\{\kappa : \forall Y \subseteq X, (p \in \overline{Y}, \Rightarrow \exists A \subseteq Y, (|A| \leq \kappa, p \in \overline{A}))\},$$

y la estrechez para el espacio X:

$$t(X) = \sup\{t(p,X) : p \in X\} + \omega.$$

Claramente $t(X) \leq \chi(X)$ para todo espacio topológico X.

Un cardinal κ infinito es llamado un *calibre* de un espacio topoló gico X si dada una familia $\mathcal{V} = \{G_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de abiertos no vacíos en X, existe $A \in [\kappa]^\kappa$ tal que $\bigcap\{G_\alpha : \alpha \in A\} \neq \emptyset$; si existe tal A de manera que $\{G_\alpha : \alpha \in A\}$ tiene la propiedad de la intersección finita, entonces κ es un *precalibre* de X. Un cardinal κ es llamado un *precalibre débil* si dada la familia $\mathcal{V}$ existe $B \in [\kappa]^\kappa$ tal que $G_\alpha \bigcap G_\beta \neq \emptyset$ para todo $\alpha, \beta \in B$. Así es que todo calibre o precalibre de un espacio es un precalibre débil del mismo espacio.

El siguiente teorema presenta resultados bien conocidos (véase [En], [J] y [Ho]), cuya demostración se presenta para comodidad del Lector. Recuerde que sólo se consideran espacios de Tikhonov.

TEOREMA I.2. *Sea X un espacio.*
(a) $w(X) \leq 2^{d(X)}$
(b) Si $cf(\kappa) > d(X)$, entonces κ es un calibre de X
(c) Si κ es un precalibre de X, entonces $cf(\kappa)$ también lo es.

DEMOSTRACIÓN. (a) Sean D un conjunto denso en X con cardinalidad $d(X)$ y $\mathcal{B} = \{\text{Int}(\overline{B}) : B \subseteq D\}$. Se afirma que $\mathcal{B}$ es una base para la topología de X: sea W un abierto en X y $x \in W$. Entonces $x \in \overline{W} = \overline{(W \cap D)}$. Por la regularidad de X existe un abierto U con $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq W$; entonces $x \in \text{Int}(\overline{U}) \subseteq \text{Int}(\overline{(U \bigcap D)})$ y $U \cap D \subseteq D$. De aquí se sigue que $|\mathcal{B}| \leq 2^{d(X)}$.
(b) Suponga que $cf(\kappa) > d(X)$. Sea $\{G_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia de abiertos y $D \subseteq X$ un conjunto denso en X de cardinalidad $d(X)$. Entonces $G_\alpha \bigcap D \neq \emptyset$, para todo $\alpha < \kappa$. Sea $D_x = \{\alpha < \kappa : x \in G_\alpha \bigcap D\}$. Supongamos que $|D_x| < \kappa$ para toda $x \in D$. Es claro que $\cup_{x \in D} D_x = \kappa$. Entonces $|\cup_{x \in D} D_x| \leq \sum_{x \in D} |D_x| < \kappa$, una contradicción. Así es que existe $z \in D$ tal que $|D_z| = \kappa$ y por lo tanto $z \in \bigcap_{\alpha \in D_z} G_\alpha \neq \emptyset$.
(c) Esta simple demostración fue sugerida por Fernando Hernández. Sea $\mathcal{G} = \{G_\alpha : \alpha < cf(\kappa)\}$ una familia de abiertos no vacíos en X. Definimos $\lambda = cf(\kappa)$ y

$$V_\beta = G_\gamma \ \text{ para } \alpha_\gamma \leq \beta < \alpha_{\gamma+1}$$

donde $\{\alpha_\gamma : \gamma < \lambda\}$ es una sucesión creciente de ordinales menores que λ y tales que $\sum_{\gamma<\lambda} \alpha_\gamma = \lambda$. Los subconjuntos $\{V_\beta : \beta < \kappa\}$ forman una familia de abiertos no vacíos. Ya que κ es un precalibre de X, existe $A \in [\kappa]^\kappa$ tal que $\{V_\beta : \beta \in A\}$ tiene la propiedad de la intersección finita.

Consideremos para cada $\gamma < \lambda$ los siguientes conjuntos:

$$A_\gamma = \{\beta \in A : \alpha_\gamma \leq \beta < \alpha_{\gamma+1}\}, \tag{1}$$

$$B = \{\gamma < \lambda : A_\gamma \neq \emptyset\}. \tag{2}$$

Para $\gamma \in B$, sea $\beta(\gamma) \in A_\gamma$; entonces como $A = \cup\{A_\gamma : \gamma \in B\}$ y $|A_\gamma| < \kappa$ para cada $\gamma \in B$, obtenemos $|B| = \lambda$. Dado que $B \subseteq \lambda$, resulta que $B \in [\lambda]^\lambda$, puesto que λ es la cofinalidad de κ. De aquí se sigue fácilmente que $\{V_{\beta(\lambda)} : \lambda \in B\}$ tiene la propiedad de la intersección finita. □

LEMA I.3. *Sean $c(X) = \kappa$ y $\mathcal{V}$ una familia de abiertos en X. Entonces existe una subfamilia $\mathcal{W}$ de $\mathcal{V}$ tal que $|\mathcal{W}| \leq \kappa$ y $\cup\mathcal{V} \subseteq \overline{(\cup\mathcal{W})}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{G}$ la familia de todos los abiertos no vacíos en X que son subconjuntos de elementos de $\mathcal{V}$. Mediante una aplicación del Lema de Zorn obtenemos una familia maximal celular $\mathcal{W}_0 \subseteq \mathcal{G}$. Entonces $|\mathcal{W}_0| \leq c(X) = \kappa$, y $\cup\mathcal{V} \subseteq \overline{(\cup\mathcal{W}_0)}$ por la maximalidad de $\mathcal{W}_0$. Para cada $U \in \mathcal{W}_0$ sea $W(U) \in \mathcal{V}$ tal que $U \subseteq W(U)$, y sea $\mathcal{W} = \{W(U) : U \in \mathcal{W}\}$. Entonces, $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$, $|\mathcal{W}| \leq c(X)$ y $\cup\mathcal{V} \subseteq \overline{\mathcal{W}}$. □

3. Familias centradas

DEFINICIÓN I.4. Llamaremos a una familia de abiertos no vacíos de un espacio X con la propiedad de la intersección finita y maximal respecto a esta propiedad una *familia centrada*.

LEMA I.5. *Sea $\mathcal{F}$ una familia centrada en un espacio X. La familia $\mathcal{F}$ tiene las siguientes propiedades:*

(1) *Si $U_i \in \mathcal{F} (i = 1, \ldots, n)$, entonces $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{F}$.*
(2) *Sea W un abierto, $W \notin \mathcal{F}$ si y sólo si existe $U \in \mathcal{F}$ con $U \bigcap W = \emptyset$.*
(3) *Si $U \subseteq W$, $U \in \mathcal{F}$ y W es abierto, entonces $W \in \mathcal{F}$.*
(4) *Si W es denso y abierto en X, entonces $W \in \mathcal{F}$.*

DEMOSTRACIÓN. (1) Suponga que $W = \cap_{i=1}^n U_i \notin \mathcal{F}$. Defina $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cup \{W\}$. Se afirma que $\mathcal{F}'$ es centrada: claramente todo elemento de $\mathcal{F}'$ es abierto, demostraremos que $\mathcal{F}'$ tiene la propiedad de la intersección finita.

Sea $V \in \mathcal{F}$, entonces $V \cap W = V \cap U_1 \cap \cdots \cap U_n \neq \emptyset$. Así que $\mathcal{F}'$ sería centrada y contendría propiamente a $\mathcal{F}$, una contradicción.

(2) Suponga que $W \notin \mathcal{F}$, si $W \bigcap V \neq \emptyset$ para todo $V \in \mathcal{F}$ podriamos extender $\mathcal{F}$ a una familia centrada $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cup \{W\}$ que contuviese propiamente a $\mathcal{F}$. El recíproco se sigue de que $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de la intersección finita.

(3) Sea $U \in \mathcal{F}$, $U \subseteq W$, y W abierto en X. Entonces $\emptyset \neq V \bigcap U \subseteq V \bigcap W$ para todo $V \in \mathcal{F}$ y de (2) se sigue que $W \in \mathcal{F}$.

(4) Si W es denso, entonces $W \cap V \neq \emptyset$ para todo $U \in \mathcal{F}$ y de (3) se sigue que $W \in \mathcal{F}$. $\square$

4. Grupos κ-acotados

La definición de grupo κ-acotado fue introducida por Guran [G]. El mismo autor enunció muchas de las propiedades de estos grupos, en particular, las que se presentan en esta sección.

DEFINICIÓN I.6. Sea κ un cardinal. Un grupo topológico G es llamado κ-acotado si para cualquier vecindad U de la identidad del grupo, existe un subconjunto $F \subseteq G$ tal que $|F| \leq \kappa$ y $G = U \cdot F$.

Si G es κ-acotado y U es una vecindad de la identidad en G, decimos que G se puede cubrir con κ trasladados de U.

Observe que la definición de un grupo κ-acotado G es equivalente a que para cada vecindad U de la identidad, exista un subconjunto $X \subseteq G$ tal que $|X| \leq \kappa$ y $G = X \cdot U$: Suponga que G es κ-acotado en el sentido de la definición y sea U una vecindad de la identidad. Considere una nueva vecindad V de la identidad simétrica y contenida en U. Entonces existe $F \subseteq G$ tal que $|F| \leq \kappa$ y $G = V \cdot F$. Sea $X = \{x^{-1} : x \in F\}$. Se afirma que $G = X \cdot V$ y por lo tanto $G = X \cdot U$: sea $g \in G$, entonces $g^{-1} \in G$ y $g^{-1} = vf$ para ciertos $f \in F, v \in V$. Pero entonces $g = f^{-1}v^{-1} \in X \cdot V^{-1} = X \cdot V$.

A continuación se presentan varias propiedades de los grupos κ-acotados. Posteriormente se demostrará que todo grupo σ-compacto es $\aleph_0$-acotado. El recíproco no es cierto en general. Sin embargo, el producto de grupos σ-compactos es $\aleph_0$-acotado pero casi nunca es σ-compacto. Es decir, la $\aleph_0$-acotación es la propiedad que permanece al tomar productos o subgrupos de grupos σ-compactos.

LEMA I.7. *Sea G un grupo κ-acotado y H un subgrupo de G. Entonces H es κ-acotado.*

DEMOSTRACIÓN. Tomemos una vecindad U en H de la identidad e . Existen vecindades V y W de e en G tales que $V \cap H = U$ y $W^{-1}W \subseteq V$. Como G es κ-acotado, podemos encontrar un subconjunto K de G con $|K| \leq \kappa$ y $G = K \cdot W$. Si $x \in K$ y xW intersecta al subgrupo H, escojemos un punto $a_x \in H \cap (xW)$; en caso contrario ponemos $a_x = e$. Es claro que el conjunto $A = \{a_x : x \in K\}$ tiene cardinalidad no mayor que κ.

Verifiquemos que $A \cdot U = H$. La contención $A \cdot U \subseteq H$ es obvia. Sea $y \in H$ un elemento arbitrario. De $K \cdot W = G$ se deduce que existe $x \in K$ con $y \in xW$. Entonces $a_x \in xW$ o bien $x \in a_x W^{-1}$, y por consiguiente,

$$y \in xW \subseteq a_x W^{-1} \subseteq a_x W^{-1} \cdot W \subseteq a_x V.$$

Puesto que $y, a_x \in H$, concluimos que $a_x^{-1} y \in V \cap H \subseteq U$. Así, $y \in a_x U$ y la contención $H \subseteq A \cdot U$ está demostrada. □

LEMA I.8. *Sea $\{G_\alpha : \alpha < \beta\}$ una familia de grupos κ-acotados, κ un cardinal infinito. Entonces $G = \prod_{\alpha<\beta} G_\alpha$ es κ-acotado.*

DEMOSTRACIÓN. Sea V una vecindad de la identidad en G. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que V es un abierto canónico, es decir, de la forma $V = \prod_{\alpha<\beta} V_\alpha$, donde cada V_α es abierto y $V_\alpha = G_\alpha$ excepto en un número finito de casos; suponga que $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ son los índices en los que se presentan tales excepciones. Cada uno de los $V_{\alpha_i} (i = 1, \dots n)$ es vecindad de la identidad $e_{G_{\alpha_i}}$. Así es que para cada α_i existe $X_{\alpha_i} \subseteq G_{\alpha_i}$, $|X_{\alpha_i}| \leq \kappa$ tal que $G_{\alpha_i} = V_{\alpha_i} \cdot X_{\alpha_i}$. Para cada $\alpha \neq \alpha_i$ fijamos un punto $x_\alpha \in G_\alpha$. Sea Z el siguiente conjunto:

$$Z = \prod_{\alpha<\beta} Z_\alpha,$$

donde $Z_\alpha = X_{\alpha_i}$ si $\alpha = \alpha_i$ para algún $i \leq n$ y $Z_\alpha = \{x_\alpha\}$ en caso contrario. Entonces $|Z| \leq \kappa$ y $G = Z \cdot V$. □

LEMA I.9. *Sea G un grupo topológico con un subgrupo H denso en G y tal que H es κ-acotado. Entonces G es κ-acotado.*

DEMOSTRACIÓN. Sean U, W vecindades de la identidad en G tales que W es simétrica y $W^2 \subseteq U$. Entonces $W \cap H \neq \emptyset$ y por lo tanto, existe un subconjunto $F \subseteq H$ tal que $|F| \leq \kappa$ y $H \subseteq WF$. Se afirma que $G = UF$. Sea $g \in G$. Entonces existe $h \in H \cap Wg$. Por lo tanto, $h = wg$, para algún $w \in W$. Además $h = w'f$ para ciertos $f \in F$, $w' \in W$. Así es que $g = w^{-1}h = w^{-1}w'f \in WWF \subseteq UF$. Por lo tanto, $G = U \cdot F$. □

LEMA I.10. *Sea G un grupo topológico que se puede representar como la unión de a lo más κ subespacios compactos de G. Entonces G es κ-acotado. En particular todo grupo σ-compacto es $\aleph_0$-acotado.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $G = \bigcup_{\alpha<\kappa} K_\alpha$, donde cada K_α es compacto y sea U una vecindad de e_G. Podemos cubrir cada K_α con trasladados de U: $K_\alpha \subseteq \bigcup_{g\in K_\alpha} gU$. Por lo tanto existe un conjunto finito F_α en K_α, tal que $K_\alpha \subseteq F_\alpha \cdot U$. Suponga que en X reunimos todos los conjuntos F_α para toda $\alpha < \kappa$. Claramente $G = XU$ y $|X| \leq \kappa$. □

LEMA I.11. *Sea G un grupo topológico tal que $c(G) \leq \kappa$. Entonces G es κ-acotado.*

DEMOSTRACIÓN. Sea U una vecindad de la identidad en G. Se debe probar que existe un subconjunto $K \subseteq G$ tal que $|K| \leq \kappa$ y $G = K \cdot U$. Considere una vecindad V de la identidad, simétrica y tal que $V^2 \subseteq U$. Recursivamente construimos las sucesiones $K = \{g_\alpha | \alpha < \beta\} \subseteq G$ y $\mathcal{O} = \{O_\alpha | \alpha < \beta\}$, donde β será un cardinal $< \kappa^+$ y los elementos de $\mathcal{O}$ son abiertos en G mutuamente ajenos y no vacíos. Además $O_\alpha \subseteq g_\alpha \cdot V$ para cada $\alpha < \beta$. Suponga que hemos encontrado γ elementos de K y de $\mathcal{O}$ con $\gamma < \kappa^+$. Sea $F_\gamma = \overline{(\bigcup_{\mu<\gamma} O_\mu)}$ y suponga que $F_\gamma \neq G$. Entonces sean $g_\gamma \in G \setminus F_\gamma$ y $O_\gamma = (G \setminus F_\gamma) \cap (g_\gamma V)$. La construcción se detiene cuando el conjunto F_β coincide con G. Debemos tener $\beta < \kappa^+$ para algún β y $F_\beta = G$, de otra forma $c(G) \geq \kappa^+$. Se afirma que $G = K \cdot U$. Suponga lo contrario y sea $g \in G \setminus K \cdot U$. Por la construcción recursiva $\bigcup \mathcal{O} \subseteq K \cdot V$ es denso en G, así es que existe un elemento $z \in gV \cap g_\alpha V$ para alguna $\alpha < \beta$. Pero entonces $z = gv_1 = g_\alpha v_2$ con $v_1, v_2 \in V$. De aquí se deduce que $g = g_\alpha v_2 v_1^{-1} \in g_\alpha V^2 \subseteq g_\alpha U \subseteq K \cdot U$, una contradicción. □

5. Resultados auxiliares

Ahora presentamos algunos resultados de combinatoria infinita requeridos posteriormente en repetidas ocasiones.

LEMA I.12. *Sea κ un cardinal infinito y A un conjunto de cardinalidad κ. Entonces existe una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos ajenos de A tal que $|\mathcal{F}| = \kappa$, $|F| = \kappa$ para todo $F \in \mathcal{F}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $A = \kappa$. Sabemos que $|\kappa \times \kappa| = \kappa$, por lo tanto existe una biyección $\phi: \kappa \times \kappa \to \kappa$. Los subconjuntos $\{(\beta, \alpha) : \alpha < \kappa\}$, $\{(\gamma, \alpha) : \alpha < \kappa\}$ tienen cardinalidad κ y son ajenos si $\beta \neq \gamma$, así que sus imagenes respecto a ϕ son ajenas en κ y forman la familia que requerimos. □

LEMA I.13. *Sea α un cardinal infinito y sea $\{A_\xi : \xi < \alpha\}$ una familia de conjuntos tales que $|A_\xi| = \alpha$ para toda $\xi < \alpha$. Entonces existe una familia $\{B_\chi : \xi < \alpha\}$ de conjuntos tales que:*

$$B_\xi \subseteq A_\xi \text{ para } \xi < \alpha,$$
$$|B_\xi| = \alpha \text{ para } \xi < \alpha, \text{ y}$$
$$B_\xi \cap B_\zeta = \emptyset \text{ para } \xi < \zeta < \alpha.$$

DEMOSTRACIÓN. Construimos la familia buscada por recursión transfinita. Sea $p_{0,0} \in A_0$. Sea $\zeta < \alpha$ y suponga que hemos definido $p_{\xi',\xi} \in A_{\xi'}$ para $\xi' \leq \xi < \zeta$. Elegimos $p_{\zeta',\zeta}$ para $\zeta' \leq \zeta$ tales que

$$p_{\zeta',\zeta} \in A_{\zeta'} \setminus \{p_{\xi',\xi} : \xi' \leq \xi < \zeta\} \text{ y}$$
$$p_{\zeta',\zeta} \neq p_{\zeta'',\zeta} \text{ para } \zeta' < \zeta'' \leq \zeta,$$

y definimos

$$B_\xi = \{p_{\xi,\zeta} : \xi \leq \zeta < \alpha\}, \text{ para } \xi < \alpha.$$

Es fácil probar que $\{B_\xi : \xi < \alpha\}$ es la familia que requerimos. □

En secciones posteriores nos ocuparemos de productos de espacios, es por ello adecuado en este punto, definir algunos conceptos e introducir cierta notación.

Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia de conjuntos y $X = \prod_{i \in I} X_i$. Si $J \subseteq I$ y $J \neq \emptyset$, definimos

$$X_J = \prod_{i \in J} X_i,$$

y denotemos por pr_J la proyección de X sobre X_J definida por $pr_J((p_i)_{i \in I}) = (p_i)_{i \in J}$. Si $p \in X$ escribimos p_J en lugar de $pr_J(p)$, y escribimos pr_i y p_i en lugar de $pr_{\{i\}}$ y $p_{\{i\}}$.

Un subconjunto A de X tal que

$$A = \prod_{i \in I} A_i$$

donde $A_i \subseteq X_i$ para $i \in I$ es un *rectángulo generalizado* en X y el conjunto

$$R(A) = \{i \in I : A_i \neq X_i\}$$

es llamado el soporte de A.

DEFINICIÓN I.14. Sean $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios, sea X el producto $\prod_{i \in I} X_i$ y κ un cardinal infinito. La topología κ-producto en X es la topología con base igual a la familia de todos los subconjuntos U de X tales que

$$U = \prod_{i \in I} U_i, \quad \text{donde } U_i \text{ es abierto en } X_i,\ i \in I, \text{ y } |R(U)| < \kappa.$$

El espacio producto X con la topología κ-producto se denota por $X^{(\kappa)}$. La topología $\aleph_0$-producto es la topología producto usual. La base definida arriba para la topología κ-producto es llamada la base canónica y los abiertos miembros de esta base son conocidos como abiertos canónicos.

En algunos resultados usaremos el siguiente principio combinatorio:

DEFINICIÓN I.15. El principio $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$ es el siguiente: dada una colección de menos que $\mathfrak{c}$ subconjuntos de ω tal que la intersección de cualquier subcolección finita tiene cardinalidad $\aleph_0$, existe un subconjunto infinito $B \subseteq \omega$ tal que para cualquier miembro A de la colección tenemos que $|B \setminus A| < \aleph_0$.

Se sabe [W] que AM implica $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$ y que AM($\aleph_0$-centrado) es equivalente a $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$. Para las definiciones correspondientes de AM y AM(σ-centrado) véase [Ku] pags. 51–53.

Finalmente un resultado sobre espacios linealmente ordenados.

Recuerde que si $(X, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y $Y \subseteq X$, Y es llamado *cofinal* en X si para todo $x \in X$, existe $y \in Y$ tal que $y \geq x$.

LEMA I.16. *Sea $(X, \leq)$ un conjunto linealmente ordenado sin elemento maximal. Entonces existe $(Y, \leq)$ un subconjunto de X bien ordenado y cofinal en X.*

DEMOSTRACIÓN. Construiremos Y inductivamente. Sea $|X| = \kappa$. Sea $x \in X$ arbitrario. Definimos $y_0 = x$ y formamos $Y_0 = \{y_0\}$. Suponga que hemos construido $Y'_\alpha = \{y_\beta : \beta < \alpha\}$ para algún $\alpha < \kappa$. Si Y'_α es cofinal en X, simplemente definimos $Y = Y'_\alpha$. En caso contrario, existe $z \in X$ tal que $z > y_\beta$ para toda $\beta < \alpha$. Definimos $y_\alpha = z$ y $Y_\alpha = \{y_\beta : \beta \leq \alpha\}$. Continuamos el proceso para toda $\alpha < \kappa$. Al final hacemos $Y = \cup_{\alpha<\kappa} Y_\alpha$. Claramente Y es linealmente ordenado. Falta probar que Y está bien ordenado. Para tal efecto, considere un $F \subseteq Y$ no vacío. Note que si $\alpha = \text{mín}\{\beta < \kappa : y_\alpha \in F\}$, entonces y_α es el menor en F. $\square$

CAPÍTULO II

Resolubilidad y Topologías Maximales

1. Introducción

En 1947 M. Katětov ([K1]) planteó el siguiente problema: ¿Existe un espacio topológico sin puntos aislados en el cual toda función a los reales es continua en algún punto?. Esta pregunta tiene una formulación equivalente ([Mal1]): ¿Existe un espacio topológico sin puntos aislados (denso en sí mismo) en el cual toda función a los reales es continua en un subespacio abierto y denso?

