

El problema de Hill para
valores grandes de la
constante de Jacobi.

J. Delgado

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA



Casa abierta al tiempo

**El problema de Hill, para valores grandes de la constante de
Jacobi.**

T E S I S

Que para obtener el grado de

Doctor en Ciencias (Matemáticas)

P R E S E N T A:

Joaquín Delgado Fernández

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Ernesto A. Lacomba Zamora

Octubre 1991

Indice

1	Introducción General	1
1.1	Deducción de las ecuaciones del problema de Hill.	2
2	Explosión del origen.	6
2.1	Coordenadas tipo McGehee.	6
2.2	Órbitas transversales de expulsión-colisión.	10
2.3	Una sección transversal para el flujo.	14
2.4	Forma canónica de las ecuaciones de McGehee.	16
2.5	Cálculo del mapeo de Poincaré a orden ε	22
3	Regularización y normalización.	26
3.1	Regularización de Levi-Civita.	26
3.2	Coordenadas de Lissajous.	27
3.2.1	Relación con las coordenadas cartesianas.	30
3.3	Normalización	32
3.4	Cálculo de la forma normal a segundo orden.	33
3.5	Estudio del problema reducido	38
3.6	Continuación de las órbitas periódicas circulares	42
3.7	Reducción.	45
3.8	El sistema péndulo resorte	55

Lista de Figuras

1.1	(a) Problema restringido de 3 cuerpos. (b) Problema de Hill.	3
1.2	Regiones de Hill.	5
2.1	Flujo del problema de Kepler	8
2.2	Intersección de W_e^u (W_e^s) con el anillo A	10
2.3	Orbitas de expulsión-colisión.	10
2.4	La sección transversal S	16
3.1	Variables de Lissajous.	31
3.2	El elemento de área en S_L	49
3.3	Forma normal a orden 7, $L = .01$	53
3.4	Forma normal a orden 7, $L = .02$	53
3.5	Forma normal a orden 7, $L = .08$	53
3.6	Otra perspectiva, orden 7, $L = .08$	54
3.7	Forma normal a orden 7, $L = .1$	54
3.8	Sistema péndulo-resorte	56
3.9	Forma normal a primer orden del péndulo-resorte.	58
3.10	Descripción de la solución $ABA'B'$	58

“El problema de Hill
para valores grandes de la constante de Jacobi”

Tesis

que para obtener el grado de Doctor en Ciencias presenta

Joaquín Delgado Fernández

Director de tesis: Dr. Ernesto A. Lacomba Zamora

Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa

México, D.F. a 7 de octubre de 1991

Capítulo 1

Introducción General

En el presente trabajo estudiamos el llamado problema de Hill en Mecánica Celeste. Este es un modelo simplificado del problema restringido de 3 cuerpos propuesto inicialmente por el matemático norteamericano G.W. Hill alrededor de 1878 para describir el movimiento de la luna alrededor de la tierra bajo el efecto perturbativo del sol. Aunque el modelo es una simplificación de la situación real, el conocer con mucha precisión alguna o algunas órbitas periódicas de este modelo permite considerar los efectos perturbativos debidos a la inclinación de las órbitas, el efecto de la forma de la tierra, etc. Esta idea, que se remonta a Poincaré, se conoce como el *problema principal (main problem)* de la teoría lunar. En sus trabajos originales, por ejemplo, G. Hill calcula la familia de órbitas periódicas casi circulares, conocida ahora como la familia de Hill, dentro de la cual se sitúa el movimiento de la luna. Recientemente se han encontrado otras aplicaciones del modelo de Hill al movimiento de los satélites coorbitales de Saturno [Wal-Spi]. Desde un punto de vista matemático el problema consiste en resolver las ecuaciones de un sistema Hamiltoniano con dos grados de libertad con una integral de movimiento (la constante de Jacobi).

Algunos resultados numéricos sobre familias de órbitas periódicas pueden encontrarse en los trabajos de Henon [Hen] y de Perko [Per]. En cuanto a resultados analíticos se citan los siguientes: En [Kum1] M. Kummer estudia en un contexto general, perturbaciones de dos osciladores en el plano con iguales frecuencias usando la forma normal de Birkhoff. Muestra la existencia de soluciones periódicas que se originan a partir de soluciones circulares (directa y retrógrada) de la forma normal y da condiciones sobre su estabilidad en términos de ciertos coeficientes de la forma normal. En [Kum2] aplica sus resultados para mostrar la estabilidad de las órbitas periódicas de Hill, además de la existencia de toros invariantes para valores grandes de la constante de Jacobi. Aquí cabe remarcar que el modelo que considera Kummer en [Kum2] no es exactamente el que aparece en Szebehely [Sze] ya que aparecen como parámetros el recíproco de la constante de Jacobi y el cociente de masas de los primarios, lo cual le permite aplicar el teorema *twist* de Moser para concluir la estabilidad. En las notas de Seminario no publicadas de Moser, él mismo aplica la teoría de las formas normales de Birkhoff para probar la estabilidad de estas órbitas, aunque no parece clara la forma de aplicar el Teorema. En [L-L] E. Lacombe y J. Llibre prueban la existencia de al menos cuatro órbitas de expulsión-colisión en el problema restringido de 3 cuerpos y en el problema de Hill, que pueden verse como órbitas heteroclínicas usando la explosión del origen de McGehee, sin embargo en el último problema su demostración es numérica.

Lo anterior permite probar la no existencia de una clase de integrales llamadas integrales extendibles (i.e integrales primeras que pueden extenderse a la variedad de colisión tomando un valor constante sobre ella). A. Chenciner y J. Llibre en [Ch-Ll] prueban la existencia de toros invariantes agujerados en el problema restringido de 3 cuerpos, para valores pequeños del parámetro de masas.

En [Dep1], A. Deprit desarrolla la teoría transformadas de Lie que involucran un parámetro pequeño y en [Dep2] introduce coordenadas especiales de acción-ángulo para estudiar perturbaciones de osciladores lineales en el plano con iguales frecuencias (resonancia 1-1). Usando sus propios algoritmos y el procesador de Operaciones Algebraicas Mecanizadas (MAO) puede calcular formas normales a orden alto, y estudia truncaciones de varios órdenes del hamiltoniano de Toda, expandido alrededor de un punto de equilibrio estable, en resonancia 1-1.

El presente trabajo de tesis está dividido en dos partes. En la primera usamos la explosión de McGehee para estudiar el problema de Hill para valores grandes de la constante de Jacobi. Después de un reescalamiento de las coordenadas el problema se plantea como una perturbación de un problema de Kepler en estas coordenadas. Resolviendo las variaciones a lo largo de las variedades invariantes del problema de Kepler, probamos que existen exactamente 4 órbitas de expulsión-colisión, i.e. soluciones que salen de la singularidad y llegan a ella asintóticamente, que son transversales para valores suficientemente grandes de la constante de Jacobi. También se muestra el carácter canónico de una clase de ecuaciones del tipo de McGehee que incluyen a potenciales homogéneos y los problemas de Hill, Kepler giratorio y restringido de 3 cuerpos. Esto generaliza, para dos grados de libertad, los trabajos de E. Lacombe y A. Ibort [L-I], válidos sólo para potenciales homogéneos. Para el problema de Hill, calculamos el mapeo de Poincaré hasta un orden cuadrático en el parámetro pequeño y aplicamos el teorema *twist* de Moser para mostrar la existencia de toros invariantes.

En la segunda parte de este trabajo usamos la regularización de Levi-Civita para replantear el problema como una perturbación de dos osciladores en el plano con iguales frecuencias. Revisamos la construcción de las variables de Lissajous. Probamos que la eliminación de la anomalía elíptica en la forma normal permite ver la forma normal como un Hamiltoniano en un espacio fase reducido que es simplectomorfo a una esfera con su elemento de área usual. Desarrollamos el código en *MATHEMATICA* del algoritmo propuesto por Deprit, que nos permite calcular las formas normales hasta un orden modesto (≤ 5), debido principalmente a razones de memoria de máquina. El cálculo de la forma normal en el problema de Hill nos permite aplicar el teorema *twist* de Moser para mostrar la persistencia de toros invariantes en el problema de Hill para valores grandes de la constante de Jacobi. Finalmente aplicamos la teoría desarrollada a un ejemplo mecánico que se conoce en la literatura como el sistema péndulo-resorte o péndulo elástico cerca del punto de equilibrio estable, para valor del parámetro cercano a la integrabilidad en resonancia 1-1.

1.1 Deducción de las ecuaciones del problema de Hill.

El problema de Hill se obtiene como un caso límite del problema restringido de tres cuerpos como se muestra en la Figura 1.1.a. La partícula de masa cero se mueve tan cerca del

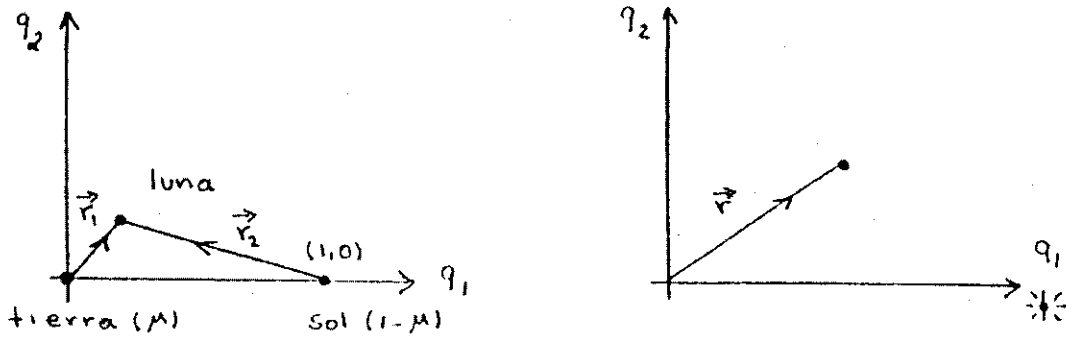


Figura 1.1: (a) Problema restringido de 3 cuerpos. (b) Problema de Hill.

primario de masa μ que el efecto gravitacional del primario de masa $1-\mu$ puede considerarse como una perturbación secundaria. Si se hace un reescalamiento de las coordenadas, la partícula de masa $1-\mu$ se manda al infinito. El modelo que resulta se conoce como el problema de Hill. Por razones de consistencia del trabajo, presentaremos la deducción del modelo de Hill debida a Broucke [Brou].

Las ecuaciones del problema restringido de 3 cuerpos desde el sistema giratorio mostrado en la Figura 1.1.a son

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 - 2\dot{q}_2 - q_1 + 1 - \mu &= -\frac{\mu q_1}{r_1^3} - \frac{(1-\mu)(q_1-1)}{r_2^3} \\ \ddot{q}_2 + 2\dot{q}_1 - q_2 &= -\frac{\mu q_2}{r_1^3} - \frac{(1-\mu)q_2}{r_2^3} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= (q_1, q_2) \\ \vec{r}_2 &= (q_1 - 1, q_2) \end{aligned}$$

Se supone que la partícula en el origen es la tierra y que la partícula situada a una distancia unitaria es el sol. En el movimiento real de la luna la cantidad r_1 es mucho más pequeña en relación a r_2 y la cantidad μ tiene un valor aproximado de 0.000003 que es muy pequeño. En estas condiciones podemos desarrollar en serie de Taylor la cantidad r_2 ,

$$\begin{aligned} r_2^2 &= (q_1 - 1)^2 + q_2^2 = 1 - 2q_1 + q_1^2 + q_2^2 \\ r_2^{-3} &= (1 - 2q_1 + q_1^2 + q_2^2)^{-3/2} \\ &= 1 - \frac{3}{2}(-2q_1 + q_1^2 + q_2^2) \simeq 1 + 3q_1 \end{aligned}$$

con lo que resulta el sistema aproximado

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 - 2\dot{q}_2 - q_1 + 1 - \mu &= -\frac{\mu q_1}{r_1^3} - (1-\mu)(q_1-1)(1+3q_1) \\ \ddot{q}_2 + 2\dot{q}_1 - q_2 &= -\frac{\mu q_2}{r_1^3} - (1-\mu)q_2(1+3q_1) \end{aligned}$$

Se supone además que los productos μq_1 y μq_2 son de orden mucho menor que q_1 y q_2 , de modo que pueden despreciarse. Entonces las ecuaciones se reducen a

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 - 2\dot{q}_2 - 3q_1 &= -\frac{\mu q_1}{r_1^3} \\ \ddot{q}_2 + 2\dot{q}_1 &= -\frac{\mu q_2}{r_1^3}.\end{aligned}$$

Ya que las cantidades q_1, q_2 son de un orden de magnitud muy pequeño conviene reescalar las coordenadas por un factor μ^α , lo cual equivale a hacer la sustitución $q_i \rightarrow \mu^\alpha q_i$ en las ecuaciones con lo que resulta

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 - 2\dot{q}_2 - 3q_1 &= -\mu^{2-3\alpha} \frac{q_1}{r_1^3} \\ \ddot{q}_2 + 2\dot{q}_1 &= -\mu^{2-3\alpha} \frac{q_2}{r_1^3}\end{aligned}$$

y si elegimos el factor como $\mu^{2/3}$, las ecuaciones que resultan se conocen como las ecuaciones del problema de Hill que son

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 - 2\dot{q}_2 - 3q_1 &= -\frac{q_1}{r_1^3} \\ \ddot{q}_2 + 2\dot{q}_1 &= -\frac{q_2}{r_1^3}.\end{aligned}$$

Ver Figura 1.1.b.

El Hamiltoniano de este problema es (véase [Sze])

$$H(q, p) = \frac{1}{2}|p|^2 + q_2 p_1 - q_1 p_2 - \frac{1}{|q|} - q_1^2 + \frac{1}{2}q_2^2 \quad (1.1)$$

donde $q = (q_1, q_2)$ es la posición del cuerpo infinitesimal y $p = (p_1, p_2)$ su momento; los detalles pueden verse en [Sze]. Las ecuaciones de movimiento vienen dadas por las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

Nótese que $q = 0$ es una singularidad de las ecuaciones.

H es una primera integral, lo cual significa que H es constante a lo largo de las soluciones. La constante de Jacobi se define entonces como $C = -2H$. Para un valor fijo de C el movimiento tiene lugar en regiones definidas del espacio de configuración llamadas regiones de Hill. Estas son las proyecciones sobre el espacio de configuración (q_1, q_2) de los niveles de Jacobi.

$$I_C = \{(q, p) \mid \frac{1}{2}|p|^2 + q_2 p_1 - q_1 p_2 - \frac{1}{|q|} - q_1^2 + \frac{1}{2}q_2^2 = -C/2\}$$

La forma de las regiones de Hill se muestran en la Figura 1.2.

Para $C > 3^{4/3}$ la región de Hill consiste de tres componentes, una de las cuales es acotada y contiene al origen. Si $C \rightarrow \infty$ la componente acotada se colapsa a un punto.

Existen dos maneras de estudiar la singularidad debida a colisión; la primera que utilizaremos es la explosión del origen que consiste básicamente en agregar una frontera al espacio

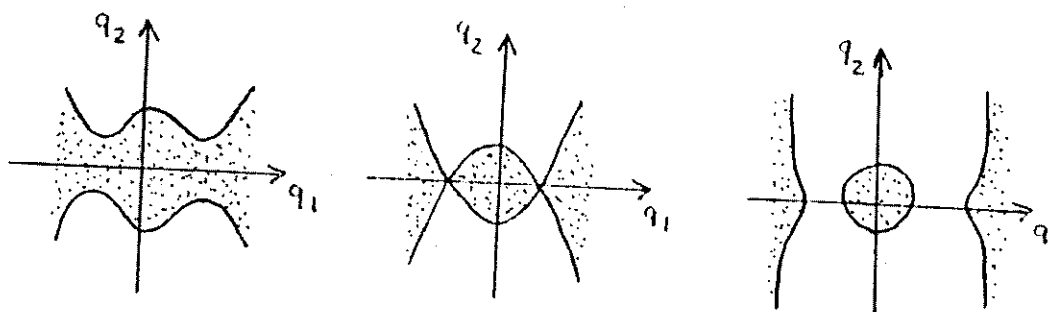


Figura 1.2: Regiones de Hill.

fase que sea invariante. Esto último se logra introduciendo coordenadas adecuadas debidas a McGehee, y una reparametrización de las soluciones que logre frenarlas lo suficiente para que las soluciones que tendían a colisión ahora tiendan asintóticamente a la frontera invariante (variedad de colisión). Todo ello lo haremos en la primera parte del trabajo.

La segunda manera de estudiar la singularidad consiste en hacer que las soluciones "atravesen" la singularidad, considerando un tiempo ficticio y las coordenadas apropiadas. La técnica de Levi-Civita lleva a cabo la regularización, manteniendo el carácter canónico de las ecuaciones. Esta técnica la desarrollaremos en la segunda parte de este trabajo en el problema de Hill. Aunque las técnicas son conceptualmente distintas, la combinación de ambas complementa la descripción del problema.

Capítulo 2

Explosión del origen.

Originalmente, McGehee introdujo la técnica de explosión del origen para estudiar la singularidad debida a colisión total en el problema colineal de 3 cuerpos. Posteriormente, Devaney generalizó la explosión de McGehee al caso de potenciales homogéneos. El problema restringido de 3 cuerpos y el problema de Hill no son de este último tipo debido al término mixto del momento angular, pero se puede adaptar la explosión a estos casos. El carácter canónico de las ecuaciones de McGehee ha sido demostrado por E. Lacombe y A. Ibort para el caso de potenciales homogéneos.

En esta primera parte utilizamos la explosión de McGehee para estudiar la singularidad debida a colisión en el problema de Hill. Damos una demostración analítica de la existencia de 4 órbitas de explosión-colisión, lo cual permite demostrar la inexistencia de primeras integrales extendibles independientes del Hamiltoniano (en [L-L] se da una demostración numérica). Posteriormente mostramos que una clase de ecuaciones del tipo de McGehee pueden escribirse en forma Hamiltoniana. Esto se aprovecha para demostrar la existencia de toros invariantes en el problema de Hill para valores grandes de la constante de Jacobi, aplicando el teorema *twist* de Moser.

2.1 Coordenadas tipo McGehee.

El Hamiltoniano del problema de Hill es (ver la sección anterior)

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + q_2 p_1 - q_1 p_2 - \frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} - q_1^2 + \frac{1}{2} q_2^2.$$

Para explotar el origen usamos coordenadas de McGehee como en [Lli]. Tomamos coordenadas polares $q = r(\cos \theta, \sin \theta)$ e introducimos $v = r^{1/2} \dot{r}$, $u = r^{3/2} \dot{\theta}$ que son la componente radial y tangencial de la velocidad multiplicadas por $r^{1/2}$, o bien $v = r^{1/2} p_r$ y $u = r^{-1/2} p_\theta$, donde p_r (p_θ) es el momento conjugado a r (θ). Si reparametrizamos las soluciones mediante el cambio de variable independiente $dt/d\tau = r^{3/2}$ obtenemos de las ecuaciones de Hamilton (1.2) el sistema en las nuevas coordenadas:

$$\begin{aligned}
 r' &= rv \\
 v' &= \frac{1}{2}v^2 + u^2 - 1 + 2r^{3/2}u + 3r^3 \cos^2 \theta \\
 \theta' &= u \\
 u' &= -\frac{1}{2}uv - 2r^{3/2}v - 3r^3 \cos \theta \sin \theta
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

con la relación de Jacobi

$$u^2 + v^2 = 3r^3 \cos^2 \theta - Cr + 2 \tag{2.2}$$

De la primera ecuación del sistema (2.1) vemos que $r = 0$, correspondiente a la singularidad $q = 0$, es invariante. De (2.2) vemos que $r = 0$ define un toro en el espacio $u - v - \theta \pmod{2\pi}$ llamada la *variedad de colisión*,

$$\Lambda = \{(r, v, \theta, u) \mid u^2 + v^2 = 2, \quad r = 0, \quad \theta \in S^1\}.$$

Esta variedad de colisión es la misma para todos los valores de C .

Si ponemos $\varepsilon = C^{-3/2}$ y hacemos la sustitución $r \rightarrow \varepsilon^{2/3}r$ obtenemos,

$$\begin{aligned}
 r' &= rv \\
 v' &= \frac{1}{2}v^2 + u^2 - 1 + 2\varepsilon r^{3/2}u + 3\varepsilon^2 r^3 \cos^2 \theta \\
 \theta' &= u \\
 u' &= -\frac{1}{2}uv - 2\varepsilon r^{3/2}v - 3\varepsilon^2 r^3 \cos \theta \sin \theta
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

y la relación

$$u^2 + v^2 = 3\varepsilon^2 r^3 \cos^2 \theta - r + 2 \tag{2.4}$$

Sea entonces $J_\varepsilon = \{(r, v, \theta, u) \mid u^2 + v^2 = 3\varepsilon^2 r^3 \cos^2 \theta - r + 2\}$. J_ε es difomorfo a un toro sólido en el espacio $u - v - \theta$, y cada toro sólido J_ε tiene como frontera a Λ . La dinámica del problema tiene lugar dentro de este toro sólido.

Todos los puntos de equilibrio del sistema están sobre la variedad de colisión Λ (al menos si ε es pequeño), y están formados por dos círculos de puntos de equilibrio C^\pm , que no dependen de ε , definidos por las ecuaciones $r = 0$, $u = 0$, $v = \pm\sqrt{2}$, $\theta \in S^1$.

Al estudiar el flujo en la variedad de colisión no será de utilidad recordar que un campo vectorial o flujo $\dot{x} = f(x)$ se dice quasi-gradiente respecto a una función v , si v es estrictamente monótona a lo largo de soluciones del campo, excepto en los puntos de equilibrio; en otras palabras, $\dot{v} \neq 0$, excepto en las soluciones $x = c$, $f(c) = 0$.

Pongamos $r = 0$ en las ecuaciones 2.3 para estudiar el flujo en la variedad de colisión.

$$\begin{aligned}
 v' &= \frac{1}{2}v^2 + u^2 - 1 \\
 \theta' &= u \\
 u' &= -\frac{1}{2}uv.
 \end{aligned}$$

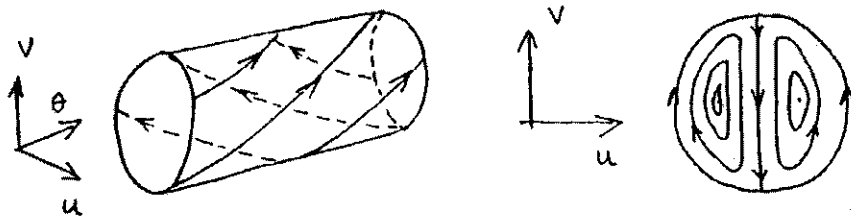


Figura 2.1: Flujo del problema de Kepler

Al sustituir $u = 0$ en la ecuación para v' , vemos claramente que el flujo sobre la variedad de colisión es quasi-gradiente respecto a v , de hecho v es creciente a lo largo de soluciones que no son puntos de equilibrio.

Si ahora introducimos coordenadas angulares θ, ϕ en el la variedad de colisión: $u = \sqrt{2} \cos \phi, v = \sqrt{2} \sin \phi$, se obtiene

$$\begin{aligned}\phi' &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \phi \\ \theta' &= \sqrt{2} \cos \phi,\end{aligned}$$

de donde se ve que en el plano $\theta - \phi$, las trayectorias son rectas de pendiente $1/2$. Esto significa que cada punto crítico en C^- con $\theta = \theta_0$, tiene dos ramas de una variedad inestable sobre Λ que son también las ramas estables del punto crítico situado arriba de él en C^+ con $\theta = \theta_0$, este comportamiento se muestra en la Figura 2.1.

Si se calculan los valores propios de la linealización del campo vectorial (2.3) en los puntos críticos obtenemos

Para $v = +\sqrt{2}$,

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0 && \text{asociado a } \theta. \\ \lambda_2 &= \sqrt{2} && \text{con multiplicidad doble, asociado a } r \text{ y } v. \\ \lambda_3 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} && \text{asociado a } u.\end{aligned}$$

Para $v = -\sqrt{2}$,

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0 && \text{asociado a } \theta. \\ \lambda_2 &= -\sqrt{2} && \text{con multiplicidad doble, asociado a } r \text{ y } v. \\ \lambda_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} && \text{asociado a } u.\end{aligned}$$

Nótese que los valores propios tampoco dependen de ε . El número de valores propios nulos, en cada caso, coincide con la dimensión del conjunto de puntos críticos, que es 1, luego el conjunto de puntos críticos C^\pm , es normalmente hiperbólico [Shub], lo cual nos permite concluir la existencia de variedades estables e inestables $W_\varepsilon^s(C^-)$, $W_\varepsilon^u(C^+)$) de dimensión 2. Sobre la variedad de colisión tenemos la partición

$$\Lambda = C^+ \cup C^- \cup W_\varepsilon^u(C^-) \cup W_\varepsilon^s(C^+).$$

Para $\varepsilon = 0$ las ecuaciones se simplifican a

$$\begin{aligned} r' &= rv \\ v' &= \frac{1}{2}v^2 + u^2 - 1 \\ \theta' &= u \\ u' &= -\frac{1}{2}uv \end{aligned} \quad (2.5)$$

con

$$u^2 + v^2 = 2 - r \quad (2.6)$$

Las ecuaciones (2.5) y (2.6) son las mismas que para el problema de Kepler con energía $h = -1/2$. Este flujo ha sido estudiado por Devaney [Dev]. El flujo global se muestra en la Figura 2.1.

