Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

UNIDAD IZTAPALAPA

Sobre la fenomenología de mundos brana a bajas energías: efecto Casimir y corrimiento Lamb

Tesis que presenta
Fis. Omar Pedraza Ortega

Para obtener el grado de
Doctor en Ciencias
(Física)

Departamento de Física

Área de Gravitación y Cosmología teórica



Director de tesis: **Dr. Hugo Aurelio Morales Técotl**

México, D.F. Septiembre, 2007

Tesis de Doctorado

Sobre la fenomenología de mundos brana a bajas energías: efecto Casimir y corrimiento Lamb



UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

UNIDAD IZTAPALAPA

Fís. Omar Pedraza Ortega

Tesis presentada para obtener el grado de

Doctor en Ciencias (Física)

Asesor:

Dr. Hugo Aurelio Morales Técotl

Iztapalapa, México, 26 de Septiembre del 2007

Dedico este trabajo a mis padres, mi esposa y mis dos bodoques.

A mis padres Quintín y Sabina con todo mi amor y admiración. A ellos debo cada uno de mis logros. Su confianza y palabras de aliento me han permitido seguir adelante. Además su fortaleza y perseverancia han sido un ejemplo para afrontar los desafíos que plantea la vida. Gracias por su apoyo y amor incondicional.

Elena tu presencia en mi vida es el regalo mas preciado que dios me ha dado, gracias por el amor, entusiasmo y alegría que me entregas cada día.

Agradecimientos

Agradezco gustosamente a mi asesor Dr. Hugo Aurelio Morales Técotl, por su ayuda, generosidad y paciencia en la realización de esta tesis. Su talento científico, devoción y amor a la física han sido una gran inspiración para mí.

También agradezco al Dr. Román Linares Romero por su continuo optimismo en nuestras reuniones de trabajo, por impulsarme y bosquejarme el camino a seguir. Asimismo agradezco al Dr. Luis Octavio Pimentel Rico por su apoyo en el trabajo realizado en colaboración con él. Hago patente también mi agradecimiento al Dr. Roy Maartens del instituto de Cosmología y Gravitación de la universidad de Portsmouth, Reino Unido, por su hospitalidad y guía durante mi visita de 3 meses a su institución en el verano del 2006.

Agradezco a mi familia: Quintín, Sabina. Elena, Israel y Aldair, por su apoyo ilimitado sin el cual todo mi trabajo habría sido imposible.

Esta tesis ha sido realizada con el apoyo económico de una beca de doctorado de CONACyT (162767). Mi visita al instituto de Cosmología y Gravitación de la universidad de Portsmouth,

Reino Unido en el verano del 2006 también fue apoyada a través del programa de becas mixtas de CONACyT. A lo largo de la realización de este proyecto varios resultados fueron presentados en distintos eventos nacionales e internacionales. Esto fue posible gracias al apoyo de algunos proyectos de investigación: CONACyT 40745, CONACyT 51132F, CONACyT-NSF E120-2618. La preparación final de esta tesis y el último artículo realizado se logró gracias al apoyo como asistente de investigación dentro del proyecto CONACyT 47597F.

Finalmente, pero no menos importante, quiero agradecer el apoyo financiero y hospitalidad del Centro Internacional de Física Teórica de Trieste, Italia, a través del programa de colaboradores jóvenes de miembros asociados que me permitió realizar una estancia de investigación en ese centro en el verano del 2003. Algunas partes de esta tesis fueron inicidas allí.

Resumen

La posibilidad de que nuestro espacio tiempo tenga más de tres dimensiones espaciales ha sido de gran interés nuevamente en años recientes. Sin embargo la historia de las dimensiones extras. como suele llamárseles, comienza con los trabajos de Gunna Nordström, Theodor Kaluza y Oskar Klein en el primer cuarto del siglo XX quienes introducen, de manera independiente, una quinta dimensión como un intento para unificar las interacciones gravitacional y electromagnética. En los trabajos de Kaluza-Klein se considera que la quinta dimensión es compacta con un tamaño de la escala de Planck, 10^{-33} cm, para ser consistente con la física conocida entonces. Después de un receso de casi medio siglo la idea de dimensiones extras resurge en las teorías de supergravedad y posteriormente en las teorías de cuerdas, hoy incluidas dentro de la llamada teoría M. En todos estos casos la intención ha sido unificar la gravitación con el Modelo Estándar el cual a su vez incorpora la interacción electrodébil y fuerte.

El estudio de estas teorías de cuerdas ha llevado naturalmente a la necesidad de considerar también "*branas*", es decir subespacios del espacio-tiempo que pueden tener varias dimensiones espaciales. Con esta terminología se reserva la denominación membrana para

una superficie de dimensión dos. Con la intención de resolver el denominado problema de jerarquía (es decir la enorme diferencia entre la escala electrodébil de 1 TeV y la escala de Planck de 10^{19} GeV, entre otras) las teorías con dimensiones extras suponen que los campos del Modelo Estándar con excepción de la gravedad, se localizan en una brana 3+1 dimensional encajada en un espacio tiempo de dimensión mayor. En estos escenarios de mundos brana las dimensiones extras pueden ser compactas y grandes, es decir no necesariamente del tamaño de la longitud de Planck, ó, de hecho infinitas. Existe una gama amplia de posibles modelos de este tipo pero en esta tesis nos consentraremos solo en algunos de ellos.

La posibilidad de identificar la presencia de dimensiones extras mediante algún experimento es una de las razones mas importantes por las que estos modelos han llamado mucho la atención nuevamente. Sin embargo, la mayor parte de su estudio se ha enfocado en la física de altas energías (ver [39, 93, 105]), mientras que se han investigado relativamente poco las consecuencias de las dimensiones extras en la física de bajas energías.

En esta tesis se estudiará una parte de la posible fenomenología a bajas energías de algunos escenarios de dimensiones extras; específicamente se considerarán el efecto Casimir y el corrimiento Lamb. Recientemente Randjbar-Daemi y Shaposhnikov propusieron una electrodinámica efectiva cuatro dimensional proveniente de una solución tipo vórtice de Nielsen-Olsen en 6 dimensiones para un modelo de Higgs abeliano con fermiones acoplados a la gravedad. En este escenario discutiremos el efecto Casimir electromagnético entre dos placas paralelas y su compatibilidad con los datos experimentales conocidos. Otro de los escenarios que consideraremos es el de Randall-Sundrum, que incluye una sola brana, una dimensión no compacta y n dimensiones compactas al que denotamos como RSIIn. Este escenario permite localizar a los campo electromagnético, fermiónico y escalar. Aquí determinamos la fuerza de Casimir efectiva para un campo escalar con y sin masa entre dos placas paralelas. Por completez se estudiará la fuerza de Casimir para un campo escalar con y sin masa en el escenario RSII, que difiere del anterior por la ausencia de las n dimensiones compactas.

Para poder estudiar el corrimiento Lamb, el primer paso es determinar el potencial electromagnético efectivo que reemplaza al de Coulomb en RSIIn. Encontramos que los potenciales

electromagnéticos efectivos de una carga puntual (vista por un observador en un subespacio cuatro dimensional del espacio tiempo) coinciden con los potenciales electromagnéticos de Liennard-Wiechert a grandes distancias, difiriendo drásticamente de estos últimos cerca de la posición de la partícula. De hecho son finitos en la posición de la carga, produciendo así una auto energía finita.

Se propone un modelo de átomo de Hidrógeno con sus constituyentes localizados en la brana y que interactúan vía el potencial efectivo de Coulomb calculado antes. Esto permite estudiar la separación $2S_{1/2} - 2P_{1/2}$ correspondiente al corrimiento Lamb para la cual hay datos experimentales precisos en la literatura y que téoricamente se explica con base en la electrodinámica cuántica. Con ello analizamos la viabilidad del modelo de mundo brana en cuestión.

Finalmente discutimos nuestros resultados así como posibles extensiones de nuestro análisis junto con otras posibles pruebas de precisión a bajas energías para mundos brana.

Publicaciones de los resultados originales contenidos en esta tesis.

1. Casimir effect in a six-dimensional vortex scenario, Roman Linares, Hugo A. Morales-Técotl, Omar Pedraza, Physics Letters B 633, 362-367 (2006). Referencia [70].

2. 4D Casimir force for a scalar field in brane worlds, Roman Linares, Hugo A. Morales-Técotl, Omar Pedraza, (En preparación). Referencia [69].

3. Low-energy effects in brane worlds: Liennard-Wiechert potentials and Hydrogen Lamb shift, Hugo A. Morales-Técotl, Omar Pedraza and Luis O. Pimentel, Journal of General Relativity and Gravitation 39, 1185-1202 (2007). Referencia [86].

4. Electromagnetic Potentials and Hydrogen atom in Brane Worlds Hugo A. Morales-Técotl, Omar Pedraza and Luis O. Pimentel, Physical Review Letters (En revisión). Referencia [85].

Índice general

Agradecimientos III

Resumen V

1. Introducción 1

2. Escenarios con dimensiones extras 7

2.1. Teorías de Kaluza Klein 8

2.2. Mundos brana 12

2.2.1. Modelo de Arkani-Hamed, Dimopoulos y Dvali (ADD) 13

2.2.2. Modelo de Randall Sundrum (RSII) 16

2.2.3. Modelo RSIIn 19

2.2.4. Modelo de Randjbar-Daemi-Shaposhnikov (RDSh) 21

2.3. Mecanismos de localización 23

2.3.1. Campo escalar 24

2.3.2. Fermiones masivos en RSIIn 29

2.3.3. Campo electromagnético 34

3. Fuerza de Casimir en mundos brana **37**

3.1. Campo electromagnético en RDSh 39

3.2. Campo escalar en RSIIn 44

3.3. Campo escalar en RSII 54

4. Potenciales electromagnéticos y átomo de Hidrógeno en RSIIn **63**

4.1. Carga puntual en movimiento uniforme en RSIIn 64

4.2. Átomo de Hidrógeno en RSIIn 71

5. Conclusiones y discusión **81**

A. Fuerza de Casimir 4D **87**

A.1. Campo electromagnético en 4D 87

A.2. Campo escalar masivo en 4D 90

B. Solución a la ecuación de Dirac en un campo externo **97**

C. Cálculo del corrimiento Lamb en electrodinámica cuántica **105**

Índice de figuras

2.1. *Representación gráfica del escenario de Kaluza-Klein.* 13

2.2. *Representación de los mundos brana.* 17

2.3. *El origen de este vórtice representa nuestro mundo cuatro dimensional en donde los campos de materia se localizan. Lejos del vórtice los campos de materia se diluyen.* 23

3.1. *Representación esquemática para la fuerza Casimir del campo electromagnético entre dos placas paralelas. Las ondulaciones representan fluctuaciones de vacío de un campo cuántico, obviamente injustificable dentro de una descripción clásica del mismo.* 38

3.2. *La figura muestra la fuerza de Casimir efectiva para los tres primeros modos compactos y la fuerza de Casimir usual 4D entre placas paralelas para un campo escalar masivo en donde la coordenada horizontal representa ml y la coordenada vertical a* $|fl^4|$. 52

3.3. *La figura muestra la fuerza de Casimir efectiva para dos valores diferentes de R, graficando los dos primeros modos compactos y el caso 4D. Nuevamente la coordenada vertical representa a* $|fl^4|$. 52

3.4. *La figura muestra el espectro de operador (3.34). a) si $\mu \neq 0$ el espectro es continuo y m_0 representa la masa de la partícula cuatro dimensional que decae en los modos continuos. b) para $\mu = 0$ el espectro es mixto. Se tiene un solo estado discreto que permite localizar a una partícula cuatro dimensional sin masa además de una torre de estados continuos.* 53

4.1. *En la gráfica se muestran los potenciales electrostáticos efectivos (4.27) y (4.35). La línea continua representa al potencial de Coulomb. Las cruces corresponden a $n = 1$ y los círculos a $n = 2$. El eje vertical corresponde a los potenciales electrostáticos en unidades Gaussianas multiplicado por el parámetro κ^{-1} y el eje horizontal a la coordenada radial $r\kappa$.* 70

4.2. *La figura muestra las equipotenciales de los potenciales efectivos (4.25). (4.32) y de LW. La línea continua representa al potencial electromagnético de LW. Los puntos corresponden a $n = 1$ y las cruces a $n = 2$. Estas equipotenciales corresponden a una velocidad de $v = 0.8$ en unidades de c. Aquí se ha tomado a $r\kappa$ como coordenada radial.* 70

4.3. *La figura a) muestra las mediciones directas del corrimiento Lamb (LS) en el átomo de Hidrógeno. La figura b) muestra el valor del corrimiento Lamb en el átomo de Hidrógeno calculado de forma indirecta a través de la medición $2P_{3/2} - 2S_{1/2}$. El valor del LS se obtiene al restarle el valor teórico de $2P_{3/2} - 2P_{1/2}$. Estas figuras fueron tomadas de [61].* 77

A.1. *La figura muestra la fuerza de Casimir entre placas paralelas para un campo escalar masivo, ec. (A.42). La abscisa representa la variable $m_0 l$ y la coordenada y a la variable $|fl^4|$.* 95

C.1. *Diagramas de Feynman que contribuyen a la interacción del electrón con el campo externo. (a) interacción con el potencial de Coulomb, (b) corrección de vértice, (c) polarización del vacío, (d) auto energía.* 108

Índice de tablas

2.1. Límites para M_* de los datos del LEP y el Tevatron, tomados de [56]. 15

2.2. Límites para M_* en TeV de procesos astrofísicos, tomados de [47]. 16

3.1. *La* tabla muestra diferentes configuraciones que han sido consideradas en el estudio experimental de la fuerza de Casimir con elementos metálicos. 60

3.2. *Algunos* efectos que modifican la fuerza de Casimir. 61

4.1. Resultados experimentales del corrimiento Lamb $2S_{1/2}$ y $2P_{1/2}$ en el átomo de Hidrógeno. 76

4.2. Contribuciones de los diferentes efectos a la separación de los estados $2S_{1/2}$ y $2P_{1/2}$ en el átomo de Hidrógeno. Las funciones y parámetros están definidos en [33, 57, 107, 114]. 78

4.3. Contribuciones a tres lazos del corrimiento Lamb en el átomo de Hidrógeno. También se presentan al corrimiento Lamb en otros contextos. 79

C.1. Contribuciones de los diferentes efectos a la separación de los estados $2S_{1/2}$ y $2P_{1/2}$ en el átomo de Hidrógeno 106

Capítulo

1 Introducción

Dimensiones adicionales a aquellas que podemos percibir directamente con nuestros sentidos no necesariamente son objetos de ficción, siempre y cuando podamos hallar evidencia por lo menos indirecta de su existencia. En la Física la idea de dimensiones extras se remonta por lo menos a principios del siglo XX. Tiene su origen en la búsqueda de una teoría que permita unificar la fuerza electromagnética y gravitacional. Hoy en día este objetivo se mantiene aunque ampliado a incluir todas las fuerzas conocidas en la naturaleza (electromagnética, débil, fuerte y gravitacional). No hay una respuesta definitiva a esta cuestión, no obstante, las teorías de cuerdas, englobadas en la teoría M se consideran el mejor candidato para este fin. Históricamente el primero que introdujo la noción de dimensiones extras en la comunidad científica fue Gunna Nordström [90] en 1914. El partió de las ecuaciones de Maxwell en cinco dimensiones y propuso que la quinta dimensión tuviera una topología diferente a las otras cuatro. Así la quinta coordenada fue compactificada en un círculo lo que le permitió obtener una teoría de la gravedad basada en un potencial escalar y electromagnetismo en cuatro dimensiones. Posteriormente en 1915 Einstein dio a conocer la teoría general de la relatividad, donde la gravedad se entendía como la curvatura del espacio tiempo subyacente. Para 1919 el

matemático Theodor Kaluza [59] desarrolló una teoría Einstein-Maxwell cuatro dimensional a partir de las ecuaciones de la gravedad de Einstein en cinco dimensiones. Kaluza consideró al espacio tiempo cinco dimensional M_5 como un producto del espacio tiempo cuatro dimensional M_4 y un círculo S^1, donde las quince componentes del tensor métrico cinco dimensional podían agruparse en un sector de 10 componentes que describían al tensor métrico cuatro dimensional mientras que cuatro componentes formaban las componentes del potencial electromagnético y el último grado de libertad representaba a un campo escalar. Al realizar el desarrollo de Fourier de los campos con respecto a la quinta dimensión y conservando solamente el modo cero, Kaluza integró a lo largo del círculo S^1 obteniendo una teoría en cuatro dimensiones invariante bajo transformaciones de coordenadas cuatro dimensionales y transformaciones de norma correspondientes al electromagnetismo. Siete años más adelante, en 1926, Oskar Klein utilizó la idea de Kaluza para explicar los efectos cuánticos a través de la ecuación de Schrödinger, la cual se había dado a conocer por el mismo año. Klein discute el tamaño del círculo a través de una generalización relativista de la ecuación de Schrödinger partiendo de una ecuación de onda sin masa en cinco dimensiones y obteniendo una ecuación cuatro dimensional de Klein-Gordon para cada modo masivo.

La teoría de Kaluza-Klein (KK) era una idea atractiva y audaz. Sin embargo, dicha teoría sufrió de un número de imprecisiones. Primero, no había algún argumento que pudiera explicar por qué la fuerza electromagnética era más intensa que la fuerza gravitacional. La mecánica cuántica podía incorporarse a la teoría electromagnética de forma directa, pero no a la teoría gravitacional, es decir esta parecía estar plagada por infinitos irremovibles. Finalmente el descubrimiento de nuevas interacciones: la fuerza fuerte y la fuerza débil no parecían poder incorporarse de manera fácil en la teoría de Kaluza-Klein. Estas nuevas interacciones fueron finalmente expresadas en términos de las teorías de norma no abelianas propuestas por Chen Ning Yang y Robert Mills en 1954. En los años subsecuentes el descubrimiento teórico de la supersimetría y su efecto de cancelación de divergencias bosónicas con fermiónicas en la teoría cuántica de campos perturbativa llevó a reconsiderar la forma perturbativa de la gravitación cuántica supersimétrica ó supergravedad. La posibilidad de

variar el número de supersimetrías en relación con el número de dimensiones produce distintas supergravedades. La conexión con nuestro mundo de cuatro dimensiones se realiza bajo el esquema de compactificación basado en la misma idea de Kaluza-Klein. Desafortunadamente la cancelación de las divergencias bosónicas con fermiónicas solo tiene lugar al orden mas bajo pero no en los siguientes de la forma perturbativa de las supergravedades. Alrededor de los mismos años apareció una propuesta para describir las interacciones fuertes basada en el concepto de cuerdas para modelar a los hadrones. No obstante cierto éxito en términos de las trayectorias de Regge que relacionan al momento angular con la masa de las excitaciones, esta fue descartada debido a que contenía una excitación de espin 2 no masiva sin contraparte experimental. Notablemente estas características corresponderían al hipotético gravitón. En las teorías de cuerdas se substituye el concepto de partícula por el de un objeto extendido unidimensional. Las cuerdas pueden ser cerradas o abiertas. Originalmente la primer teoría de cuerdas fue formulada sin supersimetría y requería de un espacio tiempo de 26 dimensiones para su consistencia. Las dimensiones espaciales adicionales eran compactificadas e inaccesibles a bajas energías. Esta teoría conocida como de cuerda bosónica contiene un taquión en su espectro lo cual la hace inestable. Además no contiene grados de libertad fermiónicos. Para 1984 Michael Green y John Schwartz y otros autores se percataron de que cuando se incorporaba la supersimetría a la teoría de cuerdas se eliminaba al taquión. A esta teoría se le denominó de súper cuerdas y requirió de un espacio tiempo de 10 dimensiones para su formulación, donde nuevamente las seis dimensiones extras eran compactificadas de acuerdo con la idea de Kaluza-Klein. A esta serie de eventos suele llamársele la primera revolución de las teorías de cuerdas. Uno de los obstáculos principales para poner a prueba la teoría de cuerdas consiste en que la escala de energía, masa de Planck $M_{Planck} = 1.2 \times 10^{19}$ GeV, en la que sus efectos se manifiesten, está abrumantemente fuera del alcance de nuestros aceleradores de partículas que llegarán con el Gran Colisionador de Hadrones (LHC) en el 2007 a aproximadamente 10 TeV. Claramente sería deseable contar con métodos indirectos para explorar sus consecuencias físicas.

Para finales de 1990 Joe Polchinski [94, 95] y otros autores mostraron que las teorías de

cuerdas contienen además otros objetos extendidos en donde están restringidos a moverse los extremos de cuerdas abiertas. Estos son llamados Dp-branas, D por Dirichlet, y p es el número de sus dimensiones espaciales. Por ejemplo una 0-brana es una partícula puntual, una 1-brana es una cuerda y una 2-brana es una membrana. Consistente con esta idea Petr Hovara y Edward Witten [50, 49] consideraron teorías de cuerdas en dos 10 branas encajadas en un espacio tiempo de 11 dimensiones. A bajas energías la gravedad se propaga en todo el espacio-tiempo mientras el resto de los campos se localiza en las branas.

Es importante enfatizar que estas ideas habían aparecido en años anteriores independientemente de las teorías de cuerdas en los trabajos de Rubakov y Shaposhnikov [106] y de Akama [3]. En estos casos el confinamiento es implementado a través del acoplamiento de la materia a campos escalares: Akama empleó un vórtice de Nielsen-Olesen en 5 dimensiones para confinar la materia a una 3 brana, mientras que Rubakov y Shaposhnikov emplearon un defecto topológico tipo pared en $4+1$ dimensiones para confinar a la materia a una 3-brana. Motivado por estos trabajos Visser mostró que la materia puede también ser confinada debido a la gravedad de la brana. El propuso específicamente un modelo donde el campo de norma $U(1)$ en 4+1 dimensiones induce una métrica que atrapa a las partículas a una 3-brana ortogonal al campo de norma [110].

Los modelos de mundos brana resurgieron de manera abrumante después de los trabajos de Arkani-Hamed, Dimopoulos y Dvali (ADD) [5] y de Randall y Sundrum (RS) [101] en 1998 y 1999, respectivamente. En ellos la localización de la materia a lo largo de la brana explica porqué la física a bajas energías es efectivamente cuatro dimensional y la gravedad es más débil que las otras ínteracciones. Para considerar la gravedad uno puede adoptar diferentes opciones. En el caso ADD se desprecia la tensión de la brana (densidad de energía por unidad de tres-volumen de la brana) y se consideran dimensiones extras compactas; similarmente al caso de KK, pero difiriendo de este en que el tamaño de las dimensiones extras R no necesita ser microscópico. De hecho las distancias a las cuales las interacciones no gravitacionales dejan de ser cuatro-dimensionales queda determinada por la dinámica en la brana y pueden estar muy por debajo de R. Solo la gravedad se torna multidimensional

a escalas apenas por debajo de R. En contraposición el modelo RS parte del uso de la tensión de la brana produciendo gravedad y en presencia de una constante cosmológica. La solución de las ecuaciones de Einstein en estas condiciones incorpora además condiciones de frontera apropiadas a la presencia de una o dos branas conocidas como condiciones de Israel [10]. Notablemente es posible encontrar una solución que preserva la invariancia de Poincaré cuatro-dimensional sobre la brana. En este tipo de modelos las dimensiones extras no tienen límite de tamaño.

En esta tesis, en contraste con el estudio mas popular de la fenomenología de los mundos brana, nos avocaremos a analizar algunos efectos de bajas energías para algunos escenarios con dimensiones extras compactas y no compactas.

El plan de esta tesis es como sigue. En el capítulo 2 partimos con una discusión sobre aspectos básicos de las teorías KK. Incluimos también una descripción de las características de los modelos ADD y RS junto con un modelo híbrido que incluye dimensiones extras compactas y no compactas al cual nos referimos como RSIIn así como el modelo RDSh. Brevemente comentamos algunos de los aspectos fenomenológicos de este tipo de escenarios en la física de altas energías, cosmología y astrofísica. Después pasamos a mostrar los mecanismos de localización de diferentes campos, escalar, espinorial y electromagnético en estos escenarios, esenciales para determinar las consecuencias fenomenológicas de los mismos. El capítulo 3 incluye parte de los resultados originales de esta tesis. En él aplicamos regularización dimensional para determinar la fuerza de Casimir asociado al campo electromagnético en RDSh mientras que para un campo escalar en RSII y RSIIn calculamos la fuerza de Casimir con base al método de la función de Green. El estudio de un átomo de Hidrógeno localizado en un mundo brana es el tema del capítulo 4. Empezando con una ecuación de Dirac en la que el espinor ha sido localizado sobre la brana siguiendo el análisis del capítulo 2, es necesario determinar el potencial electromagnético efectivo que sustituye al de Coulomb y que produce los estados ligados del átomo. Con este fin se determinaron potenciales electromagnéticos efectivos producidos por una carga puntual en movimiento uniforme sobre la brana. Una vez que se utiliza el potencial efectivo de la partícula estática, los efectos en el espectro del

Hidrógeno así modelado se determinan utilizando teoría de perturbaciones de la ecuación de Dirac con la desviación del potencial efectivo respecto del de Coulomb como perturbación. Finalmente el capítulo 5 se dedica a presentar las conclusiones de la tesis, discutir sus implicaciones para los modelos de mundos brana aquí considerados así como algunas perspectivas para continuar esta línea de trabajo.

Por completez hemos incluido tres apéndices que contienen una breve revisión del análisis en 4D que extendemos en esta tesis a los mundos brana. A saber: la fuerza de Casimir entre placas neutras paralelas, solución a la ecuación de Dirac en un campo externo y el corrimiento Lamb del átomo de hidrógeno.

Capítulo

2 Escenarios con dimensiones extras

Hemos visto en el capítulo precedente que en los últimos años el énfasis en modelos de dimensiones extras se ha dirigido principalmente a escenarios de mundos brana. En ellos se propone que nuestro mundo cuatro dimensional es una hipersuperficie (3+1) ó brana en la cual los campos del Modelo Estándar hasta la escala de energía donde éste se verifica están confinados mientras que la gravedad se propaga en todo el espacio tiempo hiperdimensional. En este capítulo recordaremos las características principales de la teoría de Kaluza-Klein y los modelos de mundos brana: ADD y RS. Además describiremos los escenarios de RSIIn y RDSh. En la segunda parte mostraremos algunos mecanismos de localización que confinan a los campos de materia en la brana. Para localizar a los campos de norma se ha propuesto un modelo en seis dimensiones (RSIIn) en el que la quinta coordenada es compacta y la sexta coordenada es infinita tipo RS [29]. Otra forma de localizar a los campos de norma es introducir un defecto topológico tipo vórtice de Nielsen-Olesen [104] en el cual el centro de este vórtice representa nuestro mundo cuatro dimensional (RDSh). La interacción de fermiones con defectos topológicos conducen a su localización [54, 55]. De esta forma la intención de este capitulo es presentar los modelos de dimensiones extras considerados en esta tesis y

sus mecanismos de localización que confinan a los campos de materia. La elección de los escenarios de RSIIn y RDSh se justificara entonces por sus posibilidades de localización de los distintos campos de materia.

SECTION 2.1

Teorías de Kaluza Klein

El propósito de esta sección es apreciar la idea básica del modelo de Kaluza-Klein la cual nos servirá en la descripción de los mundos brana. En el modelo mas simple del espacio tiempo M_5 es el producto directo de nuestro espacio tiempo cuatro dimensional ordinario y un círculo de radio R, $M_5 = M_4 \times S^1$. En otras palabras el espacio cuatro dimensional es un cilindro cuyas tres dimensiones espaciales x^1, x^2, x^3 son infinitas, mientras que la cuarta dimensión espacial y es un círculo del radio R. De acuerdo a la periodicidad de la quinta dimensión se realiza un desarrollo de Fourier sobre dicha coordenada, de forma que cada campo sobre M_5 admite la siguiente forma

$$\Phi(x,y) = \sum_n e^{\frac{iny}{R}} \phi_n(x), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{2.1}$$

Si $\Phi(x,y)$ obedece la ecuación de Klein-Gordon cinco dimensional $\Box_5 \Phi(x,y) = 0$, cada modo con $\phi_n(x)$ satisface

$$\Box \phi_n(x) - \frac{n^2}{R^2} = 0. \tag{2.2}$$

Desde el punto de vista $(3+1)$ dimensional, cada modo de Kaluza-Klein (KK) se puede interpretar como una partícula de masa $m_n = |n|/R$ la cual corresponde a una torre de Kaluza-Klein de partículas. A bajas energías ($E \ll 1/R$) solamente las partículas sin masa pueden ser producidas, mientras que a energías $E \geq 1/R$ las dimensiones extras pueden manifestarse.

La métrica γ_{MN} de la variedad M_5 tiene la forma

$$\begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + e^2\kappa^2 A_\mu A_\nu & e\kappa A_\mu \\ e\kappa A_\nu & \phi \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

La dinámica 5-dimensional esta gobernada por la acción de Einstein-Hilbert

$$S_5 = -\frac{1}{16\pi G_5}\int d^5x\sqrt{\gamma}\,R_5 \tag{2.4}$$

donde $\gamma_5 = det(\gamma_{MN})$, R_5 es el escalar de curvatura cinco dimensional y G_5 es la contra parte cinco dimensional de la constante gravitacional. Usando un desarrollo de Fourier la integración en la componente y se puede realizar y truncando la acción al modo cero obtenemos una acción cuatro dimensional

$$S_4 = \int \sqrt{|g_4^{(0)}|}\sqrt{|\phi^{(0)}|}\left(-\frac{1}{16\pi G}R_4^{(0)} + \frac{e^2\kappa^2}{16\pi G}\phi^{(0)}g^{(0)\mu\rho}g^{(0)\nu\sigma}F_{\mu\nu}^{(0)}F_{\rho\sigma}^{(0)}\right) \tag{2.5}$$

con

$$G = \frac{G_5}{2\pi R}, \quad g_4^{(0)} = det(g_{\mu\nu}^{(0)}), \quad F_{\mu\nu}^{(0)} = \partial_\mu A_\nu^{(0)} - \partial_\nu A_\mu^{(0)} \tag{2.6}$$

y $R_4^{(0)}$ el escalar de curvatura de la métrica $g_{\mu\nu}^{(0)}$ (signatura -+++). Esta acción involucra la métrica cuatro dimensional $g_{\mu\nu}^{(0)}$, un campo abeliano $A_\mu^{(0)}$ y a un campo escalar $\phi^{(0)}$. Kaluza arbitrariamente fijó

$$\phi^{(0)} = cte. \tag{2.7}$$

En este caso S_4 conduce a la acción de Einstein-Maxwell. Es necesario imponer que $\phi^{(0)} > 0$ para obtener el signo correcto relativo al termino de la acción de Einstein-Maxwell. Esto significa que la quinta dimensión sea tipo espacio. Tal restricción de Kaluza (2.7) conduce a dificultades tanto para la ecuación del campo escalar como para la traza de la ecuación de Einstein, en particular,

$$F_{\mu\nu}^{(0)}F^{(0)\mu\nu} = 0. \tag{2.8}$$

Kaluza evitó esto imponiendo la restricción (2.7) directamente en la acción cuatro dimensional y no tomó en cuenta la variación con respecto al campo escalar. Claramente estan presentes armónicos $n \neq 0$, los cuales tienen masa $m_n = \frac{|n|}{R}$. El acoplamiento de estos armónicos al campo de norma $A_\mu^{(0)}$ determinado por la acción (2.4), conlleva a que la carga para el n-ésimo armónico sea

$$q_n = n\frac{4\sqrt{\pi G}}{R} \tag{2.9}$$

Se puede observar que la carga esta cuantizada debido a que la quinta dimensión es compacta. Aquí la carga elemental es

$$e = \frac{4\sqrt{\pi G}}{R}. \tag{2.10}$$

Usando los valores conocidos para e y G la longitud de la quinta dimensión se puede estimar como $l = 2\pi R \sim 10^{-17}\, GeV^{-1} \sim 10^{-2} l_{Planck}$ lo que explicaba por qué no había sido obserbada. El tratamiento de Kaluza-Klein puede ser extendido a un grupo más complejo, es decir, después del desarrollo de la teoría de Yang-Mills en 1954 parece natural realizar una extensión de la teoría de Kaluza-Klein al dominio no abeliano. En este sentido Cho construyo una teoría [22], en un espacio tiempo multidimensional, donde su espacio interno es el grupo de Lie $\mathcal{G}$. Al tomar la acción de Hilbert-Einstein en el espacio multidimensional y aplicar el tratamiento de Kaluza-Klein Cho obtuvo la acción cuatro dimensional de la gravedad acoplada a los campos de Yang-Mills mas un término semejante a una constante cosmológica. Cálculos más detallados fueron hechos por Kener [62]. Una construcción mas general fue hecha por Cho y Freund [23] quienes derivaron una teoría Hilbert-Einstein-Yang-Mills-Escalar.

Consideremos una espacio tiempo $4 + K$ dimensional la cual es el producto de un espacio tiempo cuatro dimensional M^4 y de un espacio compacto B^K K-dimensional homogéneo G/H. G denota el grupo semi simple de Lie de dimensión K y H es un subgrupo isotrópico. Por conveniencia es util considerar el formalismo de las tetradas

$$g_{MN} = E^A_M E^B_N \eta_{AB} \tag{2.11}$$

donde $\eta_{AB} = diag(1, -1, -1, -1)$. Las conexiones las podemos calcular como

$$B_{M[BC]} = \frac{1}{2} E^A_M \left(\Omega_{[AB]C} - \Omega_{[BC]A} + \Omega_{[CA]B} \right) \tag{2.12}$$

$$\Omega_{[AB]C} = E^M_A E^N_B \left(\partial_M E_{NC} - \partial_N E_{MC} \right) \tag{2.13}$$

la curvatura y el escalar de curvatura son dados por

$$R_{MN[AB]} = \partial_M B_{N[AB]} - \partial_N B_{M[AB]} - B_{M[AC]} B_{N[CB]} + B_{N[AC]} B_{M[CB]} \tag{2.14}$$

$$det(E) R = det(E) E^M_A E^N_B R_{MN[AB]} \tag{2.15}$$

De acuerdo al tratamiento de Kaluza-Klein tomemos el ansatz

$$E^A_M(x,y) = \begin{pmatrix} E^a_m(x) & -A^{\hat{\beta}}_m(x) D^{\alpha}_{\hat{\beta}}(L_y) \\ 0 & E^{\alpha}_{\mu}(y) \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

Este ansatz es es compatible con las simetrías: transformación de coordenadas $x^m \to x'^m(x)$ y la trasformación de Yang-Mills $y^m \to y'^m(x,y)$, con rotaciones asociadas a $D^{\beta}_{\alpha}(h)$

$$E'^a_m(x') = \frac{\partial x^n}{\partial x'^m} E^a_m(x) \tag{2.17}$$

$$E'^{\alpha}_m(x',y') = \left(\frac{\partial x^n}{\partial x'^m} E^{\beta}_n(x,y) + \frac{\partial y^{\mu}}{\partial x'^m} e^{\beta}_{\mu}(y) \right) D^{\alpha}_{\beta}(h^{-1}) \tag{2.18}$$

$$e^{\alpha}_{\mu}(y') = \frac{\partial y^{\nu}}{\partial y'^{\mu}} e^{\beta}_{\nu}(y) D^{\alpha}_{\beta}(h^{-1}) \tag{2.19}$$

De (2.18) y el antsatz obtenemos

$$A'_m(x') = \frac{\partial x^n}{\partial x'^m} \left(g A_n(x) g^{-1} - g \partial_n g^{-1} \right) \tag{2.20}$$

aquí $A_m = A^{\hat{\alpha}}_m Q_{\hat{\alpha}}$. Esto es precisamente la regla para expresar el potencial de Yang-Miells. Las conexiones correspondientes al ansatz (2.16) son

$$B_{a[bc]} = \frac{1}{2} E^m_{[a} E^n_{b]} \partial_m E_{nc} - \frac{1}{2} E^m_{[b} E^n_{c]} \partial_m E_{na} + \frac{1}{2} E^m_{[c} E^n_{a]} \partial_m E_{nb} \,, \tag{2.21}$$

$$B_{a[b\gamma]} = -B_{\gamma[ab]} = \frac{1}{2} E^m_a E^n_b F^{\hat{\alpha}}_{mn} D_{\hat{\alpha}\gamma}(L_y) \,, \tag{2.22}$$

$$B_{a[\beta\gamma]} = A^{\hat{\delta}}_a \left[D^{\tilde{\alpha}}_{\hat{\delta}}(L_y) - D^{\alpha}_{\hat{\delta}}(L_y) \pi^{\tilde{\alpha}}_{\alpha}(y) \right] c_{\tilde{\alpha}\beta\gamma} \,, \tag{2.23}$$

$$B_{\alpha[\beta c]} = 0 \,, \tag{2.24}$$

$$B_{\alpha[\beta\gamma]} = \frac{1}{2} c_{\alpha\beta\gamma} + \pi^{\tilde{\alpha}}_{\alpha}(y) c_{\tilde{\alpha}\beta\gamma} \,. \tag{2.25}$$

Donde las siguientes expresiones han sido usadas:

$$E^m_{[a} E^n_{b]} = E^m_a E^n_b - E^m_b E^n_a \,, \tag{2.26}$$

$$F^{\hat{\alpha}}_{mn} = \partial_m A^{\hat{\alpha}}_n - \partial_n A^{\hat{\alpha}}_m - A^{\hat{\beta}}_m A^{\hat{\gamma}}_n c^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}\hat{\beta}} \,, \tag{2.27}$$

$$\pi^{\tilde{\alpha}}_{\alpha}(y) = e^{\mu}_{\alpha}(y) e^{\tilde{\alpha}}_{\mu}(y) \,, \tag{2.28}$$

y las estructura de grupo de G son definidos por

$$\left[Q_{\hat{\alpha}}, Q_{\hat{\beta}} \right] = c^{\hat{\gamma}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} Q_{\hat{\gamma}} \,. \tag{2.29}$$

Substituyendo las ecuaciones (2.21)-(2.25) en el escalar de curvatura $4+K$ dimensional se obtiene

$$R_{4+K} = R_4 - \frac{1}{4}F^{\hat{\alpha}}_{ab}F^{\hat{\beta}}_{ab}D^{\gamma}_{\hat{\alpha}}(L_y)D^{\gamma}_{\hat{\beta}}(L_y) + R_K \tag{2.30}$$

Donde R_4 es el escala de curvatura cuatro dimensional expresada en términos de los vierbein $E^a_m(x)$ y R_K es el escalar de curvatura constante de G/H. Note que debido a la forma triangular de $E^A_N(x)$ tenemos que $det(E^A_N(x,y)) = det(E^a_n(x))det(e^{\alpha}_{\nu}(y))$. Por tanto la integración en x, y se separa completamente. Al realizar la integral en y^{μ}, el segundo término de (2.30) es necesario recordar que

$$\frac{1}{V_K}\int dy^K det(e(y))D^{\gamma}_{\hat{\alpha}}(L_y)D^{\gamma}_{\hat{\beta}}(L_y) = k\delta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\,, \tag{2.31}$$

donde $k = dim(G/H)/dim(G)$. Así al integrar (2.30) en y la acción resultante cuatro dimensional contiene gravedad acoplada al campo de Yang-Mills sin masa del grupo de norma G. Hay además una constante cosmológica debido a la presencia R_K. esta constante tiene un valor muy grande del orden de $10^{38}\,GeV^2$ y no puede ser compensada por una constante cosmológica multidimensional. Por que desde el punto de vista de las ecuaciones de campo $4+K$ dimensionales una constante cosmológica y R_K son objetos totalmente diferentes.