Considere un espacio X en el cual existan dos subespacios densos y ajenos E, D. Claramente podemos suponer que $X = D \cup E$. Defina una función $f\colon X \to \mathbb{R}$ haciendo que $f(E) = 0$ y $f(D) = 1$. Es obvio que f no es continua en ningún punto de X.

Así pues, la pregunta de Katětov debe buscarse en la clase de los espacios irresolubles definidos más adelante; precisamente este capítulo estará encaminado a estudiar las condiciones en las cuales un espacio topológico puede descomponerse en dos subespacios densos disjuntos. En algunos casos también estaremos interesados en encontrar una descomposición que involucre un número mayor de subconjuntos densos ajenos.

El capítulo esta dividido en secciones en las cuales, exceptuando la secciones 2 y 3 que contienen definiciones, generalidades y criterios de maximalidad, se presenta la κ-resolubilidad de alguna clase de espacios.

Etapas fundamentales en la teoría de los espacios resolubles son las siguientes: Los primeros trabajos en considerar la resolubilidad de espacios son [K1] y [H]. En los mismos se demuestra la resolubilidad de varios espacios (métricos, localmente compactos, etc.). Sin embargo, no se considera κ-resolubilidad para $\kappa > 2$. También se definen en esos trabajos los espacios maximales (definidos más adelante) que en particular son irresolubles, así como espacios cercanos a ser maximales.

Un paso importante fue dado por Ceder y Pearson [CePe] y [Ce]. En estos trabajos se prueba por primera vez la máxima resolubilidad de algunos espacios, entre ellos, ciertos espacios producto con las topologías más comunes.

La resolubilidad en grupos topológicos se ha considerado en [CovM] en donde esencialmente se ha resuelto el problema en grupos abelianos. En [Mal4] se describe el único ejemplo de un grupo topológico maximal, en particular irresoluble (usando un axioma adicional a ZFE: el principio $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$).

En [V1] se demuestra la κ-resolubilidad de algunos grupos y espacios homogéneos (grupos α-acotados, con sucesiones no triviales convergentes, de Lindelöf, etc.).

En [Mas] se demuestra que el estudio de la irresolubilidad en grupos abelianos se reduce al estudio de grupos booleanos irresolubles. De hecho, se prueba que en un grupo abeliano irresoluble, el subgrupo de elementos de orden dos debe ser abierto e irresoluble. Se presentan varios resultados sobre la resolubilidad de productos de grupos o espacios homogéneos, grupos localmente seudocompactos y espacios numerablemente compactos.

En seguida presentaremos varios resultados sobre resolubilidad en espacios y grupos topológicos.

2. Generalidades

Comenzemos con la definición de κ-resolubilidad:

DEFINICIÓN II.1. Un espacio topológico X es *κ-resoluble* ($\kappa \geq 2$), si existen κ subespacios de X densos y ajenos dos a dos. Si $\kappa = 2$, el espacio es llamado resoluble. Si no existen al menos dos subespacios de X densos y ajenos, el espacio X es llamado *irresoluble*.

Ahora ~~podemos introducir el concepto de maxima~~ resolubilidad:

DEFINICIÓN II.2. Un espacio topológico X es *maximal resoluble* si X es $\Delta(X)$-resoluble.

Note que dado un espacio X, podemos encontrar a lo más $\Delta(X)$ subespacios densos y ajenos, pues cada denso debe contener puntos de cualquier abierto.

A continuación se presentan varios resultados importantes en la teoría de espacios resolubles, algunos de los cuales son generalizaciones de hechos conocidos previamente, y otros son usuales en esta área de la topología.

LEMA II.3. *Un espacio X es β-resoluble si contiene un subconjunto denso que es β-resoluble.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $A \subseteq X$ denso y β-resoluble, es decir $A = \cup_{\alpha<\beta} U_\alpha$, con U_α denso en A para cada $\alpha < \beta$ y $A_\alpha \cap A_\gamma = \emptyset$ para $\alpha < \gamma < \beta$. Sea $V = (X \setminus A) \cup U_0$. Entonces V y $\{U_\alpha : 0 < \alpha < \beta\}$ es una familia de densos ajenos en X. □

El recíproco de el Lema II.3 no es necesariamente cierto: en [Mal3] se construye un grupo G Hausdorff numerable irresoluble. Al ser un grupo Hausdorff es un espacio de Tikhonov y podemos considerar su compactificación βG. Todo espacio compacto es resoluble (véase el Corolario II.59) y sin embargo, G no es resoluble aunque es denso en βG.

TEOREMA II.4. *El producto $X = \prod_{i \in I} X_i$ es resoluble si al menos uno de los factores es resoluble.*

DEMOSTRACIÓN. Suponga que X_k es resoluble ($k \in I$). Entonces lo podemos descomponer en densos ajenos C_k, D_k. Definimos $C = \prod_{i \in I} A_i$ con $A_k = C_k$ y $A_i = X_i$ para toda $i \in I, i \neq k$, $B = \prod_{i \in I} B_i$ con $B_i = X_i$ para todo $i \in I, i \neq k$ y $B_k = D_k$. Entonces A y B son densos y ajenos en X. □

COROLARIO II.5. *El producto $X = \prod_{i \in I} X_i$ es β-resoluble si al menos uno de los factores es β-resoluble.*

El recíproco del Teorema II.4 no es cierto. Considere el grupo Tikhonov irresoluble G construido en [Mal3]. El producto de un número infinito de factores todos iguales a G es resoluble como se demostrará en la última sección de este capítulo, sin embargo G es irresoluble. De paso, observe que la resolubilidad no es un invariante respecto a imagenes continuas o incluso respecto a imagenes continuas y abiertas.

El siguiente teorema es bien conocido:

LEMA II.6. *Sea X un espacio topológico tal que $X = \cup_{\alpha<\beta} A_\alpha$ con cada A_α un subespacio β-resoluble y $A_\alpha \cap A_{\alpha'} = \emptyset$, para toda $\alpha \neq \alpha'$, $\alpha, \alpha < \beta$. Entonces X es β-resoluble.*

DEMOSTRACIÓN. Para cada $\alpha < \beta$ sean $A_{\alpha,\gamma}$ con $\gamma < \beta$ subconjuntos densos (y ajenos) de A_α. Definimos

$$B_\gamma = \cup_{\alpha<\beta} A_{\alpha,\gamma},$$

Claramente los conjuntos B_γ son densos y ajenos en X. □

Con el Lema II.6 podemos generalizar el resultado principal de [CoF]:

TEOREMA II.7. *Sea X un espacio topológico que es la unión de subespacios β-resolubles. Entonces X es β-resoluble.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $X = \cup_{\alpha<\gamma} A_\alpha$, donde cada A_α es β-resoluble y $\mathcal{B}$ una familia de subconjuntos β-resolubles de X ajenos dos a dos y maximal respecto a estas propiedades. Si usamos el lema II.3 basta probar que $D = \cup\mathcal{B}$ es denso en X. Suponga que D no es denso en X. Sea $x \in X \setminus \overline{D}$, entonces $x \in A_\alpha$ para alguna $\alpha < \gamma$. Considere $A = A_\alpha \setminus \overline{D}$. Entonces A es abierto en A_α, no vacío y ajeno a cada $B \in \mathcal{B}$.

Como A es abierto en A_α que es β-resoluble, A mismo es β-resoluble y se contradice la maximalidad de $\mathcal{B}$. □

COROLARIO II.8. *Sean X un espacio homogéneo y $A \subseteq X$ un subespacio no vacío β-resoluble. Entonces X es β-resoluble.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $a \in A$. Para cada punto $x \in X$ existe un homeomorfismo f_x de X en si mismo tal que $f_x(a) = x$. De esta definición se sigue que $X = \cup\{f_x(A) : x \in X\}$. Cada $f_x(A)$ es β-resoluble y por el Teorema II.7, X es β-resoluble. □

Un resultado muy importante en la teoría de espacios resolubles fue probado en [I]:

TEOREMA II.9. *Sea X un espacio topológico. Si X es n-resoluble para toda $n < \omega$, entonces X es $\aleph_0$-resoluble.*

El siguiente es una variación de un teorema de El'kin [E1]:

TEOREMA II.10. *Sea G un espacio homogéneo irresoluble. Entonces:*

(1) *Toda familia centrada en G es la base de un ultrafiltro en X.*
(2) *Todo conjunto denso en G tiene interior denso en G;*
(3) *Todo subconjunto de G con interior vacío es denso en ninguna parte;*
(4) *La familia $\mathcal{D} = \{D \subseteq G : D$ es denso en $G\}$ es un filtro en G.*

DEMOSTRACIÓN. (1) Sea $\mathcal{F}$ una familia centrada. Suponga que $G = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$. Se afirma que el conjunto $U = \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$ es denso en G. Suponga que no es así. Entonces existe un abierto no vacío V tal que $V \cap (\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)) = \emptyset$. Esto implica que $V \cap \text{Int}(A) = \text{Int}(V) \cap \text{Int}(A) = \text{Int}((V \cap A)) = \emptyset = \text{Int}((B \cap V))$. Esto muestra que $V \setminus A$ y $V \setminus B$ son dos conjuntos densos ajenos en V, lo que no puede ocurrir pues V es irresoluble (si fuera resoluble V el espacio homogéneo G también lo sería según el Corolario II.8).

Dado que $U = \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$ es denso en G, U debe pertenecer a $\mathcal{F}$, de donde se sigue que $\text{Int}(A) \in \mathcal{F}$ o $\text{Int}(B) \in \mathcal{F}$: suponga que no es así. Entonces existen $V, W \in \mathcal{F}$, tales que $V \cap \text{Int}(A) = \emptyset$ y $\text{Int}(B) \cap W = \emptyset$, pero entonces $V \cap W \cap U = \emptyset$ lo que contradice el que U sea denso en G. Así que $\text{Int}(A)$ o $\text{Int}(B)$ pertenecen a $\mathcal{F}$ y por lo tanto A o B contienen un elemento de $\mathcal{F}$, lo que implica que $\mathcal{F}$ es la base de un ultrafiltro en G.

(2) Sea D denso en G y suponga que $\text{Int}(D)$ no es denso en G. Existe un abierto V en G cuya intersección con el interior de D es vacía. Podemos entonces definir $D_1 = V \cap D$ y $D_2 = V \cap (G \setminus D)$.

Se afirma que $D_1 \cup D_2 = V$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ y D_1, D_2 son densos en V. Por definición, la primera y segunda afirmaciónes son claras. Falta probar que ambos conjuntos son densos en V. Sea U un abierto no vacío en V, por lo tanto, también es abierto en G y $U \cap D \neq \emptyset$. Pero U no puede estar contenido en D_1, en tal caso $U \subseteq D$ y $U \cap \text{Int}(D) \neq \emptyset$, una contradicción pues $U \subseteq V$. Así es que $U \cap D_2 \neq \emptyset$ y V sería resoluble, lo que implicaría que G fuera resoluble.

(3) Sea $H \subseteq G$ tal que $\text{Int}(H) = \emptyset$. Debemos probar que $\text{Int}(\overline{H}) = \emptyset$. Observe que $G \setminus H$ es denso en G y de (2) se sigue que $\text{Int}((G \setminus H))$ es denso en G pues $\text{Int}((G \setminus H)) = (G \setminus \overline{H})$ así es que $\text{Int}(\overline{H})$ debe ser vacío.

(4) Debemos probar que $\mathcal{D}$ es un filtro. Note que $G \in \mathcal{D}$ por lo que $\mathcal{D}$ es no vacío. Cada elemento $D \in \mathcal{D}$ es no vacío. Si $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$, entonces $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ pues G es irresoluble. Claramente $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{D}$ por (2) y si $D \subseteq B \subseteq G$ para alguna $D \in \mathcal{D}$, entonces $B \in \mathcal{D}$. □

Note que la familia $\mathcal{D}$ en el teorema anterior no puede ser un ultrafiltro pues G es Hausdorff. Observe que el teorema anterior tiene un recíproco:

TEOREMA II.11. *Sea G un espacio homogéneoo tal que toda familia centrada $\mathcal{F}$ es la base de un ultrafiltro en G. Entonces G es irresoluble.*

DEMOSTRACIÓN. Considere $\mathcal{F}'$ el filtro de vecindades de un punto e y extienda $\mathcal{F}'$ a una familia $\mathcal{F}$ centrada. Entonces $\mathcal{F}$ es la base de un ultrafiltro. En tal caso G no puede ser resoluble: si $G = A \cup B$ con $A \cap B$, entonces existe un elemento $F \in \mathcal{F}$ contenido en A o en B y por lo tanto alguno de los dos conjuntos A o B no puede ser denso. □

3. Topologías Maximales

El proposito de este apartado es presentar en forma unificada varios criterios sobre maximalidad que aparecen dispersos en la literatura, en algunas ocasiones sin demostración. También se presentan varias propiedades de espacios maximales, algunas de las cuales dan lugar a problemas de gran interés.

DEFINICIÓN II.12. Sean (X, τ) un espacio con topología τ y κ un cardinal infinito. Si X es tal que $\Delta(X, \tau) \geq \kappa$ y con la propiedad de que toda topología τ' más fina que τ en X tiene la propiedad $\Delta(X, \tau') < \kappa$, entonces (X, τ) es llamado *κ-maximal.*
Un espacio $\aleph_0$-maximal es simplemente maximal.

El único ejemplo que se tiene hasta ahora de un espacio Tikhonov maximal es el ya citado grupo G construido en [Mal3] el cual es no sólo irresoluble sino más aún: maximal.

TEOREMA II.13 ([H]). *Si (X, τ) es maximal, entonces todo subespacio denso de X es abierto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea D un subespacio denso del espacio maximal X. El conjunto D debe intersectar todo subespacio abierto no vacío de X en un conjunto infinito. Consideremos una nueva topología con la siguiente base:

$$\mathcal{B} = \{D \cap V : V \in \tau\} \cup \tau.$$

Claramente la topología generada por $\mathcal{B}$ es Hausdorff, no tiene puntos aislados y $\Delta(\tau) \geq \aleph_0$. Si D no fuera τ-abierto, τ' sería una topología estrictamente más fina que τ, una contradicción. □

COROLARIO II.14. *Todo espacio maximal es irresoluble.*

Es importante notar que no se sabe si el recíproco del Corolario II.14 es cierto para espacios Tikhonov. Hay ejemplos de espacios conexos irresolubles, que no pueden ser maximales al ser conexos ([An], [P]). Sin embargo, no se ha probado si estos espacios son Tikhonov o no.

TEOREMA II.15. *Sea X un espacio maximal con una topología τ. Entonces todo subconjunto A de X, denso en si mismo es abierto.*

DEMOSTRACIÓN. Si la conclusión del teorema no fuese cierta, podríamos construir una nueva topología τ' tomando como subbase $\tau \cup \{A\}$ y τ' resultaría densa en sí misma y por supuesto contiene propiamente a τ, lo que se opone a la maximalidad de τ. □

TEOREMA II.16 ([H]). *Si X es maximal, U es abierto en X y $U \subseteq B \subseteq \overline{U}$, entonces B es abierto. En particular, la clausura de cualquier conjunto abierto es abierta y el interior de cualquier conjunto cerrado es cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. Suponga que X es maximal. Sea τ la topología de X y τ' la topología generada por $\tau \cup \{B\}$. Entonces $\tau \subseteq \tau'$ y τ' es densa en sí misma. Así es que $\tau = \tau'$ y $B \in \tau$.

Para la última afirmación sea H cerrado. Entonces $\mathrm{Int}(H) \subseteq H$, por lo que $X \setminus H \subseteq X \setminus \mathrm{Int}(H)$. Note que $\overline{X \setminus H} = X \setminus \mathrm{Int}(H)$ y por la primera afirmación $X \setminus \mathrm{Int}(H)$ es abierto e $\mathrm{Int}(H)$ es cerrado. □

DEFINICIÓN II.17. Un espacio X con la propiedad de que toda pareja de abiertos ajenos tienen cerraduras ajenas es llamado *extremadamente disconexo*

TEOREMA II.18 ([H]). *Las siguientes afirmaciones son equivalentes en un espacio topológico X:*
(1) El espacio X es extremadamente disconexo.
(2) La clausura de cualquier abierto es abierta.

DEMOSTRACIÓN. (1) implica (2): sea U un abierto. Entonces U y $X \setminus \overline{U}$ son abiertos disjuntos así es que $\overline{U} \cap \overline{(X \setminus \overline{U})} = \emptyset$, por lo que $\overline{U} \subseteq X \setminus \overline{(X \setminus \overline{U})} = \mathrm{Int}(\overline{U})$, de donde se concluye que $\overline{U}$ es abierto.

(2) implica (1): sean U y V abiertos disjuntos. Las cerraduras $\overline{U}$ y $\overline{V}$ son abiertas y $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ pues si $x \in \overline{U} \cap \overline{V}$, entonces $x \in \overline{U}$ un abierto y por lo tanto existe $y \in V \cap \overline{U}$, de lo cual se concluye que $V \cap U \neq \emptyset$. □

COROLARIO II.19. *Todo espacio maximal es extremadamente disconexo.*

DEMOSTRACIÓN. Se sigue inmediatamente del Teorema II.16. □

Un hecho simple pero útil es el siguiente, parte del cual es el Teorema II.15:

TEOREMA II.20. *Si X es maximal, entonces un subespacio U de X es abierto si y sólo si U es denso en sí mismo.*

En lo que sigue usaremos la siguiente notación: sea X un espacio, si $x \in X$, entonces

$$\mathcal{F}(x) = \{U \setminus \{x\} : U \text{ es una vecindad de } x \text{ en } X\}$$

TEOREMA II.21. *Las siguientes afirmaciones acerca de un punto x en el espacio X son equivalentes:*
(1) Si $x \in \overline{A} \setminus A$, $A \subseteq X$, $A \cup \{x\}$ es una vecindad de x.
(2) La familia $\mathcal{F}(x)$ es la base de un ultrafiltro en X.

DEMOSTRACIÓN. (1) implica (2). Sea

$$\mathcal{U} = \{M \subseteq X : \text{existe una vecindad } U \text{ de } x \text{ con } U \setminus \{x\} \subseteq M\}.$$

Se probará que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro:

Primero demostraremos que $\mathcal{U}$ es un filtro. Note que $\mathcal{U} \neq \emptyset$ pues $X \in \mathcal{U}$.

Cada $M \in \mathcal{U}$ es no vacío ya que contiene un abierto no vacío (recuerde que X es denso en sí mismo). Sean $M_1, M_2 \in \mathcal{U}$. Entonces existen U_1, U_2 vecindades de x tales que $U_1 \setminus \{x\} \subseteq M_1$, $U_2 \setminus \{x\} \subseteq M_2$. Por supuesto, $(U_1 \setminus \{x\}) \bigcap (U_2 \setminus \{x\}) \neq \emptyset$, dado que X es denso en si mismo y $U_3 = U_1 \bigcap U_2$ es una vecindad de x tal que $U_3 \setminus \{x\} \subseteq M_1 \bigcap M_2$.

Claramente $\mathcal{U}$ contiene a los supraconjuntos. Ahora probaremos que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro.

Sea $X = A \cup B$, con A, B ajenos. Mostraremos que A o B pertenece a $\mathcal{U}$.

Note que si existe una vecindad U de x tal que $U \setminus \{x\} \subseteq A$ o $U \setminus \{x\} \subseteq B$, entonces finaliza la prueba.

Analicemos el caso en el que no ocurre lo anterior. En particular, tenemos que $U \cap A \neq \emptyset \neq U \cap B$, para cada vecindad U de $\{x\}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x \in A$. En tal caso $x \in \overline{B} \setminus B$ y por hipótesis $B \cup \{x\}$ contiene una vecindad U de x. Por lo tanto, $U \setminus \{x\} \subseteq B$, una contradicción.

(2) implica (1). Sea $x \in \overline{A} \setminus A$ y considere un ultrafiltro $\mathcal{U}$ con base $\mathcal{F}(x)$. El conjunto $A \cup \{x\}$ o su complemento pertenece a $\mathcal{U}$. Si $A \cup \{x\} \in \mathcal{U}$, entonces existe una vecindad U de x tal que $U \setminus \{x\} \subseteq A \cup \{x\}$ es decir $U \subseteq A \cup \{x\}$ y $A \cup \{x\}$ satisface la conclusión.

Si $X \setminus (A \cup \{x\}) \in \mathcal{U}$, entonces existe una vecindad V de x tal que $V \setminus \{x\} \subseteq X \setminus (A \cup \{x\})$. Pero entonces $V \cap A = \emptyset$, lo que contradice el hecho de que $x \in \overline{A}$. $\square$

DEFINICIÓN II.22. Un espacio X es llamado *disperso* si todo subespacio $Y \subseteq X$ no vací o tiene puntos aislados (con respecto a la topología de subespacio en Y).

De hecho todo espacio X se descompone en un subespacio abierto y denso en simismo y un subespacio cerrado y disperso (véase Problema 1.7.10 de [En]).

LEMA II.23 ([K2]). *Sea X un espacio y $A \subseteq X$ denso en sí mismo. Si $B \subseteq A$ es disperso, entonces $A \setminus B$ es denso en sí mismo (respecto a X).*

DEMOSTRACIÓN. Probaremos que $A \setminus B$ es denso en A. Sea U un abierto no vacío en A y suponga que $(A \setminus B) \cap U = \emptyset$. En tal caso $U \subseteq B$, pero U es denso en si mismo, pues es un subespacio abierto de A, lo que contradice el hecho de que B es disperso. Al ser $A \setminus B$ denso en A, debe ser denso en sí mismo respecto a X, pues A lo es. $\square$

TEOREMA II.24 ([K2]). *Sean A_i ($1 \leq u \leq n$) subconjuntos de un espacio denso en simismo X tales que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X$. Entonces existen conjuntos densos en si mismos $B_i \subseteq A_i$ tales que $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{B_i} = X$.*

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que los conjuntos A_i son mutuamente ajenos. Sea B_i la unión de todos los densos en si mismos contenidos en A_i, ($1 \leq i \leq n$). Claramente los B_i son densos en si mismos. Sea $W = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{B_i}$. Suponga que $G = X \setminus W \neq \emptyset$. Entonces G es abierto y por lo tanto denso en si mismo. Note que $G = \bigcup_{i=1}^{n}(G \bigcap (A_i \setminus \overline{B_i}))$, pues si $g \in G$, entonces $g \in A_i$ para alguna i y por lo tanto $g \notin \overline{B_i}$ por definición de G.

