



# Casa abierta al tiempo

Universidad Autónoma Metropolitana  
Unidad Iztapalapa  
División de Ciencias Básicas e Ingenierías.

La Métrica de Jacobi-Maupertuis, su Relación con la  
Geometría Riemanniana y sus Aplicaciones a la  
Mecánica Clásica.

Tesis que Presenta:  
Luis Enrique Ascencio Gorozpe.  
Matricula: 2182800668

Para Obtener el Grado de Maestro en Ciencias Matemáticas.

Director:  
Dr. Josué Meléndez Sánchez.

Jurado:  
Dr. José Antonio García Rodríguez.  
Dr. Josué Meléndez Sánchez.  
Dr. Oscar Alfredo Palmas Velasco.

# Índice

<b>1. Notación</b>	<b>4</b>
<b>2. Introducción</b>	<b>6</b>
2.1. Introducción a la Tesis . . . . .	6
2.2. Introducción Histórica . . . . .	7
2.3. Introducción Matemática . . . . .	10
<b>3. Preliminares Matemáticos</b>	<b>12</b>
3.1. Variedades Diferenciables . . . . .	12
3.1.1. Funciones en Variedades . . . . .	15
3.2. Espacio Tangente . . . . .	16
3.3. Campos Vectoriales . . . . .	20
3.4. Métrica Riemanniana . . . . .	24
3.5. Conexión de Levi-Civita . . . . .	25
3.5.1. Derivada Covariante . . . . .	27
3.5.2. Geodésicas . . . . .	27
3.6. Operadores de Curvatura . . . . .	29
3.6.1. Curvatura de Riemann . . . . .	29
3.6.2. Curvatura Seccional . . . . .	32
3.6.3. Curvatura de Ricci . . . . .	33
3.6.4. Curvatura Escalar . . . . .	34
<b>4. Métricas Conformes a la Métrica Euclidiana</b>	<b>35</b>
4.1. Símbolos de Christoffel . . . . .	37
4.2. Curvatura Seccional . . . . .	42
4.3. Curvatura de Ricci . . . . .	45
4.4. Curvatura Escalar . . . . .	48
4.5. Resultados Preliminares . . . . .	49
<b>5. Preliminares Físicos</b>	<b>63</b>
5.1. El Principio de Maupertuis . . . . .	65
<b>6. La Métrica de Jacobi-Maupertuis</b>	<b>67</b>
6.1. Generalidades de la Métrica de J-M . . . . .	67
6.2. Ejemplos y Aplicaciones . . . . .	81
<b>7. Resultados y Conclusiones</b>	<b>95</b>
7.1. Resultados Generales . . . . .	95
7.2. Potenciales de Fuerza Central . . . . .	97
7.2.1. Curvatura Mecánica en $\mathbb{R}_h^n$ . . . . .	97
7.2.2. Potenciales de Fuerza Central Armónicos . . . . .	98
7.2.3. Problema de Kepler y Coulomb en $\mathbb{R}_h^2$ y $\mathbb{R}_h^3$ . . . . .	99
7.3. Comentarios Finales . . . . .	101
<b>8. Índices</b>	<b>103</b>



# 1. Notación

En este trabajo de tesis utilizamos algunos símbolos y notaciones más comunes y/o generales que se encuentran en la literatura, sin embargo aquí se describen de manera breve los símbolos no estándar que se utilizarán a lo largo de la exposición matemática.