SECTION 2.2

Mundos brana

Inspirados por la teoría de cuerdas se han propuesto modelos denominados mundos brana que adoptan la idea de dimensiones espaciales extras. En estos modelos se estudia la contribución de dichas dimensiones extras a procesos físicos. Aunque ha sido estudiado el problema de conectar esos modelos con la teoría de cuerdas es complejo. Sin embargó, debido a que aún no es posible obtener predicciones fenomenológicas de la teoría de cuerdas contundentes es viable explorar estos modelos como una primera aproximación a parte de la fenomenología de cuerdas.

En estos modelos nuestro mundo es considerado como una hipersuperficie (3+1) o brana, la cual reside en un espacio tiempo de dimensión mayor (4+n). La gravedad puede propagarse

en todo el espacio tiempo, mientras que los demás campos están localizados en la brana. A continuación describiremos algunos de los modelos mas sencillos, los cuales pueden revisarse con mucho mas detalle en [39, 74, 93, 105] pero que contienen las características básicas esenciales de otros más complicados.

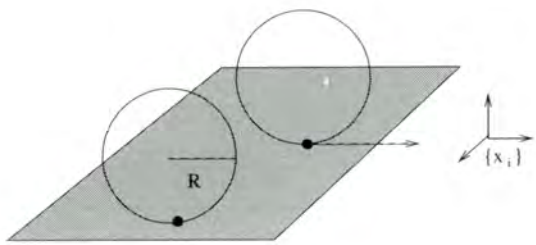


Figura 2.1: *Representación gráfica del escenario de Kaluza-Klein.*

2.2.1. Modelo de Arkani-Hamed, Dimopoulos y Dvali (ADD)

Este es uno de los primeros modelos [5] que intenta resolver el problema de la jerarquía al introducir dimensiones extras grandes, las cuales en muchos casos no deberían exceder 0.1 mm. Como en las teorías de KK la geometría se supone factorizable y la métrica puede escribirse como

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - \sum_n dy_n^2. \tag{2.32}$$

La parte cuatro dimensional de la métrica no depende de las coordenadas extras. El problema de jerarquía consiste en tener en la naturaleza dos escalas completamente diferentes y aparentemente independientes, la escala electro débil $M_{EW} \sim 10^3$ GeV y la escala de Planck $M_{Pl} \sim 10^{19}$ GeV, donde la gravedad se vuelve tan o más fuerte que las interacciones electro débiles y en la cual se espera que la gravedad cuántica juegue un papel relevante.

En la teoría fundamental multidimensional sin embargo la escala fundamental de la gravedad es la escala de Planck M_*, la cual es diferente de la escala cuatro dimensional y en principio puede ser mucho mas pequeña. La idea sugerida en [5] es que la única escala fundamental

en la naturaleza sea la electro débil y que la razón para tener una escala efectiva cuatro dimensional tan grande como M_{Pl} es justamente la existencia de dimensiones extras. La acción para la gravedad multidimensional puede leerse como

$$S = \frac{1}{16\pi G_{(4+n)}} \int d^{(4+n)}x \sqrt{g^{(4+n)}}\, R^{(4+n)}, \quad \text{con} \quad G_{(4+n)} = \frac{1}{M_*^{2+n}} \tag{2.33}$$

Aquí $G_{(4+n)}$ es la constante gravitacional si n es el número de dimensiones extras y M_* es la escala de Planck multidimensional. A bajas energías únicamente el modo cero contribuye, así que la acción efectiva puede ser obtenida de (2.33) integrando sobre las coordenadas extras. De esta forma se obtiene

$$S_{\text{ef}} = \frac{V_n}{16\pi G_{(4+n)}} \int d^4x \sqrt{g^{(4)}}\, R^{(4)}, \quad \text{con} \quad V_n = R_C^n \tag{2.34}$$

donde R_C es el radio de compactificación. De este resultado se puede leer la relación entre la escala M_{Pl} y M para la gravedad

$$\frac{1}{G_{(4)}} = \frac{V_n}{G_{(4+n)}} \Rightarrow M_{Pl}^2 = R^n M_*^{2+n}. \tag{2.35}$$

De esta forma, si suponemos que M_* es del orden de M_{EW} el radio de compactificación es

$$R \sim \frac{1}{M_{EW}} \left(\frac{M_{Pl}}{M_{EW}} \right)^{\frac{2}{n}} \sim 10^{\frac{32}{n}-17} \text{ cm}. \tag{2.36}$$

Es claro de esta ecuación que este modelo debería al menos admitir la existencia de dos dimensiones extras. Para $n = 1$, R es del orden de 10^{15} cm. lo cual llevaria a conflictos con las observaciones del comportamiento del sistema solar. Para $n = 2$, $R \sim 1$ mm. Esto motivó que se probara la validez de la ley de gravitación de Newton a escalas de micras [51, 52, 60, 71]. Desafortunadamente hay restricciones cosmológicas y astronómicas las cuales rechazan $n = 2$. Un análisis mas detallado [6, 9] sugiere una escala fundamental de 30 TeV, que en términos del radio de compactificación es del orden de $1 - 10$ μm.

Entre la fenomenología de modelos ADD podemos mencionar la siguiente:

- **Experimentos con aceleradores y pérdida de energía.** Las partículas del Modelo Estándar están localizadas en la membrana únicamente hasta alguna escala de energía

que es comparable a M_* (la escala de Planck en $(4+n)$ dimensiones). Alrededor de esta escala las partículas del Modelo Estándar pueden escapar al bulto. La existencia de los modos de KK del gravitón conduce a dos tipos de efectos. El primer efecto es la producción directa de gravitones de KK asociados a procesos estándar que dan origen a señales caracterizadas por la pérdida de energía. Estos procesos deberían proveer algunas señales de pérdidas de energía en experimentos con aceleradores. El segundo tipo de señales es inducido por el intercambio virtual de los gravitones de KK debido a la emisión de gravitones de KK en el bulto. Ver [6, 5, 82] para una discusión mas detallada.

Los limites actuales para M_* son mostrados en la tabla (2.1), los cuales son dominados por la búsqueda de $e^+e^- \to \gamma + \not{E}$ en el LEP y $p\bar{p} \to \gamma + \not{E}$ en el Tevatron.

n	2	3	4	5	6
$M_{pl\,(4+n)}$ (TeV)	0.57	0.36	0.26	0.19	0.16

Tabla 2.1: Límites para M_* de los datos del LEP y el Tevatron, tomados de [56].

- **Pérdida de energía de estrellas debido a la emisión de gravitones de KK.** En el modelo de ADD de 6 dimensiones los gravitones de KK son ligeros, $m_{\mathrm{KK}} \sim R^{-1} \sim 10^{-4}\,\mathrm{eV}$. Por lo tanto estos gravitones pueden ser emitidos en el interior de objetos astrofísicos cuya temperatura excede $10^{-4}\,\mathrm{eV}$. Como resultado los objetos como estrellas pueden enfriarse debido al proceso de emisión de los gravitones de KK en el bulto. Debido a la alta multiplicidad de los gravitones de KK el resultado efectivo de la razón de emisión es suprimido por $1/M_*^2$. A menos que esta razón sea suficientemente pequeña una estrella debería enfriarse mas rápido al emitir gravitones de KK. Esto da un límite a la escala de Planck en seis dimensiones de 50 TeV [6, 5, 25]. El límite a la escala de Planck M_* depende de las propiedades consideradas del decaimiento de los gravitones masivos de KK. Algunos límites son mostrados en la tabla (2.2).

	n=2	n=3	n=4
Enfriamiento de NS (NS1987A)	8.9	0.66	0.01
Difusión de rayos gamma	38.6	2.65	0.43
Explosión de SN	701	25.5	2.77

Tabla 2.2: Límites para M_* en TeV de procesos astrofísicos, tomados de [47].

- **Implicaciones cosmológicas.** Existen nuevos escenarios de inflación y bariogénesis dentro del contexto de los mundos brana. Por ejemplo la inflación en nuestra brana puede ser obtenida si otra brana cae encima de la nuestra en un periodo anterior en la evolución del universo [32]. El potencial que es creado por la otra brana en nuestro mundo puede ser visto como el potencial de la inflación convencional. La asimetría de los bariones de una magnitud determinada puede ser producida durante la colisión de estas dos branas [31].

2.2.2. Modelo de Randall Sundrum (RSII)

La primera versión [100] fue introducida como una alternativa al modelo de ADD donde la solución propuesta al problema de jerarquía depende débilmente del radio de compactificación. La característica principal de este modelo es que la métrica no es factorizable, esto es, la métrica cuatro dimensional está multiplicada por un factor de *doblamiento* el cual es una función exponencial de la coordenada extra, la cual se escribe como

$$ds^2 = e^{-2\phi(y)} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - r^2 dy^2. \tag{2.37}$$

Aquí $e^{-2\phi(y)}$, es el factor de doblamiento y y es la coordenada extra. La métrica (2.37) es solución de las ecuaciones de Einstein en un espacio tiempo AdS de cinco dimensiones limitado por dos branas de cuatro dimensiones, a las que se asocia una tensión.

La figura (2.3) muestra como podrían ser estos mundos membrana, en la cual los campos del ME están confinados en la membrana, mientras que la gravedad se propaga en todo el bulto.

En este modelo se considera una simetría Z_2, la cual permite identificar $y \to -y$ y las branas están fijas en los puntos $y = 0$, $y = y_0$. La acción que describe este escenario es la siguiente

$$S = \frac{1}{16\pi G_5}\int dx^4 \int_{-y_0}^{y_0} dy \sqrt{-g^{(4+1)}}\left(R^{(4+1)} - 2\Lambda_5\right) - \int dx^4 \left[\sqrt{-g_{y_0}^{(4)}}\,\sigma_{y_0} + \sqrt{-g_0^{(4)}}\,\sigma_0\right] \tag{2.38}$$

donde $G_5 = M_*^{-3}$ y $g_{y_0,0}$ son las métricas inducidas en las branas en $y = y_0, 0$ y $\sigma_{y_0,0}$ son las densidades de energía en las branas. De (2.38) podemos escribir las ecuaciones de Einstein

$$\begin{aligned}\sqrt{-g^{(4+1)}}G_{MN} &= \frac{8\pi}{M_*^3}\left[\Lambda_5\sqrt{-g^{(4+1)}}\,g_{MN} + \sigma_0\sqrt{-g_0^{(4)}}\,g_{0\,MN}\delta_M^\mu\delta_N^\nu\delta(y)+\right.\\ &\left.\sigma_{y_0}\sqrt{-g_{y_0}^{(4)}}\,g_{y_0\,MN}\delta_M^\mu\delta_N^\nu\delta(y-y_0)\right]\end{aligned} \tag{2.39}$$

Las ecuaciones de Einstein para la métrica (2.37) son

$$G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}\frac{3\phi'^2(y) - 2\phi''(y)}{r^2} \tag{2.40}$$

$$G_{y\nu} = 0 \tag{2.41}$$

$$G_{yy} = -3\phi'^2(y) \tag{2.42}$$

Las componentes no triviales pueden escribirse como

$$\text{componente } 55 \to \frac{6\phi'^2}{r^2} = -\frac{8\pi}{M_*^3}\Lambda_5 \tag{2.43}$$

$$\text{componentes 4D} \to \frac{3\phi''}{r^2} = \frac{8\pi}{M_*^3 r}\sigma_0\delta(y) + \frac{8\pi}{M_*^3 r}\sigma_{y_0}\delta(y-y_0) \tag{2.44}$$

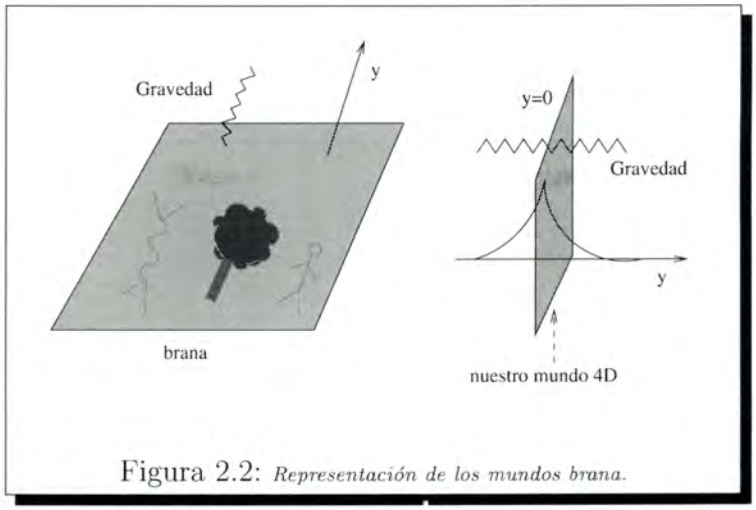


Figura 2.2: *Representación de los mundos brana.*

Integrando (2.43) y tomando en cuentra la simetría Z_2 obtenemos

$$\phi(y) = r|y|\sqrt{\frac{-\Lambda_5}{6}} \equiv kr|y| \tag{2.45}$$

Derivando (2.45) dos veces y comparando con (2.44) obtenemos una condición para la tensión de las branas. Esta condición es comúnmente llamada condición de *ajuste fino* de la constante cosmológica de cinco dimensiones y la tensión de las branas:

$$\sigma_0 = -\sigma_{y_0} = \frac{6M_*^3}{8\pi}k. \tag{2.46}$$

En este modelo el problema de la jerarquía entre la escala de Planck y la escala electro débil es resuelto en términos de un factor exponencial que tiene como argumento la escala de compactificación r. Esto puede verse mejor derivando la acción efectiva cuatro dimensional de la acción completa de cinco dimensiones (2.38). Como en el caso ADD en el límite de bajas energías únicamente el modo cero es el que contribuye, esto es

$$S_{\text{ef}} \supset \frac{1}{16\pi G_5}\int dx^4 \int dy e^{-2kr|y|}\sqrt{g^{(4)}}\, R^{(4)}. \tag{2.47}$$

Aquí $R^{(4)}$ es el escalar de Ricci en cuatro dimensiones relacionado con la métrica

$$g_{\mu\nu}^{(4)}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x). \tag{2.48}$$

$h_{\mu\nu}(x)$ son las fluctuaciones alrededor de la métrica de Minkowski que físicamente representan al gravitón. Integrando sobre la coordenada extra se obtiene la acción efectiva cuatro dimensional, de la cual se puede leer la relación entre la escala de Planck M_* y la escala cuatro dimensional de Planck M_{Pl}, esto es

$$M_{Pl}^2 = \frac{M_*^3}{k}\left[1 - e^{-2kry_0}\right]. \tag{2.49}$$

En el límite $kr \gg 1$ (tomando en cuenta que r en este modelo es pequeño) la dependencia en r es cada vez más pequeña, esto es, el problema de jerarquía no recae en el tamaño de las dimensiones extras como en el caso de ADD.

Una variante de este modelo, es el escenario con una sola brana en un espacio tiempo en AdS_5 el cual fue investigado en [101]. En este caso la dimensión extra no es compacta pero el volumen del bulto es finito debido al factor de doblamiento.

Algunas de las implicaciones fenomenológicas que se han estudiado en este modelo son:

- **Experimentos de aceleradores y pérdida de energía**. Las partículas del Modelo Estándar son localizadas en la brana hasta energías comparables con la escala de Planck M_*. A energías cerca de la escala de Planck M_* las partículas del Modelo Estándar podrían ser emitidas en el bulto. Como en el caso de ADD, esto debería proveer señales de perdida de energía en experimentos con aceleradores. Ver [26] para mas detalles.

- **Unificación de las constantes de acoplamiento**. Como mencionamos anteriormente, en la teoría cuatro dimensional usual las constantes de acoplamiento tienen una dependencia logarítmica en términos de la energía, sin embargo en el contexto de los mundos membrana esto cambia completamente debido a que esta dependencia se transforma en una ley de potencias entre las constantes de acoplamiento y la energía [109]. Para el escenario de RS la quinta dimensión no es plana, lo cual da origen a correcciones logarítmicas similares al caso 4D para las constantes de acoplamiento debido a las excitaciones de KK. pero el modo cero contribuye a la renormalización de las constantes de norma. Como fue discutido en [96].

2.2.3. Modelo RSIIn

Este modelo [29] es híbrido al contener tanto dimensiones compactas como no compactas. Su interés radica en que contiene un mecanismo de localización del campo electromagnético debido a la gravedad producida por la brana. El escenario consiste de una $(3+n)$ brana encajada en un espacio tiempo de dimensión $(5+n)$ con n dimensiones compactas y una dimensión infinita y con un factor de doblamiento. La métrica para este escenario es

$$ds^2 = a(y)^2\left(\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - \sum_{i=1}^{n} R_i^2 d\theta_i^2\right) - dy^2, \qquad a(y) = e^{-\kappa|y|}. \tag{2.50}$$

$\eta_{\mu\nu}$ es la métrica cuatro dimensional de Minkowski, $\theta_i \in [0, 2\pi]$ son las coordenadas compactas y R_i es el tamaño de las dimensiones extras compactas. $1/\kappa$ es el radio de anti-de Sitter. La acción gravitacional en presencia de la brana es

$$S = \frac{1}{16\pi G_{5+n}} \int dx^4 dy \prod_{i=1}^{n} R_i d\theta_i \sqrt{-g^{(5+n)}}\left(R^{(5+n)} - 2\Lambda_5\right) - \sqrt{-g_0^{(4+n)}}\,\sigma_0 \tag{2.51}$$

donde $G_{5+n} = M_*^{-3-n}$ es la constante de Newton si $(1+n)$ es el número de dimensiones extra, M_* es la constante de Planck del bulto y g_0 es la métrica inducida en la membrana ubicada en $y = 0$ y σ_0 es la densidad de energía en la membrana. Como en el caso del modelo de Randall Sundrum las ecuaciones de Einstein son resueltas y la relación entre la tensión de la brana y la constante cosmológica deben ser ajustadas entre sí. Variando la acción (2.51) se obtiene las ecuaciones

$$\sqrt{-g^{(5+n)}}\left(R_{MN} - \frac{1}{2}g_{MN}R\right) = \frac{8\pi}{M_*^{3+n}}\left[\Lambda_5\sqrt{-g^{(5)}}\,g_{MN} + \sigma_0\sqrt{-g_0^{(4+n)}}\,g_{0\,MN}\delta_M^\mu\delta_N^\nu\delta(y)\right] \tag{2.52}$$

con $M, N = (\mu, y, i)$, con $\mu = 0, 1, 2, 3$, $i = 0..n$. Las ecuaciones de Einstein para la métrica (2.51) son

$$G_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(5+n)}\left[-\left(\frac{a'}{a}\right)^2 - 2\frac{a''}{a}\right] \tag{2.53}$$

$$G_{\theta_i\theta_i} = g_{\theta_i\theta_i}^{(5+n)}\left[-\left(\frac{a'}{a}\right)^2 - 2\frac{a''}{a}\right] \tag{2.54}$$

$$G_{\theta_i\mu} = G_{y\nu} = G_{y\theta} = 0 \tag{2.55}$$

$$G_{yy} = -3\left[\frac{a'}{a}\right]^2 \tag{2.56}$$

Las cuales se reducen a:

$$\text{componente } 55 \rightarrow 3\left(\frac{a(y)'}{a(y)}\right)^2 = -\frac{8\pi}{M_*^{3+n}}\Lambda_5, \tag{2.57}$$

$$\text{componentes 4D y } \theta_i \rightarrow \left[-\left(\frac{a'}{a}\right)^2 - 2\frac{a''}{a}\right] = \frac{8\pi}{M_*^{3+n}}\sigma_0\delta(y). \tag{2.58}$$

Introduciendo $a(y) = e^{-\kappa|y|}$ en (2.57) tenemos

$$k^2 = \frac{8\pi\Lambda}{3M_*^{3+n}}. \tag{2.59}$$

Derivando $a(y) = e^{-\kappa|y|}$ dos veces y comparando con (2.58) obtenemos una condición para la tensión de las branas. Esta condición nuevamente ajusta la constante cosmológica de cinco dimensiones y la tensión de las branas a través de

$$\sigma_0 = \frac{M_*^{3+n}}{8\pi}k. \tag{2.60}$$

Debido a la in variancia cuatro dimensional de Poincaré una propiedad de la métrica (2.50). es que cada campo en este fondo puede ser descompuesto en ondas planas cuatro dimensionales como

$$\phi \sim e^{ip_\mu x^\mu}\phi_p(y) \tag{2.61}$$

donde el momento p_μ coincide con el momento físico en la brana, pero desde el punto de vista de un observador que reside en $y \neq 0$, el momento físico cuatro dimensional sería

$$p_\mu^{\text{físico}} = \frac{1}{a(y)}p_\mu. \tag{2.62}$$

Está propiedad de escalamiento es una de las propiedades físicas inherentes al fondo (2.50).

2.2.4. Modelo de Randjbar-Daemi-Shaposhnikov (RDSh)

La idea de Randjbar-Daemi-Shaposhnikov fue empezar de un modelo de Higgs abeliano con fermiones en un espacio-tiempo de seis dimensiones y obtener la electrodinámica cuántica efectiva con fermiones en cuatro dimensiones, los cuales se localizan cerca del núcleo de un vórtice [104]. La acción de este escenario es

$$\begin{aligned} S &= \int dx^6\sqrt{-G}\left[\frac{1}{\kappa_{bulto}^2}R - \frac{1}{4}F_{MN}F^{MN} - (D_M\Phi)^\dagger D^M\Phi - U(\Phi)\right. \\ &\left. + \sum_{i=1}^{2}\bar{\Psi}_i\Gamma^A E_A^M\nabla_M\Psi_i + g\bar{\Psi}_1\Phi\Psi_2 + h.c\right], \end{aligned} \tag{2.63}$$

donde $D_M\Phi = (\partial_M + ieA_M)\Phi$ y $\nabla_M\Psi_i = (\partial_M - \Omega_M + ie_iA_M)\Psi_i$. $\Omega_M = \frac{1}{2}\Omega_{M[AB]}\Sigma^{AB}$ son las conexiones de espín con sus generadores $\Sigma^{AB} = \frac{1}{4}[\Gamma_A, \Gamma_B]$ y Γ_A son las matrices 8×8 de Dirac con relación de conmutación $\{\Gamma_A, \Gamma_B\} = 2\eta_{AB}, \Gamma_7 = diag(1,-1)$. Los índices M, N corren de 0 a 5 y los índices μ, ν corren de 0 a 3. Este modelo no tiene anomalías gravitacionales, de norma o mezclas siempre que $e_1^2 = e_2^2$. Es conveniente elegir $e_1 = -e_2$. El acoplamiento de Yukawa es real solo si $e_1 - e_2 = e$, de esta forma $e_1 = e/2, e_2 = -e/2$.

Las parte bosónica de (2.63) admite soluciones tipo vórtice de Nielsen-Olesen [44], las cuales son

$$ds^2 = e^{A(r)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dr^2 + e^{B(r)}a^2d\theta^2, \tag{2.64}$$

$$\Phi = f(r)e^{in_v\theta}, \quad aeA_\theta = (P(r) - n_v)\,\theta, \tag{2.65}$$

aquí $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica plana, a es el radio del vórtice cubierto por la condenada $\theta \in [0, 2\pi)$, n_v es el numero de vórtice y como en el caso plano $f(r)$ y $P(r)$ satisfacen las condiciones de frontera

$$f(0) = 0, \quad f(\infty) = f_0 \neq 0, \tag{2.66}$$

$$P(0) = n_v, \quad P(\infty) = 0. \tag{2.67}$$

Cuando $r \to \infty$, Φ tiende a un mínimo del potencial $U(\Phi)$. Las condiciones de frontera para las funciones $A(r)$ y$B(r)$ son

$$A(0) = 1, \quad A(r \to \infty) = -2cr, \tag{2.68}$$

$$B(r \to 0) = 2\ln\left(\frac{r}{a}\right), \quad B(r \to \infty) = -2cr. \tag{2.69}$$

Los parámetros c y a son combinaciones de la constante de Newton, κ_{bulto}, del bulto, la constante cosmológica del bulto y los parámetros del campo de Higgs. Cuando $r \to 0$ la geometría en el núcleo del vórtice es plana. Cuando $r \to \infty$ la métrica se vuelve anti de Sitter.

Se ha mostrado en [103] que esta configuración permite localizar a los campos de norma en el núcleo del vértice, al realizar una mezcla específica de las fluctuaciones del campo de Maxwell en seis dimensiones y la componente $\theta\mu$ de la métrica, dados por

$$V_\mu = \frac{1}{ae} P(r) W_\mu(x, r), \quad h_{\theta\mu} = e^{B(r)} W_\mu(x, r), \tag{2.70}$$

donde $W_\mu(x, r)$ es función de x y r. Sustituyendo estas fluctuaciones en la acción para la parte de campo de Maxwell, se obtiene una acción efectiva para el campo $W_\mu(x, r)$

$$S = -\frac{\pi}{ae^2} \int_0^\infty \mathrm{d}r F(r) \int \mathrm{d}x^4 \left[\eta^{\mu\alpha}\eta^{\beta\nu}\partial_{[\mu}W_{\nu]}\partial_{[\alpha}W_{\beta]} + e^{-A(r)}\eta^{\mu\nu}\partial_r W_\mu \partial_r W_\nu\right]. \tag{2.71}$$

con

$$F(r) = e^{\frac{1}{2}B(r)}\left(P^2(r) + \frac{ae^2}{\kappa_{bulto}} e^{B(r)}\right) \tag{2.72}$$

La parte independiente de r del campo $W_\mu(x, r)$ corresponde a un campo vectorial sin masa. Su acción efectiva es

$$S(W) = -\frac{1}{2q^2} \int \mathrm{d}x^4 \eta^{\mu\alpha}\eta^{\beta\nu}\partial_{[\mu}W_{\nu]}\partial_{[\alpha}W_{\beta]} \tag{2.73}$$

donde el acoplamiento cuatro dimensional es

$$\frac{1}{q^2} = \frac{2\pi a}{e^2} \int_0^\infty e^{B(r)} \left[P^2(r) + \frac{a^2 e^2}{\kappa^2} \right] \tag{2.74}$$

con las condiciones de frontera mostradas en (2.69) y (2.67) para $B(r)$ y $P(r)$ en la integral sobre r en ambos extremos. La figura (C.1) representa la localización de los campos de materia en el modelo de Randjbar-Daemi-Shaposhnikov.

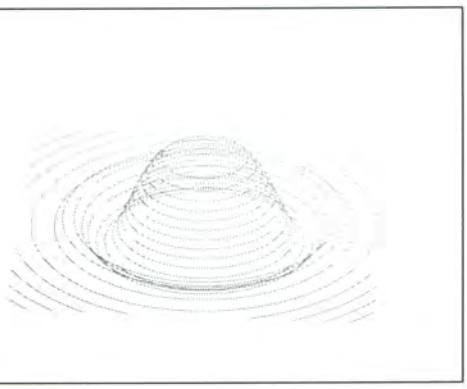


Figura 2.3: *El origen de este vórtice representa nuestro mundo cuatro dimensional en donde los campos de materia se localizan. Lejos del vórtice los campos de materia se diluyen.*

SECTION 2.3

Mecanismos de localización

En esta sección mostraremos que el escenario RSIIn puede confinar al campo escalar, fermionico y de norma. Generalizaremos los mecanismos de localización desarrollados [8] y [30] para los campos: escalar y fermiónicos. Mientras que para los campos de norma adoptaremos los mecanismos propuestos en [29] y [104].

2.3.1. Campo escalar

En esta sección mostraremos los mecanismos que permiten localizar al campo escalar con y sin masa en el escenario de RS, lo cual nos permitirá implementar este mecanismo en el escenario de RSIIn.

Campo escalar sin masa

Empezaremos mostrando como se localizan el campo escalar sin masa en el escenario de RS, siguiendo la idea propuesta en la referencia [8]. La acción del campo escalar sin masa acoplado a la gravedad en 5D es

$$S = \frac{1}{2}\int d^4x dy \sqrt{-G}\, G^{MN}\partial_M \Phi \partial_N \Phi \tag{2.75}$$

donde $M, N = \mu, 5$, con $\mu = 0, 1, 2, 3$. La ecuación de movimiento que se obtiene variando dicha acción con respecto al campo escalar es

$$e^{2\kappa|y|}\eta_{\mu\nu}\partial^\mu\partial^\nu\Phi - \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_y\left[\sqrt{-g}\partial_y\Phi\right] = 0 \tag{2.76}$$

es conveniente proponer al campo escalar como un producto de dos funciones

$$\Phi(x, y) = \phi(x)\psi(y) \tag{2.77}$$

donde $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ son las coordenadas tetradimensionales usuales. Usando esta propuesta podemos escribir a la ecuación (2.76) como

$$\left(\partial_y^2 - 4\kappa\, sgn(y)\partial_y + m^2\, e^{2\kappa|y|}\right)\psi(y) = 0 \tag{2.78}$$

$$\eta_{\mu\nu}\partial^\mu\partial^\nu\phi(x) + m^2\phi(x) = 0 \tag{2.79}$$

la ecuación (2.79) es la de un campo escalar efectivo con masa m en cuatro dimensiones. Para analizar la ecuación (2.78) es suficiente tomar el caso en el que $y > 0$ debido a que esta es invariante bajo la reflexión en y y las adecuadas condiciones de frontera. Así realizando el cambio de variable $v = e^{\kappa y}/\kappa$ y definiendo $\psi = v^2\tilde{\psi}$ se obtiene

$$\partial_v^2\tilde{\psi} + \frac{1}{v}\partial_v\tilde{\psi} + \left(m^2 - \frac{2^2}{v^2}\right)\tilde{\psi} = 0. \tag{2.80}$$

en el caso en que $m = 0$ la solución es

$$\tilde{\psi}_0 = C_1 v^2 + C_2 v^{-2} \tag{2.81}$$

imponiendo que la solución no diverja en infinito lleva a que $C_1 = 0$. Finalmente la solución es

$$\psi_0(y) = \sqrt{\kappa} \quad \text{donde} \quad \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-2\kappa|y|}\psi_0^2 = 1. \tag{2.82}$$

Donde el factor de peso viene de la forma de Sturm-Liuville de la ecuación (2.80). Para ver que hay un modo cero localizado en la brana es útil realizar la descomposición del modo cero en la acción (2.75). Se obtiene así

$$S = \frac{1}{2}\int d^4x dy \sqrt{-G}\, G^{MN}\partial_M \Phi_0 \partial_N \Phi_0 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-2\kappa|y|}\psi_0^2 \int d^4x \eta^{\mu\nu}\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \tag{2.83}$$

así para el modo cero $\Phi(x,y)_0 = \sqrt{\kappa}\phi(x)$, efectivamente el campo $\phi(x)$ es localizado en la membrana. Lo cual se parece al modo cero de la compactificación de KK. Para $m > 0$ la ecuación (2.80) da origen a toda una torre de estados continuos.

Campo escalar masivo

En la sección anterior se mostró que el modo cero del campo escalar sin masa se localiza en la brana, pero ¿qué sucede cuando se le añade masa al campo escalar?, en este caso mostraremos que cuando se introduce el término de masa, el modo cero se convierte en un estado meta estable que después decae en los modos continuos del bulto. Desde el punto de vista cuatro dimensional, el modo cuasi localizado corresponde a una partícula masiva que se propaga en las tres dimensiones espaciales por algún tiempo y entonces literalmente desaparece para un observador confinado en la brana. Notablemente para alguna combinación de los parámetros del escenario el tiempo de vida de dicha partícula en la brana es muy grande. Mostraremos como se realiza este proceso para el escenario de RS y generalizaremos este resultado para el escenario RSIIn.

Escenario RS

Siguiendo el mecanismo descrito por [30], el cual permite incluir términos de masas a los campos escalar y fermiónico. La acción para este caso es

$$S = \frac{1}{2}\int d^4x dy \sqrt{-G}\left(G^{MN}\partial_M\Phi\partial_N\Phi - \frac{1}{2}\mu^2\Phi^2\right) \tag{2.84}$$

donde nuevamente $M, N = \mu, 5$. La correspondiente ecuación de movimiento obtenida al variar la acción (2.84) con respecto al campo Φ puede escribirse como

$$\left(\partial_y^2 - 4\kappa\, sgn(y)\partial_y - \mu^2 + m^2\, e^{2\kappa|y|}\right)\psi(y) = 0, \tag{2.85}$$

$$\left(\eta_{\mu\nu}\partial^\mu\partial^\nu\phi(x) + m^2\right)\phi(x) = 0, \tag{2.86}$$

donde hemos supuesto que Φ puede descomponerse como $\Phi(x, y) = \phi(x)\psi(y)$. Claramente a grandes distancias en la dimensión extra el término μ^2 es despreciable comparado con $m^2\, e^{2\kappa|y|}$ en la ecuación (2.85), así esta ecuación se reduce al caso (2.78). Es decir los eigenvalores continuos son determinados para $|y|$ grandes los cuales no son afectados por el termino de masa μ^2 y posee el mismo espectro continuo que la ecuación (2.78) con $\mu^2 = 0$. El espectro continúo empieza desde cero.

Para $\mu \neq 0$ no hay un verdadero modo localizado con masa cuatro dimensional efectiva distinto de cero. Si no que esa partícula se vuelve metaestable y decae en los modos continuos. Para mostrar esto, es conveniente realizar el cambio de variable $v = e^{\kappa y}/\kappa$ y definiendo $\psi = v^2\tilde{\psi}$ en la ecuación (2.85) para obtener

$$\partial_v^2\tilde{\psi} + \frac{1}{v}\partial_v\tilde{\psi} + \left(m^2 - \frac{4+\mu^2}{v^2}\right)\tilde{\psi} = 0. \tag{2.87}$$

las soluciones de esta ecuación son las funciones de Hankel de primer y segundo tipo, $H_\vartheta^{(1)}(x), H_\vartheta^{(2)}(x)$, con $\vartheta = \sqrt{4 + \frac{\mu^2}{\kappa^2}}$. Imponiendo condiciones de frontera radiativas en la coordenada $y \to \pm\infty$ las soluciones a la derecha y a la izquierda de la brana son

$$\psi(y < 0) = c_1 e^{-2\kappa y} H_\vartheta^{(1)}\left(\frac{m}{\kappa}e^{-\kappa y}\right), \tag{2.88}$$

$$\psi(y > 0) = c_2 e^{2\kappa y} H_\vartheta^{(1)}\left(\frac{m}{\kappa}e^{\kappa y}\right). \tag{2.89}$$

Los eigenvalores son determinados pegando las soluciones en $y = 0$. La continuidad de estas soluciones requiere que $c_1 = c_2$. La primera derivada debe ser continua en $y = 0$, lo cual se sigue de la ecuación (2.87)

$$\partial_y \psi(+0) - \partial_y \psi(-0) = 0 \Rightarrow \partial_y \psi(0) = 0 \Rightarrow \partial_v \left[v^2 H_\vartheta^{(1)}(v) \right] \Big|_{y=0} = 0 \tag{2.90}$$

esta condición implica una ecuación de eigenvalores para m

$$\frac{m H_{\vartheta-1}^{(1)}\left(\frac{m}{\kappa}\right)}{\kappa H_\vartheta^{(1)}\left(\frac{m}{\kappa}\right)} + 2 - \vartheta = 0. \tag{2.91}$$

Consideremos el caso en que $m, \mu < \kappa$ para el que se obtiene

$$\frac{H_{\vartheta-1}^{(1)}\left(\frac{m}{\kappa}\right)}{H_\vartheta^{(1)}\left(\frac{m}{\kappa}\right)} = \frac{N_{\vartheta-1}\left(\frac{m}{\kappa}\right)}{N_\vartheta\left(\frac{m}{\kappa}\right)} \left(1 - i \frac{J_{\vartheta-1}\left(\frac{m}{\kappa}\right)}{N_{\vartheta-1}\left(\frac{m}{\kappa}\right)} + \dots \right). \tag{2.92}$$

Introduciendo esta ecuación en (2.91) y desarrollando las funciones de Bessel para argumentos pequeños tenemos

$$\frac{m^2}{2\kappa^2} + \frac{i\pi}{4}\left[2i \ln\left(\frac{m}{2\kappa}\right) + 2i\gamma + \pi \right] \left(\frac{m}{\kappa}\right)^4 + \mathcal{O}\left(m^6\right) = \vartheta - 2 \sim \frac{\mu^2}{4\kappa^2} \tag{2.93}$$

donde $\gamma = 0.5772156$ es el numero de Euler. Invirtiendo la serie se tiene

$$\frac{m_0 - i\Delta}{\kappa} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\mu}{\kappa} - \frac{\sqrt{2}}{64}\left[-4\gamma + 2i\pi + 4\ln\left(\frac{\kappa}{\mu}\right) \right] \left(\frac{\mu}{k}\right)^3 + \mathcal{O}\left(\mu^5\right) \tag{2.94}$$

de esta forma comparando al orden mas bajo en μ tenemos

$$m = m_0 - i\Delta \tag{2.95}$$

con

$$m_0^2 = \frac{\mu^2}{2}, \tag{2.96}$$

$$\frac{\Delta}{m_0} = \frac{\pi}{16}\left(\frac{m_0}{\kappa}\right)^2. \tag{2.97}$$

De este último resultado se puede ver que hay un estado metaestable con un ancho suprimido por (m/κ). Si μ es suficientemente pequeño, existe un modo metaestable con Γ muy pequeño. De esta forma el tiempo $\tau = 1/\Gamma$ que la partícula permanece en la brana es suficientemente grande cuando este ancho Δ es pequeño y la partícula eventualmente decae en los modos continuos del bulto.