Dado que $G \neq \emptyset$ y que la unión finita de subespacios dispersos es dispersa, debe existir $j \leq n$ tal que $G \cap (A_j \setminus \overline{B_j})$ contenga un subespacio denso en sí mismo. Pero esto no es posible en vista de la forma en que se definió B_j. En conclusión $G = \emptyset$ y X es como se afirma en el teorema. $\square$

TEOREMA II.25 ([E1]). *El espacio X es maximal si y sólo si para toda $A \subseteq X$ si $x \in \overline{A} \setminus A$, entonces $A \cup \{x\}$ contiene una vecindad de x.*

DEMOSTRACIÓN. Si X es maximal entonces todo subconjunto denso en sí mismo es abierto. Sea $x \in \overline{A} \setminus A$. Por el teorema II.24 existen densos en sí mismos D_1, D_2 tales que $D_1 \subseteq A$, $D_2 \subseteq X \setminus A$ y $D_1 \cup D_2$ es denso en X. Debe ocurrir $x \in \overline{D_1}$ (de otra forma $D_2 \cup \{x\}$ es una vecindad abierta de x y $(D_2 \cup \{x\}) \bigcap A = \emptyset$). Por lo tanto, $D_1 \cup \{x\}$ es denso en sí mismo, abierto, y $A \cup \{x\} \supseteq D_1 \cup \{x\}$.

Para probar la suficiencia sea (X, τ) un espacio tal que $x \in \overline{A} \setminus A$ implica que $A \cup \{x\}$ es una vecindad de x. Mostraremos que X es maximal.

Sea τ' una topología de X que contiene a τ. Para cada $A \subseteq X$, sea $\tilde{A}$ la τ'-cerradura de A. Claramente $\tilde{A} \subseteq \overline{A}$ para cada $A \subseteq X$. La demostración estará completa si probamos que $\overline{A} \subseteq \tilde{A}$ siempre que τ' sea densa en sí misma. Basta probar que $\overline{A} \setminus A \subseteq \tilde{A}$. Tomemos $x \in \overline{A} \setminus A$ y sea W cualquier τ'-vecindad de x. Por hipótesis $A \cup \{x\}$ es una τ-vecindad de x. Ya que $\tau \subseteq \tau'$, $A \cup \{x\}$ es también una τ'-vecindad de x. Como τ' es densa en sí misma, existe un punto $x' \in W \cap (A \cup \{x\})$, $x \neq x'$. Por tanto, $x' \in W \cap A$ y $x \in \tilde{A}$. $\square$

TEOREMA II.26 ([E1]). *El espacio X es maximal si y sólo si para todo punto $x \in X$, la familia $\mathcal{F}(x)$ es la base de un ultrafiltro en X.*

DEMOSTRACIÓN. El Teorema se sigue de los Teoremas II.21, II.24 y II.25. $\square$

Ahora podemos probar el principal criterio de maximalidad. Este criterio aparece sin demostración en varios artículos (véase por ejemplo, [E1], [E2], [H], [K1], [Mal1]). Realmente no sé a quien atribuírselo.

TEOREMA II.27. *El espacio X es maximal si y sólo si para todo par de subconjuntos $X_1, X_2 \subseteq X$, con $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ y $x \notin X_1 \cup X_2$, se cumple $x \notin \overline{X_1} \cap \overline{X_2}$.*

DEMOSTRACIÓN. Suponga que X es maximal, y considere $X_1, X_2 \subseteq X$ como lo establece el teorema. Si $x \notin \overline{X_1}$ o $x \notin \overline{X_2}$ no hay nada que probar. Suponga entonces que $x \in \overline{X_1} \setminus X_1$. Por lo tanto, $X_1 \cup \{x\}$ es una vecindad de x y $(X_1 \cup \{x\}) \cap X_2 = \emptyset$; de lo anterior se concluye que $x \notin \overline{X_2}$.

Ahora suponga que la condición de teorema vale, mostraremos que X es maximal. Sea $x \in X$. Probaremos que la familia $\mathcal{F}(x)$ es base de un ultrafiltro.

Sea $\mathcal{U} = \{M \subseteq X : V \subseteq M$ para algún $V \in \mathcal{F}(x)\}$. Es fácil ver que $\mathcal{U}$ es un filtro. Sea $H \subseteq X$, $H \neq \emptyset$. Debemos mostrar que $H \in \mathcal{U}$ o $X \setminus H \in \mathcal{U}$.

Podemos suponer que $x \in H$. Entonces $(H \setminus \{x\}) \cap (X \setminus H) = \emptyset$, así que $x \notin \overline{(H \setminus \{x\})} \cap \overline{(X \setminus H)}$.

(1) Si $x \notin \overline{(H \setminus \{x\})}$ entonces existe una vecindad V de x con

$$V \cap (H \setminus \{x\}) = \emptyset,$$

y por lo tanto $V \setminus \{x\} \subseteq X \setminus H$, y $X \setminus H \in \mathcal{U}$.

(2) Si $x \notin \overline{X \setminus H}$, entonces existe una vecindad V de x con $V \cap (X \setminus H) = \emptyset$. Entonces $V \subseteq H$ y $V \setminus \{x\} \subseteq H$, por lo que $H \in \mathcal{U}$.

De lo anterior se concluye que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro. $\square$

Para finalizar esta sección se presentan algunos problemas que continuan sin solución.

Se han construido ejemplos de espacios topológicos irresolubles y conexos [P], [An]. Obviamente tales espacios no pueden ser maximales, pues estos últimos son extremadamente disconexos. Para el caso de grupos topológicos la situación es más compleja. El único ejemplo de un grupo irresoluble, que resulta también maximal, es el ejemplo ya mencionado de Malykhin [Mal2] suponiendo un axioma adicional a ZFE, a saber ($p = \mathfrak{c}$).

PROBLEMA II.28. *¿Es todo grupo topológico irresoluble también maximal? Note que usando el criterio de maximalidad* II.27 *podemos reformular la pregunta: dado un grupo topológico que contenga un punto que esté en la cerradura de dos subconjuntos ajenos,¿es tal grupo resoluble?. ¿Se puede responder esta pregunta en ZFE?*

A. Louveau [L] construyó el siguiente grupo topológico: Considere el conjunto $\Omega = \{A \subseteq \mathbb{N} : |A| < \aleph_0\}$. En Ω introduzca la diferencia simétrica como operación binaria, lo que convierte a este conjunto en un grupo. Sea $\mathfrak{U}$ un ultrafiltro "absoluto" (véase la definición de ultrafiltro absoluto en [L], pag.5), que se puede probar existen suponiendo HC) sobre $\mathbb{N}$. En Ω se define una topología en la cual las vecindades de cada $A \in \Omega$

son de la forma $\{A\}\triangle B$ donde $B \subseteq U$, $U \in \mathfrak{U}$ y B es finito. Considere los subconjuntos $X_n = \{A \in \Omega : |A| = n\}$. Tomando una partición infinita de $\mathbb{N}$ en subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ podemos mostrar fácilmente que Ω es $\aleph_0$-resoluble. En el artículo citado se demuestra que Ω es extremadamente disconexo (suponiendo HC).

PROBLEMA II.29. *¿ Es todo grupo irresoluble también extremadamente disconexo?, ¿Existen en ZFE grupos topológicos resolubles extremadamente disconexos?*

4. Resolubilidad y convergencia

En esta sección presentaremos la κ-resolubilidad de ciertos espacios topológicos utilizando alguna forma de convergencia. Empecemos por definir estos tipos de convergencia. Por supuesto, la definición de convergencia usual de una sucesión se supone conocida.

DEFINICIÓN II.30. Un espacio topológico X es llamado *secuencial* si para todo conjunto $A \subseteq X$ que no es cerrado en X, existe una sucesión $\{x_n : n < \omega\}$ de puntos de A que converge a un punto $x \in \overline{A} \setminus A$.

Un espacio X es llamado de *Frechet-Urysohn* si para todo $A \subseteq X$ y todo $x \in \overline{A}$ existe una sucesión $\{x_n : n < \omega\} \subseteq A$ que converge a x.

Claramente todo espacio de Frechet-Urysohn es secuencial y todo espacio primero numerable es de Frechet-Urysohn.

Para poder definir otros tipos de convergencia, requerimos ciertos preliminares.

DEFINICIÓN II.31. Sea $\mathcal{F}$ una familia no vacía de subconjuntos no vacíos de un espacio X. Si dados $A, B \in \mathcal{F}$, siempre existe $C \in \mathcal{F}$ tal que $C \subseteq A \cap B$, entonces $\mathcal{F}$ es un ***prefiltro***. Dos prefiltros $\mathcal{G}, \mathcal{F}$ se ***mezclan*** si para todo $A \in \mathcal{F}$ y para todo $B \in \mathcal{G}$, se cumple $A \cap B \neq \emptyset$. Un punto $x \in X$ es un punto de *adherencia* de $\mathcal{F}$ si $x \in \overline{A}$ para toda $A \in \mathcal{F}$. Un prefiltro $\mathcal{F}$ converge a un punto $x \in X$ si para toda vecindad U de X, existe $A \in \mathcal{F}$ con $A \subseteq U$.

Los espacios bisecuenciales han sido considerados previamente por Michael [Mi].

DEFINICIÓN II.32. Un espacio topológico X es llamado *bisecuencial* si para todo prefiltro $\mathcal{F}$ en X y todo punto x de adherencia de $\mathcal{F}$, existe un prefiltro $\mathcal{G}$ numerable que converge a x y que se mezcla con $\mathcal{F}$.

DEFINICIÓN II.33. Un prefiltro $\mathcal{F}$ es una *cadena* si para todo $A, B \in \mathcal{F}$, se cumple $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$.

DEFINICIÓN II.34. Sea τ un cardinal infinito. Un espacio X es τ-*espacio* [ArBe] si para todo prefiltro $\mathcal{F}$ en X con punto de adherencia x existe un prefiltro $\mathcal{G}$ que converge a x, se mezcla con $\mathcal{F}$ y $|\mathcal{G}| \leq \tau$.

Un espacio X es *τ-birradial* [ArBe] si para todo prefiltro $\mathcal{F}$ con punto de adherencia x, existe una cadena $\mathcal{G}$ que converge a x, se mezcla con $\mathcal{F}$ y $|\mathcal{G}| \leq \tau$.

Se dice que un espacio es *birradial en un punto* $x \in X$ ([Ar1]) si para todo prefiltro $\mathcal{F}$ que tenga a x como punto de adherencia, existe una cadena en X que converge a x y se mezcla con $\mathcal{F}$. Un espacio es llamado *birradial* [Ar1] si para todo prefiltro $\mathcal{F}$ con punto de adherencia x, existe una cadena $\mathcal{G}$ que converge a x y se mezcla con $\mathcal{F}$.

Es obvio que todo espacio bisecuencial es birradial. Además cuando $\tau = \aleph_0$, los τ-espacios y los espacios τ-birradiales coinciden con los espacios bisecuenciales. Entre los espacios biradiales se encuentran los espacios linealmente ordenables; un espacio es biradial si y sólo si se puede representar como la imagen de un espacio linealmente ordenado respecto a una función bicociente [Ko].

Se han demostrado las siguientes propiedades de estos espacios ([ArBe], [Ar1]): Todo espacio birradial con celularidad numerable es bisecuencial; si X es birradial, entonces $|X| \leq 2^{c(X)}$; todo grupo topológico birradial es monotónicamente normal y hereditariamente normal por colecciones. Todo grupo bisecuencial es metrizable. Todo espacio biradial separable es bisecuencial. En general, si X es birradial y Y un subespacio de X con $c(Y) = \tau$, entonces Y es τ-birradial, en particular es τ-espacio.

Un espacio X es *anidado* en $x \in X$ si existe una cadena formada por abiertos que converge a x.

TEOREMA II.35 ([Ar1]). *Si un espacio X es birradial en un punto $x \in X$, entonces es anidado en x.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{F}$ la familia de todos los abiertos W en X tales que $x \in \mathrm{Int}(\overline{W})$. Claramente $\mathcal{F}$ es un prefiltro que tiene a x como punto de adherencia. Existe una cadena $\mathcal{G}$ que converge a x y se mezcla con $\mathcal{F}$. Dado que X es regular, podemos suponer que todos los miembros de la familia $\mathcal{G}$ son cerrados en X.

Sea $P \in \mathcal{G}$ y $U = \mathrm{Int}(P)$. Mostraremos que $x \in \overline{U}$. Suponga lo contrario. Entonces el conjunto $O_U(x) = X \setminus \overline{U}$ es una vecindad del punto $x \in X$ y $O_U(x) \subseteq \overline{X \setminus P}$. Así que el conjunto abierto $V = X \setminus P$ pertenece a $\mathcal{F}$. Ahora $P \in \mathcal{G}$ y $P \cap V = P \cap (X \setminus P) = \emptyset$ lo que implica que $\mathcal{G}$ y $\mathcal{F}$ no se mezclan, una contradicción. Así que $x \in \overline{U}$ y $\mathrm{Int}(P) \neq \emptyset$ para todo $P \in \mathcal{G}$.

Dado que $\mathcal{G}$ es una cadena que converge a x, la familia $\mathcal{G}^* = \{\mathrm{Int}(P) : P \in \mathcal{G}\}$ también es una cadena que converge a x y es la cadena de abiertos que se buscaba. □

COROLARIO II.36 ([Ar1]). *Si X es birradial, entonces es anidado en todo punto $x \in X$.*

Ahora procedemos a demostrar la κ-resolubilidad de estos espacios.

Primero demostraremos que todo espacio Frechet-Urysohn es maximal resoluble. Resultados similares fueron obtenidos independientemente por W. Comfort, S. García-Ferreira, O. Masaveu y H. Zhou, véase [CoG] y [CoMasZ].

PROPOSICIÓN II.37 ([V2]). *Sea X un espacio infinito numerable tal que para todo $x \in X$ existe una sucesión $\{x_n : n < \omega\} \subseteq (X \setminus \{x\})$ que converge a x. Entonces X es $\aleph_0$-resoluble.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $X = \{z_n : n < \omega\}$. Probaremos que X es N-resoluble para toda $N < \omega$ y así obtendremos el resultado deseado si tomamos en cuenta el Teorema II.9.

Para cada $z_n \in X$ existe una sucesión $A_n \subseteq X \setminus \{z_n\}$ que converge a z_n. Sea $\mathcal{V} = \{B_i : i < \omega\}$ una sucesión de subconjuntos infinitos de X tal que cada A_n aparece un número infinito de veces en $\mathcal{V}$. Sea $N < \omega$ arbitrario pero fijo. Formaremos N subconjuntos H_i, $1 \leq i \leq N$ de X, densos. De B_0 elegimos N puntos $y_1, \ldots y_N$ distintos y colocamos cada y_i en el respectivo H_i^0, $1 \leq i \leq N$. Supongamos que en la etapa m cada H_i^m, $1 \leq i \leq N$, contiene m elementos y $H_i^m \cap H_j^m = \emptyset$ si $i \neq j$. En la etapa $m + 1$ se eligen N elementos distintos de $B_{m+1} \setminus (\cup_{i=1}^N H_i^m)$, y colocamos cada uno de estos elementos en el correspondiente H_i^{m+1}. Al final tenemos N subconjuntos $H_1, \ldots, H_N$ ajenos entre sí al definir $H_i = \cup_{m<\omega} H_i^m$.

Se afirma que cada H_i, $1 \leq i \leq N$, es denso en X. Sea U abierto en X no vacío. Tomemos $z_n \in U$, así que con excepción de un número finito de puntos, los elementos de $A_n = \{a_0^n, a_1^n, \ldots\}$ están contenidos en U. Sea M el mayor subíndice tal que a_M^n no está en U. Para k suficientemente grande y tal que $B_k = A_n$, tomamos N puntos de B_k uno de los cuales esta en $U \cap H_i$, lo que demuestra la densidad de H_i. Como i fue arbitrario, X resulta N-resoluble. $\square$

Ahora podemos probar que cualquier espacio de Frechet-Urysohn es maximal resoluble. Para ello requerimos el siguiente resultado.

Generalizemos la definición de $\Delta(X)$: denotamos por $\Delta(x, X)$ la menor cardinalidad de un abierto que contiene a x.

TEOREMA II.38 ([Py]). *Sea X un espacio y U un abierto en X. Suponga que $t(x, X) < \Delta(x, X)$ para toda $x \in U$. Entonces U es maximal resoluble.*

En el siguiente Teorema no hay restricción para $\Delta(X)$. Más adelante obtendremos la máxima resolubilidad de un espacio bisecuencial como un corolario a un hecho más general.

Recuerde que estamos considerando sólo espacios densos en sí mismos.

TEOREMA II.39 ([V2]). *Sea X un espacio de Frechet-Urysohn. Entonces X es maximal resoluble.*

DEMOSTRACIÓN. Es claro que todo espacio Frechet-Urysohn cumple con $t(X) = \aleph_0$. Si $\Delta(X) > \aleph_0$, el resultado se sigue del Teorema de Pytkeev II.38. Asi es que supongamos que $\Delta(X) = \aleph_0$.

Sea $x \in X$ un punto arbitrario. Basta entonces probar que x pertenece a un subespacio $\aleph_0$-resoluble de X.

Construiremos el subespacio infinito numerable que contiene a x recursivamente. En la etapa 0 encontramos una sucesion no trivial $S_0 = \{x_n : n < \omega\} \subseteq X \setminus \{x\}$ que converge a x, ya que x no es aislado en X.

En la etapa 1 encontramos para cada $y \in S_0$ una sucesión $S_{1,y} \subseteq X \setminus \{y\}$ convergente a y y pongamos $S_1 = \cup_{y \in S_0} S_{1,y}$. Es claro que $|S_1| \leq \aleph_0$. Al continuar este proceso, definimos una sucesión de subconjuntos numerables $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ de X tales que todo punto de S_n es el límite de una sucesión convergente de S_{n+1}.

Al final de esta construcción recursiva tenemos un subespacio $X_x = \{x\} \cup \cup_{n<\omega} S_n$ tal que todo punto $z \in X$ es el límite de una sucesión no trivial contenida en X_x. Por lo tanto X_x no tiene puntos aislados y es $\aleph_0$-resoluble de acuerdo con la Proposición II.37 y ya que $X = \cup_{x \in X} X_x$, concluimos que X es $\aleph_0$-resoluble. □

En [E2] se prueba la maxima resolubilidad del producto infinito de algunos espacios. Es fácil notar que podemos escoger espacios cuyo producto infinito no sea Frechet-Urysohn; sin embargo, el producto resulta maximal resoluble.

En el caso de espacios homogéneos basta tener una sucesión convergente para obtener $\aleph_0$-resolubilidad.

TEOREMA II.40 ([V1]). *Sea X un espacio homogéneo que contiene una sucesión convergente no trivial. Entonces X es $\aleph_0$-resoluble.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $S' = \{x_n : n < \omega\}$ una sucesión no trivial convergente a $x \in X$ y $S = S' \cup \{x\}$. Construiremos inductivamente una sucesión infinita $\{S_n : n < \omega\}$ de subespacios de S. Sea $S_0 = S$. Sea $n < \omega$ y supongamos que $S_n \subseteq X$ ya está definido y es numerable. Para cada par de puntos x, y de S_n existe un homeomorfismo $h_{xy} : X \to X$ tal que $y = h_{xy}(x)$. Sea K_n el conjunto de tales homeomorfismos h_{xy} para todo par $x, y \in S_n$.

Caso 1. El espacio X tiene cardinalidad $\aleph_0$. El resultado se sigue de la Proposición II.37.

Caso 2. El espacio X es no numerable. Sea

$$S_{n+1} = \cup_{h \in K_n} h(S_n),$$

y

$$S_\omega = \cup_{n<\omega} S_n.$$

Claramente S_ω es un subespacio homogéneo numerable que contiene una sucesión convergente no trivial. Por la Proposición II.37, S_ω es $\aleph_0$-resoluble. Para todo $z \in X$ existe un homeomorfismo $h_z : X \to X$ con $h_z(x) = z$. Así que $X = \cup_{z \in X} h_z(S_\omega)$ y por lo tanto X es $\aleph_0$-resoluble utilizando el Teorema II.7. □

Ahora podemos establecer algunas restricciones cardinales para espacios homogéneos; en particular para grupos topológicos irresolubles o maximales.

TEOREMA II.41 ([V1]). *($\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$) Sea X un espacio homogéneo irresoluble que contiene un subespacio numerable no discreto. Entonces $w(X) \geq \mathfrak{c}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $D \subseteq X$ un subespacio numerable no discreto. Suponga que $w(X) < \mathfrak{c}$. Entonces $w(D) < \mathfrak{c}$. Considere un punto $x \in D$ y una base local $\mathcal{B}$ para x en D con $|\mathcal{B}| < \mathfrak{c}$. La base $\mathcal{B}$ tiene la propiedad de la intersección finita. De acuerdo al principio $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$ obtenemos un subconjunto $B \subseteq D$, $|B| = \aleph_0$ tal que $|B \setminus A| < \aleph_0$ para toda $A \in \mathcal{B}$. Esto significa que B converge a x. Por el Teorema II.40, X sería resoluble, una contradicción. □

En [Mal4] se demuestra que todo grupo topológico maximal G cumple con $\Delta(G) = \aleph_0$. Usaremos este hecho en el siguiente Corolario.

COROLARIO II.42 ([V1]). *($\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$) Si G es un grupo topológico maximal infinito, entonces $w(G) \geq \mathfrak{c}$.*

DEMOSTRACIÓN. Suponga que $w(G) < \mathfrak{c}$. Sea U una vecindad de e_G, tal que $|U| = \aleph_0$. Sabemos que $w(U) < \mathfrak{c}$ y por lo tanto podemos aplicar el principio $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$ al filtro de vecindades de e_G y obtener una sucesión convergente, lo que implicaría la resolubilidad de U. Pero todo espacio maximal es irresoluble. □

Regresemos a la resolubilidad respecto a convergencia. En el primer artículo sobre resolubilidad [H] se demuestra que aquellos espacios con base local linealmente ordenada por inclusión en todo punto son resolubles. En [Ce] se generaliza este resultado y se prueba la máxima resolubilidad de tales espacios. Nosotros iremos aún más lejos al probar la máxima resolubilidad de espacios con redes locales[1] linealmente ordenada por inclusión. Los dos siguientes lemas generalizan resultados previos debidos a Ceder [Ce].