- $\delta$  - Variación.
- $(\mathcal{M}, \mathcal{T}_{\mathcal{M}})$  - Espacio Topológico. - *Definición 3.1.1.*
- $(U, \psi)$  - Carta Coordenada. - *Definición 3.1.7.*
- $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}$  - Atlas. - *Definición 3.1.10.*
- $\mathcal{D}_{\mathcal{M}}$  - Estructura Diferenciable. - *Definición 3.1.11.*
- $(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathcal{M}})$  - Variedad Diferenciable. - *Definición 3.1.12.*
- $C(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  - Espacio de funciones continuas de  $\mathcal{M}$  a  $\mathcal{N}$ . - *Definición 3.1.13.*
- $C^k(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  - Espacio de funciones  $k$ -veces diferenciables de  $\mathcal{M}$  a  $\mathcal{N}$ . - *Definición 3.1.14.*
- $\mathcal{K}_p(\mathcal{M})$  - Conjunto de Clases de equivalencia de Curvas Tangencialmente Equivalentes en  $p$  - *Proposición 3.2.1.*
- $T_p\mathcal{M}$  - Espacio Tangente en  $p \in \mathcal{M}$  - *Definición 3.2.1 y 3.2.2.*
- $\mathcal{E}_p(U)$  - Conjuntos de Germenes (Clases de equivalencia) de funciones de  $U$  a  $\mathbb{R}$  - *Proposición 3.2.2*
- $\mathcal{L}(A, B)$  - Espacio de Transformaciones lineales de A a B.
- $T\mathcal{M}$  - Haz Tangente - *Definición 3.2.3.*
- $\pi : T\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  - Proyección del Haz Tangente - *Definición 3.2.3.*
- $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$  - Espacio de Campos Vectoriales de  $\mathcal{M}$  en  $T\mathcal{M}$  - *Definición 3.3.1.*
- $[X, Y]$  - Bracket de Lie - *Proposición 3.3.2.*
- $df(v) = v(f)$  Diferencial de Una Función - *Definición 3.3.3.*
- $T_p^*\mathcal{M}$  - Espacio Cotangente en  $p \in \mathcal{M}$  - *Definición 3.3.3.*
- $T^*\mathcal{M}$  - Haz Cotangente - *Definición 3.3.4.*
- $g_p(*, *) = \langle *, * \rangle_p$  - Métrica Riemanniana - *Definición 3.4.3.*
- $(\mathcal{M}, g)$  - Variedad Riemanniana - *Definición 3.4.4.*

- $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$  - Coeficientes de la Métrica - *Definición* 3.4.5.
- $\mathbb{G}$  - Matriz de Coeficientes de la Métrica - *Definición* 3.4.5.
- $g^{ij}$  - Coeficientes inversos de la Métrica - *Definición* 3.4.5.
- $v(f) = g(\text{grad } f, v)$  - Gradiente - *Definición* 3.4.6.
- $l_a^b(\gamma)$  - Longitud de Arco - *Definición* 3.4.7.
- $\nabla$  - Conexión - *Definición* 3.5.2 y *Definición* 3.5.1.
- $\Gamma_{ij}^k$  - Símbolos de Christoffel - *Definición* 3.5.3.
- $\frac{D}{dt}$  - Derivada Covariante - *Proposición* 3.5.2.
- $R(X, Y)$  - Operador de Curvatura de Riemann - *Definición* 3.6.1.
- $R_{ijkl}^l$  - Coeficientes de la Curvatura - *Definición* 3.6.2.
- $K_{sec}(X, Y)$  - Operador de Curvatura Escalar - *Proposición* 3.6.2.
- $K_{sec}(\sigma)$  - Curvatura Escalar - *Definición* 3.6.5.
- $Ric\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$  - Curvatura de Ricci - *Definición* 3.6.4.
- $K(p)$  - Curvatura Escalar - *Definición* 3.6.5.
- $\tilde{g}$  - Métrica Conforme - *Sección* 4.
- $\tilde{\nabla}$  - Conexión Métrica Conforme - *Teorema* 4.0.1 y 6.1.1.
- $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$  - Símbolos de Christoffel de Métricas Conformes - *Corolario* 4.1.1.
- $\delta_{ij}$  - Delta de Kronecker.
- $\tilde{K}_{sec}(\sigma)$  - Curvatura Seccional Métrica Conforme - *Corolario* 4.2.1.
- $\widetilde{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$  - Curvatura de Ricci Métrica Conforme - *Lema* 4.3.1.
- $\tilde{K}(p)$  - Curvatura Escalar Métrica Conforme - *Corolario* 4.4.1.
- $K_{sec}^\lambda(\sigma)$  - Curvatura Seccional Métrica Conforme a la Métrica Euclidiana con factor  $\lambda$  - *Corolario* 4.2.1.
- $Ric^\lambda\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$  - Curvatura de Ricci Métrica Conforme a la Métrica Euclidiana con factor  $\lambda$  - *Lema* 4.3.1.
- $K^\lambda(x)$  - Curvatura Escalar Métrica Conforme a la Métrica Euclidiana con factor  $\lambda$  - *Corolario* 4.4.1.