Escenario RSIIn

La generalización para localizar al campo escalar masivo en RSIIn se sigue paralelamente al de la sección anterior. Consideraremos el caso de una sola dimensión compacta. En este escenario la métrica es

$$ds^2 = e^{-2\kappa|y|}\left[g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - R^2 d\theta^2\right] - dy^2. \tag{2.98}$$

La acción para el campo escalar masivo es

$$S = \frac{1}{2}\int d^4x dy \sqrt{-G}\left(G^{MN}\partial_M\Phi\partial_N\Phi - \frac{1}{2}\mu^2\Phi^2\right) \tag{2.99}$$

donde G^{MN}, $M,N = \mu, 5, 6$, con $\mu = 0,1,2,3$ está dado por la métrica de fondo (2.98). La ecuación de movimiento para el campo escalar masivo en este fondo es

$$e^{2\kappa|y|}\eta_{\mu\nu}\partial^\mu\partial^\nu\Phi - \frac{e^{2\kappa|y|}}{R^2}\partial_\theta^2\Phi - \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_y\left[\sqrt{-g}\partial_y\Phi\right] + \mu^2\Phi = 0 \tag{2.100}$$

donde el campo puede escribirse como $\Phi(x,\theta,y) = \phi(x)\Theta(\theta)\psi(y)$ con $x = (x_1, x_2, x_3)$, las coordenadas espaciales usuales. Con esta propuesta la ecuación que satisface $\psi(y)$ puede escribirse como

$$\left(\partial_y^2 - 5\kappa\, sgn(y)\partial_y - \mu^2 + m^2\, e^{2\kappa|y|}\right)\psi = 0, \tag{2.101}$$

donde nuevamente se realiza el cambio de variable $v = e^{\kappa y}/\kappa$ y se define $\psi = v^{5/2}\tilde{\psi}$, obtienendo

$$\partial_v^2\tilde{\psi} + \frac{1}{v}\partial_v\tilde{\psi} + \left(m^2 - \frac{\vartheta^2}{v^2}\right)\tilde{\psi} = 0. \tag{2.102}$$

Aquí $\vartheta^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{\mu}{\kappa}\right)^2$. Imponiendo nuevamente las condiciones de frontera radiativas en la coordenada $y \to \pm\infty$ las soluciones a la derecha y a la izquierda de la brana que satisfacen esta ecuación son

$$\psi(y<0) = c_1 e^{-\frac{5\kappa y}{2}} H_\vartheta^{(1)}\left(\frac{m}{\kappa}e^{-\kappa y}\right), \tag{2.103}$$

$$\psi(y>0) = c_2 e^{2\frac{5\kappa y}{2}} H_\vartheta^{(1)}\left(\frac{m}{\kappa}e^{\kappa y}\right), \tag{2.104}$$

donde $H_\gamma^{(1)}(x)$ es la funcion de Hankel. Nuevamente en $y = 0$ se tiene que $c_1 = c_2$. También $y = 0$, la primera derivada debe satisfacer

$$\partial_y \psi(+0) - \partial_y \psi(-0) = 0. \tag{2.105}$$

Esta condición implica la siguiente ecuación de eigenvalores para m

$$\frac{m H_{\vartheta-1}^{(1)}\left(\frac{m}{\kappa}\right)}{\kappa H_\vartheta^{(1)}\left(\frac{m}{\kappa}\right)} + \frac{5}{2} - \vartheta = 0. \tag{2.106}$$

De manera similar para argumentos pequeños $\mu, m \ll \kappa$ tenemos

$$\frac{1}{3}\left(\frac{m}{\kappa}\right)^2 + \frac{1}{9}\left(\frac{m}{\kappa}\right)^4 + \frac{i}{9}\left(\frac{m}{\kappa}\right)^5 + \mathcal{O}\left(m^6\right) = \vartheta - \frac{5}{2} \sim \frac{\mu^2}{5\kappa^2} \tag{2.107}$$

y nuevamente invirtiendo la serie se tiene

$$\frac{m_0 - i\Delta}{\kappa} = \sqrt{\frac{3}{5}}\frac{\mu}{k} - \frac{\sqrt{15}}{50}\left(\frac{\mu}{\kappa}\right)^3 - \frac{3i}{50}\left(\frac{\mu}{\kappa}\right)^4 + \mathcal{O}\left(\mu^5\right). \tag{2.108}$$

Comprando al orden mas bajo tenemos

$$m_0^2 = \frac{3}{5}\mu^2 \tag{2.109}$$

$$\frac{\Delta}{m_0} = \frac{1}{6}\left(\frac{m_0}{\kappa}\right)^3 \tag{2.110}$$

Se puede ver que para valores suficientemente pequeños de la masa $\mu << \kappa$ el tiempo de vida $\tau = 1/\Delta \sim \frac{\kappa^3}{\mu^4}$ del estado metaestable puede ser grande.

2.3.2. Fermiones masivos en RSIIn

Generalizaremos el mecanismo propuesto en [30] para la localización de espinores masivos en el escenario de RSIIn. Trabajaremos el caso en el cual $n = 1, 2$ de esta forma el espacio tiempo es de 6 y 7 dimensiones donde los espinores son de 8 componentes. El análisis considera una pared, la cual es producida al introducir un campo escalar χ con una configuración adecuada. Esta pared separa las regiones $\chi = -v, y < 0$ y $\chi = v, y > 0$ en la coordenada y. Se introduce también un acoplamiento tipo Yukawa entre los espinores y el campo escalar de la forma $g\chi\bar{\psi}\psi$. Para un signo dado del acoplamiento de Yukawa g el modo cero adquiere una

quiralidad definida como se muestra en [8]. Para incluir ambas quiralidades es conveniente definir un campo Ψ que contenga a ambas y un término de masa es dado por $\nu\bar{\Psi}\Psi$. En nuestra aproximación a bajas energías. La acción para este campo después de una adecuada rotación $SU(2)$ es

$$S = \int dxdy\sqrt{G}\bar{\Psi}\left(\Gamma^A E_A^M\left[\partial_M + \Omega_M + ie^{(n)}A_M\right] + g\chi\tau_1 + \mu\tau_2\right)\Psi, \tag{2.111}$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \tag{2.112}$$

Donde ψ_1 y ψ_2 son espinores en $(5+n)$ dimensiones, $\Omega_M = \frac{1}{2}\Omega_{M[AB]}\Sigma^{AB}$ es la conexión de espín, con generadores $\Sigma_{AB} = \frac{1}{4}[\Gamma_A, \Gamma_B]$, Γ_A son las matrices de Dirac las cuales son de 8×8 para $n = 1, 2$ y $\sqrt{G}$ esta dado por la métrica

$$ds^2 = a(y)^2\left[g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - R^2\sum_{n=1}^{2} d\theta^2\right] - dy^2, \quad a(y) = e^{-\kappa|y|} \tag{2.113}$$

Variando la acción (2.111) la correspondiente ecuación de Dirac puede escribirse como

$$\left[\Gamma^A E_A^M\left\{\partial_M + \Omega_M + ie^{(n)}A_M\right\} - g\chi(y)\tau_1 - \mu\tau_2\right]\Psi = 0. \tag{2.114}$$

Ω_A está dado por $\Omega_A = E_A^M\Omega_M$. Las únicas componentes diferentes de cero de E_A^M en el fondo (2.113) son

$$E_a^\mu = \frac{1}{a(y)}\delta_a^\mu, \qquad E_{\underline{y}}^y = 1, \quad E_{\underline{\theta_1}}^{\theta_1} = \frac{1}{a(y)}, \qquad E_{\underline{\theta_2}}^{\theta_2} = \frac{1}{a(y)}, \tag{2.115}$$

donde $a = 0, 1, 2, 3$, los índices en las coordenadas θ se refieren a $n = 1, 2$ y los índices subrayados se refieren al marco local ortonormal. De esta forma se pueden calcular las correspondientes Ω_A cuyas únicas componentes diferentes de cero son

$$\Omega_\mu = \frac{1}{2}a(y)'\Gamma_y\Gamma_\mu, \quad \Omega_{\theta_1} = \frac{1}{2}a(y)'\Gamma_y\Gamma_\theta \quad \text{y} \quad \Omega_{\theta_2} = \frac{1}{2}a(y)'\Gamma_y\Gamma_\theta \tag{2.116}$$

Considerando que $A_M = (A_\mu, 0, 0)$ (aquí hemos considerado que no hay corrientes asociadas a las dimensiones extras $j^{\theta_i} = j^y = 0$, lo cual es consistente con $A_{\theta_i} = A_Y = 0$) e introduciendo las ecuaciones (2.115) y (2.116) la ecuación de Dirac puede escribirse como

$$\left[\frac{\Gamma^\mu\{\partial_\mu + A_\mu\}}{a(y)} + \Gamma^y\partial_y - \frac{1}{2}\kappa sign(y)\left(\Gamma^\mu\Gamma_\mu + n\Gamma^\theta\Gamma_\theta\right)\Gamma^y - g\chi(y)\tau_1 - \mu\tau_2\right]\Psi = 0 \tag{2.117}$$

Esta ecuación determina los modos del fermión. Debido a que los detalles del campo escalar no son relevantes para este análisis, se puede usar una aproximación de una pared delgada $g\chi(y) = gvsign(y)$.

Si $\mu = 0$ y $gv > 1/2\kappa$ hay dos modos cero del fermion de quiralidad opuesta y cuyo espectro continuo empieza desde cero. Para $\mu > 0$ y $gv > 1/2\kappa$ el modo cero no se localiza en la brana pero existe un estado metaestable [30]. Por otro lado su espectro continuo también empieza desde cero. Esta situación es parecida al del campo escalar masivo.

Ahora se propone determinar el carácter metaestable del fermión con base en (2.117). Para esto es conveniente elegir los matrices de Dirac de la siguiente forma: $\Gamma_\mu = \gamma_\mu \otimes \sigma_3$, $\Gamma_y = \gamma_5 \otimes \sigma_3$ y $\Gamma_\theta = 1 \otimes \sigma_2$. Una forma conveniente para Ψ es [102]

$$\Psi = \phi(x) \otimes \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}(y), \quad \Rightarrow \Gamma^y \otimes I_{2\times 2}\Psi_{R,L} = \pm\Psi_{R,L}, \qquad \mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.118}$$

$\phi(x)$ representa el espinor cuatro dimensional y desde el punto de vista de la brana el espinor representa un partícula puntual. La representación fundamental de Ψ corresponde a eigenvalores $+1$ y -1 para τ_3. es decir Ψ puede escribirse como una combinación lineal de los eigenvectores Ψ_{+1} y Ψ_{-1} cada uno asociado a los eigenvalores ± 1 sin embargo Ψ_{-1} carece de sentido físico pues representa a un espinor cuatro dimensional cuya masa es negativa, por lo que es descartado, de esta forma usaremos la representación asociada a $\tau_3\Psi = \Psi$ como fue propuesto en [102]. En términos de $\Psi_{L,R}$ la ecuación (2.117) se puede escribir como dos ecuaciones desacopladas

$$\frac{\Gamma^\mu\{\partial_\mu - e^{(n)}A_\mu\}}{a(y)}\Psi_L + \partial_y\Psi_R - (gv\tau_1 + \mu\tau_2)\Psi_R = 0 \tag{2.119}$$

$$\frac{\Gamma^\mu\{\partial_\mu - e^{(n)}A_\mu\}}{a(y)}\Psi_R - \partial_y\Psi_L - (gv\tau_1 + \mu\tau_2)\Psi_L = 0 \tag{2.120}$$

Tomando

$$\gamma^\mu\{\partial_\mu - e^{(n)}A_\mu\}\phi = m\phi, \tag{2.121}$$

y eliminando Ψ_L en el sistema de ecuaciones de arriba se obtiene una ecuación de segundo

orden para $\mathcal{V}(y)$ que puede escribirse como

$$\left\{\frac{m^2}{a^2}+\partial_y^2-g\chi'\tau_1-\kappa\,\mathrm{sign}(y)\partial_y+\kappa\,\mathrm{sign}(y)(gv\tau_1+\mu\tau_2)+(gv\tau_1+\mu\tau_2)^2\right\}\mathcal{V}(y)=0. \tag{2.122}$$

Siguiendo el argumento desarrollado en [30], es conveniente introducir eigenvectores de la matriz $gv\tau_1+\mu\tau_2$. Así definimos a M y α de tal manera que

$$gv\tau_1+\mu\tau_2=Me^{i\alpha} \tag{2.123}$$

entonces los eigenvectores son

$$\psi_{\pm}^{(>)}=\begin{pmatrix}e^{-i\frac{\alpha}{2}}\\ \pm e^{i\frac{\alpha}{2}}\end{pmatrix} \tag{2.124}$$

con eigenvalores $\pm M$. La solución de (2.122) se sigue de forma directa de lo aprendido en la sección 2.3.1 sujeta a las condiciones de frontera radiativas. Para $y>0$ es

$$\mathcal{V}(y>0)=e^{\frac{\kappa y}{2}}\left[c^{(>)}H_{\nu_+}^{(1)}\left(\frac{m}{\kappa}e^{\kappa y}\right)\psi_+^{(>)}+d^{(>)}H_{\nu_-}^{(1)}\left(\frac{m}{\kappa}e^{\kappa y}\right)\psi_-^{(>)}\right] \tag{2.125}$$

donde $\nu_\pm=M/\kappa\mp 1/2$, $c^{(>)}$ y $d^{(>)}$ son coeficientes a determinar. $H_\nu^{(1)}(z)$ es la función de Hankel. De forma similar la solución para $y<0$ es

$$\mathcal{V}(y<0)=e^{-\frac{\kappa y}{2}}\left[c^{(<)}H_{\nu_+}^{(1)}\left(\frac{m}{\kappa}e^{-\kappa y}\right)\psi_+^{(<)}+d^{(<)}H_{\nu_-}^{(1)}\left(\frac{m}{\kappa}e^{-\kappa y}\right)\psi_-^{(<)}\right] \tag{2.126}$$

donde

$$\psi_{\pm}^{(<)}=\begin{pmatrix}e^{i\frac{\alpha}{2}}\\ \pm e^{-i\frac{\alpha}{2}}\end{pmatrix} \tag{2.127}$$

son eigenvectores de la matriz $-gv\tau_1+\mu\tau_2$, $c^{(<)}$ y $d^{(<)}$ son coeficientes a determinar. La continuidad de $\mathcal{V}(y)$ y de su primera derivada en $y=0$ implica el siguiente sistema de ecuaciones

$$\gamma c^{(>)}+d^{(>)} = e^{i\alpha}\left(\gamma c^{(<)}+d^{(<)},\right) \tag{2.128}$$

$$\gamma c^{(>)}-d^{(>)} = e^{-i\alpha}\left(\gamma c^{(<)}-d^{(<)},\right) \tag{2.129}$$

$$c^{(>)}-\gamma d^{(>)} = e^{i\alpha}\left(c^{(<)}+\gamma d^{(<)},\right) \tag{2.130}$$

$$c^{(>)}+\gamma d^{(>)} = -e^{-i\alpha}\left(c^{(<)}+\gamma d^{(<)},\right) \tag{2.131}$$

donde hemos introducido la notación

$$\gamma = \frac{H_{\nu+}^{(1)}(m/\kappa)}{H_{\nu-}^{(1)}(m/\kappa)}. \tag{2.132}$$

Para que el sistema de ecuaciones (2.128-2.131) tenga solución no trivial el determinante debe ser igual a cero, lo cual implica

$$\gamma = \pm \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad \gamma = \pm \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{2.133}$$

para μ/gv pequeño (α también es pequeño) la solución relevante es

$$\frac{H_{\nu+}^{(1)}(m/\kappa)}{H_{\nu-}^{(1)}(m/\kappa)} = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{2.134}$$

Esta ecuación determina el eigenvalor complejo de m. Explícitamente esto se lee como

$$\frac{H_{\nu+}^{(1)}(m/\kappa)}{H_{\nu-}^{(1)}(m/\kappa)} = \frac{\mu}{2gv} \tag{2.135}$$

El caso más simple es considerar $\mu \ll \kappa$. Uno desarrolla las funciones de Bessel para argumentos pequeños y obtiene

$$m = m_0 - i\Delta \tag{2.136}$$

con

$$m_0 = \left(1 - \frac{\kappa}{gv}\right)\mu, \quad \Delta = m_0 \left(\frac{m_0}{2\kappa}\right)^{\frac{2gv}{\kappa}-1} \frac{\pi}{\left[\Gamma\left(\frac{gv}{\kappa} + 1/2\right)\right]^2} \tag{2.137}$$

Donde $\Gamma(\dots)$ es la función Gamma. Para el caso opuesto $\mu \gg \kappa$ se tiene

$$m_0 = \mu, \quad \Delta = \frac{m_0}{2}\left(\frac{m_0}{2M}\right)^{2\frac{M}{\kappa}-1} e^{2\frac{M}{\kappa}}, \quad M = \sqrt{(gv)^2 + \mu^2} \tag{2.138}$$

De las ecuaciones (2.137)-(2.138) se puede ver que la probabilidad de tunelaje es pequeña si la masa μ es también pequeña. de esta forma el tiempo de vida media del espinor es grande y se puede considerar localizado en la brana. Supongamos que este es el caso y de esta forma estudiaremos las modificaciones a los niveles de energía para un átomo de Hidrógeno producidas por la presencia de las dimensiones extras.

2.3.3. Campo electromagnético

Como hemos mencionado antes la localización de campos de norma mínimamente acoplados a los fermiones no es una tarea fácil de realizar. En esta seccion mostraremos como se localizan los campos de norma para el escenario RSIIn y el escenario que proponen Daemi y Shaposhnikov. En el primero la localización se realiza debido a la gravedad de la brana, mientras que en el segundo escenario el defecto topológico permite localizar al campo electromagnético.

El escenario RSIIn

Ha habido una extensa discusión respecto a la localización de los campos de norma en mundos brana como se muestra en [29]. Aquí se adoptará el mecanismo propuesto en [88, 43] para el escenario RSIIn. Consideremos la acción del campo de norma A_M

$$S_g = -\frac{1}{4}\int dx^4 dy \prod \frac{d\theta_i}{2\pi R_i}\sqrt{g}g^{MP}g^{NQ}F_{MN}F_{PQ}\,. \tag{2.139}$$

A bajas energías $E \ll 1/R_i$ el término relevante del campo A_M es independiente de θ_i, ó modo cero. De esta forma la acción efectiva cuatro dimensional es

$$S = -\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-n\kappa|y|}\int dx^4 \eta^{\mu\nu}\eta^{\lambda\rho}F_{\mu\lambda}F_{\nu\rho}\,, \tag{2.140}$$

de donde A_μ es normalizable hasta un factor proporcional a $\sqrt{n\kappa}$. Así la razón de por qué generalizamos el modelo de RS es mas claro. Si $n = 0$ no hay localización del campo de norma, pero si $n \geq 1$ el campo de norma se localiza en la membrana.

Escenario de Daemi-Shaposhnikov

En esta sección solo se muestra brevemente como se lleva acabo la localización del campo electromagnético propuesto en [104]. Como se ha mencionado en la introducción este escenario tiene una acción cuatro dimensional efectiva para el campo $W_\mu(x,r)$

$$S = -\frac{\pi}{ae^2}\int_0^\infty \mathrm{d}r F(r)\int \mathrm{d}x^4 \left[\eta^{\mu\alpha}\eta^{\beta\nu}\partial_{[\mu}W_{\nu]}\partial_{[\alpha}W_{\beta]} + e^{-A(r)}\eta^{\mu\nu}\partial_r W_\mu \partial_r W_\nu\right]\,, \tag{2.141}$$

la parte independiente de r del campo $W_\mu(x,r)$ corresponde a un campo vectorial cuatro dimensionalsin masa. Su acción efectiva es

$$S(W) = -\frac{1}{2q^2}\int \mathrm{d}x^4 \eta^{\mu\alpha}\eta^{\beta\nu}\partial_{[\mu}W_{\nu]}\partial_{[\alpha}W_{\beta]}\,, \tag{2.142}$$

donde el acoplamiento cuatro dimensional es

$$\frac{1}{q^2} = \frac{2\pi a}{e^2}\int_0^\infty e^{B(r)}\left[P^2(r) + \frac{a^2e^2}{\kappa^2}\right]\,, \tag{2.143}$$

y $B(r)$, $P(r)$ cumplen las condiciones de frontera mostradas en (2.69) y (2.67) en la integral sobre r. Una interpretación física de la ecuaciones (2.142) y (2.143) es que las fluctuaciones de la componente μ del campo de Maxwell en seis dimensiones y la componente de la métrica $h_{\vartheta\mu}$ están localizadas en en una región $r \sim max(1/c, 1/M_W, 1/M_H)$ cerca del núcleo del vórtice. M_W y M_H son las masas del campo vectorial y escalar del bulto, en ausencia de gravedad. c es el parámetro de la solución definida en (2.69). EL campo efectivo localizado puede ser tomado como

$$\left[P^2(r) + \frac{a^2e^2}{\kappa^2}\right]^{\frac{1}{2}} W_\mu(x)\,, \tag{2.144}$$

el cual tiende a W cuando $r \to 0$ y desaparece rápidamente cuando $r \to \infty$. Claramente el campo gravitacional juega un papel muy importante al realizar la localización de (2.70) a través del factor $e^{\frac{1}{2}B(r)}$.

Capítulo

3 Fuerza de Casimir en mundos brana

Más de 50 años han pasado desde que H.B.G. Casimir publicó su famoso artículo [19], donde halló una explicación para la interacción de Van der Waals como una manifestación de la energía del punto cero de un campo cuántico. Por mucho tiempo su artículo permaneció en el olvido. Pero a principios de los anos 70's éste recibió una gran atención y en los últimos años se ha vuelto muy popular. Actualmente hay una gran cantidad de experimentos de alta precisión que han demostrado la fuerza de Casimir para diferentes geometrías y muchos otros que se están llevando a cabo. En el aspecto teórico ha habido grandes progresos en la investigación de las divergencias que en él aparecen, en el estudio de diferentes geometrías, condiciones de frontera y espacios curvos.

El efecto Casimir en su forma simple (como se muestra en la figura 3.1) es la atracción de un par de placas conductoras neutras colocadas en forma paralela, debido a las fluctuaciones del vació del campo electromagnético. Este es un efecto puramente cuántico, debido a que no hay fuerza entre las placas neutras en la electrodinámica clásica. Es necesario mencionar que a pesar de las divergencias que aparecen cuando se suman las energías del punto cero de los modos se encuentra un valor finito para esta fuerza.

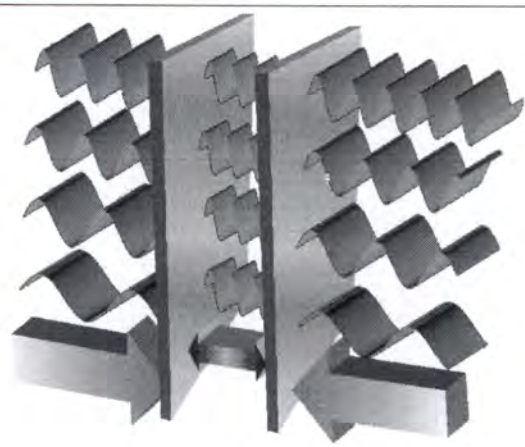


Figura 3.1: *Representación esquemática para la fuerza Casimir del campo electromagnético entre dos placas paralelas. Las ondulaciones representan fluctuaciones de vacío de un campo cuántico, obviamente injustificable dentro de una descripción clásica del mismo.*

El efecto Casimir ha recibido gran atención en el contexto de las dimensiones extras, por ejemplo en [15, 37, 67, 46] discuten la fuerza de Casimir en la teoría de cuerdas. En [36, 40, 42, 98] estudian el efecto Casimir para un campo escalar entre branas de un fondo de RS, sujeto a una mezcla de condiciones de frontera las cuales son derivadas del valor de expectación del tensor de energía momento, demostrando que la estabilización del radión ó separación entre placas, es posible. Consideraciones similares son discutidas en [36, 40, 42, 98]. También se ha estudiado el efecto Casimir corregido perturbativamente a un lazo para geometrías no conmutativas [63], que son una mezcla del espacio de Minkowski en (d+1) dimensiones y un toro no conmutativo en dos dimensiones usando un campo escalar y un campo vectorial. Para el campo escalar la fuerza siempre es repulsiva, mientras que para el campo vectorial se tiene una fuerza repulsiva para $d > 5$. De esta forma se tiene un mecanismo de estabilización para un escenario de KK donde las dimensiones extras son no conmutativas.

Más recientemente se ha analizado la fuerza de Casimir en la presencia de una dimensión compacta [97], donde los modos asociados a la dimensión compacta son los de KK. El modo cero reproduce la fuerza usual de Casimir (salvo un factor constante) en cuatro dimensiones mientras que toda la torre de modos entra como un factor aditivo. En este caso la cota para

el tamaño de la dimensión compacta es $R < 10\,nm$.

En la primera parte de este capítulo mostraremos como derivar la fuerza de Casimir [1] para una geometría simple: dos placas conductoras paralelas para un campo electromagnético [70], usando regularización dimensional para el escenario de Randjbar-Daemi y Shaposhnikov en 6 dimensiones.

Enseguida se analizará el efecto Casimir entre dos placas paralelas debido a un campo escalar masivo en seis dimensiones considerando el escenario de RSIIn. En este caso se adoptara el análisis con la función de Green. Aquí los campos de norma, escalar y fermiónico son localizados por la gravedad de la brana. Por último se estudiara un campo escalar masivo en el escenario de RS. Por completez se estudiara el caso no masivo. La principal motivación al estudiar el efecto Casimir se debe a que es una herramienta experimental útil que permite investigar física no estándar debido a la gran precisión con que se puede realizar actualmente [12, 66].

SECTION 3.1

Campo electromagnético en RDSh

Como se ha visto anteriormente el efecto Casimir puede entenderse como la fuerza entre las superficies que confinan a los campos cuánticos a un volumen finito del espacio. Estas fronteras pueden ser medios materiales o pueden representar la topología del espacio tiempo en teorías de dimensión mayor a cuatro como las del tipo Kaluza-Klein. En ambos casos las fronteras restringen los modos de los campos cuánticos dando origen a una fuerza la cual puede ser repulsiva o atractiva (por ejemplo para dos esferas concéntricas la fuera de Casimir es repulsiva).

El análisis que se realiza en esta sección parte de la electrodinámica efectiva cuatro dimensional de Randjbar-Daemi y Shaposhnikov [104], que se discutió en la introducción. La acción

[1] En el apéndice A se presenta una discusión detallada para obtener la fuerza de Casimir considerando un campo electromagnético y un campo escalar, empleado regularización dimensional y el método de la función de Green en el contexto de cuatro dimensiones.

de la electrodinámica efectiva para este modelo es resultado de una mezcla específica de fluctuaciones del vector potencial de 6 dimensiones y la componente $\theta\mu$ de la métrica [103] y tiene la forma explicita

$$S = -\frac{\pi}{ae^2}\int_0^\infty \mathrm{d}rF(r)\int \mathrm{d}x^4\left[\eta^{\mu\alpha}\eta^{\beta\nu}\partial_{[\mu}W_{\nu]}\partial_{[\alpha}W_{\beta]} + e^{-A(r)}\eta^{\mu\nu}\partial_r W_\mu \partial_r W_\nu\right], \tag{3.1}$$

donde

$$F(r) = e^{\frac{B(r)}{2}}\left(P^2(r) + \frac{a^2e^2}{\kappa^2}e^{B(r)}\right). \tag{3.2}$$

Para estudiar el efecto Casimir en este modelo es necesario conocer las relaciones de dispersión $\omega = \omega(k_i)$, $i = 1, 2, 3, r, \theta$. Para esto es necesario obtener primero las ecuaciones de movimiento para el campo W, las cuales se obtiene variando la acción (3.1)

$$\delta S = \int_0^\infty \mathrm{d}rF(r)\int \mathrm{d}x^4\left[2\left\{\partial^\mu\partial_{[\mu}W_{\beta]}\right\} + \frac{2}{F(r)}\partial_r\left\{F(r)e^{-A(r)}\partial_r W_\alpha\right\}\right]\left(\delta W^\beta\right). \tag{3.3}$$

Tomando la norma de Lorentz $\partial^\mu W_\mu = 0$ y considerando una configuración del tipo $W_\nu = R(r)_\nu\, e^{-ip_\mu x^\mu}$, donde p_μ es el momento cuatro dimensional, la ecuación (3.3) puede escribirse como

$$\left[\frac{p^2\, e^{A(r)}}{2} - \frac{1}{2}\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{F(r)e^{-A(r)}}\frac{d}{dr}\left(F(r)e^{-A(r)}\right)\frac{d}{dr}\right]R(r) = 0. \tag{3.4}$$

Adicionalmente es conveniente realizar el siguiente cambio de variable $R = H(Fe^{-A})^{-1/2}$, de esta forma la ecuación para W puede escribirse como una ecuación tipo Schrödinger

$$\left[-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dr^2} + V(r)\right]H(r) = -\frac{p^2\, e^{A(r)}}{2}H(r), \tag{3.5}$$

donde

$$V(r) = \frac{1}{4}\frac{d^2}{dr^2}\ln\left(F(r)e^{A(r)}\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{d}{dr}\ln\left(F(r)e^{A(r)}\right)\right)^2. \tag{3.6}$$

(3.5) no es fácil de resolver, sin embargo resulta útil usar el hecho de que este modelo localiza los campos de norma cerca del núcleo del vórtice. De esta forma nuestro interés se enfoca en la región para $r \to 0$ donde se localiza nuestro mundo cuatro dimensional. En este límite, el potencial toma la forma

$$V(r \to 0) \approx -\frac{1}{8r^2} + \frac{1}{n_v^2\ell^2}, \quad \text{con} \quad \ell \equiv \frac{\kappa}{e}. \tag{3.7}$$

Así la ecuación (3.5) puede escribirse como

$$\left[-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{4r^2}+k_r^2\right]H(r)=0, \quad \text{donde} \quad k_r^2=-p^2\mathrm{e}-\frac{2}{n_v^2\ell^2}. \tag{3.8}$$

Notar que $\mathrm{e}=\exp(1)$ no es la carga eléctrica 6 dimensional. Las soluciones a esta ecuación han sido estudiadas y discutidas en [18] las cuales dependen fuertemente del coeficiente λ del termino $1/r^2$, es decir, si $\lambda<1/4$ y tomando la integrabilidad como condición de frontera (no el carácter finito de la solución) entonces todos los valores negativos de k_r son permitidos [87]. Para $\lambda>1/4$ sin embargo se impone la ortogonalidad de los estados y de esta forma los valores de k_r se cuantizan [18]. En el caso aquí considerado el valor de λ toma el valor crítico de $1/4$. Así la solución a la ecuación diferencial (3.8) está dada por

$$H=c_1 h^{(1)}_{-\frac{1}{2}}(ik_r)\,r+c_2 h^{(2)}_{-\frac{1}{2}}(ik_r)\,r, \tag{3.9}$$

donde $h^{(1)}_{-\frac{1}{2}}$ y $h^{(2)}_{-\frac{1}{2}}$ son las funciones esféricas de Hankel, las cuales en el limite $r\longrightarrow 0$ se comportan como

$$h^{(1)}_{-\frac{1}{2}}(r) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2r}}\frac{2i}{\pi}\ln r, \tag{3.10}$$

$$h^{(2)}_{-\frac{1}{2}}(r) \approx -\sqrt{\frac{\pi}{2r}}\frac{2i}{\pi}\ln r. \tag{3.11}$$

Tomando la integrabilidad como condición de frontera

$$\int dr R^2 \sim \int r\,(\ln r k_r)<\infty, \tag{3.12}$$

todas los valores de k_r negativos son permitidos y por lo tanto la relación de dispersión es

$$\frac{\omega^2}{c^2}=\vec{k}^2+\frac{2}{\mathrm{e}}k_r^2+\frac{2}{\mathrm{e}}\frac{1}{\ell^2 n_v^2}, \tag{3.13}$$

donde $\vec{k}$ es el vector de onda tridimensional. Uno de los resultados importantes de este cálculo es que el efecto de las dimensiones extras entran como dos momentos adicionales en la relación de dispersión; k_r es el momento asociado con la coordenada radial la cual es continua y $1/n_v^2$ asociado a la coordenada angular, la cual es discreta y es diferente a los modos de Kaluza-Klein, que permiten una dependencia tipo n^2. Además otra diferencia importante es que el modo cero no está presente para este caso pues solo se permite $n_v\neq 0$.

De esta forma es posible evaluar la fuerza de Casimir entre dos placas paralelas procediendo de forma análoga a como se mostró en el capítulo anterior. Imponiendo las condiciones de frontera de Dirichlet en las placas lleva a que el modo en la dirección perpendicular a las placas, z, se cuantiza tomando el valor $k_z = \pi N/l$, donde l es la separación entre las placas. Así la energía de Casimir entre las placas se obtiene al sumar la energía del estado base de cada modo. Por lo tanto la energía entre las placas es

$$E_{placas} = \frac{\hbar L^2 ap}{2} \int \frac{d^2k_\perp dk_r}{(2\pi)^3} \sum_{n_v=1,N=1} \omega_{k_\perp,k_r,N,n_v}. \tag{3.14}$$

Con $k_\perp = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ y k_1, k_2 son los las componentes del vector de onda tridimensional perpendicular a la coordenada z. p indica los estados de polarización del fotón (en este caso $p = 4$), L^2 es el área de las placas y como se mencionó en la introducción a mide el tamaño del vórtice. Para evaluar la integral de la ecuación (3.14) emplearemos lo aprendido en el capítulo anterior para el campo electromagnético. Se usara regularización dimensional para regularizar esta energía. Tratando a d como un parámetro complejo y continuo. Resulta conveniente trabajar únicamente con la integral.

$$I = \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \sum_{n_v=1,N=1} \sqrt{k^2 + \frac{\pi^2 N^2}{l^2} + \frac{2}{\mathrm{e}} \frac{1}{\ell^2 n_v^2}}. \tag{3.15}$$

Empleando la representación de la función Gamma

$$\Gamma(z) = g^z \int_0^\infty e^{-gt}\, t^{z-1}\, dt, \tag{3.16}$$

I puede escribirse como

$$I = \frac{1}{2\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)} \sum_{n_v,N} \int \frac{dk^d}{(2\pi)^d} \int_0^\infty \frac{dt}{t} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t\left(k^2 + \frac{\pi^2 N^2}{l^2} + \frac{2}{\mathrm{e}} \frac{1}{\ell^2 n_v^2}\right)}. \tag{3.17}$$

Realizando las integrales Gaussinas y empleando nuevamente (3.16) tenemos

$$I = \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \Gamma\left(-\frac{d+1}{2}\right) \sum_{n_v,N} \left(\frac{\pi^2 N^2}{l^2} + \frac{2}{\mathrm{e}} \frac{1}{\ell^2 n_v^2}\right)^{\frac{d+1}{2}}. \tag{3.18}$$

Es útil factorizar $\left(\frac{\pi}{l}\right)^{d+1}$ al realizar la suma en N usando la función zeta de Epstein (A.33)

$$E_1^{\mathcal{M}^2}(z,1) = \sum_{N=1}^{\infty} \left(N^2 + \mathcal{M}^2\right)^{-z}, \quad \mathcal{M} = \frac{2}{\mathrm{e}} \frac{l^2}{\pi^2 \ell^2 n_v^2}, \quad z = \frac{d+1}{2}. \tag{3.19}$$

Esta función no esta bien definida para $\mathcal{R}(z) > 1/2$, sin embargo se puede realizar una continuación analítica en todo el plano complejo así esta función puede expresarse como

$$E_1^{\mathcal{M}^2}(z,1) = \sum_{N=1}^{\infty} \left(N^2+\mathcal{M}^2\right)^{-z} = \frac{1}{2\mathcal{M}^{2z}} + \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2\mathcal{M}^{2z-1}\Gamma(z)}\left[\Gamma\left(z-\frac{1}{2}\right) + 4\sum_{\eta=1}^{\infty}\frac{K_{\frac{1}{2}-z}(2\pi\mathcal{M}\eta)}{(\pi\mathcal{M}\eta)^{\frac{1}{2}-z}}\right],$$

donde $k_\nu(z)$ es la función de Bessel de segundo tipo. Finalmente se tiene

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)(4\pi)^{\frac{d}{2}}}\left[\frac{1}{2}\Gamma\left(-\frac{d+1}{2}\right)\left(\frac{2}{\mathrm{e}\ell^2}\right)^{\frac{d+1}{2}}\zeta(d+1)\right. \\ &\quad + \frac{l}{2\sqrt{\pi}}\Gamma\left(-\frac{d+2}{2}\right)\left(\frac{2}{\mathrm{e}\ell^2}\right)^{\frac{d+2}{2}}\zeta(d+2) \\ &\quad \left. + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}\frac{1}{\ell}\right)^{\frac{d+2}{2}}\frac{1}{\ell^{\frac{d}{2}}}\sum_{n_v,\eta}^{\infty}\left(\frac{1}{\eta n_v}\right)^{\frac{d+2}{2}}K_{\frac{d+2}{2}}\left(\sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}\frac{2l}{\ell}\frac{\eta}{n_v}\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Note que el primer término en el paréntesis cuadrado es independiente de l y puede ser interpretado como una energía constante al substituirla en (3.14), la cual no contribuye a la fuerza de Casimir y por tanto se descarta. La energía entre las placas es entonces

$$\begin{aligned} E_{placas} &= \frac{\hbar c L^2 a p\sqrt{\frac{\mathrm{e}}{2}}}{2\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)(4\pi)^{\frac{d}{2}}}\left[\frac{l}{2\sqrt{\pi}}\Gamma\left(-\frac{d+2}{2}\right)\left(\frac{2}{\mathrm{e}\ell^2}\right)^{\frac{d+2}{2}}\zeta(d+2)\right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}\frac{1}{\ell}\right)^{\frac{d+2}{2}}\frac{1}{\ell^{\frac{d}{2}}}\sum_{n_v,\eta}^{\infty}\left(\frac{1}{\eta n_v}\right)^{\frac{d+2}{2}}K_{\frac{d+2}{2}}\left(\sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}\frac{2l}{\ell}\frac{\eta}{n_v}\right)\right]_{d\to 3} \end{aligned} \tag{3.21}$$

La energía de Casimir es la diferencia de la energía entre las placas y la energía de la región en ausencia de las mismas. La energía en ausencia de las placas se determina análogamente a (3.14) excepto que k_z es continuo

$$E_0 = \hbar c L^2 a p \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathrm{e}}{2}}\int\frac{dk_1 dk_2 dk_z dk_r}{(2\pi)^4}\sum_{n_v=1}\sqrt{k_\perp^2+k_r^2+k_z^2+\frac{2}{\mathrm{e}}\frac{1}{\ell^2 n_v^2}}\,. \tag{3.22}$$

Podemos realizar esta integral empleando regularización dimensional y usando la función zeta de Riemann para realizar la suma en n. El resultado es

$$E_0 = \left[\frac{\hbar c L^2 a l p\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathrm{e}}{2}}}{2\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)(4\pi)^{\frac{d}{2}}}\Gamma\left(-\frac{d+1}{2}\right)\left(\frac{2}{\mathrm{e}\ell^2}\right)^{\frac{d+1}{2}}\zeta(d+1)\right]_{d\to 4}. \tag{3.23}$$

Finalmente la energía de Casimir por unidad de área en este escenario tipo vórtice es

$$\mathcal{E}_{\text{vórtice}} = \frac{E_{\text{placas}} - E_0}{L^2} = \mathcal{E}_{\text{Casimir}} f(l, a, \ell) \tag{3.24}$$

$$\mathcal{E}_{\text{Casimir}} = -\frac{\hbar c \pi^2}{720 l^3} \tag{3.25}$$

$$f(l, a, \ell) = \frac{45p\left(\sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}\right)^3}{\pi^{\frac{7}{2}}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{a}{\ell}\right)\left(\frac{l}{\ell}\right)^{\frac{3}{2}}\sum_{n_v,\eta}\left(\frac{1}{n_v\eta}\right)^{\frac{5}{2}} K_{\frac{5}{2}}\left(\sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}\frac{2l}{\ell}\frac{\eta}{n_v}\right) \tag{3.26}$$

Donde E_0 (3.23) cancela al primer término de (3.21) y $\mathcal{E}_{\text{Casimir}}$ es la energía de Casimir presentada en el capítulo anterior (A.9) entre dos placas paralelas. El factor de corrección $f(l, a, \ell)$ contiene toda la información del escenario de las dimensiones extras. Sin embargo para comparar la energía del escenario RDSh con la energía estándar de Casimir es útil realizar la siguiente aproximación $l/\ell \ll 1$ en el argumento de la función de Bessel $K_{\frac{5}{2}}(z)$. Al orden más bajo en l/ℓ se tiene

$$\mathcal{E}_{\text{vórtice}} = -\alpha\frac{a}{l} + \beta\frac{a}{\ell^2 l^2} \tag{3.27}$$

$$\alpha = \frac{3\hbar c\zeta(5)}{2(4\pi)^{\frac{7}{2}}}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}, \quad \beta = \frac{3\hbar c\zeta(2)}{32\pi^{\frac{7}{2}}}\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{3}{2}}. \tag{3.28}$$

Así para la fuerza de Casimir se obtiene

$$f_{\text{vórtice}} = -\frac{d\mathcal{E}_{\text{vórtice}}}{dl} \approx -\alpha\frac{a}{l^5} + 2\beta\frac{a}{\ell^2 l^3} \tag{3.29}$$

Este resultado muestra que el efecto de las dimensiones extras da una quinta y tercera potencia inversa en la separación de las placas para la fuerza de Casimir modificada $f_{\text{vórtice}}$, la cual entra en conflicto con los experimentos debido a que la dependencias en la separación de las placas es totalmente diferente. El resultado conocido reduce la viabilidad fenomenológica de este modelo.