LEMA II.43. *Sea X un espacio topológico tal que tiene una red $\mathcal{A}$ con $|A| \geq \Delta(X)$ para toda $A \in \mathcal{A}$ y $\Delta(X) = |\mathcal{A}|$. Entonces X es maximal resoluble.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\lambda = |\mathcal{A}| = \Delta(X)$ y $\mathcal{A} = \{U_\alpha : \alpha < \lambda\}$. Existe una sucesión $\mathcal{V} = \{B_\alpha : \alpha < \lambda\}$ de subconjuntos de X de cardinalidad $\geq \lambda$ tal que todo U_α, $\alpha < \lambda$, aparece λ veces en $\mathcal{V}$. Por recursión transfinita definimos un conjunto denso de cardinalidad λ. De B_0 elegimos un punto $\{x\}$ para formar $D_0 = \{x\}$. Suponga que hemos construido el conjunto $D_\alpha = \{x_\beta : \beta < \alpha\}$, con $\alpha < \lambda$. Como $\alpha < \lambda$ podemos encontrar $x_\alpha \in U_\alpha \setminus D_\alpha$ y formar $D_{\alpha+1} = D_\alpha \cup \{x_\alpha\}$. Al final de la construcción obtenemos un conjunto D denso en X y de cardinalidad λ, ya que D intersecta a todos los elementos de la red $\mathcal{A}$. Observe que por construcción $|D \cap U_\alpha| = \lambda$. Tenemos una familia $\{D \cap U_\alpha : \alpha < \lambda\}$ de subconjuntos de D cada uno de cardinalidad λ. Usamos

[1] Redes según se definen en el Capítulo I

el Lema I.13 para obtener una familia $\{E_\beta : \beta < \lambda\}$ de subconjuntos ajenos dos a dos, $|E_\beta| = \lambda$ para toda $\alpha < \lambda$ y tal que $E_\beta \subseteq D \cap U_\beta$. Como $|E_\beta| = \lambda$, usamos el Lema I.12 para descomponer E_β en λ subconjuntos ajenos no vacíos $E_{\beta,\gamma}$:

$$E_\beta = \cup_{\gamma<\lambda} E_{\beta\gamma}.$$

Finalmente definimos

$$F_\gamma = \cup_{\beta<\lambda} E_{\beta\gamma};$$

es claro que cada F_γ es denso en X y por lo tanto X es maximal resoluble. $\square$

LEMA II.44. *Sea X un espacio que tiene una red $\mathcal{A}$ tal que $|A| \geq \Delta(X)$ para toda $A \in \mathcal{A}$ y $|\mathcal{A}| < \Delta(X)$, entonces X es maximal resoluble.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\lambda = |\mathcal{A}|$ y $\kappa = \Delta(X)$, entonces $\lambda < \kappa$. Sea $\mathcal{A} = \{B_\alpha : \alpha < \lambda\}$. Construiremos una familia $\{D_\beta : \beta < \kappa\}$ de densos ajenos, lo cual probará la máxima resolubilidad de X.

En la etapa 0 elegimos puntos distintos $x_{0\alpha} \in B_\alpha (\alpha < \lambda)$ y definimos $D_0 = \{x_{0\alpha} : \alpha < \lambda\}$. Suponga que hemos construido los subconjuntos D_ρ para toda $\rho < \beta$, donde $\beta < \kappa$. Note que

$$|\cup_{\rho<\beta} D_\rho| \leq \sum_{\rho<\beta} |D_\rho| = |\beta| \cdot \lambda < \kappa.$$

Entonces podemos elegir puntos distintos $x_{\beta\alpha} \in B_\alpha \setminus \cup_{\varrho<\beta} D_\varrho$ para toda $\alpha < \lambda$ para formar $D_\beta = \{x_{\beta\alpha} : \alpha < \lambda\}$. Si continuamos este proceso, al final obtenemos una familia de κ subconjuntos densos ajenos entre sí . $\square$

Ahora probaremos máxima resolubilidad ante la presencia de una red local linealmente ordenada por contención. Antes requerimos un lema.

LEMA II.45. *Sea X un espacio topológico tal que todo punto $x \in X$ posee una red local $\mathcal{L}_x$ linealmente ordenada por contención tal que $|L| = \Delta(X)$ para toda $L \in \mathcal{L}_x$. Sean $x \in X$ un punto arbitrario y U cualquier abierto que contenga a x. Entonces existe una red local $\mathcal{M}$ para x tal que $|\mathcal{M}| \leq |U|$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean x y U como en la hipótesis. Como $\mathcal{L}_x$ está linealmente ordenada por contención, sabemos que existe $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}_x$ cofinal en $\mathcal{L}_x$ y bien ordenada respecto a la contención (Lema I.16). De la cofinalidad se desprende que $\mathcal{M}$ es una red local para x. Ahora probaremos que $\beta = |\mathcal{M}| \leq |U|$. Sin pérdida de generalidad, supondremos que todo elemento en $\mathcal{M}$ está contenido en U. Inductivamente construiremos un subconjunto Z de U de cardinalidad β. Sea $\mathcal{M} = \{L_\alpha : \alpha < \beta\}$. Elegimos $z_0 \in L_0 \setminus L_1$, $z_1 \in L_1 \setminus L_2, \ldots, z_n \in L_n \setminus L_{n+1}, \ldots (n < \omega)$. Suponga que hemos elegido $\{z_\varrho : \varrho < \delta\}$ para alguna $\delta < \beta$ límite, tales que $z_\varrho \in L\varrho$ para toda $\varrho < \delta$. Elegimos $z_\varrho \in L_\varrho \setminus L_{\varrho+1}$, $z_{\varrho+1} \in L_{\varrho+1} \setminus L_{\varrho+2}, \ldots, z_{\varrho+n} \in L_{\varrho+n} \setminus L_{\varrho+n+1}, \ldots (n < \omega)$. Al final obtenemos el conjunto $Z = \{z_\alpha : \alpha < \beta\} \subseteq U$. Entonces necesariamente $|\beta| \leq |U|$. $\square$

TEOREMA II.46 ([V2]). *Sea X un espacio tal que todo punto $x \in X$ posee una red local $\mathcal{L}_x$ linealmente ordenada por contención y $|L| \geq \Delta(X)$ para toda $L \in \mathcal{L}_x$. Entonces X es maximal resoluble.*

DEMOSTRACIÓN. Basta probar que todo abierto U es $|U|$-resoluble.

Sea U un abierto no vacío. Por supuesto, $|U| \geq \Delta(X)$. Se afirma que existe una red $\mathcal{A}$ tal que $|\mathcal{A}| \leq |U|$, y $|A| \geq \Delta(X)$ para todo $A \in \mathcal{A}$.

Primero observe que para toda $x \in U$ existe una red local $\mathcal{L}_x$ que contiene una red local $\mathcal{M}_x$ con $|\mathcal{M}_x| \leq |U|$ por el Lema II.45.

Construimos $\mathcal{A}$ simplemente tomando todos los elementos de cada $\mathcal{M}_x$, para toda $x \in U$.

Una vez que tenemos la red $\mathcal{A}$ para U podemos aplicar ya sea el Lema II.43 o el Lema II.44 y deducir que U es maximal resoluble. □

TEOREMA II.47 ([V2]). *Todo espacio birradial es maximal resoluble.*

DEMOSTRACIÓN. Probaremos que todo punto $x \in X$ tiene una red local $\mathcal{L}_x$ linealmente ordenada por contención y tal que $|L| \geq \Delta(X)$ para toda $L \in \mathcal{L}_x$. Pero esto se sigue de que X es birradial y por lo tanto anidado en todo punto $x \in X$ (Teorema II.35). Por lo tanto X es maximal resoluble de acuerdo al Teorema II.46. □

COROLARIO II.48. *Todo espacio bisecuencial es maximal resoluble.*

DEMOSTRACIÓN. Todo espacio bisecuencial es birradial. □

COROLARIO II.49. *Todo τ-espacio y todo espacio τ-birradial son maximal resolubles.*

5. Resolubilidad en grupos κ-acotados

En esta sección estableceremos ciertos grados de resolubilidad, en ocasiones máxima resolubilidad, de algunos grupos κ-acotados. El método de demostración es una generalización del utilizado en mi artículo [V1].

Note que si G es un grupo κ-acotado, $|G| = \lambda$ y $\kappa < \lambda$, entonces $\Delta(G) = |G|$, pues las traslaciones preservan cardinalidad. Claro, esta conclusión es inmediata de las hipótesis. Sin embargo, lo mismo podemos decir si $d(G) < |G|$:

TEOREMA II.50 ([V1]). *Sea G un grupo topológico tal que $d(G) < |G|$. Entonces G es $|G|$-resoluble. En particular, G es maximal resoluble.*

DEMOSTRACIÓN. Sea D' un conjunto denso en G de cardinalidad $d(G)$. Considere $D = \langle D' \rangle$. Entonces $|D| = d(G)$. Note inmediatamente que G es resoluble pues D y cualquier clase lateral distinta de D constituyen un par de densos ajenos. Sea $D_0 = D$ y considere $g_1 \in G \setminus D$. Definimos $D_1 = g_1 D_0$ que resulta denso y ajeno a

D_0. Supongamos que hemos construido de esta forma conjuntos densos D_α para toda $\alpha < \beta$. Sea $g_\beta \in G \setminus (\cup_{\alpha<\beta} D_\alpha)$. Podemos encontrar tal g_β pues

$$|\cup_{\alpha<\beta} D_\alpha| \leq \sum_{\alpha<\beta} |D_\alpha| \leq |\beta| \cdot |D| < |G|$$

siempre que $\beta < |G|$. Continuando este proceso logramos $|G|$ densos ajenos entre sí. □

COROLARIO II.51. *Sea G un grupo tal que $d(G) < |G|$. Entonces $\Delta(G) = |G|$.*

Este resultado también se puede obtener de otra manera, pues si $c(G) \leq d(G) < |G|$, G es entonces $c(G)$-acotado (véase el Lema I.11) y las traslaciones preservan cardinalidad.

Como ya se mencionó Malykhin [Mal2] construyó un grupo numerable Hausdorff, no discreto y maximal. El grupo es por lo tanto irresoluble. Tal grupo es obviamente $\aleph_0$-acotado.

Ahora considere el siguiente ejemplo: Tome un espacio numerable e irresoluble X. Construya la suma topológica $Y = \bigoplus_{\alpha<\aleph_1} X_\alpha$, donde $X_\alpha = X$ para toda $\alpha < \aleph_1$. Al conjunto Y le añadimos un punto $z \notin Y$. Sea $Z = Y \cup \{z\}$ y generamos una topología en Z: las vecindades de $\{z\}$ son todos los sumandos con excepción de un número a lo mas numerable de ellos. Cada sumando conserva su topología original. El espacio Z resulta ser Lindelöf no numerable e irresoluble.

De los ejemplos anteriores deducimos dos cosas: para espacios topológicos ser no numerable y Lindelöf no implica resolubilidad. En grupos topológicos el ser $\aleph_0$-acotado no implica ser resoluble. Sin embargo, la cardinalidad puede mejorar el panorama. El siguiente resultado presenta una mejora sustancial al Teorema 3.2 de [V1].

TEOREMA II.52 ([V2]). *Sea G un grupo λ-acotado tal que $|G| = \kappa$, $cf(\kappa) > \lambda$. Entonces G es maximal resoluble.*

DEMOSTRACIÓN. Dado que el grupo G es λ-acotado debemos tener que $\Delta(G) = \kappa$. Así es que procuraremos encontrar κ densos ajenos entre sí.

Primero construimos un subgrupo de G muy especial. Sea $K_0 \subseteq G$, K_0 numerable. Definimos $H_0 = \langle K_0 \rangle$. Suponga que hemos construido subgrupos H_α para toda $\alpha < \beta$, para alguna $\beta < \kappa$, tales que $H_\varrho \subseteq H_\alpha$ para toda $\varrho < \alpha$, $\alpha < \kappa$ y $|H_\alpha| = |\alpha|$ para toda $\alpha < \kappa$. Observe que

$$|\cup_{\alpha<\beta} H_\alpha| \leq \sum_{\alpha<\beta} |H_\alpha| \leq |\beta| \cdot |\beta| < \kappa.$$

Por lo tanto podemos escoger $K_\beta \subseteq (G \setminus \cup_{\alpha<\beta} H_\alpha)$, tal que $|K_\beta| = |\beta|$. Definimos entonces

$$H_\beta = \langle K_\beta \cup \cup_{\alpha<\beta} H_\alpha \rangle.$$

Esto completa la construcción. Al final tenemos una familia $\{H_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de subgrupos de G. Sea $H = \cup_{\alpha<\kappa} H_\alpha$. Este grupo H no es discreto pues tiene cardinalidad κ y es

λ-acotado (Lema I.7). Ahora, si usamos el Lema I.12 encontramos una familia $\mathcal{L}$ de subconjuntos de κ tal que $|\mathcal{L}| = \kappa$, $|L| = \kappa$ para todo $L \in \mathcal{L}$ y la familia es ajena dos a dos. Para cada $L \in \mathcal{L}$ sea

$$D_L = \cup_{\alpha \in L}(H_\alpha \setminus (\cup_{\beta<\alpha} H_\beta)).$$

Por construcción y definición de $\mathcal{L}$ tenemos que $D_L \cap D_{L'} = \emptyset$ siempre que $L \neq L'$, $L, L' \in \mathcal{L}$. Se afirma que cada D_L, $L \in \mathcal{L}$ es denso en H. Considere un $L \in \mathcal{L}$ arbitrario pero fijo. Sea U un abierto no vacío en H, entonces $U = qV$, donde V es una vecindad de e_H. Entonces $V = q^{-1}U$. Por lo tanto, existe $K \subseteq H$, $|K| = \lambda$ y $H = K \cdot V$. Para cada $k \in K$, existe $\alpha < \kappa$ tal que $k \in H_\alpha$, y α es el menor con tal propiedad; sea R el conjunto de tales α. Obviamente el supremo de R es menor que κ, puesto que $cf(\kappa) > \lambda$ es regular; podemos encontrar $\gamma < \kappa$ tal que $K \subseteq H_\gamma$. También existe $\gamma' < \kappa$ tal que $q^{-1} \in H_{\gamma'}$. Denotemos por $\varrho = \text{máx}\{\gamma, \gamma'\}$. Existe $\sigma \in L$, tal que $\sigma > \varrho$. Tomemos $h \in H_\sigma \setminus \cup_{\beta<\sigma} H_\beta$. Entonces existe $k \in K$ tal que $h = kq^{-1}u$ para alguna $u \in U$, y como $q^{-1}, k \in H_\sigma$, tenemos que

$$u = qk^{-1}h \in H_\sigma,$$

y por la elección de h, tenemos que $u \in \cup_{\beta<\sigma} H_\beta$. Así es que $u \in D_L \cap U \neq \emptyset$, lo que prueba la densidad de D_L en H. Afortunadamente disponemos de κ subconjuntos D_L, lo cual demuestra la κ-resolubilidad de H y por lo tanto la maxima resolubilidad de G. □

COROLARIO II.53 ([V2]). *Todo grupo de cardinalidad $\aleph_1$ o $\mathfrak{c}$, de Lindelöf, es maximal resoluble. En particular, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}$ son maximal resolubles*

DEMOSTRACIÓN. Todo grupo Lindelöf o segundo numerable es $\aleph_0$-acotado, además $cf(\mathfrak{c}) > \aleph_0$. □

Si no queremos involucrarnos en problemas con cofinalidad, podemos obtener un resultado un poco más débil.

COROLARIO II.54 ([V2]). *Sea G un grupo λ-acotado tal que $|G| = \kappa$, $\kappa > \lambda$. Entonces G es λ^+-resoluble.*

DEMOSTRACIÓN. Simplemente observe que λ^+ es regular y aplique una demostración similar a la del Teorema II.52 al construir una familia de subgrupos $\{H_\alpha : \alpha < \lambda^+\}$. □

Es tentador utilizar los resultados anteriores para demostrar que $C_p(X)$, el espacio de funciones continuas de X a $\mathbb{R}$ con la topología de la convergencia puntual, es maximal resoluble. Este espacio es $\aleph_0$-acotado al ser un subgrupo de $\mathbb{R}^X$ el cual es $\aleph_0$-acotado (véase Lema I.7 y el Lema I.8). Sin embargo, el siguiente Teorema fue demostrado en Noviembre de 1995 por V. Tkachuk y V. Malykhin.

TEOREMA II.55 (TKACHUK–MALYKHIN). *Sea X un espacio. Entonces $C_p(X)$ es maximal resoluble.*

DEMOSTRACIÓN. En el espacio de funciones continuas acotadas $C^*(X)$ considere la topología de la convergencia uniforme τ_u. Esta topología es más fina que la topología de la convergencia puntual τ_p (véase el Teorema 2.6.6 de [En]). Además $C_p(X)$ con la topología τ_u es metrizable y por lo tanto maximal resoluble. Dado que toda función continua de X a $\mathbb{R}$ se puede componer con un homeomorfismo de $\mathbb{R}$ a $[0, 1]$, la cardinalidad de $C^*(X)$ es igual a la de $C(X)$. Además, $C^*(X) \subseteq C(X)$ y por el Corolario II.8 $C(X)$ es maximal resoluble con la topología τ_u (tanto $C^*(X)$ como $C(X)$ son grupos $\aleph_0$-acotados, pues son subgrupos de $\mathbb{R}^X$). Ahora, τ_u es más fina que τ_p; por lo tanto, $C(X)$ con τ_p también es maximal resoluble. □

Siguiendo la linea de las demostraciones anteriores, podemos probar que los grupos totalmente acotados son maximal resolubles. Un ejemplo de un grupo $\aleph_0$-acotado que no es totalmente acotado es el grupo construido por Malyhkin [Mal2]. Este grupo es numerable e irresoluble y por lo tanto no puede ser totalmente acotado.

DEFINICIÓN II.56. Un grupo G es llamado totalmente acotado si para toda U vecindad de e_G, existe un subconjunto finito $F \subseteq G$ tal que $G = UF$.

Al igual que los grupos κ-acotados, los subgrupos de grupos totalmente acotados, también son totalmente acotados.

TEOREMA II.57 ([V2]). *Sea G un grupo totalmente acotado. Entonces G es maximal resoluble.*

DEMOSTRACIÓN. Recuerde que nosotros consideramos sólo espacios no discretos Tikhonov, así es que si $|G| = \lambda$, entonces λ debe ser un cardinal infinito. Si $\lambda = \aleph_0$, el resultado, es decir que G es $\aleph_0$-resoluble, se demuestra en [Mas].

Considere ahora el caso $\lambda > \aleph_0$. Definimos una sucesión creciente de subgrupos $\{F_\alpha : \alpha < \lambda\}$ de G. Sea $F_0 = \{e_G\}$ y $H_0 = F_0$. Suponga que hemos construido los subgrupos H_α para toda $\alpha < \beta$ (β puede ser un ordinal finito), tales que $H_\alpha \subseteq H_\gamma$ siempre que $\alpha < \gamma < \beta$ y $|H_\alpha| = |\alpha|$, para toda $\alpha < \beta$. Encontramos $F_\beta \subseteq (G \setminus \cup_{\alpha<\beta} G_\alpha)$, $|F_\beta| = |\beta|$ y definimos $H_\beta = \langle F_\beta \cup \cup_{\alpha<\beta} H_\alpha \rangle$. Al final obtenemos una familia $\{H_\alpha : \alpha < \lambda\}$ de subgrupos de G tales que $H_\alpha \subseteq H_\beta$, si $\alpha < \beta < \lambda$ y $|H_\alpha| = |\alpha|$ para toda $\alpha < \lambda$. Encontramos una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos ajenos de λ con $|\mathcal{F}| = |G|$, además $|F| = |G|$ para toda $F \in \mathcal{F}$. Para cada $F \in \mathcal{F}$ definimos el subconjunto:

$$L_F = \cup_{\alpha \in F}(H_\alpha \setminus \cup_{\beta<\alpha} H_\beta).$$

Como en la demostración del Teorema II.52, se prueba que cada L_F es denso en G, lo cual implica que G es maximal resoluble. □

El siguiente resultado se conoce desde hace mucho tiempo. Véase por ejemplo [Co][Lemma 6.3].

TEOREMA II.58. *Todo grupo seudocompacto es totalmente acotado.*

COROLARIO II.59 ([V2]). *Todo grupo seudocompacto es maximal resoluble.*

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de los Teoremas II.58 y II.57 y de que todo grupo seudocompacto tiene cardinalidad no menor que $\mathfrak{c}$ [CoRo1]. □

COROLARIO II.60 ([V2]). *Todo grupo numerablemente compacto es maximal resoluble.*

DEMOSTRACIÓN. Todo espacio numerablemente compacto es seudocompacto ([En] Theorem 3.10.20). □

6. Resolubilidad en grupos libres

En esta sección probaremos que todo grupo libre es al menos $\aleph_0$-resoluble. También se presentará la máxima resolubilidad de ciertos grupos libres.

Primero daremos una breve descripción de la construcción de grupos libres. Considere un conjunto infinito X. Construiremos un grupo $F(X)$ sobre X con las siguientes propiedades:

(1) X es subconjunto de $F(X)$.
(2) Toda función $f\colon X \to G$, donde G es un grupo, se extiende a un homomorfismo $\Phi\colon F(X) \to G$.

La construcción de $F(X)$ se logra considerando a $X \cup X^{-1}$, con $X^{-1} = h(X)$, donde h es una biyección definida por $h(x) = x^{-1}$, como las letras de un alfabeto. Formamos palabras con este alfabeto que serán los elementos de $F(X)$ y la palabra sin letras o vacía es la identidad de $F(X)$. Las palabras se consideran reducidas, es decir, si por ejemplo en la palabra apereciese xx^{-1} se cancela este término y si por ejemplo aparece xx se escribe x^2. La operación de grupo es la yuxtaposición de palabras.

Podemos distinguir un punto en X, digamos $e \in X$, construir el grupo libre sobre $X' = X \setminus \{e\}$ y considerar a e como la identidad de $F(X')$. Utilizaremos ambas construcciones posteriormente.

En el caso que X sea sea un espacio topológico, la tarea es introducir una topología en $F(X)$ o $F(X')$ de tal forma que se cumplan las siguientes condiciones:

(1) $F(X)$ es el grupo libre algebraico sobre X.
(2) X es un subespacio de $F(X)$ o $F(X')$.

(3) Toda función continua $f: X \to G$, donde G es un grupo topológico, se extiende a un homomorfismo continuo $F: F(X) \to G$. En el caso de $F(X')$ se pide que si $f: X \to G$ es una función continua a un grupo topológico G tal que $f(e) = e_G$, entonces f se extiende a un homomorfismo continuo $\Phi: F(X') \to G$.