El flujo en la variedad de colisión es el mismo para todos los valores de ε . Fuera de la variedad de colisión denotaremos simplemente por W_ε^s y W_ε^u las variedades invariantes asociados a los círculos de puntos críticos.

Las soluciones que satisfacen $u = 0$, $\theta = \text{cte}$, se llaman órbitas homotéticas debido a que se proyectan en el espacio de configuración como rayos que pasan por el origen. Las órbitas homotéticas viven en el interior del toro sólido, nacen y mueren en los puntos críticos de la variedad de colisión, por lo tanto, la unión de todas ellas forman un cilindro invariante que forman la variedad estable del círculo de puntos críticos C^- y la variedad inestable del círculo de puntos críticos C^+ , es decir $W_0^s = W_0^u$.

El flujo es transversal al anillo $A = \{(r, v, \theta, u) \in J_0 \mid v = 0\}$ excepto por dos círculos definidos por $v = 0$, $u = \pm 1$ los cuales corresponden exactamente a dos órbitas periódicas circulares. En particular tenemos que $W_0^s = W_0^u$ intersecta transversalmente al anillo A , por lo tanto W_ε^u y W_ε^s intersectan transversalmente al anillo A para ε suficientemente pequeña. Véase la Figura 2.2. Hemos demostrado así la siguiente

Proposición 1 Sea $\gamma_\varepsilon^u(\gamma_\varepsilon^s)$ la primera intersección de $W_\varepsilon^u(W_\varepsilon^s)$ con A cuando $\tau \rightarrow +\infty$ ($\tau \rightarrow -\infty$). Entonces para ε suficientemente pequeño $\gamma_\varepsilon^u(\gamma_\varepsilon^s)$ es topológicamente un círculo en el anillo A que puede parametrizarse por $u = \nu(\bar{\theta}, \varepsilon)$ ($u = \nu(-\bar{\theta}, \varepsilon)$). $\bar{\theta} \in S^1$ y ν una función suave con $\nu(\bar{\theta}, 0) \equiv 0$. Por el mismo argumento $\gamma_\varepsilon^u(\gamma_\varepsilon^s)$ puede también parametrizarse como $r = \rho(\bar{\theta}, \varepsilon)$ ($r = \rho(-\bar{\theta}, \varepsilon)$).

Teorema 1 Existen al menos cuatro órbitas de expulsión-colisión para valores de C suficientemente grandes.

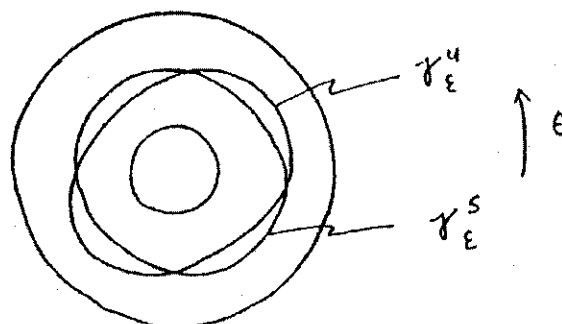


Figura 2.2: Intersección de W_ϵ^u (W_ϵ^s) con el anillo A .

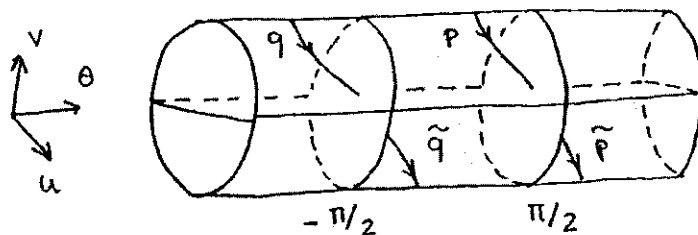


Figura 2.3: Órbitas de expulsión-colisión.

Demostración: Haremos uso de las simetrías del problema de Hill.

- (1) $(r, v, \theta, u, \tau) \rightarrow (r, -v, -\theta, u, -\tau)$
- (2) $(r, v, \theta, u, \tau) \rightarrow (r, v, \theta + \pi, u, \tau)$

Véase la Figura 2.3. Para ϵ pequeño, sea $p_0 = (r_0, 0, \pi/2, u_0)$ un punto en $\gamma_\epsilon^u \cap \{\theta = \pi/2\}$; luego existe una órbita de expulsión $p(\tau)$ tal que $p(0) = p_0$. Aplicando la simetría (1) obtenemos una órbita de colisión $\tilde{q}(\tau)$ tal que $\tilde{q}(0) = (r_0, 0, -\pi/2, u_0)$. Si aplicamos la segunda simetría a \tilde{q} obtenemos una órbita de colisión q y por lo tanto la órbita de expulsión-colisión $p \cup q$ que pasa por $\theta = \pi/2$. Ahora, aplicando la simetría (2) a $p \cup q$ obtenemos otra órbita de expulsión-colisión. Del mismo modo podemos obtener dos órbitas más de expulsión-colisión que pasan por $\theta = 0$ y $\theta = \pi$.

2.2 Órbitas transversales de expulsión-colisión.

En seguida probaremos que existen exactamente cuatro órbitas de expulsión colisión que son transversales para ϵ suficientemente pequeño.

De la proposición (1) la primera intersección de W_+^u (W_+^s) con el anillo A es un círculo que puede parametrizarse como $u = \nu(\bar{\theta}, \varepsilon)$ ($u = \nu(-\bar{\theta}, \varepsilon)$), con $\theta \in S^1$. Para probar que W_+^u es suficiente probar que

$$\left. \frac{\partial \nu(\theta, \varepsilon)}{\partial \theta} \right|_{\theta=n\pi/2} \neq 0 \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3$$

Por abreviar denotemos al conjunto de índices $\{n\pi/2 \mid n = 0, 1, 2, 3\}$ por I .

Sea $\beta(\tau, \bar{\theta}, \varepsilon) = (r(\tau, \bar{\theta}, \varepsilon), v(\tau, \bar{\theta}, \varepsilon), \theta, u(\tau, \bar{\theta}, \varepsilon))$ la solución donde tomamos la condición inicial $(r(\bar{\theta}, \varepsilon), v(\bar{\theta}, \varepsilon), \theta, u(\bar{\theta}, \varepsilon))$ en $\tau = 0$. Entonces β es una órbita de expulsión-colisión y $u(0, \bar{\theta}, \varepsilon) = \nu(\bar{\theta}, \varepsilon)$. Lo que tenemos que mostrar que

$$\left. \frac{\partial u(\tau, \bar{\theta}, \varepsilon)}{\partial \theta} \right|_{\bar{\theta} \in I, \tau=0} \neq 0 \quad (2.7)$$

El siguiente lema es una justificación de los cálculos formales que siguen:

Lema 1 Para ε suficientemente pequeño la solución $\beta(\tau, \bar{\theta}, \varepsilon)$ con $\bar{\theta} \in I$ puede desarrollarse en serie de Taylor en ε con $\beta(\tau, \bar{\theta}, \varepsilon) \rightarrow \beta(\tau, \bar{\theta}, 0)$, uniformemente en τ .

Demostración. Haciendo la sustitución $R = \tau^{1/2}$, el sistema (2.3) puede escribirse como

$$\begin{aligned} R' &= \frac{1}{2} R v \\ v' &= v^2/2 + u^2 - 1 + 2\varepsilon R^3 u + 3\varepsilon^2 R^6 \cos^2 \theta \\ \theta' &= u \\ u' &= -u v/2 - 2\varepsilon R^3 v - 3\varepsilon^2 R^6 \cos \theta \sin \theta \end{aligned}$$

$$u^2 + v^2 = 2 - R^2 + 3\varepsilon^2 R^6 \cos^2 \theta$$

El segundo miembro del sistema es analítico en las variables $(R, v, \theta, u, \varepsilon)$ y por el teorema de Cauchy, R, v, θ, u pueden expandirse en series de potencias de ε . Como $R(\tau, \bar{\theta}, \varepsilon) \neq 0$ para toda $\tau \in (-\infty, \infty)$ entonces también $r(\tau, \bar{\theta}, \varepsilon)$ puede expandirse en serie de potencias de ε . La convergencia uniforme se puede probar usando el "teorema de extensión" de Sanders [San]. □

De acuerdo al lema anterior expandamos la solución $\beta(\tau, \bar{\theta}, \varepsilon)$ para $\bar{\theta} \in I$ como

$$\begin{aligned} r(\tau, \bar{\theta}, \varepsilon) &= r_0 + r_1 \varepsilon + r_2 \varepsilon^2 + \dots \\ v(\tau, \bar{\theta}, \varepsilon) &= v_0 + v_1 \varepsilon + v_2 \varepsilon^2 + \dots \\ \theta(\tau, \bar{\theta}, \varepsilon) &= \theta_0 + \theta_1 \varepsilon + \theta_2 \varepsilon^2 + \dots \\ u(\tau, \bar{\theta}, \varepsilon) &= u_0 + u_1 \varepsilon + u_2 \varepsilon^2 + \dots \end{aligned}$$

para probar que la derivada (2.7) es distinta de cero basta probar que para algún k se cumple

$$\left. \frac{\partial u_k(0, \bar{\theta})}{\partial \theta} \right|_{\bar{\theta} \in I} \neq 0.$$

Sabemos que $(r_0, v_0, \theta_0, u_0)$ satisfacen las ecuaciones a orden cero

$$\begin{aligned} r' &= rv \\ v' &= v^2/2 + u^2 - 1 \\ \theta' &= u \\ u' &= -uv/2 \end{aligned}$$

con condiciones iniciales $(2, 0, \bar{\theta}, 0)$ en $\tau = 0$. La solución explícita es

$$\begin{aligned} r_0 &= 2 \operatorname{sech}^2(\tau/\sqrt{2}) \\ v_0 &= -\sqrt{2} \tanh(\tau/\sqrt{2}) \\ \theta_0 &= \bar{\theta} \\ u_0 &= 0. \end{aligned}$$

Usaremos como coordenadas independientes a (v, θ, u) ; luego el sistema (2.3) se escribe como

$$\begin{aligned} v' &= V(v, \theta, u, \varepsilon) \\ \theta' &= \Theta(u) \\ u' &= U(v, \theta, u, \varepsilon). \end{aligned}$$

Se sabe que las v_k 's, θ_k 's y u_k 's satisfacen las ecuaciones variacionales de orden k con respecto a ε . El método para calcular las ecuaciones variacionales es el siguiente: Para un orden fijo ε^k , sustitúyanse las series para r , v , θ , y u truncadas a orden ε^k en la relación de Jacobi, igualando las potencias iguales de ε . Entonces los r_k 's pueden expresarse como función de los v_i 's, θ_i 's y u_i 's con $0 \leq i \leq k$. Las mismas series sustituidas en las ecuaciones (2.3) dan las ecuaciones deseadas en las que podemos sustituir los r_i 's obtenidos antes. De hecho para probar la transversalidad fué suficiente llegar a 2º orden.

Teorema 2 Para ε suficientemente pequeño existen exactamente 4 órbitas transversales de expulsión-colisión que son continuaciones analíticas de las órbitas homotéticas en el problema de Kepler con $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$.

Demostración. Probaremos que

$$\frac{\partial u_1(0, \bar{\theta})}{\partial \bar{\theta}} = 0, \quad \frac{\partial u_2(0, \bar{\theta})}{\partial \bar{\theta}} \neq 0 \quad \text{para } \bar{\theta} \in I.$$

Usaremos la siguiente notación:

$$x_i := \frac{\partial v_i}{\partial \bar{\theta}}, \quad y_i := \frac{\partial \theta_i}{\partial \bar{\theta}}, \quad z_i := \frac{\partial u_i}{\partial \bar{\theta}}$$

La ecuación para u'_1 , después de hacer un corto cálculo, es:

$$u'_1 = -\frac{1}{2}u_0v_1 - \frac{1}{2}u_1v_0 - 2r_0^{3/2}v_0 \quad (2.8)$$

en donde $u_0 \equiv 0$ y v_0, r_0 no dependen de $\bar{\theta}$. Tomando derivadas con respecto a $\bar{\theta}$ obtenemos

$$z_1' = -\frac{1}{2}v_0 z_1$$

con solución $z_1(\tau, \bar{\theta}) = z_1(0, \bar{\theta}) \cosh(\tau/\sqrt{2})$.

Puesto que $\beta(\tau, \bar{\theta}, \varepsilon) \in W_c^s$ se sigue en particular que si $\tau \rightarrow \infty$ entonces $\lim u(\tau, \bar{\theta}, \varepsilon) = 0$ y por convergencia uniforme, $\lim \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$, luego $\lim \frac{\partial u_k}{\partial \theta} = \lim z_k = 0$ para toda k . Concluimos entonces que si $z_1(\tau, \bar{\theta}) \rightarrow 0$ cuando $\tau \rightarrow \infty$ entonces $z_1(0, \bar{\theta})$ debe ser cero.

La ecuación variacional de segundo orden para u_2 es

$$u_2' = -\frac{1}{2}u_1 v_1 - \frac{1}{2}u_2 v_0 - 3r_0^3 \cos \bar{\theta} \sin \bar{\theta} - 2r_0^{3/2} v_1 - 3r_0^{1/2} r_1 v_0$$

con $r_1 = -2v_0 v_1$ y hemos usado el hecho de que $u_0 \equiv 0$. Afirmamos que $v_1 \equiv 0$.

Como v_1 satisface la ecuación homogénea lineal

$$v_1' = v_0 v_1$$

y de $v(0, \bar{\theta}, \varepsilon) = 0 = v_0(0) + v_1(0, \bar{\theta})\varepsilon + \dots$ y $v_0(0) = 0$, obtenemos $v_1(0, \bar{\theta}) = 0$, luego $v_1 \equiv 0$. Por lo tanto $r_1 \equiv 0$ y $x_1 \equiv 0$ también.

La ecuación para z_2' es simplemente

$$z_2' = -\frac{1}{2}v_0 z_2 - 3r_0^3 \cos 2\bar{\theta}.$$

Resolviendo por el método de variación de constantes obtenemos

$$z_2(\tau, \bar{\theta}) = z_2(0, \bar{\theta}) \cosh(\tau/\sqrt{2}) + c(\tau) \cosh(\tau/\sqrt{2}) \quad (2.9)$$

en donde

$$c(\tau) = \frac{1}{\cosh(\tau/\sqrt{2})} 24 \cos 2\bar{\theta} \int_0^\tau \operatorname{sech}^7(\tau/\sqrt{2}) d\tau.$$

De (2.9),

$$z_2(0, \bar{\theta}) = z_2(\tau, \bar{\theta}) \operatorname{sech}(\tau/\sqrt{2}) - c(\tau)$$

tomando el límite cuando $\tau \rightarrow \infty$ obtenemos

$$z_2(0, \bar{\theta}) = 24 \cos 2\bar{\theta} \int_0^\infty \operatorname{sech}^7(\tau/\sqrt{2}) = \begin{cases} 15\sqrt{2}\pi/4 & \text{si } \bar{\theta} = 0, \pi \\ -15\sqrt{2}\pi/4 & \text{si } \bar{\theta} = \pi/2, 3\pi/2 \end{cases} \quad (2.10)$$

que es un número distinto de cero como se quería.

Ya que $\nu(\bar{\theta}, \varepsilon) = u(0, \bar{\theta}, \varepsilon)$, expandiendo en potencias de ε obtenemos

$$\nu_0(\bar{\theta}) + \varepsilon \nu_1(\bar{\theta}) + \varepsilon^2 \nu_2(\bar{\theta}) + \dots = u_0(0, \bar{\theta}) + \varepsilon u_1(0, \bar{\theta}) + \varepsilon^2 u_2(0, \bar{\theta}) + \dots$$

pero

$$\begin{aligned} 0 &\equiv u_0(0, \bar{\theta}) &\equiv \nu_0(\bar{\theta}) \\ 0 &\equiv z_1(0, \bar{\theta}) &\equiv \partial u_1 / \partial \theta|_{\tau=0} &\equiv \partial \nu_1 / \partial \bar{\theta} \\ &z_2(0, \bar{\theta}) &\equiv \partial u_2 / \partial \theta|_{\tau=0} &\equiv \partial \nu_2 / \partial \bar{\theta} \end{aligned}$$

Por lo tanto $\nu_0(\bar{\theta}) \equiv 0$ y $\nu_1(\bar{\theta})$ es una constante. Para determinar la constante resolvemos la ecuación (2.8) para u_1 . Sustituyendo u_0 , v_0 y r_0 allí, tenemos

$$u_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} \tanh(\tau/\sqrt{2})u_1 + 8 \operatorname{sech}(\tau/\sqrt{2}) \tanh(\tau/\sqrt{2}),$$

con solución

$$u_1(\tau, \bar{\theta}) = c_1 \cosh(\tau/\sqrt{2}) - 2\sqrt{2} \operatorname{sech}^3(\tau/\sqrt{2}).$$

Ya que $\lim_{\tau \rightarrow \infty} u_1(\tau, \bar{\theta}) = 0$, entonces $c_1 = 0$ y la solución es $u_1(\tau, \bar{\theta}) = -2\sqrt{2} \operatorname{sech}^3(\tau/\sqrt{2})$. Por lo tanto,

$$\nu_1(\bar{\theta}) = u_1(0, \bar{\theta}) = -2\sqrt{2}.$$

Como $\partial u_2 / \partial \bar{\theta} |_{\tau=0} = z_2(0, \bar{\theta})$, integrando (2.10) obtenemos

$$\nu_2(\bar{\theta}) = \frac{15}{8} \sqrt{2} \pi \sin 2\bar{\theta}.$$

Una expresión aproximada para el círculo γ_ε^u es

$$u = -2\varepsilon\sqrt{2} + \varepsilon^2 \frac{15}{8} \sqrt{2} \pi \sin 2\bar{\theta} + \dots$$

y para γ_ε^s

$$u = -2\varepsilon\sqrt{2} - \varepsilon^2 \frac{15}{8} \sqrt{2} \pi \sin 2\bar{\theta} + \dots$$

Si graficamos u vs. $\bar{\theta}$ vemos que a orden $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ ocurren exactamente cuatro intersecciones transversales que no pueden desaparecer por considerar a los términos $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$ debido a que éstos son periódicos en $\bar{\theta}$ y por lo tanto acotados; de todo lo anterior se sigue que hay exactamente 4 intersecciones si ε es pequeño. \square

†En [L-L] se prueba numéricamente la existencia de dos órbitas de expulsión-colisión que pasan por $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ que además son órbitas heteroclinicas, i.e. $W_\varepsilon^s \cap W_\varepsilon^u$, para un valor de $\varepsilon = 5^{-3/2}$, aquí hemos dado una prueba analítica de ello. La transversalidad de las órbitas de expulsión-colisión permite probar que no existen otras primeras *integrales extendibles* además del Hamiltoniano¹. Aún cuando no estimamos el radio de convergencia de la serie $v(\tau, \bar{\theta}, \varepsilon)$, un cálculo de $\partial \tau / \partial \bar{\theta}$ en $\bar{\theta} = 0, \pi$ hasta términos de segundo orden para $\varepsilon = (125)^{-1/2}$ (que corresponde a $C = 5$) da el valor de 0.29..., que es muy cercano al valor 0.26... obtenido numéricamente en [L-L].

2.3 Una sección transversal para el flujo.

Refiriéndonos a la Figura 2.2, consideremos el anillo A definido por la condición $v = 0$. Para $\varepsilon = 0$ los círculos $u = \pm 1$ en A son las órbitas circulares directa y retrógrada respectivamente donde el campo es tangencial. Haremos ver que existe un anillo S (que tiene como frontera a dichas órbitas periódicas en el caso $\varepsilon = 0$) donde el mapeo de Poincaré está bien definido.

¹Para la definición de integral extendible, véase [AM], [L-L].

Lema 2 Sea A el anillo definido por la condición $v = 0$ en J_* . Existen dos círculos $u = u_{\pm}(\theta)$ en A donde el campo vectorial definido por las ecuaciones (2.9) es tangente. El anillo S definido por $\theta \in S^1$, $u_-(\theta) < u < u_+(\theta)$ es transversal al campo.

Demostración. Las ecuaciones $v' = 0$, $v = 0$ junto con la relación de energía nos dan las ecuaciones implícitas

$$F(r, \theta, u, \varepsilon) = u^2 - 1 + 2\varepsilon r^{3/2} u + 3\varepsilon^2 r^3 \cos^2 \theta = 0 \quad (2.11)$$

$$G(r, \theta, u, \varepsilon) = u^2 + r - 3\varepsilon^2 r^3 \cos^2 \theta - 2 = 0 \quad (2.12)$$

Escribimos (2.12) como $G(r, x, y, \varepsilon) = 0$ donde $x = \cos^2 \theta$ y $y = u^2$. G es una función analítica en una vecindad del compacto $0 \leq r \leq K$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$, $-\nu \leq \varepsilon \leq \nu$. La idea es poder despejar r de la ecuación (2.12), sustituir en la ecuación (2.11) y de ésta última despejar a u en función de θ y ε .

Para cada $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 2]$ la solución de la ecuación $G(r, x, y, 0) = 0$ es $r = 2 - y$. Ya que

$$\frac{\partial G}{\partial r}(r, x, y, 0) = -1,$$

por el teorema de la función implícita existe una función analítica $r = r(x', y', \varepsilon)$ en una vecindad $|x' - x| < \delta$, $|y' - y| < \delta$, $|\varepsilon| < \delta$ de $(x, y, 0)$. Por compacidad, $[0, 1] \times [0, 2]$ puede cubrirse por un finito de vecindades cuadradas de lados $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$. Sea $\delta = \min \{\delta_1, \dots, \delta_n\}$. Para cualquier $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 2]$ existe (x_i, y_i) tal que $(x, y) \in U_i := B(x_i, \delta_i) \times B(y_i, \delta_i)$, y si $|\varepsilon| < \delta$ entonces $(x, y, \varepsilon) \in \bar{U}_i := U_i \times (-\delta_i, \delta_i)$ en donde existe una función analítica $r_i(x', y', \varepsilon)$ que satisface la ecuación $G(r_i(x', y', \varepsilon), x', y', \varepsilon) \equiv 0$. Si $(x', y') \in \bar{U}_i \cap \bar{U}_j$ entonces $r_i = r_j = 2 - y'$ restringido a $\{(x', y', 0)\} \in \bar{U}_i \cap \bar{U}_j$. Por el principio de continuación analítica existe una vecindad de (x, y, ε) contenida en $\bar{U}_i \cap \bar{U}_j$ donde $r_i = r_j$. Globalmente existe entonces una función analítica $r(x, y, \varepsilon)$ definida en una vecindad de $[0, 1] \times [0, 2] \times [-\delta, \delta]$ que satisface la ecuación implícita (2.12).

Al sustituir $r(x, y, \varepsilon)$ en (2.11) obtenemos la ecuación implícita

$$f(x, u, \varepsilon) = F(r(x, y, \varepsilon), x, u, \varepsilon) = 0. \quad \text{donde } x = \cos^2 \theta, y = u^2.$$

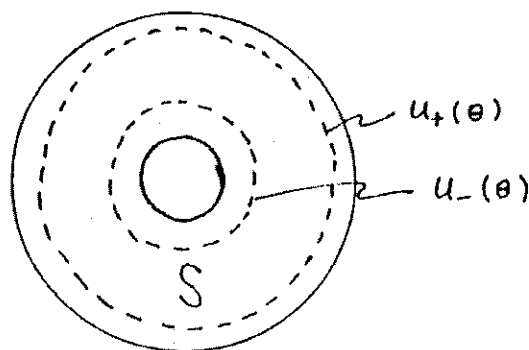
Si $\varepsilon = 0$, hay dos soluciones $u \equiv \pm 1$. En forma análoga al caso anterior tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x, \pm 1, 0) = \pm 2,$$

y usando el mismo argumento que antes podemos despejar $u = u_{\pm}(x, \varepsilon) = u_{\pm}(\cos^2 \theta, \varepsilon)$.