SECTION 3.2

Campo escalar en RSIIn

En la sección anterior hemos notado que el efecto Casimir no se origina únicamente debido a la presencia de fronteras materiales, sino también en espacio tiempos con topologías no triviales.

Uno de los escenarios que se considerará en esta tesis para estudiar el efecto Casimir es el que se propone en [29], el cual es un modelo híbrido con dimensiones extras compactas y no compactas, cuya geometría está descrita por la métrica

$$ds^2 = e^{-2\kappa|y|}\left[g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + R^2 d\theta^2\right] - dy^2, \tag{3.30}$$

donde R es el radio de la dimensión compacta. La característica más importante de este modelo es que permite localizar al campo electromagnético para $n \geq 1$ [29], al campo escalar masivo y al campo fermiónico (discutidos en la sección 2.3).

Aquí se usará la formulación de la función de Green en el fondo (3.30) para un campo escalar Φ entre dos placas paralelas separadas por una distancia l. La acción que describe al campo escalar masivo en el escenario RSIIn es

$$S = \int d^4x\, d\theta\, dy \sqrt{-G}\left(\frac{1}{2}G^{MN}\partial_M\Phi\partial_N\Phi - \frac{1}{2}\mu^2\Phi^2\right). \tag{3.31}$$

La ecuación de movimiento para el campo escalar masivo en el fondo (3.30) toma la forma

$$e^{2\kappa|y|}\Box_4\Phi - \frac{e^{2\kappa|y|}}{R^2}\partial_\theta^2\Phi - \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_y\left[\sqrt{-g}\partial_y\Phi\right] + \mu^2\Phi = 0, \tag{3.32}$$

de la cual podemos derivar la ecuación que satisface la función de Green.

$$\left[e^{2\kappa|y|}\eta^{\mu\nu}\partial_\nu\partial_\mu - \frac{e^{2\kappa|y|}}{R^2}\partial_\theta^2 - \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_y\left[\sqrt{-g}\partial_y\,\right] + \mu^2\right]G = \frac{\delta(x-x')\delta(\theta-\theta')\delta(y-y')}{\sqrt{-g}}. \tag{3.33}$$

La función de Green del operador (3.33) representa el valor de expectación del producto ordenado del campo escalar Φ, por lo que es conveniente encontrar los modos del campo Φ y de esto construir la correspondiente función de Green a través del método de eigenfunciones. Con base en la covariancia de Poincaré cuatro dimensional podemos descomponer al campo escalar como $\Phi(x,\theta,y) = \varphi(x)\Theta(\theta)\psi(y)$ con $x = (t, x_1, x_2, x_3,)$, las coordenadas cuatro dimensionales. Realizando separación de variables en la ecuación (3.32) obtenemos

$$\left(\partial_y^2 - 5\kappa\, sgn(y)\partial_y - \mu^2 + m^2 e^{2\kappa|y|}\right)\psi = 0, \tag{3.34}$$

$$\left(\partial_\theta^2 + m_\theta^2 R^2\right)\Theta = 0, \tag{3.35}$$

$$\left(\eta^{\mu\nu}\partial_\nu\partial_\mu + m_\theta^2 + m^2\right)\varphi = 0, \tag{3.36}$$

donde m_θ y m son constantes de separación las cuales tienen unidades de masa y $sgn(y)$ es la función signo de y. Se procede a estudiar este conjunto de ecuaciones. La ecuación (3.34) es invariante bajo el cambio de signo en la variable y y por lo tanto es suficiente resolver dicha ecuación para $y > 0$; también es conveniente realizar el cambio de variable $v = e^{\kappa y}/\kappa$ y definir $\psi = v^{5/2}\tilde{\psi}$, entonces la ecuación (3.34) se reduce a

$$\partial_v^2\tilde{\psi} + \frac{1}{v}\partial_v\tilde{\psi} + \left(m^2 - \frac{\vartheta^2}{v^2}\right)\tilde{\psi} = 0, \tag{3.37}$$

donde $\vartheta^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{\mu}{\kappa}\right)^2$. Para $m = 0$ la ecuación (3.37) no admite solución que satisfaga las condiciones de frontera correspondientes, sin embargo para $m > 0$, los modos normalizados de acuerdo al operador autoadjunto correspondiente son

$$\psi_m(y) = e^{\frac{5}{2}\kappa y}\sqrt{\frac{m}{2\kappa}}\left[a_m J_\vartheta\left(\frac{mv}{\kappa}\right) + b_m N_\vartheta\left(\frac{mv}{\kappa}\right)\right], \tag{3.38}$$

donde los coeficientes son determinados por la condición de normalización y la condición de frontera de Neumann en la brana

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-3\kappa|y|}\,\psi_m\psi_{m'} = \delta(m - m') \Rightarrow a_m^2 + b_m^2 = 1. \tag{3.39}$$

$$\partial_y\psi_m(y)|_{y=0} = 0. \tag{3.40}$$

El factor de peso viene de la forma de Sturm-Liouville de la ecuación (3.34). De acuerdo a las ecuaciones (3.39) y (3.40) las soluciones para a_m y b_m son

$$a_m = -\frac{A_m}{\sqrt{1 + A_m^2}}, \quad b_m = \frac{1}{\sqrt{1 + A_m^2}}, \tag{3.41}$$

$$A_m = \frac{N_{\vartheta-1}\left(\frac{m}{\kappa}\right) - \left(\vartheta - \frac{5}{2}\right)\frac{m}{\kappa}N_\vartheta\left(\frac{m}{\kappa}\right)}{J_{\vartheta-1}\left(\frac{m}{\kappa}\right) - \left(\vartheta - \frac{5}{2}\right)\frac{m}{\kappa}J_\vartheta\left(\frac{m}{\kappa}\right)}. \tag{3.42}$$

La ecuación (3.35) es resuelta al tomar en cuenta las condiciones de frontera periódicas. Entonces la solución es

$$\Theta = \frac{1}{\sqrt{R}}e^{in_R\theta} \quad \text{con} \quad n_R = m_\theta R \in \mathcal{Z}. \tag{3.43}$$

Por último la ecuación (3.36) es similar a la ecuación (A.15) de la sección A.2 con $m_0^2 = m^2 + m_\theta^2$, es decir hay dos contribuciones a la masa del campo escalar efectivo cuatro dimensional; la

primera contribución a la masa viene de los modos continuos m^2 asociados a la coordenada no compacta, y, y la segunda contribución proviene de los modos compactos. n_R^2/R^2, asociados a la dimensión compacta θ. Tomando en cuenta que la ecuación (3.36) esta sujeta a la condición de frontera de Dirichlet en las placas

$$\varphi(z=0) = \varphi(z=l), \tag{3.44}$$

uno puede proponer a φ como

$$\varphi = \phi e^{-i\omega t - \vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp}, \tag{3.45}$$

donde $\vec{x} = (\vec{x}_\perp, z)$, con $\vec{x}_\perp$ el vector perpendicular a la coordenada z y $k^\mu = (\omega, \vec{k}_\perp, \frac{\pi N}{l})$ es el momento (3+1) dimensional. Insertando la ecuación (3.45) en (3.36) tenemos

$$\partial_z^2 \phi - \mathcal{M}^2 \phi = 0, \quad \text{con} \quad \mathcal{M}^2 = \omega^2 - \vec{k}_\perp^2 - m^2 - \frac{n_R^2}{R^2}, \tag{3.46}$$

cuya solución es

$$\phi_N(z) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin(\mathcal{M}_N z), \quad \text{con} \quad \mathcal{M}_N = \frac{\pi N}{l}, \quad N \in \mathcal{Z}. \tag{3.47}$$

Teniendo la solución del campo escalar masivo Φ podemos ahora usar el método de eigenfunciones para construir la función de Green como

$$\begin{aligned} G(x,\theta,y) &= \sum_{n_R=0,N=1} \int dm \int \frac{d\omega d^2 k_\perp}{(2\pi)^3} \frac{1}{R} e^{i n_R(\theta-\theta')} e^{i k_\perp (x_\perp - x'_\perp)} \psi_m(y)\psi_m(y') \\ &\quad \times \frac{2}{l} \frac{\sin\left(\frac{\pi N z}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi N z'}{l}\right)}{\frac{\pi^2 N^2}{l^2} - \mathcal{M}^2}. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Conociendo la función de Green la fuerza en la placa $z = l$ es obtenida al tomar en cuenta la discontinuidad de la componente normal-normal del tensor de energía momento

$$F = \int_0^{L^2} dx_\perp \int_0^{1/\kappa} dy \int_0^{2\pi} R d\theta \left[\langle T_{zz} \rangle \Big|_{z \to -l} - \langle T_{zz} \rangle \Big|_{z \to +l} \right], \tag{3.49}$$

donde $1/\kappa$ es una escala asociada a la coordenada y la cual da el tamaño de la región de confinamiento de los campos cerca de la brana en $y = 0$ y el espacio tiempo es plano. Para un campo escalar masivo el tensor de energía momento T^{MN} esta dado por

$$T^{MN} = \partial^M \phi \partial^N \phi - \frac{1}{2} g^{MN} \partial^L \phi \partial_L \phi + \frac{1}{2} g^{MN} \mu^2 \phi^2, \tag{3.50}$$

y lo que requerimos es el valor de expectación de T^{MN}. De la función de Green

$$G(x,\theta,y;\omega',x',\theta',y') = i\langle T\phi(x,\theta,y)\phi(x',\theta',y')\rangle. \tag{3.51}$$

Y considerando la condición de frontera (3.44) calculamos la componente normal-normal del tensor de esfuerzos en la frontera $z = l^-$ como

$$\langle T_{zz}\rangle \sim \frac{1}{2i}\partial_z\partial_{z'}G(z,z')\Big|_{z\to l^-} \sim \frac{1}{2i}\frac{2}{l}\sum_{N=1}^{\infty}\frac{\frac{N^2\pi^2}{l^2}}{\frac{N^2\pi^2}{l^2}-\mathcal{M}^2} = \frac{1}{li}\zeta(0) + \frac{\mathcal{M}^2}{li}\sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{\frac{N^2\pi^2}{l^2}-\mathcal{M}^2} \tag{3.52}$$

donde $\zeta(0)$ es la función zeta de Riemann. Ahora es necesario conocer la función de Green fuera de las placas, para hacer esto es útil escribir la función de Green en términos de la función de Green reducida $g(z,z')$, ec. (A.30), de acuerdo con su transformada de Fourier como

$$G(x,\theta,y) = \sum_{n_R=0}\int dm\int\frac{d\omega d^2k_\perp}{(2\pi)^3}\frac{e^{in_R(\theta-\theta')}}{R}e^{ik_\perp\cdot(x_\perp-x'_\perp)}\psi_m(y)\psi_m(y')g(z,z',m,n_R), \tag{3.53}$$

donde la función de Green reducida es

$$g(z,z') = \frac{1}{\mathcal{M}}\left[\sin\mathcal{M}(z_<-l)e^{i\mathcal{M}(z_>-l)}\right]. \tag{3.54}$$

Aquí $g(z,z')$ satisface las condiciones de frontera $g(z,z') = 0, z = l$ y en $z\to\infty, g(z,z')\sim e^{ikz}$. $z_<(z_>)$ es el mayor (menor) de z y z'. De esta forma la correspondiente componente normal-normal del tensor de energía momento en $z\to l^+$ es

$$\langle T_{zz}\rangle\Big|_{z\to l^+} \sim \frac{1}{2i}\partial_z\partial_{z'}g(z,z')\Big|_{z\to l^+} = \frac{\mathcal{M}}{2}, \tag{3.55}$$

de la condición de discontinuidad en T_{zz} , ec. (A.10), esto es la diferencia entre (3.52) y (3.55), obtenemos la fuerza por unidad de área en las placas

$$f = \frac{F}{L^2} = \frac{2\pi}{\kappa}\int dm\int\frac{d\omega d^2k_\perp}{(2\pi)^3}\psi_m\psi_m\left[\frac{\zeta(0)}{li} + \sum_{n_R=0}\frac{\mathcal{M}^2}{li}\sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{\frac{N^2\pi^2}{l^2}-\mathcal{M}^2} - \sum_{n_R=0}\frac{\mathcal{M}}{2}\right]. \tag{3.56}$$

En (3.56) se ha tomado el límite en el que los puntos del espacio tiempo coinciden $x',\theta',y'\to x,\theta,y$. La integral en ω puede llevarse a cabo realizando una rotación compleja $\omega = i\chi$, $\mathcal{M} = i\sqrt{\rho^2+\frac{n_R^2}{R^2}+m^2} = iM$ con $\rho^2 = k^2+\chi^2$ obteniendo

$$f = \frac{2\pi}{\kappa}\int dm\int\frac{d\chi d^2k_\perp}{(2\pi)^3}\psi_m\psi_m\left[\frac{\zeta(0)}{li} - \sum_{n_R=0}\frac{M^2}{l}\sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{\frac{N^2\pi^2}{l^2}+M^2} + \sum_{n_R=0}\frac{M}{2}\right]. \tag{3.57}$$

La suma en N se realiza empleando la función de zeta de Epstein

$$E_1^{\mathcal{M}^2}(z,a) = \sum_{N=1}^{\infty} \left(aN^2 + \mathcal{M}^2\right)^{-z}, \quad \text{con} \quad a = \frac{\pi^2}{l^2}. \tag{3.58}$$

Así, nombrando S a la suma sobre N se tiene

$$\begin{aligned} S &= \frac{M^2}{l} \sum_{N=1}^{\infty} \left(aN^2 + M^2\right)^{-1}, \\ &= \frac{1}{2l} + \frac{M}{2} + \frac{2M\sqrt{l}}{\pi} \sum_{\eta=1}^{\infty} \frac{K_{-\frac{1}{2}}(2lM\eta)}{(\pi M\eta)^{-\frac{1}{2}}}, \end{aligned} \tag{3.59}$$

donde $K_{-\frac{1}{2}}(x)$ es la función modificada de Bessel. Introduciendo este resultado en la ecuación (3.57) la fuerza puede escribirse como

$$\begin{aligned} f &= \frac{2\pi}{\kappa} \int dm \int \frac{d\chi d^2k_\perp}{(2\pi)^3} \psi_m \psi_m \left[\frac{\zeta(0)}{l} - \frac{\zeta(0)}{2l} - \sum_{n_R=0} \frac{M}{2} \right. \\ &\left. - \sum_{n_R=0} \frac{2M\sqrt{l}}{\pi} \sum_{\eta=1}^{\infty} \frac{K_{-\frac{1}{2}}(2lM\eta)}{(\pi M\eta)^{-\frac{1}{2}}} + \sum_{n_R=0} \frac{M}{2} \right]. \end{aligned} \tag{3.60}$$

Los primeros dos términos de esta ecuación son términos de contacto, por ser funciones δ y pueden ser descartados [80]. Finalmente la fuerza de Casimir por unidad de área para un campo escalar masivo entre dos placas paralelas puede escribirse como

$$f = -\frac{2\pi}{\kappa} \int dm \int \frac{d\chi d^2k_\perp}{(2\pi)^3} \psi_m \psi_m \sum_{n=0} \frac{2M\sqrt{l}}{\pi} \sum_{\eta=1}^{\infty} \frac{K_{-\frac{1}{2}}(2lM\eta)}{(\pi M\eta)^{-\frac{1}{2}}}. \tag{3.61}$$

Tomando el valor explícito de la función de Bessel $K_{-\frac{1}{2}}(z)$ y empleando la relación

$$\frac{1}{e^x - 1} = \sum_{\eta}^{\infty} e^{-\eta x}, \tag{3.62}$$

la ecuación (3.61) puede escribirse como

$$f = -\frac{2\pi}{\kappa} \int dm \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \sum_{n_R=0}^{\infty} \frac{\psi_m \psi_m M}{e^{2lM} - 1}, \tag{3.63}$$

en donde hemos denotando a d como las dimensiones transversales. De aquí en adelante d es una variable compleja y continua. La integral en k puede ser evaluada usando coordenadas polares como sigue

$$f = -\frac{2\pi A_{d+1}}{\kappa(2\pi)^{d+1}} \int dm \int \frac{d\rho}{(2\pi)^d} \rho^d \sum_{n_R=0}^{\infty} \frac{\psi_m \psi_m \sqrt{\rho^2 + \frac{n_R^2}{R^2} + m^2}}{e^{2l\sqrt{\rho^2 + \frac{n_R^2}{R^2} + m^2}} - 1}, \tag{3.64}$$

con A_d el área de una esfera de radio uno en d dimensiones

$$A_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}. \tag{3.65}$$

Introduciendo el cambio de variable adimensional $x = 2l\sqrt{\rho^2 + \frac{n_R^2}{R^2} + m^2}$ en (3.64) y considerando que $d \to 2$ obtenemos la fuerza de Casimir por unidad de área de un campo escalar masivo

$$f = -\frac{1}{16\pi\kappa}\frac{1}{l^4}\sum_{n_R=0}^{\infty}\int_0^{\infty} dm\,\psi_m(0)\psi_m(0)\int_{2l\sqrt{\frac{n_R^2}{R^2}+m^2}}^{\infty} dx \frac{x^2\left(x^2 - 4l^2\frac{n_R^2}{R^2} - 4l^2m^2\right)^{\frac{1}{2}}}{e^x - 1}. \tag{3.66}$$

Debido a que el régimen de interés a bajas energías únicamente los modos con $m \ll \kappa$ son relevantes y suponiendo también que $\mu \ll \kappa$ tenemos que

$$1 + A_m^2 \approx \begin{cases} 1 + \left[\frac{1}{\Delta}\left(m_0 - m\right)\right]^2 & , m \sim m_0, \\ \frac{81}{25}\frac{\kappa^6\mu^4}{m^{10}} & , m \ll m_0. \end{cases} \tag{3.67}$$

$$\psi_m^2(y \to 0) \approx \begin{cases} \frac{3}{2}\kappa\delta\left(m_0 - m\right) & , m \sim m_0, \\ \frac{m^6}{\pi\kappa^2 m_0^4} & , m \ll m_0. \end{cases} \tag{3.68}$$

Donde hemos usado la propiedad $\lim_{\Delta\to+0}\Delta/[\Delta^2+(m_0-m)^2]$, la cual es valido en el régimen resonante. Aquí hay dos regímenes directos de estudiar. El primero es en el que los modos continuos m están alrededor de la masa efectiva m_0 del modo localizado, es decir $m \sim m_0$. Este régimen está descrito por (2.109) y (2.110). El segundo régimen proviene de los modos ligeros $m \ll m_0 \sim \mu$. Las dos contribuciones a la fuerza de Casimir están dadas como sigue. La primera contribución para $m \sim m_0$ es

$$f = -\frac{3\pi^2}{480}\frac{1}{l^4}\mathcal{F}\left(l, R, m_0\right), \tag{3.69}$$

$$\mathcal{F}\left(l, R, m_0\right) \equiv \sum_{n_R=0}^{\infty}\int_{2l\sqrt{\frac{n_R^2}{R^2}+m_0^2}}^{\infty} dx \frac{x^2\left(x^2 - 4l^2\frac{n_R^2}{R^2} - 4l^2m_0^2\right)^{\frac{1}{2}}}{e^x - 1}. \tag{3.70}$$

La segunda contribución o de modos ligeros $m \ll m_0$ está descrita por

$$f = -\frac{1}{16\pi^2}\frac{1}{\kappa^3 m_0^4}\frac{1}{l^{11}}F\left(l, R\right), \tag{3.71}$$

$$F\left(l, R\right) \equiv \sum_{n_R=0}^{\infty}\int_{\frac{n_R}{R}}^{\infty} dz\, z\left(z^2 - \frac{l^2}{R^2}n_R^2\right)^{\frac{5}{2}}\int_{2z}^{\infty} dx \frac{x^2\left(x^2 - 4z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{e^x - 1}, \tag{3.72}$$

donde $z = l\sqrt{\frac{n_R^2}{R^2} + m^2}$. Es posible describir la fuerza de Casimir en este escenario con la dependencia explicita en los dos regímenes como

$$f_{RSIIn} = \begin{cases} -\frac{3\pi^2}{480}\frac{1}{l^4}\mathcal{F}(l, R, m_0), & m \sim m_0 \approx \mu \\ \frac{1}{16\pi^2}\frac{1}{\kappa^3 m_0^4}\frac{1}{l^{11}}F(l, R), & m \ll m_0. \end{cases} \tag{3.73}$$

Es deseable comparar la fuerza de Casimir obtenida con el resultado de cuatro dimensiones. Así en la región de resonancia el modo cero compacto $n_R = 0$ tiene la contribución más importante y mantiene el mismo comportamiento que el caso 4D, es decir la masa acorta el efecto de la fuerza, sin embargo hay una diferencia importante en cuanto a la magnitud de esta. La contribución de los modos compactos, $n_R \neq 0$, produce un decremento mas abrupto como se puede ver en la figura 3.2. Es decir, el efecto del radio R de las coordenadas compactas es disminuir la magnitud de la fuerza, como se muestra en la figura 3.3. En el régimen de modos ligeros la fuerza de Casimir depende de los parámetros del escenario κ, R, como $(\kappa l)^3$ y a través del factor $F(l, R)$. Este último factor decrece si R aumenta. En este régimen la fuerza de Casimir es completamente diferente al caso 4D.

Por completez estudiaremos también el caso no masivo $\mu = 0$. Los operadores asociados a las coordenadas θ, y z no se alteran, por lo que las soluciones y sus espectros son aquellas que obtuvimos para el caso masivo, sin embargo el operador (3.34) cambia debido a que es el único que contiene la masa μ del campo escalar Φ. Este se estudiará a continuación. La ec. (3.34) puede reescribirse como

$$\partial_v^2\tilde{\psi} + \frac{1}{v}\partial_v\tilde{\psi} + \left(m^2 - \frac{\nu^2}{v^2}\right)\tilde{\psi} = 0, \tag{3.74}$$

donde $\nu = \frac{5}{2}$. Si $m = 0$ la ecuación (3.74) admite la solución

$$\psi_0(y) = \sqrt{\frac{3}{2}}\kappa, \quad \text{donde} \quad \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-3\kappa|y|}\psi_0^2 = 1. \tag{3.75}$$

Para $m > 0$, los modos normalizados son

$$\psi_m(y) = e^{\frac{5}{2}\kappa y}\sqrt{\frac{m}{2\kappa}}\left[a_m J_\nu\left(\frac{mv}{\kappa}\right) + b_m N_\nu\left(\frac{mv}{\kappa}\right)\right], \tag{3.76}$$

$$a_m = -\frac{A_m}{\sqrt{1 + A_m^2}}, \quad b_m = \frac{1}{\sqrt{1 + A_m^2}}, \quad A_m = \frac{N_{\nu-1}\left(\frac{m}{\kappa}\right)}{J_{\nu-1}\left(\frac{m}{\kappa}\right)}. \tag{3.77}$$

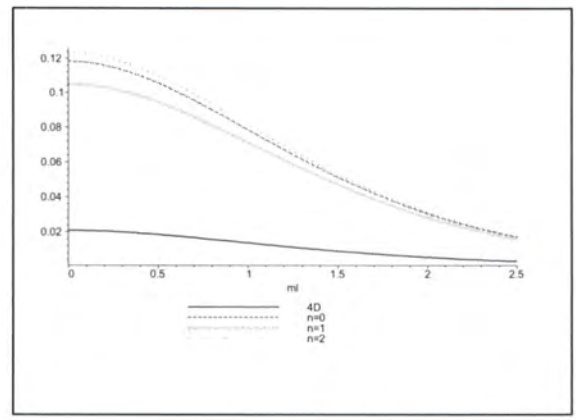


Figura 3.2: *La figura muestra la fuerza de Casimir efectiva para los tres primeros modos compactos y la fuerza de Casimir usual 4D entre placas paralelas para un campo escalar masivo en donde la coordenada horizontal representa ml y la coordenada vertical a* $|fl^4|$.

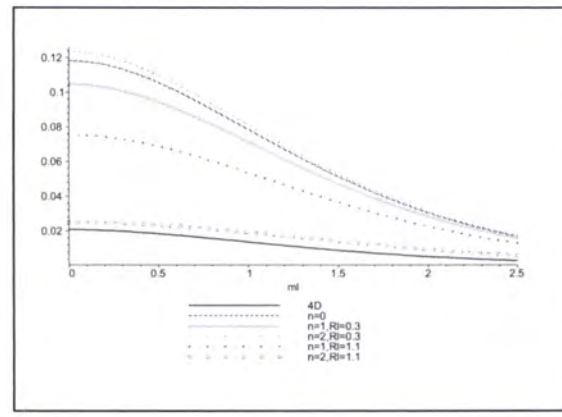


Figura 3.3: *La figura muestra la fuerza de Casimir efectiva para dos valores diferentes de R, se presentan los dos primeros modos compactos y el caso 4D. Nuevamente la coordenada vertical representa a* $|fl^4|$.

Ambas soluciones cumplen las mismas condiciones de frontera que se consideraron en el caso masivo. Podemos observar que la diferencia entre el caso masivo y no masivo es la presencia del modo cero $\psi_0(y)$ asociado a la coordenada no compacta y, es decir el espectro del operador (3.34) es únicamente continuo mientras que el espectro del operador (3.75) es una mezcla de un solo estado discreto y una torre de estados continuos como se muestra en la figura (3.4).

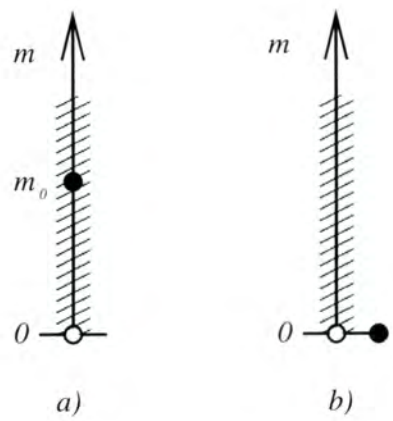


Figura 3.4: *La figura muestra el espectro de operador (3.34). a) si $\mu \neq 0$ el espectro es continuo y m_0 representa la masa del modo cuatro dimensional que decae en los modos continuos, b) para $\mu = 0$ el espectro es mixto. Se tiene un solo estado discreto que permite localizar a un modo cuatro dimensional sin masa además de una torre de estados continuos.*

Un cálculo similar al del caso masivo para obtener la ecuación (3.48) da la función de Green para $0 < z, z' < l$ para este caso. La función de Green es

$$G(x,\theta,y) = \sum_{n_R=0,N=1} \int \frac{d\omega d^2k_\perp}{(2\pi)^3} \frac{1}{R} e^{in_R(\theta-\theta')} e^{ik_\perp(x_\perp - x'_\perp)} \frac{2}{l} \sin\left(\frac{\pi N z}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi N z'}{l}\right) \left[\frac{\psi_0(y)\psi_0(y')}{\frac{\pi^2N^2}{l^2} - \mathcal{M}_0^2} + \int_0^\infty \frac{\psi_m(y)\psi_m(y')}{\frac{\pi^2N^2}{l^2} - \mathcal{M}^2}\right], \tag{3.78}$$

donde $\mathcal{M}^2 = \omega^2 - \vec{k}_\perp^2 - m^2 - \frac{n_R^2}{R^2}$, con $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}|_{m=0}$. De forma similar la función de Green para $z, z' > l$ es

$$G(x,\theta,y) = \int dm \int \frac{d\omega d^2k_\perp}{(2\pi)^3} \frac{e^{in_R(\theta-\theta')}}{R} e^{ik_\perp(x_\perp - x'_\perp)} \left[\psi_0(y)\psi_0(y')g(z,z',m=0,n_R) \right. \\ \left. \psi_m(y)\psi_m(y')g(z,z',m,n_R)\right], \tag{3.79}$$

donde $g(z,z',m,n)$ está dada por (3.54). La fuerza se puede calcular de forma directa. Para el modo cero $\psi_0(y)$ por ser una constante el cálculo se sigue directamente del análisis cuatro dimensional mostrado en la sección A.2, mientras que para el caso continuo $\psi_m(y)$ el calculo coincide con el caso masivo tratado en la sección anterior. De esta forma la fuerza de Casimir entre dos placas paralelas por unidad de área está dada por

$$\begin{aligned} f &= -\frac{1}{16\pi\kappa}\frac{1}{l^4}\sum_{n_R=0}^{\infty}\psi_0^2(0)\int_{2\frac{n_R}{R}}^{\infty}dx\frac{x^2\left(x^2-4l^2\frac{n_R^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{e^x-1} \\ &\quad -\frac{1}{16\pi\kappa}\frac{1}{l^4}\sum_{n_R=0}^{\infty}\int_0^{\infty}dm\,\psi_m^2(0)\int_{2l\sqrt{\frac{n_R^2}{R^2}+m^2}}^{\infty}dx\frac{x^2\left(x^2-4l^2\frac{n_R^2}{R^2}-4l^2m^2\right)^{\frac{1}{2}}}{e^x-1} \end{aligned} \tag{3.80}$$

En la aproximación de modos ligeros, $m \ll \kappa$, $\psi_m(y)$ puede escribirse como

$$\psi_m^2(0) \approx \frac{m^2}{\pi\kappa^2}, \quad A_m \approx -3\frac{\kappa^3}{m^3}. \tag{3.81}$$

Finalmente la fuerza de Casimir es

$$f_{RSIIn} = -\frac{3\pi^2}{480}\frac{1}{l^4}\mathcal{G}(l,R) - \frac{1}{8\pi^2}\frac{1}{\kappa^3 l^7}G(l,R), \tag{3.82}$$

$$\mathcal{G}(l,R) = \sum_{n_R=0}^{\infty}\int_{2\frac{l}{R}n_R}^{\infty}dx\frac{x^2\left(x^2-4l^2\frac{n_R^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{e^x-1}, \tag{3.83}$$

$$G(l,R) = \sum_{n_R=0}^{\infty}\int_{\frac{l}{R}n_R}^{\infty}dz\,z\sqrt{z^2-\frac{l^2}{R^2}n_R^2}\int_{2z}^{\infty}dx\frac{x^2\left(x^2-4z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{e^x-1}. \tag{3.84}$$

En este ultimo caso al multiplicar a $\mathcal{G}$ por el numero de polarizaciones del campo electromagnético, para seis dimensiones el cual es $p=4$ y considerar únicamente al modo cero compacto ($n_R=0$), se obtiene la fuerza de Casimir efectiva para un campo electromagnético en RSIIn.

SECTION 3.3

Campo escalar en RSII

En la sección anterior se obtuvo la fuerza de Casimir entre placas paralelas para un campo escalar masivo y no masivo. De estos resultados se muestra que el espectro de los modos

no compactos asociados a la coordenada extra y, pueden ser únicamente continuos o una mezcla de un solo modo discreto y una torre continua, los cuales dependen fuertemente del parámetro de masa μ.