Si se cumplen todas estas condiciones llamaremos a $F(X)$ el grupo topológico libre de Markov [Ma] que denotaremos $FM(X)$ y a $F(X')$ el grupo topológico libre de Graev [Gr] el cual se denota $FG(X)$, pues ambos autores consiguieron introducir una topología en $F(X)$ que cumple con las propiedades (1)–(3). En forma correspondiente se construyen y definen los grupos abelianos libres y grupos abelianos libres topológicos ya sean de Markov $AM(X)$ o de Graev $AG(X)$.

Cuando resulte lo mismo considerar $FM(X)$ que $FG(X)$ denotaremos ambos grupos por $F(X)$.

DEFINICIÓN II.61. En $F(X)$ definimos la longitud $l(z)$ de una palabra $z \in F(X)$, $z = x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n}$ como $l(z) = r_1 + \cdots + r_n$, si $x_1, \ldots, x_n \in X$.

Con $F_n(X)$ ($FM_n(X)$ o $FG_n(X)$)) denotaremos el conjunto de palabras de $F(X)$ que tengan longitud no mayor que n, para toda $n < \omega$.

LEMA II.62. *Para todo espacio X, $d(FG(X)) \leq d(X)$ y $d(FM(X)) \leq d(X)$.*

DEMOSTRACIÓN. Considere el caso de $FG(X)$. Definamos una función

$$\phi_n: (X \cup X^{-1} \cup \{e\})^n \to FG_n(X)$$

por $\phi_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdots x_n$. La función ϕ_n es continua, pues la multiplicación es continua en $FG(X)$. Note que $d(FG_n(X)) \leq d(X^n) = d(X)$ por la continuidad de ϕ_n. Ya que $FG(X) = \cup_{n<\omega} FG_n(X)$, se obtiene el resultado.

El caso de $FM(X)$ es similar. □

LEMA II.63. *Sea G un grupo topológico y U una vecindad de e_G. Entonces, para toda $n < \omega$ existe una vecindad V de e_G tal que $V^n \subseteq U$.*

DEMOSTRACIÓN. Ya que la multiplicación es continua y $e_G^n = e_G$, existen vecindades $V_1, \ldots V_n$ de e_G tales que $V_1 \cdots V_n \subseteq U$. Entonces $V = V_1 \bigcap V_2 \cdots \bigcap V_n$ cumple lo requerido. □

PROPOSICIÓN II.64. *Sea X un espacio no discreto. Entonces toda vecindad de la identidad en $FG(X)$ contiene palabras de longitud arbitraria.*

DEMOSTRACIÓN. Dado que X es no discreto, existe $e \in X$ no aislado. En [Gr] se demuestre que los grupos $FG(X)$ uno con el punto e como identidad y otro con el punto f como identidad, son isomorfos topológicamente. Así es que consideramos a e la identidad de $FG(X)$. Sea m un número natural arbitrario pero fijo y U una vecindad arbitraria de e. Del Lema II.63 sabemos que para toda $n \geq m$ existe una vecindad V

de e tal que $V^n \subseteq U$. Como $|V \cap X| \geq \aleph_0$, podemos encontar n elementos distintos $x_1, \ldots, x_n$ en V y formar una palabra $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \in V^n \subseteq U$ de longitud $n \geq m$. □

Ahora probaremos que para todo espacio no discreto X el grupo libre sobre X, $FG(X)$ es resoluble, de hecho es $\aleph_0$-resoluble.

TEOREMA II.65. *Si X es un espacio no discreto, entonces $FG(X)$ es $\aleph_0$-resoluble.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos ajenos e infinitos de ω tal que $|\mathcal{F}| = \aleph_0$, $|F| = \aleph_0$. Definamos los siguientes subconjuntos de $FG(X)$:

$$L_F = \{z \in FG(X) : l(z) = n, \text{ para alguna } n \in F\}.$$

Se afirma que los conjuntos L_F son densos en $FG(X)$ (es claro que ellos son ajenos dos a dos). Para probarlo fije $F \in \mathcal{F}$ y elija un abierto no vacío U en $FG(X)$. Si $e_G \in U$ de la Proposición II.64 sabemos que U contiene palabras de longitud arbitraria, en particular contiene palabras de longitud n para toda $n \in F$.

Suponga que $e_G \notin U$. Expresemos a la vecindad U como $U = gV$ donde $e_G \in V$. Sea $m = l(g)$. Existe $k \in F$ tal que $k > m$. Elija en V una palabra z de longitud $k - m$, tal que en gz no haya cancelaciones. De aquí, $gz \in U \cap L_F$. □

Observe que si X es discreto el método de la demostración del Teorema II.65 no funciona pues existen vecindades de la identidad e de $FG(X)$ que contiene sólo un número finito de puntos. En el caso de el grupo $FM(X)$ se puede encontrar una base de vecindades de e las cuales contienen sólo palabras de longitud par (véase [Tk2]).

En ciertos casos podemos encontrar un grado mayor de resolubilidad de $FG(X)$.

TEOREMA II.66. *Sea X un espacio tal que $d(X) < |X|$. Entonces $FG(X)$ es maximal resoluble.*

DEMOSTRACIÓN. El resultado se sigue del Teorema II.50 y del Lema II.62. □

TEOREMA II.67 ([Ar3]). *Sea X un espacio.*

(1) *Si $wl(X) \leq \tau$, es decir si toda cubierta abierta de X contiene una subfamilia de cardinalidad $\leq \tau$ cuya unión densa en X, entonces $F(X)$ es τ-acotado.*
(2) *Si $c(X) \leq \aleph_0$, entonces $F(X)$ es $\aleph_0$-acotado.*

Con este resultado podemos probar la máxima resolubilidad de algunos grupos libres:

TEOREMA II.68. *Sea X un espacio X tal que $wl(X) < |X|$ y $|X|$ es regular o $cf(|X|) > wl(X)$. Entonces $F(X)$ es maximal resoluble. Lo mismo ocurre si $c(X) = \aleph_0$ y $cf(|X|) > \aleph_0$.*

DEMOSTRACIÓN. Ambos resultados se siguen de los Teoremas II.67 y II.52. □

7. Resolubilidad en espacios producto

Concierne a este apartado el estudio de la β-resolubilidad de algunos productos de espacios.

Pioneros en esta investigación son Ceder y Pearson, cuya obra fundamental, a este respecto, [CePe], presenta la demostración de que el producto de espacios maximal resolubles es maximal resoluble, considerando en el producto tres topologías distintas. En el mismo artículo se plantea la pregunta sobre la posible extensión de este resultado a otras topologías naturales en el producto. En [E2] El'kin responde afirmativamente esta pregunta y generaliza algunos otros resultados de [CePe] considerando topologías en el producto definidas al usar ideales en el conjunto de índices del producto.

Ya que en [E2] esencialmente se resuelve el problema para productos con la topología usual, nosotros consideraremos topologías κ-producto, donde nuestros resultados adquieren importancia cuando $\kappa > \aleph_0$.

Aquí se probará la β-resolubilidad para ciertos cardinales infinitos β. Si $X = \prod_{\alpha<\beta} X_\alpha$ y $x \in X$, por simplicidad expresaremos a x como $x = \{x_\alpha\}$, donde $x_\alpha \in X_\alpha$ para toda $\alpha < \beta$.

DEFINICIÓN II.69. Sean $\{X_\alpha : \alpha < \beta\}$ una familia de espacios, y X su producto cartesiano. Considere un punto fijo $x = \{x_\alpha\} \in X$. Definimos

$$\Sigma^\kappa(x) = \{\{z_\alpha\} \in X : |\{\alpha < \beta : x_\alpha \neq z_\alpha\}| < \kappa\}.$$

En el caso de $\Sigma^{\aleph_0}(x)$ lo denotaremos simplemente por $\sigma(x)$. Estos conjuntos son llamados los Σ-productos basados en x.

Estos Σ-productos tienen propiedades muy convenientes para el estudio de la resolubilidad de productos de espacios. Recuerde que un espacio producto X con la κ-topología producto se denota por $X^{(\kappa)}$.

PROPOSICIÓN II.70. *Sean $\{X_\alpha : \alpha < \beta\}$ una familia de espacios con $\beta \geq \aleph_0$ y κ un cardinal tal que $\kappa < \beta$. Considere su producto topológico $X^{(\kappa)} = \prod_{\alpha<\beta} X_\alpha$. Si $x \in X^{(\kappa)}$, entonces $\Sigma^\kappa(x)$ es denso en $X^{(\kappa)}$.*

Considere un punto $y = \{y_\alpha\} \in X^{(\kappa)}$ tal que $|\{\alpha < \beta : x_\alpha \neq y_\alpha\}| \geq \kappa$. Entonces $\Sigma^\kappa(x) \bigcap \Sigma^\kappa(y) = \emptyset$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $x \in X^{(\kappa)}$ y U un abierto no vacío en $X^{(\kappa)}$. Probaremos que $U \bigcap \Sigma^\kappa(x) \neq \emptyset$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que U pertenece a la base canónica, es decir $U = \prod_{\alpha<\beta} U_\alpha$, cada U_α es abierto en X_α y $R(U) = A$ tiene cardinalidad $< \kappa$. Sea $D = \{\alpha < \beta : U_\alpha = X_\alpha\}$. Para toda $\alpha \in A$, elegimos un punto $z_\alpha \in U_\alpha$ y hacemos $z_\alpha = x_\alpha$. Para $\alpha \in (\beta \setminus A)$. El punto $z = \{z_\alpha\}$ pertenece entonces a U y a $\Sigma^\kappa(x)$.

Suponga que x y y difieren en al menos κ coordenadas. Suponga que $z \in \Sigma^{\kappa}(x)$, entonces $x_\alpha = z_\alpha$ para al menos κ coordenadas y por lo tanto $|\{\alpha < \beta : x_\alpha \neq y_\alpha\}| \geq \kappa$ y por lo tanto $z \notin \Sigma^{\kappa}(y)$. $\square$

TEOREMA II.71. *Sea* $\{X_\alpha : \alpha < \beta\}$ *una familia de espacios tales que* $\text{mín}\{|X_\alpha| : \alpha < \beta\} = \kappa$. *Entonces* $X^{(\lambda)} = \prod_{\alpha<\beta} X_\alpha$, *es* $\kappa \cdot \beta$ *resoluble para toda* $\lambda < \beta$, *donde* β, κ *y* λ *son cardinales infinitos.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_\alpha$ familias con las siguientes propiedades:

(1) $|\mathcal{F}| = \beta$, $|\mathcal{F}_\alpha| = \kappa$.
(2) $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}_\alpha$, son familias de subconjuntos ajenos de β y X_α respectivamente.
(3) $|F| = |F'| = \beta$ para cualesquiera $F, F' \in \mathcal{F}$.
(4) $|F| = |F'| = \kappa$ para cualesquiera $F, F' \in \mathcal{F}_\alpha$.

Tomemos un $F \in \mathcal{F}$ y para cada $\alpha \in F$ considere un conjunto $A^\alpha \in \mathcal{F}_\alpha$. Sabemos que $|A^\alpha| = \kappa$, así es que podemos formar κ puntos que difieren en β coordenadas. Como tenemos β conjuntos $F \in \mathcal{F}$ podemos formar $\kappa\beta$ puntos que difieren en β coordenadas. Considerando sus Σ^{κ}-productos, tendremos $\kappa\beta$ subconjuntos densos ajenos dos a dos en $X^{(\lambda)}$. $\square$

COROLARIO II.72. *Sea* $\{X_\alpha : \alpha < \beta\}$ *una familia de espacios. Suponga que* $|X_\alpha| \geq \lambda$ *para toda* $\alpha \in \beta$. *Entonces* $X^{(\lambda)} = \prod_{\alpha<\beta} X_\alpha$ *es* $\lambda \cdot \beta$ *resoluble, para toda* $\lambda < \beta$.

DEMOSTRACIÓN. Considere familias $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}_\alpha$ como en la prueba del Teorema II.71 con $\alpha \in A$. Obtenemos así $\lambda\beta$ puntos que difieren en β coordenadas. Los Σ^{λ}-productos de estos puntos nos dan la $\lambda\beta$-resolubilidad de $X^{(\lambda)}$. $\square$

CAPÍTULO III

Refinación de Topologías en Grupos Conexos

1. Introducción

Este Capítulo versará sobre la refinación de topologías conexas y de grupo, es decir dado un grupo topológico G con topología τ conexa, ¿cuando se puede asegurar que existe una topología τ' de grupo en G conexa y tal que $\tau \subseteq \tau'$, $\tau' \neq \tau$?.

Existen ejemplos de una respuesta afirmativa a esta pregunta: considere $C^*(X)$ el espacio de funciones continuas acotadas con la topología de la convergencia puntual. Este es un espacio vectorial topológico (en particular un grupo topológico), y por lo tanto, es conexo. Si en $C^*(X)$ consideramos la topología de la convergencia uniforme, que es más fina que la de la convergencia puntual, $C^*(X)$ sigue siendo un espacio vectorial topológico y en consecuencia, esconexo.

Antes de analizar con más detenimiento este problema, es conveniente enmarcarlo en un contexto más general, que nos permita comparar resultados y anticipar dificultades.

Un planteamiento más general de nuestro problema es el siguiente: Sea (G, τ) un grupo topológico que posee una cierta propiedad $\mathcal{P}$, ¿existe una topología estrictamente más fina de grupo que aun posea $\mathcal{P}$, o al menos que la nueva topología posea una propiedad, en algún sentido bien definido, cercana a $\mathcal{P}$?

Analicemos algunos resultados afirmativos relativos a ciertos casos de $\mathcal{P}$.

En [Co] se demuestra (Teorema 6.17) que todo grupo abeliano compacto de peso no numerable admite una topología estrictamente más fina (por supuesto, no compacta) seudocompacta. El requerimiento sobre el peso no numerable es esencial pues un grupo abeliano compacto y metrizable no admite una topología seudocompacta estrictamente más fina [CoRo1].

En [CoRe1] se demuestra que todo grupo topológico (no necesariamente abeliano) de la forma F^κ con $\kappa > \omega$, admite una topología más fina que la original de peso $w(F) + 2^{2^\kappa}$ seudocompacta, donde F es un grupo seudocompacto. También se prueba que ciertos grupos compactos (es decir, con algunas restricciones cardinales sobre el subgrupo conmutador) admiten topologías estrictamente más finas seudocompactas.

Respecto a refinación de topologías compactas a topologías numerablemente compactas se tienen algunos resultados. Un cardinal es llamado Ulam-medible si éste contiene un ultrafiltro tal que la intersección de una colección numerable de elementos del ultrafiltro pertenece al ultrafiltro. En [Ar4] se demuestra que si un grupo compacto admite una topología estrictamente más fina numerablemente compacta, entonces el grupo tiene cardinalidad Ulam-medible. En [CoRe2] se prueba una especie de recíproco: si G es compacto de cardinalidad Ulam-medible y es abeliano o conexo, entonces admite una topología numerablemente compacta estrictamente más fina.

En relación a la propiedad de ser conexo, nuestro punto de partida sera el resultado obtenido en [ATTW], en el que se obtiene una topología conexa de grupo estrictamente más fina para el grupo aditivo de los números reales.

El objeto de nuestra investigación será obtener topologías de grupo conexas estrictamente más finas en grupos abelianos. Adicionalmente se conservan algunos invariantes cardinales. Por cuestiones algebraicas, se divide el problema en grupos abelianos sin torsión y grupos abelianos de torsión pura.

En este capítulo todos los grupos serán no triviales, es decir si G es un grupo topológico G, $|G| > 1$.

2. Preliminares

En este apartado estableceremos hechos importantes para nuestra investigación posterior.

Comencemos con un Teorema de importancia fundamental, que nos permitirá determinar la conexidad de ciertos subgrupos de productos.

TEOREMA III.1 ([TkV1], [TkV2]). *Sean X, Y espacios conexos y G un subespacio denso disconexo del producto $X \times Y$ tal que $p(G) = X$ donde $p\colon X \times Y \to X$ es la proyección. Entonces existe un subconjunto F cerrado de $X \times Y$ ajeno a G tal que $p(F)$ contiene un abierto no vacío de X. De hecho $F = \overline{O_1} \cap \overline{O_2}$, donde O_1, O_2 son abiertos no vacíos disjuntos en $X \times Y$ que cubren a G.*

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis del teorema, existen abiertos no vacíos y ajenos O_1, O_2 del producto $X \times Y$ tales que $G \subseteq O_1 \cup O_2$. Note que $X \times Y = \overline{O_1} \cup \overline{O_2}$. Definamos F como

$$F = \overline{O_1} \cap \overline{O_2},$$

donde la cerradura se toma en $X \times Y$.

Los conjuntos G y F son disjuntos pues $G \subseteq O_1 \cup O_2$. Sea $x \in X \setminus p(F)$, entonces $p^{-1}(x) \cap F = \emptyset$. En este caso solo puede ocurrir que

$$p^{-1}(x) \subseteq \overline{O_1},$$

o

$$p^{-1}(x) \subseteq \overline{O_2}.$$

De otra forma tendríamos una separación de $p^{-1}(x)$ dada por

$$p^{-1}(x) = (p^{-1}(x) \cap \overline{O_1}) \cup (p^{-1}(x) \cap \overline{O_2})$$

lo que contradice el hecho de que $p^{-1}(x) \cong Y$ es conexo.

Para cada subconjunto $O \subseteq X \times Y$ definimos

$$p^{\#}(O) = X \setminus p(X \times Y \setminus O).$$

Es claro que $p^{\#}(O) = \{x \in X : p^{-1}(x) \subseteq O\}$. Se afirma que

$$\text{(A)} \qquad X \setminus p(F) \subseteq p^{\#}(\overline{O_1}) \cup p^{\#}(\overline{O_2}).$$

Sea $x \in X \setminus p(F)$. Entonces $p^{-1}(x) \subseteq \overline{O_1}$ o $p^{-1}(x) \subseteq \overline{O_2}$. Por lo tanto $x \in p^{\#}(\overline{O_1})$ o $x \in p^{\#}(\overline{O_2})$. Se observa que $p^{\#}(\overline{O_1})$ y $p^{\#}(\overline{O_2})$ son cerrados por la definición de $p^{\#}$ y que son ajenos: si $x \in p^{\#}(\overline{O_1}) \cap p^{\#}(\overline{O_2})$, entonces $p^{-1}(x) \subseteq \overline{O_1} \cap \overline{O_2} = F$. Ya que $p(G) = X$, existe $y \in Y$ tal que $(x, y) \in G$. Pero entonces $(x, y) \in G \cap F \neq \emptyset$, una contradicción. Notemos que $p^{\#}(\overline{O_1}) \neq X \neq p^{\#}(\overline{O_2})$. De estas propiedades se deduce que

$$p^{\#}(\overline{O}_1) \cup p^{\#}(\overline{O}_2) \neq X.$$

En caso contrario X sería disconexo, lo que termina la demostración, pues de (A) sabemos que el conjunto abierto no vacío $X \setminus (p^{\#}(\overline{O_1}) \cup p^{\#}(\overline{O_2}))$ está contenido en $p(F)$. □

De gran trascendencia para nuestro trabajo son los conjuntos regularmente abiertos y regularmente cerrados.

DEFINICIÓN III.2. Un subconjunto O de un espacio X es llamado *regularmente abierto* si $O = \text{Int}(\overline{O})$. La familia de todos los conjuntos regularmente abiertos de un espacio X se denota por $RO(X)$. Un conjunto $F \subseteq X$ es regularmente cerrado si $F = \overline{\text{Int}(F)}$. La familia de todos los conjuntos regularmente cerrados de un espacio X se denota por $RC(X)$.

Los dos siguiente resultados son bien conocidos (véase [W] y [GMT]).

TEOREMA III.3. *Para cualquier espacio X, $|RO(X)| \leq \pi w(X)^{c(X)}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $c(X) = \kappa$ y $\mathcal{V}$ una π-base para X con $|\mathcal{V}| = \pi w(X)$. Definimos la familia $\mathcal{G} = \{\text{Int}(\overline{G}) : G$ es la unión de $\leq \kappa$ elementos de $\mathcal{V}\}$. Se afirma que $RO(X) \subseteq \mathcal{G}$ de donde se desprenderá que $|RO(X)| \leq \pi w(X)^{c(X)}$. Sean $R \in RO(X)$ y $\mathcal{V}_R = \{V \in \mathcal{V} : V \subseteq R\}$. Se sigue del Lema I.3 que existe una subfamilia $\mathcal{W}$ de $\mathcal{V}_R$ con $|\mathcal{W}| \leq \kappa$ y $\bigcup\mathcal{V}_R \subseteq \overline{(\bigcup\mathcal{W})}$. Sea $G = \bigcup\mathcal{W}$. Es fácil ver que $R \subseteq \overline{(\bigcup\mathcal{V}_R)}$ pues R es abierto y $\mathcal{V}$ es una π-base. De aquí concluimos que $\overline{R} = \overline{G}$ y por lo tanto $R = \text{Int}(\overline{R}) = \text{Int}(\overline{G})$. □

PROPOSICIÓN III.4. *Si A es un conjunto regularmente cerrado en un espacio X, entonces $X \setminus A$ es regularmente abierto en X.*

DEMOSTRACIÓN. Denotemos por F^c el complemento de un subconjunto $F \subseteq X$. Si A es un conjunto regularmente cerrado, entonces $A = \overline{\mathrm{Int}(A)}$. Por lo tanto $A^c = (\overline{\mathrm{Int}(A)})^c = ((\overline{A^c})^c)^c = \mathrm{Int}(\overline{A^c})$ y por lo tanto A^c es un conjunto regularmente abierto. El recíproco se prueba en forma similar. □

COROLARIO III.5. *Si X es un espacio, entonces $|RC(X)| = |RO(X)|$.*

LEMA III.6. *Sean H, T espacios topológicos tales que $c(H) \leq \kappa$ y κ^+ es un precalibre débil de T. Entonces $c(H \times T) \leq \kappa$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ una familia de abiertos no vacíos en $H \times T$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que cada V_α es de la forma $V_\alpha = U_\alpha \times W_\alpha$, con U_α, W_α abiertos en H y T respectivamente.