Ya que las soluciones a las ecuaciones implícitas localmente son únicas, se sigue que para ε suficientemente pequeño los círculos $u = u_{\pm}(\theta, \varepsilon)$ son los únicos puntos donde el campo es tangencial al anillo A . □

Un argumento más simple aunque informal es el siguiente: Para $\varepsilon = 0$ fijémonos en v' , la componente del campo en la dirección v a lo largo de un rayo $\theta = cte.$ sobre el plano $v = 0$. De las ecuaciones del problema de Kepler se tiene $v' = u^2 - 1$ y la gráfica de v' vs. u es una parábola que intersecta transversalmente el eje $v' = 0$ en $u = \pm 1$. Se sigue que para ε pequeño v' es distinto de cero excepto en dos puntos con $u = u_{\pm}(\theta)$ donde $v' = 0$ y el campo vectorial es tangente al plano $v = 0$.

Figura 2.4: La sección transversal S .

2.4 Forma canónica de las ecuaciones de McGehee.

Sea S la región en el anillo $v = 0$ delimitada por las curvas $u = u_{\pm}(\theta, \varepsilon)$, y T la transformación que a cada punto en S le asocia su próxima intersección con S , la cual no está definida en γ_{ε}^s , pues para cada uno de esos puntos la solución "va a morir" a un punto crítico en $v = -\sqrt{2}$. Sin embargo podemos seguir la solución sobre Λ hasta el punto crítico en $v = +\sqrt{2}$ y de ahí sobre la variedad inestable W_{ε}^u hasta γ_{ε}^u . De esta manera podemos extender T a todo S con la propiedad de que $T(\gamma_{\varepsilon}^s) = \gamma_{\varepsilon}^u$. La extensión así definida es analítica. Pospondremos la demostración de este resultado para la segunda parte de este trabajo.

Consideremos las ecuaciones de McGehee para un sistema Hamiltoniano con dos grados de libertad y potencial homogéneo de grado -1

$$\begin{aligned} r' &= -rv \\ v' &= \frac{1}{2}v^2 + u^2 - U(\theta) \\ \theta' &= u \\ u' &= -\frac{1}{2}uv + U'(\theta) \end{aligned}$$

con la relación de energía

$$\frac{1}{2}(v^2 + u^2) - U(\theta) = rh$$

Hagamos el cambio de variables² $\rho = 2r^{1/2}$, $m = r^{1/2}u$. Vamos a demostrar que las ecuaciones de McGehee toman una forma Hamiltoniana en las coordenadas (ρ, v, θ, m) donde v es el momento conjugado a ρ y m es el momento conjugado a θ . Antes de proceder a ello conviene reescribir la ecuación para v' como sigue: Utilizando la relación de energía

$$v' = \frac{1}{2}v^2 + u^2 - U(\theta)$$

²Las relaciones auxiliares $r = \rho^2/2$, $2m = \rho u$ y $u = 2m/\rho$ son de utilidad

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4}u^2 - \frac{1}{4}v^2 + \frac{1}{2}U(\theta) + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}(v^2 + u^2) - U(\theta) \right) \\
 &= \frac{1}{4}u^2 - \frac{1}{4}v^2 + \frac{1}{2}U(\theta) + \frac{3}{2}rh
 \end{aligned}$$

Las ecuaciones de McGehee se transforman en

$$\begin{aligned}
 \rho' &= \frac{1}{2}\rho v \\
 v' &= \frac{m^2}{\rho^2} - \frac{1}{4}v^2 + \frac{1}{2}U(\theta) + \frac{3}{8}\rho^2 h \\
 \theta' &= \frac{2m}{\rho} \\
 m' &= \frac{1}{2}\rho U'(\theta)
 \end{aligned}$$

Buscamos una función $H(\rho, v, \theta, u)$ que satisfaga las ecuaciones

$$\frac{\partial H}{\partial v} = \frac{1}{2}\rho v, \quad \frac{\partial H}{\partial m} = \frac{2m}{\rho}$$

y

$$-\frac{\partial H}{\partial \rho} = \frac{m^2}{\rho^2} - \frac{1}{4}v^2 + \frac{1}{2}U(\theta) + \frac{3}{8}\rho^2 h, \quad -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{1}{2}\rho U'(\theta)$$

Integrando las primeras dos ecuaciones obtenemos

$$H = \frac{1}{4}\rho v^2 + \frac{m^2}{\rho} + f(\rho, \theta)$$

sustituyendo en la última ecuación:

$$\frac{1}{2}\rho U'(\theta) = -\frac{\partial f}{\partial \theta}$$

luego,

$$H = \frac{1}{4}\rho v^2 + \frac{m^2}{\rho} - \frac{1}{2}\rho U(\theta) + h(\rho)$$

Finalmente, sustituyendo en la ecuación que resta tenemos

$$\frac{m^2}{\rho^2} - \frac{1}{4}v^2 + \frac{1}{2}U(\theta) - \frac{3}{8}\rho^2 h = -\frac{1}{4}v^2 + \frac{m^2}{\rho^2} + \frac{1}{2}U(\theta) + h'(\rho)$$

y por tanto $h(\rho) = -\rho^3 h/8$ y el Hamiltoniano queda

$$H = \frac{1}{4}\rho v^2 + \frac{m^2}{\rho} - \frac{1}{8}\rho^3 h - \frac{1}{2}\rho U(\theta)$$

Consideremos las ecuaciones más generales

$$\begin{aligned}
 r' &= rv \\
 v' &= \frac{1}{2}v^2 + u^2 - U(\theta) + 2r^{3/2}u + f(r, \theta) \\
 \theta' &= u \\
 u' &= -\frac{1}{2}uv + U'(\theta) - 2r^{3/2}v + g(r, \theta)
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

bajo la condición de integrabilidad

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r^2} f \right] = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} g \right] \quad (2.14)$$

Algunos ejemplos de este tipo de ecuaciones son

- El problema de Kepler giratorio: Con $U = 1$, $f = r^3$, $g = 0$.
- El problema restringido de tres cuerpos: Con $U = 1$,

$$\begin{aligned} f &= r^3 + \mu + \mu r^2 \left[\cos \theta - (r + \cos \theta)(r^2 + 1 + 2r \cos \theta)^{-3/2} \right] \\ g &= \mu r^2 \sin \theta \left[(r^2 + 1 + 2r \cos \theta)^{-3/2} - 1 \right] \end{aligned}$$

- El problema de Hill: Con $U = 1$,

$$\begin{aligned} f &= 3r^3 \cos^2 \theta \\ g &= -3r^3 \cos \theta \sin \theta \end{aligned}$$

en cada caso puede verificarse la condición de integrabilidad (2.14)

Proposición 2 *El sistema (2.13) con la condición (2.14) posee una primera integral*

Demostración. Calculamos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left[\frac{1}{2}(u^2 + v^2) - U(\theta) \right] &= \\ &= u \frac{du}{d\tau} + v \frac{dv}{d\tau} - U'(\theta) \frac{d\theta}{d\tau} \\ &= -\frac{1}{2}u^2 v + uU'(\theta) - 2r^{3/2}uv + ug \\ &\quad + \frac{1}{2}v^3 + vu^2 - vU(\theta) + 2r^{3/2}vu + vf - U'(\theta)u \\ &= \frac{1}{2}u^2 v + \frac{1}{2}v^3 - vU(\theta) + ug + vf \\ &= \left[\frac{1}{2}(u^2 + v^2) - U(\theta) \right] v + ug + vf \end{aligned}$$

De la condición impuesta se sigue que existe una función $S(r, \theta)$ tal que

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \frac{1}{r^2} f \quad \text{y} \quad \frac{\partial S}{\partial \theta} = \frac{1}{r} g \quad (2.15)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left[\frac{1}{2}(u^2 + v^2) - U(\theta) \right] &= \\ &= \left[\frac{1}{2}(u^2 + v^2) - U(\theta) \right] v + ru \frac{\partial S}{\partial \theta} + r^2 v \frac{\partial S}{\partial r} \end{aligned}$$

dividiendo entre r y sustituyendo $v = r'/r$, $u = \theta'$,

$$\frac{\frac{d}{d\tau} \left[\frac{1}{2}(u^2 + v^2) - U(\theta) \right] - \left[\frac{1}{2}(u^2 + v^2) - U(\theta) \right] \frac{r'}{r}}{r} = \theta' \frac{\partial S}{\partial \theta} + r' \frac{\partial S}{\partial r}.$$

Integrando ambos lados respecto a τ obtenemos

$$\frac{\frac{1}{2}(u^2 + v^2) - U(\theta)}{r} = S(r, \theta) + h \quad h = \text{cte.}$$

o bien

$$\frac{1}{2}(u^2 + v^2) - U(\theta) = rS(r, \theta) + rh.$$

□

La relación anterior la llamaremos la relación de energía.

En los ejemplos antes mencionados se obtiene (ver 2.15):

1. Kepler giratorio:

$$\frac{\partial S}{\partial r} = r, \quad \frac{\partial S}{\partial \theta} = 0, \quad rS(r, \theta) = \frac{1}{2}r^3$$

en este caso la constante h es la energía.

2. Restringido de tres cuerpos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial r} &= r + \frac{\mu}{r} + \mu r \left[\cos \theta - (r + \cos \theta)(r^2 + 1 + 2r \cos \theta)^{-3/2} \right] \\ \frac{\partial S}{\partial \theta} &= \mu \sin \theta \left[(r^2 + 1 + 2r \cos \theta)^{-3/2} - 1 \right] \end{aligned}$$

donde

$$rS(r, \theta) = \frac{1}{2}r^3 - \mu + \mu + \mu r^2 \cos \theta + \mu r(r^2 + 1 + 2r \cos \theta)^{-1/2}$$

en este caso $h = -C/2 + \mu^2/2$ donde C es la constante de Jacobi.

3. Hill:

$$\frac{\partial S}{\partial r} = 3r \cos^2 \theta \quad \frac{\partial S}{\partial \theta} = -3r^2 \cos \theta \sin \theta$$

de donde

$$rS(r, \theta) = \frac{3}{2}r^3 \cos^2 \theta$$

y $h = -C/2$, con C la constante de Jacobi.

Ahora haremos ver que las ecuaciones (2.13) se pueden transformar a una forma canónica. Para ello reescribamos, al igual que antes, la ecuación para v' de un modo más conveniente

con ayuda de la relación de energía:

$$\begin{aligned} v' &= \frac{1}{4}u^2 - \frac{1}{4}v^2 + \frac{1}{2}U(\theta) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}(u^2 + v^2) - U(\theta)\right) + 2r^{3/2}u + f \\ &= \frac{1}{4}u^2 - \frac{1}{4}v^2 + \frac{1}{2}U(\theta) + \frac{3}{2}(rh + rS) + 2r^{3/2}u + f \\ &= \frac{1}{4}u^2 - \frac{1}{4}v^2 + \frac{1}{2}U(\theta) + \frac{3}{2}rh + \frac{3}{2}rS + 2r^{3/2}u + f \end{aligned}$$

luego podemos escribir las ecuaciones (2.13) como

$$\begin{aligned} r' &= rv \\ v' &= \frac{1}{4}u^2 - \frac{1}{4}v^2 + \frac{1}{2}U(\theta) + \frac{3}{2}rh + \frac{3}{2}rS + 2r^{3/2}u + f \\ \theta' &= u \\ u' &= -\frac{1}{2}uv + U'(\theta) - 2r^{3/2}v + g \end{aligned}$$

Hagamos la transformación de coordenadas

$$\rho = 2r^{1/2} \quad m = r^{1/2}u + r^2$$

-las relaciones auxiliares $r = \rho^2/4$, $u = 2m/\rho - \rho^3/8$ son de utilidad al efectuar las transformaciones-. Las ecuaciones en las nuevas variables (ρ, v, θ, m) son:

$$\begin{aligned} \rho' &= \frac{1}{2}\rho v \\ v' &= \frac{m^2}{\rho^2} + \frac{3}{8}\rho^2 m - \frac{7}{256}\rho^6 - \frac{1}{4}v^2 + \frac{3}{8}\rho^2 h + \frac{1}{2}U(\theta) + \frac{3}{8}\rho^2 S + f \\ \theta' &= \frac{2m}{\rho} - \frac{\rho^3}{8} \\ m' &= \frac{1}{2}\rho g(\rho, \theta) + \frac{1}{2}\rho U'(\theta) \end{aligned}$$

Buscamos un Hamiltoniano $H(\rho, v, \theta, m)$ para este sistema. Integrando las ecuaciones para ρ' y θ' :

$$\rho' = \frac{1}{2}\rho v = \frac{\partial H}{\partial v}, \quad \theta' = \frac{2m}{\rho} - \frac{1}{8}\rho^3 = \frac{\partial H}{\partial m}$$

de donde

$$H(\rho, v, \theta, m) = \frac{1}{4}\rho v^2 + \frac{m^2}{\rho} - \frac{1}{8}m\rho^3 + h(\rho, \theta)$$

En la ecuación para v' notemos que los últimos dos términos en el miembro derecho pueden escribirse así:

$$\frac{3}{8}\rho^2 S + f = \frac{3}{8}\rho^2 S + \frac{1}{16}\rho^4 \frac{\partial S}{\partial r},$$

donde usamos el hecho de que $f = r^2 \partial S / \partial r$. Pero,

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \rho} = \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}$$

luego,

$$\begin{aligned} \frac{3}{8}\rho^2 S(\rho, \theta) + f(\rho, \theta) &= \frac{3}{8}\rho^2 S(\rho, \theta) + \frac{1}{8}\rho^3 \frac{\partial S}{\partial \rho} \\ &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{8}\rho^3 S(\rho, \theta) \right] \end{aligned}$$

sustituyendo en la ecuación para v' obtenemos

$$\begin{aligned} v' &= -\frac{\partial H}{\partial \rho} = -\frac{1}{4}v^2 + \frac{m^2}{\rho^2} + \frac{3}{8}m\rho^2 - \frac{\partial h}{\partial \rho} \\ &= \frac{m^2}{\rho^2} + \frac{3}{8}\rho^2 m - \frac{7}{256}\rho^6 - \frac{1}{4}v^2 \\ &\quad + \frac{3}{8}\rho^2 h + \frac{1}{2}U(\theta) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{8}\rho^3 S \right], \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\frac{\partial h}{\partial \rho} = \frac{7}{256}\rho^6 - \frac{3}{8}\rho^2 h - \frac{1}{2}U(\theta) - \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{8}\rho^3 S \right].$$

Integrando:

$$h = \frac{1}{256}\rho^7 - \frac{1}{8}\rho^3 h - \frac{1}{2}\rho U(\theta) - \frac{1}{8}\rho^3 S + k(\theta).$$

Finalmente, sustituyendo en la ecuación para θ' ,

$$\begin{aligned} m' &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{1}{2}\rho U'(\theta) + \frac{1}{8}\rho^3 \frac{\partial S}{\partial \theta} - k'(\theta) \\ &= \frac{1}{2}\rho g(\rho, \theta) + \frac{1}{2}\rho U'(\theta) \end{aligned}$$

pero la igualdad $\frac{1}{8}\rho^3 \frac{\partial S}{\partial \theta} = \frac{1}{2}\rho g(\rho, \theta)$ se sigue de la relación $\partial S / \partial \theta = g/r$. Por lo tanto $k'(\theta) = 0$ y podemos tomar $k \equiv 0$. El Hamiltoniano es finalmente:

$$\begin{aligned} H(\rho, v, \theta, m) &= \frac{1}{4}\rho v^2 + \frac{m^2}{\rho} - \frac{1}{8}m\rho^3 + \frac{1}{256}\rho^7 - \frac{1}{8}\rho^3 h \\ &\quad - \frac{1}{2}\rho U(\theta) - \frac{1}{8}\rho^3 S(\rho, \theta) \end{aligned}$$

Hemos probado así el siguiente teorema:

Teorema 3 *El sistema de ecuaciones de McGehee:*

$$\begin{aligned} r' &= rv \\ v' &= \frac{1}{2}v^2 + u^2 - U(\theta) + 2r^{3/2}u + f(r, \theta) \\ \theta' &= u \\ u' &= -\frac{1}{2}uv + U'(\theta) - 2r^{3/2}v + g(r, \theta) \end{aligned}$$

con la condición de integrabilidad

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r^2} f \right] = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} g \right],$$

se transforma en un sistema Hamiltoniano en las coordenadas (ρ, v, θ, m) donde $\rho = 2r^{1/2}$, $m = r^{1/2}u + r^2$.

Para nuestro caso necesitamos el siguiente corolario: Supongamos que se dan las hipótesis del teorema anterior y donde además $f(r, \theta)$ y $g(r, \theta)$ son funciones homogéneas del mismo grado d en la variable r . Si hacemos la sustitución $r \rightarrow \varepsilon^{2/3}r$ el sistema de ecuaciones anterior queda:

$$\begin{aligned} r' &= rv \\ v' &= \frac{1}{2}v^2 + u^2 - U(\theta) + 2\varepsilon r^{3/2}u + \varepsilon^{2d/3}f(r, \theta) \\ \theta' &= u \\ u' &= -\frac{1}{2}uv + U'(\theta) - 2\varepsilon r^{3/2}v + \varepsilon^{2d/3}g(r, \theta) \end{aligned} \quad (2.16)$$

y la relación de integrabilidad queda idéntica.

Corolario 1 *El cambio de coordenadas*

$$\rho = 2r^{1/2}, \quad \bar{m} = r^{1/2}u + \varepsilon r^2 \quad (2.17)$$

transforma el sistema de ecuaciones (2.16) en un sistema canónico.

Demostración. Supongamos que se dan las hipótesis del teorema anterior y hagamos la sustitución $r \rightarrow \varepsilon^{2/3}r$, entonces $\rho \rightarrow \varepsilon^{1/3}\rho$ y $m \rightarrow \varepsilon^{1/3}\bar{m}$. Por lo tanto

$$m d\theta + v d\rho \rightarrow \varepsilon^{1/3}(\bar{m} d\theta + v d\rho)$$

lo que significa que la transformación de coordenadas es conformemente canónica. \square

2.5 Cálculo del mapeo de Poincaré a orden ε .

Consideremos nuevamente las ecuaciones del problema de Hill

$$\begin{aligned} r' &= rv \\ v' &= \frac{1}{2}v^2 + u^2 + 2\varepsilon r^{3/2}u + 3\varepsilon^2 r^3 \cos^2 \theta \\ \theta' &= u \\ u' &= -\frac{1}{2}uv - 2\varepsilon r^{3/2}v - 3\varepsilon^2 r^3 \cos \theta \sin \theta. \end{aligned} \quad (2.18)$$

que tienen exactamente la forma del sistema de ecuaciones (2.16) con $d = 3$. Recordemos que S es la región anular del anillo $v = 0$ que tiene por frontera las curvas $u = u_{\pm}(\theta, \varepsilon)$ y

el mapeo de Poincaré $T : S \rightarrow S$ está bien definido ahí. Nuestra intención es considerar el sistema que se obtiene promediando respecto a θ , con lo que resulta en

$$\begin{aligned} r' &= rv \\ v' &= \frac{1}{2}v^2 + u^2 - 1 + 2\varepsilon r^{3/2}u + \frac{3}{2}\varepsilon^2 r^3 \\ \theta' &= u \\ u' &= -\frac{1}{2}uv - 2\varepsilon r^{3/2}v. \end{aligned}$$

El sistema posee dos integrales primeras:

$$\frac{1}{2}(u^2 + v^2) - 1 = rh + \frac{3}{4}\varepsilon^2 r^4 \quad \text{y} \quad m = r^{1/2}u + \varepsilon r^2$$

Nos interesa el valor de $h = -1/2$. En lugar de hacer directamente la transformación a coordenadas canónicas $\rho = 2r^{1/2}$, $m = r^{1/2}u + \varepsilon r^2$, procederemos como sigue: Si hacemos el cambio de variable $u \rightarrow u - \varepsilon r^{3/2}$, el sistema anterior se transforma en

$$\begin{aligned} r' &= rv \\ v' &= \frac{1}{2}v^2 + u^2 - 1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 r^3 \\ \theta' &= u - \varepsilon r^{3/2} \\ u' &= -\frac{1}{2}uv \end{aligned}$$

y las integrales primeras en

$$\frac{1}{2}(v^2 + (u - \varepsilon r^{3/2})^2) - 1 = r + \frac{3}{4}\varepsilon^2 r^4 \quad \text{y} \quad m = r^{1/2}u.$$

El mapeo de Poincaré para este sistema, en coordenadas (m, θ) tiene la forma

$$\begin{aligned} m_1 &= m_0 \\ \theta_1 &= \theta_0 + f(m_0, \theta_0, \varepsilon) \end{aligned}$$

debido a que m es una constante de movimiento. Si en la relación de energía

$$v^2 + u^2 - 2\varepsilon r^{3/2}u + \varepsilon^2 r^3 = 2 - r + \frac{3}{2}\varepsilon^2 r^4,$$

sustituimos $r^{3/2} = m^3/u^3$ y $r = m^2/u^2$ a partir de la integral $m = r^{1/2}u$, obtenemos

$$v^2 + u^2 - \frac{2\varepsilon m^3}{u^2} + \frac{\varepsilon^2 m^6}{u^6} = 2 - \frac{m^2}{u^2} + \frac{3}{2}\varepsilon^2 \frac{m^8}{u^8}$$

luego, tomando en cuenta que los términos $(m/u)^n = r^{n/2}$ están acotados para $n = 6, 8$ y despreciando los términos $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$,

$$v^2 = 2 - u^2 - \frac{m^2(1 - 2\varepsilon m)}{u^2} - \frac{\varepsilon^2 m^6}{u^6} = 2 - u^2 - \frac{m^2(1 - 2\varepsilon m)}{u^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

De las ecuaciones de movimiento se deduce que a orden ε ,

$$\begin{aligned} \pm \frac{d\theta}{du} &= \frac{u - \varepsilon r^{3/2}}{-\frac{1}{2}uv} = \frac{u - \varepsilon m^3/u^3}{-\frac{1}{2}u\sqrt{2-u^2-m^2(1-2\varepsilon m)/u^2}} \\ &= -\frac{2}{\sqrt{2-u^2-\alpha/u^2}} + \frac{2\varepsilon m^3}{u^4\sqrt{2-u^2-\alpha/u^2}} \end{aligned}$$

donde $\alpha = m^2(1 - 2\varepsilon m)$ y el signo es (+) o (-) dependiendo del signo de v . Consideremos por el momento el primer término con signo (+),

$$\frac{d\theta}{du} = -\frac{2}{\sqrt{2-u^2-\alpha/u^2}}.$$

Haciendo el cambio de variable $x = u^2$, obtenemos

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{2x-x^2-\alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{1-\alpha-(x-1)^2}}.$$

La condición $2x - x^2 - \alpha > 0$ implica que el discriminante de la ecuación debe ser positivo, lo cual impone la condición de que $4(1 - \alpha) \geq 0$, es decir $\alpha < 1$, en cuyo caso las raíces de la ecuación $2x - x^2 - \alpha = 0$ son $x = 1 \pm \sqrt{1 - \alpha}$. Hagamos $a = \sqrt{1 - \alpha}$, entonces la integración de la ecuación diferencial nos da

$$\Delta\theta_1 = \int_{1-a}^{1+a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - (x-1)^2}} = -\int_{-a}^a \frac{d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} = -\pi.$$

Para el segundo término

$$\frac{d\theta}{du} = \frac{2\varepsilon m^3}{u^4\sqrt{2-u^2-\alpha/u^2}}$$

hacemos el cambio de variable $x = u^{-2}$, de donde obtenemos $dx = -2u^{-3} du$, $d/dx = -(u^3/2)d/du$ y

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dx} &= -\frac{u^3}{2} \frac{d\theta}{du} = -\frac{\varepsilon m^3}{u\sqrt{2-u^2-\alpha/u^2}} = -\frac{\varepsilon m^3}{\sqrt{2u^2-u^4-\alpha}} \\ &= -\frac{\varepsilon m^3}{\sqrt{2/x-1/x^2-\alpha}} = -\frac{\varepsilon m^3 x}{\sqrt{2x-1-\alpha x^2}} \end{aligned}$$

Factorizando el radical como

$$2x - 1 - \alpha x^2 = \alpha \left(\frac{1-\alpha}{\alpha^2} - (x - \alpha^{-1})^2 \right)$$

y si hacemos $\xi = x - \alpha^{-1}$, $a^2 = (1 - \alpha)/\alpha^2$

$$\frac{d\theta}{d\xi} = -\frac{\varepsilon m^3(\xi + \alpha^{-1})}{\alpha^{1/2}\sqrt{a^2 - \xi^2}} = -\frac{\varepsilon m^3\alpha^{-1/2}\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} - \frac{\varepsilon m^3\alpha^{-1/2}}{\sqrt{a^2 - \xi^2}}$$

los límites de integración son $-a$ y a . Integrando,

$$\Delta\theta_2 = \varepsilon m^3 \alpha^{-1} \left. \sqrt{a^2 - \xi^2} \right|_{-a}^a - \varepsilon m^3 \alpha^{-1/2} \pi = -\varepsilon m^3 \alpha^{-1/2} \pi$$

Para calcular el mapeo de Poincaré completo debemos considerar la contribución que ocurre al considerar el signo $(-)$ cuando v es negativo, lo cual equivale a multiplicar por 2 los resultados antes obtenidos. Así recordando que $\alpha = m^2(1 - 2\varepsilon m)$ y estimando a orden cero $\sqrt{1 - 2\varepsilon m} = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon)$,

$$m_1 = m_0 \tag{2.19}$$

$$\theta_1 = \theta_0 - 2\varepsilon m_0^2 \pi + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \tag{2.20}$$

Ahora regresamos por nuestros pasos al sistema (2.18). Si pasamos de las coordenadas originales (τ, v, θ, u) a las coordenadas (ρ, v, θ, m) vía el difeomorfismo h , el anillo S , sobre el anillo $v = 0$, se transforma en una región anular \bar{S} en las nuevas coordenadas, definida por la misma ecuación $v = 0$ y tiene coordenadas (m, θ) . El mapeo de Poincaré $T : S \rightarrow S$ se conjuga mediante h en un mapeo $\bar{T} : \bar{S} \rightarrow \bar{S}$ que preserva el área $m d\theta$ -ya que el sistema es Hamiltoniano-, de modo que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{T} & S \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \bar{S} & \xrightarrow{\bar{T}} & \bar{S} \end{array}$$

es conmutativo, pero \bar{T} tiene la forma de un mapeo "twist" fuera de una vecindad de valores de $m = 0$. Tenemos así el siguiente

Teorema 4 *Para valores suficientemente grandes de la constante de Jacobi, el problema de Hill tiene toros invariantes. Todas las órbitas de expulsión o colisión permanecen dentro de toros invariantes.*

Capítulo 3

Regularización y normalización.