## 2. Introducción

Este trabajo representa el esfuerzo del autor por entender las ideas y principios que dieron lugar a los fundamentos e inspiración para la construcción de la **Métrica de Jacobi-Maupertuis**, para ello se hace uso del **análisis en variedades**, la **geometría Riemanniana** y diferencial para estudiar algunas propiedades asociadas a esta métrica por ejemplo sus curvaturas y geodésicas. Por otro lado también se hace una pequeña discusión para clarificar la relación histórica de la **Métrica de Jacobi-Maupertuis** con la **Mecánica Clásica** además de estudiar algunos casos particulares que abordan fenómenos físicos de interés para la **Mecánica Clásica**.

En el presente capítulo vamos a hacer un pequeño recuento histórico asociado con las leyes fundamentales de la física clásica, en particular de la **Mecánica Clásica** y llegaremos hasta la discusión asociada al **Principio de Mínima Acción** y su relación con un caso particular de este principio, dado por **Pierre Louis Maupertuis** el cual lleva su nombre y se conoce como **Principio de Maupertuis** que da lugar a la formulación de **La Métrica de Jacobi-Maupertuis** hecha por **Leonhard Euler** que ha sido reformulada y re-entendida en tiempos recientes por algunos autores que han visto en esta métrica una herramienta útil para abordar y estudiar algunos problemas tanto en mecánica clásica como en las teorías más modernas de la física.

También para contextualizar vale la pena comentar que **La Métrica de Jacobi-Maupertuis** tratada con las herramientas clásicas de la geometría diferencial, el cálculo variacional y un poco el lenguaje contemporáneo de la geometría diferencial nos permite obtener y abordar algunos problemas de interés físico y unos tantos no tan interesantes para la física, pero si para las matemáticas, en ese sentido gran parte de los resultados y estudios hechos a lo largo de esta tesis se enfocan en hacer un estudio un poco exhaustivo de estos problemas de interés para el autor.

Continuando con la introducción resta comentar que la subsección siguiente da una mirada general a toda la tesis.

### 2.1. Introducción a la Tesis

A continuación daremos un pequeño repaso y listados de los capítulos que concierne a la presente tesis.

- **1 - Notación:**

Este capítulo presenta algunas notaciones usadas en el trabajo matemático, además de la referencia al interior del documento donde se define tal notación.

- **2 - Introducción:**

Este capítulo hace una introducción a la tesis, desde el punto de vista histórico y a nivel matemático además de hacer un repaso de los antecedentes que conciernen al tema central de la tesis.

- **3 - Preliminares Matemáticos:**

Este capítulo hace una introducción breve pero suficiente del **Análisis en Variedades, Geometría Diferencial y Riemanniana** para poder dar una base sólida a la teoría matemática utilizada en la presente tesis. Cabe resaltar que se intenta ser lo más autocontenido posible, sin embargo se hace referencia a los resultados y ejemplos importantes presentes en otros textos que sirvieron de referencia para el autor.

- **4 - Métricas Conformes a la Métrica Euclidiana:**

En este capítulo se estudia con cierta profundidad las llamadas **Métricas Conformes** en particular las que son conformes a la **Métrica Euclidiana** pues estas serán parte central de la tesis.

- **5 - Preliminares Físicos:**

En este capítulo se hace una introducción teórica y conceptual de las herramientas de la física que serán útiles para el desarrollo de la tesis, cabe resaltar que aquí se desarrolla el **Principio de mínima Acción de Maupertuis** con mayor precisión para así establecer la conexión entre este principio y la conocida como **Métrica de Jacobi-Maupertuis**.

- **6 - La Métrica de Jacobi-Maupertuis:**

En este capítulo se estudia y exploran algunos de los resultados clásicos, además de derivar otros más haciendo uso de lo expuesto en los capítulos 4 y 5.

- **7 - Resultados y Conclusiones:**

Para finalizar, en este capítulo se resaltan algunos resultados derivados de lo hecho en el capítulo 6, además de otros más inspirados en los siguientes trabajos matemáticos [Pin75], [Pol76] , [Lau65] y [LLBP78].