Considere la familia $\{W_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$. Existe $A \in [\kappa^+]^{\kappa^+}$ tal que $W_\alpha \bigcap W_\beta \neq \emptyset$ para todo $\alpha, \beta \in A$. Ahora considere la familia $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ de abiertos en H. Claramente existen $\alpha < \beta < \kappa^+$ con $U_\alpha \bigcap U_\beta \neq \emptyset$. Entonces $V_\alpha \bigcap V_\beta \neq \emptyset$ y la familia $\mathcal{V}$ no puede ser celular. Por lo tanto, $c(H \times T) \leq \kappa$. □

COROLARIO III.7. *Sean X, Y espacios tales que $c(X) \leq \aleph_0$ (es decir, X satisface ccc) y $d(Y) = \aleph_0$. Entonces la celularidad de $X \times Y$ es numerable.*

DEMOSTRACIÓN. Simplemente observe que dado que $d(Y) = \aleph_0$, entonces $\aleph_1$ es un precalibre débil de Y (Teorema I.2). El resultado se sigue del Lema III.6. □

LEMA III.8. *Sea $\mathbb{T}$ el grupo del círculo. Entonces $\aleph_1$ es un calibre de $\mathbb{T}$.*

DEMOSTRACIÓN. Se sigue del hecho de que $\mathbb{T}$ es separable, es decir $d(\mathbb{T}) = \aleph_0$. □

DEFINICIÓN III.9. Sean G un grupo abeliano y $g \in G$, $g \neq e_G$. Si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $ng = e_G$, donde $ng = g + \cdots + g$, con n sumandos, entonces g es un *elemento de torsión* de G. Si n es el mínimo número tal que $ng = e_G$, entonces n es *el orden* de g y esto se denota $o(g) = n$.

Si G es un grupo, denotaremos por tG el subgrupo de G consistente de los elementos de torsión (recuerde que G es abeliano).

Si G no tiene elementos de torsión, entonces G es *libre de torsión*.

DEFINICIÓN III.10. Sea G un grupo.

(1) Una familia de subgrupos $\{H_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de G es *independiente* si
$$H_\alpha \cap \langle \cup \{H_\xi : \xi \neq \alpha\} \rangle = \{e_G\}$$
para cada $\alpha < \kappa$.

(2) Un subconjunto X de G es *independiente* si $\{\langle x \rangle : x \in X\}$ es una familia independiente de subgrupos de G.

Es claro que podemos recuperar el significado usual de independencia: un conjunto $\{H_\alpha : \alpha < \beta\}$ de subgrupos de un grupo G es independiente si y sólo si la relación

$$\sum_{n \in F} \{k_n x_n\} = 0$$

(con F finito, $F \subseteq \beta$, $x_n \in H_{\alpha_n}$, con los α_n distintos entre sí, y $k_n \in \mathbb{Z}$) implica $k_n x_n = 0$ para cada $n \in F$.

Definición III.11. Sea G un grupo abeliano. Un elemento $g \in G$ es *divisible* en G entre un entero positivo m si $g = mh$ para alguna $h \in G$. El grupo G es *divisible* si cada uno de sus elementos es divisible entre cada $n \in \mathbb{N}^+$.

Un subgrupo H de un grupo abeliano G es llamado *puro* en G si

$$nG \cap H = nH$$

para todo $n \in \mathbb{N}^+$. Es decir, H es puro si todo elemento de H que es divisible entre n en G también lo es en H.

Por ejemplo $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$ son grupos divisibles y $\mathbb{Q}$ es puro en $\mathbb{R}$. Es fácil ver que el conjunto $G[n]$ de todos los elementos $g \in G$ que satisfacen $ng = 0$ es un subgrupo de G. Más aún, los elementos de G que tienen orden igual a una potencia de un número primo fijo p, forman un subgrupo G_p, la *componente p-primaria de G*. Si todos los elementos de un grupo G tienen orden igual a la potencia de un número primo p fijo, entonces G es llamado un p-grupo.

Si H es un subgrupo de G tal que G/H es libre de torsión, entonces claramente H es puro; en particular, el subgrupo de torsión tG es puro.

Dos resultados muy importante en la Teoría de Grupos son:

Teorema III.12 ([Robin]). *En un grupo abeliano G el subgrupo de torsión tG es la suma directa de sus componentes p-primarias.*

Teorema III.13 ([Robin]). *Sean G y H grupos con H divisible. Si $\phi\colon K \to H$ es un homomorfismo de un subgrupo K de G, entonces existe un homomorfismo $\Phi\colon G \to H$ que extiende a ϕ.*

En el caso de grupos no divisibles también podemos extender homomorfismos en ciertos casos.

Proposición III.14. *Sean G, H grupos tales que todos sus elementos distintos de la identidad tienen orden p, un número primo. Sea $X \subseteq G$ un subgrupo de G y $f\colon X \to H$ un homomorfismo. Entonces existe un homomorfismo $F\colon G \to H$ que extiende a f.*

Demostración. Se desprende inmediatamente del hecho de que cada subgrupo X de un grupo, en donde cada elemento distinto de la identidad tiene orden p, es un sumando directo de G (véase [Robin]), es decir, existe otro subgrupo Y de G tal que $G \cong X \oplus Y$. $\square$

3. Grupos con subgrupo de torsión pequeño

Nuestra primera tarea será encontrar elementos independientes en todo abierto de ciertos grupos topológicos.

TEOREMA III.15. *Sean G un grupo topológico libre de torsión tal que $\Delta(G) = \lambda > \aleph_0$ y H un subgrupo con $|H| < \lambda$. Entonces para todo abierto no vacío $U \subseteq G$ existe un elemento $g \in U$ tal que $\{\langle g\rangle, H\}$ es una familia independiente.*

DEMOSTRACIÓN. Para toda $m \in \mathbb{N}^+$ y $h \in H$ definimos $K_{h,m} = \{g \in U : g^m = h\}$. Si la conclusión del teorema fuese falsa, tendríamos $U = \cup\{K_{h,m} : h \in H, m \in \mathbb{N}^+\}$. Como $|H \times \mathbb{N}^+| < \lambda$, podemos encontrar $h_e \in H$ y y $m_e \in \mathbb{N}^+$ tales que $|K_{h_e,m_e}| \geq 2$. Sean $g_1, g_2 \in K_{h_e,m_e}$ elementos distintos. Entonces $g_1^{m_e} = h_e = g_2^{m_e}$, de aquí se sigue $(g_1 g_2^{-1})^{m_e} = 0$. Esto contradice nuestra suposición de que G es libre de torsión. □

De hecho, utilizando la misma demostración, podemos probar un hecho más general.

TEOREMA III.16. *Sea G un grupo topológico con $\Delta(G) = \lambda > \aleph_0$ y tal que su subgrupo de torsión tG tiene cardinalidad $< \lambda$. Si U es un abierto no vacío y H es un subgrupo de G tal que $|H| < \lambda$, entonces existe un elemento $g \in G$ tal que $\{\langle g\rangle, H\}$ es una familia independiente en G.*

DEMOSTRACIÓN. Considere un nuevo subgrupo $H' = \langle H \cup tG\rangle$. Entonces $|H'| < \lambda$ y podemos razonar como en el Teorema III.15. □

COROLARIO III.17. *Sean G un grupo topológico con $|G| = \kappa$, $|tG| < \kappa$ y H un subgupo de G tal que $|H| < \kappa$. Sea λ un cardinal, $\lambda < \kappa$. Suponga que G es λ-acotado o que $d(G) = \lambda$. Entonces, para todo abierto U de G, existe un elemento $g \in G$ tal que $\{\langle g\rangle, H\}$ es una familia independiente.*

DEMOSTRACIÓN. Si G es λ-acotado, dado que las traslaciones preservan la cardinalidad, debemos tener $\Delta(G) = |G|$. La misma conclusión se obtiene si $d(G) < \kappa$ en vista del Corolario II.51. □

LEMA III.18. *Sean G un grupo abeliano libre de torsión y H un subgrupo infinito de G. Entonces existe un subgrupo puro L de G tal que $|L| = |H|$ y $H \subseteq L$.*

DEMOSTRACIÓN. Para cada $n \in \mathbb{N}^+$ y $g \in G$ denote por $p(g,n)$ un elemento de G que satisfaga $np(g,n) = g$. Si no existe, hacemos $p(g,n) = e_G$. Definimos una sucesión creciente $H_0 \subseteq H_1 \subseteq \cdots$ de subgrupos de G de cardinalidad $|H|$ de la siguiente forma: Sea $H_0 = H$. Suponga que hemos encontrado el subgrupo H_k para alguna $k \in \mathbb{N}^+$, entonces definimos

$$X_k = H_k \cup \{p(g,n) : g \in H_k, n \in \mathbb{N}^+\} \text{ y } X_{k+1} = \langle X_k\rangle.$$

Finalmente podemos construir L tomando la unión de los H_k, es decir, $L = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^+} H_k$. Es claro que $H \subseteq L$ y que $|L| = |H|$. Por construcción, si un elemento de L es divisible entre n en G con $n \in \mathbb{N}^+$, es divisible entre n en L, así que L es puro. $\square$

Ahora podemos obtener nuestro primer resultado sobre refinación de topologías de grupo conexas.

Teorema III.19. *Sean κ un cardinal infinito y G un grupo abeliano conexo libre de torsión con $w(G) \leq \kappa$, $|G| \geq \kappa^{\aleph_0}$ y $c(G) \leq \aleph_0$. Entonces G admite una topología de grupo conexa estrictamente más fina y con las mismas restricciones cardinales.*

Demostración. La idea de la demostración es construir un homomorfismo discontinuo h de G al grupo del círculo $\mathbb{T}$ en tal forma que el subgrupo

$$G^* = \{(x, h(x)) : x \in G\}$$

del producto $P = G \times \mathbb{T}$ con la topología inducida sea denso y conexo en $G \times \mathbb{T}$. El subgrupo denso G^* de $G \times \mathbb{T}$ satisface $w(G^*) \leq \kappa$ y $c(G) \leq \aleph_0$; lo cual se desprende del hecho de que un subespacio denso hereda la misma celularidad y del Lema III.6.

La restricción de la proyección $pr\colon P \to G$ a G^* es un homomorfismo continuo e inyectivo de G^* sobre G, pero $\pi = pr \restriction G^*$ no es un homeomorfismo (en caso contrario h sería continuo). Considere la topología de grupo más débil en G que haga continuo al homomorfismo $\pi^{-1}\colon G \to G^*$. En otras palabras, identifique al grupo G con G^* por medio del isomorfismo π. Esto nos da una topología de grupo estrictamente más fina conexa y que satisface las mismas restricciones cardinales.

Comencemos la construcción del homomorfismo $h\colon G \to \mathbb{T}$. Denotemos con $\mathcal{F}$ la familia de todos los subconjuntos cerrados F de P de la forma $F = \overline{O_1} \cap \overline{O_2}$ para alguna pareja de abiertos O_1, O_2 de P (no excluimos el caso $O_1 = O_2$), e $\mathrm{Int}(pr(F)) \neq \emptyset$. El Teorema III.3 implica que $|\mathcal{F}| \leq \kappa^{\aleph_0}$. Sea $\lambda = \kappa^{\aleph_0}$. Considere una enumeración $\{F_\alpha : \alpha < \lambda\}$ en la que aparece λ veces cada $F \in \mathcal{F}$. Suponga que hemos construido un conjunto $X_\beta = \{x_\alpha : \alpha < \beta\} \subseteq G$ para alguna $\beta < \lambda$. Denotemos con H_β al subgrupo de G generado por X_β, $H_\beta = \langle X_\beta \rangle$. El grupo G satisface $c(G) \leq \aleph_0$ así es que G es $\aleph_0$-acotado (I.11); por lo tanto $\Delta(G) = |G|$ y, por el Teorema III.15, podemos elegir un punto $x_\beta \in \mathrm{Int}(pr(F_\beta)) \setminus H_\beta$ tal que $\{\langle x_\beta \rangle, H_\beta\}$ es una familia independiente en G.

Repetimos este proceso para toda $\beta < \lambda$. Esto nos da un conjunto $X = \{x_\alpha : \alpha < \lambda\}$. Nuestra construcción implica que $|X \cap pr(F)| = \lambda$ para cada $F \in \mathcal{F}$, así que podemos definir una función $f\colon X \to \mathbb{T}$ tal que $F \cap f(X) \neq \emptyset$ para toda $F \in \mathcal{F}$.

Note que el conjunto $Gr(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ es denso en P: el conjunto $F_U = \overline{U} \cap \overline{U}$ pertenece a $\mathcal{F}$ para cada abierto no vacío U de P y $Gr(f)$ intersecta a todos los conjuntos F_U. Ya que el espacio es regular, concluimos que $Gr(f)$ es denso en P.

De nuestra construcción sabemos que X es una familia independiente, lo que implica que $\langle X \rangle = \bigoplus_{x\in X} \langle x \rangle$ es un grupo abeliano libre con X como conjunto de generadores. Por lo tanto, f se extiende a un homomorfismo $\hat{f}: \langle X \rangle \to \mathbb{T}$. Como el grupo $\mathbb{T}$ es divisible, se puede extender $\hat{f}$ a un homomorfismo $h: G \to \mathbb{T}$ (véase [Robin]). Considere el grupo G^* mencionado al principio de la prueba:

$$G^* = \{(x, h(x)) : x \in G\} \subseteq P.$$

El grupo G^* contiene al conjunto $Gr(f)$ y por lo tanto es denso en P. Falta probar que G^* es conexo. Suponga lo contrario y use el Teorema III.1 para encontrar un elemento $F \in \mathcal{F}$ con $F \cap G^* = \emptyset$. Entonces $Gr(f) \cap F = \emptyset$, que contradice el hecho de que $Gr(f)$ intersecta a todos los miembros de $\mathcal{F}$.

Así, G^* es un subgrupo denso y conexo de P y podemos introducir una topología de grupo conexa en G mediante el epimorfismo $pr \restriction G^*: G^* \to G$. Esto completa la demostración. □

Por supuesto, podemos permitir la presencia de un subgrupo de torsión pequeño y aún obtenemos una topología estrictamente más fina conexa.

TEOREMA III.20. *Sean κ un cardinal infinito y G un grupo abeliano conexo con $w(G) \leq \kappa$, $|G| \geq \kappa^{\aleph_0}$, $|tG| < |G|$ y $c(G) \leq \aleph_0$. Entonces G admite una topología de grupo conexa estrictamente más fina y con las mismas restricciones cardinales.*

DEMOSTRACIÓN. La prueba es exactamente la misma que la del Teorema III.19, pero esta vez utilizamos el Corolario III.17 para obtener la familia X de elementos independientes. □

COROLARIO III.21. *Sea G un grupo abeliano sin torsión conexo con $w(G) \leq \mathfrak{c}$ y celularidad numerable. Entonces G admite una topología de grupo conexa estrictamente más fina con las mismas restricciones cardinales.*

DEMOSTRACIÓN. Recuerde que un grupo conexo tiene cardinalidad al menos $\mathfrak{c}$. El resultado se sigue del Teorema III.19. □

En el Teorema III.19 hemos conseguido refinar la topología de un grupo conexo y logramos además conservar el mismo peso y la celularidad numerable. El siguiente paso es tratar de preservar la separabilidad de la topología.

Antes requerimos un resultado preliminar.

LEMA III.22. *Sea G un grupo no numerable separable libre de torsión. Entonces existen un subgrupo numerable K de G y un homomorfismo (discontinuo) q de K al grupo del círculo $\mathbb{T}$ tal que el grupo $\{(x, q(x)) : x \in K\}$ es denso en el producto $P = G \times \mathbb{T}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea S un subconjunto denso numerable de G. Definimos como H el subgrupo generado por S en G, es decir, $H = \langle S \rangle$. Por el Lema III.18, existe un subgrupo numerable puro L de G que contiene a H. El grupo cociente G/L es obviamente libre de torsión (véase [HR] Teorema A.28) es no numerable. Denote por π el homomorfismo canónico de G a G/L y elija un subconjunto independiente $Y = \{y_n : n < \omega\}$ del grupo cociente $Q = G/L$. Sea $\{t_n : n < \omega\}$ un subconjunto denso y numerable de $\mathbb{T}$. Definimos la función $f \colon Y \to \mathbb{T}$ por $f(y_n) = t_n$ para cada $n < \omega$. Dado que Y es un subconjunto independiente de Q, f se extiende a un homomorfismo $g \colon K_0 \to \mathbb{T}$, donde $K_0 = \langle Y \rangle$. Sea $K = \pi^{-1}(K_0)$ y $q = g\pi \restriction K$. Obviamente, K es un subgrupo de G y $|K| = |K_0| \cdot |L| = \aleph_0$. Falta probar que el subgrupo $\{(x, q(x)) : x \in K\}$ es denso en P.

Sea $O = U \times V$ un abierto no vacío de P. Existe un elemento $t_n \in V$. Elija $x_n \in K$ con $\pi(x_n) = y_n$. Entonces $q^{-1}(t_n) \supseteq \pi^{-1}(y_n) = x_n + L$. El conjunto $x_n + L$ es denso en G y por lo tanto existe $x \in (x_n + L) \bigcap U$. Así, $x \in K$ y $(x, q(x)) = (x, t_n) \in O$. $\square$

TEOREMA III.23. *Sea G un grupo conexo separable abeliano y libre de torsión. Entonces G admite una topología de grupo conexa y separable estrictamente más fina.*

DEMOSTRACIÓN. Note que no podemos proceder exactamente como en la prueba del Teorema III.19 pues no sabemos si el subgrupo G^* es separable, aún si $pr(G^*) = G$.

Ya que G es conexo, $|G| \geq \mathfrak{c}$. Por el Lema III.22, existe un subgrupo numerable K de G y un homomorfismo $q \colon K \to \mathbb{T}$ tal que el conjunto $D = \{(x, q(X)) : x \in K\}$ es denso en el producto $P = G \times \mathbb{T}$.

Sabemos que $c(G) \leq d(G) \leq \aleph_0$ y $w(G) \leq 2^{d(G)} = \mathfrak{c}$, por lo que podemos aplicar la construcción usada en la prueba del Teorema III.19 y definir un homomorfismo $h \colon G \to \mathbb{T}$ que satisfaga las siguientes condiciones:

(1) $h \restriction K = q$;
(2) el subgrupo $G^* = \{(x, h(x)) : x \in G\}$ de P intersecta a todo subconjunto no vacío cerrado F de P de la forma $F = \overline{U} \bigcap \overline{V}$ para ciertos abiertos U, V de P, y que satisfaga $\mathrm{Int}(pr(F)) \neq \emptyset$, donde $pr \colon P \to G$ es la proyección.

De (1) se sigue que G^* contiene un subgrupo denso y numerable D, por consiguiente es separable. De (2) y del Teorema III.1 sabemos que G^* es conexo. Ya que la gráfica G^* del homomorfismo h es densa en P, concluimos que h es discontinuo. Por lo tanto, la topología de grupo

$$\tau = \{p(O) : O \text{ es abierto en } G^*\}$$

en G es estrictamente más fina que la topología original de G. Claramente el grupo (G, τ) es conexo y separable. $\square$

Presentamos ahora una de las posibles aplicaciones del Teorema III.19.

COROLARIO III.24. *Sea G un subgrupo denso conexo y libre de torsión de un producto cartesiano $\prod_{\alpha<\beta} G_\alpha$, donde cada G_α es un grupo separable y $\beta \leq \mathfrak{c}$. Entonces G admite una topología de grupo conexa estrictamente más fina.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $K = \prod_{\alpha<\beta} G_\alpha$. Tenemos $w(G_\alpha) \leq 2^{d(G_\alpha)}$ para cada $\alpha < \beta$, por lo que $w(K) \leq \mathfrak{c}$ y $w(G) \leq w(K) \leq \mathfrak{c}$. Además, como todos los factores son separables, por el Corolario 2.3.17 [En] del Teorema de Hewitt-Marczewsky-Pondiczery $c(K) \leq \aleph_0$. Además $c(G) = \aleph_0$ pues G es denso en K. Mediante el Teorema III.19 obtenemos la afirmación del Corolario. □

4. Grupos con torsión

Al tratar de utilizar el método de la sección anterior para refinar topologías conexas en grupos abelianos con torsión, nos encontramos con dificultades en la definición del homomorfismo, pues ahora tenemos elementos de torsión. Debemos desarrollar otra técnica. De hecho conseguiremos refinar topologías conexas en grupos abelianos de torsión acotada y en p-grupos.

Presentamos algunos resultados auxiliares.

LEMA III.25. *Sea G un p-grupo no numerable de cardinalidad λ. Entonces la cardinalidad del grupo*

$$H_j = \{g \in G : p^j g = e_G\}$$

es igual a λ para cada $j \in \mathbb{N}^+$.

DEMOSTRACIÓN. Denotemos por ϕ el homomorfismo de G a G, $\phi(g) = pg$ para cada $g \in G$. Es claro que $H_1 = \mathrm{Ker}(\phi)$. Note que si $g, h \in G$ y $\phi(h) = g$, entonces $\phi^{-1}(g) = h + H_1$. Por lo tanto,

$$|\phi^{-1}(g)| \leq |H_1| \text{ para cada } g \in G. \tag{3}$$

Sea $|H_1| = \tau$ y suponga que hemos probado la desigualdad $|H_j| \leq \tau \cdot \aleph_0$ para alguna $j \in \mathbb{N}^+$. Entonces $H_{j+1} = H_j \cup \phi^{-1}(H_j)$. Si usamos la ecuación (3) y la hipótesis de inducción, concluimos que $|H_{j+1}| \leq \tau \cdot \aleph_0$.

Como $G = \bigcup_{j\in\mathbb{N}^+} H_j$ y $|G| > \aleph_0$ concluimos que $\lambda = |G_j| = \tau$ para cada $j \in \mathbb{N}^+$. □

El siguiente resultado es una generalización del Teorema III.15.

LEMA III.26. *Sea G un grupo topológico $\aleph_0$-acotado y H un subgrupo de G con $|H| < \mathfrak{c}$. Suponga que G satisface una de las siguientes condiciones:*

(1) $|G/tG| \geq \mathfrak{c}$;
(2) *El subgrupo tG es denso en G y si $|p^n G_p| > 1$ para algún entero $n \geq 0$ y un número primo p, entonces $|p^n G_p| \geq \mathfrak{c}$.*

Entonces para todo abierto no vacío U de G, existe un elemento $g \in U$ tal que $\{\langle g\rangle, H\}$ es una familia independiente.

Demostración. Es claro que $|G| \geq |G/tG| \geq \mathfrak{c}$ en el caso (1). Si se usa (2) y $|G| > 1$ entonces, como tG es denso en G, existe un primo p con $|G_p| > 1$. En consecuencia $|G| \geq |G_p| \geq \mathfrak{c}$. Sin pérdida de generalidad supondremos que $|G| \geq \mathfrak{c}$.

Sea U una vecindad de la identidad en G. Sabemos que $|U| = |G| \geq \mathfrak{c}$. Además, si G' es un subgrupo de G con $|G'| \geq \mathfrak{c}$ y $U \cap G' \neq \emptyset$, entonces $|U \bigcap G'| \geq \mathfrak{c}$. La última afirmación se sigue inmediatamente de que todo subgrupo de un grupo $\aleph_0$-acotado es $\aleph_0$-acotado (véase el Lema I.7).