En esta sección se determinará la fuerza de Casimir para un campo escalar masivo en el escenario RSII entre dos placas paralelas y también por completez se incluirá el caso no masivo. Aparentemente el primer caso no se ha discutido en la literatura. La métrica de fondo es

$$ds^2 = e^{-2\kappa|y|}g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dy^2, \tag{3.85}$$

y la ecuación del campo en este escenario es

$$e^{2\kappa|y|}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\Phi - \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_y\left[\sqrt{-g}\partial_y\Phi\right] + \mu^2\Phi = 0. \tag{3.86}$$

Suponiendo $\Phi = \psi(y)\varphi(x)$ esta ecuación toma la siguiente forma

$$\left(\partial_y^2 - 4\kappa\, sgn(y)\partial_y - \mu^2 + m^2\, e^{2\kappa|y|}\right)\psi = 0, \tag{3.87}$$

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\varphi(x) + m^2\varphi(x) = 0. \tag{3.88}$$

Realizando el siguiente cambio de variable $\psi = v^2\tilde{\psi}$ la ecuación (3.87) toma la forma

$$\left(\partial_v^2 + \frac{1}{v}\partial_v + m^2 - \frac{\vartheta^2}{v^2}\right)\tilde{\psi} = 0, \tag{3.89}$$

con $\vartheta^2 = 2^2 + \left(\frac{\mu}{\kappa}\right)^2$. Si $m = 0$ esta ecuación no admite solución que satisfagan las condiciones de frontera correspondientes. Para el caso $m > 0$ la solución es

$$\psi_m(y) = e^{2\kappa y}\sqrt{\frac{m}{2\kappa}}\left[a_m J_\vartheta\left(\frac{me^{\kappa y}}{\kappa}\right) + b_m N_\vartheta\left(\frac{me^{\kappa y}}{\kappa}\right)\right], \tag{3.90}$$

$$a_m = -\frac{A_m}{\sqrt{1+A_m^2}}, \quad b_m = \frac{1}{\sqrt{1+A_m^2}}, \tag{3.91}$$

$$A_m = \frac{N_{\vartheta-1}\left(\frac{m}{\kappa}\right) - (\vartheta-2)\frac{m}{\kappa}N_\vartheta\left(\frac{m}{\kappa}\right)}{J_{\vartheta-1}\left(\frac{m}{\kappa}\right) - (\vartheta-2)\frac{m}{\kappa}J_\vartheta\left(\frac{m}{\kappa}\right)}, \tag{3.92}$$

donde a_m y b_m son determinados por la condición de frontera de Neumann en la brana $\partial_y\psi_m(y)|_{y=0}$ y por la condición de normalización

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-2\kappa|y|}\,\psi_m\psi_{m'} = \delta(m-m') \Rightarrow a_m^2 + b_m^2 = 1. \tag{3.93}$$

La ecuación (3.88) tiene la forma de la ecuación (3.36), de forma que admite las mismas soluciones. Conociendo los modos del campo escalar Φ podemos construir la función de Green para $0 < z, z' < l$, la cual toma la siguiente forma

$$G(x,y) = \sum_{N=1} \int dm \int \frac{d\omega d^2k_\perp}{(2\pi)^3} e^{ik_\perp \cdot (x_\perp - x'_\perp)} \psi_m(y)\psi_m(y') \frac{2}{l} \frac{\sin\left(\frac{\pi N z}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi N z'}{l}\right)}{\frac{\pi^2 N^2}{l^2} - \lambda^2}, \tag{3.94}$$

donde $\lambda^2 = \omega^2 - \vec{k}_\perp^2 + m^2$. Análogamente, la función de Green fuera de las placas puede escribirse empleando la ecuación (3.54), como

$$G(x,y) = \int dm \int \frac{d\omega d^2k_\perp}{(2\pi)^3} e^{ik_\perp \cdot (x_\perp - x'_\perp)} \psi_m(y)\psi_m(y') \frac{1}{\lambda} \left[\sin\lambda\,(z_< - l)\, e^{i\lambda(z_> - l)}\right], \tag{3.95}$$

donde $z_<(z_>)$ es el mayor (menor) de z y z'. La fuerza en la placa $z = l$ se obtiene al tomar en cuenta la discontinuidad de la componente normal-normal del tensor de energía momento

$$F = \int_0^{L^2} dx_\perp \int_0^{1/\kappa} dy \left[\langle T_{zz} \rangle \Big|_{z \to -l} - \langle T_{zz} \rangle \Big|_{z \to +l} \right], \tag{3.96}$$

aplicando un operador diferencial a la función de Green podemos obtener el valor de expectación de $\langle T_{zz} \rangle$ como sigue

$$\langle T_{zz} \rangle \sim \frac{1}{2i} \partial_z \partial_{z'} G(z,z') \Big|_{z \to -l} \sim \frac{1}{2i} \frac{2}{l} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\frac{N^2\pi^2}{l^2}}{\frac{N^2\pi^2}{l^2} - \lambda^2} = \frac{1}{li}\zeta(0) + \frac{\lambda^2}{li} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{N^2\pi^2}{l^2} - \lambda^2} \tag{3.97}$$

$$\langle T_{zz} \rangle \sim \frac{1}{2i} \partial_z \partial_{z'} G(z,z') \Big|_{z \to +l} \sim \frac{\lambda}{2}, \tag{3.98}$$

donde $\zeta(0)$ es la función zeta de Riemann. Introduciendo las ecuaciones (3.115), (3.116) en (3.96) y realizando una rotación compleja $\omega = i\chi$, $\lambda = i\sqrt{\rho^2 + m^2} = i\Lambda$ con $\rho^2 = k^2 + \chi^2$ Se obtiene la fuerza por unidad de área

$$f = \frac{F}{A} = \frac{1}{\kappa} \int dm \int \frac{d\chi d^2k_\perp}{(2\pi)^3} \psi_m \psi_m \left(\frac{1}{l}\zeta(0) + \frac{\Lambda}{2} - \frac{\Lambda^2}{l} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{N^2\pi^2}{l^2} + \Lambda^2} \right). \tag{3.99}$$

Empleando el resultado de la ecuación (3.59), esta ecuación puede escribirse como

$$f = \frac{1}{\kappa} \int dm \int \frac{d\chi d^2k_\perp}{(2\pi)^3} \psi_m \psi_m \left[\frac{1}{l}\zeta(0) - \frac{1}{2l} - \frac{2\Lambda\sqrt{l}}{\pi} \sum_\eta \frac{K_{-\frac{1}{2}}(2l\Lambda\eta)}{(\pi\Lambda\eta)^{-\frac{1}{2}}} \right]. \tag{3.100}$$

Los dos primeros términos de esta ecuación son funciones deltas y pueden ser omitidos; es decir términos de contacto. $K_{-\frac{1}{2}}(z)$ es la función de Bessel modificada. Utilizando la relación

(3.62) podemos realizar la integral en k

$$f_{m\neq 0} = -\frac{A_{d+1}}{\kappa(2\pi)^{d+1}} \int dm \int \frac{d\rho}{(2\pi)^d} \rho^d \frac{\psi_m \psi_m \sqrt{\rho^2+m^2}}{e^{2l\sqrt{\rho^2+m^2}}-1}, \tag{3.101}$$

donde nuevamente d denota a las dimensiones transversales y la tratamos como una variable compleja y continua. Haciendo el cambio de variable $x = 2l\sqrt{\rho^2+m^2}$ y tomando el limite $d \to 2$ la fuerza de Casimir por unidad de área es

$$f = -\frac{1}{32\pi\kappa}\frac{1}{l^4}\int_0^\infty dm\, \psi_m^2(0) \int_{2lm}^\infty dx \frac{x^2\left(x^2-4l^2m^2\right)^{\frac{1}{2}}}{e^x-1}. \tag{3.102}$$

En la región a bajas energías $m \ll \kappa$, se tiene

$$\psi_m^2(y\to 0) \approx \begin{cases} k\delta(m_0-m) & ,m\sim m_0, \\ \frac{m^5}{2\kappa m_0^4} & ,m \ll m_0. \end{cases} \tag{3.103}$$

De forma similar al caso RS2IIn la fuerza de Casimir tiene dos contribuciones. La primera contribución proviene del régimen $m \sim m_0$ en cuyo caso tenemos

$$f_{m\sim m_0} = -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{l^4}\int_{2lm_0}^\infty dx \frac{x^2\left(x^2-4l^2m_0^2\right)^{\frac{1}{2}}}{e^x-1}. \tag{3.104}$$

La segunda contribución viene de los modos ligeros $m \ll m_0 \sim \mu$ donde la fuerza de Casimir puede escribirse como

$$f_{m\ll m_0} = -\frac{1}{32\pi}\frac{1}{l^4}\frac{1}{\kappa^2 m_0^4 l^6}\int_0^\infty dz\, z^5 \int_{2z}^\infty dx \frac{x^2\left(x^2-4z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{e^x-1}, \tag{3.105}$$

con $z = lm$. De esta forma la fuerza de Casimir para un campo escalar masivo entre dos placas paralelas puede escribirse como

$$f_{RS} = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{l^4}\mathcal{F}(l,m_0), & m\sim m_0 \approx \mu \\ -\frac{1}{32\pi}\frac{1}{l^4}\frac{1}{\kappa^2 m_0^4 l^6}F, & m \ll m_0. \end{cases} \tag{3.106}$$

$$\mathcal{F} \equiv \int_{2lm_0}^\infty dx \frac{x^2\left(x^2-4l^2m_0^2\right)^{\frac{1}{2}}}{e^x-1}, \tag{3.107}$$

$$F \equiv \int_0^\infty dz\, z^5 \int_{2z}^\infty dx \frac{x^2\left(x^2-4z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{e^x-1}. \tag{3.108}$$

De acuerdo a esto, de toda la torre de estados continuos m el modo localizado $m = m_0$ esta asociado a la fuerza de Casimir de un campo escalar efectivo cuatro dimensional de masa m_0. Ahora se analiza el caso no masivo $\mu = 0$. Con el cambio de variable $\psi = v^2\tilde{\psi}$ la ecuación (3.34) toma la forma

$$\left(\partial_v^2 + \frac{1}{v}\partial_v + m^2 - \frac{\vartheta^2}{v^2}\right)\tilde{\psi} = 0, \tag{3.109}$$

con $\vartheta = 2$. Si $m = 0$ la solución es

$$\psi_0(y) = \sqrt{\kappa}, \quad \text{donde} \quad \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-2\kappa|y|}\psi_0^2 = 1. \tag{3.110}$$

En el caso $m > 0$ la solución es

$$\psi_m(y) = e^{2\kappa y}\sqrt{\frac{m}{2\kappa}}\left(\frac{N_{\vartheta-1}\left(\frac{m}{\kappa}\right)J_\vartheta\left(\frac{me^{\kappa y}}{\kappa}\right) - J_{\vartheta-1}\left(\frac{m}{\kappa}\right)N_\vartheta\left(\frac{me^{\kappa y}}{\kappa}\right)}{\sqrt{J_{\vartheta-1}^2\left(\frac{m}{\kappa}\right) + N_{\vartheta-1}^2\left(\frac{m}{\kappa}\right)}}\right). \tag{3.111}$$

Para la dependencia en x usamos el resultado conocido, ec. (3.36). De esta forma podemos construir la función de Green para $0 < z, z' < l$, la cual es

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \sum_{N=1}\int \frac{d\omega d^2k_\perp}{(2\pi)^3}e^{ik_\perp\cdot(x_\perp - x'_\perp)}\left[\psi_0(y)\psi_0(y')\frac{2}{l}\frac{\sin\left(\frac{\pi Nz}{l}\right)\sin\left(\frac{\pi Nz'}{l}\right)}{\frac{\pi^2N^2}{l^2} - \lambda_0^2}\right. \\ &\left. + \int dm\psi_m(y)\psi_m(y')\frac{2}{l}\frac{\sin\left(\frac{\pi Nz}{l}\right)\sin\left(\frac{\pi Nz'}{l}\right)}{\frac{\pi^2N^2}{l^2} - \lambda^2}\right], \end{aligned} \tag{3.112}$$

donde $\lambda = \omega^2 - \vec{k}_\perp^2 + m^2$, y $\lambda_0 = \lambda\,|_{m=0}$. La función de Green fuera de las placas, puede escribirse empleando la ecuación (3.54) como

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \int \frac{d\omega d^2k_\perp}{(2\pi)^3}e^{ik_\perp\cdot(x_\perp - x'_\perp)}\left[\psi_0(y)\psi_0(y')\frac{1}{\lambda_0^2}\left[\sin\lambda_0\left(z_< - l\right)e^{i\lambda_0(z_> - l)}\right]\right. \\ &\left. + \int dm\psi_m(y)\psi_m(y')\frac{1}{\lambda}\left[\sin\lambda\left(z_< - l\right)e^{i\lambda(z_> - l)}\right]\right], \end{aligned} \tag{3.113}$$

donde $z_<(z_>)$ es el mayor (menor) de z y z'. La fuerza en la placa $z = l$ se obtiene al tomar en cuenta la discontinuidad de la componente normal-normal del tensor de energía momento

$$F = \int_0^{L^2} dx_\perp \int_0^{1/\kappa} dy\left[\langle T_{zz}\rangle\Big|_{z\to l^-} - \langle T_{zz}\rangle\Big|_{z\to l^+}\right]. \tag{3.114}$$

El valor de expectación del tensor de energía momento es

$$\langle T_{zz}\rangle \sim \frac{1}{2i}\partial_z\partial_{z'}G(z,z')\Big|_{z\to -l} \sim \frac{1}{2i}\frac{2}{l}\sum_{N=1}^{\infty}\frac{\frac{N^2\pi^2}{l^2}}{\frac{N^2\pi^2}{l^2}-\lambda^2} = \frac{1}{li}\zeta(0)+\frac{\lambda^2}{li}\sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{\frac{N^2\pi^2}{l^2}-\lambda^2} \tag{3.115}$$

$$\langle T_{zz}\rangle \sim \frac{1}{2i}\partial_z\partial_{z'}G(z,z')\Big|_{z\to +l} \sim \frac{\lambda}{2}, \tag{3.116}$$

donde $\zeta(0)$ es la función zeta de Riemann. Insertando las ecuaciones (3.115) y (3.116) en (3.114) la fuerza se sigue directamente de la sección anterior. Para el modo cero $\psi_0(y)$ por ser una constante se calcula justamente como A.2, para el caso continuo $\psi_m(y)$ el cálculo es análogo al caso masivo tratado anteriormente. Así la fuerza de Casimir entre las placas está dada por

$$\begin{aligned} f &= -\frac{1}{2^{2(d+1)}\pi^{\frac{d+1}{2}}\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)\kappa}\frac{1}{l^{d+2}}\psi_0(0)^2\int_0^\infty dx\frac{x^{d+2-1}}{e^x-1} \\ &\quad -\frac{1}{2^{2(d+1)}\pi^{\frac{d+1}{2}}\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)\kappa}\frac{1}{l^{d+2}}\int_0^\infty dm\,\psi_m^2(0)\int_{2lm}^\infty dx\frac{x^2\left(x^2-4l^2m^2\right)^{\frac{d-1}{2}}}{e^x-1}, \end{aligned} \tag{3.117}$$

para modos ligeros $m \ll \kappa$, $\psi_m(y)$ toma la forma

$$\psi_m \approx \sqrt{\frac{m}{2\kappa}}\frac{1}{\Gamma(\vartheta-1)}\left(\frac{m}{2\kappa}\right)^{\vartheta-2} = \sqrt{\frac{m}{2\kappa}}, \quad \text{con} \quad \vartheta = 2. \tag{3.118}$$

Tomando el limite cuando $d \to 2$ la fuerza por unidad de área a bajas energías es

$$f = -\frac{\pi^2}{480}\frac{1}{l^4} - \frac{\pi^2}{960}\frac{1}{\kappa^2 l^6}\int_0^\infty dz\, z\int_{2z}^\infty dx\frac{x^2\left(x^2-4z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{e^x-1}, \tag{3.119}$$

con $z = lm$. El modo cero $m = 0$ está asociado a la fuerza de Casimir de un campo escalar sin masa en cuatro dimensiones. Ingenuamente al multiplicar por la correspondiente polarización $p = 3$ podría obtenerse la fuerza de Casimir para un campo electromagnético en cuatro dimensiones, sin embargo, el campo electromagnético no se localiza en este modelo y el resultado no sería correcto.

Para concluir este capítulo nos gustaría hacer algunos comentarios sobre el estado teórico y experimental del efecto Casimir. La medición de la fuerza de Casimir es un problema muy complicado debido a que existen varias cuestiones que hay que tomar en cuenta, como por ejemplo, la rugosidad de la superficie, las cargas eléctricas residuales en la superficie, residuos

químicos en las placa, el paralelismo entre las placas, etc. La tabla 3.1 muestra el estudio experimental de la fuerza de Casimir entre superficies metálicas. Una descripción detallada sobre estos experimentos puede encontrase en las referencias [12, 64, 91].

Año	Geometría	Rango (μm)	Precisión (%)	Referencia
1985	plano-plano	0.3-2.5	100	Sparnaay
1978	plano-esfera	0.13-0.67	25	Van Blokland y Oveerbeek
1997	plano-esfera	0.6-12.3	5	Lamoreaux
1998	plano-esfera	0.1-0.9	1	Mohideen y Roy
2000	cilindros	0.02-0.1	1	Ederth
2001	plano-esfera	0.08-1.0	1	Chan et al
2002	plano-esfera	0.5-3.0	15	Bressi et al
2003	plano-esfera	0.2-2.0	1	Decca et al
2006	plano-esfera	0.062-2.0	1	Chen et al

Tabla 3.1: *La* tabla muestra diferentes configuraciones que han sido consideradas en el estudio experimental de la fuerza de Casimir con elementos metálicos.

En el contexto teórico en el cálculo de la fuerza de Casimir se ha tomado en cuenta situaciones más reales, como las propiedades de los materiales, la temperatura, conductividad, etc. También el efecto Casimir juega un papel importante en varios campos de la física como en teoría cuántica de campos, materia condensada, física atómica, gravitación y cosmología, entre otros.

En teoría cuántica de campos el efecto Casimir tiene dos implicaciones importantes. En el modelo de la bolsa de hadrones en cromodinámica cuántica la energía de Casimir de quarks y gluones tienen una contribución esencial a la energía del núcleo. Por otro lado en teorías de Kaluza-Klein el efecto Casimir ofrece uno de los mecanismos de compactificación espontánea de dimensiones extras espaciales. En la física de materia condensada el efecto Casimir conduce a fuerzas atractivas y repulsivas entre superficies cercanas las cuales dependen de la configu-

ración geométrica. de la temperatura y de propiedades mecánicas y eléctricas de las superficies. En gravitación y cosmología el efecto Casimir es causado por las topologías no triviales del espacio tiempo. Estos y otros efectos se ha considerado por ejemplo en [12, 38, 64, 78]. Algunos efectos asociados con diferentes aspectos o situaciones en relación con la fuerza de Casimir se presenta en la tabla 3.2.

Efecto	Forma
Temperatura	$F_{Casimir}\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{2Tdk_B}{\hbar c}\right)^4+\ldots\right]$, donde T temperatura [76]
Conductividad	$F_{Casimir}\left[1+\frac{16}{3}\frac{\delta_0}{d}+24\frac{\delta_0^2}{d^2}+\ldots\right]$, con δ_0 conductividad [12, 81]
Modelos cosmológicos	$-\frac{\alpha}{a^4}$, a un factor de escala [45, 16]
Una dimension extra (ADD)	$F_{Casimir}\approx-\frac{\pi^2}{240\mu^4d^4}$, μ un parametro adimensional [21]
Dos dimensiones extras (RDSh)	$f_{\text{vórtice}}\approx-\alpha\frac{a}{l^5}+2\beta\frac{a}{\ell^2l^3}$ [70]
Modificación del potencial gravitacional de Newton	$-G\alpha\lambda^2e^{-d/\lambda}F(\rho)$, $\lambda<5.6\ \mu m$ [91]
Efecto Casimir dinámico	$\delta F(l)=\frac{\hbar}{6\pi c^2}\frac{d^3}{dt^3}\delta q(l)$ [38]

Tabla 3.2: Algunos efectos que modifican la fuerza de Casimir.

Capítulo

4 Potenciales electromagnéticos y átomo de Hidrógeno en RSIIn

En la actualidad las teorías físicas han sido corroboradas con un alto grado de precisión por ejemplo QED, el Modelo Estándar ..., Más recientemente la cosmología observacional y las propuestas como LIGO ó LISA aportan información con una precisión sin precedente en la historia de la ciencia. No obstante nueva física puede emerger precisamente más allá de la frontera actual de las pruebas experimentales conocidas, no solo a altas energías sino posiblemente también a bajas energías pero de muy alta precisión. Por ejemplo, debido a lo grande de la escala de la supuesta gravedad cuántica o escala de Planck $M_{Pl} \sim 10^{19}$ GeV, es prácticamente imposible tener evidencia experimental directa. Sin embargo una alternativa la ofrecen los experimentos en física atómica como los que se menciona en [11]. La resolución que se alcanza en dichos experimentos es del orden de 1 mHz lo cuál corresponde a una sensibilidad de 4×10^{-27} GeV, que está dentro del rango de energías que uno puede asociar con los factores de corrección que se originan de la escala de Planck en cuatro dimensiones. Esto es. si se toma en cuenta un experimento, donde la energía característica es la del protón. dichos factores son del orden de $(m_p/M_{Pl})m_p \sim 10^{-19}$ GeV, mientras que si la escala característica es la del electrón estos factores $(m_e/M_{Pl})m_e$, son $2.5 \sim 10^{-26}$ GeV. De esta forma los experimentos

de física atómica pueden ofrecer una alternativa indirecta para poder tener evidencia de los efectos a bajas energías que se originan de la escala de Planck.

El átomo de Hidrógeno ha sido propuesto en la literatura como instrumento para probar los efectos gravitacionales [11, 41, 92]. Recientemente se ha empleado también para estudiar la fenomenología de las dimensiones extras en el escenario de ADD considerando que las desviaciones a la ley de Newton se vuelven mas fuertes a escalas pequeñas y proponen experimentos de espectroscopia atómica, transiciones de Lyman y Balmer [17, 73, 72] para detectar posibles desviaciones por debajo de la escala de nm. Esto debido a que los experimentos actuales de la ley de gravitación de Newton están en el orden de 0.1 mm. Como discutimos en el capitulo anterior, el propósito de esta tesis es estudiar el efecto de las dimensiones extras a bajas energías emplearemos al átomo para estudiar el correspondiente corrimiento Lamb en el escenario de RSIIn.

El propósito de este capitulo es mostrar como obtener el potencial electromagnético de una partícula puntual cargada en movimiento uniforme en el escenario de RSII2n. Una vez obtenidos los potenciales electromagnéticos analizaremos un modelo de un átomo de Hidrógeno localizado en la membrana[1] (a través de los mecanismos presentados en la sección 2.3) calculando el correspondiente corrimiento Lamb[2]. Finalmente compararemos nuestros resultados con datos experimentales.

SECTION 4.1

Carga puntual en movimiento uniforme en RSIIn

Como primer paso en el cálculo de las correcciones a los niveles de energía para un átomo de Hidrógeno es necesario saber cual es el potencial efectivo que reemplaza al de Coulomb. Por lo tanto el propósito de esta sección es obtener los potenciales electromagnéticos inducidos en la membrana por una carga puntual en movimiento uniforme y cuya densidad de corriente

[1] Aquí se empleara el análisis desarrollado en el apéndice B de la solución a la ecuación de Dirac en 4D con un potencial central

[2] En C se muestran los cálculos del corrimiento Lamb en electrodinámica cuántica estándar a un lazo.

es dado por

$$\sqrt{g}j^{\mu} = e^{(5+n)}\, \mathrm{v}^{\mu}\delta^{3}(\vec{x}-\vec{\mathrm{x}}(t))\delta(y), \tag{4.1}$$

$$\vec{\mathrm{x}}(t) = \vec{\mathrm{v}}t. \tag{4.2}$$

Esta corriente induce un campo electromagnético en todos los puntos del espacio tiempo de acuerdo a las ecuaciones de Maxwell

$$\partial_M \left(\sqrt{g}\, g^{MN} g^{PQ} F_{NQ}\right) = -\sqrt{g}\, j^P. \tag{4.3}$$

Aqui $\sqrt{g} = |detg|^{1/2}$ y el tensor métrico es dado por el fondo (2.50). En este escenario las ecuaciones Maxwell (4.3) se reducen a

$$\mathcal{O}\hat{A}^{\sigma} - e^{-n\kappa|y|}\hat{\partial}^{\sigma}\partial_{\mu}\hat{A}^{\mu} = -R^{-n}\sqrt{g}\; j^{\sigma}, \tag{4.4}$$

$$\mathcal{O} := e^{-(n+2)\kappa|y|}(-\partial_y^2 + (n+2)\kappa\, sgn(y)\partial_y + e^{2\kappa|y|}\Box), \tag{4.5}$$

donde hemos usado la norma $A^y = 0, A^{\theta_i} = 0$ y definimos $\hat{A}^{\nu} = \eta^{\mu\nu}A_{\mu}$. El término que contiene $\partial_{\mu}\hat{A}^{\mu}$ es norma pura en la brana y podemos omitirlo en lo que sigue. Procediendo análogamente al caso estándar la solución de la ecu. (4.4) se puede expresar en términos de la función de Green retardada $G_R(x,-x',y,y')$ del operador $\mathcal{O}$, como

$$A^{\mu}(x) \equiv \hat{A}^{\mu}(x, y=0) = -\int dx'^4 dy' G_R(x,-x',y,y')R^{-n}\sqrt{g}\, j^{\mu}. \tag{4.6}$$

Para continuar con este análisis necesitamos la forma explicita de la función de Green, que de acuerdo a la ecuación (4.4) esta satisface la ecuación definitoria (únicamente para el modo cero)

$$\mathcal{O}G_R(x-x',y,y') = \frac{\delta(x-x')\delta(y-y')}{\sqrt{-g}}. \tag{4.7}$$

Siguiendo el camino estándar se propone la función de Green en términos de un conjunto de eigenfunciones ϕ definidas usando $\mathcal{O}$

$$G_R(x-x',y,y') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-x')}\left[\frac{\phi_0(y)\phi_0(y')}{k^2} + \int dm \frac{\phi_m(y)\phi_m(y')}{k^2-m^2}\right]. \tag{4.8}$$

Específicamente ϕ satisface

$$\left[-e^{-(n+2)\kappa|y|}\partial_y^2 + \kappa(n+2)e^{-(n+2)\kappa|y|}\,\mathrm{sign}(y)\partial_y + e^{-n\kappa|y|}m^2\right]\phi(y) = 0. \tag{4.9}$$

Puede observarse que esta ecuación es invariante ante inversiones de y y por lo tanto es suficiente resolver la ecuación en la región $y > 0$. Es conveniente realizar el cambio de variable $\xi = \frac{e^{\kappa y}}{\kappa}$ y redefiniendo la función $\phi = \xi^{\nu}\tilde{\phi}$, $\nu = 1 + n/2$ se puede obtener la ecuación de Bessel

$$\partial_{\xi}^{2}\tilde{\phi}_m + \frac{1}{\xi}\partial_{\xi}\tilde{\phi}_m + \left(1 - \frac{\nu^2}{v^2}\right)\tilde{\phi}_m = 0. \tag{4.10}$$

Cuando $m = 0$ la solución tiene la forma

$$\phi_0 = \sqrt{\frac{n\kappa}{2}}, \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-n\kappa|y|}\phi_0^2 = 1 \tag{4.11}$$

El factor de peso viene de la forma de Sturm-Liouville de la ecuación (4.10). Para el caso en el que $m > 0$ la solución normalizada es

$$\phi_m = \sqrt{\frac{m}{2\kappa}}\, e^{\nu\kappa y}\left(\frac{N_{\nu-1}\left(\frac{m}{\kappa}\right) J_{\nu}\left(\frac{m}{\kappa}e^{\kappa y}\right) - J_{\nu-1}\left(\frac{m}{\kappa}\right) N_{\nu}\left(\frac{m}{\kappa}e^{\kappa y}\right)}{\sqrt{N_{\nu-1}^2\left(\frac{m}{\kappa}\right) + J_{\nu-1}^2\left(\frac{m}{\kappa}\right)}}\right), \tag{4.12}$$

que cumplen las condiciones de frontera y normalización siguientes

$$\partial_y\phi_m(y)\big|_{y=0} = 0, \tag{4.13}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-n\kappa|y|}\phi_m\left(\frac{m}{\kappa}e^{\kappa y}\right)\phi_{m'}\left(\frac{m'}{\kappa}e^{\kappa y}\right) = \delta(m - m'). \tag{4.14}$$

Evaluando la integral sobre k con la técnica de residuos en la ecuación (4.8) la función de Green obtenida es

$$G_R(x - x', y = 0, y') = -\phi_0(0)\phi_0(y')\frac{\delta(\lambda^2)}{2\pi} + \int dm\phi_m(0)\phi_m(y')D_m(x - x'), \tag{4.15}$$

$$D_m(x - x') = -\frac{\delta(\lambda^2)}{2\pi} + \frac{\theta[\lambda]}{4\pi\lambda}mJ_1(m\lambda), \quad \lambda := \sqrt{(t - t')^2 - |\vec{x} - \vec{x}'|^2}. \tag{4.16}$$

Aquí D_m es la función de Green retardada de una partícula escalar masiva en cuatro dimensiones. El primer término en (4.15) es la contribución del modo cero y el segundo término viene de los modos continuos. Haciendo uso de la relación de completez

$$\phi_0(y)\phi_0(y') + \int dm\phi_m(y)\phi_m(y') = \delta(y - y'), \tag{4.17}$$

la función de Green retardada (4.15) toma la forma siguiente

$$G_R(x-x',y=0,y') = -\frac{\delta(\lambda^2)\delta(y')}{2\pi} + \frac{\theta\left[\lambda\right]}{4\pi\lambda^2}\int dm\phi_m(0)\phi_m(y')\,mJ_1\left(m\lambda^2\right). \tag{4.18}$$

Finalmente el potencial electromagnético se obtiene al integrar la función de Green y la fuente de interés (4.1), es decir el potencial electromagnético puede escribirse como

$$\begin{aligned} A^\mu(x,y=0) &= -\int d^4x'dy'\frac{\delta(\lambda^2)\delta(y')\delta(y)}{2\pi}R^{-n}\,e^{(5+n)}\mathrm{v}^\mu\delta^3(\vec{x}-\vec{\mathrm{x}}(t)) \\ &\quad -\int d^4x'dy'dm\frac{\theta[\lambda]}{4\pi\lambda}mJ_1(m\lambda)\phi_m(0)\phi_m(y')R^{-n}\,e^{(5+n)}\mathrm{v}^\mu\delta^3(\vec{x}-\vec{\mathrm{x}}(t))\delta(y'). \end{aligned} \tag{4.19}$$

En esta ecuación el producto de deltas $\delta(y)\delta(y)^3$ carece de significad físico en principio, sin embargo considerando la regularización de Hadamard [89] este producto produce un resultado finito, específicamente $\delta(y)\delta(y) = 0$. De esta forma el potencial electromagnético toma la forma

$$A^\mu(x,y=0) = -\int d^4x'dy'dm\frac{\theta[\lambda]}{4\pi\lambda}mJ_1(m\lambda)\phi_m(0)\phi_m(y')R^{-n}\,e^{(5+n)}\mathrm{v}^\mu\delta^3(\vec{x}-\vec{\mathrm{x}}(t))\delta(y). \tag{4.20}$$

Dado que el interés es buscar un potencial efectivo que reemplace al de Coulomb es justificable usar una aproximación a bajas energías o equivalentemente modos ligeros. así únicamente los modos continuos pequeños $m \ll \kappa$ son relevantes. Integrando (4.20) sobre las coordenadas espaciales y considerando unicamente modos ligeros el potencial electromagnético se expresa como

$$A^\mu = -\frac{1}{R^n}\int dt'dm\frac{\mathrm{v}^\mu\theta[\lambda(t')]}{4\pi\Gamma(\nu-1)}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{\nu-1}e^{(5+n)}m^\nu J_\nu\left(\xi m\right)\frac{J_1\left(m\lambda(t')\right)}{\lambda(t')}. \tag{4.21}$$

En la evaluación de (4.21) hay dos casos dependiendo de si n es par o impar. Para el caso en que n en es impar ν toma valores semienteros. La siguiente relación es útil

$$m^{l+1/2}J_{l+1/2}\left(m\xi\right) = (-1)^l\sqrt{\frac{2}{\pi}}\xi^{l+1/2}\left(\frac{d}{\xi d\xi}\right)^l\frac{\sin(m\xi)}{\xi} \tag{4.22}$$

[3]Alternativamente se puede introducir un parámetro γ, es decir $\lim_{\gamma\to 0}\delta(y-\gamma)\delta(y)$. Aquí las distribuciones deltas pueden sustituirse por distribuciones gausianas $1/\sqrt{2\pi}\zeta e^{-y^2/2\zeta^2}$ el cual puede regularizarse tomando los limites adecuados dando un resultado finito, es decir $\lim_{\gamma\to 0}\delta(y-\gamma)\delta(y) = 0$.

Introduciendo (4.22) en (4.21) e integrando sobre m se llega a el siguiente resultado

$$A^{\mu}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{t_*}dt'\frac{(-1)^{\nu-1/2}\theta[\lambda(t')]}{4\pi R^n\Gamma(\nu-1)\lambda(t')}e^{(5+n)}\mathrm{v}^{\mu}\frac{\xi^{2\nu-1}}{2^{\nu-1}}\left(\frac{d}{\xi d\xi}\right)^{\nu-1/2}\frac{\theta[\lambda(t')-\xi]}{\lambda(t')\sqrt{\lambda(t')^2-\xi^2}}. \tag{4.23}$$

Aquí t_* satisface $(t-t_*)^2=\kappa^{-2}+|\vec{x}-\vec{\mathrm{x}}(t_*)|^2$. Uno de los casos más interesantes es el de la partícula moviéndose con velocidad constante. Sin pérdida de generalidad se considera que el movimiento de la partícula se realiza en el plano xy a lo largo del eje x

$$A^{\mu}=\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(-1)^{\nu-1/2}e^{(5+n)}}{4\pi R^n\Gamma(\nu-1)}\frac{\xi^{2\nu-1}}{2^{\nu-1}}\left(\frac{d}{\xi d\xi}\right)^{\nu-1/2}\frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{y^2(1-\mathrm{v}^2)+(x-\mathrm{v}t)^2}}{\xi\sqrt{1-\mathrm{v}^2}}\right)}{\xi\sqrt{y^2(1-\mathrm{v}^2)+(x-\mathrm{v}t)^2}}\right]_{y=0}, \quad n \text{ impar.} \tag{4.24}$$

Considerando una dimensión compacta $n=1$ (4.24) toma la forma

$$A^0=\kappa e_{eff}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2}\left(1+\kappa^2\frac{y^2(1-\mathrm{v}^2)+(x-\mathrm{v}t)^2}{(1-\mathrm{v}^2)}\right)}+\frac{\arctan\left(\kappa\frac{\sqrt{y^2(1-\mathrm{v}^2)+(x-\mathrm{v}t)^2}}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2}}\right)}{\kappa\sqrt{y^2(1-\mathrm{v}^2)+(x-\mathrm{v}t)^2}}\right\}, \tag{4.25}$$

Para el caso de una partícula estática (4.24) se reduce a la siguiente expresión

$$A^0=\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(-1)^{\nu-1/2}}{4\pi R^n\Gamma(\nu-1)e^{(5+n)}}\frac{\xi^{2\nu-1}}{2^{\nu-1}}\left(\frac{d}{\xi d\xi}\right)^{\nu-1/2}\frac{1}{r\xi}\left[\arctan\left(\frac{r}{\xi}\right)\right]\right]_{y=0}, \quad r=|\vec{x}|, \quad n \text{ impar.} \tag{4.26}$$

nuevamente tamando $n=1$ (4.26) se reduce a

$$A^0=\kappa e_{eff}\left\{\frac{1}{1+\tilde{x}^2}+\frac{\arctan(\tilde{x})}{\tilde{x}}\right\}, \quad \tilde{x}=\kappa r, \quad e_{eff}=\frac{\kappa^2 e^{(6)}}{2R\pi} \tag{4.27}$$

Por otro lado cuando n es par, ν entero resulta conveniente el uso de la siguiente identidad

$$m^{\nu}J_{\nu}(m\xi)=(-1)^{\nu}\xi^{\nu}\left(\frac{d}{\xi d\xi}\right)^{\nu}J_0(m\xi). \tag{4.28}$$

Integrando (4.21) en m el potencial electromagnético puede escribirse como

$$A^{\mu}=-\int_{-\infty}^{t_*}dt'\frac{\theta[\lambda(t')]}{4\pi R^n\Gamma(\nu-1)}\frac{e^{(5+n)}\mathrm{v}^{\mu}(-1)^{\nu}}{\lambda(t')}\frac{\xi^{2\nu-1}}{2^{\nu-1}}\left(\frac{d}{\xi d\xi}\right)^{\nu-1}\frac{\delta[\lambda(t')-\xi]}{\xi\lambda(t')}. \tag{4.29}$$

Para una partícula puntual que se mueve con velocidad uniforme el potencial electromagnético está dado por

$$A^{\mu}=-\left[\frac{(-1)^{\nu+1}\xi^{2\nu}}{4\pi R^n\Gamma(\nu-1)2^{\nu-1}}\left(\frac{d}{\xi d\xi}\right)^{\nu-1}\frac{e^{(5+n)}\mathrm{v}^{\mu}}{\xi^2(\sqrt{\xi^2+|\vec{x}-\vec{\mathrm{x}}(t_*)|^2}-\hat{n}\cdot\vec{\mathrm{v}}|\vec{x}-\vec{\mathrm{x}}(t_*)|)}\right]_{y=0}, \quad n \text{ par,} \tag{4.30}$$

donde

$$\hat{n} = [\vec{x} - \vec{\mathrm{x}}(t_*)]/[|\vec{x} - \vec{\mathrm{x}}(t_*)|]. \tag{4.31}$$

Considerando el caso en el que $n = 2$, (4.30) puede escribirse como

$$A^0 = \kappa e_{eff} \left\{ \frac{1}{\left[\sqrt{1 + R(t_*)^2} - \hat{n} \cdot \vec{\mathrm{v}} R(t_*)\right]} + \frac{(1 - |\vec{\mathrm{v}}|^2)}{2\left[\sqrt{1 + R(t_*)^2} - \hat{n} \cdot \vec{\mathrm{v}} R(t_*)\right]^3} \right\} \tag{4.32}$$

$$R(t_*) = \kappa |\vec{x} - \vec{\mathrm{x}}(t_*)|. \tag{4.33}$$

Y para una partícula estática el potencial electromagnético se reduce a

$$A^\mu = \left[A^0 = \frac{(-1)^{\nu+1}}{4\pi R^n \Gamma(\nu - 1)} \frac{\xi^{2\nu-1}}{2^{\nu-1}} \left(\frac{d}{\xi d\xi} \right)^{\nu-1} \frac{e^{(5+n)} \theta(\sqrt{\xi^2 + r^2} - r^2)}{\xi^2 \sqrt{\xi^2 + r^2}} \right]_{y=0}, \quad r = |\vec{x}|, \quad n \text{ par.} \tag{4.34}$$

Considerando $n = 2$, (4.34) toma la forma

$$A^0 = \kappa e_{eff} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \tilde{x}^2}} + \frac{1}{2\,(1 + \tilde{x}^2)^{3/2}} \right\}, \quad e_{eff} = \frac{\kappa e^{(7)}}{R^2 \pi} \tag{4.35}$$

Notablemente los potenciales electrostáticos para $n = 1, 2$ (4.27) y (4.35) son consistentes con el potencial de Coulomb a grandes distancias $r \gg \kappa^{-1}$ y también preservan la simetría esférica. Aún mejor una característica muy importante de estos potenciales electrostáticos efectivos es que son finitos en la posición de la carga puntual como se muestra en la figura 4.1. Este carácter finito de los potenciales electromagnéticos indica que la idea de una partícula puntual en nuestro mundo cuatro dimensional es viable en el contexto de RSIIn.