## 2.2. Introducción Histórica

Comenzamos la introducción histórica comentando algunos antecedentes relevantes para la formulación del **Principio de Mínima Acción**, para ello cabe resaltar que la discusión alrededor de la formulación de este principio conlleva los intentos de varios grandes filósofos naturales de los siglos XVI-XVIII, en este periodo de tiempo, contemporáneos a la formulación de las bases de la mecánica y el cálculo dadas por Newton en su famoso libro *Philosophiæ naturalis principia mathematica* [New02], estos personajes históricos intentaron encontrar principios fundamentales que permitieran entender el mundo físico en algunos casos prescindiendo de la formulación en términos de la Fuerza dadas originalmente por Sir Issac Newton, sin embargo este camino conllevó largas discusiones, artículos, cartas e incluso disputas por la autoría de alguna idea o incluso acusaciones de plagio.

Podemos hacer una breve lista de algunos de los partícipes de este periodo de investigación en busca de los principios que pudieran describir la realidad, entre ellos tenemos a Simon Stevin, Christiaan Huygens, Pierre de Fermat, John

Bernoulli, Gottfried Wilhelm Leibniz, René Descartes, Leonhard Euler, etc. Un recuento histórico bastante completo donde se describe con mucho detalle las discusiones, problemas e ideas que estos personajes hicieron a lo largo de los siglos XVII-XVIII puede encontrarse en los siguientes libros [Coo17], [RB18], [Dug89].

Haciendo un breve resumen de lo expuesto en las muy buenas reseñas históricas previamente citadas, tenemos que los siguientes principios, ideas y problemas fueron los que se discutieron antes de poder llegar a la formulación correcta del **Principio de Mínima Acción**.

- **Principio de Fermat:** Pierre de Fermat en una carta fechada el 1 de enero de 1662 enviada a Cureau de la Chambre expresó lo siguiente:

“La naturaleza opera por medios y maneras que son más fáciles y rápidos.”

En otra parte de la misma escribe

“del principio, tan común y tan bien establecido, de que la Naturaleza siempre actúa en los caminos más cortos.”<sup>1</sup>

Estas ideas llevaron a la formulación del **Principio de Tiempo Mínimo** que establece una respuesta parcial para explicar algunos fenómenos ópticos tales como la refracción, además de ser una respuesta incompleta como principio fundamental de la naturaleza. Una buena discusión e introducción asociada a este principio se pueden encontrar en [Dug89, Capítulo 5].

- **Solución del problema de la Braquistócrona:** Otro de los problemas importante que contribuyeron en cierta medida y a su vez tiene cierta conexión con el **Principio de Tiempo Mínimo** y sirve como antecedente para su formulación.

Una de las formulaciones del problema que da como solución la curva Braquistócrona es la siguiente

“Dado dos puntos A y B en un plano vertical, ¿Cuál es la curva que traza un punto que viaja de A a B bajo acción de la gravedad en el menor tiempo?”

La formulación anterior fue dada originalmente por Johann Bernoulli y discutida por varios filósofos naturales entre los cuales se destacan Gottfried Leibniz, Sir Issac Newton, Johann y Jacobo Bernoulli los cuales hicieron contribuciones a la solución y formulación correcta del problema.

Entre lo que podemos destacar es que ese problema llevó a la formulación y aparición del cálculo variacional, pues el problema al plantearse matemáticamente, se convierte en un problema de minimización.

---

<sup>1</sup>(in 1662, in a letter to de la Chambre) Goldstine H, History of the Calculus of Variations from the Seventeenth through the Nineteenth Century, Springer-Verlag, New York (1980).



- **Principio de mínima Resistencia:** Alrededor del año 1682 Gottfried Leibniz hace una modificación al **Principio de Fermat** agregando un supuesto más, el cuál expresó de la siguiente forma en el artículo donde postulo su principio

“La luz hace una elección entre optimizar el tiempo u optimizar las distancias.”

Tal afirmación constituye el **Principio de Mínima Resistencia**, una breve descripción de este principio se puede encontrar en [Dug89, Página 260].

- **Principio de mínima Acción de Maupertuis:** En la década de 1740-1750 Pierre Louis Moreau de Maupertuis entró en acción para poner en discusión y formular su **Principio de mínima Acción** cuestionando y completando las visiones dadas por sus predecesores Leibniz, Fermat y demás corrientes de pensamiento que estaban en busca del principio fundamental de la realidad.