En esta parte del trabajo estudiaremos el Hamiltoniano del problema de Hill regularizando la singularidad en el origen. Recordemos que el Hamiltoniano viene dado por

$$H(q, p) = \frac{1}{2}|p|^2 + q_2 p_1 - q_1 p_2 - \frac{1}{|q|} - q_1^2 + \frac{1}{2} q_2^2.$$

La singularidad se regulariza mediante la transformación de Levi-Civita (en notación compleja)

$$q = x^2, \quad p = \frac{y}{2\bar{x}}, \quad \frac{dt}{d\tau} = |x|^2.$$

Después de hacer un nuevo reescalamiento de las coordenadas veremos que si $C \gg 1$, el problema puede considerarse como una perturbación de dos osciladores originalmente desacoplados en el plano con las mismas frecuencias, lo cual es sumamente degenerado. Pasando a coordenadas especiales de ángulo-acción, llamadas variables de Lissajous, procedemos a normalizar el problema eliminando una de las variables angulares —la anomalía elíptica— hasta un orden preasignado. Con esto, despreciando términos de alto orden, el estudio del Hamiltoniano truncado nos permitirá describir globalmente el problema en forma cualitativa. A manera de aplicación normalizamos el Hamiltoniano del sistema péndulo-resorte, alrededor del punto de equilibrio estable y damos la descripción global del Problema normalizado.

3.1 Regularización de Levi-Civita.

Al efectuar la transformación de Levi-Civita, el Hamiltoniano se transforma en

$$\bar{H}(x, y) = \frac{1}{2}|y|^2 + 2C|x|^2 + 2|x|^2(x_2 y_1 - x_1 y_2) + 4|x|^2(4x_1^2 x_2^2 - x_1^4 - x_2^4)$$

La regularización se efectúa sobre el nivel de energía $H = -C/2$, donde C es la constante de Jacobi que corresponde al nivel $\bar{H} = 4$. Para estudiar el caso $C \gg 1$ “explotaremos” el punto $q = 0$. Sea $\varepsilon = (4C)^{-3/2}$; en las ecuaciones para \bar{H} reescalamos la coordenada x : $x \rightarrow \varepsilon^{1/3} x$ y hacemos una nueva reparametrización del tiempo¹ $d\tau/ds = \varepsilon^{1/3}$. Se puede

¹ Al cambiar $x \rightarrow \varepsilon^{1/3} x$, $dt/d\tau = \varepsilon^{2/3}|x|^2$, luego $dt/ds = \varepsilon|x|^2 = \varepsilon|q| = (4C)^{-3/2}|q|$; ésta es la relación entre el tiempo físico t y la variable independiente s .

verificar que las nuevas ecuaciones mantienen su forma canónica con el nuevo Hamiltoniano

$$H(x, y, \varepsilon) = \frac{1}{2}(|y|^2 + |x|^2) + 2\varepsilon|x|^2(x_2y_1 - x_1y_2) + 4\varepsilon^2|x|^2(4x_1^2x_2^2 - x_1^4 - x_2^4)$$

que se obtiene formalmente del Hamiltoniano anterior mediante la sustitución $x \rightarrow \varepsilon x$.

Para $\varepsilon = 0$ el problema se reduce a dos osciladores armónicos en el plano con las mismas frecuencias y la teoría KAM no se puede aplicar directamente.

3.2 Coordenadas de Lissajous.

En esta sección introducimos variables de ángulo-acción para el oscilador armónico en el plano, llamadas variables de Lissajous debidas a André Deprit.

Empecemos por considerar el Hamiltoniano para dos osciladores armónicos en el plano con las mismas frecuencias

$$H_0(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + \frac{1}{2}\omega^2(x_1^2 + x_2^2).$$

Si hacemos el cambio de variables $(x, y) \rightarrow (x, y/\omega)$ y un reescalamiento del tiempo $t \rightarrow t/\omega$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\omega = 1$. Pasando a coordenadas polares y sus conjugadas (r, θ, R, Θ) ,

$$H_0(r, \theta, R, \Theta) = \frac{1}{2}(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2}) + \frac{1}{2}r^2.$$

Queremos encontrar algún conjunto de coordenadas canónicas (l, g, L, G) tales que H_0 tome la forma simple $H_0 = L$.

Buscamos una función generadora en coordenadas mixtas $\varphi(r, \theta, L, G)$ que nos dé la transformación

$$\begin{aligned} l &= \frac{\partial \varphi}{\partial L}, & R &= \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \\ g &= \frac{\partial \varphi}{\partial G}, & \Theta &= \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

Vamos a imponer la condición de que el momento angular Θ sea un invariante de la transformación, es decir $G = \Theta$. Luego $\partial \varphi / \partial \theta = G$ y por lo tanto

$$\varphi = G\theta + S(r, L, G).$$

Sustituyendo $\partial \varphi / \partial r$ en la primera ecuación para R nos da $\partial S / \partial r = R$ y así obtenemos una ecuación diferencial parcial para S , si requerimos que

$$H_0(l, g, L, G) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{G^2}{r^2} \right) + \frac{1}{2}r^2 = L.$$

Resolviendo para S y sustituyendo en la expresión para φ , obtenemos

$$\varphi = G\theta \pm \int_{r_{\min}} \sqrt{2L - r^2 - G^2/r^2} dr,$$

donde el signo es el de R .

Consideremos por un momento las raíces de la cuártica $2Lr^2 - r^4 - G^2$. Si introducimos $a, b \geq 0$ tales que

$$\begin{aligned} L &= (a^2 + b^2)/2, \\ |G| &= ab, \end{aligned}$$

entonces la cuártica puede factorizarse como

$$2Lr^2 - r^4 - G^2 = -(r^2 - a^2)(r^2 - b^2), \quad (3.1)$$

i.e. a y b son las raíces no negativas de la cuártica. Supongamos que $a \geq b$, entonces $L \geq |G|$ y $L = |G|$ si y solo si $a = b$. Si ahora restringimos a r a tomar valores en el intervalo $[b, a]$ y tomamos $r_{min} = b$, la transformación de coordenadas queda

$$l = \pm \int_b^r \frac{dr}{\sqrt{2L - r^2 - G^2/r^2}} \quad (3.2)$$

$$g = \theta \mp G \int_b^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{2L - r^2 - G^2/r^2}} \quad (3.3)$$

$$R = \pm \sqrt{2L - r^2 - G^2/r^2} \quad (3.4)$$

$$\Theta = G. \quad (3.5)$$

La cuadratura en (3.2) se puede hacer explícitamente introduciendo la anomalía elíptica E tal que

$$r^2 = b^2 \cos^2 E + a^2 \sin^2 E, \quad (3.6)$$

entonces R puede también expresarse en términos de E usando la factorización (3.1) como

$$\begin{aligned} R &= \pm \frac{(a^2 - b^2)}{2r} |\sen 2E| \\ &= \frac{(a^2 - b^2)}{2r} \sen 2E, \end{aligned}$$

donde hemos escogido el signo de R positivo en los intervalos donde $\sen E$ es positivo.

A partir de (3.6) obtenemos

$$rdr = (a^2 - b^2) \sen E \cos E.$$

Haciendo el cambio de variable en (3.2) obtenemos

$$\begin{aligned} l &= \pm \int_0^E \frac{2(a^2 - b^2) \sen E \cos E}{(a^2 - b^2) |\sen 2E|} dE \\ &= E. \end{aligned}$$

Para calcular (3.3) introduzcamos la anomalía verdadera f tal que

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 f}{b^2} + \frac{\sen^2 f}{a^2}. \quad (3.7)$$

La anomalía f es una función bien definida de l para L y G fijos si $b \neq 0$. Usando (3.6) y el hecho de que $l = E$, obtenemos fácilmente

$$\frac{1}{r^2} = \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) \cos^2 f + \frac{1}{a^2},$$

luego

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) r^2 \cos^2 f &= 1 - \frac{r^2}{a^2} \\ &= 1 - \frac{b^2}{a^2} \cos^2 f - \sin^2 f \\ &= \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \cos^2 f, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$r^2 \cos^2 f = b^2 \cos^2 l$$

e imponiendo la condición de que $f = 0$ cuando $l = 0$,

$$r \cos f = b \cos l.$$

Del mismo modo

$$r \sin f = a \sin l.$$

La cuadratura (3.3) puede hacerse como sigue:

$$g = \theta \mp G \int_b^r \frac{dr}{r^3 \sqrt{2L/r^2 - 1 - G^2/r^4}}.$$

Factorizando

$$\begin{aligned} \frac{2L}{r^2} - 1 - \frac{G^2}{r^4} &= \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \cos^2 f \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \sin^2 f \\ &= \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2 b^2} \cos^2 f \sin^2 f. \end{aligned}$$

El cambio de variable en la última integral da

$$\begin{aligned} g &= \theta \mp \frac{G}{ab} \int_0^f \frac{\sin 2f}{|\sin(2f)|} df \\ &= \theta - \frac{G}{ab} f. \end{aligned}$$

De la relación $|G| = ab$ tenemos al fin

$$g = \theta \mp f,$$

en donde el signo superior es para $G > 0$ y el inferior para $G < 0$. En resumen tenemos las siguientes relaciones entre las coordenadas polares y sus conjugadas con las coordenadas de Lissajous:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{b^2 \cos^2 l + a^2 \sin^2 l} \\ \theta &= g \pm f(l, a, b) \\ R &= \frac{(a^2 - b^2)}{2r} \sin 2l \\ \Theta &= G \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{L + \sqrt{L^2 - G^2}} \\ b &= \sqrt{L - \sqrt{L^2 - G^2}} \\ f(l, a, b) &= \arctan\left(\frac{a}{b} \tan l\right) \end{aligned}$$

donde el signo en la fórmula para θ es el mismo signo de G .

3.2.1 Relación con las coordenadas cartesianas.

Consideremos por un momento el caso en que $G > 0$. Si (x_1, x_2, y_1, y_2) son las coordenadas cartesianas y sus conjugadas, a partir de las ecuaciones de la sección anterior tenemos

$$\begin{aligned} x_1 = r \cos \theta &= r \cos(f + g) \\ &= r \cos f \cos g - r \sin f \sin g \\ &= b \cos l \cos g - a \sin l \sin g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 = r \sin \theta &= r \sin(f + g) \\ &= r \sin f \cos g + r \cos f \sin g \\ &= a \sin l \cos g + b \cos l \sin g. \end{aligned}$$

Los momentos y_1, y_2 pueden expresarse en variables de Lissajous usando las ecuaciones de movimiento $y = \dot{x}$, $l = 1$. Obtenemos

$$\begin{aligned} y_1 &= -b \sin l \cos g - a \cos l \sin g \\ y_2 &= a \cos l \cos g - b \sin l \sin g. \end{aligned}$$

Procediendo de la misma manera para $G < 0$ obtenemos fórmulas similares. las fórmulas se resumen abajo

$$\begin{aligned} x_1 &= b \cos l \cos g - \sigma a \sin l \sin g \\ x_2 &= \sigma a \sin l \cos g + b \cos l \sin g \\ y_1 &= -b \sin l \cos g - \sigma a \cos l \sin g \\ y_2 &= \sigma a \cos l \cos g - b \sin l \sin g, \end{aligned} \tag{3.8}$$

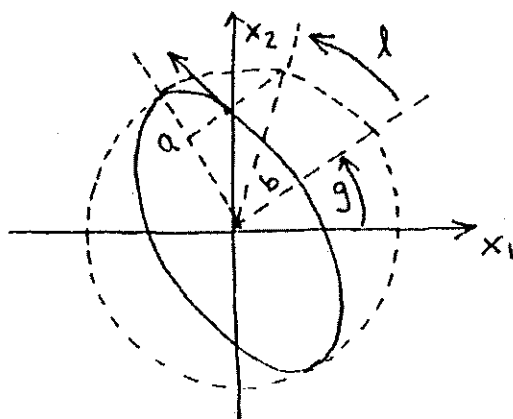


Figura 3.1: Variables de Lissajous.

en donde σ es el signo de G .

Las anomalías introducidas tienen una interpretación interesante: Cada (x_1, x_2, y_1, y_2) en el espacio fase determina una única solución de las ecuaciones de Hamilton definidas por H_0 , cuya proyección en el espacio de configuración es una elipse con centro en el origen y semiejes $0 < b < a$. La variable angular g es el argumento del pericentro (de alguno de los pericentros) y l es la "anomalía elíptica" del punto (x_1, x_2) medida en el sentido contrario a las manecillas del reloj a partir del perieje si $G > 0$, o en el sentido de las manecillas si $G < 0$. Nótese que esta forma de medir el ángulo l es consistente con la ecuación de movimiento $\dot{l} = 1$, pues entonces l es siempre creciente. Además es claro que debemos identificar (l, g) con $(l + \pi, g + \pi)$ debido a que el pericentro está definido hasta un múltiplo de π . Por construcción, también se tiene que $L \geq 0$ y $|G| \leq L$.

Todo lo antes dicho puede mostrarse usando geometría elemental de acuerdo a la Figura 3.1.

Existen dos órbitas periódicas circulares para H_0 que se recorren en sentidos opuestos y corresponden a $L = \pm G$. Las coordenadas de Lissajous (l, g, L, G) no son adecuadas para describir estas órbitas circulares ya que entonces no hay un pericentro definido al que asociarle la coordenada g . El caso $G = 0$ merece especial atención: Fijemos L y tomemos dos sucesiones (l_n^+, g_n^+, G_n^+, L) y (l_n^-, g_n^-, G_n^-, L) con $G_n^+ \rightarrow 0$ por valores positivos y $G_n^- \rightarrow 0$ por valores negativos. Supongamos que (l_n^+, g_n^+) y (l_n^-, g_n^-) tienden a valores definidos (l^+, g^+) y (l^-, g^-) respectivamente, por medio de las fórmulas (3.8) obtenemos dos sucesiones (x_n^+, y_n^+) y (x_n^-, y_n^-) que convergen a valores (x^+, y^+) y (x^-, y^-) con un valor cero para el momento angular. Las elipses definidas por las dos sucesiones (x_n^+, y_n^+) y (x_n^-, y_n^-) se colapsan en la misma elipse degenerada colineal; por lo tanto $g^+ = g^-$ o bien $g^+ = g^- + \pi$. Por argumentos geométricos simples se concluye que $l^+ = l^- + \pi$ en el primer caso, o $l^+ = l^-$, en el segundo caso. Luego en el límite $G = 0$ se obtiene que

$$\begin{array}{ll} x_1^+ &= -a \operatorname{sen} l^+ \operatorname{sen} g^+ & x_1^- &= a \operatorname{sen} l^- \operatorname{sen} g^- \\ x_2^+ &= a \operatorname{sen} l^+ \cos g^+ & x_2^- &= -a \operatorname{sen} l^- \cos g^- \\ y_1^+ &= -a \cos l^+ \operatorname{sen} g^+ & y_1^- &= a \cos l^- \operatorname{sen} g^- \\ y_2^+ &= a \cos l^+ \cos g^+ & y_2^- &= -a \cos l^- \cos g^- \end{array}$$

pero debido a la relación entre (l^+, g^+) y (l^-, g^-) ambas expresiones son iguales. Esto muestra que las coordenadas de Lissajous pueden extenderse inclusive a $G = 0$.

3.3 Normalización

En nuestro caso el Hamiltoniano del problema de Hill es de la forma

$$H = H_0 + \varepsilon H_1 + \frac{\varepsilon^2}{2!} H_2$$

con H_0 como antes. La normalización de H hasta un orden preasignado se lleva a cabo mediante una serie de transformaciones canónicas que dependen del parámetro ε ; además conviene que las transformaciones se den en forma explícita —en contraste, por ejemplo con el método de von Zeipel en el que la transformación canónica viene definida por las derivadas parciales de una función generadora que depende de variables mixtas (coordenadas nuevas y antiguas), lo cual dificulta despejar a las nuevas coordenadas en función de las antiguas. Aunque esto último puede subsanarse mediante el uso de series de Lagrange, el método no deja de tener serios inconvenientes (véase por ejemplo [Dep1]) — por ello conviene utilizar las llamadas transformadas de Lie E_W , debidas a Hori y Deprit, como sigue: (para una discusión más detallada véase el apéndice 1): denotemos por (x', y') las coordenadas originales y por (x, y) las nuevas coordenadas² relacionadas por

$$x' = E_W(x) \quad y' = E_W(y) \quad (3.9)$$

en donde el generador W se determinará en el transcurso del cálculo. Si H se expande como

$$H(x', y', \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} H_n(x', y')$$

entonces W y la forma normal K de H respecto a H_0 , se buscarán en forma de series

$$W(x, y, \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} W_{n+1}(x, y)$$

$$K(x, y, \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} K_n(x, y)$$

Los coeficientes H_n , W_n y K_n se obtienen de una manera recursiva. Por ejemplo, a primer orden en ε se obtiene la ecuación homológica

$$(H_0, W_1) + H_1 = K_1$$

Ya que H_0 solo tiene órbitas periódicas, se tiene una escisión [Cu] $C^\infty(P) = \text{im } L_{H_0} \oplus \ker L_{H_0}$ donde $L_{H_0} f := (f; H_0)$, luego podemos escribir $H_1 = \tilde{H}_1 + \bar{H}_1$ donde $\tilde{H}_1 \in \text{im } L_{H_0}$, $\bar{H}_1 \in \ker L_{H_0}$, y escoger W_1 de tal modo que $(H_0; W_1) + \bar{H}_1 = 0$; con lo que basta tomar $K_1 = \tilde{H}_1$.

En el transcurso de la recurrencia se resuelven ecuaciones homológicas semejantes y se calculan los nuevos coeficientes. Tomando $W_k = 0$ para $k > n$, el Hamiltoniano expresado en las nuevas coordenadas es

$$H(x, y, \varepsilon) = K(x, y, \varepsilon) + R(x, y, \varepsilon),$$

²Los cálculos se harán tomando las variables conjugadas (x, y) como las variables ángulo-acción para H_0 ; i.e. las variables de Lissajous (l, g, L, G)

donde

$$K = K_0 + \varepsilon K_1 + \frac{\varepsilon^2}{2!} + \cdots + \frac{\varepsilon^n}{n!} K_n, \quad R = \mathcal{O}(\varepsilon^{n+1}).$$

Cada uno de los coeficientes satisface $(K_i; H_0) = 0$ y por lo tanto $(K; H_0) = 0$. Además la transformación de coordenadas (3.9) es canónica y convergente.

La descomposición $H_1 = \tilde{H}_1 + \bar{H}_1$ se hace tomando a \bar{H}_1 como el promedio de H_1 a lo largo de las órbitas periódicas de H_0 .

$$\bar{H}_1(x_0, y_0) = \frac{1}{T(x_0, y_0)} \int_0^{T(x_0, y_0)} H_1(x(t), y(t)) dt$$

donde $(x(t), y(t))$ es la solución con condición inicial (x_0, y_0) y período $T(x_0, y_0)$ (2π en nuestro caso), y $\tilde{H}_1 = H_1 - \bar{H}_1$; así, el Hamiltoniano normalizado describe el comportamiento promedio de H a lo largo de las soluciones de H_0 .

Denotemos por (P, ω) al conjunto $\mathbb{C}^2 \setminus \{0, 0\}$ con la forma simpléctica canónica

$$\omega = \frac{1}{2i}(dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + dz_2 \wedge d\bar{z}_2),$$

y supongamos entonces que $K \in C^\infty(P)$ es una función cualquiera cuyo producto de Poisson con H_0 es nulo:

$$(K; H_0) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial K}{\partial x_i} \frac{\partial H_0}{\partial y_i} - \frac{\partial H_0}{\partial x_i} \frac{\partial K}{\partial y_i} = 0,$$

entonces H_0 es la función momento para K respecto a la acción del grupo de Lie S^1 . El espacio reducido es, por definición, $P_L = H_0^{-1}(L)/S^1$, para $L \in \mathbb{R}$, $L \neq 0$.

Definición 1 Se dice que $K \in C^\infty(P)$ está en forma normal respecto a H_0 , si $(K; H_0) = 0$.

En síntesis: Si K está en forma normal respecto a H_0 , la reducción del espacio fase fijando el valor de $H_0 = L$ es difeomorfo a una 2-esfera, donde se induce un Hamiltoniano reducido \tilde{K} . Uno puede entonces estudiar las curvas de nivel $\tilde{K} = cte.$ sobre cada uno de los espacios reducidos.

3.4 Cálculo de la forma normal a segundo orden.

En esta sección haremos los cálculos necesarios para calcular la forma normal a segundo orden. La forma normal a órdenes mayores se puede calcular codificando el algoritmo del apéndice 1. En el apéndice 2 se muestra un programa en *MATHEMATICA* que permite realizar los cálculos en una computadora.

Aclaremos la notación usada en esta sección: Si siguiéramos la notación de la sección anterior, las coordenadas originales deberían denotarse por (l', g', L', G') y las coordenadas después de efectuada la normalización por (l, g, L, G) , sin embargo para simplificar la notación, omitiremos las primas en las coordenadas originales. El contexto en el que aparezcan las variables hará evidente si se trata de las variables originales o de las nuevas.

En lo que sigue seguiremos la notación del apéndice 1. El Hamiltoniano original se escribe en la forma

$$H = f_0^{(0)} + \varepsilon f_0^{(1)} + \frac{\varepsilon^2}{2!} f_0^{(2)},$$

la forma normal como

$$K = f_0^{(0)} + \varepsilon f_1^{(0)} + \frac{\varepsilon^2}{2!} f_2^{(0)} + \dots,$$

y la función generadora como

$$W = W_1 + \varepsilon W_2 + \dots$$

El Hamiltoniano del problema de Hill expresado en coordenadas de Lissajous es

$$\begin{aligned}
 H = & \overbrace{L}^{f_0^{(0)}} \\
 & + \varepsilon \overbrace{2L^2(-\eta + e\eta \cos 2l)}^{f_0^{(1)}} \\
 & + \frac{\varepsilon^2}{2!} \overbrace{L^3 \left((-3e^2 - 2) - 15e^2 \cos 4g + \left(\frac{3}{2}e^3 + 6e \right) \cos 2l \right.}^{f_0^{(2)}} \\
 & \quad \dots \\
 & \quad - 3e^2 \cos 4l + \frac{1}{2}e^3 \cos 6l \\
 & \quad + \left(\frac{15}{4}e^3 - \frac{15}{2}e\eta + \frac{15}{2}e \right) \cos(2l - 4g) + \left(\frac{15}{4}e^3 + \frac{15}{2}e\eta + \frac{15}{2}e \right) \cos(2l + 4g) \\
 & \quad + \left(3e^2\eta - \frac{3}{2}e^2 + 3\eta - 3 \right) \cos(4l - 4g) + \left(-3e^2\eta - \frac{3}{2}e^2 - 3\eta - 3 \right) \cos(4l + 4g) \\
 & \quad \left. + \left(-\frac{3}{4}e^3 - \frac{3}{2}e\eta + \frac{3}{2}e \right) \cos(6l - 4g) + \left(-\frac{3}{4}e^3 + \frac{3}{2}e\eta + \frac{3}{2}e \right) \cos(6l + 4g) \right) \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

en donde $\eta = G/L$ y $e = \sqrt{1 - G^2/L^2}$. Esta fórmula es válida tanto para $G \geq 0$ como para $G < 0$.