(1) Tenemos que $|G/tG| \geq \mathfrak{c}$. Sea C un subconjunto de U con la propiedad $|C \cap (u + tG)| = 1$ para cada $u \in U$. Es claro que $g - g' \notin tG$ para distintos $g, g' \in C$. Afirmamos que $|C| \geq \mathfrak{c}$: como G es $\aleph_0$-acotado, existe un subconjunto numerable $K \subseteq G$ con $K + U = G$, y las igualdades

$$G = (K + U) + tG = K + (U + tG) = K + (C + tG) = (K + C) + tG$$

implican que

$$\mathfrak{c} \leq |G/tG| \leq |K + C|.$$

Como K es numerable, concluimos que $|C| \geq \mathfrak{c}$.

Suponga que $\langle g\rangle \cap H \neq \{e_G\}$ para cada $g \in C$, $g \neq e_G$. Entonces, para cada $g \in C$, existen $n \in \mathbb{N}^+$ y $h \in H$ con $ng = h \neq e_G$. Como $|H| < \mathfrak{c}$, podemos encontrar elementos distintos $g, g' \in C$, $n \in \mathbb{N}^+$ y $h \in H$ tales que $ng = ng' = h$. Esto es, $n(g - g') = e_G$. Por consiguiente $g - g' \in tG$. Esto último contradice la elección del conjunto C. Así, $\langle g\rangle \bigcap H = \{e_G\}$ para alguna $g \in C \subseteq U$.

(2) El grupo tG es denso en G y $|p^n G| \geq \mathfrak{c}$ siempre que el grupo $p^n G_p$ no sea trivial.

Como todo subconjunto abierto no vacío de G intersecta a tG y éste es $\aleph_0$-acotado como subgrupo de G (Lema I.7), podemos suponer sin pérdida de generalidad que $G = tG$. Considere los siguientes subcasos.

(a1) Suponga $G = G_p$ para algún número primo p. Sea U un abierto no vacío y sea $n \geq 1$ el número natural más pequeño con la propiedad $U \cap G(n) \neq \emptyset$, donde $G(n) = \{g \in G : p^n g = e_G\}$. Considere el homomorfismo $\psi\colon G \to G$ definido por $\psi(x) = p^{n-1}x$, $x \in G$. Es claro que ψ es continuo y de la definición de n se sigue que el grupo $\psi(G)$ no es trivial. Por lo tanto, (2) implica que $|\psi(G)| \geq \mathfrak{c}$.

Hacemos $K = \psi(G)$. Sea t una topología de grupo para K constituida por los conjuntos $\psi(W)$ con W abierto en G. El grupo (K, t) es $\aleph_0$-acotado al ser cociente de un grupo $\aleph_0$-acotado G [G]. Como $|K| \geq \mathfrak{c}$, el Lema III.25 implica que $|G(1) \cap K| = |K| \geq \mathfrak{c}$. El subgrupo $L = G(1) \cap K$ del grupo $\aleph_0$-acotado (K, t) también es $\aleph_0$-acotado. De la definición de n se sigue que $V = \psi(U) \cap L$ es un subconjunto abierto no vacío de L, y de aquí $|V| \geq \mathfrak{c}$. Como $|H| < \mathfrak{c}$, existe $g \in U$ con $\psi(g) \in V \setminus H$. Es claro que $\langle g\rangle \cap H = \{e_G\}$.

(a2) Hay al menos dos componentes p-primarias no triviales en G. Mostraremos que existe $g \in U$ con $\langle g\rangle \cap H = \{e_G\}$. Sea $G = \bigoplus_{p\in\mathbb{P}} G_p$ una descomposición de G en sus p-componentes primarias, donde $\mathbb{P}$ es el conjunto de todos los primos p con $|G_p| > 1$. Por hipótesis, $|G_p| \geq \mathfrak{c}$ para toda $p \in \mathbb{P}$. Claramente, existen $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{P}$ tales que $U \cap (G_{p_1} + \ldots + G_{p_k}) \neq \emptyset$.

Hacemos $K = G_{p_1} + \ldots + G_{p_k}$. Considere la topología de grupo t en K con base local en $e_G = e_K$ consistente de los conjuntos $(W_1 \cap G_{p_1}) + \ldots + (W_k \cap G_{p_k})$, donde $W_1, \ldots, W_k$ son vecindades abiertas de e_G en G. Es claro que t es más fina que la topología que K hereda de G. El grupo (K, t) es topológicamente isomorfo a la suma directa $\bigoplus_{i\leq k} G_{p_i}$ de subgrupos $\aleph_0$-acotados de G, y por lo tanto, es $\aleph_0$-acotado. Pongamos $V = U \cap K$. Ya que $V \neq \emptyset$, existen abiertos no vacíos $V_1, \ldots, V_k$ en $G_{p_1}, \ldots, G_{p_k}$ repectivamente tales que $V_1 + \ldots + V_k \subseteq V$. Aplicamos (a1) para encontrar un elemento $g_i \in V_i$, $g_i \neq e_G$ de orden $p_i^{n_i}$ tal que $\langle g_i\rangle \cap H = \{e_G\}$; $1 \leq i \leq k$. El elemento $g = g_1 + \cdots + g_k$ tiene orden $N = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$ y pertenece a V. Afirmamos que $\langle g\rangle \cap H = \{e_G\}$: suponga que $e_G \neq mg \in H$ para alguna $m < N$. Entonces m es un divisor de N, y por lo tanto m divide a $m_i = p_1^{n_1} \cdots p_i^{n_i-1} p_{i+1}^{n_{i+1}} \cdots p_k^{n_k}$ para alguna $i \leq k$. Claramente, $m_i g \in H$. Por otra parte, $m_i g = m_i g_i \neq e_G$ porque el orden de g_i es igual a $p_i^{n_i}$. Así,

$$e_G \neq m_i g_i \in \langle g_i\rangle \cap H,$$

una contradicción con la elección de g_i. □

La segunda parte de la condición (2) del Lema III.26 puede parecer muy artificial. Sin embargo, para grupos abelianos de orden finito esta condición es inevitable como lo muestra el siguiente ejemplo:

EJEMPLO III.27. *Sean p, q números primos distintos. Considere un grupo A numerable de orden p con la topología discreta y un grupo $\aleph_0$-acotado B de orden q y $|B| = \mathfrak{c}$ (podemos tomar como B el grupo $\mathbb{Z}_q^\omega$ con la topología producto donde $\mathbb{Z}_q$ es el grupo cíclico discreto de cardinalidad q). Entonces el grupo $G = A \times B$ es $\aleph_0$-acotado al ser el producto de dos grupos $\aleph_0$-acotados (Lema* I.8*). Sin embargo, si $g \in G$ es un elemento arbitrario distinto de e_G, digamos $g = (a, b)$, entonces el grupo cíclico $\langle g\rangle$ generado por g contiene un elemento $qg = (qa, e_B)$ distinto de e_G que pertenece al subgrupo numerable $H = A \times \{e_B\}$ de G. Esto significa que la conclusión del Lema* III.26 *no es válida para este G.*

Para p-grupos conexos se puede debilitar los requerimientos en el Lema III.26 como nos instruye el siguiente corolario:

COROLARIO III.28. *Sea G un p-grupo conexo $\aleph_0$-acotado no trivial y H un subgrupo de G, $|H| < \mathfrak{c}$. Entonces todo subconjunto abierto no vacío U de G contiene un elemento g tal que $\{\langle g\rangle, H\}$ es una familia independiente.*

DEMOSTRACIÓN. Como G es conexo y Tikhonov, $|G| \geq \mathfrak{c}$. Note que si el grupo $p^n G$ es no trivial para alguna $n \in \mathbb{N}^+$, entonces $|p^n G| \geq \mathfrak{c}$, porque $p^n G$ es conexo al ser la imagen del grupo G respecto al homomorfismo continuo $\psi_n \colon G \to G$, definido por $\psi_n(x) = p^n x$, $x \in G$. Terminamos la demostración si aplicamos el Lema III.26. □

Es tiempo de plantear un problema

PROBLEMA III.29. *Suponga que G es un grupo $\aleph_0$-acotado abeliano conexo y H es un subgrupo de G, $|H| < \mathfrak{c}$. ¿Es cierto que todo conjunto abierto no vacío U de G contiene un elemento g tal que $\{\langle g\rangle, H\}$ es una familia independiente?*

En adelante denotaremos por $\mathbb{A}(I)$ el grupo abeliano libre topológico sobre el intervalo $[0, 1]$ en el sentido de Graev, con $0 \in I$ como la identidad de $\mathbb{A}(I)$. El grupo $\mathbb{A}(I)$ es σ-compacto, conexo y separable (véase Capítulo 2, sección 5) y por lo tanto, $w(\mathbb{A}(I)) \leq \mathfrak{c}$.

LEMA III.30. *El subgrupo $n\mathbb{A}(I) = \{ng : g \in \mathbb{A}(I)\}$ es cerrado en $\mathbb{A}(I)$ para toda $n \in \mathbb{N}^+$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $n \in \mathbb{N}^+$ arbitrario pero fijo. Por el Teorema 4 de [Gr], un subconjunto $P \subseteq \mathbb{A}(I)$ es cerrado en $\mathbb{A}(I)$ si y sólo si $P \cap \mathbb{A}(I)_k$ es cerrado para cada $k \in \mathbb{N}^+$, donde $\mathbb{A}(I)_k$ se definió en el Capítulo 2, sección 5. Por lo tanto, es suficiente mostrar que $K \cap \mathbb{A}(I)_k$ es cerrado en $\mathbb{A}(I)$ para cada $k \in \mathbb{N}^+$ donde $K = n\mathbb{A}(I)$. Note que $\mathbb{A}(I)_k$ es compacto al ser la imagen continua del compacto $(I \oplus -I)^k$. Así, $n\mathbb{A}(I)_k$ también es compacto y faltaría probar la igualdad

$$\text{(A)} \qquad K \cap \mathbb{A}(I)_k = n\mathbb{A}(I)_k \cap \mathbb{A}(I)_k, \quad k \in \mathbb{N}^+.$$

Es claro que $n\mathbb{A}(I)_k \cap \mathbb{A}(I)_k \subseteq n\mathbb{A}(I) \cap \mathbb{A}(I)_k$. Probaremos la inclusión inversa. Para un elemento $g \in \mathbb{A}(I)$, sea $l(g)$ la longitud de g. Como el grupo $\mathbb{A}(I)$ es abeliano, tenemos $l(kg) = kl(g)$ para toda $g \in \mathbb{A}(I)$ y $k \in \mathbb{N}^+$. Considere un elemento $g \in K \cap \mathbb{A}(I)_k$ arbitrario. Entonces $l(g) \leq k$ y $g = nh$ para algún elemento $h \in \mathbb{A}(I)$. Así, $k \geq l(g) = l(nh) = nl(h)$. Lo último implica que $l(h) \leq k$, de lo que se sigue $g \in n\mathbb{A}(I)_k \cap \mathbb{A}(I)_k$. De aquí se desprende A y el lema. □

LEMA III.31. *El grupo cociente $A_p = \mathbb{A}(I)/p\mathbb{A}(I)$ es separable, conexo y todos sus elementos tienen orden p para todo entero $p \geq 2$.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Lema III.30, el grupo $p\mathbb{A}(I)$ es cerrado en $\mathbb{A}(I)$, y de aquí el grupo A_p es Hausdorff. El homomorfismo cociente $\pi \colon \mathbb{A}(I) \to A_p$ es continuo, por lo que la conclusión se sigue del hecho de que $\mathbb{A}(I)$ es separable y conexo. □

El siguiente es un resultado bien conocido:

LEMA III.32 ([Po]). *Si $\pi \colon G \to H$ es un homomorfismo abierto y continuo de un grupo G sobre un grupo conexo H y el núcleo de π es conexo, entonces G es conexo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea N el núcleo de π. Por lo tanto, N es conexo y cerrado. Entonces cada elemento $g + N$ es también conexo. Si G no es conexo, entonces existe una separación de G de la forma $G = U \cup V, U \cap V = \emptyset$, U, V abiertos no vacíos en G. Por consiguiente, para todo $g \in G$ tenemos que $g + N \subseteq U$ (o $g + N \subseteq V$), así que $\pi(U) \cup \pi(V)$ sería una separación de H. □

LEMA III.33. *Sean G un grupo topológico conexo con topología τ y H un subgrupo cerrado y conexo de G. Sea $G^* = G/H$ y $\pi\colon G \to G^*$ la función canónica. Suponga que τ_c es la topología cociente en G^* y que podemos introducir en G^* una topología τ_f de grupo conexa estrictamente más fina que la original τ_c.*

Definimos una topología τ_n sobre G con una base dada por

$$\mathcal{B} = \{V \cap \pi^{-1}(V_f) : V \in \tau, V_f \in \tau_f\}.$$

Entonces (G, τ_n) es un grupo topológico Hausdorff y conexo. En particular, τ_n es una topología estrictamente más fina que la original.

DEMOSTRACIÓN. Afirmación 1. La función $\pi\colon (G, \tau_n) \to (G^*, \tau_f)$ es abierta.

Sea $U \in \tau_n$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que U es un miembro de la base $\mathcal{B}$, es decir, de la forma $U = V \cap \pi^{-1}(V_f)$, donde $V \in \tau$ y $V_f \in \tau_f$. Si aplicamos π obtenemos

$$\pi(U) = \pi(V \cap \pi^{-1}(V_f)) = \pi(V) \cap V_f.$$

El conjunto $\pi(V)$ es abierto en τ_f pues $\pi(V) \in \tau_c \subseteq \tau_f$. Por lo tanto, $\pi(U) \in \tau_f$.

Afirmación 2. La topología que hereda H de (G, τ_n) es igual a la que hereda de (G, τ).

Sea V un τ_n-abierto en H. Entonces $V = H \cap W$, con $W \in \tau_n$. Como $\mathcal{B}$ es la base para τ_n podemos suponer que $W = U \cap \pi^{-1}(U_f)$, donde $U \in \tau$ y $U_f \in \tau_f$. Si la identidad e^* de G^* pertenece a U_f, entonces $V = W \cap H = H \cap U$ que es τ-abierto. Si $e^* \notin U_f$, tenemos $V = H \cap W = \emptyset \in \tau$.

Ahora probaremos que (G, τ_n) es conexo.

Si $\pi\colon (G, \tau_n) \to (G/H, \tau_f)$, entonces el núcleo H de π es conexo (afirmación 2), así como la imagen $(G/H, \tau_f)$. Dado que π es abierto, una aplicación del lema III.32 muestra que (G, τ_n) es conexo. □

TEOREMA III.34. *Sea G un grupo topológico abeliano cuyos elementos distintos de la identidad tienen orden primo p tal que $c(G) \leq \aleph_0$ y $w(G) \leq \mathfrak{c}$. Si $|G| > 1$, entonces podemos introducir en G una topología de grupo estrictamente más fina que la original aún conexa.*

DEMOSTRACIÓN. La idea de la prueba es muy cercana a la del Teorema III.19. Obviamente debemos introducir varias modificaciones para permitir grupos de torsión. Construiremos un homomorfismo discontinuo h de G al grupo A_p considerado en el Lema III.31 con el propósito de que el subgrupo

$$D = \{(x, h(x) : x \in G\}$$

de $P = G \times A_p$ con la topología inducida, sea denso y conexo en P. Al ser separable, el peso de A_p no es mayor que $\mathfrak{c}$, por lo que todo subgrupo denso K de P satisface las desigualdades $w(K) \leq \mathfrak{c}$ y $c(K) \leq \aleph_0$.

La restricción a D de la proyección $pr\colon P \to G$ es un isomorfismo continuo de D sobre G, pero $\pi = p \restriction D$ no es un homeomorfismo, pues en caso contrario h sería continuo.

Considere la topología de grupo en G más débil que haga continuo al homomorfismo $\pi^{-1}\colon G \to D$. Esta topología es estrictamente más fina, conexa y de grupo en G, además satisface las mismas restricciones cardinales que la original.

Construyamos el homomorfismo $h\colon G \to A_p$. Denote por $\mathcal{F}$ la familia de todos los subconjuntos cerrados del producto P con las siguientes características: $F = \overline{O_1} \cap \overline{O_2}$ para ciertos abiertos O_1, O_2 de P (no necesariamente distintos) e $\mathrm{Int}(pr(F)) \neq \emptyset$. El Teorema III.3 implica que $|\mathcal{F}| \leq \mathfrak{c}$. Sea $\{F_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ una enumeración en la que aparece $\mathfrak{c}$ veces cada $F \in \mathcal{F}$. Suponga que hemos construido un conjunto $X_\beta = \{x_\gamma : \gamma < \beta\} \subseteq G$ para alguna $\beta < \mathfrak{c}$. Denotemos con H_β el subgrupo de G generado por X_β, $H_\beta = \langle X_\beta \rangle$. Tenemos $c(G) \leq \aleph_0$ y por lo tanto es $\aleph_0$-acotado (Lema I.11). Sabemos que G tiene cardinalidad al menos $\mathfrak{c}$. Si aplicamos el Corolario III.28 podemos elegir un punto $x_\beta \in \mathrm{Int}(pr(F))$ de tal forma que $\{\langle x_\beta \rangle, H_\beta\}$ es una familia independiente.

Repetimos este proceso para toda $\beta < \mathfrak{c}$. Esto nos da un conjnunto $X = \{x_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$. De nuestra construcción se desprende que $|X \cap pr(F)| = \mathfrak{c}$ para cada $F \in \mathcal{F}$, así que podemos definir una función $f\colon X \to A_p$ tal que $F \cap Gr(f) \neq \emptyset$ para toda $F \in \mathcal{F}$, donde $Gr(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ es la gráfica de f en P. Note que el conjunto $Gr(f)$ es denso en P: el conjunto $F_U = \overline{U} \cap \overline{U} = \overline{U}$ pertenece a $\mathcal{F}$ para cada abierto no vacío U de P y $Gr(f)$ intersecta a cada uno de los conjuntos F_U. Ya que el espacio P es regular, concluimos que $Gr(f)$ es denso en P.

Por la independencia del conjunto $\{\langle x_\beta \rangle : \beta < \mathfrak{c}\}$, f se extiende a un homomorfismo $\hat{f}\colon \langle X \rangle \to A_p$. Aplicamos la Proposición III.14 y extendemos $\hat{f}$ a un homomorfismo $h\colon G \to A_p$. Considere el grupo D definido al principio de la demostración

$$D = \{(x, h(x)) : x \in G\} \subseteq P.$$

El grupo D contiene al conjunto $Gr(f)$, y por lo tanto es denso en P. La conexidad de D se sigue del Teorema III.1.

En resumen, D es denso, conexo, $w(D) \leq \mathfrak{c}$ y $c(D) \leq \aleph_0$. Ahora tenemos la oportunidad de introducir una topología de grupo conexa estrictamente más fina en G utilizando el epimorfismo $pr \restriction D\colon D \to G$, lo que completa la demostración. □

DEFINICIÓN III.35. Sea G un grupos abeliano. Definimos *el exponente* de G como sigue: si para todo $n \in \mathbb{N}^+$ existe un elemento $g \in G$ tal que $ng \neq e_G$, entonces el exponente de G es infinito. Si existe $M \in \mathbb{N}^+$ tal que el M es el menor número con la propiedad de que el orden de todo elemento de G es menor o igual que M, entonces el exponente de G es M.

TEOREMA III.36. *Sea G un grupo abeliano conexo de exponente acotado. Si G satisface $w(G) \leq \mathfrak{c}$ y $c(G) \leq \aleph_0$, entonces G admite una topología de grupo conexa estrictamente más fina con las mismas restricciones cardinales.*

DEMOSTRACIÓN. Sea n el exponente de G. Si n es primo, aplicamos el Teorema III.34 y terminamos. Si no es así, existe un divisor primo p de n con $p \neq n$. Hacemos $m = n/p$ y consideramos el homomorfismo $\psi\colon G \longrightarrow G$ definido por $\psi(g) = mg$ para cada $g \in G$. Es claro que ψ es continuo y el subgrupo $\psi(G)$ de G es conexo y está contenido en $K = \{x \in G : px = e_G\}$. El grupo K es cerrado; por lo tanto, la clausura de $\psi(G)$ en G, digamos H, es un subgrupo conexo de K.

Sea $G^* = G/H$. De la definición de G^* se sigue que el orden de cada elemento no cero de G^* es p y $w(G^*) \leq \mathfrak{c}$, $c(G^*) \leq \aleph_0$. Aplicamos el Teorema III.34 para encontrar una topología de grupo conexa τ_f para G^* estrictamente más fina que la topología cociente τ^* y que satisface las mismas restricciones cardinales. Además por medio de la construcción en el Teorema III.34, identificamos (G^*, τ) con un subgrupo denso del producto $P = G^* \times A_p$ donde A_p es el subgrupo conexo y separable de orden p (véase III.31). Formalmente: existe un homomorfismo discontinuo $h\colon G^* \longrightarrow A_p$ que transforma G^* en un subgrupo denso y conexo $D = \{(x, h(x)) : x \in G^*\}$ del producto P.

Sea $\pi\colon G \longrightarrow G^*$ el homomorfismo canónico cociente. El Lema III.33 implica que la topología de grupo τ_n para G con base

$$\mathcal{B} = \{V \cap \pi^{-1}(V_f) : V \in \tau, V_f \in \tau_f\}$$

es conexa y estrictamente más fina que la topología original τ de G. Falta probar que $w(G, \tau_n) \leq \mathfrak{c}$ y $c(G, \tau_n) \leq \aleph_0$. Sea id_G el isomorfismo identidad de G sobre sí mismo. Denote por ϕ el producto diagonal de los homomorfismos id_G y $h_1 = h \circ \pi$, $\phi\colon G \longrightarrow P$, y definimos $L = \phi(G)$. Entonces ϕ es un isomorfismo topológico entre (G, τ_n) y L. El grupo A_p es separable, y en consecuencia $w(A_p)$ no es mayor que $\mathfrak{c}$. Concluimos que $w(L) \leq w(P) \leq \mathfrak{c}$. Considere el homomorfismo $j = \pi \times id_p$ de P sobre $G^* \times A_p$ donde id_p es el isomorfismo identidad de A_p Es claro que j es abierto al ser el producto de dos homomorfismos abiertos (aquí G y G^* portan sus topologías originales). Sea σ el producto diagonal de los homomorfismos π y $\pi \circ h$, $\sigma\colon G \longrightarrow G^* \times A_p$. Entonces $h \circ \phi = j$, $\psi(G) = D$ y fácilmente se verifica que $j^{-1}(D) = L$. Como D es denso en P y j es un homomorfismo abierto, la última igualdad implica que L es denso en P. Con el uso del Corolario III.7 obtenemos $c(L) \leq \aleph_0$. □

Podríamos utilizar la misma demostración del Teorema III.34 para probar el Teorema III.36. Sin embargo, resulta más ilustrativa la demostración desarrollada.