Enseguida se comparan los potenciales efectivos de la partícula en movimiento con los potenciales de Liennard Wiechert (LW). Para obtener las equipotenciales de (4.32) se procede de forma análoga al caso usual de cuatro dimensiones. La idea es describir los potenciales electromagnéticos en un sistema de coordenadas polares (ρ, θ) cuyo origen es la posición de la partícula al tiempo actual. Para ello es necesario obtener las soluciones de $R(t_*)$ dadas por la ecuación

$$R^2(t_*)(1 - \mathrm{v}^2) + 2\mathrm{v}\rho\sqrt{\kappa^{-2} + R^2(t_*)}\,\cos\theta - \rho^2 = 0. \tag{4.36}$$

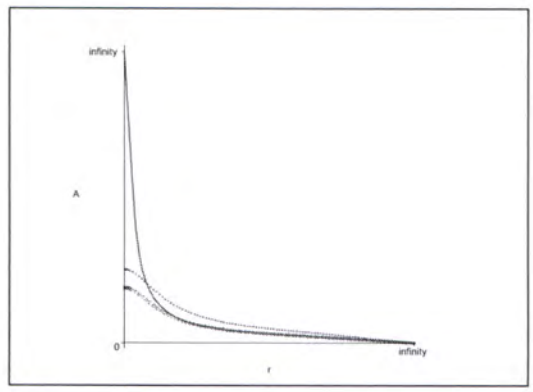


Figura 4.1: *En la gráfica se muestran los potenciales electrostáticos efectivos (4.27) y (4.35). La línea continua representa al potencial de Coulomb. Las cruces corresponden a* $n = 1$ *y los círculos a* $n = 2$*. El eje vertical corresponde a los potenciales electrostáticos en unidades Gaussianas multiplicado por el parámetro* κ^{-1} *y el eje horizontal a la coordenada radial* $r\kappa$*.*

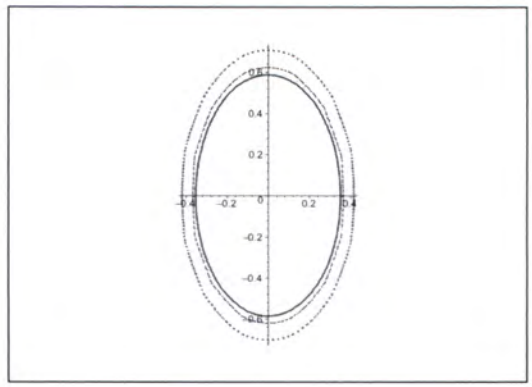


Figura 4.2: *La figura muestra las equipotenciales de los potenciales efectivos (4.25), (4.32) y de LW. La línea continua representa al potencial electromagnético de LW. Los puntos corresponden a* $n = 1$ *y las cruces a* $n = 2$*. Estas equipotenciales corresponden a una velocidad de* $v = 0.8$ *en unidades de c. Aquí se ha tomado a* $r\kappa$ *como coordenada radial.*

Las soluciones físicas de (4.36) son

$$R_{1,2}(t_*) = \frac{\sqrt{\rho^2(2\mathrm{v}^2\cos^2\theta - \mathrm{v}^2 + 1) \pm 2\mathrm{v}\rho\Sigma\cos\theta}}{1-v^2}, \tag{4.37}$$

$$\Sigma := \sqrt{\rho^2(\mathrm{v}^2\cos^2\theta - \mathrm{v}^2 + 1) + \kappa^{-2}(1-\mathrm{v}^2)^2}. \tag{4.38}$$

$R_1 \to +$ y $R_1 \to -$. Conociendo $R(t_*)$ se pueden graficar las correspondientes equipotenciales asociadas con (4.32). Nótese que

$$R(t_*) = \begin{cases} R_1(t_*) & \text{si } \theta \in [\pi/2, 3\pi/2], \\ R_2(t_*) & \text{si } \theta \in [-\pi/2, \pi/2]. \end{cases} \tag{4.39}$$

La figura 4.2 muestra los potenciales electromagnéticos efectivos y los potenciales electromagnéticos de Liennard-Wiechert en coordenadas polares con origen en la partícula al tiempo actual. Una diferencia muy importante que es muy difícil apreciar gráficamente entre los potenciales electromagnéticos efectivos y los potenciales electromagnéticos de Liennard Wiechert es que los primeros no tienen la simetría elíptica característica de LW.

Claramente es deseable probar la validez de los potenciales efectivos obtenidos. Con este fin en la siguiente sección se estudiara un efecto que ha sido medido con gran precisión que es el corrimiento Lamb del átomo de Hidrógeno.

SECTION 4.2

Átomo de Hidrógeno en RSIIn

En esta sección se calculan las posibles correcciones a los niveles de energía de un átomo de Hidrógeno asociadas a las dimensiones extra del modelo de RSIIn. De acuerdo al análisis presentado en la sección 2.3.2 la ecuación efectiva de Dirac cuatro dimensional está dada por (2.121)

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - e\gamma^0 A_0 - m_0\right)\phi = 0, \tag{4.40}$$

donde A^0 toma la forma contenida en la ecuación (4.27) en el caso de una dimensión extra compacta y por (4.35) para dos dimensiones compactas extras. Aquí se usan unidades $\hbar =$

$c = 1$. Dada la complejidad de los potenciales electrostáticos se realizara un análisis en teoría de perturbaciones a primer orden.

Considérese el caso de una dimensión compacta extra. En este caso el potencial electroestático (4.27) desarrollado alrededor de Coulomb, en torno de $r \to \infty$, resulta

$$eA_0 \approx -e^2 \left\{ \frac{1}{r} - \frac{4}{3\pi} \frac{1}{\kappa^3 r^4} \right\}, \quad e^2 = e_{eff} e^{(n)} = \frac{\kappa e^{(n)} e^{(6)}}{8\pi R^2}. \tag{4.41}$$

Con esta aproximación la ecuación de Dirac (4.40) puede escribirse como

$$(\mathbf{H}_D + \mathbf{H})\phi = E\phi, \tag{4.42}$$

$$\mathbf{H}_D = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + m_0 \boldsymbol{\beta} - \frac{e^2}{r}, \tag{4.43}$$

$$\mathbf{H} = \frac{4e^2}{3} \frac{1}{\kappa^3 r^4}, \tag{4.44}$$

Con E la energía del átomo y $\mathbf{H}_D$ es el Hamiltoniano de Dirac para el átomo de Hidrógeno sin perturbar mientras que $\mathbf{H}$ es la perturbación. De acuerdo a la teoría de perturbaciones a primer orden los corrimientos a los niveles de energía están determinado por el Hamiltoniano perturbativo

$$\delta E_{(\bar{n}\,\bar{k}\,\bar{m})(\bar{n}'\,\bar{k}'\,\bar{m}')} = \int dr r^2 d\Omega \phi^{\dagger}_{(\bar{n}\,\bar{k}\,\bar{m})} \mathbf{H} \phi_{(\bar{n}'\,\bar{k}'\,\bar{m}')}. \tag{4.45}$$

Considerando solo una dimensión compacta $\mathbf{H} \to \mathbf{H}_1$ esta dado por (4.44) y ϕ por (B.17). De esta forma podemos rescribir esta ecuación como

$$\begin{aligned} \delta E_{(\bar{n}\,\bar{k}\,\bar{m})(\bar{n}'\,\bar{k}'\,\bar{m}')} &= \int_0^{\infty} dr r^2 \frac{G^2(r)}{r^2} \frac{4\alpha}{3\pi\kappa^3 r^4} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} d\Omega \Omega^{\dagger}_{\bar{k},\bar{m}}(\theta,\phi) \Omega_{\bar{k}',\bar{m}'}(\theta,\phi) \\ &= \int_0^{\infty} dr r^2 \frac{G^2(r)}{r^2} \frac{4\alpha}{3\pi\kappa^3 r^4} = \frac{4\alpha \left(2\sqrt{m_0^2 - E^2_{\bar{n},\bar{k}}}\right)^3}{3\pi\kappa^3} \int_0^{\infty} dx \frac{G^2(x)}{x^4}. \end{aligned} \tag{4.46}$$

Donde hemos hecho el siguiente cambio de variable $x = 2\sqrt{m_0^2 - E^2_{\bar{n},\bar{k}}}\, r$ y también se ha considerado $G(r) \gg F(r)$ [4] y la ortogonalidad de los espinores esféricos.

Cabe mencionar que las correcciones a los niveles de energía (4.46) son puramente radiales, lo cual implica que la degeneración a los niveles de energía sean removidos [77]. Específicamente

[4] Al orden mas bajo en α, la función F puede ser despreciada pues contribuye solo al siguiente orden en la perturbación.

existe un corrimiento en los niveles $2P_{1/2}$ y $2S_{1/2}$, es decir, podemos calcular un corrimiento Lamb.

Para esto es necesario conocer las correspondientes funciones $G(r)$ para los estados $2P_{1/2}$ y $2S_{1/2}$. Con una sola dimensión compacta para el estado $2S_{1/2}$ se tiene: $\bar{n}=2, j=1/2, \bar{k}=-1$, $\gamma=\sqrt{1-\alpha^2}$, $E_{\bar{n},\bar{k}}=m_0\frac{\xi}{2}$, $\xi=\sqrt{2(1+\gamma)}$, $\lambda=\alpha m_0\xi$. De la ecuacion (B.44), G toma la forma

$$\begin{aligned} G(r) &= -N_{2,-1}\sqrt{1+\frac{\xi}{2}}\,e^{-\frac{x}{2}}\,x^{\gamma}\left[(\xi+1)\left(1-\frac{x}{\xi^2-1}\right)-1\right], \\ &\quad \text{con} \quad x=2\alpha m_0\xi r. \end{aligned} \tag{4.47}$$

Donde

$$N_{2,-1}=\frac{1}{\sqrt{\xi}\Gamma\left(\xi^2-1\right)}\sqrt{\frac{\alpha m_0\Gamma\left(\xi\right)}{2(\xi+1)}} \tag{4.48}$$

Usando (4.46) el corrimiento a la energía para este estado está dado por

$$\frac{\delta E^{(n=1)}}{\alpha^5 m_0}=\frac{32m_0^3}{3\pi\kappa^3}\frac{\xi^2\Gamma\left(\xi^2\right)}{2\left(\xi+1\right)\Gamma^2\left(\xi^2-1\right)}\left[\frac{\Gamma\left(\xi^2-2\right)}{\left(\xi-1\right)^2}-\frac{2\xi}{\xi-1}\Gamma\left(\xi^2-3\right)+\xi^2\Gamma\left(\xi^2-4\right)\right]. \tag{4.49}$$

Para el estado $2P_{1/2}$ se tiene $\bar{n}=2, \bar{k}=1$, $\gamma=\sqrt{1-\alpha^2}$, $E_{\bar{n},\bar{k}}=m_0\frac{\xi}{2}$, $\xi=\sqrt{2(1+\gamma)}$, $\lambda=\alpha m_0\xi$. De acuerdo a esto $G(r)$ es

$$G(r)=-N_{2,1}\sqrt{1+\frac{\xi}{2}}\,e^{-\frac{x}{2}}\,x^{\gamma}\left[(\xi+1)\left(1-\frac{x}{\xi^2-1}\right)+1\right]. \tag{4.50}$$

Nótese que

$$N_{2,1}=\frac{1}{\sqrt{\xi}\Gamma\left(\xi^2-1\right)}\sqrt{\frac{\alpha m_0\Gamma\left(\xi\right)}{2(\xi-1)}} \tag{4.51}$$

Usando nuevamente (4.46) el cambio de energía para $2P_{1/2}$ es

$$\frac{\delta E^{(n=1)}}{\alpha^5 m_0}=\frac{32m_0^3}{3\pi\kappa^3}\frac{\xi^2\Gamma\left(\xi^2\right)}{2\left(\xi-1\right)\Gamma^2\left(\xi^2-1\right)}\left[\frac{\Gamma\left(\xi^2-2\right)}{\left(\xi-1\right)^2}-\frac{2(\xi+2)}{\xi-1}\Gamma\left(\xi^2-3\right)+(\xi+2)^2\Gamma\left(\xi^2-4\right)\right]. \tag{4.52}$$

Enseguida se consideran dos dimensiones compactas extras. El potencial electrostático efectivo está dado por la ecuación (4.35), que desarrollada alrededor de infinito, produce

$$eA_0\approx -e^2\left\{\frac{1}{r}-\frac{3}{8}\frac{1}{\kappa^4 r^5}\right\}, \qquad e^2=e_{eff}e^n=\frac{\kappa e^{(n)}e^6}{4\pi R^2}. \tag{4.53}$$

La perturbación correspondiente toma la siguiente forma

$$\mathbf{H}_2 = \frac{3e^2}{8}\frac{1}{\kappa^4 r^5}. \tag{4.54}$$

Los cambios de los niveles de energía resultan

$$\delta E_{(\bar{n},\bar{k}\bar{m})(\bar{n}',\bar{k}'\bar{m}')} = \int_0^\infty dr r^2 \frac{G^2(r)}{r^2}\frac{3\alpha}{8\kappa^4 r^5} = \frac{3\alpha\left(2\sqrt{m^2-E_{\bar{n},\bar{k}}^2}\right)^4}{8\kappa^4}\int dx \frac{G^2(x)}{x^5}, \tag{4.55}$$

tomando $G(r)$ de (4.47) para el estado $2S_{1/2}$. El correspondiente cambio de energía es

$$\frac{\delta E^{(n=2)}}{\alpha^5 m_0} = \frac{6m^4\alpha}{\kappa^4}\frac{\xi^3\Gamma\left(\xi^2\right)}{2\left(\xi+1\right)\Gamma^2\left(\xi^2-1\right)}\left[\frac{\Gamma\left(\xi^2-3\right)}{\left(\xi-1\right)^2} - \frac{2\xi}{\xi-1}\Gamma\left(\xi^2-4\right) + \xi^2\Gamma\left(\xi^2-5\right)\right]. \tag{4.56}$$

Análogamente para el estado $2P_{1/2}$ el correspondiente cambio de energía es

$$\frac{\delta E^{(n=2)}}{\alpha^5 m_0} = \frac{6m^4\alpha}{\kappa^4}\frac{\xi^3\Gamma\left(\xi^2\right)}{2\left(\xi-1\right)\Gamma^2\left(\xi^2-1\right)}\left[\frac{\Gamma\left(\xi^2-3\right)}{\left(\xi-1\right)^2} - \frac{2(\xi+2)}{\xi-1}\Gamma\left(\xi^2-4\right) + (\xi+2)^2\Gamma\left(\xi^2-5\right)\right]. \tag{4.57}$$

Tomando la diferencias de energías entre los estados $2P_{1/2}$ y $2S_{1/2}$ obtenemos el corespondiente corrimiento Lamb.

Para una dimensión compacta, $n = 1$, se tiene

$$\Delta E^{(n=1)_{\text{Lamb}}} = \frac{A_1\xi^3}{\kappa^3}\left(B_{(n=1)}N_{2,-1}^2 - C_{(n=1)}N_{2,1}^2\right). \tag{4.58}$$

Para dos dimensiones compactas, $n = 2$

$$\Delta E^{(n=2)_{\text{Lamb}}} = \frac{A_2\xi^4}{\kappa^4}\left(B_{(n=2)}N_{2,-1}^2 - C_{(n=2)}N_{2,1}^2\right). \tag{4.59}$$

Donde definimos

$$A_1 \equiv \frac{32m_0^3\alpha^4}{3\pi}, \quad B_{(n)} \equiv \frac{\Gamma\left(\xi^2-1-n\right)}{\left(\xi-1\right)^2} - \frac{2\xi}{\xi-1}\Gamma\left(\xi^2-2-n\right) + \xi^2\Gamma\left(\xi^2-3-n\right) \tag{4.60}$$

$$A_2 \equiv 6m_0^4\alpha^5, \quad C_{(n)} \equiv B_{(n)} - \frac{4}{\xi-1}\Gamma\left(\xi^2-2-n\right) + (2\xi+4)\Gamma\left(\xi^2-3-n\right). \tag{4.61}$$

Es interesante comparar estos resultados con el corrimiento Lamb cuatro dimensional usual dado por la ecuación (C.1)

$$\frac{\Delta E_{\text{Lamb}}}{\alpha^5 m_0} = \frac{1}{4\bar{n}^2}\left[k(\bar{n},l) \pm \frac{1}{\pi(j+\frac{1}{2})(l+\frac{1}{2})}\right], \quad \bar{n} \text{ es el numero cuántico principal} \tag{4.62}$$

Asi considerando $\Delta E^{(n)}_{\text{Lamb}} < \Delta E_{\text{Lamb}}$ obtenemos las siguientes cotas para $\kappa^{-1} \leq 10^{-14}$ m, 10^{-13} m para una y dos dimensiones compactas respectivamente.

En el cálculo de las cotas al parámetro del escenario hemos empleado el valor del corrimiento Lamb y no el de su incertidumbre. Por supuesto se podría insistir en usar dicha incertidumbre, sin embargo no se obtendría una mejoría notable en los valores obtenidos y además se tendrían que incorporal efectos adicionales: el tamaño del protón, efecto de retroceso, etc. Los valores obtenidos para κ se encuentran en el rango de fermis, por lo que no entran en conflicto con la teoría electromagnética.

Para concluir este capítulo describiremos algunos aspectos sobre el estado actual tanto experimental como teórico del corrimiento Lamb (LS). Del apéndice C este corrimiento corresponde a la transición $2S_{1/2} - 2P_{1/2}$, en donde los niveles de energía están determinados por los eigenvalores de la ecuación de Dirac (B.42) y efectos de electrodinámica cuántica (auto energía, polarización del vacío. corrección de vértice, tamaño del núcleo, efectos de retroceso, entre otros). Los efectos asociados a la electrodinámica cuántica son escritos en una serie de potencias sobre tres parámetros: α, $Z\alpha$, m/M, que son, α la constante de estructura fina, Z la carga nuclear y m/M la razón de masas del electrón y el protón (o la masa reducida según sea el caso). Nótese que las correcciones que dependen de $Z\alpha$ son llamadas relativistas, mientras que las contribuciones que dependen únicamente de α son llamadas correcciones radiativas ya que provienen de lazos de la electrodinámica cuántica perturbativa. Las correcciones que dependen de la razón de masas m/M suelen llamarse de retroceso y están asociadas al carácter finito de la masa del núcleo. Si las correcciones dependen simultáneamente de los tres parámetros suelen llamárseles correcciones radiativas de retroceso. La última clase de correcciones no está asociada a la electrodinámica cuántica, sino a interacciones débiles y fuertes. Sin embargo la corrección mas grande inducida por la interacción fuerte esta conectada con el tamaño finito del núcleo tabla 4.1.

Los resultados experimentales obtenidos del corrimiento Lamb son presentados en la tabla 4.1. La figura 4.3 muestra algunas mediciones hechas de forma directa e indirecta.

El cálculo teórico del corrimiento Lamb se ha realizado hasta tres lazos. A continuación

Año	Valor	Referencia
1947	$1060\,000\,kHz$	Lamb y Rheterford
1979	$1057\,862(20)\,kHz$	Newton, Andrews y Unsworth
1981	$1057\,845(9)\,kHz$	Lundeen y Pipkin
1983	$1057\,857.6(2.1)\,kHz$	Palchikov, Sokolov y Yakovlev
1994	$1057\,842(12)\,kHz$	Hagley y Pipkin
1995	$1057\,857(12)\,kHz$	Weitz, Huber, Schmidt-Kahler et al.
1995	$1057\,842(11)\,kHz$	Berkeland, Hinds y Boshier
1996	$1057\,836(8)\,kHz$	Bourzeix, de Beauvoir,Nez et al.
1997	$1057\,848(5)\,kHz$	Udem,Huber, Gross et al.
1998	$1057\,852(15)\,kHz$	van Wijngaarden, Holuj y Drake
1999	$1057\,841(5)\,kHz$	de Beauvoir et al.
1999	$1057\,845(3)\,kHz$	Schwob, Jozefovski, de Beauvoir et al.

Tabla 4.1: Resultados experimentales del corrimiento Lamb $2S_{1/2}$ y $2P_{1/2}$ en el átomo de Hidrógeno.

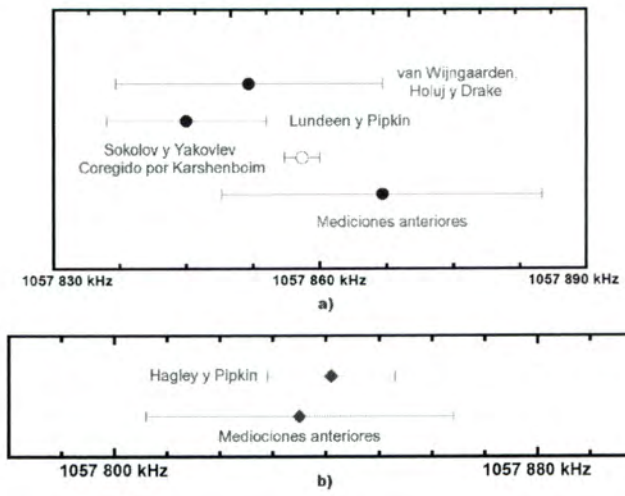


Figura 4.3: *La figura a) muestra las mediciones directas del corrimiento Lamb (LS) en el átomo de Hidrógeno. La figura b) muestra el valor del corrimiento Lamb en el átomo de Hidrógeno calculado de forma indirecta a través de la medición* $2P_{3/2} - 2S_{1/2}$. *El valor del LS se obtiene al restarle el valor teórico de* $2P_{3/2} - 2P_{1/2}$. *Estas figuras fueron tomadas de [61].*

presentamos estas contribuciones junto con las radiativas tabla 4.2. Para mayor detalle sobre tales efectos, el lector puede consultar [34, 33, 107]. Por completez contrastamos nuestros resultados con contribuciones al corrimiento Lamb en otros modelos [20, 86] en la tabla 4.3.

Propuesta	Forma
Polarizacion del núcleo	$-21.441\frac{\hbar\delta_{l0}}{2\pi\bar{n}^3}$
Retroceso relativista	$\frac{m_r^3}{m_e^2 m_N}\frac{(Z\alpha)^5}{\pi\bar{n}^3}F^*(Z\alpha,\bar{n},l)m_ec^2$
Retroceso relativista	$\frac{m_e}{m_N}\frac{(Z\alpha)^6}{\pi\bar{n}^3}m_ec^2D_{60}$
Tamaño finito del núcleo	$\frac{2}{3}\left(\frac{m_r}{m_e}\right)^2\frac{(Z\alpha)^2}{\bar{n}^2}m_ec^2\left(\frac{2\pi Z\alpha R}{\lambda_c}\right)^2\delta_{l0}$
Retroceso radiativo	$-1.36449\alpha\frac{(Z\alpha)^5}{\bar{n}^3}\frac{m_e}{m_N}m_ec^2\delta_{l0}$
Auto energía del núcleo	$\frac{4Z^2\alpha(Z\alpha)^4}{3\pi\bar{n}^3}\frac{m_r^3}{m_N^2}c^2\left[\ln\left(\frac{m_N}{m_r(Z\alpha)^2}\right)\delta_{l0}-\ln k_0(\bar{n},l)\right]$
Un lazo (QED)	
Auto energía	$\frac{\alpha}{\pi}\frac{(Z\alpha)^4}{\bar{n}^3}F(Z\alpha)m_ec^2$
Corrección a la auto energía	$-1.985\frac{3}{2}\alpha(Z\alpha)\frac{1}{3}\left(\frac{m_r}{m_e}\right)^2\frac{(Z\alpha)^2}{\bar{n}^2}m_ec^2\left(\frac{2\pi Z\alpha R}{\lambda_c}\right)^2\delta_{l0}$
por el tamaño del núcleo	
Polarización del vacío	$\frac{\alpha}{\pi}\frac{(Z\alpha)^4}{\bar{n}^3}H(Z\alpha)m_ec^2$
Corrección a la Polarización del vacío	$-1.985\frac{3}{4}\alpha(Z\alpha)\frac{1}{3}\left(\frac{m_r}{m_e}\right)^2\frac{(Z\alpha)^2}{\bar{n}^2}m_ec^2\left(\frac{2\pi Z\alpha R}{\lambda_c}\right)^2\delta_{l0}$
por el tamaño del núcleo	
Dos lazos (QED)	$\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2\frac{(Z\alpha)^4}{\bar{n}^3}F^{(4)}(Z\alpha)m_ec^2$
Auto energía	$\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2\frac{(Z\alpha)^4}{\bar{n}^3}m_ec^2\delta_{l0}$
	$\times\left[2\pi^2\ln 2-\frac{49}{108}\pi^2-\frac{4819}{1246}-3\zeta(3)\right]$
Polarización del vacío	$\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2\frac{(Z\alpha)^4}{\bar{n}^3}m_ec^2\left(-\frac{82}{81}\right)\delta_{l0}$
Correcciones radiativas	$0.469941\frac{4\alpha^2(Z\alpha)^4}{\pi^2\bar{n}^3}\left(\frac{m_r}{m_e}\right)^3m_e\delta_{l0}$

Tabla 4.2: Contribuciones de los diferentes efectos a la separación de los estados $2S_{1/2}$ y $2P_{1/2}$ en el átomo de Hidrógeno. Las funciones y parámetros están definidos en [33, 57, 107, 114].

Propuesta	Forma
Tres lazos en (QED)	$\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 \frac{(Z\alpha)^4}{\bar{n}^3} m_e c^2 T_{40}$ [33, 34, 35]
Corrección radiativa	$0.17172 \frac{4\alpha^3(Z\alpha)^4}{\pi^2 \bar{n}^3} \left(\frac{m_r}{m_e}\right)^3 m_e \delta_{l0}$ [33, 34, 35]
Corrección radiativa	$-0.021458 \frac{\alpha^3(Z\alpha)^5}{\pi^2 \bar{n}^3} \left(\frac{m_r}{m_e}\right)^3 m_e$ [33, 34, 35]
Corrección relativista	$3.559 \frac{\alpha^3(Z\alpha)}{\pi^2} E_F$ [33, 34, 35]
Geometría no conmutativa	$-\frac{m_e c^2}{4}(Z\alpha)^4 \frac{\theta}{\lambda_e^2} \left(1 \pm \frac{1}{2l+1}\right) f_{\bar{n},l} \delta_{ll'} \delta_{j_z j_z'}$ [20]
Dimensiones extas (RSIIn)	
$n = 1$	$\frac{A_1 \xi^3}{\kappa^3} \left(B_{(n=1)} N_{2,-1}^2 - C_{(n=1)} N_{2,1}^2\right)$ [86]
$n = 2$	$\frac{A_2 \xi^4}{\kappa^4} \left(B_{(n=2)} N_{2,-1}^2 - C_{(n=2)} N_{2,1}^2\right)$ [86]

Tabla 4.3: Contribuciones a tres lazos del corrimiento Lamb en el átomo de Hidrógeno. También se presentan al corrimiento Lamb en otros contextos.

Capítulo

5

Conclusiones y discusión

En esta tesis hemos mostrado que los efectos asociados a las dimensiones espaciales extras no solo puede llevar a consecuencias de interés físico a altas energías como son el problema de jerarquía del Modelo Estándar o producción de microagujeros negros, entre otros. También es posible considerar experimentos a bajas energías que pueden proporcionar información sobre la viabilidad de estos escenarios. En particular hemos estudiado implicaciones fenomenológicas en el efecto Casimir, potenciales electromagnéticos y el corrimiento Lamb del átomo de Hidrógeno para algunos escenarios con dimensiones extras como son el de Randall-Sundrum con una sola membrana extendido por n dimensiones compactas (RSIIn) y el de Randjbar-Daemi-Shaposhnikov, que consiste de un vórtice en 6 dimensiones (RDSh). La relevancia de estos radica en su propiedad de localizar a los campos electromagnéticos y espinores y escalares masivos con pequeñas modificaciones en el caso RSIIn.

Por lo que toca a la fuerza Casimir se determinó su dependencia en la separación entre placas planas paralelas para el caso electromagnético en RDSh y para un campo escalar con y sin masa tanto en RSIIn como en ausencia de dimensiones compactas, es decir RSII. En el primer caso se encuentra un resultado incompatible con el caso cuatro dimensional estando entonces

en conflicto con los experimentos. En los otros casos es posible identificar la contribución cuatro dimensional usual, hasta un factor numérico.

Con el fin de estudiar el corrimiento Lamb de un átomo de Hidrógeno localizado en la única membrana de RSIIn obtuvimos los potenciales electromagnéticos producidos por una carga puntual -vista desde la membrana cuatro dimensional. Los potenciales de Liennard-Wiechert y de Coulomb efectivos difieren de los estándares en cuatro dimensiones solo a pequeñas distancias de la carga puntual en unidades del radio de anti de Sitter que caracteriza a RSIIn. Notablemente se elimina la singularidad de los potenciales estándares en la posición de la carga y su auto energía electromagnética resulta finita. Al considerar el efecto de la desviación del potencial efectivo con respecto al Coulombiano estándar en teoría de perturbaciones para el átomo de Hidrógeno se obtuvo un desdoblamiento de los niveles de energía $2S_{1/2}$ y $2P_{1/2}$ que depende del número de dimensiones compactas n. Por comparación con el resultado experimental del corrimiento Lamb fue posible acotar el parámetro de tensión de la membrana ó radio de anti de Sitter de RSIIn. En particular la cota obtenida no se encuentra en conflicto con la electrodinámica a nivel macroscópico.

Pasamos ahora a discutir estos resultados. En la sección 3.1 se estudió el efecto Casimir para un campo electromagnético entre placas paralelas en el escenario RDSh empleando el método de regularización dimensional. El primer paso de este análisis fue determinar la contribución de las dimensiones extras a la relación de dispersión de los fotones. Se encuentran dos contribuciones adicionales a esta: la primera depende de la componente radial del momento k_r, mientras que la segunda corresponde a la coordenada angular y está caracterizada por su dependencia en el número de vórtice n_v^{-2}, $n_v = 1, 2, \ldots$. Siguiendo el cálculo estándar se determinó la energía Casimir como la diferencia de energías en presencia y ausencia de las placas paralelas, ecs. (3.24-3.26). Esta difiere de la usual cuatro dimensional por un factor multiplicativo que depende de los parámetros del escenario (a, ℓ), el tamaño característico del vórtice y la razón de las constantes de acoplamiento gravitacional y electromagnética en seis dimensiones, respectivamente, y de l la separación entre las placas. Derivando la energía de Casimir respecto a l se obtuvo la fuerza de Casimir. En el régimen $l/\ell \ll 1$ la fuerza de

Casimir modificada contiene dos términos. El primero es atractivo y es proporcional a l^{-5}, mientras que el segundo es repulsivo y es proporcional a l^{-3}. Este resultado está en conflicto con los datos experimentales [14, 83] y por lo tanto la viabilidad fenomenológica de este modelo es cuestionable.

En la secciones 3.2 y 3.3 se determinó la fuerza de Casimir para un campo escalar con y sin masa entre placas paralelas empleando el método de la función de Green en el escenario RSIIn y RSII, respectivamente. El primer paso de este método consiste en obtener la función de Green en las regiones entre las placas y fuera de ellas. Esto se realizó con base en los modos asociados a las dimensiones extra. Es importante subrayar que los modos correspondientes a la dimensión no compacta poseen un espectro continuo si el campo escalar Φ es masivo, con masa μ, mientras que para el caso no masivo incluye además un modo discreto ó modo cero. Por otro lado los modos correspondientes a las dimensiones compactas presentan obviamente un espectro discreto (fig. 3.4). El efecto de la masa del campo escalar es una cuasi localización de uno de los modos continuos con masa $m_0(\mu)$, cuya vida media en la membrana es del orden de $\tau \sim \frac{\kappa^3}{\mu^4}$, con κ la tensión de la brana. τ es muy grande y de interés para nosotros cuando $\mu \ll \kappa$. En contraste, para el caso sin masa el modo cero resulta estrictamente localizado. En el siguiente paso del método se obtuvo la fuerza de Casimir a través de la discontinuidad en la dirección transversal a las placas del tensor de energía momento expresado en términos de la función de Green. En el régimen resonante donde la contribución más importante de los modos continuos es $m \sim m_0$, la fuerza de Casimir contiene la contribución de todos los modos discretos truncada al modo cero $n_R = 0, m_0 \ll R^{-1}$, con R el tamaño de las dimensiones compactas y produce el resultado cuatro dimensional. Los siguientes modos $n_R > 1$, como era de esperarse, aumentan la masa efectiva del campo escalar llevando así a una disminución mas abrupta de la fuerza de Casimir (fig. 3.2). En el régimen de modos continuos ligeros $m \ll m_0, \kappa$, no parece haber diferencia entre la contribución del modo cero y los modos excitados compactos: en ambos casos los modos continuos contribuyen con el mismo factor dependiente de la masa acumulándose en el intervalo $0 \leq m \leq m_0$. Es fácil ver que el caso del campo escalar en RSII se obtiene del anterior considerando al modo cero compacto como

dominante. Estos resultados están contenidos en las ecs. (3.66) y (3.80). Es tentador aplicar el caso sin masa en el caso electromagnético en el escenario RSIIn, corrigiendo la helicidad. Debe notarse que la idea tiene sentido en RSIIn pero no en RSII pues solo en el primero hay localización en la brana de cualquiera de los campos escalar o electromagnético. El caso masivo no tiene contraparte experimental. Su interés radica en estudiar el efecto de la masa en la fuerza de Casimir en modelos simples en lugar de otros campos de interés más complicados en cuatro dimensiones.

En la sección 4.1 se calcularon los potenciales electromagnéticos efectivos que genera una carga puntual en movimiento uniforme a lo largo de una geodésica tipo tiempo extendida en una de las direcciones no compactas de la membrana de RSIIn. Es fácil ver que esta geodésica es inestable. Sin embargo este comportamiento puede invertirse si hay movimiento en algunas de las direcciones compactas. A nivel cuántico la inestabilidad de la geodésica es irrelevante toda vez que los espinores cuánticos en los que estamos interesados resultan estar cuasi localizados, es decir tienen una vida media de permanencia en la membrana que puede ser suficientemente grande para todo fin práctico en un posible experimento.

El método utilizado consistió en la determinación de la función de Green para los campos electromagnéticos. Se consideró una aproximación truncada al modo cero en los modos discretos correspondientes a las coordenadas compactas, mientras que en la coordenada no compacta aparece un espectro mixto conteniendo un solo modo discreto (modo cero) y una torre contínua. De estos últimos se consideraron solo los modos ligeros junto con el modo cero. Es importante enfatizar que la función de Green resultante en esta aproximación puede expresarse como la contribución del modo cero separada del sector continuo de manera que si truncásemos el sector continuo recuperaríamos eventualmente los potenciales de Liennard-Wiechert y de Coulomb, ec. (4.15). Sin embargo la contribución del sector continuo lleva a potenciales efectivos que sustituyen a los usuales teniendo la nueva característica de coincidir con ellos rápidamente, en unidades del radio de anti de Sitter κ^{-1}, pero difieren drásticamente cerca de la posición de la carga. Notablemente son finitos en la posición de la misma. En el límite en el que cualquiera de los dos parámetros del escenario, κ^{-1}, R tiende a cero las di-

vergencias estándares se recuperan. Tenemos así una regularización de las divergencias de los potenciales que produce una carga puntual en movimiento uniforme basada en la presencia de dimensiones extras: una no compacta y al menos una compacta.

Llama la atención que el carácter finito de la auto energía de cargas eléctricas puntuales ha llevado en el pasado a propuestas como la electrodinámica no lineal de Born-Infeld cuya motivación fue obtener campos finitos en la posición de la carga [13]. Así como también el carácter regulador de la gravedad en el contexto de la relatividad general para la auto energía de la carga [99].

Con el fin de probar los potenciales efectivos obtenidos estudiamos un átomo de Hidrógeno localizado en la única membrana de RSIIn. Con este fin obtuvimos la separación de los niveles $2S_{1/2}$ y $2P_{1/2}$, $\Delta E^{(n)}$ usando teoría de perturbaciones a primer orden en las desviaciones del potencial efectivo respecto al de Coulomb. Este corrimiento depende del número de dimensiones compactas. Por comparación con los datos del experimento del corrimiento Lamb ΔE^{Lamb} con $\Delta E^{(n)} < \Delta E^{Lamb}$ [84] obtuvimos las siguientes cotas: $\kappa^{-1} < 10^{-14}\, m, 10^{-13}\, m$, para $n = 1, 2$, respectivamente. Es importante observar que a estas escalas de longitud no encontramos conflicto con experimentos a nivel de la electrodinámica clásica. Por otro lado debajo de estas escalas de longitud deberíamos construir una electrodinámica cuántica en RSIIn.

Pasamos ahora a comentar algunas perspectivas de la línea de trabajo contenida en esta tesis.

El efecto Casimir ha sido considerado en el contexto de las dimensiones extras en varias situaciones. En el caso de las teorías de Kaluza-Klein se intentó infructuosamente asociarlo con la constante cosmológica [79], sin embargo el resultado es notablemete distinto: $\Lambda_{\text{Casimir}} \sim 10^{100}\Lambda^{\text{Obs.}}_{\text{Cosmológica}}$. En los mundos brana se ha propuesto considerarlo como un mecanismo de estabilización de la separación en modelos con dos branas o radión [36, 40, 42, 98], así como determinar posibles desviaciones del potencial gravitacional Newtoniano [91]. Adicionalmente el experimento usual en cuatro dimensiones [14] para medir la fuerza Casimir electromagnética puede permitir acotar parámetros de los escenarios bajo estudio como ha sido el propósito de esta tesis [70, 69] al considerar las electrodinámicas efectivas correspondientes. También

siguiendo esta idea ha sido posible estimar cotas para el tamaño de dimensiones compactas extras [97] $R \leq 30\,nm$. Es claro que esta idea se mantiene vigente como una estrategia para explorar estos escenarios. En particular sería de interés considerar diferentes campos además del escalar y electromagnético en relación con las dimensiones extras.

Desde su descubrimiento por Lamb y Retherford en 1947 la diferencia de energía entre los niveles $2S_{1/2}$ y $2P_{1/2}$, ó corrimiento Lamb, ha constituido un reto teórico que fue triunfalmente reconciliado con la teoría de la electrodinámica cuántica. Hoy en día la precisión con la que se ha medido este efecto $\Delta E_{Lamb} = 1057844.9(3.2)\,kHz$ [84] permite buscar efectos diminutos asociados a modelos teóricos. Este y otros análisis espectroscópicos de átomos han sido de interés como pruebas de dimensiones extras. Por ejemplo desviaciones del potencial gravitacional Newtoniano asociados con la presencia de dimensiones extras ha sido sujeto de estudio en átomos de Hidrógeno muónicos llegando a probar escalas en la región de nanómetros [17, 73, 72] en contraste con las pruebas tradicionales basadas en balanzas de torsión que han alcanzado a probar escalas del orden de micras [51, 71]. También se han considerado correcciones gravitacionales relativistas en átomos [92]. Electrodinámicas efectivas son susceptibles de probarse con métodos espectroscópicos como ha sido uno de los propósitos de esta tesis al relacionar la presencia de dimensiones extras con el corrimiento Lamb [85, 86].

Actualmente se espera que los nuevos efectos en las teorías propuestas sean muy pequeños pues de otra manera ya los abríamos observado por lo que la atención se ha enfocado a los experimentos de alta precisión, a bajas energías, como los que miden los efectos mencionados antes. Por ejemplo la búsqueda de posibles violaciones a la simetría de Lorentz inspiradas ya sea en un Modelo Estándar extendido asociado con teorías de cuerdas [24, 65] u otras propuestas de teorías de gravedad cuántica ha conducido a contemplar experimentos de comparación de relojes, sistemas Hidrógeno anti Hidrógeno y trampas de Penning entre otras. Es claro que el panorama que brindan estas posibilidades es vasto y prometedor por lo que la riqueza de ideas detrás de los mundos brana deberá sujetarse a los impuestos oportunos requeridos por los experimentos.

Apéndice

A

Fuerza de Casimir 4D

Como se menciono brevemente en capitulo 3, el caso mas simple de estudiar consiste en placas conductoras paralelas separadas por una distancia l y considerar temperatura cero. Estas placas conductoras implican condiciones de frontera para el campo electromagnético. Dichas condiciones de frontera pueden ser vistas como una idealización de la interacción de la superficie metálica con el campo electromagnético. En general estas interacciones son mucho más complicadas y son modificadas por la conductividad del metal y la rugosidad de la superficie. Pero estas condiciones de frontera idealizadas son un buen punto de inicio para entender la fuerza de Casimir y eventualmente poder modificarlas para tratar metales más realistas, tratando a la conductividad y la rugosidad de los metales como pequeñas perturbaciones.