Para dos funciones arbitrarias H y W que dependan de las variables (l, g, L, e, η) , el paréntesis de Poisson se calcula mediante la regla de la cadena

$$(H; W) = (H; l)(W; L) - (H; g)(W; G) + (H; g)(W; G) - (H; G)(W; g),$$

donde

$$\begin{aligned}
 (H; l) &= \frac{\partial H}{\partial e}(e; l) + \frac{\partial H}{\partial \eta}(\eta; l) - \frac{\partial H}{\partial L} \\
 (H; g) &= \frac{\partial H}{\partial e}(e; g) + \frac{\partial H}{\partial \eta}(\eta; g) - \frac{\partial H}{\partial G} \\
 (H; L) &= \frac{\partial H}{\partial l} \\
 (H; G) &= \frac{\partial H}{\partial g}
 \end{aligned}$$

y finalmente

$$\begin{aligned}
 (e; l) &= -\eta^2/(Le), & (e; g) &= \eta/(Le) \\
 (\eta; l) &= \eta/L, & (\eta; g) &= -1/L.
 \end{aligned}$$

La forma simple del término del Hamiltoniano $f_0^{(0)} = L$, permite resolver fácilmente la ecuación homológica

$$K = f + (f_0^{(0)}; W) = f + (L; W) = f - \frac{\partial W}{\partial l}$$

pues dado f y una vez seleccionado K , la W se obtiene integrando respecto a l :

$$W = \int (f - K) dl$$

Mostraremos los cálculos necesarios para calcular la forma normal de H hasta segundo orden.

Cálculo a primer orden

$$\begin{aligned} f_0^{(1)} &= f_1^{(0)} + L_1 f_0^{(0)} \\ &= f_1^{(0)} + (L; W_1) \\ f_0^{(1)} &= -2L^2\eta + \boxed{2L^2e\eta \cos(2l) - \partial W_1 / \partial l} \end{aligned}$$

Escojamos a W_1 de tal manera que podamos aniquilar la dependencia en l , para lo cual basta igualar a cero el término encuadrado. Una integración trivial nos da

$$\begin{aligned} f_0^{(1)} &= -2L^2\eta \\ W_1 &= L^2e\eta \operatorname{sen}(2l) \end{aligned}$$

Cálculo a segundo orden

Se calculan los coeficientes auxiliares

$$\bar{f}_1^{(1)} = f_2^{(0)} + L_1 f_1^{(0)} = f_2^{(0)} + (f_1^{(0)}; W_1),$$

donde

$$\begin{aligned} (f_1^{(0)}; W_1) &= (-2L^2\eta + 2L^2e\eta \cos 2l; L^2e\eta \operatorname{sen} 2l) \\ &= -2(L^2\eta; L^2e\eta \operatorname{sen} 2l) + 2(L^2e\eta \cos 2l; L^2e\eta \operatorname{sen} 2l) \\ &= -2(L^2\eta; l)(L^2e\eta \operatorname{sen} 2l; L) + 2(L^2\eta; L)^*(L^2e\eta \operatorname{sen} 2l; l) \\ &\quad - 2(L^2\eta; g)(L^2e\eta \operatorname{sen} 2l; G)^* + 2(L^2\eta; G)^*(L^2e\eta \operatorname{sen} 2l; g) \\ &\quad + 2(L^2e\eta \cos 2l; l)(L^2e\eta \operatorname{sen} 2l; L) - 2(L^2e\eta \cos 2l; L)(L^2e\eta \operatorname{sen} 2l; l) \\ &\quad + 2(L^2e\eta \cos 2l; g)(L^2e\eta \operatorname{sen} 2l; G)^* - 2(L^2e\eta \cos 2l; G)^*(L^2e\eta \operatorname{sen} 2l; g) \end{aligned}$$

donde los factores marcados con (*) son cero, mientras que

$$\begin{aligned} (L^2\eta; l) &= L^2(\eta; l) - 2L\eta = L^2 \left(\frac{\eta}{L} \right) - 2L\eta \\ &= L\eta - 2L\eta = -L\eta \\ (L^2e\eta \operatorname{sen} 2l; L) &= 2L^2e\eta \cos 2l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(L^2 e \eta \cos 2l; l) &= L^2 \eta \cos 2l(e; l) + L^2 e \cos 2l(\eta; l) - 2L e \eta \cos 2l \\
&= L^2 \eta \left(-\frac{\eta^2}{Le} \right) \cos 2l + L^2 e \left(\frac{\eta}{L} \right) \cos 2l - 2L e \eta \cos 2l \\
&= -\frac{L \eta^3}{e} \cos 2l + L e \eta \cos 2l - 2L e \eta \cos 2l \\
(L^2 e \eta \sin 2l; L) &= 2L^2 e \eta \cos 2l \\
(L^2 e \eta \cos 2l; L) &= -2L^2 e \eta \sin 2l \\
(L^2 e \eta \sin 2l; l) &= L^2 \eta \sin 2l(e; l) + L^2 e \sin 2l(\eta; l) - 2L e \eta \sin 2l \\
&= L^2 \eta \left(-\frac{\eta^2}{Le} \right) \sin 2l + L^2 e \left(\frac{\eta}{L} \right) \sin 2l - 2L e \eta \sin 2l \\
&= -\frac{L \eta^3}{e} \sin 2l + L e \sin 2l - 2L e \eta \sin 2l.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
(f_1^{(0)}; W_1) &= 2L \eta 2L^2 e \eta \cos 2l \\
&\quad + 2 \left(-\frac{L \eta^3}{e} - L e \eta \right) \cos 2l 2L^2 e \eta \cos 2l \\
&\quad - 2 \left(-2L^2 e \eta \sin 2l \right) \left(-\frac{L \eta^3}{e} - 2L e \eta \right) \sin 2l \\
&= 4L^3 e \eta^2 \cos 2l + 4L^3 (-\eta^4 - e^2 \eta^2) \cos^2 2l - 4L^3 (\eta^4 + e^2 \eta^2) \sin^2 2l \\
&= 4L^3 e \eta^2 \cos 2l - 4L^3 (\eta^4 + e^2 \eta^2).
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\bar{f}_1^{(1)} &= L^3 \left((-3e^2 - 2) - 15e^2 \cos 4g \right. \\
&\quad + \left(\frac{3}{2}e^3 + 6e + 4e\eta^2 \right) \cos 2l - 3e^2 \cos 4l + \frac{1}{2}e^3 \cos 6l \\
&\quad + \left(\frac{15}{4}e^3 - \frac{15}{2}e\eta + \frac{15}{2}e \right) \cos(2l - 4g) + \left(\frac{15}{4}e^3 + \frac{15}{2}e\eta + \frac{15}{2}e \right) \cos(2l + 4g) \\
&\quad + \left(3e^2 \eta - \frac{3}{2}e^2 + 3\eta - 3 \right) \cos(4l - 4g) + \left(-3e^2 \eta - \frac{3}{2}e^2 - 3\eta - 3 \right) \cos(4l + 4g) \\
&\quad \left. + \left(-\frac{3}{4}e^3 - \frac{3}{2}e\eta + \frac{3}{2}e \right) \cos(6l - 4g) + \left(-\frac{3}{4}e^3 + \frac{3}{2}e\eta + \frac{3}{2}e \right) \cos(6l + 4g) \right)
\end{aligned}$$

$$\bar{f}_0^{(2)} = \bar{f}_1^{(1)} + L_1 f_0^{(1)} = \bar{f}_1^{(1)} + (f_0^{(1)}; W_1),$$

donde

$$\begin{aligned}
(f_0^{(1)}; W_1) &= (-2L^2 \eta; L^2 e \eta \sin 2l) \\
&= -2(L^2 \eta; L^2 e \eta \sin 2l) \\
&= 2L \eta 2L^2 e \eta \cos 2l = 4L^3 e \eta \cos 2l
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{f}_0^{(2)} = & L^3 \left((-3e^2 - 4\eta^2 - 2) - 15e^2 \cos 4g \right. \\ & + \left(\frac{3}{2}e^3 + 6e + 8e\eta^2 \right) \cos 2l - 3e^2 \cos 4l + \frac{1}{2}e^3 \cos 6l \\ & + \left(\frac{15}{4}e^3 - \frac{15}{2}e\eta + \frac{15}{2}e \right) \cos(2l - 4g) + \left(\frac{15}{4}e^3 + \frac{15}{2}e\eta + \frac{15}{2}e \right) \cos(2l + 4g) \\ & + \left(3e^2\eta - \frac{3}{2}e^2 + 3\eta - 3 \right) \cos(4l - 4g) + \left(-3e^2\eta - \frac{3}{2}e^2 - 3\eta - 3 \right) \cos(4l + 4g) \\ & \left. + \left(-\frac{3}{4}e^3 - \frac{3}{2}e\eta + \frac{3}{2}e \right) \cos(6l - 4g) + \left(-\frac{3}{4}e^3 + \frac{3}{2}e\eta + \frac{3}{2}e \right) \cos(6l + 4g) \right).\end{aligned}$$

Para resolver la ecuación

$$f_0^{(2)} = \bar{f}_0^{(2)} + (L; W_2)$$

escogemos $f_0^{(2)}$ como el promedio de $\bar{f}_0^{(2)}$ en l , es decir

$$\begin{aligned}f_0^{(2)} &= L^3 \left((-3e^2 - 4\eta^2 - 2) - 15e^2 \cos 4g \right) \\ &= L^3 \left((-3e^2 - 4 + 4e^2 - 2) - 15e^2 \cos 4g \right) \\ &= L^3(e^2 - 6 - 15e^2 \cos 4g)\end{aligned}$$

luego, el segundo término del generador W_2 es

$$\begin{aligned}W_2 = & L^3 \left(\left(\frac{3}{4}e^3 + 3e + 4e\eta^2 \right) \sin 2l - \frac{3}{4}e^2 \sin 4l + \frac{1}{12}e^3 \sin 6l \right. \\ & + \left(\frac{15}{8}e^3 - \frac{15}{4}e\eta + \frac{15}{4}e \right) \sin(2l - 4g) + \left(\frac{15}{8}e^3 + \frac{15}{4}e\eta + \frac{15}{4}e \right) \sin(2l + 4g) \\ & + \left(\frac{3}{4}e^2\eta - \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{4}\eta - \frac{3}{4} \right) \sin(4l - 4g) + \left(-\frac{3}{4}e^2\eta - \frac{3}{8}e^2 - \frac{3}{4}\eta - \frac{3}{4} \right) \sin(4l + 4g) \\ & \left. + \left(-\frac{1}{8}e^3 - \frac{1}{4}e\eta + \frac{1}{4}e \right) \sin(6l - 4g) + \left(-\frac{1}{8}e^3 + \frac{1}{4}e\eta + \frac{1}{4}e \right) \sin(6l + 4g) \right).\end{aligned}$$

Simplificando

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}e^3 + 3e + 4e\eta^2 &= \frac{3}{4}e^3 + 3e + 4e(1 - e^2) \\ &= \frac{3}{4}e^3 + 3e + 4e - 4e^3 \\ &= -\frac{13}{4}e^3 + 7e\end{aligned}$$

obtenemos finalmente

$$f_0^{(2)} = L^3(e^2 - 6 - 15e^2 \cos 4g)$$

$$\begin{aligned}W_2 = & L^3 \left(\left(-\frac{13}{4}e^3 + 7e \right) \sin 2l - \frac{3}{4}e^2 \sin 4l + \frac{1}{12}e^3 \sin 6l \right. \\ & + \left(\frac{15}{8}e^3 - \frac{15}{4}e\eta + \frac{15}{4}e \right) \sin(2l - 4g) + \left(\frac{15}{8}e^3 + \frac{15}{4}e\eta + \frac{15}{4}e \right) \sin(2l + 4g) \\ & + \left(\frac{3}{4}e^2\eta - \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{4}\eta - \frac{3}{4} \right) \sin(4l - 4g) + \left(-\frac{3}{4}e^2\eta - \frac{3}{8}e^2 - \frac{3}{4}\eta - \frac{3}{4} \right) \sin(4l + 4g) \\ & \left. + \left(-\frac{1}{8}e^3 - \frac{1}{4}e\eta + \frac{1}{4}e \right) \sin(6l - 4g) + \left(-\frac{1}{8}e^3 + \frac{1}{4}e\eta + \frac{1}{4}e \right) \sin(6l + 4g) \right).\end{aligned}$$

En resumen, la forma normal y la función generadora a segundo orden son:

$$K = L - 2\varepsilon L^2 \eta + \frac{\varepsilon^2}{2!} L^3 (e^2 - 6 - 15e^2 \cos 2g) + \dots \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} W = & L^2 e \eta \operatorname{sen}(2l) + \\ & \varepsilon L^3 \left(\left(-\frac{13}{4} e^3 + 7e \right) \operatorname{sen} 2l - \frac{3}{4} e^2 \operatorname{sen} 4l + \frac{1}{12} e^3 \operatorname{sen} 6l \right. \\ & + \left(\frac{15}{8} e^3 - \frac{15}{4} e \eta + \frac{15}{4} e \right) \operatorname{sen}(2l - 4g) + \left(\frac{15}{8} e^3 + \frac{15}{4} e \eta + \frac{15}{4} e \right) \operatorname{sen}(2l + 4g) \\ & + \left(\frac{3}{4} e^2 \eta - \frac{3}{8} e^2 + \frac{3}{4} \eta - \frac{3}{4} \right) \operatorname{sen}(4l - 4g) + \left(-\frac{3}{4} e^2 \eta - \frac{3}{8} e^2 - \frac{3}{4} \eta - \frac{3}{4} \right) \operatorname{sen}(4l + 4g) \\ & \left. + \left(-\frac{1}{8} e^3 - \frac{1}{4} e \eta + \frac{1}{4} e \right) \operatorname{sen}(6l - 4g) + \left(-\frac{1}{8} e^3 + \frac{1}{4} e \eta + \frac{1}{4} e \right) \operatorname{sen}(6l + 4g) \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.5 Estudio del problema reducido

En esta sección estudiaremos la forma normal a orden 3, calculada con el programa en *MATHEMATICA* que se da en el apéndice 2.

Consideremos la forma normal a 3^{er} orden $H = K + \mathcal{O}(\varepsilon^4)$, donde

$$\begin{aligned} K = & L - 2\varepsilon L^2 \eta + \frac{\varepsilon^2}{2!} L^3 (e^2 - 6 - 15e^2 \cos 4g) + \\ & + \frac{\varepsilon^3}{3!} L^4 (-30e^2 \eta - 60\eta - 360e^3 \eta \cos 4g). \end{aligned}$$

Estamos interesados en un nivel de energía fijo $H = 4$. La ecuación $H(l, g, L, G, \varepsilon) = 4$ puede resolverse para L si ε es suficientemente pequeño ya que $\partial H / \partial L(l, g, L, G, 0) = 1$ y podemos buscar la solución como una serie de potencias en ε

$$L = 4 + A_1 \varepsilon + A_2 \varepsilon^2 + A_3 \varepsilon^3 + \mathcal{O}(\varepsilon^4).$$

La solución a orden $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$ puede obtenerse resolviendo la ecuación $K(g, L, G, \varepsilon) = 4$ a ese orden. La solución en *MATHEMATICA* es

$$\begin{aligned} L = & 4 + 8G\varepsilon + \varepsilon^2(160 + 18G^2 + 480 \cos 4g - 30G^2 \cos 4g) \\ & + \varepsilon^3 G(2240 + 20G^2 + 7680 \cos 4g - 360G^2 \cos 4g) + \dots \end{aligned}$$

dónde los términos $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$ contienen coeficientes que dependen en general de l . Como $\dot{l} = \partial H / \partial L = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon)$, podemos usar a l como variable independiente. Usando la regla de la cadena es fácil ver que sobre el nivel de energía $H = 4$ las ecuaciones son canónicas con Hamiltoniano $-L$

$$\frac{dg}{dl} = -\frac{\partial L}{\partial G}, \quad \frac{dG}{dl} = \frac{\partial L}{\partial g}.$$

Como veremos en seguida, es posible eliminar en el coeficiente de ε^3 los términos que contienen a $\cos 4g$ para poder integrar explícitamente las ecuaciones a ese orden.

y las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{dl} &= -\frac{\partial L}{\partial \Gamma} = -8\varepsilon - 36\varepsilon^2\Gamma - \varepsilon^3\frac{\partial R}{\partial \Gamma}(l, \gamma, \Gamma, \varepsilon) \\ \frac{d\Gamma}{dl} &= \frac{\partial L}{\partial \gamma} = \varepsilon^3\frac{\partial R}{\partial \gamma}(l, \gamma, \Gamma, \varepsilon).\end{aligned}$$

Integrando de $l = 0$ a $l = 2\pi$, el mapeo de Poincaré tiene la forma

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \Gamma_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\ \gamma_1 &= \gamma_0 - 16\pi\varepsilon - 72\pi\varepsilon^2\Gamma_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^3).\end{aligned}\tag{3.16}$$

Mediante una pequeña modificación de las coordenadas veremos que es posible aplicar el teorema *twist* de Moser, para obtener curvas invariantes si ε es suficientemente pequeño. El enunciado del teorema *twist* que usaremos es el siguiente (véase [Mo] pp.38-41, [Kyn] pp. 8-9, [Ar-Av] p. 97):

Teorema 5 (Moser) *Considérese el mapeo T*

$$\begin{aligned}R_1 &= R + \varepsilon^\sigma f(R, \theta, \varepsilon) \\ \theta_1 &= \theta + \alpha + \varepsilon^\rho \omega(R) + \varepsilon^\sigma g(R, \theta, \varepsilon)\end{aligned}$$

definido en el anillo $a \leq R \leq b$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ donde f y g se suponen periódicas en θ de periodo 2π , y $0 \leq \sigma < \rho$. Bajo las siguientes hipótesis:

1. La intersección de cualquier curva C alrededor de $R = a$ y su imagen TC es no vacía.
2. f y g son al menos de clase C^{333} .
3. $\omega'(R) \neq 0$.

Entonces para ε suficientemente pequeño existe una curva invariante. Con más precisión: dado cualquier número $\omega(R)$ entre $\omega(a)$ y $\omega(b)$ tal que $t = \varepsilon^\rho \omega(R)$ satisfaga las desigualdades

$$\left| \frac{t}{2\pi} - \frac{p}{q} \right| \geq cq^{-5/2} \quad \text{para todos los enteros } p, q \text{ con } q > 0$$

donde el parámetro $c = \mathcal{O}(\varepsilon)$, entonces existe una curva cerrada diferenciable

$$R = \mathcal{F}(\varphi, \varepsilon) \quad \theta = \varphi + \mathcal{G}(\varphi, \varepsilon)$$

con \mathcal{F}, \mathcal{G} de periodo 2π en φ , que es invariante bajo el mapeo T . La dinámica restringida a esta curva invariante viene dada por la rotación por un ángulo $\varepsilon^\rho \omega(R)$ en φ :

$$\phi \rightarrow \varepsilon^\rho \omega(R) + \varphi.$$

En el caso del mapeo (3.16), el ángulo α depende de ε y no es claro, si es posible aplicar el teorema *twist*, pero consideremos una transformación de coordenadas $(\gamma, \Gamma) \rightarrow (\phi, F)$,

En efecto, si omitimos términos constantes y cambiamos la variable independiente l por la variable lenta $l_s = 8\epsilon l$, las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned}\frac{dg}{dl_s} &= -\frac{\partial h}{\partial G} \\ \frac{dG}{dl_s} &= \frac{\partial h}{\partial g},\end{aligned}$$

donde $-h$ es el Hamiltoniano, con

$$\begin{aligned}h &= G + \epsilon\left(\frac{9}{4}G^2 + \frac{15}{4}(16 - G^2)\cos 4g\right) \\ &\quad + \epsilon^2\left(280G + \frac{5}{2}G^3 + (960G - 45G^3)\cos 4g\right)\end{aligned}\quad (3.14)$$

el cual sigue siendo degenerado a orden cero en ϵ . Para eliminar la degeneración, procederemos a eliminar el argumento del pericentro g a orden ϵ en h mediante una transformada de Lie. Usando la misma notación que antes tenemos,

$$f_0^{(1)} = \frac{9}{4}G^2 + \boxed{\frac{15}{4}(16 - G^2)\cos 4g - \frac{\partial W_1}{\partial g}},$$

de donde

$$\begin{aligned}f_0^{(1)} &= \frac{9}{4}G^2 \\ W_1^* &= \frac{15}{4}(16 - G^2)\sin 4g,\end{aligned}$$

(usamos la notación W_1^* en la función generadora para distinguirla del coeficiente W_1 del generador de la forma normal K).

Hagamos explícito el cambio de coordenadas: (g, G) son las coordenadas de la forma normal a 3^{er} orden y (γ, Γ) denotarán las nuevas coordenadas, de modo que la relación entre unas y otras es (una transformación infinitesimal de contacto):

$$\begin{aligned}g &= \gamma + \epsilon(\gamma; W_1) = \gamma + \epsilon\left(-\frac{15}{2}\Gamma\sin 4\gamma\right) \\ G &= \Gamma + \epsilon(\Gamma; W_1) = \Gamma + \epsilon\left(-\frac{15}{4}(16 - \Gamma^2)\cos 4\gamma\right).\end{aligned}$$

Haciendo la sustitución en (3.14) y expandiendo a orden ϵ^2 obtenemos

$$h(\gamma, \Gamma, \epsilon) = \Gamma + \epsilon\frac{9}{4}\Gamma^2 + \epsilon^2\frac{15}{4}\Gamma(16 - \Gamma^2)(15 - 9\cos 4\gamma) + \mathcal{O}(\epsilon^3).$$

El Hamiltoniano que nos da las ecuaciones de movimiento respecto a la variable independiente $l = l_s(8\epsilon)^{-1}$ se obtiene multiplicando la última expresión por 8ϵ que seguiremos denotando por L ,

$$L(\gamma, \Gamma, \epsilon) = 8\epsilon\Gamma + 18\epsilon^2\Gamma^2 + \epsilon^3R(l, \gamma, \Gamma, \epsilon),\quad (3.15)$$

con función generadora $W(\gamma, F, l)$. Las ecuaciones de transformación para las coordenadas y el Hamiltoniano (3.15) son

$$\phi = \frac{\partial W}{\partial F}, \quad \Gamma = \frac{\partial W}{\partial \gamma}, \quad L' = L + \frac{\partial W}{\partial l}.$$

Si hacemos

$$\phi = \gamma - 8\epsilon l, \quad (3.17)$$

entonces podemos sustituir en la primera ecuación y obtener $W = (\gamma - 8\epsilon l)F$, con ello

$$\Gamma = F \quad \text{y} \quad L' = L - 8\epsilon F,$$

y el nuevo hamiltoniano es

$$L' = 18\epsilon^2 F^2 + \epsilon^3 R(l, \phi + 8\epsilon l, F, \epsilon).$$

El residuo $\bar{R}(l, \phi, F, \epsilon) = R(l, \phi + 8\epsilon l, F, \epsilon)$ es periódico en ϕ aunque no en l . Si integramos formalmente las ecuaciones correspondientes al nuevo Hamiltoniano $-L'$,

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dl} &= -\frac{\partial L'}{\partial F} = -36\epsilon^2 F - \epsilon^3 \frac{\partial \bar{R}}{\partial F}(l, \phi, F, \epsilon) \\ \frac{dF}{dl} &= \frac{\partial L'}{\partial \phi} = \epsilon^3 \frac{\partial \bar{R}}{\partial \phi}(l, \phi, F, \epsilon) \end{aligned}$$

de $l = 0$ a $l = 2\pi$ la primera, y hasta l la segunda obtenemos

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_0 - 36\epsilon^2 \int_0^{2\pi} F(l) dl - \int_0^{2\pi} \epsilon^3 \frac{\partial \bar{R}}{\partial F}(l, \phi(l), F(l), \epsilon) dl \\ F(l) &= F_0 + \int_0^l \epsilon^3 \frac{\partial \bar{R}}{\partial \phi}(k, \phi(k), F(k), \epsilon) dk \end{aligned}$$

donde $(\phi(l), F(l))$ es la solución que pasa por (ϕ_0, F_0) en $l = 0$. Sustituyendo la segunda ecuación en la primera e integrando hasta 2π la segunda obtenemos el mapeo de Poincaré para la sección transversal $l \equiv 0 \pmod{2\pi}$

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_0 - 36\pi\epsilon^2 F_0 - \int_0^{2\pi} \epsilon^3 \frac{\partial \bar{R}}{\partial F}(l, \phi(l), F(l), \epsilon) dl \\ &\quad - 36\epsilon^5 \int_0^{2\pi} \int_0^l \frac{\partial \bar{R}}{\partial \phi}(k, \phi(k), F(k), \epsilon) dk dl \\ F_1 &= F_0 + \int_0^{2\pi} \epsilon^3 \frac{\partial \bar{R}}{\partial \phi}(l, \phi(l), F(l), \epsilon) dl. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Debido a la periodicidad de \bar{R} en ϕ y a la unicidad de las soluciones, la solución que pasa por $(\phi_0 + 2\pi, F_0)$ es $(\phi(l) + 2\pi, F(l))$; entonces la imagen del punto $(\phi_0 + 2\pi, F_0)$ bajo este mapeo es

$$\begin{aligned} \phi'_1 &= \phi_0 + 2\pi - 36\pi\epsilon^2 F_0 - \\ &\quad - 36\epsilon^5 \int_0^{2\pi} \int_0^l \frac{\partial \bar{R}}{\partial \phi}(k, \phi(k) + 2\pi, F(k), \epsilon) dk dl - \int_0^{2\pi} \epsilon^3 \frac{\partial \bar{R}}{\partial F}(l, \phi(l) + 2\pi, F(l), \epsilon) dl \\ F'_1 &= F_0 + \int_0^{2\pi} \epsilon^3 \frac{\partial \bar{R}}{\partial \phi}(l, \phi(l) + 2\pi, F(l), \epsilon) dl, \end{aligned}$$

pero de nuevo por la periodicidad de \bar{R} en la variable ϕ , se sigue que

$$\phi'_1 = \phi_1 + 2\pi \equiv \phi_1 \pmod{2\pi}, \quad F'_1 = F_1,$$

lo cual muestra que el mapeo de Poincaré es periódico en la variable ϕ_0 .