Ahora procuraremos refinar topologías conexas de grupo y separables y conservar las restricciones cardinales.

Requerimos un resultado preliminar.

LEMA III.37. *Sea G un grupo abeliano no numerable y separable de exponente primo p. Existe un subgrupo numerable K de G y un homomorfismo discontinuo $q\colon K \to A_p$ tal que el grupo $\{(x, q(x)) : x \in K\}$ es denso en el producto $P = G \times A_p$.*

DEMOSTRACIÓN. La prueba es muy cercana a la del Lema III.22: sea S un subconjunto denso y numerable de G y $L = \langle S \rangle$ el subgrupo de G generado por S. Denote por π el homomorfismo canónico cociente de G sobre G/L. El grupo G/L y no numerable, así que podemos elegir un subconjunto infinito $Y = \{y_n : n \in \mathbb{N}^+\}$ de elementos distintos de la identidad de G/L que forma una familia independiente (módulo p).

Sea $\{t_n : n \in \mathbb{N}^+\}$ un subconjunto denso y numerable de A_p. Defina una función $f\colon Y \to A_p$ por $f(y_n) = t_n$ para cada $n \in \mathbb{N}^+$. Por la elección de Y se sigue que f se extiende a un homomorfismo $g\colon K_0 \to A_p$, donde $K_0 = \langle Y \rangle$. Definimos $K = \pi^{-1}(K_0)$ y $q = g \circ (\pi \restriction K)$. Obviamente K es un subgrupo de G y $|K| = |K_0| \cdot |L| = \aleph_0$. Falta probar que el conjunto $\{(x, q(x)) : x \in K\}$ es denso en P.

Sea $O = U \times V$ un abierto no vacío de P. Existe un elemento $t_n \in V$. Elija $a \in K$ con $\pi(a) = y_n$. Entonces $q^{-1}(t_n) \supseteq \pi^{-1}(y_n) = a + L$. El conjunto $a + L$ es denso en G, por lo que existe $x \in (a + L) \cap U$. En consecuencia, $x \in K$ y $(x, q(x)) = (x, t_n) \in O$. □

TEOREMA III.38. *Sea G un grupo conexo abeliano separable de exponente finito. Entonces G admite una topología de grupo conexa y separable estrictamente más fina que la original.*

DEMOSTRACIÓN. Dividimos la prueba en dos partes:
(a) El grupo G es de exponente primo p.

Aplicamos el Lema III.37 para definir un subgrupo numerable K de G y un homomorfismo $q\colon K \to A_p$ tal que el subgrupo $H = \{(x, q(x)) : x \in K\}$ de $P = G \times A_p$ sea denso en P. Como $c(G) \leq d(G) \leq \aleph_0$ y $w(G) \leq 2^{d(G)} = \mathfrak{c}$, podemos aplicar la construcción usada en la demostración del Teorema III.34 y definir un homomorfismo $h\colon G \to A_p$ que satisface las siguientes condiciones:

(1) $h \restriction K = q$;
(2) el subgrupo $D = \{(x, h(x)) : x \in G\}$ de P intersecta a todo subconjunto cerrado no vacío F de P de la forma $F = \overline{U} \cap \overline{V}$ para abiertos U, V de P y que satisfaga $\mathrm{Int}((pr(F)) \neq \emptyset$, donde $pr\colon P \to G$ es la proyección.

Note que K es un sumando directo de G (Teorema 4.3.8 de [Robin]); de aquí se desprende fácilmente que la condición (1) se satisface con la construcción del homomorfismo h. De (1) se sigue que D contiene un subconjunto denso numerable de H, y de aquí se sigue que es separable. De (2) y el Teorema III.1 se sigue que D es conexo. Como la gráfica D del homomorfismo h es denso en P, concluimos que h es discontinuo. Por lo tanto, la topología de grupo

$$t = \{pr(O) : O \text{ es abierto en } D\}$$

en G es estrictamente más fina que la topología original de G. Claramente, el grupo (G, t) es conexo y separable.

(b) El exponente de n de G no es un primo.

Elija un divisor primo p de n y sea $m = n/p$. Obviamente, el subgrupo mG de G es conexo y separable al ser la imagen continua de G respecto del homomorfismo $\psi \colon G \to G$, $\psi(g) = mg$. Sea H la clausura de mG en G. Entonces H es también conexa y separable. Para probarlo seguimos el mismo razonamiento que en la prueba del Teorema III.36: hacemos $K = \{g \in G : pg = e_G\}$. El grupo K es cerrado en G, y en consecuencia $H \subseteq K$. En particular, $H \neq G$. El grupo cociente $G^* = G/H$ es conexo, separable y de exponente p. La afirmación que se probó en (a) nos permite encontrar una topología de grupo τ_f separable conexa para G^* que es estrictamente más fina que la topología cociente τ^*.

Usamos el Lema III.33 para definir una topología de grupo conexa τ_n para G con base

$$\mathcal{B} = \{V \cap \pi^{-1}(V_f) : V \in \tau, V_f \in \tau_f\},$$

donde $\pi \colon G \to G^*$ es el homomorfismo canónico cociente y τ es la topología original de G. Es claro que τ_n es estrictamente más fina que τ, y faltaría probar que el grupo (G, τ_n) es separable. Para esto, note que las topologías que H hereda de (G, τ) y (G, τ_n) coinciden (Lema III.33). Por lo tanto, H es un subgrupo separable de (G, τ_n). El grupo $G^* = (G/H, \tau_f)$ también es separable por la elección de τ_f. En resumen, el grupo (G, τ_n) también es separable. $\square$

De los Teoremas anteriores surgen dos problemas:

PROBLEMA III.39. *Sea G un grupo conexo segundo numerable abeliano de torsión y no trivial. ¿Admite G una topología de grupo conexa estrictamente más fina? Si la respuesta es afirmativa, ¿se puede elegir esta nueva topología segundo numerable?*

PROBLEMA III.40. *Si G es un grupo separable conexo de torsión y $|G| > 1$, ¿admite G una topología de grupo conexa (separable) estrictamente más fina?*

5. Aplicaciones

Como una aplicación de los resultados del apartado anterior, mostraremos que toda topología conexa de un grupo compacto se puede refinar. Antes requerimos dos resultados importantes. El primero es una variante del Teorema 7.4 de [CoRo2].

TEOREMA III.41. *Sea G un grupo de torsión con la propiedad de Baire y conexo. Entonces G tiene exponente acotado.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $G(n) = \{x \in G : x^n = e_G\}$ para $n < \omega$. Note que cada $G(n)$ es un subgrupo cerrado de G y que $G = \cup_{n<\omega} G(n)$. Por la propiedad de Baire, alguno de los $G(n)$, digamos $G(m)$, tiene interior no vacío y, por lo tanto, es abierto. Como G es conexo, $G = G(m)$. □

COROLARIO III.42. *Todo grupo G de torsión, conexo y compacto o seudocompacto tiene exponente acotado.*

DEMOSTRACIÓN. Todo espacio compacto o seudocompacto tiene la propiedad de Baire. □

Note que si tenemos un grupo G con la propiedad de Baire, conexo, con $tG \neq G$, y tal que el subgrupo de torsión tG no es denso, aún así, no podemos asegurar que $G/\overline{tG}$ sea libre de torsión y, por lo tanto, no podemos aplicar los métodos de las secciones previas para refinar la topología.

En [Hu] se demuestra que si G es compacto, entonces $c(G) \leq \aleph_0$. Sin embargo, Tkachenko en [Tk] ha probado un hecho mucho más general: todo grupo G generado por un subespacio compacto o todo grupo G σ-compacto cumple con $c(G) \leq \aleph_0$.

TEOREMA III.43. *Sea G un grupo conexo de torsión tal que G es seudocompacto y $w(G) \leq \mathfrak{c}$, o G es separable. Entonces G admite una topología de grupo conexa estrictamente más fina y con las mismas restricciones cardinales.*

DEMOSTRACIÓN. Observe que $c(G) \leq \aleph_0$ en ambos casos, pues $c(G) \leq d(G)$. Si G es seudocompacto, entonces es un subgrupo denso de un grupo compacto $\overline{G}$; el grupo $\overline{G}$ tiene celularidad numerable y por lo tanto, también G cumple con $c(G) = \aleph_0$. El grupo G tiene exponente acotado. Por lo tanto, podemos aplicar el Teorema III.36 o el Teorema III.38, según corresponda, y obtener la nueva topología con las restricciones cardinales requeridas. □

COROLARIO III.44. *Sea G un grupo compacto y conexo tal que $w(G) \leq \mathfrak{c}$. Entonces G admite una topología de grupo conexa estrictamente más fina con la misma restriccion cardinal.*

Dado que hay varios resultados sobre la refinación de topologías de grupo seudocompactas (véase [CoRo1], [CoRe1], [CoRo2]) y puesto que nuestros resultados permiten refinar ciertas topologías de grupo conexas, es natural la siguiente pregunta:

PROBLEMA III.45. *Sea G un grupo conexo, separable, seudocompacto o compacto. ¿Admite G una topología de grupo estrictamente más fina conexa y seudocompacta?*

Notación

Para comodidad del lector, presentamos la notación usada a lo largo de la obra.

$\mathbb{N}$	Los números naturales
$\mathbb{N}^+$	Los números naturales menos el cero
$\mathbb{R}$	Los números reales
$\mathbb{Q}$	Los números racionales
$\mathbb{C}$	Los números complejos
$\mathbb{Z}$	Los números enteros
$\mathbb{T}$	El grupo del círculo
$\mathbb{Q}$	Los números racionales
$w(X)$	El peso de X
$d(X)$	La densidad de X
$c(X)$	La celularidad de X
$\chi(X)$	El carácter de X
$\Delta(X)$	El grado de dispersión de X
$\pi w(X)$	El π-peso de X
$t(X)$	La estrechez de X
$\overline{F}$	La cerradura del conjunto F
$\mathrm{Int}(O)$	El interior del conjunto O
$\|A\|$	La cardinalidad del conjunto A
$[A]^\kappa$	Conjunto de subconjuntos de A de cardinalidad κ.
$\mathfrak{c}$	El cardinal $2^{\aleph_0}$
ω	El primer ordinal infinito
κ^+	El cardinal sucesor de κ
$[A]^\kappa$	El conjunto $\{B \subseteq A : \|B\| = \kappa\}$.

$cf(\kappa)$	La cofinalidad del cardinal κ
$\langle D\rangle$	El subgrupo generado por el subconjunto D
ng	$g + \cdots + g$ con n sumandos, donde g es un elemento de un grupo abeliano
g^n	$g \cdots g$ con n factores, donde g es un elemento de un grupo
$RC(X)$	La familia de subconjuntos regularmente cerrados de X
$RO(X)$	La familia de subconjuntos regularmente abiertos de X
tG	Subgrupo de torsión de un grupo G.
$X^{(\kappa)}$	El espacio producto X con la topología κ-producto.
$\Sigma(p)$	El Σ-producto con centro en p.

Bibliografía

[ATTW] O. Alas, M. Tkačenko, V. Tkachuk, R. Wilson, *Connectedness and local connectedness of topological groups and extensions*, Aceptado en Fund. Math.

[An] D. R. Anderson, *On connected irresolvable Hausdorff spaces*, Proc. AMS **16**(1965), 463–466.

[Ar1] A. Arkhangel'skiĭ, *On biradial topological spaces and groups*, Top. Appl. **36**(1990), 173–180.

[Ar2] A. Arkhangel'skiĭ, *Mappings and spaces*, Russ. Math. Surveys **21**(1966), 115–162.

[Ar3] A. Arkhangel'skiĭ, *Classes of topological groups*, Russian Math. Surveys **36**(1981), 151–174.

[Ar4] A. Arkhangel'skiĭ, *On countably compact and initially ω-compact topological spaces*, Math. Jap. **40**(1994), 39–53.

[Ar5] A. Arkhangel'skiĭ, *Structure and clasification of topological spaces and cardinal invariants*, Russ. Math. Surv. **33**(1978)33–96.

[ArBe] A. Arkhangel'skiĭ, A. Bella, *The product of biradial compact spaces*, Top. Appl. **45**(1992), 157–162.

[CePe] J. Ceder, T. Pearson, *On product of Maximally resolvable Spaces*, Pacific J. Math. **22**(1967), 31–45.

[Ce] J. Ceder, *On maximally resolvable Spaces*, Fund. Math. **55**(1964), 87–93.

[CoF] W. W. Comfort, L. Feng, *The union of resolvable spaces is resolvable*, Math. Japonica **38**(1993), 413–414.

[Co] W. W. Comfort, *Topological Groups*, en Handbook of Set-Theoretic Topology, North-Holland, 1984.

[CovM] W. W. Comfort, J. Van Mill, *Groups with only resolvable group topologies*, Proc. AMS **120**(1994), 687-696.

[CoG] W. W. Comfort, S. García Ferreira, *Artículo en preparación*, 1995.

[CoRo1] W. W. Comfort, L. C. Robertson, *Proper pseudocompact extensions of compact Abelian group topologies*, Proc. AMS **86**(1982), 173–178.

[CoRe1] W. W. Comfort, D. Remus, *Pseudocompact refinements of compact group topologies*, Math. Zeit. **215**(1994), 337–346.

[CoRe2] W. W. Comfort, D. Remus, *Compact groups of Ulam-measurable cardinality: partial converses to a theorem of Arkhangel'skiĭ and Varopoulos*, Math. Jap. **39**(1994), 203–210.

[CoMasZ] W. W. Comfort, O. Masaveu, H. Zhou *Resolvability in topology and in topological groups*, Aceptado en Proc. Ninth (June 1993) Summer Topology Conference, Ann. New York Acad. Sci.

[CoRo2] W. W. Comfort, L. Robertson *Extremal phenomena in certain classes of totally bounded groups*, Diss. Math. **272**(1988), 1–42.

[De] K. Devlin, The Joy of the sets, Springer–Verlag, 1994.

[E1] A. El'kin, *Ultrafilters and decomposable spaces*, Moscow Univ. Math. Bull **24**,5(1969), 51–56.

[E2] A. El'kin, *On the maximal resolvability of products of topological spaces*, Soviet Math. Dokl. **10**(1969), 659–662.

[En] R. Engelking, General Topology, Heldermann Verlag, Berlin 1989.

[FMas] L. Feng, O. Masaveu, *Exactly n-resolvable spaces and ω-resolvability*, Preprint 1995.

[GMT] A. García–Máynez C., A. Tamariz M., Topología General, Porrúa, México, 1988.

[G] I. Guran, *On topological groups close to being Lindelöf*, Soviet Math. Dokl. **23**(1981), 173–175.

[Gr] M. Graev, *Free Topological Groups*, American Math. Soc. Traslations (1951) No. 23.

[HR] E. Hewitt, K. Ross, Abstract Harmonic Analysis I, Springer-Verlag 1979.

[H] E. Hewitt, *A problem of Set-Theoretic Topology*, Duke Math. J.**10** (1943), 309–333.

[Ho] R. Hodel, *Cardinal Functions*, en Handbook of Set-Theoretic Topology, North-Holland, 1984.

[Hu] M. Hušek, *Productivity of properties of topological groups*, Top. App. 44(1992), 189–196.

[I] A. Illanes, *Finite and ω resolvable spaces*, aceptado en Proceed. AMS.

[J] I. Juhasz, Cardinal Functions–ten years later, Math. Centrum Amsterdam, 1981.

[K1] M. Katětov, *Sobre espacios topológicos que no contienen subespacios ajenos y densos (en Ruso)*, Mat. Sbornik 21(1947), 3–12.

[K2] M. Katětov, *On nearly discrete Space*, Cas. Pest. Matem. 75(1950), 69–78.

[Ko] K. Kočinac, *Biquotient images of ordered spaces*, Publ. Inst. Math. **31** (1986), 173–177.

[Ku] K. Kunen, Set Theory: An Introduction to Independence Proofs, North-Holland, Amsterdam, 1980.

[L] A. Louveau, *Sur un article de S. Sirota*, Bull. Sci. Math.(2)96(1972), 3–7.

[Ma] A. Markov *On free topological groups*, AMS translations 23(1951).

[Mal1] V. Malykhin, *On the resolvability of the product of two spaces and a problem of Katětov*, Soviet Math. Dok. 16(1975), 725–729.

[Mal2] V. Malykhin, *Extremally disconnected and similar groups*, Soviet Math. Dok. 16(1975), 21–25.

[Mal3] V. Malykhin, *On resolvable and maximal spaces*, Soviet Math. Dok. 15(1974), 1452–1457.

[Mal4] V. Malykhin, *On extremally disconnected and similar groups*, Russian Math. Surv. 34(1979), 67–76.

[Mas] O. Masaveau, Dense subsets of some topological groups, Ph. D. Thesis, Wesleyan University, 1994.

[Mi] E. Michael, *A quintuple quotient quest*, Gen. Top. Appl. 2(1972), 91–138.

[P] K. Padmavally, *An example of a connected irresolvable Hausdorff space*, Duke Math. J. 20(1953), 513–520.

[Py] E. Pytkeev, *On maximally resolvable spaces*, Ukranian Math. J. 41, 3 (1989), 334-339

[Po] L. S. Pontrjagin, Topologische gruppen Teil I, B. G. Teubner, Leipzig, 1957.

[Robin] D. Robinson, A course in the theory of Groups, Springer-Verlag, 1993.

[Tk] M. Tkachenko, *Souslin property on free topological groups in bicompacta*, Math. Notes 34(1983), 601–607.

[Tk2] M. Tkachenko, *On topologies on free groups*, Czech. Math. J. **34**(109)(1984)541–551.

[TkV1] M. Tkachenko, L. M. Villegas–Silva, *Refining connected topological group topologies on abelian torsion-free groups*, Aceptado en J. Pure App. Algebra.

[TkV2] M. Tkachenko, L. M. Villegas–Silva, *Refining connected topological group topologies on abelian torsion groups*, Aceptado en General Top. App.

[V1] L. M. Villegas–Silva, *On resolvable spaces and groups*, Comm. Math. Math. Univ. Carolinae. **36**,3(1995), 579–584.

[V2] L. M. Villegas–Silva, *On the Decomposition of Topological Spaces in Families of Disjoint Dense Sets*, Propuesto para Publicación en Czech. Math. J.

[W] W. Weiss, *Versions of Martin's Axiom*, en *Handbook of Set-Theoretic Topology*, North-Holland, 1984.

Indice

σ-producto, 33, 34
τ-espacio, 20, 21, 26
π-base, 2
    local, 2
π-carácter, 2
π-peso, 2
p-grupo, 39, 44, 46

Axioma de Martin, vi, 8
Axioma de Martin(σ-centrado), 8

Base, 52
    canónica, 8
    local, 2, 24

Cadena, 20, 21
Calibre, 3, 38
Carácter, 1, 2
Cardinal
    sucesor, 1
    Ulam-medible, 36
Cardinalidad, 1, 7
Cardinalidad del continuo, 1, 24
Celularidad, 1, 6, 32, 37, 38, 42, 49, 50, 53
Clausura, 1, 16
Cofinalidad, 1, 9
Componente
    primaria, 39
Condición de cadena numerable (ccc), 38
Conjunto
    de generadores, 42
    linealmente ordenado, 8, 9, 24, 25
    parcialmente ordenado, 9
    potencia, 1
    regularmente abierto, 37
    regularmente cerrado, 37

Densidad, 1, 26, 27, 31, 32, 38, 40

Elemento
    de torsión, 38
    independiente, 40
Epimorfismo, 42

Espacio
    $C_p(X)$, 28
    σ-compacto, 53
    τ-birradial, 21, 26
    anidado, 21
    birradial, 21, 26
    bisecuencial, 20, 21, 26
    conexo, 36
    de Baire, 52, 53
    de Lindelöf, 2, 12, 27, 28
    denso en sí mismo, 11
    disperso, 17
    extremadamente disconexo, 16, 20
    Frechet-Urysohn, 20–22
    homogéneo, 12, 13, 15, 23, 24
    irresoluble, 11, 12, 14, 15, 19, 20, 24, 27
    k-resoluble, 11–13, 20, 22, 23, 26, 28, 33, 34
    Lindelöf, 27
    maximal, 15, 16, 18, 19, 24, 27
    maximal resoluble, 11, 12, 21, 22, 24–27, 29, 30, 32
    metrizable, 21, 35
    monotono normal, 21
    normal por colecciones, 21
    numerablemente compacto, 12, 36
    producto, 6, 8, 11–13, 33, 44, 51
    resoluble, 11, 12, 14, 19
    secuencial, 20
    separable, 38, 42–44, 47, 51, 52
    seudocompacto, 30, 35
Estrechez, 3, 22
Exponente, 49, 51–53
Extensión
    de homomorfismo, 39, 51

Familia
    celular, 1, 4
    centrada, 4, 14, 15
    independiente, 39–43, 45, 46, 49, 51
Filtro, 14

Gráfica, 49

Grado de dispersión, 1–3, 12, 22, 24–27
Grupo, 6
κ-acotado, 40, 44–47
σ-compacto, 5, 6
abeliano, 12, 35, 36, 39, 40, 42, 43, 46–48, 51
libre, 47
cíclico, 46
compacto, 35, 47, 52
con torsión, 36, 39, 42, 45, 49, 52, 53
conexo, 41–43, 47, 49, 51–53
de orden acotado, 47, 48, 51, 53
de orden finito, 46
de torsión, 38, 40, 42
del círculo, 1
del círculo, 38
divisible, 39
k-acotado, 5, 6, 12, 26, 27, 32
libre, 30–32
localmente seudocompacto, 12
puro, 39, 40, 43
seudocompacto, 35, 53
sin torsión, 36, 38, 40–43, 45
totalmente acotado, 29, 30

Hipótesis del continuo, vi, 19, 20

Interior, 1, 16

Lema de Zorn, 4
Longitud de palabra, 31, 32, 47

Número
de Lindelöf, 2
Números
enteros, 1
enteros positivos, 1
naturales, 1
reales, 1, 11, 36

Orden de un elemento, 38, 39

Peso, 1, 24, 37, 42, 47, 49, 50, 53
de red, 2
Precalibre, 3
débil, 3, 38
Prefiltro, 20, 21
Principio $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$, vi, 8, 12, 19
Proyección, 8, 36, 41, 49, 51
Punto
de acumulación, 21
de adherencia, 20

Rectángulo generalizado, 8
Red, 2, 24–26
local, 2, 24–26
Refinación de topología, 35, 41, 48, 50, 52, 53

Sistema ZFE, vi, 19, 20
Soporte, 8
Subgrupo, 5
generado, 1
Suma directa, 39, 51

Topología
k-producto, 33
Topología
de Tikhonov, 8
k-producto, 8, 33

Ultrafiltro, 14, 15, 17–19, 36