SECTION A.1

Campo electromagnético en 4D

La intención de este apéndice es mostrar de forma breve como obtener la fuerza de Casimir empleado regularización adimensional y la función de Green. Un estudio más detallado puede

verse en [38] donde presenta una versión histórica y calcula fuerza de Casimir empleando el método de la función de Green ó [80] donde emplea regularización dimensional.

Es conocido de la electrodinámica clásica que las dos polarizaciones del campo tienen que satisfacer las condiciones de frontera

$$E_t\big|_S = B_n\big|_S = 0, \tag{A.1}$$

en la superficie S de los conductores. n es la normal hacia afuera de la superficie cerrada que es frontera de la placa conductora y t denota la componente tangencial, la cual es paralela a la superficie S.

Considerando al campo electromagnético formado por un conjunto de osciladores armónicos con frecuencias $\omega = \sqrt{k^2}$, donde k es el momento del fotón. En la presencia de las placas $\vec{k} = (k_\perp, \frac{\pi n}{l})$, con $k_\perp$ un vector de dos dimensiones y n un entero. Así la energía del campo electromagnético entre las placas es

$$E = \frac{2L^2}{2} \int \frac{dk_1 dk_2}{(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_{k_\perp, n} \tag{A.2}$$

donde hemos tomado $\hbar = c = 1$ y $L^2 \to \infty$ es una idealización para despreciar efectos de borde y el factor de 2 en el numerador fuera de la integral toma en cuenta los dos estados de polarización del fotón. Esta expresión es divergente para momentos grandes. Por lo tanto se tiene que introducir alguna regularización en esta expresión. Este procedimiento es muy conocido en teoría cuántica de campos y consiste en cambiar la expresión inicial de forma que sea finita. Este cambio depende de algún parámetro de regularización y se supone que puede ser removido tomando algún valor límite de este parámetro o algún valor apropiado. Varios métodos de regularización pueden emplearse, entre ellos esta el introducir una función de corte para la frecuencia, la cual fue usada por Casimir en su artículo original. Podemos también realizar esta regularización introduciendo la función zeta o empleando regularización dimensional. Todos estos procedimientos de regularización tienen que ser equivalentes: el resultado final tiene que ser igual para todos ellos. Esta regularización tiene un significado físico intuitivo. Algunos cuerpos reales se vuelven transparentes a altas energías así que su

contribución debería ser suprimida de alguna forma, entonces la introducción de algún método para regularizar esta energía esta justificada.

Para evaluar (A.2) emplearemos regularización dimensional. En este procedimiento las dimensiones trasversales las denotamos como d, la cual se trata como una variable compleja y continúa. De esta forma la ecuación (A.2) puede escribirse como

$$E=\frac{2L^2}{2}\sum_n\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\sqrt{k^2+\frac{\pi^2n^2}{l^2}}=\frac{\hbar L^2}{2}\sum_n\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\left[\frac{1}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}\right]\int_0^\infty\frac{dl}{t}t^{-\frac{1}{2}}e^{k^2+\frac{\pi^2n^2}{a^2}}, \quad (A.3)$$

donde $k^2=k_1^2+\cdots+k_d^2$ y se ha hecho uso de la representación de Schwinger para la raíz cuadrada en el integrando. También se ha usado la representación de la función gamma.

$$\Gamma(z)=p^z\int_0^\infty e^{-pt}t^{z-1}\,dt. \quad (A.4)$$

El siguiente paso es realizar la integral en k, lo cual da

$$E=-\frac{2L^2}{4\sqrt{\pi}}\frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}}\sum_n\int_0^\infty\frac{dt}{t}t^{-\frac{1+d}{2}}e^{-t\frac{\pi^2n^2}{l^2}}. \quad (A.5)$$

Finalmente se usa la representación de Euler y se suma sobre n aplicando la definición de la función zeta de Riemann para llegar a

$$E=-\frac{2L^2}{4\sqrt{\pi}}\frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}}\left(\frac{\pi}{l}\right)^{d+1}\Gamma\left(-\frac{d+1}{2}\right)\zeta(-d-1). \quad (A.6)$$

d es un entero impar por lo que esta expresión es indeterminada, pero podemos usar la propiedad de reflexión

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z)\pi^{-\frac{z}{2}}=\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\zeta(1-z)\pi^{\frac{z-1}{2}}, \quad (A.7)$$

y la ecuación (A.6) puede escribirse como

$$E=-\frac{2L^2}{2^{d+2}\pi^{\frac{d}{2}}}\frac{1}{l^{d+1}}\left(1+\frac{d}{2}\right)\zeta(2+d). \quad (A.8)$$

Es conveniente hacer algunos comentarios con respecto a la regularización. La ecuación (A.5) es únicamente valida para $d<-1$ y la función zeta de Riemann está definida para $d<-2$. Sin embargo físicamente nos interesa $d=1,2,3\ldots$ por lo que es conveniente considerar una

continuación analítica. Para configuraciones más complicadas el resultado puede diverger y algunos argumentos adicionales de renormalización son necesarios. Finalmente la energía de Casimir por unidad de área se obtiene de (A.8) evaluando en $d = 2$ y usando $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$

$$\mathcal{E} = \frac{E}{L^2} = -\frac{\pi^2}{720}\frac{1}{l^3}. \tag{A.9}$$

La fuerza por unidad de área entre las placas es obtenida al tomar la derivada negativa de la energía con respecto l

$$f = -\frac{d\mathcal{E}}{dl} = -\frac{\pi^2}{240}\frac{1}{l^4} \tag{A.10}$$

El resultado de arriba representa la fuerza de Casimir para un campo electromagnético tratado como un campo escalar multiplicado por los dos estados de polarización del fotón. Esta derivación de la fuerza de Casimir es una de las más simples del efecto Casimir. Algunas derivaciones alternativas están dadas en [4, 12, 27, 75]

SECTION A.2

Campo escalar masivo en 4D

En esta sección se recordara la determinación de la fuerza de Casimir entre placas paralelas para un campo escalar utilizando el método de la función de Green. La ecuación de Klein-Gordon para un campo escalar ϕ masivo producido por una fuente K es

$$-\Box\phi + m_0^2\phi = K. \tag{A.11}$$

La ecuación correspondiente que satisface la función de Green es entonces

$$\left(-\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} + m_0^2\right) G(x,t;x',t') = \delta(x-x')\delta(t-t'). \tag{A.12}$$

Usando la transformada de Fourier se tiene

$$G(x,t;x',t') = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} G_\omega(x,x'), \tag{A.13}$$

y de esta forma la ecuación para $G_\omega(x,x')$ es

$$\left(-\nabla^2 - \omega^2 - m_0^2\right) G_\omega(x;x') = \delta(x-x'). \tag{A.14}$$

Resulta útil recordar las eigenfunciones y eigenvalores del operador asociado a (A.14), es decir

$$\left(-\nabla^2 + m_0^2\right)\psi_n = \omega_n \psi_n. \tag{A.15}$$

La conexión entre la suma de las energías de los modos y al valor de expectación de la energía del campo puede derivarse muy fácilmente. Primero se introduce una función de corte para regularizar la energía de Casimir

$$E = \frac{1}{2}\sum_n \omega e^{-i\omega\tau} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi i}\omega e^{i\omega\tau}\sum_n \frac{2\omega}{\omega^2 - \omega_n^2 - i\epsilon}, \quad \tau \to 0. \tag{A.16}$$

n etiqueta los modos y el contorno de integración puede ser cerrado en el plano inferior del plano complejo. Podemos emplear la eigenfunciones (A.15) normalizadas para reescribir la ecuación (A.16) como

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi i}\omega^2 e^{-i\omega\tau}\int dx \sum \frac{\psi_n(x)\psi_n^*(x)}{\omega_n^2 - \omega^2 - i\epsilon} \\ &= \frac{1}{i}\int dx \int \frac{\omega}{2\pi}\omega^2 G(x,x;\omega)e^{-i\omega(t-t')}\Big|_{t\to t'} \\ &= \int dx \partial^0\partial'^0\langle\phi(x)\phi(x')\rangle\Big|_{x\to x'}. \end{aligned} \tag{A.17}$$

El valor de expectación del vacío del producto ordenado de campos se relaciona con la función de Green de acuerdo con

$$G(x,t;x',t') = i\langle T\phi(x,t)\phi(x',t')\rangle, \tag{A.18}$$

donde T indica el ordenamiento temporal correspondiente. Para un campo escalar masivo el tensor de energía momento $T^{\mu\nu}$[1] está dado por

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu\phi\partial^\nu\phi - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial^\lambda\phi\partial_\lambda\phi + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}m_0^2\phi\phi, \tag{A.19}$$

de esta forma la energía del estado base de un campo cuántico se relaciona con el valor de expectación en el vacío de la componente 00 del tensor de energía momento

$$E = \int dx\langle T^{00}(x)\rangle. \tag{A.20}$$

[1]La ambigüedad al definir el tensor de energía momento no afecta el resultado: Se puede añadir a $T^{\mu\nu}$ un múltiplo de $(\partial_\mu)\partial_\nu - g_{\mu\nu}\phi^2$, pero la componente zz de este tensor se anula en la superficie por las condiciones de frontera (A.26) que aquí se usan.

Esta expresión es divergente y carece así de significado físico, sin embargo cuando la materia es introducida hay un cambio en la energía del estado base y de esta manera se puede calcular la energía de Casimir. Alternativamente la fuerza F entre las placas está dada en términos de la componente normal-normal del tensor de energía momento

$$F = \int dxdy\langle T_{zz}\rangle. \tag{A.21}$$

Para una geometría como la que se muestra en la figura (3.1), la función de Green puede escribirse en términos de la función de Green reducida $g(z, z')$ de acuerdo con su transformada de Fourier como

$$G_\omega(x, x') = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{ik\cdot(x-x')} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega(t-t')} g(z, z'). \tag{A.22}$$

En (A.22) se ha suprimido la dependencia de g en k, ω por simplicidad. Así la función de Green reducida satisface la ecuación

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \lambda^2\right) g(z, z') = \delta(z - z'), \tag{A.23}$$

donde $\lambda^2 = \omega^2 - k^2 - m_0^2$. La correspondiente ecuación de eigenfunciones y eigenvalores es

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi_n(z) = \lambda_n^2\phi_n(z), \tag{A.24}$$

cuyas soluciones son

$$\phi_n(z) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin(\lambda_n z), \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \tag{A.25}$$

sujeto a las condiciones de frontera

$$\phi(0) = \phi(l) = 0. \tag{A.26}$$

La solución a la función de Green reducida en términos de las eigenfunciones normalizadas de (A.25) toma la siguiente forma

$$g(z, z') = \sum_n \frac{\phi_n(z)^*\phi_n(z')}{\lambda_n^2 - \lambda^2} = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi z}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi z'}{l}\right)}{\frac{n^2\pi^2}{l^2} - \lambda^2}. \tag{A.27}$$

La fuerza en la placa $z = l$ es obtenida al tomar en cuenta la discontinuidad de la componente normal-normal del tensor de energía momento

$$F = \int dxdy \left[\langle T_{zz}\rangle\Big|_{z\to l^-} - \langle T_{zz}\rangle\Big|_{z\to l^+}\right] \tag{A.28}$$

Así el valor de expectación del tensor de energía momento puede obtenerse aplicando un operador diferencial a la función de Green (A.27)

$$\langle T_{zz}\rangle \sim \frac{1}{2i}\partial_z\partial_{z'}g(z,z')\Big|_{z\to z'=0,l} = \frac{1}{2i}\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{n^2\pi^2}{l^2}}{\frac{n^2\pi^2}{l^2}-\lambda^2} = \frac{1}{li}\zeta(0)+\frac{\lambda^2}{li}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\frac{n^2\pi^2}{l^2}-\lambda^2}, \quad (A.29)$$

donde $\zeta(0)$ es la función zeta de Riemann. Sin embrago es necesario conocer la función de Green fuera de las placas la cual debe satisfacer las condiciones de frontera salientes en $g(z,z')=0, z=l$ y $z\to\infty, g(z,z')\sim e^{ikz}$. Se puede mostrar fácilmente que dicha función de Green reducida tiene la forma

$$g(z,z') = \frac{1}{\lambda}\left[\sin\lambda(z_<-l)e^{i\lambda(z_>-l)}\right]. \quad (A.30)$$

Donde $z_<(z_>)$ es el mayor (menor) de z y z'. Por lo tanto la correspondiente componente normal-normal del tensor de energía momento en $z=l^+$ es

$$\langle T_{zz}\rangle\Big|_{z\to l^+} \sim \frac{1}{2i}\partial_z\partial_{z'}g(z,z')\Big|_{z\to z'=l^+} = \frac{\lambda}{2}. \quad (A.31)$$

De esta forma la fuerza por unidad de área en las placas puede escribirse como

$$f = \frac{F}{L^2} = \int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}e^{ik\cdot(x-x')}\int\frac{d\omega}{2\pi}e^{i\omega(t-t')}\left[\frac{1}{li}\zeta(0)+\frac{\lambda^2}{li}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\frac{n^2\pi^2}{l^2}-\lambda^2}-\frac{\lambda}{2}\right]. \quad (A.32)$$

Es conveniente realizar el siguiente cambio de variable $\omega=i\eta$, $\lambda=i\varrho=i\sqrt{\rho^2+m_0^2}$ con $\rho^2=k^2+\eta^2$ y tratar a las dimensiones trasversales como una variable continua y compleja, la cual denotamos como d. Para realizar la suma en n empleamos la función zeta de Epstein [2, 4]

$$\begin{aligned} E_1^{\mathcal{M}^2}(z,\mathcal{A}) &= \sum_{N=1}^{\infty}\left(\mathcal{A}N^2+\mathcal{M}^2\right)^{-z}, \quad z=1, \quad \mathcal{A}=\frac{\pi^2}{l^2}, \quad (A.33)\\ &= \frac{1}{2\mathcal{M}^{2z}}+\left(\frac{\pi}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2\mathcal{M}^{2z-1}\Gamma(z)}\left[\Gamma\left(z-\frac{1}{2}\right)+4\sum_{\eta=1}^{\infty}\frac{l^{\frac{1-2z}{4}}}{(\pi\mathcal{M}\eta)^{\frac{1}{2}-z}}K_{\frac{1}{2}-z}\left(\frac{2\pi\mathcal{M}\eta}{l^{\frac{1}{2}}}\right)\right], \end{aligned}$$

donde $K_{-\frac{1}{2}}(x)$ es la función de Bessel de segundo tipo. De esta forma la suma en (A.32) toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\frac{n^2\pi^2}{l^2}-\lambda^2} &= -\frac{\varrho^2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\frac{n^2\pi^2}{l^2}+\varrho^2}, \quad (A.34)\\ &= -\frac{1}{2l}-\frac{\varrho}{2}-\frac{2\varrho\sqrt{l}}{\pi}\sum_{\eta=1}^{\infty}\frac{1}{(\pi\varrho\eta)^{-\frac{1}{2}}}K_{-\frac{1}{2}}(2l\varrho\eta), \quad (A.35) \end{aligned}$$

de acuerdo la las ecuaciones (A.32) y (A.35) la fuerza de Casimir por unidad de área está dada por

$$f = \int \frac{d^d\rho}{(2\pi)^d}\left[-\frac{1}{4l} - \frac{2\varrho\sqrt{l}}{\pi}\sum_{\eta=1}^{\infty}\frac{1}{(\pi\varrho\eta)^{-\frac{1}{2}}}K_{-\frac{1}{2}}(2l\varrho\eta)\right] \tag{A.36}$$

donde se ha tomado el límite en el cual los puntos del espacio tiempo coinciden. El termino $1/(4l)$ es un termino divergente y puede ser omitido por ser una función δ (término de contacto, ver [80]). Tomando el valor explícito de la función de Bessel se tiene

$$f = -\int \frac{d^d\rho}{(2\pi)^d}\sum_{\eta=1}^{\infty}\varrho e^{-2l\varrho\eta}. \tag{A.37}$$

Recordando la relación

$$\frac{1}{e^x-1} = \sum_{\eta=1}^{\infty} e^{-\eta x}, \tag{A.38}$$

la ecuación (A.37) puede escribirse como

$$f = -\int \frac{d^d\rho}{(2\pi)^d}\frac{\sqrt{\rho^2+m_0^2}}{e^{2\sqrt{\rho^2+m_0^2}l}-1}. \tag{A.39}$$

Esta integral puede evaluarse usando coordenadas polares

$$f = -\frac{A_{d+1}}{(2\pi)^{d+1}}\int_0^{\infty} d\rho\,\rho^d\frac{\sqrt{\rho^2+m_0^2}}{e^{2\sqrt{\rho^2+m_0^2}l}-1}, \quad A_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}. \tag{A.40}$$

A_d es el área de una esfera de radio uno en d dimensiones. Introduciendo una variable adimensional en la integral obtenemos la fuerza de Casimir por unidad de área de un campo escalar en d dimensiones

$$f = -\frac{1}{2^{2(d+1)}\pi^{\frac{d+1}{2}}\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)l^{d+2}}\int_{2m_0l}^{\infty} dx\,x^2\frac{\left[x^2-4m_0^2l^2\right]^{\frac{d-1}{2}}}{e^x-1}. \tag{A.41}$$

El campo escalar masivo fué tratado primero por Hays en dos dimensiones [48] y por Ambjørn y Wolfram [4]. Para $d=2$ la fuerza de Casimir puede escribirse como

$$f = -\frac{1}{32\pi^2}\frac{1}{l^4}\mathcal{F}(l,m_0), \tag{A.42}$$

$$\mathcal{F}(l,m_0) = \int_{2m_0l}^{\infty} dx\,x^2\frac{\sqrt{x^2-4m_0^2l^2}}{e^x-1}, \tag{A.43}$$

la cual se muestra en la figura A.1. Como caso particular, se puede analizar el caso de un campo escalar sin masa. De la ecuación (A.41) tenemos

$$f = -\frac{1}{2^{2(d+1)}\pi^{\frac{d+1}{2}}\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)a^{d+2}}\int_0^\infty dx\,\frac{x^{2+d-1}}{e^x-1}. \tag{A.44}$$

la cual podemos evaluar haciendo uso de la función zeta de Riemann

$$\int_0^\infty dy\frac{y^{s-1}}{e^y-1} = \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s), \tag{A.45}$$

para obtener la fuerza de Casimir por unidad de área como

$$f = -\frac{1}{2^{2(d+1)}\pi^{\frac{d+1}{2}}\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)a^{d+2}}\Gamma\left(1+\frac{d}{2}\right)\zeta(2+d). \tag{A.46}$$

En el caso en el que $d = 2$ se obtiene el siguiente resultado

$$f = -\frac{\pi^2}{480}\frac{1}{l^4}. \tag{A.47}$$

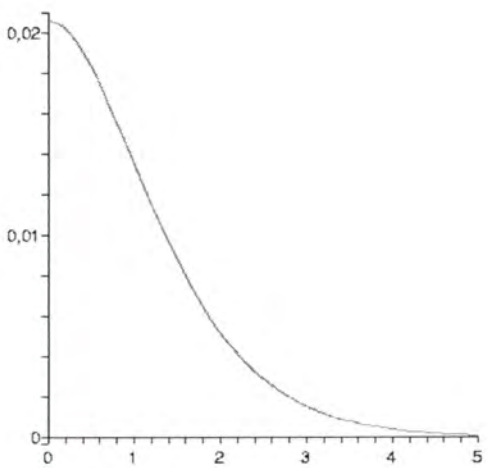


Figura A.1: *La figura muestra la fuerza de Casimir entre placas paralelas para un campo escalar masivo, ec. (A.42). La abscisa representa la variable $m_0 l$ y la ordenada a la variable $|fl^4|$.*

Apéndice

B Solución a la ecuación de Dirac en un campo externo

La intención de esta sección es mostrar de manera breve como se obtienen las soluciones a la ecuación de Dirac con un campo externo. Para un análisis mas detallado ver [1, 53, 68, 112]. El comienzo de este análisis es la ecuación de Dirac

$$\left(i\hbar\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - e\gamma^{\mu}A_{\mu} - mc^{2}\right)\phi = 0. \tag{B.1}$$

Donde $\hbar$ es la constante de Planck y c es la velocidad de la luz, e es la carga del electrón, A_{μ} son las cuatro componentes del potencial electromagnético (en este caso solo tomaremos la componente temporal de este potencial electromagnético $\mu = 0$), m es la masa del electrón y ϕ es la función de onda para el electrón. Reescribiendo la ecuación

$$E\phi =: \hbar\frac{\partial\phi}{\partial t} = \left[c\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} + mc^{2}\boldsymbol{\beta} + eA^{0}(r)\right]\phi =: \mathbf{H}_{D}\,\phi, \tag{B.2}$$

nos permite identificar al operador $\mathbf{H}_{D}$ como el Hamiltoniano de sistema. $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ son las matrices de Dirac

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}. \tag{B.3}$$

En (B.3) I es la matriz identidad de 2×2 y $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y \sigma_z)$ son las matrices de Paulin

$$I_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{B.4}$$

Los eigenestados de la ecuación (B.2) pueden tomar los siguientes casos; estados ligados con $-mc^2 < E < mc^2$, estados continuos con $E > mc^2$ y estados con energía $E < -mc^2$ negativa. Solo tomaremos en cuenta los estados ligados.

El momento angular total es $J = L + S$ donde L es el momento angular orbital y S es la matriz 4×4 de momento angular de espín.

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}. \tag{B.5}$$

Es conocido que J conmuta con el Hamiltoniano de Dirac $\mathbf{H}_D$ para un potencial con simetría esférica. De esta manera clasificaremos los eigenestados de $\mathbf{H}_D$ de acuerdo a los eigenvalores de energía, J^2 y J_z. Los eigenestados de J^2 y J_z pueden ser construidos usando la representación de dos componentes de S. Es conveniente tomar $\hbar = c = 1$.

Resulta conveniente combinar los armónicos esféricos $Y_{l\bar{m}}(\theta, \phi)$ los cuales son eigenestados de L^2 y L_z, con espinores de dos componentes χ_μ, los cuales son eigenestados de S^2 y S_z, para formar los espinores esféricos que son eigenestados de J^2 y J_z. Los espinores esféricos son denotados por $\Omega_{jl\bar{m}}(\theta, \phi)$ y son definidos por la ecuación

$$\Omega_{jl\bar{m}}(\theta, \phi) = \sum_{\mu} C(l, 1/2, j; \bar{m} - \mu, \mu, \bar{m}) Y_{l\bar{m}-\mu}(\theta, \phi) \chi_\mu. \tag{B.6}$$

$C(l, 1/2, j; \bar{m} - \mu, \mu, \bar{m})$ son los coeficientes de Clebsch-Gordan [77]. Los espinores de dos componentes χ_μ con $\mu = \pm 1/2$ son

$$\chi_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{B.7}$$

De esta forma podemos obtener la representación de dos componentes para los espinores

esféricos para los dos posibles valores de $j = l \pm 1/2$

$$\Omega_{l+\frac{1}{2}\,l\,\bar{m}}(\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{l+\bar{m}+\frac{1}{2}}{2l+1}}\,Y_{l\,\bar{m}-\frac{1}{2}}(\theta,\phi) \\ \sqrt{\frac{l-\bar{m}+\frac{1}{2}}{2l+1}}\,Y_{l\,\bar{m}+\frac{1}{2}}(\theta,\phi) \end{pmatrix}, \tag{B.8}$$

$$\Omega_{l-\frac{1}{2}\,l\,\bar{m}}(\theta,\phi) = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{l-\bar{m}+\frac{1}{2}}{2l+1}}\,Y_{l\,\bar{m}-\frac{1}{2}}(\theta,\phi) \\ \sqrt{\frac{l+\bar{m}+\frac{1}{2}}{2l+1}}\,Y_{l\,\bar{m}+\frac{1}{2}}(\theta,\phi) \end{pmatrix}. \tag{B.9}$$

Los espinores esféricos son eigenestados de $\boldsymbol{\sigma}\cdot L$ y por lo tanto del operador

$$K = 1 - \boldsymbol{\sigma}\cdot L \tag{B.10}$$

La ecuación de eigenvalores para K es

$$K\Omega_{jl\bar{m}}(\theta,\phi) = \bar{k}\Omega_{jl\bar{m}}(\theta,\phi) \tag{B.11}$$

Donde los eigenvalores son $\bar{k} = -l-1$ para $j = l+\frac{1}{2}$ y $\bar{k} = l-1$ para $j = l-\frac{1}{2}$. Esos dos valores pueden ser resumidos como $\bar{k} = \mp(j+\frac{1}{2})$ para $j = l \pm \frac{1}{2}$. Los valores de $\bar{k}$ determinan ambos j y l. De esta manera $\Omega_{\bar{k}\,\bar{m}} \equiv \Omega_{j\,l\,\bar{m}}$ es más adecuada para usarse. Los espinores esféricos satisfacen la siguiente relación de ortogonalidad

$$\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \Omega^{\dagger}_{\bar{k}'\,\bar{m}'}(\theta,\phi)\Omega_{\bar{k}\,\bar{m}}(\theta,\phi) = \delta_{\bar{k}'\bar{k}}\delta_{\bar{m}'\bar{m}}. \tag{B.12}$$

Una propiedad importante que satisfacen los espinores esféricos es la siguiente

$$\vec{\sigma}\cdot\hat{r}\Omega_{\bar{k}\bar{m}}(\theta,\phi) = -\Omega_{-\bar{k}\bar{m}}(\theta,\phi), \tag{B.13}$$

donde $\hat{r} = \vec{r}/r$. Consideremos el operador $\boldsymbol{\sigma}\cdot\vec{p}$ el cual puede escribirse como

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{p} = \vec{\sigma}\cdot\hat{r}\vec{\sigma}\cdot\hat{r}\vec{\sigma}\cdot\vec{p} = -i\vec{\sigma}\cdot\hat{r}\left[i\hat{r}\cdot\vec{p} - \frac{\vec{\sigma}\cdot(\vec{r}\times\vec{p})}{r}\right], \tag{B.14}$$

donde se ha empleado la siguiente identidad

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{A}\vec{\sigma}\cdot\vec{B} = \vec{A}\cdot\vec{B} + i\vec{\sigma}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}), \tag{B.15}$$

de la ecuación (B.14) se puede ver que

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{p}f(r)\Omega_{\bar{k}\bar{m}}(\theta,\phi) = i\left[\frac{df}{dr} + \frac{\bar{k}+1}{r}f\right]\Omega_{\bar{k}\bar{m}}(\theta,\phi). \tag{B.16}$$

Las identidades (B.14) y (B.16) resultan importantes en la reducción de la ecuación radial de Dirac para un campo central. Las soluciones de la ecuación de Dirac con un potencial con simetría esférica $A^0(r)$ para un estado con energía E y números cuánticos (km) de momento angular toman la forma

$$\phi_{\bar{k},\bar{m}} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} G(r)\Omega_{\bar{k},\bar{m}}(\theta,\phi) \\ iF(r)\Omega_{-\bar{k},\bar{m}}(\theta,\phi) \end{pmatrix}. \tag{B.17}$$

Sustituyendo esta ecuación en la ecuación de Dirac (B.2) y con ayuda de las ecuaciones (B.14) y (B.16), las funciones radiales satisfacen el conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas

$$G' + \frac{k}{r}G = [\lambda_1 - V(r)]\,F, \tag{B.18}$$

$$F' - \frac{k}{r}F = -[-\lambda_2 - V(r)]\,G, \tag{B.19}$$

donde $\lambda_1 = m + E$, $\lambda_2 = m - E$, $V(r) = eA^0(r)$. La condición de normalización para $\phi_{km}(r)$

$$\int \phi^{\dagger}_{\bar{k}\bar{m}}(r)\phi_{\bar{k}\bar{m}}(r)dr^3 = 1 \tag{B.20}$$

toma la siguiente forma

$$\int_0^{\infty} \left[F^2(r) + G^2(r)\right] dr = 1. \tag{B.21}$$

La eigenfucniones y sus eigenvalores asociados E pueden ser determinados analíticamente para el potencial de Coulomb $V(r) = -\frac{e^2}{r}$. En muchos otros casos el problema puede resolverse numéricamente

El primer paso de este análisis es examinar estas ecuaciones para valores de r muy grandes. Reteniendo únicamente el termino dominante cuando $r \to \infty$ en la ecuaciones (B.18) y (B.19), hallamos

$$G' = \lambda_1 F \tag{B.22}$$

$$F' = \lambda_2 G \tag{B.23}$$

Este par de ecuaciones puede ser escrita como una ecuación de segundo orden para $G(r)$ como

$$G'' - \lambda^2 G = 0, \quad \text{con}, \quad \lambda^2 = \lambda_1\lambda_2 = m^2 - E^2 \tag{B.24}$$

La cual tiene dos soluciones linealmente independientes $e^{\pm\lambda r}$. La solución física aceptable es

$$G(r) = e^{-\lambda r}. \tag{B.25}$$

La correspondiente solución para $F(r)$ está dada por

$$F(r) = \sqrt{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} e^{-\lambda r}. \tag{B.26}$$

Factorizando el comportamiento asintótico de $G(r)$ y $F(r)$ se tiene

$$G = -\sqrt{1 + \frac{E}{mc^2}}\, e^{-\frac{\rho}{2}} [H(\rho)_1 + H_2(\rho)] \tag{B.27}$$

$$F = \sqrt{1 - \frac{E}{mc^2}}\, e^{-\frac{\rho}{2}} [H(\rho)_1 - H_2(\rho)] \tag{B.28}$$

donde $\rho = 2\lambda r$. Sustituyendo estas en (B.18) y (B.19) se halla que las funciones H_1, H_2 satisfacen el conjunto de ecuaciones acopladas

$$H_1'(\rho) = \left[\frac{\alpha m}{\lambda\rho} - \frac{\bar{k}}{\rho}\right] H_2(\rho) + \frac{\alpha E}{\lambda\rho}(\rho), \tag{B.29}$$

$$H_2'(\rho) = \left[1 - \frac{\alpha E}{\lambda\rho}\right] H_2(\rho) - \left[\frac{\bar{k}}{\rho} + \frac{\alpha m}{\lambda\rho}\right] H_1(\rho), \tag{B.30}$$

Resolviendo el sistema para H_1 tenemos

$$\rho H_1'' + (1-\rho) H_1' - \left[\frac{\gamma^2}{\rho} - \frac{\alpha}{\lambda}\frac{E}{\hbar c}\right] H_1 = 0 \tag{B.31}$$

con $\gamma^2 = k^2 - \alpha^2$. Podemos estudiar el comportamiento de esta ecuación para $\rho \to 0$ proponiendo que $H_1 = \rho^\gamma H$. De esta forma obtenemos la ecuación para H

$$\rho H'' + (2\gamma + 1 - \rho) H' - \left[\gamma - \frac{\alpha E}{\lambda}\right] H = 0 \tag{B.32}$$

Las soluciones de (B.32) son regulares en el origen y son las funciones hipergeometricas

$$H(\rho) = {}_1F_1\left(\gamma - \frac{\alpha E}{\lambda}, 2\gamma + 1, \rho\right). \tag{B.33}$$

Por lo tanto

$$H_1(\rho) = \rho^\gamma {}_1F_1\left(\gamma - \frac{\alpha E}{\lambda\hbar c}, 2\gamma + 1, \rho\right). \tag{B.34}$$

La función H_2 puede ser expresada en términos de la función hipergeométrica usando (B.29). Se tiene

$$H_2 = \frac{\rho^\gamma}{\frac{\alpha m}{\lambda} - \bar{k}} \left[\rho H' + \left(\gamma - \frac{\alpha E}{\lambda} \right) H \right] = \rho^\gamma \frac{\gamma - \frac{\alpha E}{\lambda}}{\frac{\alpha m}{\lambda} - \bar{k}} {}_1F_1 \left(\gamma - \frac{\alpha E}{\lambda} + 1, 2\lambda + 1, \rho \right) \tag{B.35}$$

Combinando estos resultados se obtiene las siguientes expresiones para la función radial de Dirac

$$G = -\sqrt{1 + \frac{E}{m}} e^{-\frac{\rho}{2}} \rho^\gamma \left[\left(N - \bar{k} \right) {}_1F_1 \left(a, b, \rho \right) + a_1F_1 \left(a + 1, b, \rho \right) \right] \tag{B.36}$$

$$F = \sqrt{1 - \frac{E}{m}} e^{-\frac{\rho}{2}} \rho^\gamma \left[\left(N - \bar{k} \right) {}_1F_1 \left(a, b, \rho \right) - a_1F_1 \left(a + 1, b, \rho \right) \right] \tag{B.37}$$

con

$$a = \gamma - \frac{\alpha E}{\lambda}, \quad b = 2\lambda + 1, \quad N = \frac{\alpha m}{\lambda}. \tag{B.38}$$

En seguida se analiza ahora el problema de eigenvalores. Primero se considera el comportamiento de las funciones radiales para $r \to \infty$. Se tiene

$$F(a, b, x) \to \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^x x^{a-b} \left[1 + O\left(|x|^{-1} \right) \right], \tag{B.39}$$

$$aF(a + 1, b, x) \to \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^x x^{a+1-b} \left[1 + O\left(|x|^{-1} \right) \right]. \tag{B.40}$$

La función de onda resultante crece exponencialmente a menos que el coeficiente de la exponencial en ambas ecuaciones sea cero. Esto ocurre en los polos de $\Gamma(a)$ los cuales se localizan en los puntos $a = -n_r$, donde $n_r = 0, -1, -2, \ldots$. Se define al número cuántico principal $\bar{n} = n_r + \mathrm{k}$, donde $\mathrm{k} = |\bar{k}| = j + 1/2$. La ecuación de eigenvalores es $a = -(n - \mathrm{k})$ y puede ser escrita como

$$\frac{E}{\lambda} = \gamma + \bar{n} - \mathrm{k}. \tag{B.41}$$

El caso $a = -n_r = 0$ requiere atención especial. En este caso se resuelve la ecuación de eigenvalores para $\mathrm{k} = 1/\lambda$. De esto se sigue que los dos factores $-\bar{k} + 1/\lambda$ y $\gamma + E/\lambda$ en las ecuaciones (B.36) y (B.37) sean cero para $\bar{k} > 0$. Soluciones no triviales pueden ocurrir para $\bar{k} < 0$. Por lo tanto para un valor de $\bar{n}$ hay $2\bar{n} - 1$ posibles eigenfunciones; $\bar{n}$ eigenfunciones con $\bar{k} = -1, -2, \cdots -, \bar{n}$ y $\bar{n} - 1$ eigenfunciones con $\bar{k} = 1, 2, \ldots, \bar{n} - 1$. Resolviendo la ecuación

de eigenvalores (B.41) para E se llega a

$$E = \frac{m}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{(\gamma + \bar{n} - \mathrm{k})^2}}}. \tag{B.42}$$

Es interesante hacer notar que los niveles de energía de Dirac dependen únicamente de $\mathrm{k} = |\bar{k}|$. Todos esos niveles tienen los mismos valores de $\bar{n}$ y j, pero diferentes valores de l, así que son degenerados. Normalizando las funciones F y G de acuerdo a (B.21) requiere

$$N_{\bar{n},\bar{k}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{N\Gamma(2\gamma+1)} \sqrt{\frac{\Gamma(\bar{n} - \mathrm{k} + 1 + 2\gamma)}{2(\bar{n} - \mathrm{k})!(N - \bar{k})}}. \tag{B.43}$$

Finalmente las funciones radiales de Dirac toman la forma

$$G = -\sqrt{1 + \frac{E}{m}}\, N_{\bar{n},\bar{k}} e^{-\frac{\rho}{2}} \rho^{\gamma} \left[\left(N - \bar{k}\right) {}_1F_1\left(a, b, \rho\right) + a\, {}_1F_1\left(a+1, b, \rho\right) \right], \tag{B.44}$$

$$F = \sqrt{1 - \frac{E}{m}}\, N_{\bar{n},\bar{k}} e^{-\frac{\rho}{2}} \rho^{\gamma} \left[\left(N - \bar{k}\right) {}_1F_1\left(a, b, \rho\right) - a\, {}_1F_1\left(a+1, b, \rho\right) \right]. \tag{B.45}$$

Es interesante hacer notar que los niveles de energía de Dirac dependen únicamente de $\mathrm{k} = |\bar{k}|$. Todos esos niveles tienen los mismos valores de $\bar{n}$ y j, pero diferentes valores de l por loa que son degenerados.

Otra característica importante que vale la pena mencionar es que la razón de los factores numéricos en (B.44) y (B.45) es $\sqrt{(1 + E/m)/(1 - E/m)} \approx \alpha/2\bar{n}$. Así F es varios ordenes más pequeño que G, por esta razón F y G son llamadas las componentes pequeñas y grandes de las funciones radiales de Dirac.

Explícitamente el estado base $1S_{1/2}$ del electrón para el átomo de Hidrógeno en el estado $\bar{n} = 1$, $\bar{k} = -1$, $\mathrm{k} = 1$, $\gamma = \sqrt{1 - \alpha^2}$, $E_{1-1} = \gamma$, $N = 1$,$\lambda = 1$ y $\rho = 2r$, por lo tanto

$$G_{1-1}(r) = \sqrt{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{2}{\Gamma\left(2\gamma+1\right)}} \left(2r\right)^{\gamma} e^{-r}, \tag{B.46}$$

$$F_{1-1}(r) = \sqrt{\frac{1-\gamma}{2}} \sqrt{\frac{2}{\Gamma\left(2\gamma+1\right)}} \left(2r\right)^{\gamma} e^{-r}. \tag{B.47}$$

Apéndice

C Cálculo del corrimiento Lamb en electrodinámica cuántica

En 1947 Willis Lamb y Robert Retherford descubrieron una pequeña diferencia entre los niveles de energía del electrón dentro del átomo de Hidrógeno vinculados a los estados $2S_{1/2}$ y $2P_{1/2}$ [113]. Esta diferencia de energía tenia una magnitud de 1062(5) MHz que no podía ser explicada por la mecánica cuántica relativista, pues en la teoría cuántica del átomo de Hidrógeno esos dos estados cuánticos tienen el mismo valor de la energía.