Para aplicar el teorema de Moser simplemente tomamos $a \leq b$ tales que el mapeo de Poincaré (3.18) esté definido en $a \leq F \leq b$, $0 \leq \phi \leq 2\pi \pmod{2\pi}$. Este mapeo preserva el área debido a que es el mapeo de Poincaré de un flujo Hamiltoniano, en particular se tiene la propiedad de intersección (1) de la hipótesis del teorema *twist*. Por otro lado, el conjunto de números $F \in [a, b]$ tales que la condición diofántina

$$\left| \frac{36\pi\epsilon^2 F}{2\pi} - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c}{q^{5/2}}$$

se satisfaga para algún c y para todos los p, q enteros con $q \geq 0$, forman un conjunto de medida relativa 1 en $[a, b]$, y para ϵ suficientemente pequeño existe una curva invariante

$$F = \mathcal{F}(\varphi, \epsilon) \quad \phi = \varphi + \mathcal{G}(\varphi, \epsilon)$$

donde el flujo es equivalente a la rotación

$$\varphi \rightarrow \varphi - 36\pi\epsilon^2 F.$$

Si deshacemos el cambio de coordenadas (3.17), una curva invariante en el plano $\phi - F$ se transforma en la curva invariante

$$\Gamma = \mathcal{F}(\varphi, \epsilon) \quad \gamma = \varphi + 2\pi\epsilon + \mathcal{G}(\varphi, \epsilon) \equiv \varphi + \bar{\mathcal{G}}(\varphi, \epsilon)$$

y la dinámica sobre tal curva invariante es conjugada a una rotación.

3.6 Continuasión de las órbitas periódicas circulares

El Hamiltoniano de Hill a orden cero posee dos órbitas periódicas circulares, una directa, la otra retrógrada. Veremos que estas órbitas persisten para el problema completo. Para ello consideremos de nuevo la forma normal a orden ϵ^2

$$H = L - 2\epsilon LG + \frac{\epsilon^2}{2!} L(-5L^2 - G^2 - 15(L^2 - G^2) \cos 4g) + \mathcal{O}(\epsilon^3) = 4,$$

y pasemos a variables de Poincaré

$$\begin{aligned} \lambda &= g + l & \Lambda &= L \\ \varphi &= -g & \rho &= L - G. \end{aligned}$$

Entonces $G = \Lambda - \rho$, $g = -\varphi$. Sustituyendo obtenemos

$$\begin{aligned} H &= \Lambda - 2\epsilon(\Lambda - \rho)\Lambda \\ &+ \frac{\epsilon^2}{2!} \Lambda(-5\Lambda^2 - \Lambda^2 + 2\Lambda\rho - \rho^2 - 15(2\Lambda\rho - \rho^2) \cos 4g) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Ahora resolvemos la ecuación para Λ a orden ε^2 .

$$\Lambda = 4 + 8\varepsilon(4 - \rho) + \varepsilon^2(704 - 208\rho + 17\rho^2 + 30(8\rho - \rho^2)\cos 4\varphi). \quad (3.19)$$

Las ecuaciones de Hamilton con variable independiente λ son:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\lambda} &= -\frac{\partial\Lambda}{\partial\rho} = -8\varepsilon - \varepsilon^2(-208 + 34\rho + 30(8 - 2\rho)\cos 4\varphi) + O(\varepsilon^3) \\ \frac{d\rho}{d\lambda} &= \frac{\partial\Lambda}{\partial\varphi} = -120\varepsilon^2(8\rho - \rho^2)\sin 4\varphi + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

y las ecuaciones a orden ε son

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = -8\varepsilon, \quad \frac{d\rho}{d\lambda} = 0.$$

Pasemos a coordenadas cartesianas $\xi = \sqrt{2\rho}\cos\varphi$, $\eta = \sqrt{2\rho}\sin\varphi$ (la transformación es canónica),

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\lambda} &= \varepsilon\sqrt{2\rho}\sin\varphi = 8\varepsilon\eta \\ \frac{d\eta}{d\lambda} &= -\varepsilon\sqrt{2\rho}\cos\varphi = -8\varepsilon\xi. \end{aligned}$$

Integramos de $\lambda = 0$ a $\lambda = 2\pi$ para obtener el mapeo de Poincaré en el plano ξ - η

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_0 \cos 8\pi\varepsilon - \eta_0 \sin 8\pi\varepsilon \\ \eta_1 &= \xi_0 \sin 8\pi\varepsilon + \eta_0 \cos 8\pi\varepsilon \end{aligned}$$

y el mapeo completo tiene la forma

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 8\pi\varepsilon & -\sin 8\pi\varepsilon \\ \sin 8\pi\varepsilon & \cos 8\pi\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} R_1(\xi_0, \eta_0, \varepsilon) \\ R_2(\xi_0, \eta_0, \varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Consideremos por un momento la ecuación de punto fijo

$$x = A(\varepsilon)x + \varepsilon^2 F(x, \varepsilon)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ y $A(\varepsilon)$ es una matriz real $n \times n$ de clase C^1 cuyo desarrollo de Taylor es

$$A(\varepsilon) = I + \varepsilon a_1 + \dots$$

y F es también de clase C^1 en las $n + 1$ variables. Expandiendo $A(\varepsilon)$, la ecuación se transforma en

$$x = x + \varepsilon a_1 x + \varepsilon^2 \bar{F}(x, \varepsilon)$$

dividiendo por ε obtenemos

$$0 = a_1 x + \varepsilon \bar{F}(x, \varepsilon).$$

Para $\varepsilon = 0$ tenemos la solución $x = 0$, si $|a_1| \neq 0$ entonces por el teorema de la función implícita podemos resolver la ecuación anterior para $x(\varepsilon)$. En nuestro caso

$$a_1 = 8\pi \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde $|a_1| = 8\pi \neq 0$, por lo tanto la ecuación tiene un punto fijo.

Exactamente de la misma manera se puede probar la persistencia de la órbita periódica alrededor de $G = -L$ usando las coordenadas

$$\begin{aligned} \lambda &= -g + l & \Lambda &= L \\ \varphi &= g & \rho &= L + G \end{aligned}$$

Hemos probado entonces que las órbitas periódicas circulares en el caso $\varepsilon = 0$ se continúan analíticamente para ε suficientemente pequeño. Estas órbitas periódicas se conocen en la literatura como las órbitas periódicas de Hill; su estabilidad se puede demostrar aplicando el teorema "twist" de Moser en un anillo alrededor del origen $\xi = \eta = 0$, de la misma manera que lo hicimos antes con el mapeo (3.16).

Teorema 6 *Para ε suficientemente pequeño, existen toros invariantes arbitrariamente cerca de las órbitas periódicas de Hill. En particular son orbitalmente estables.*

Dem. Daremos la demostración para la órbita periódica directa. La órbita retrógrada se estudia de manera similar.

Partimos de la expresión (3.19)

$$\Lambda = 4 + 8\varepsilon(4 - \rho) + \varepsilon^2(704 - 208\rho + 17\rho^2 + 30(8\rho - \rho^2)\cos(4\varphi)) + \dots$$

La variable φ puede eliminarse mediante una transformada de Lie hasta orden ε^2 , y se obtiene

$$\tilde{\Lambda} = 4 - 8\varepsilon\rho + \varepsilon^2(-208\rho + 17\rho^2) + \dots$$

Hagamos el cambio canónico de coordenadas $(\varphi, \rho) \rightarrow (\phi, F)$, mediante una función generadora $W(\varphi, F)$

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\partial W}{\partial F} = \varphi + 8\varepsilon\lambda \\ \rho &= \frac{\partial W}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

De la primera ecuación obtenemos

$$W = (\varphi + 8\varepsilon\lambda)F$$

y de la segunda ecuación $\rho = F$. El nuevo Hamiltoniano es

$$\begin{aligned} K &= \tilde{\Lambda} + \frac{\partial W}{\partial \lambda} \\ &= \tilde{\Lambda} + 8\varepsilon F = \tilde{\Lambda} + 8\varepsilon\rho \\ &= \varepsilon^2(-208F + 17F^2) + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Si escribimos las ecuaciones en las nuevas coordenadas e integramos respecto a λ de 0 a 2π , obtenemos el mapeo de Poincaré

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \phi_0 + \varepsilon^2(-208 + 34F) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\ F_1 &= F_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^3).\end{aligned}$$

El término de orden ε^2 tiene derivada distinta de cero en el origen $F = 0$, lo cual prueba el resultado (véase [Ste] p. 117). □

3.7 Reducción.

La reducción del Hamiltoniano de Hill a un sistema con $1\frac{1}{2}$ grados de libertad es la clásica "reducción del orden por la integral de energía" [Whi, p.313], [Kyn]. En esta sección daremos una interpretación geométrica de este procedimiento.

Después de normalizar el Hamiltoniano hasta un orden preasignado habremos obtenido $H = K + R$, donde K está en forma normal respecto a H_0 : $(K; H_0) = 0$, y $R = \mathcal{O}(\varepsilon^{k+1})$. Se sigue que K es constante a lo largo de las soluciones de H_0 , por lo que K induce una función en el espacio de órbitas de H_0 de energía fija $H_0 = L$. Primeramente veremos la estructura de este espacio de órbitas:

El flujo Hamiltoniano para $H_0 = (|y|^2 + |x|^2)/2$ es una acción de los reales sobre el espacio fase $P = \mathbf{R}^4 \setminus \{(0,0)\}$ con coordenadas (x, y) . Puesto que todas las órbitas tienen período 2π , el flujo de H_0 induce una acción de $S^1 = \mathbf{R} \bmod 2\pi$ sobre P . Si pensamos a P como $\mathbf{C}^2 \setminus \{0\}$ con coordenadas (z_1, z_2) donde $z_k = x_k + iy_k$, entonces la acción $S^1 \times P \rightarrow P$ es

$$e^{i\theta}(z_1, z_2) = (e^{i\theta}z_1, e^{i\theta}z_2)$$

y preserva la forma simpléctica canónica $\omega = \frac{1}{2i}(dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + dz_2 \wedge d\bar{z}_2)$. La función momento asociada a la acción del grupo de Lie S^1 no es más que H_0 . El espacio reducido (espacio de órbitas) es $P_L = H_0^{-1}(L)/S^1$ que es difeomorfo al espacio proyectivo $\mathbf{C}P^1$ que a su vez es difeomorfo a una esfera en \mathbf{R}^3 . De acuerdo al teorema de Marsden-Weinstein, existe una única forma simpléctica ω_L en P_L tal que $\pi^*\omega_L = i^*\omega$, donde π es la proyección e i la inclusión:

$$\begin{array}{ccc} H_0^{-1}(L) & \hookrightarrow & (\mathbf{C}^2, \omega) \\ \pi \downarrow & & \\ (P_L, \omega_L) & & \end{array}$$

Proposición 3 Existe un *symplectomorfismo*³ entre (P_L, ω_L) y la esfera de radio L , $S_L \subset \mathbf{R}^3$, con la forma simpléctica estándar.

Cabe aclarar que S_L hereda una métrica Riemanniana de la métrica euclídea en \mathbf{R}^3 y como es orientable, también un elemento de volumen (área) Ω_L , i.e. una 2-forma no degenerada en S_L que además es cerrada, ya que $d\Omega_L$ es una 3-forma en una variedad de dimensión 2. Por lo tanto Ω_L es una forma simpléctica en S_L .

³Un *symplectomorfismo* entre variedades simplécticas $\varphi : (N_1, \omega_1) \rightarrow (N_2, \omega_2)$ es un difeomorfismo que satisface $\varphi^*(\omega_2) = c\omega_1$ para alguna constante $c \neq 0$.

Si denotamos a las clases de equivalencia por $[z_1, z_2]$, entonces dos cartas proyectivas en P_L son:

$$\varphi_1([z_1, z_2]) = z_2/z_1 \quad \varphi_2([z_1, z_2]) = z_1/z_2$$

y sus inversas son, respectivamente,

$$\lambda \mapsto \frac{\sqrt{2L}}{\sqrt{1+|\lambda|^2}}[1, \lambda] \quad z \mapsto \frac{\sqrt{2L}}{\sqrt{1+|z|^2}}[z, 1].$$

El cambio de coordenadas es analítico: $z = 1/\lambda$. Empezaremos por probar el siguiente lema ∇

Lema 3 La representación de la forma simpléctica ω_L respecto al atlas $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ es

$$\omega_L^{\varphi_1}(\lambda) = \frac{2L}{(1+|\lambda|^2)^2} \frac{d\lambda \wedge d\bar{\lambda}}{2i}, \quad \omega_L^{\varphi_2}(z) = \frac{2L}{(1+|z|^2)^2} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{2i}$$

Demostración: Sean $f(\lambda, \bar{\lambda}), g(\lambda, \bar{\lambda})$ funciones C^∞ en $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ y sean $F(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2) = f(z_2/z_1, \bar{z}_2/\bar{z}_1), G(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2) = g(z_2/z_1, \bar{z}_2/\bar{z}_1)$. Entonces, por definición del paréntesis de Poisson $\{f, g\}_\lambda$, de f y g respecto a la forma simpléctica ω_L , tenemos

$$\{f, g\}_\lambda = \{F, G\}_{z_1, z_2} \quad \lambda = \frac{z_2}{z_1}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}.$$

Aquí $\{F, G\}_{z_1, z_2}$ es el paréntesis de Poisson respecto a la forma simpléctica canónica en $\mathbf{C}^2 = \mathbf{R}^4$: $\frac{1}{2i}(dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + dz_2 \wedge d\bar{z}_2)$,

$$\{F, G\}_{z_1, z_2} = 2i \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{z}_1} \frac{\partial G}{\partial z_1} - \frac{\partial F}{\partial z_1} \frac{\partial G}{\partial \bar{z}_1} + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}_2} \frac{\partial G}{\partial z_2} - \frac{\partial F}{\partial z_2} \frac{\partial G}{\partial \bar{z}_2} \right).$$

Aplicando la regla de la cadena tenemos

$$\begin{aligned} \{f, g\}_\lambda &= 2i \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\lambda}} \frac{\partial g}{\partial \lambda} - \frac{\partial f}{\partial \lambda} \frac{\partial g}{\partial \bar{\lambda}} \right) \left(\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{z}_1} \frac{\partial \lambda}{\partial z_1} + \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{z}_2} \frac{\partial \lambda}{\partial z_2} \right) \\ &= \left(\frac{|z_2|^2}{|z_1|^4} + \frac{1}{|z_1|^2} \right) (f; g)_\lambda \\ &= \frac{(1+|\lambda|^2)^2}{2L} (f; g)_\lambda, \end{aligned}$$

donde $(f; g)_\lambda$ denota el paréntesis de Poisson respecto a la forma canónica en $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$: $\frac{1}{2i}d\lambda \wedge d\bar{\lambda}$.

Análogamente, si usamos la carta $z = z_1/z_2$, dadas $f(z, \bar{z})$ y $g(z, \bar{z})$ funciones C^∞ en \mathbf{C} y si

$$\begin{aligned} F(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2) &= f(z_1/z_2, \bar{z}_1/\bar{z}_2) \\ G(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2) &= g(z_1/z_2, \bar{z}_1/\bar{z}_2) \end{aligned}$$

entonces

$$\{f, g\}_z = \frac{(1+|z|^2)^2}{2L} (f; g)_z.$$

La demostración de este lema se concluye con el siguiente lema. ∇

Lema 4 Sean $\{\cdot, \cdot\}$ y (\cdot, \cdot) dos estructuras de Poisson en una variedad compacta M y sean α y β las formas simplécticas correspondientes. Supóngase que existe una función k siempre distinta de cero en M tal que $\{f, g\} = k(f, g)$, entonces $\alpha = k^{-1}\beta$.

Demostración Para cualquier $f \in C^\infty(M)$, sean V_f, W_f los campos vectoriales en M (derivaciones) definidas por

$$V_f h = \{f, h\} \quad W_f h = (f, g).$$

La aplicación $f \mapsto W_f$ es suprayectiva ya que M es compacta [Ko-No], además

$$\alpha(V_f, V_g) = \{f, g\} = k(f, g) = k\beta(W_f, W_g),$$

pero $V_f h = \{f, h\} = k(f, h) = kW_f h$, para toda $h \in C^\infty(M)$. Por lo tanto $V_f = kW_f$ y,

$$k^2\alpha(W_f, W_g) = k\beta(W_f, W_g).$$

Pero $k \neq 0$, luego $\beta(W_f, W_g) = k\alpha(W_f, W_g)$, y como $W_{(\cdot)}$ es suprayectiva, se sigue que

$$\alpha = k^{-1}\beta,$$

que es lo que se quería demostrar.

Si aplicamos el lema anterior con $\alpha = \omega_L^{\varphi_1}$, $\beta = \frac{1}{2i}d\lambda \wedge d\bar{\lambda}$, $k = \frac{(1+|\lambda|^2)^2}{2L}$, tenemos

$$\omega_L^{\varphi_1}(\lambda) = \frac{2L}{(1+|\lambda|^2)^2} \frac{d\lambda \wedge d\bar{\lambda}}{2i}$$

Análogamente

$$\omega_L^{\varphi_2}(z) = \frac{2L}{(1+|z|^2)^2} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{2i}$$

N.B. Nótese que $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ es un atlas simpléctico para (P_L, ω_L) y que

$$\frac{1}{2i}d\lambda \wedge d\bar{\lambda}$$

es el elemento de área canónico en \mathbb{R}^2

Demostración de la proposición:

Denotemos por $S_L \subset \mathbb{R}^3$ a la esfera de radio L , $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = L^2$, y demos cartas $\psi_i : \mathbb{C} \rightarrow S_L$, $i = 1, 2$, en S_L , donde

$$\psi_1(\lambda) : \quad x_1 = L \frac{|\lambda|^2 - 1}{1 + |\lambda|^2}, \quad x_2 = -L \frac{\lambda + \bar{\lambda}}{1 + |\lambda|^2}, \quad x_3 = L \frac{\lambda - \bar{\lambda}}{i(1 + |\lambda|^2)}$$

(la expresión para $\psi_2(z)$ se obtiene cambiando λ por $1/z$). ψ_1 es la proyección estereográfica desde el punto $(L, 0, 0)$, excepto por el signo en x_2 . No hemos tomado la proyección estereográfica completa para parametrizar la esfera ya que el cambio de coordenadas sería $z \rightarrow 1/\bar{z}$, que no es canónico.

Dada una curva diferenciable $\lambda(t)$ en \mathbb{C} , si $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ es la correspondiente curva en S_L bajo cualquiera de las cartas, entonces

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{4L^2}{(1 + |\lambda|^2)^2} |\dot{\lambda}|^2$$

lo cual significa que el atlas $\{\psi_1, \psi_2\}$ amplifica un área infinitesimal en el plano por el factor

$$\frac{4L^2}{(1 + |\lambda|^2)^2}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \psi_i^* \Omega_L &= \frac{4L^2}{(1 + |\lambda|^2)^2} \frac{d\lambda \wedge d\bar{\lambda}}{2i} \\ &= 2L \omega_L^{\varphi_i}(\lambda) \end{aligned}$$

$i = 1, 2$, donde Ω_L es el elemento de área canónico en S_L . En la última expresión tenemos la representación local de la forma simpléctica ω_L en el espacio reducido S_L , que era lo que se afirmaba. □

Por la proposición anterior, existe un simplectomorfismo $h : (P_L, \omega_L) \rightarrow (S_L, \Omega_L)$ tal que $h^* \Omega_L = 2L \omega_L$ y que podemos representar en términos de los atlas respectivos $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ y $\{\psi_1, \psi_2\}$, $h_{ij} = \psi_i \circ \varphi_j$. Naturalmente basta dar por ejemplo h_{11} y h_{22} , pues $h_{ij} = h_{ik} \circ (\varphi_k^{-1} \circ \varphi_j)$. Así, h_{11} y h_{22} tienen la misma regla:

$$\begin{aligned} x_1 &= (|z_2|^2 - |z_1|^2)/2 \\ x_2 &= (\bar{z}_2 z_1 - z_2 \bar{z}_1)/2 \\ x_3 &= (z_2 \bar{z}_1 - \bar{z}_2 z_1)/2i \end{aligned}$$

Si escribimos a z_1, z_2 en coordenadas de Lissajous obtenemos una parametrización de la esfera S_L , excepto por los polos $G = \pm L$,

$$\begin{aligned} x_1 &= L e \cos 2g \\ x_2 &= L e \operatorname{sen} 2g \\ x_3 &= L \eta \end{aligned} \tag{3.20}$$

donde recordamos que $\eta = G/L$, $e = \sqrt{1 - \eta^2}$. Si introducimos el ángulo i por la relación $\eta = \cos i$, $e = \operatorname{sen} i$, entonces $(L, 2g, i)$ son las coordenadas esféricas usuales en \mathbb{R}^3 . El elemento de área en estas coordenadas es simplemente

$$\begin{aligned} \Omega_L &= L \operatorname{sen} i d(2g) \wedge L di \\ &= 2L^2 dg \wedge \operatorname{sen} i di \\ &= 2L^2 d(\cos i) \wedge dg \\ &= 2L^2 d(G/L) \wedge dg = 2L dG \wedge dg. \end{aligned}$$

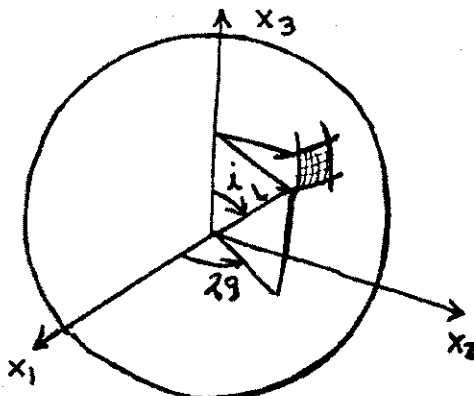


Figura 3.2: El elemento de área en S_L .

En esta fórmula podemos reconocer en $dG \wedge dg$ la expresión de la forma simpléctica ω_L , ya que en coordenadas de Lissajous, la reducción se lleva a cabo eliminando la anomalía elíptica l y fijando el valor de L ,

Las funciones coordenadas x_i , $i = 1, 2, 3$, son funciones $C^\infty(S_L)$; cuando se parametrizan como $x_i(g, G)$ y se calculan los paréntesis de Poisson entre ellas respecto a $dG \wedge dg$, se obtiene

$$\frac{\partial x_i}{\partial g} \frac{\partial x_j}{\partial G} - \frac{\partial x_i}{\partial G} \frac{\partial x_j}{\partial g} = \varepsilon_{ijk} 2Lx_k,$$

donde ε_{ijk} es el signo de la permutación (ijk) . En vista de la relación $\Omega_L = 2L dG \wedge dg$ y de acuerdo al último lema, se sigue que el paréntesis de Poisson de las coordenadas respecto a la forma Ω_L satisface

$$(x_i, x_j) = \varepsilon_{ijk} x_k. \tag{3.21}$$

Estas expresiones son idénticas a las relaciones de conmutación en el álgebra de Lie $so(3)$ del grupo $SO(3)$, excepto que las coordenadas x_i están sujetas a la relación $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = L^2$.

Si ahora K está en forma normal respecto a H_0 , para cada valor fijo $H_0 = L$, dijimos al principio de esta sección que K induce una función $K_L : P_L \rightarrow \mathbb{R}$ que hace conmutar el triángulo superior del diagrama

$$\begin{array}{ccccc} P & & K & & \mathbb{R} \\ \pi \downarrow & & K_L \nearrow & & \uparrow \hat{K}_L \\ P_L & & h & & S_L \end{array}$$

aquí h es el simplectomorfismo entre P_L y S_L . Pero entonces existe una función $\hat{K}_L : S_L \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\hat{K}_L \circ h = K_L$.

Proposición 4 Si K está en forma normal respecto a H_0 , entonces el espacio reducido es la esfera S_L en \mathbb{R}^3 y el Hamiltoniano reducido \hat{K}_L es una función en $so(3) \cap S_L$.

El campo vectorial Hamiltoniano definido por \hat{K}_L en S_L se puede calcular mediante la fórmula -independiente de coordenadas-

$$\frac{df}{ds} = (f, \hat{K}_L)$$

para las variación a lo largo del campo de cualquier función $f \in C^\infty(S_L)$. En particular para $f = x_i$, $i = 1, 2, 3$, las funciones coordenadas en S_L , y usando la regla de la cadena obtenemos (omitiendo el subíndice en \hat{K}_L)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (x_2, x_1) \frac{\partial \hat{K}}{\partial x_2} + (x_3, x_1) \frac{\partial \hat{K}}{\partial x_3} \\ \dot{x}_2 &= (x_1, x_2) \frac{\partial \hat{K}}{\partial x_1} + (x_3, x_2) \frac{\partial \hat{K}}{\partial x_3} \\ \dot{x}_3 &= (x_1, x_3) \frac{\partial \hat{K}}{\partial x_1} + (x_2, x_3) \frac{\partial \hat{K}}{\partial x_2} \end{aligned}$$

o bien, tomando en cuenta las relaciones de conmutación (3.21)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_3 \frac{\partial \hat{K}}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial \hat{K}}{\partial x_3} \\ \dot{x}_2 &= x_3 \frac{\partial \hat{K}}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial \hat{K}}{\partial x_3} \\ \dot{x}_3 &= -x_2 \frac{\partial \hat{K}}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial \hat{K}}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Veamos cómo se calcula \hat{K}_L a partir de la forma normal K . La normalización del Hamiltoniano hasta orden 6, nos da una función

$$K(L, e, \eta, g, \varepsilon) = L + \varepsilon L^2 p_1 + \frac{\varepsilon^2}{2!} L^3 p_2 + \dots + \frac{\varepsilon^k}{k!} L^{k+1} p_k \quad (3.23)$$

donde los coeficientes p_n son polinomios trigonométricos en el argumento $4g$ de la forma

$$p_n(e, \eta, g) = \sum_{0 \leq i \leq [n/2]} p_{ni}(e, \eta) \cos 4ig$$

donde $[k]$ es el mayor entero menor o igual que k , y los p_{ni} son polinomios en las variables e, η de grado menor o igual a $n+1$. Usando la fórmula de De Moivre, $e^{4ig} = (e^{2g})^{2i}$, podemos expresar a $\cos 4ig$ como un polinomio en $\sin 2g$ y $\cos 2g$. Utilizando las relaciones (3.20) podemos entonces expresar la forma normal como una función $K(L, e, \eta, g) = \hat{K}(L, x_1, x_2, x_3, \varepsilon)$.

La regularización se lleva a cabo sobre un nivel de Jacobi fijo, i.e. para cada valor de ε . Ya que L es una primera integral para el Hamiltoniano normalizado K , podemos fijar su valor. Habiendo fijado L debemos considerar nivel de energía $\hat{K}_L = 4$, que depende de ε , luego para cada valor fijo de L , la ecuación $\hat{K}_L = 4$ representa genéricamente una curva sobre la esfera S_L que varía con ε . Esto tiene el inconveniente de que ε aparece como parámetro en la ecuación $\hat{K}_L = 4$. Por cuestiones de cómputo y de análisis, sería más conveniente tener caracterizadas estas curvas como una relación $\bar{K} = \varepsilon$. Esta dificultad puede superarse como sigue:

En la expresión (3.12) para el Hamiltoniano normalizado, se puede observar que si multiplicamos por ε la relación $K = 4$ e introducimos las variables reescaladas $\bar{L} = \varepsilon L$, $\bar{G} = \varepsilon G$, entonces la relación

$$K(g, L, G, \varepsilon) = 4 \quad \text{se convierte en} \quad K(g, \bar{L}, \bar{G}, 1) = 4\varepsilon.$$

Las ecuaciones de Hamilton para $K(g, L, G, \varepsilon)$ se transforman en las ecuaciones de Hamilton para $K(g, \bar{L}, \bar{G}, 1) \equiv \bar{K}$, siempre y cuando escribamos las ecuaciones en términos del tiempo "lento" $\nu = \varepsilon s$. La transformación $(L, G) \rightarrow (\bar{L}, \bar{G})$ transforma la esfera

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = L^2 \quad \text{en} \quad \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2 = \bar{L}^2$$

donde $\bar{x}_i = \varepsilon x_i$, $i = 1, 2, 3$. Y las relaciones de conmutación

$$(x_i, x_j) = \varepsilon_{ijk} x_k \quad \text{en} \quad (\bar{x}_i, \bar{x}_j) = \varepsilon_{ijk} \bar{x}_k,$$

por lo tanto basta expresar a $\bar{K}_L(g, \bar{G}) = \bar{K}(g, \bar{L}, \bar{G})$ en función de las coordenadas en la esfera $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$,

$$\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2 = \bar{L}^2$$

y resolver las ecuaciones definidas por \bar{K}_L y las relaciones de conmutación $(\bar{x}_i, \bar{x}_j) = \varepsilon_{ijk} \bar{x}_k$. Ahora las curvas solución con \bar{L} constante, sobre $S_{\bar{L}}$ se pueden obtener graficando las curvas $\bar{K}_L = 4\varepsilon$. La ventaja de haber hecho este último reescalamiento es que el análisis del Hamiltoniano reducido no tiene por qué restringirse a ε pequeño.

En las figuras al final de esta segunda parte se muestran algunas de estas curvas para distintos valores de ε y \bar{L} . Hasta el orden 7, al que se ha podido calcular la forma normal, tenemos el siguiente resultado analítico. Por comodidad hemos omitido las barras sobre las coordenadas en el enunciado de la proposición, aunque debe entenderse que ya se han reescalado los momentos.

Proposición 5 Para cada valor de L y hasta orden 7 el polo sur de la esfera $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = L^2$ es un punto crítico estable. El polo norte es estable para valores de L en $(0, .08)$ y $(0.463552, \infty)$, es inestable para valores de L en $(.08, 0.463552)$.

Demostración

Hasta orden 7 la expresión para la forma normal K es

$$\begin{aligned} & L - 2L^2 x_3 + \frac{L^3}{2!} (x_1^2 + x_2^2 - 6 - 15(x_1^2 - x_2^2)) \\ & + \frac{L^4}{3!} x_3 (-30(x_1^2 + x_2^2) - 60 - 360(x_1^2 - x_2^2)) \\ & + \frac{L^5}{4!} \left(-\frac{4389}{4} (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2598(x_1^2 + x_2^2) - 726 \right. \\ & \left. + 7989(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 - x_2^2) - 12462(x_1^2 - x_2^2) - \right. \\ & \left. \frac{5895}{4} (x_1^4 + x_2^4 - 6x_1^2 x_2^2) \right) \\ & + \frac{L^6}{5!} x_3 \left(\left(-\frac{288735}{2} (x_1^2 + x_2^2)^2 - 277140(x_1^2 + x_2^2) \right. \right. \\ & \left. \left. + 7860 + (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 - x_2^2) - 596880(x_1^2 - x_2^2) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{290025}{2} (x_1^2 + x_2^2 - 6x_1^2 x_2^2) \right) \right) \\ & + \frac{L^7}{6!} \left(\left(\frac{37578645}{4} (x_1^2 + x_2^2)^3 + \frac{6533745}{2} (x_1^2 + x_2^2)^2 \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -23775810(x_1^2 + x_2^2) + 2151060 - \frac{43432173}{8}(x_1^2 + x_2^2)^2(x_1^2 - x_2^2) \\
 & + 25234830(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 - x_2^2) - 33439914(x_1^2 - x_2^2) \\
 & + \frac{39281643}{4}(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 6x_1^2x_2^2) \\
 & - \frac{27725925}{2}(x_1^2 + x_2^2 - 6x_1^2x_2^2) \\
 & - \frac{4644675}{8}(x_1^2 - x_2^2)(4(x_1^2 - x_2^2)^2 - 3(x_1^2 + x_2^2)^2) \Big),
 \end{aligned}$$

que tiene la siguiente forma

$$K = L + x_3 L^2 Q_2 + \frac{L^3}{2!} Q_3 + x_3 \frac{L^4}{3!} Q_4 + \frac{L^5}{4!} Q_5 + x_3 \frac{L^6}{5!} Q_6 + \frac{L^7}{6!} Q_7,$$

donde $Q_i = Q_i(z_1, z_2) = Q_i(x_1^2, x_2^2)$. Luego

$$\frac{\partial K}{\partial x_1} = \frac{\partial K}{\partial x_2} = 0 \quad \text{en } x_1 = x_2 = 0,$$

lo cual muestra que los polos norte y sur son puntos críticos. Para analizar la estabilidad lineal en el polo norte tomemos a x_1, x_2 como variables independientes. Denotaremos por δx_1 y δx_2 los desplazamientos infinitesimales en las coordenadas x_1 y x_2 . Si partimos de las ecuaciones

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -x_3 \frac{\partial K}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial K}{\partial x_3} \\
 \dot{x}_2 &= x_3 \frac{\partial K}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial K}{\partial x_3},
 \end{aligned}$$

y tomamos en cuenta que $x_3 = \pm \sqrt{L^2 - x_1^2 - x_2^2}$, entonces $x_3 = \pm L$ en $x_1 = x_2 = 0$ y

$$\frac{\partial x_3}{\partial x_1} = \frac{\partial x_3}{\partial x_2} = 0 \quad \text{en } x_1 = x_2 = 0.$$

La linealización alrededor de los polos es entonces

$$\begin{aligned}
 \delta \dot{x}_1 &= -x_3 \left(\frac{\partial^2 K}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \delta x_1 + \left(\frac{\partial K}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial^2 K}{\partial x_2^2} \right) \delta x_2 \\
 \delta \dot{x}_2 &= - \left(\frac{\partial K}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial^2 K}{\partial x_1^2} \right) \delta x_1 + x_3 \left(\frac{\partial^2 K}{\partial x_2 \partial x_1} \right) \delta x_2
 \end{aligned}$$

donde naturalmente debemos poner $x_1 = x_2 = 0, x_3 = \pm L$. Pero

$$K = \sum_{j \text{ impar}} \frac{L^j}{(j-1)!} Q_j + x_3 \sum_{j \text{ par}} \frac{L^j}{(j-1)!} Q_j,$$

luego

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x_2 \partial x_1} = \sum_{j \text{ impar}} \frac{L^j}{(j-1)!} \frac{\partial^2 Q_j}{\partial x_2 \partial x_1} + x_3 \sum_{j \text{ par}} \frac{L^j}{(j-1)!} \frac{\partial^2 Q_j}{\partial x_2 \partial x_1}.$$

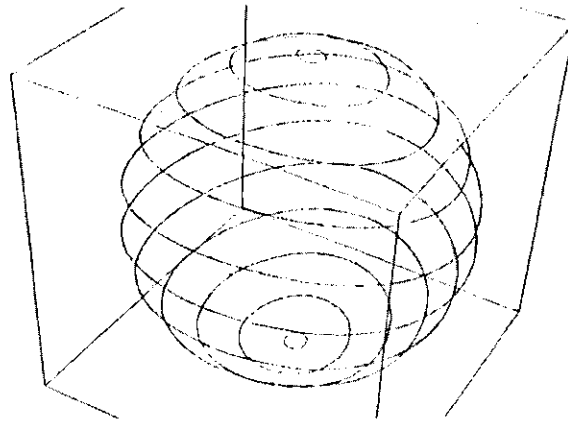


Figura 3.3: Forma normal a orden 7, $L = .01$.

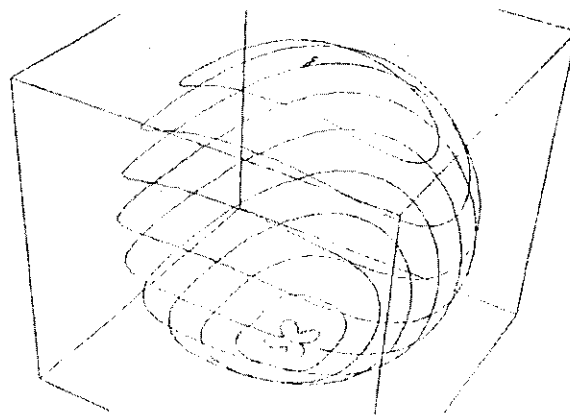


Figura 3.5: Forma normal a orden 7, $L = .08$.

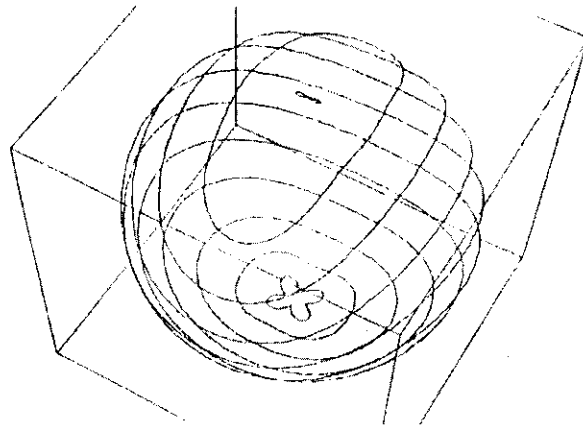


Figura 3.6: Otra perspectiva, orden 7, $L = .08$.

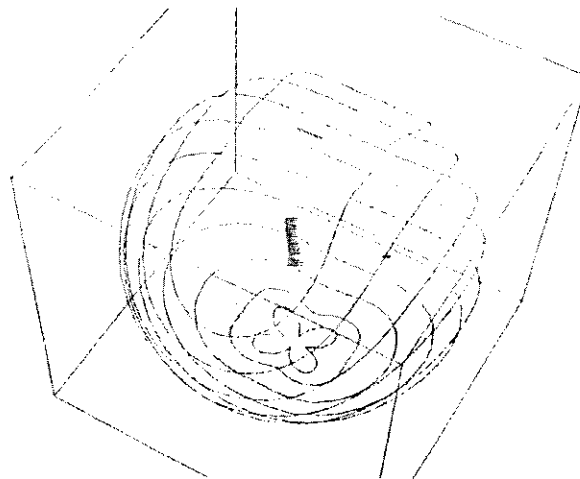


Figura 3.7: Forma normal a orden 7, $L = .1$.

Pero

$$\frac{\partial}{\partial x_1} Q(x_1^2, x_2^2) = 2x_1 \frac{\partial Q}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial x_2 \partial x_1} = 4x_1 x_2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_{x_1=x_2=0} = 0,$$

por lo tanto

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \quad \text{en } x_1 = x_2 = 0$$

y las ecuaciones linealizadas se reducen a

$$\begin{aligned} \delta x_1 &= \left(\frac{\partial K}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial^2 K}{\partial x_2^2} \right) \delta x_2 \\ \delta x_2 &= - \left(\frac{\partial K}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial^2 K}{\partial x_1^2} \right) \delta x_1 \end{aligned}$$

vemos que la estabilidad esta determinada por el producto de las cantidades $\mu_1 = \frac{\partial K}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial^2 K}{\partial x_2^2}$ y $\mu_2 = x_3 \frac{\partial^2 K}{\partial x_1^2} - \frac{\partial K}{\partial x_3}$. Un cálculo numérico muestra que las raíces reales de la ecuación $\mu_1 \mu_2 = 0$ para el polo sur $x_3 = -L$, son $L = 0$; triple, $L = -0.0813829$, $L = -0.463552$ y que en el intervalo $(0, \infty)$, el producto $\mu_1 \mu_2$ es siempre negativo probando la estabilidad del polo sur. Para $x_3 = L$, las raíces son $L = 0$, triple; $L = .0813829$, $L = 0.463552$, con el signo del producto $\mu_1 \mu_2$ negativo en $(0, 0.0813829)$ y en $(0.463552, \infty)$. \square

3.8 El sistema péndulo resorte

Consideremos el sistema mecánico considerado en la Figura 3.8. Una partícula de masa m se sujeta a un resorte lineal de constante k y longitud natural l_0 . EL resorte se supone de masa despreciable y todo el sistema está inmerso en un campo gravitacional constante de magnitud g . El sistema de coordenadas cartesiano tiene como origen el extremo fijo del resorte, con la coordenada x apuntando hacia abajo en la dirección vertical, mientras que la dirección perpendicular y es tal que el plano $x - y$ es el plano del movimiento. Las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + mg \\ m\ddot{y} &= -ky \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right). \end{aligned}$$

Este sistema tiene dos puntos de equilibrio sobre el eje x : uno estable en $x = l_0 + mg/k$ y el otro inestable en $x = l_0 - mg/k$. Tomemos como unidad de longitud la distancia del origen al punto de equilibrio estable, como unidad de tiempo el recíproco de la frecuencia del resorte $\sqrt{k/m}$. Si introducimos el parámetro adimensional $f = mg(mg + kl_0)^{-1}$ y fijamos el origen de un nuevo sistema de coordenadas cartesiano en el punto de equilibrio estable, las ecuaciones toman la forma

$$\ddot{x}_1 = -(x_1 + 1) \left(1 - \frac{1-f}{\sqrt{(x_1 + 1)^2 + x_2^2}} \right) + f$$

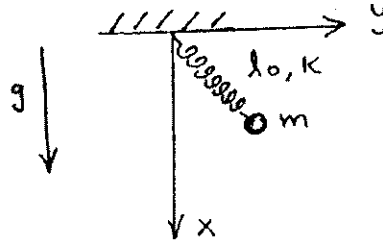


Figura 3.8: Sistema péndulo-resorte

$$\ddot{x}_2 = -x_2 \left(1 - \frac{1-f}{\sqrt{(x_1+1)^2 + x_2^2}} \right).$$

el cual es un sistema conservativo con Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) - fx_1 + \frac{1}{2}(1-f - \sqrt{(x_1+1)^2 + x_2^2})^2.$$

Existen dos casos integrables para $f = 1$ y $f = 0$. Para $f = 1$,

$$H = H = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + 1$$

es el Hamiltoniano de dos osciladores en el plano con iguales frecuencias. Para $f = 0$,

$$H = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{(x_1+1)^2 + x_2^2})^2$$

se reduce después de una traslación a

$$H = \frac{1}{2}(\eta_1^2 + \eta_2^2) + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2})^2,$$

que es invariante ante rotaciones.

El caso que nos interesa estudiar es cuando $f \simeq 1$; luego si hacemos $\varepsilon = 1 - f$, entonces el Hamiltoniano se expresa como

$$H = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + x_1^2 + x_2^2) + \varepsilon(x_1 - \sqrt{(x_1+1)^2 + x_2^2}).$$

Si expandemos la raíz cuadrada alrededor del origen, obtenemos, hasta términos de grado 4,

$$H = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + x_1^2 + x_2^2) - \frac{\varepsilon}{2}(x_2^2 - x_1x_2 - \frac{x_2^4}{4} + x_1^2x_2^2).$$

Para tener control sobre el grado de la aproximación, en la última expresión hagamos el reescalamiento $x_i = \varepsilon \bar{x}_i$, $y_i = \varepsilon \bar{y}_i$, $i = 1, 2$. Las ecuaciones

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i} \quad \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$$

se transforman en

$$\dot{x}_i = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial H}{\partial \bar{y}_i} \quad \dot{y}_i = -\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial H}{\partial \bar{x}_i},$$

o bien, si hacemos $\bar{H} = \varepsilon^{-2} H(\varepsilon \bar{x}_i, \varepsilon \bar{y}_i)$,

$$\dot{x}_i = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{y}_i} \quad \dot{y}_i = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{x}_i}.$$

Lo anterior significa que si hacemos la sustitución $x_i = \varepsilon \bar{x}_i$, $y_i = \varepsilon \bar{y}_i$ en el Hamiltoniano H y cancelamos el factor ε^2 , la función que resulta es el Hamiltoniano para las variables reescaladas. La expresión que resulta, si denotamos de nueva cuenta a las variables reescaladas por x_i , y_i , es

$$H = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + x_1^2 + x_2^2) + \left(-\frac{\varepsilon}{2}x_2^2 + \frac{\varepsilon^2}{2}x_1x_2^2 + \varepsilon^3\left(\frac{x_2^4}{8} - \frac{x_1^2x_2^2}{2}\right) \right)$$

de tal forma que cada término en el segundo sumando tiene la forma $\varepsilon^n P_{n+1}$, donde P_{n+1} es un polinomio homogéneo de grado $n + 1$.

si expresamos a H en coordenadas de Lissajous, obtenemos después de algunos cálculos

$$\begin{aligned} H = L & \\ & -\frac{\varepsilon}{4}L(2 - 2e \cos 2l + 2e \cos 2g) \\ & - (1 - \eta) \cos(2l - 2g) - (1 + \eta) \cos(2l + 2g) \\ & + \frac{\varepsilon^2}{32}L(\beta(-3 - \eta) \cos(l - g) + \alpha(3 - \eta) \cos(l + g) \\ & + (2\beta e + \alpha(-1 + \eta)) \cos(3l - g) + (-2\alpha e + \beta(1 + \eta)) \cos(3l + g) \\ & + (-2\beta e + \alpha(-1 + \eta)) \cos(l - 3g) + (2\alpha e + \beta(1 + \eta)) \cos(l + 3g) \\ & + \beta(1 - \eta) \cos(3l - 3g) + \alpha(-1 - \eta) \cos(3l + 3g)) \\ & + \frac{\varepsilon^3}{256}L^2 \left(-14 + 8\varepsilon^2 + 10\eta^2 + 8e \cos 2l + 24e \cos 2g \right. \\ & + (10 - 12e^2 - 10\eta^2) \cos 4l + (10 + 20e^2 - 10\eta^2) \cos 4g \\ & + (-8 - 8e^2 + 8\eta) \cos(2l - 2g) + (-8 - 8e^2 - 8\eta) \cos(2l + 2g) \\ & + (-20e + 20e\eta) \cos(2l - 4g) + (-20e - 20e\eta) \cos(2l + 4g) \\ & + (5 + 5\eta^2 - 10\eta) \cos(4l - 4g) + (5 + 5\eta^2 + 10\eta) \cos(4l + 4g) \\ & \left. + (-4e + 4e\eta) \cos(4l - 2g) + (4e + 4e\eta) \cos(4l + 2g) \right), \end{aligned}$$

en donde

$$\alpha = \sqrt{L + G}, \quad \beta = \sqrt{L - G}$$

El cálculo de la forma normal a primer orden en ε es inmediata pues basta promediar respecto a la variable l . Si expresamos la forma normal en términos de las coordenadas (x_1, x_2, x_3) en la esfera de radio L , obtenemos

$$K = L - \frac{\varepsilon}{2}L(1 + e \cos 2g) = L\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2}x_1$$

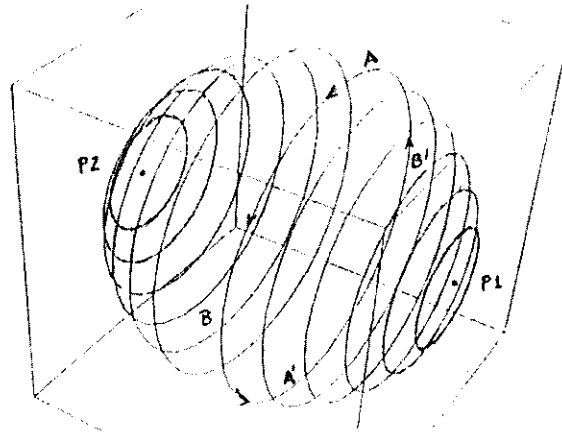


Figura 3.9: Forma normal a primer orden del péndulo-resorte.