Actualmente este efecto puede ser explicado por la electrodinámica cuántica. En esta teoría dos de los principales efectos que permiten explicar el corrimiento Lamb son: la auto energía del electrón y la polarización del vacío. Dentro de los primeros cálculos teóricos de la auto energía el principal problema que se tenía era que dicho valor resultaba ser infinito. Sin embargo Hans Bethe pudo evaluar la contribución de la auto energía usando la idea de renormalización propuesta por Kramer, obteniendo el valor de 1,040 MHz. Clásicamente la auto energía es la interacción de una distribución de carga consigo misma. En términos de la electrodinámica cuántica esto implica la emisión y reabsorción de un fotón virtual por una partícula cargada.

La polarización del vacío puede entenderse como el acoplamiento de una partícula cargada a

un par virtual electrón-positrón a través de un fotón, esto modifica al potencial de Coulomb incrementando la energía del estado $2S_{1/2}$ por una cantidad de 27 MHz relativo al estado $2P_{1/2}$. Otros de los efectos del mismo orden que inducen correcciones nucleares son: momento magnético, efecto de retroceso, factores de forma, etc. Estos pueden verse en la tabla (C). El resultado para el corrimiento Lamb está dado por

$$\delta_{\bar{n}jl} = \frac{4m}{3\pi\bar{n}^3} Z^4\alpha^5 \left[L_{\bar{n}l} + \left(\frac{19}{30} - 2\ln(Z\alpha) \right) \delta_{l0} \pm \frac{3}{4} \frac{1}{(2j+1)(2l+1)} (1-\delta_{l0}) \right]. \qquad \text{(C.1)}$$

$L_{\bar{n}l}$ está definida por la ecuación (C.32), $\bar{n}$ es el numero cuántico principal, l es en número de momento angular orbital y α es la constante de estructura fina. El cambio Lamb es en general muy pequeño, excepto para $l = 0$.

Contribución	ΔE [MHz]
$\alpha(Z\alpha)^4$	+1050.559
$\alpha(Z\alpha)^5$	+7.129
$\alpha(Z\alpha)^6$	-0.419
$\alpha^2(Z\alpha)^4$	+0.101
Efecto de retroceso	+0.358
Radio finito	+0.127
Total	+1057.855

Tabla C.1: Contribuciones de los diferentes efectos a la separación de los estados $2S_{1/2}$ y $2P_{1/2}$ en el átomo de Hidrógeno

El propósito de este apéndice es mostrar los cálculos del corrimiento Lamb a primer orden en la constante de estructura fina α (un lazo) de forma breve, como se presentan el los libros de texto [53, 111, 7]. Técnicas mas recientes para calcular el corrimiento Lamb y cálculos a segundo orden en α (dos lazos) se muestran en [58, ?, ?].

El cálculo del corrimiento Lamb se separa en dos pasos:

1. Si el fotón virtual tiene energía alta: $\omega \geq K \gg (Z\alpha)^2 m$, el efecto del potencial de

Coulomb puede ser despreciado y se pueden usar los estados libres para los cálculos.

2. Si el fotón virtual emitido tiene energía baja $\omega \leq K \ll (Z\alpha)^2 m$, los estados iniciales, intermedios y finales son todos no relativistas. Así se emplea la teoría de perturbaciones.

Considerando que Ze denota la carga eléctrica, α la constante de estructura fina y m la masa de la partícula, K es momento de corte tridimensional de los fotones virtuales tales que $(Z\alpha)^2 m \ll K \ll m$.

Contribución a altas frecuencias. Calculemos el cambio de energía de un estado ψ_ν debido a la emisión de un fotón virtual de alta energía. ν denota los números cuánticos $(\bar{n}, j, l, \bar{m})$. Examinemos la energía de interacción de un electrón con un campo estático externo A_μ

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \int dx^3 j_\mu A^\mu = e \int dx^3 \psi^\dagger \left[\gamma_\mu + \Gamma_\mu(p,p') + \frac{i\Pi^R_{\mu\nu}}{4\pi} i D_F^{\nu\sigma} \gamma_\sigma \right] \psi A^\mu \tag{C.2}$$

$$\Gamma_\mu = \gamma_\mu F_1(q^2) + i\frac{\sigma_{\mu\nu}q^\nu}{2m} F_2(q^2), \quad F_1(q^2) \simeq \frac{\alpha}{3\pi}\frac{q^2}{m^2}\left[\ln\left(\frac{m}{\mu}\right) - \frac{3}{8}\right], \quad F_2(q^2) \simeq \frac{\alpha}{2\pi}$$

$$= \gamma_\mu \frac{\alpha}{3\pi}\frac{q^2}{m^2}\left[\ln\left(\frac{m}{\mu}\right) - \frac{3}{8}\right] + i\frac{\alpha}{2\pi}\frac{\sigma_{\mu\nu}q^\nu}{2m} \tag{C.3}$$

$$\Pi^R_{\mu\nu}(q^2) = \left(q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu\right)\Pi^R(q^2), \quad \Pi^R(q^2) \simeq -\frac{\alpha}{\pi}\frac{q^2}{m^2}\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{140}\frac{q^2}{m^2} + \ldots\right) \tag{C.4}$$

$$D_F^{\nu\sigma} = -\frac{4\pi^{\nu\sigma}}{q^2} \tag{C.5}$$

donde $\Gamma_\mu(p,p')$ es la función de vértice, las funciones $F_1(q^2)$ y $F_2(q^2)$ son las llamados factores de forma y $\sigma_{\mu\nu} = i/2\,[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$. $\Gamma_\mu(p,p')$ viene de la cual corrección de vértice, el termino $\Pi^R_{\mu\nu}$ viene de la polarización del vacío. De las ecuaciones (C.4), (C.5) y considerando valores pequeños de q^2 se tiene

$$\frac{i\Pi^R_{\mu\nu}}{4\pi} i D_F^{\nu\sigma}\gamma_\sigma \simeq -\gamma_\mu \frac{\alpha}{3\pi}\frac{q^2}{m^2}\frac{1}{5} + \ldots \tag{C.6}$$

Esto conduce a una ecuacuón de Dirac modificada de la forma

$$\left[i\gamma^\mu \partial_\mu - m - \left\{ \gamma_\rho \left[1 - \frac{\alpha}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{\mu} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5}\right)\Box \right] + \frac{\alpha}{2\pi}\frac{\sigma_{\nu\rho}}{2m}\partial_\nu \right\} eA^\rho(x) \right] \psi(x) = 0 \tag{C.7}$$

La cual incluye correciones a la polarizaciçon del vacio y de vertice. La corrección debido a la auto energía contribuye únicamente a la renormalización de la carga y la masa para

partículas libres. La figura muestra las contribuciones de la interacción del fermión con el campo externo.

Los términos adicionales pueden tomarse como perturbaciones a la ecuación de Dirac con campo externo como el potencial de Coulomb, así los estados no perturbados $\psi(x)$ son solución a la ecuación de Dirac

$$\mathbf{H}_0\psi_\nu = [i\gamma^\mu\partial_\mu - m - e\gamma^\mu A_\mu]\,\psi(x) = 0, \quad A^\mu = \frac{e^2}{4\pi r}g^{0\mu}, \quad r = |x| \tag{C.8}$$

Los cuales han sido discutidos en el capitulo 4. De acuerdo a la teoría de perturbaciones el cambio de energía a primer orden es dado por

$$\delta E^{>} = \int dx^3\psi^\dagger(x)\left[\frac{\alpha}{3\pi}\frac{q^2}{m^2}\left[\ln\left(\frac{m}{\mu}\right) - \frac{3}{8} - \frac{1}{5}\right] + i\frac{\alpha}{2\pi}\frac{\sigma_{\mu\nu}q^\nu}{2m}\right]\psi(x) \tag{C.9}$$

$$= e\alpha\int dx^3\psi^\dagger(x)\left[\frac{1}{3\pi m^2}\left[\ln\left(\frac{m}{\mu}\right) - \frac{3}{8} - \frac{1}{5}\right]\nabla^2 A^0(x) + \frac{i}{4\pi m}\gamma\cdot E(x)\right]\psi(x) \tag{C.10}$$

Donde se ha usado $q^2 = q_0^2 - \mathbf{q}^2 = -(\partial^2/\partial l^2 - \nabla^2)$. Debido a que el potencial A^0 es estático, únicamente la parte espacial contribuye. El momento de corte K juega el papel de ΔE, la cual es la energía por bajo de la cual los fotones no son observados. Ello permite aproximar

$$\ln\left(\frac{m}{\mu}\right) \to \ln\left(\frac{m}{2K}\right) + \frac{5}{6}. \tag{C.11}$$

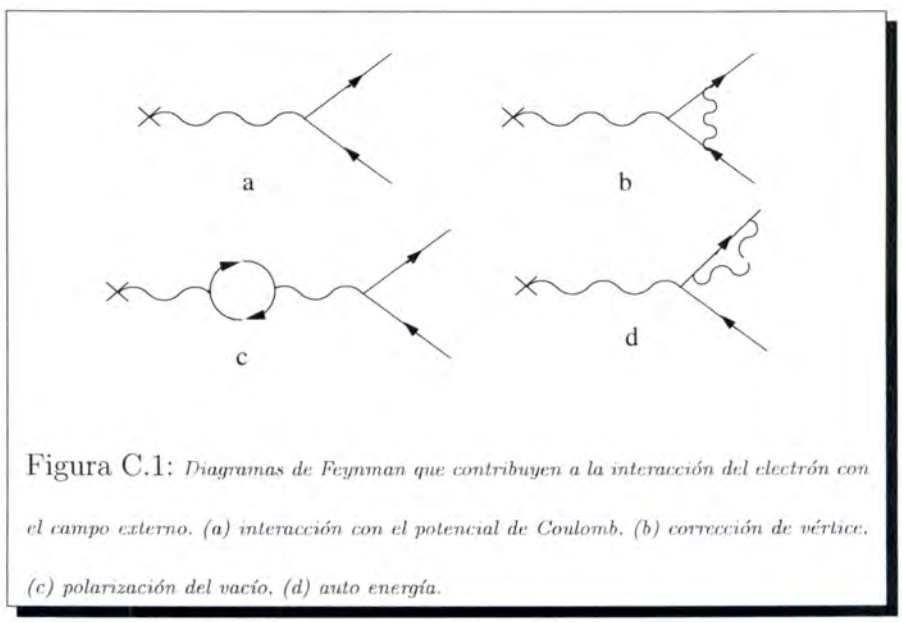


Figura C.1: *Diagramas de Feynman que contribuyen a la interacción del electrón con el campo externo. (a) interacción con el potencial de Coulomb, (b) corrección de vértice, (c) polarización del vacío, (d) auto energía.*

Con esto los cambios de energía toman la forma

$$\delta E^{>} = \delta E^{(1)} + \delta E^{(2)}, \tag{C.12}$$

donde

$$\delta E^{(1)} = \frac{e\alpha}{3\pi m^2}\left[\left(\frac{m}{2K}\right) + \frac{5}{6} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5}\right]\langle\nu|\nabla^2 A^0(x)|\nu\rangle \tag{C.13}$$

$$\delta E^{(2)} = \frac{-ie\alpha}{4\pi m}\langle\nu|\gamma\cdot\nabla A^0(x)|\nu\rangle = \frac{e\alpha}{8\pi m^2}\left[\langle\nu|\nabla^2 A^0(x)|\nu\rangle + 4\left\langle\nu\left|\frac{1}{r}\frac{dA^0}{dr}\mathbf{S}\cdot\mathbf{L}\right|\nu\right\rangle\right] \tag{C.14}$$

Contribución a bajas frecuencias. Deseamos evaluar el cambio de energía $\delta E^{<}$ debido a la emisión y reabsorción de fotones con frecuencia $\omega < K$ en la teoría de perturbaciones no relativista. El problema no perturbado es descrito por la ecuación de Schrödinger

$$\left(-\frac{1}{2m}\nabla^2 + eA^0(x)\right)\psi_\nu = E\psi_\nu. \tag{C.15}$$

Adicionalmente hay un operador

$$\mathbf{H}' = 2\frac{ie}{2m}\mathbf{A}\cdot\nabla \tag{C.16}$$

donde $\mathbf{A}$ es el potencial del campo de radiación (en la norma transversal). El cambio de energía usando teoría de perturbaciones a segundo orden es

$$\delta E_\nu^{<} = \sum_{\nu',k,\lambda}\frac{|\langle\nu' k,\lambda|\mathbf{H}'|\nu\rangle|^2}{E_\nu - (E_{\nu'}+\omega)}. \tag{C.17}$$

Aquí debemos sumar o integrar sobre todos los estados del electrón virtuales ν' y su momento k y polarización λ. Con la normalización y factores del espacio fase del campo del fotón (C.17) se vuelve

$$\delta E_\nu^{<} = \sum_{\nu'}\sum\lambda\int_{\omega<K}\frac{dk^3}{2\omega(2\pi)^3}\frac{4\pi\alpha}{(2m)^3}\frac{|\langle\nu'|2ie^{k\cdot x}\epsilon(k,\lambda)|\nu\rangle|^2}{E_\nu - E_{\nu'} - \omega}. \tag{C.18}$$

Podemos simplificar los cálculos. haciendo la aproximación de onda grande $k\cdot x \leq Ka_B = K/(Z\alpha m)$. Elegimos K de forma que la exponencial sea pequeña en la región permitida y reemplazamos $e^{ik\cdot x}$ por uno. Para los vectores de polarización es útil considerar la siguiente relación de completez

$$\int d\Omega_k\sum_{\lambda=1}^{2}\epsilon_i^*(k,\lambda)\epsilon_j(k,\lambda) = \frac{2}{3}4\pi\delta_{ij}. \tag{C.19}$$

Con esta relación podemos sumar sobre las polarizaciones e integr sobre el ángulo sólido del campo del fotón. De esta forma la ecuación (C.18) puede escribirse como

$$\delta E_\nu^< = \frac{2\alpha}{3\pi}\int_0^K d\omega\,\omega \sum_{\nu'} \frac{\left|\left\langle \nu' \left| \frac{-i\nabla}{m} \right| \nu \right\rangle\right|^2}{E_\nu - E_{\nu'} - \omega}. \tag{C.20}$$

La ecuación (C.20) no es del todo correcta, debido a que no toma en cuenta la renormalización de la masa. Para obtener el cambio de la energía físico debemos restar el cambio de energía del operador de velocidad para electrones libre. La expresión renormalizada para el cambio de energía puede escribirse como

$$\left(\delta E^<\right)_{\text{ren}} = \delta E_\nu^< - \delta E_{\text{libre}}^< \tag{C.21}$$

donde

$$\delta E_{\text{libre}}^< = \frac{2\alpha}{3\pi}\int_0^K d\omega\,\omega \frac{v^2}{-\omega}. \tag{C.22}$$

Insertando (C.23) en (C.21) y realizando la integral en ω el cambio de energía renormalizado es

$$\left(\delta E_\nu^<\right)_{\text{ren}} = \frac{2\alpha}{3\pi}\sum_{\nu'} \left|\left\langle \nu' \left| \frac{-i\nabla}{m} \right| \nu \right\rangle\right|^2 (E_{\nu'} - E_\nu) \ln \frac{K}{E_{\nu'} - E_\nu}. \tag{C.23}$$

No es posible realizar la suma analíticamente, sin embargo es posible reescalar el logaritmo de acuerdo a

$$\ln \frac{K}{E_{\nu'} - E_\nu} = \ln \frac{2K}{m} - 2\ln(Z\alpha) + \ln \frac{(Z\alpha)^2 m}{2|E_{\nu'} - E_\nu|} \tag{C.24}$$

los dos primeros términos son independientes de ν', así la suma sobre estados intermedios en (C.23) puede rescribirse reemplazando los eigenvalores de energía por el Hamiltoniano $\mathbf{H}_0$ como

$$S = \left|\left\langle \nu' \left| \frac{-i\nabla}{m} \right| \nu \right\rangle\right|^2 (E_{\nu'} - E_\nu) = -\frac{1}{2m^2} \left\langle \nu \left| [\mathbf{p}, [\mathbf{p}, \mathbf{H}_0]] \right| \nu \right\rangle. \tag{C.25}$$

Es útil recordar

$$[\mathbf{p}, \mathbf{H}_0] = -ie\left[\nabla, A^0\right] = -ie\nabla A^0 \tag{C.26}$$

así la suma sobre ν puede escribirse como

$$S = \frac{e}{2m^2} \left\langle \nu \left| \nabla^2 A^0 \right| \nu \right\rangle. \tag{C.27}$$

Finalmente el cambio de energía debido a fotones con longitud de onda grande es

$$(\delta E_\nu^<)_{\text{ren}} = \frac{e\alpha}{3\pi m^2}\left[\ln\frac{2K}{m} - 2\ln(Z\alpha)\right]\left\langle\nu\left|\nabla^2 A^0\right|\nu\right\rangle + \frac{2\alpha}{3\pi}\sum_{\nu'}\left|\left\langle\nu'\left|\frac{-i\nabla}{m}\right|\nu\right\rangle\right|^2 (E_{\nu'}-E_\nu)\ln\frac{(Z\alpha)^2 m}{2|E_{\nu'}-E_\nu|}. \quad \text{(C.28)}$$

La contribución a la energía total es la suma de las ecuaciones (C.12) y (C.28). El término logarítmico $\ln(2K/m)$ se cancela, por lo tanto el resultado es independiente de la elección de K. La energía total está dada por

$$\delta E_\nu = \frac{e\alpha}{3\pi m^2}\left[\frac{5}{6}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}+\frac{3}{8}-2\ln(Z\alpha)\right]\langle\nu|\nabla^2 A^0(x)|\nu\rangle + \frac{e\alpha}{2\pi m^2}\left\langle\nu\left|\frac{1}{r}\frac{dA^0}{dr}\mathbf{S}\cdot\mathbf{L}\right|\nu\right\rangle + \frac{2\alpha}{3\pi}\sum_{\nu'}\left|\left\langle\nu'\left|\frac{-i\nabla}{m}\right|\nu\right\rangle\right|^2 (E_{\nu'}-E_\nu)\ln\frac{(Z\alpha)^2 m}{2|E_{\nu'}-E_\nu|}. \quad \text{(C.29)}$$

Para evaluar los elementos de matriz de (C.29), recordemos que $\nabla^2 A^0 = 4\pi Ze\delta(x)$ y de esta forma

$$\left\langle\nu\left|\nabla^2 A^0\right|\nu\right\rangle = 4\pi Ze\left|\psi_\nu(0)\right|^2 = 4\pi Ze\frac{(Z\alpha)^3 m^3}{\pi n^3}\delta_{l0}. \quad \text{(C.30)}$$

Los elementos de matriz $\mathbf{S}\cdot\mathbf{L}$ son iguales a $(1-\delta_{l,0})\left[j(j+1)-l(l+1)-\frac{3}{4}\right]$. Además $\left\langle\nu\left|\frac{1}{r}\frac{dA^0}{dr}\right|\nu\right\rangle = \left\langle\nu\left|\frac{1}{|x|}\right|\nu\right\rangle$ tiene la forma explícita

$$\left\langle\nu\left|\frac{1}{|x|}\right|\nu\right\rangle = \frac{2}{l(l+1)(2l+1)n^3}(Zm\alpha)^3. \quad \text{(C.31)}$$

Definimos la cantidad

$$L_{nl} = \frac{n^3}{2m(Z\alpha)^4}\sum_{\nu'}\left|\left\langle\nu'\left|\frac{-i\nabla}{m}\right|\nu\right\rangle\right|^2 (E_{\nu'}-E_\nu)\ln\frac{(Z\alpha)^2 m}{2|E_{\nu'}-E_\nu|} \quad \text{(C.32)}$$

que es conocida como el logaritmo de Bethe y es evaluada numéricamente. Introduciendo (C.30-C.32) tenemos la expresión para el cambio de energía de un nivel atómico

$$\delta_{\bar{n}jl} = \frac{4m}{3\pi\bar{n}^3}Z^4\alpha^5\left[L_{nl}+\left(\frac{19}{30}-2\ln(Z\alpha)\right)\delta_{l0}\pm\frac{3}{4}\frac{1}{(2j+1)(2l+1)}(1-\delta_{l0})\right] \quad \text{(C.33)}$$

para estados con $j = l \pm 1/2$. Para un átomo de Hidrógeno, $Z = 1$, $L_{\bar{n}l}$ toma los valores

$$L_{20} \simeq -2.81177, \quad \text{(C.34)}$$

$$L_{21} \simeq 0.03002. \quad \text{(C.35)}$$

Para el átomo de Hidrógeno los cambios de energía para los estados $2S_{1/2}$ y $2P_{1/2}$ son

$$\delta E_{2s_{1/2}} = \frac{4m}{3\pi 2^3}\alpha^5\left[-2.81177 - 2\ln\alpha + \frac{19}{30}\right] = 1039.3\,\text{MHz} \tag{C.36}$$

$$\delta E_{2p_{1/2}} = \frac{4m}{3\pi 2^3}\alpha^5\left[0.03002 - \frac{1}{8}\right] = -12.9\,\text{MHz} \tag{C.37}$$

donde la energía está expresada en frecuencias usando $\delta E = 2\pi\hbar\nu$. El resultado del corrimiento Lamb para el átomo de Hidrógeno es

$$\delta E_{\text{teórico}} = \delta E_{2S_{1/2}} - \delta E_{2P_{1/2}} = 1052.2\,\text{MHz} \tag{C.38}$$

Este valor concuerda muy bien con el valor experimental reportado [107].

$$\delta E_{\text{experimental}} = 1057.8449(3.2)\,\text{MHz} \quad \left[3. \times 10^{-6}\right]. \tag{C.39}$$

Para mejorar el resultado teórico es necesario considerar correcciones de orden mayor en $(Z\alpha)$, en particular estas correcciones involucran $\alpha(Z\alpha)^5$, $\alpha^2(Z\alpha)^4$, correcciones de retroceso debido a que la masa nuclear es finita y efectos del tamaño finito del radio nuclear. La tabla (C) del capitulo 4 muestra las contribuciones al corrimiento Lamb de estos efectos.

Bibliografía

[1] Bethe H. A. Introducción a la mecánica cuántica. Westview Press; 3 edition (January 1, 2001) 416 P.

[2] A. C. Aguiar Pinto, T. M. Britto, R. Bunchaft, F. Pascoal, and F. S. S. da Rosa. Casimir effect for a massive scalar field under mixed boundary conditions. *Braz. J. Phys.*, 33:860–866, 2003.

[3] K. Akama. An early proposal of 'brane world'. *Lect. Notes Phys.*, 176:267–271, 1982, hep-th/0001113.

[4] Jan Ambjorn and Stephen Wolfram. Properties of the vacuum. 2. electrodynamic. *Ann. Phys.*, 147:33, 1983.

[5] Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos, and G. R. Dvali. The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter. *Phys. Lett.*, B429:263–272, 1998, hep-ph/9803315.

[6] Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos, and G. R. Dvali. Phenomenology, astrophysics and cosmology of theories with sub-millimeter dimensions and tev scale quantum gravity. *Phys. Rev.*, D59:086004, 1999, hep-ph/9807344.

[7] Berestetskii V. B., Lifshitz E. M., and Pitaevskii L. P. Quantum electrodynamics. Pergamon Press, Oxford, Uk, 1982.

[8] Borut Bajc and Gregory Gabadadze. Localization of matter and cosmological constant on a brane in anti de sitter space. *Phys. Lett.*, B474:282–291, 2000, hep-th/9912232.

[9] Vernon D. Barger, Tao Han, C. Kao, and Ren-Jie Zhang. Astrophysical constraints on large extra dimensions. *Phys. Lett.*, B461:34–42, 1999, hep-ph/9905474.

[10] V. A. Berezin, V. A. Kuzmin, and I. I. Tkachev. Dynamics of bubbles in general relativity. *Phys. Rev.*, D36:2919, 1987.

[11] Robert Bluhm. Probing the planck scale in low-energy atomic physics. 2001, hep-ph/0111323.

[12] M. Bordag, U. Mohideen, and V. M. Mostepanenko. New developments in the casimir effect. *Phys. Rept.*, 353:1–205, 2001.

[13] M. Born and L. Infeld. Foundations of the new field theory. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A144:425–451, 1934.

[14] G. Bressi, G. Carugno, R. Onofrio, and G. Ruoso. Measurement of the casimir force between parallel metallic surfaces. *Phys. Rev. Lett.*, 88:041804, 2002.

[15] I. Brevik and A. A. Bytsenko. Casimir energy and thermodynamic properties of the relativistic piecewise uniform string. 2000, hep-th/0002064.

[16] F. Briscese and A. Marciano. Cosmological casimir effect with maximum planckian momentum and accelerating universe, 2007.

[17] Douglas J. Buettner, P. D. Morley, and Ivan Schmidt. Review of spectroscopic determination of extra spatial dimensions in the early universe. 2003, astro-ph/0312425.

[18] K. M. Case. Singular potentials. *Phys. Rev.*, 80:797–806., 1950.

[19] H. B. G. Casimir. On the attraction between two perfectly conducting plates. *Kon. Ned. Akad. Wetensch. Proc.*, 51:793–795., 1948.

[20] M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, and A. Tureanu. Hydrogen atom spectrum and the lamb shift in noncommutative qed. *Phys. Rev. Lett.*, 86:2716, 2001.

[21] Hongbo Cheng. On the casimir effect for parallel plates in the spacetime with one extra compactified dimension. *Mod. Phys. Lett.*, A21:1957–1963, 2006.

[22] Y. M. Cho. Higher-dimensional unification of gravity and gauge theories. *J. Math. Phys.*, 16:2029, 1975.

[23] Y. M. Cho and P. G. O. Freund. Non-abelian gauge fields as nambu-goldstone fields. *Phys. Rev.*, D 12:1711, 1975.

[24] Don Colladay and V. Alan Kostelecky. Lorentz-violating extension of the standard model. *Phys. Rev.*, D58:116002, 1998, hep-ph/9809521.

[25] Schuyler Cullen and Maxim Perelstein. Sn1987a constraints on large compact dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 83:268–271, 1999, hep-ph/9903422.

[26] H. Davoudiasl, J. L. Hewett, and T. G. Rizzo. Phenomenology on a slice of ads(5) x m**delta spacetime. *JHEP*, 04:001, 2003, hep-ph/0211377.

[27] Michal Demetrian. Casimir effect in four simple situations - including a noncommutative two-sphere. *Fizika*, B11:175–190, 2002, hep-th/0204020.

[28] Keith R. Dienes, Emilian Dudas, and Tony Gherghetta. Grand unification at intermediate mass scales through extra dimensions. *Nucl. Phys.*, B537:47–108, 1999, hep-ph/9806292.

[29] S. L. Dubovsky, V. A. Rubakov, and P. G. Tinyakov. Is the electric charge conserved in brane world? *JHEP*, 08:041, 2000, hep-ph/0007179.

[30] S. L. Dubovsky, V. A. Rubakov, and P. G. Tinyakov. Brane world: Disappearing massive matter. *Phys. Rev.*, D62:105011, 2000, hep-th/0006046.

[31] G. R. Dvali and Gregory Gabadadze. Non-conservation of global charges in the brane universe and baryogenesis. *Phys. Lett.*, B460:47–57, 1999, hep-ph/9904221.

[32] G. R. Dvali and S. H. Henry Tye. Brane inflation. *Phys. Lett.*, B450:72–82, 1999, hep-ph/9812483.

[33] Michael I. Eides, Howard Grotch, and Valery A. Shelyuto. Theory of light hydrogenlike atoms. *Phys. Rept.*, 342:63–261, 2001.

[34] Michael I. Eides and Valery A. Shelyuto. Three-loop reducible radiative photon contributions to lamb shift and hyperfine splitting. *Phys. Rev.*, A70:022506, 2004.

[35] Michael I. Eides and Valery A. Shelyuto. Three-loop radiative corrections to lamb shift and hyperfine splitting. 2006.

[36] Emilio Elizalde, Shinichi Nojiri, Sergei D. Odintsov, and Sachiko Ogushi. Casimir effect in de sitter and anti-de sitter braneworlds. *Phys. Rev.*, D67:063515, 2003, hep-th/0209242.

[37] M. Fabinger and P. Horava. Casimir effect between world-branes in heterotic m-theory. *Nucl. Phys. B*, 580:243–263, 2000, hep-th/0002073.

[38] Carlos Farina. The casimir effect: Some aspects. *Braz. J. Phys.*, 36:1137–1149, 2006.

[39] Ferruccio Feruglio. Extra dimensions in particle physics. *Eur. Phys. J.*, C33:s114–s128, 2004, hep-ph/0401033.

[40] A. Flachi and D. J. Toms. Quantized bulk scalar fields in the randall-sundrum brane-model. *Nucl. Phys.*, B610:144–168, 2001, hep-th/0103077.

[41] Claus Lammerzahlb Frank Burgbachera and Alfredo Macias. Is there a stable hydrogen atom in higher dimensions? *Journal of mathematical physics*, 40, 1999.

[42] Jaume Garriga and Alex Pomarol. A stable hierarchy from casimir forces and the holographic interpretation. *Phys. Lett.*, B560:91–97, 2003, hep-th/0212227.

[43] Massimo Giovannini. Gauge field localization on abelian vortices in six dimensions. *Phys. Rev.*, D66:044016, 2002, hep-th/0205139.

[44] Massimo Giovannini, H. Meyer, and Mikhail E. Shaposhnikov. Warped compactification on abelian vortex in six dimensions. *Nucl. Phys.*, B619:615–645, 2001, hep-th/0104118.

[45] Wlodzimierz Godlowski, Marek Szydlowski, and Zong-Hong Zhu. Constraining bouncing cosmology caused by casimir effect. 2007.

[46] K. Langfeld H. Gies and L. Moyaerts. Casimir effect on the worldline. *JHEP*, 06:018, 2003, hep-th/0303264.

[47] Steen Hannestad and Georg G. Raffelt. Supernova and neutron-star limits on large extra dimensions reexamined. *Phys. Rev.*, D67:125008, 2003, hep-ph/0304029.

[48] P. Hays. Vacuum fluctuations of a confined massive field in two- dimensions. *Annals Phys.*, 121:32–46, 1979.

[49] Petr Horava and Edward Witten. Heterotic and type i string dynamics from eleven dimensions. *Nucl. Phys.*, B460:506–524, 1996, hep-th/9510209.

[50] Petr Horava and Edward Witten. Eleven-dimensional supergravity on a manifold with boundary. *Nucl. Phys.*, B475:94–114, 1996, hep-th/9603142.

[51] C. D. Hoyle et al. Sub-millimeter tests of the gravitational inverse-square law: A search for 'large' extra dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 86:1418–1421, 2001, hep-ph/0011014.

[52] C. D. Hoyle et al. Sub-millimeter tests of the gravitational inverse-square law. *Phys. Rev.*, D70:042004, 2004.

[53] C. Itzykson and J. B. Zuber. Quantum field theory. New York, Usa: Mcgraw-hill (1980) 705 P.(International Series In Pure and Applied Physics).

[54] R. Jackiw and C. Rebbi. Solitons with fermion number 1/2. *Phys. Rev.*, D13:3398–3409, 1976.

[55] R. Jackiw and P. Rossi. Zero modes of the vortex - fermion system. *Nucl. Phys.*, B190:681, 1981.

[56] B. Jager, M. Stratmann, and W. Vogelsang. Longitudinally polarized photoproduction of inclusive hadrons beyond the leading order. *Phys. Rev.*, D68:114018, 2003, hep-ph/0309051.

[57] Ulrich D. Jentschura and Krzysztof Pachucki. Two-loop self-energy corrections to the fine-structure. *J. Phys.*, A35:1927–1942, 2002.

[58] Pachucki K. Logarithmic two-loop corrections to the lamb shift in hydrogen. *Phys. Rev.*, A63:042503, 2001.

[59] Th. Kaluza. Zum unitatsproblem der physik (on the problem of unity in physics). *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, 1921:966–972, 1921.

[60] D. J. Kapner et al. Tests of the gravitational inverse-square law below the dark-energy length scale. *Phys. Rev. Lett.*, 98:021101, 2007.

[61] Savely G. Karshenboim. Precision physics of simple atoms: Qed tests, nuclear structure and fundamental constants. *Physics Reports*, 422:1, 2005.

[62] R. Kener. Generalization of the kaluza-klein theory for an arbitrary non-abelian gauge group. *Ann.Inst. H. Poincaré*, AIX:143, 1968.

[63] Soon keon Nam. Casimir force in compact non-commutative extra dimensions and radius stabilization. *HEP*, 0010:044, 2000, hep-th/0008083.

[64] G. L. Klimchitskaya and V. M. Mostepanenko. Experiment and theory in the casimir effect. *Contemp. Phys.*, 47:131–144, 2006.

[65] V. Alan Kostelecky and Ralf Lehnert. Stability, causality, and lorentz and cpt violation. *Phys. Rev.*, D63:065008, 2001, hep-th/0012060.

[66] Dennis E. Krause and Ephraim Fischbach. Searching for extra dimensions and new string-inspired forces in the casimir regime. *Lect. Notes Phys.*, 562:292–309, 2001, hep-ph/9912276.

[67] G. Lambiase L. Hadasz and V. V. Nesterenko. Casimir energy of a non-uniform string. *Phys. Rev. D*, 62:025011, 2000, hep-th/9911248.

[68] De la peña L. Introducción a la mecánica cuántica. Fondo de cultura económica (1991) 830 P.

[69] Roman Linares, Hugo A. Morales-Tecotl, and Omar Pedraza. Scalar field casimir force in rsiin (en preparación).

[70] Roman Linares, Hugo A. Morales-Tecotl, and Omar Pedraza. Casimir effect in a six-dimensional vortex scenario. *Phys. Lett.*, B633:362–367, 2006, hep-ph/0505109.

[71] Joshua C. Long et al. New experimental limits on macroscopic forces below 100-microns. 2002, hep-ph/0210004.

[72] Feng Luo and Hongya Liu. Using muonic hydrogen in optical spectroscopy experiment to detect extra dimensions. 2006, gr-qc/0602093.

[73] Feng Luo and Hongya Liu. Exploring extra dimensions in spectroscopy experiments. *Chin. Phys. Lett.*, 23:2903, 2006, gr-qc/0605125.

[74] Roy Maartens. Brane-world gravity. *Living Rev. Rel.*, 7:7, 2004, gr-qc/0312059.

[75] Luiz A. Manzoni and Walter F. Wreszinski. A theory of the casimir effect for compact regions. *Eur. Phys. J.*, C25:315–325, 2002, hep-th/0101128.

[76] Ph A. Martin and P. R. Buenzli. The casimir effect, 2006.

[77] Eugen Merzbacher. *Quantum Mechanics.* Wiley; 3 edition, 2a edition, 1998.

[78] K. A. Milton. The casimir effect: Physical manifestations of zero-point energy. River Edge, USA: World Scientific (2001) 301 p.

[79] K. A. Milton, R. Kantowski, C. Kao, and Y. Wang. Constraints on extra dimensions from cosmological and terrestrial measurements. *Mod. Phys. Lett.*, A16:2281–2290, 2001, hep-ph/0105250.

[80] Kimball A. Milton. The casimir effect: Physical manifestations of zero-point energy. 1999, hep-th/9901011.

[81] Kimball A. Milton. The casimir effect: Recent controversies and progress. *J. Phys.*, A37:R209, 2004.

[82] Eugene A. Mirabelli, Maxim Perelstein, and Michael E. Peskin. Collider signatures of new large space dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 82:2236–2239, 1999, hep-ph/9811337.

[83] U. Mohideen and Anushree Roy. Precision measurement of the casimir force from 0.1 to 0.9 μm. *Phys. Rev. Lett.*, 81:4549–4552, 1998, physics/9805038.

[84] P. J. Mohr and B.Ñ. Taylor. The 2002 codata recommended values of the fundamental physical constants: 2002. *Rev. Mod. Phys.*, 77, 2005, hep-ph/9912498.

[85] Hugo A. Morales-Tecotl, Omar Pedraza, and Pimentel Luis O. Electromagnetic potentials and hydrogen atom in brane worlds (en revisión). *Phys. Rev. Lett.*

[86] Hugo A. Morales-Tecotl, Omar Pedraza, and Luis O. Pimentel. Low-energy effects in brane worlds: Liennard-wiechert potentials and hydrogen lamb shift. *Journal of General Relativity and Gravitation*, 2006, physics/0611241.

[87] Philip M. Morse and Herman Feshbach. Methods of theoretical physics. Mc Graw Hill, Inc. (1953) 1665-1667.

[88] Andrey Neronov. Localization of kaluza-klein gauge fields on a brane. *Phys. Rev.*, D64:044018, 2001, hep-th/0102210.

[89] Y. Jack Ng and H. van Dam. Neutrix calculus and finite quantum field theory. *J. Phys.*, A38:L317, 2005, hep-th/0410285.

[90] Gunnar Nordstrom. On the possibility of unifying the electromagnetic and the gravitational fields. *Phys. Z.*, 15:504–506, 1914.

[91] Roberto Onofrio. Casimir forces and non-newtonian gravitation. *New J. Phys.*, 8:237, 2006.

[92] Leonard Parker and Luis O. Pimentel. Gravitational perturbation of the hydrogen spectrum. *Phys. Rev. D*, 25(12):3180–3190, Jun 1982.

[93] Abdel Perez-Lorenzana. An introduction to extra dimensions. *J. Phys. Conf. Ser.*, 18:224–269, 2005, hep-ph/0503177.

[94] J. Polchinski. Dirichlet-branes and ramond-ramond charges. *Phys. Rev. Lett.*, 75:4724, 1995, hep-th/9510017.

[95] Joseph Polchinski. Lectures on d-branes. 1996, hep-th/9611050.

[96] Alex Pomarol. Grand unified theories without the desert. *Phys. Rev. Lett.*, 85:4004–4007, 2000, hep-ph/0005293.

[97] Katja Poppenhaeger, Sabine Hossenfelder, Stefan Hofmann, and Marcus Bleicher. The casimir effect in the presence of compactified universal extra dimensions. *Phys. Lett.*, B582:1–5, 2004, hep-th/0309066.

[98] Oriol Pujolas. Effective potential in brane-world scenarios. *Int. J. Theor. Phys.*, 40:2131–2142, 2001, hep-th/0103193.

[99] S. Deser R. Arnowitt and C.W. Misner. *The Dynamics of General Relativity, in Gravitation: an introduction to current research.* L. Witten ed., Wiley, New York, 1962.