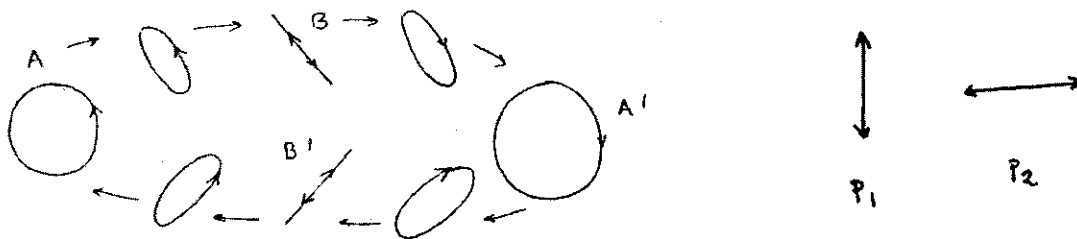


Figura 3.10: Descripción de la solución $ABA'B'$.

de donde se siguen las ecuaciones de movimiento de acuerdo a la fórmula general son

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\varepsilon}{2}x_3 \\ \dot{x}_3 &= \frac{\varepsilon}{2}x_2. \end{aligned}$$

El flujo está representado en la Figura 3.9.

Los puntos críticos $x_1 = \pm L$ corresponden a $g = 0, \pi/2$ y $G = 0$, es decir a órbitas colineales a lo largo de los ejes en el espacio de configuración. Recordemos que cada punto en la esfera representa una elipse, así, por ejemplo la órbita $ABA'B'$ representa el movimiento promedio de las soluciones a orden ε que se muestra también en la Figura 3.10.

La forma normal a orden dos es

$$\begin{aligned} K &= L - \frac{\varepsilon}{2}L(1 + e \cos 2g) - \frac{\varepsilon^2}{4}L(1 + e \cos 2g) \\ &= L\left(1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{4}\right) - \frac{\varepsilon}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)x_1 \end{aligned}$$

que representa cualitativamente el mismo flujo que la forma normal a primer orden, excepto por la velocidad con la que se recorren las elipses.

Conclusiones

Resumimos brevemente los resultados obtenidos en esta tesis que se pueden considerar originales.

- Se da una prueba analítica de la existencia de exactamente 4 órbitas de expulsión-colisión para valores grandes de la constante de Jacobi. Esto en particular implica la inexistencia de primeras integrales extendibles, independientes del Hamiltoniano.
- Se da la forma canónica de las ecuaciones de McGehee para una clase de problemas con dos grados de libertad.
- Se prueba la persistencia de toros invariantes para valores grandes de la constante de Jacobi, por dos métodos: El primero se basa en la forma canónica de las ecuaciones de McGehee para este problema, el segundo se basa en el cálculo de la forma normal del Hamiltoniano regularizado por el método de Levi-Civita. En particular se prueba la estabilidad de las órbitas periódicas de Hill. Aunque este resultado ya ha sido probado por Kummer, el Hamiltoniano que él considera es ligeramente distinto pues aparece como parámetro pequeño una razón de masas. En nuestro caso, el parámetro pequeño es como el inverso de la constante de Jacobi y aunque las técnicas son similares nosotros usamos la transformación de Lissajous para el cálculo de la forma normal, mientras que Kummer lo hace usando la forma normal de Birkhoff.
- Se da una descripción del problema de Hill en forma global, aunque aproximada, mediante la reducción del Hamiltoniano normalizado (al eliminar la anomalía elíptica). La reducción se describe mediante un flujo Hamiltoniano en una esfera con su elemento de área como la forma canónica. Además de la existencia de las órbitas periódicas de Hill, y su estabilidad el movimiento es en general cuasiperiódico con órbitas periódicas de muy alto periodo, esto en parte nos dice que las órbitas de Hill son las únicas "interesantes" para valores grandes de la constante de Jacobi.
- Se da el código en *MATHEMATICA* para el cómputo de la forma normal.

Apéndice 1

Teoría de perturbaciones basada en transformadas de Lie.

El llamado método de Von Zeipel para efectuar una transformación de coordenadas $(x, X) \rightarrow (y, Y)$ consiste en obtener la transformación mediante una función generadora $W(x, Y, \varepsilon)$ de acuerdo a las fórmulas

$$\begin{aligned} X &= \frac{\partial W}{\partial x}(x, Y, \varepsilon) \\ y &= \frac{\partial W}{\partial Y}(x, Y, \varepsilon) \end{aligned}$$

así, para obtener las coordenadas (y, Y) en términos de las antiguas (x, X) , debe despejarse Y de la primera ecuación para obtener $Y(x, X, \varepsilon)$, y sustituir en la segunda ecuación para obtener $y(x, X, \varepsilon)$. La inversión de las coordenadas (x, X) en términos de las nuevas presenta los mismos inconvenientes. Aún cuando esto sea posible, las operaciones de inversión y sustitución pueden llegar a ser muy complicadas. La teoría de Transformadas de Lie tiene al respecto ciertas ventajas importantes: la transformación de coordenadas se da de manera explícita, y la transformación de una función de las antiguas variables a las nuevas variables puede efectuarse mediante un algoritmo recursivo simple. La inversión de coordenadas puede efectuarse de la misma manera. Aún cuando las necesidades de computo y memoria pueden ser grandes, no existe un impedimento en principio para desarrollar una teoría basada en transformadas de Lie, por ejemplo para normalizar (eliminar una de las variables rápidas) alrededor de un punto de equilibrio. Referimos al lector a las referencias [Depl] y [Wil-Ferr].

Consideremos una función $W(y, Y; \varepsilon)$ de la $2n + 1$ variables $y_1, y_2, \dots, y_n; Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ y ε . Si $f(y, Y; \varepsilon)$ es otra función de las mismas variables, $(f; W)$ denotará el paréntesis de Poisson

$$(f; W) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial y_j} \frac{\partial W}{\partial Y_j} - \frac{\partial f}{\partial Y_j} \frac{\partial W}{\partial y_j} \right)$$

y $L_W f := (f; W)$. La aplicación

$$f \mapsto \Delta_W f = L_W f + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}$$

posee las siguientes propiedades:

$$\Delta_W(\alpha f + \beta g) = \alpha \Delta_W f + \beta \Delta_W g \quad (3.24)$$

$$\Delta_W(fg) = f \Delta_W g + g \Delta_W f \quad (3.25)$$

$$\Delta_W(f; g) = (\Delta_W f; g) + (f; \Delta_W g) \quad (3.26)$$

$$(\Delta_V \Delta_W - \Delta_W \Delta_V) = L_{(W; V)} + L_{(\partial W / \partial \varepsilon - \partial V / \partial \varepsilon)} \quad (3.27)$$

Se define de una manera inductiva $\Delta_W^n f = \Delta_W^{n-1}(\Delta_W f)$, $\Delta_W^0 f = f$. La propiedad (3.24) sigue siendo válida para Δ_W^n , mientras que las fórmulas correspondientes a (3.25) y (3.26) son

$$\begin{aligned}\Delta_W^n(fg) &= \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \Delta_W^m f \Delta_W^{n-m} g \\ \Delta_W^n(f; g) &= \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (\Delta_W^m f; \Delta_W^{n-m} g)\end{aligned}$$

Para simplificar la escritura, $f_0^{(n)}(y, Y)$ denotará a la expresión que se obtiene al poner $\varepsilon = 0$ en $\Delta_{W(y, Y; \varepsilon)}^n f(y, Y; \varepsilon)$.

La serie formal

$$E_W(f) = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} f_0^{(n)}(y, Y) \quad (3.28)$$

define lo que se conoce como la transformada de Lie generada por W . Como consecuencia de las propiedades de Δ_W^n , se obtienen:

$$\begin{aligned}E_W(\alpha f + \beta g) &= \alpha E_W(f) + \beta E_W(g) \\ E_W(fg) &= E_W(f)E_W(g) \\ E_W(f; g) &= (E_W(f); E_W(g))\end{aligned}$$

La última propiedad muestra que la transformación de coordenadas

$$\begin{aligned}x &= E_W(y) \\ X &= E_W(Y)\end{aligned}$$

es canónica. Si pensamos a ε como el tiempo, entonces la transformación de coordenadas es el flujo al tiempo ε del sistema canónico

$$\frac{dx}{d\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial X} W(x, X; \varepsilon) \quad \frac{dX}{d\varepsilon} = -\frac{\partial}{\partial x} W(x, X; \varepsilon) \quad (3.29)$$

con condiciones iniciales $x = y$, $X = Y$ en $\varepsilon = 0$.

En general, para cualquier función $f(x, X; \varepsilon)$ a lo largo de las soluciones $x(y, Y; \varepsilon)$, $X(y, Y; \varepsilon)$ de (3.29) se tiene

$$\frac{df}{d\varepsilon} = L_W f + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} = \Delta_W f$$

y por inducción: $d^n f / d\varepsilon^n = \Delta_W^n f$. Por el teorema de Taylor se tiene entonces

$$f(x(y, Y; \varepsilon), X(y, Y; \varepsilon)) = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} (\Delta_W f)_{\varepsilon=0} = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} f_0^{(n)}$$

lo cual puede escribirse en forma simbólica como

$$f(E_W(y), E_W(Y); \varepsilon) = E_W(f)(y, Y; \varepsilon)$$

Esta fórmula da la regla para transformar una función $f(x, X, \epsilon)$ a coordenadas (y, Y) mediante la función generadora $W(y, Y; \epsilon)$. Si $W(y, Y; \epsilon)$ y $f(y, Y; \epsilon)$ vienen dadas en forma de series

$$W(y, Y; \epsilon) = \sum_{n \geq 0} \frac{\epsilon^n}{n!} W_{n+1}(y, Y)$$

$$f(y, Y; \epsilon) = \sum_{n \geq 0} \frac{\epsilon^n}{n!} f_n(y, Y),$$

entonces, expresando las diversas potencias $\Delta_W^k f$ como

$$\Delta_W^k f = \sum_{n \geq 0} \frac{\epsilon^n}{n!} f_n^{(k)}(y, Y), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

se demuestra que los $f_n^{(k)}$ satisfacen las relaciones de recurrencia

$$f_n^{(0)} = f_n \quad n \geq 0$$

$$f_n^{(k)} = f_{n+1}^{(k-1)} + \sum_{m \geq 0} \binom{n}{m} L_{m+1} f_{n-m}^{(k-1)}, \quad k \geq 1, n \geq 0$$

y en particular

$$f_0^{(k)} = f_1^{(k-1)} + L_1 f_0^{(k-1)}$$

nos da para $k = 0, 1, 2, \dots$ los coeficientes de $E_W(f)$ de acuerdo a (3.28).

La recurrencia se muestra en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} f_0^{(0)} & & & & & & \\ \downarrow & & & & & & \\ f_1^{(0)} & \rightarrow & f_0^{(1)} & & & & \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ f_2^{(0)} & \rightarrow & f_1^{(1)} & \rightarrow & f_0^{(2)} & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ f_3^{(0)} & \rightarrow & f_2^{(1)} & \rightarrow & f_1^{(2)} & \rightarrow & f_0^{(3)} \end{array}$$

Si por ejemplo W es conocida, los datos forman la primera columna y las incógnitas son los elementos de la diagonal. Para calcular cada elemento del arreglo se utilizan los elementos arriba del elemento anterior a él, de izquierda a derecha, junto con éste. Así, para calcular $f_2^{(1)}$ se necesitan $f_3^{(0)}$ y $f_2^{(0)}$, $f_1^{(0)}$, $f_0^{(0)}$:

$$f_2^{(1)} = f_3^{(0)} + L_1 f_2^{(0)} + 2L_2 f_1^{(0)} + L_3 f_0^{(0)}$$

después podemos calcular $f_1^{(2)}$, sobre el mismo renglón, utilizando $f_2^{(1)}$ y $f_1^{(1)}$, $f_0^{(1)}$:

$$f_1^{(2)} = f_2^{(1)} + L_1 f_1^{(1)} + L_2 f_0^{(1)}$$

Finalmente, podemos calcular $f_0^{(3)}$ utilizando $f_1^{(2)}$ y $f_0^{(2)}$:

$$f_0^{(3)} = f_1^{(2)} + L_1 f_0^{(2)}$$

con lo que habremos calculado el coeficiente de $\varepsilon^3/3!$ del desarrollo (3.28).

El en el proceso de normalización W no es conocida sino que se escoge de modo que la función transformada $f(y, Y; \varepsilon)$ tenga ciertas características como: ausencia de términos periódicos, que no dependa de alguna de las variables, etc.; en tal caso tenemos como datos a los elementos de la diagonal y debemos determinar los coeficientes W_n de la función generadora que satisfaga nuestros requerimientos. Así, por ejemplo, a primer orden tenemos la E.D.P.

$$f_0^{(1)} = f_1^{(0)} + L_1 f_0^{(0)} = f_1^{(0)} + (f_0^{(0)}; W_1)$$

que se integra para obtener a W_1 . A segundo orden se calculan los elementos auxiliares

$$\bar{f}_1^{(1)} = f_2^{(0)} + L_1 f_1^{(0)} + L_2 \widehat{f_0^{(0)}}$$

(donde el símbolo $\widehat{}$ indica que dicho término no está presente). Realmente si consideráramos el término omitido tendríamos a $f_1^{(1)}$, pero desconocemos a W_2 , el cual se elegirá más adelante de acuerdo al dato $f_0^{(2)}$; para ello calculamos

$$\bar{f}_0^{(2)} = \bar{f}_1^{(1)} + L_1 f_0^{(1)}$$

y resolvemos la E.D.P. para W_2

$$f_0^{(2)} = \bar{f}_0^{(2)} + (f_0^{(0)}; W_2)$$

resta completar el cálculo de $f_1^{(1)}$

$$f_1^{(1)} = \bar{f}_1^{(1)} + L_2 f_0^{(0)}$$

Apéndice 2

(* Programa para calcular Formas Normales *)
 (* Aniquilando los terminos que dependen de l , evitando la integracion *)

```

BeginPackage["NormalForm`"]
NormalForm::usage = " NormalForm[H,K,W,e,eta,l,g,L,G,eps,d] calcula la
forma normal K de H hasta orden d respecto a las variables canonicas
l,g,L,G donde eta = G/L y e = Sqrt[1 -eta^2] "

NormalForm[f_,K_,W_,e_,eta_,l_,g_,L_,G_,eps_,d_] := Block[ {faux,n,k},
  K[0,0] = f[0,0];
  solve[W[1],f[0,1],f[1,0]];
  K[1,0] = f[1,0];
  For[ n=2,n<= d,n++,
    faux[1,n-1] = f[0,n] +
    Sum[Binomial[n-1,m] Lie[f[0,n-1-m],W[m+1],e,eta,l,g,L,G],{m,0,n-2} ];
  For[ k = 2, k <= n, k++,
    faux[k,n-k] = faux[k-1,n-k+1] +
    Sum[ Binomial[n-k,m] Lie[f[k-1,n-k-m],W[m+1],e,eta, l,g,L,G],
      {m,0,n-k} ]
    ];
  solve[W[n],faux[n,0],f[n,0] ];
  For[ k = 1, k < n, k++,
    f[k,n-k] = Collect[ factor[
      trigprodsum[
        Expand[ faux[k,n-k] + Lie[f[0,0],W[n],e,eta,l,g,L,G] ]//.simplify
      ]
      ], L ]
  ];
  K[n,0] = f[n,0];

  Print[n];
  Print["\n"];
];

] (* termina bloque *)

lfree[exp_] := FreeQ[exp,l];

solve[Wsol_,source_,kerg_] := Block[
  {temp,kergtemp,integral},
  temp = Expand[ source ]//.simplify;

```

```

kergtemp = Select[temp, lfree];
integral = factor[ temp -kergtemp];
Wsol = Collect[ integrate[integral,l],L] ;
kerg = factor[kergtemp]
      ]

```

```

Lie[H_,W_,e_,eta_,l_,g_,L_,G_] :=
factor[
  Expand[
    trigprodsum[
      Expand[
        Lie[H,l] Lie[W,L] - Lie[H,L] Lie[W,l] +
        Lie[H,g] Lie[W,G] - Lie[H,G] Lie[W,g]//.linearity
      ]
    ]
  ]//.simplify
]

```

```

Lie[f_,l] := D[f,e] Lie[e,l] + D[f,eta] Lie[eta,l] - D[f,L]
Lie[f_,g] := D[f,e] Lie[e,g] + D[f,eta] Lie[eta,g] - D[f,G]

```

```

Lie[f_,L] := D[f,l]
Lie[f_,G] := D[f,g]

```

```

Lie[e,l] = -eta^2/ (L e)
Lie[e,g] = eta/ (L e)

```

```

Lie[eta,l] = eta/L
Lie[eta,g] = - 1/L

```

```

linearity = {
  Lie[f_ + h_,l] :=> Lie[f,l] + Lie[h,l],
  Lie[f_ + h_,g] :=> Lie[f,g] + Lie[h,g],
  Lie[f_ + h_,L] :=> Lie[f,L] + Lie[h,L],
  Lie[f_ + h_,G] :=> Lie[f,G] + Lie[h,G]
}

```

```

simplify = {
  Cos[(m_Integer?Negative) x_] :=> Cos[-m x],
  Cos[-x_] :=> Cos[x],
  Cos[ (m_Integer?Negative) x_ + (p_Integer?Negative) y_] ->
    Cos[-m x - p y],
}

```

```

Sin[(m_Integer?Negative) x_] := -Sin[-m x],
Sin[-x_] := -Sin[x],
Sin[(m_Integer?Negative) x_ + (p_Integer?Negative) y_] :=
    -Sin[-m x - p y]
}

factor[exp_] := Collect[ exp, Complement[Variables[exp],{e,eta}] ]

format[W_] :=Block[{temp,temp1},
temp = mineta[ W ];
temp1 = Expand[ temp/.etatoe];
Return[
Collect[temp1 ,Complement[Variables[temp],{e,eta}]]
]
]

rule1 = {
eta^(n_Integer?EvenQ) := Expand[ (1-e^2)^(n/2)],
e^2 + eta^2 -> 1 }
etatoe = {
eta^2 -> 1-e^2,
e^2 + eta^2 -> 1 }
rule2 = {
e^(n_Integer?EvenQ) := Expand[ (1-eta^2)^(n/2)],
e^2 + eta^2 -> 1 }
etoeta = {
e^2 -> 1 -eta^2,
e^2 + eta^2 -> 1 }

ruleta[e_] := e//.rule1
rule[e_] := e//.rule2

mineta[e_] := Factor[ruleta[ExpandAll[e]]]
mine[e_] := Factor[rule[ExpandAll[e]]]

trigprodtoSum[x_ + y_] := trigprodtoSum[x] + trigprodtoSum[y];
prodtoSum = {
Sin[a_] Sin[b_] := Cos[a - b]/2 - Cos[a + b]/2,
Cos[a_] Sin[b_] := -Sin[a - b]/2 + Sin[a + b]/2,
Cos[a_] Cos[b_] := Cos[a - b]/2 + Cos[a + b]/2,
Cos[a_] Sin[a_] := Sin[2 a]/2,
Cos[a_]^2 - Sin[a_]^2 := Cos[2 a],
Sin[a_]^2 := 1/2 - Cos[2 a]/2,
Cos[a_]^2 := 1/2 + Cos[2 a]/2,

```

Bibliografía

- [AM] Abraham, R.-Marsden, J.E. *Foundations of mechanics* Benjamin/Cummings, Reading, 1978.
- [Ar-Av] Arnold, V.I.-Avez, A. *Ergodic problems of classical mechanics*. Benjamin, N.Y., 1978.
- [Brou] Broucke, R. *Rendevouz*. JPL report.
- [Ch-L] Chenciner, A.-Llibre, J. *A note on the existence of invariant punctured tori in the planar circular restricted three body problem*. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* (1988), 8*, 63-72.
- [Del] Delgado-Fernández, J. *Transversal ejection-collision orbits in Hill's problem for $C \gg 1$* . *Cel. Mech.* 44 (1988), 299-307.
- [Dep1] Deprit, A. *Canonical transformations depending on a small parameter*. *Cel. Mech.* 1 (1969), 12-30.
- [Dep2] Deprit, A. *The reduction to the rotation for planar perturbed keplerian systems*. *Cel. Mech.* 26 (1982), 229-247.
- [Dep-Mil] Deprit, A.-Miller, R. *Normalization in the face of integrability*. En "Integrability in dynamical systems", Buchler, J.R.-Ipser, J.R.-Williams, C.A. eds. 1988, 101-126.
- [Dev] Devaney, R.L. *Singularities in classical dynamical systems*. En A. Katok (ed.), *Ergodic theory and dynamical systems I*, Proc. Special Year, Maryland 1979-80. Birkhauser, Basel, 1981.
- [Hen] Henon, M. *Numerical exploration of the restricted problem V. Hill case: Periodic orbits and their stability*. *Astron. and Astrophys.* 1 (1969), 223-238.
- [Kum1] Kummer, M. *On resonant non linear coupled oscillators with two equal frequencies*. *Comm. in Math. Phys.* 48 (1976), 53-79.
- [Kum2] Kummer, M. *On the stability of Hill's solutions of the plane restricted three body problem*.
- [Kyn] Kyner, W.T. *Rigorous and formal stability of orbits around an oblate planet*. *Memoirs of the A.M.S.* no. 81, Providence Rhode Island, 1968.


```
Sin[a_]^3 :=> (3/4) Sin[a] - (1/4) Sin[3 a],
Cos[a_]^3 :=> (3/4) Cos[a] + (1/4) Cos[3 a],
Sin[a_]^4 :=> (3/8) - (1/2) Cos[2 a] + (1/8) Cos[4a],
Cos[a_]^4 :=> (3/8) + (1/2) Cos[2 a] + (1/8) Cos[4a],
Sin[a_]^5 :=> (5/8) Sin[a] - (5/16) Sin[3a] + (1/16) Sin[5a],
Cos[a_]^5 :=> (5/8) Cos[a] + (5/16) Cos[3a] + (1/16) Cos[5a]
}
trigprodtosum[e_] := Expand[ e/.prodtosum]

integrate[y_ + z_,1_] := integrate[y,1] + integrate[z,1]
integrate[c_ y_,1_] := c integrate[y,1] /; FreeQ[c,1]
integrate[Sin[y_],1_] := -Cos[y]/D[y,1]
integrate[Cos[y_],1_] := Sin[y]/D[y,1]

EndPackage[]
```

- [L-L] Lacomba, E.A.-Llibre, J. *Transversal ejection-collision orbits for the restricted three body problem and Hill's problem with applications*. J. Diff. Eq. **74** no. 1 (1988).
- [Lli] Llibre, J. *On the restricted three body problem when the parameter is small*. Cel. Mech. **28** (1982), 83-105.
- [L-L] Lacomba, E.A.-Ibort, A. *Origin and infinity manifolds for mechanical systems with homogeneous potentials*. Acta Applicandae Mathematicae **11** (1988), 259-284.
- [Mo] Moser, J. *Lectures on Hamiltonian systems*. Memoirs of the A.M.S. **81** (1968), Providence, Rhode Island.
- [Per] Perko, L.M. *Periodic orbits in the restricted three body problem: Existence and asymptotic approximation* SIAM J. Appl. Math. **27** (1974), 200-237.
- [San] Sanders, J.A. *Melnikov's method and averaging*. Cel. Mech. **28** (1982), 171-181.
- [Ste] Stenberg, Sh. *Celestial Mechanics part II*. W.A. Benjamin Inc. N.Y. 1969.
- [Sze] Szebehely, V.G. *Theory of orbits*. Academic Press, N.Y. 1967.
- [Wil-Fer] Williams, C.A.-Ferrer, S. *Simplifications towards integrability of perturbed keplerian systems*. En "Integrability in dynamical systems", Buchler, J.R.-Ipser, J.R.-Williams, C.A. eds. 1988, 127-139.
- [Whi] Whittaker, E.T. *Analytical dynamics of particles and rigid bodies.*, Cambridge Univ. Press.