Maupertuis formuló de manera parcialmente correcta el principio que hoy conocemos como **Principio de mínima Acción** en la física, pues si bien éste era correcto al considerar el trabajo de Newton (las 3 leyes de Newton), no tenía un fundamento matemático claro, recurría a argumentos esotéricos y religiosos para justificar el principio.

El **Principio de mínima Acción de Maupertuis** aparece en una de las publicaciones de Maupertuis en la siguiente forma:

“en la Naturaleza, la cantidad de acción necesaria para el cambio es la más pequeña posible. La acción es el producto de la masa de un cuerpo por su velocidad por la distancia que se mueve”

Como podemos ver en esta afirmación aparece por primera vez el concepto de acción, sin embargo no aborda de manera adecuada el principio pues no hace uso de alguna herramienta matemática que pueda dar cierta precisión a la afirmación siendo así que no es tan consistente con las ideas de Newton al no hacer uso del cálculo.

Posterior a las afirmaciones y de postular su principio por parte de Maupertuis, el gran matemático Leonhard Euler dio la correcta formulación a nivel matemático del principio dado por Maupertuis y con ello empezar a construir las bases conceptuales para las formulaciones de la **Mecánica Lagrangiana y Mecánica de Hamilton**.

Para más información y consulta de los datos históricos se pueden leer en [Dug89, Página 260-274] , [Coo17, Página 27-30] y [RB18, Página 59-65].

Para concluir esta subsección del capítulo vale la pena comentar que la información y el seguimiento histórico del desarrollo del **Principio de mínima Acción** es bastante más extenso que el pequeño resumen ofrecido aquí, pues aun falta agregar las aportaciones dadas por William Rowan Hamilton, Joseph-Louis

Lagrange y algunos otros personajes históricos que construyeron las formulaciones más acabadas de la mecánica las cuales son conocidas como **Mecánica Lagrangiana y Mecánica de Hamilton**, además de los principios de **Mínima Acción** (El caso más general y usado en la física moderna) y **Conservación de la Energía** (Caso particular relacionado con el **Principio de mínima Acción de Maupertuis**), en ese sentido, las referencias bibliográficas útiles para el autor de esta tesis son las siguientes. [RB18, Capítulo 4] , [Coo17, Capítulo 1-7] y [Dug89, Parte 3, Página 231-347].

### 2.3. Introducción Matemática

En la presente subsección del capítulo vamos a hacer una introducción matemática partiendo de la formulación matemática basada en el cálculo variacional que permite desarrollar la **Métrica de Jacobi-Maupertuis** y utilizar el **Principio de Mínima Acción de Maupertuis**, sin embargo en capítulos posteriores vamos a hacer algunas distinciones y precisiones respecto al **Principio de Mínima Acción de Lagrange** el cual es la forma más general del **Principio de Mínima Acción**.

Siguiendo el **Principio de mínima Acción de Maupertuis** formalizado por Leonhard Euler tenemos que originalmente Maupertuis definió la **acción** de la siguiente forma

$$S(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} mv \, dl.$$

Considerando a esta acción sujeta a  $\gamma(t_0) = q_0$  y  $\gamma(t_1) = q_1$  en donde  $v$  es la velocidad de la curva  $\gamma \subset \mathbb{R}^n$  y  $m$  su masa, en ese sentido el **Principio de mínima Acción de Maupertuis** interpretado por Euler nos lleva a la siguiente condición para formular de manera adecuada este principio [RB18, Página 66].

$$\min_{\gamma \in \mathcal{M}} S(\gamma) = \min_{\gamma \in \mathcal{M}} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} mv \, dl \right\}. \quad (2.3.1)$$

Aquí considerando  $\mathcal{M} := \{ \gamma(t) \subset \mathbb{R}^n \mid \gamma(t_0) = q_0 \text{ y } \gamma(t_1) = q_1 \}$ .

Posterior a esto y con el trabajo hecho por otros personajes históricos, tenemos que Jacobi reformuló esta condición y la reinterpretó en el lenguaje de la geometría diferencial, además de hacer uso de otra cantidad física conocida como **Energía Total**  $H(t, \gamma) = K(t) + V(t)$  que de manera equivalente cumple con el principio formulado por Hamilton, conocido como **Principio de Conservación de la Energía** en el

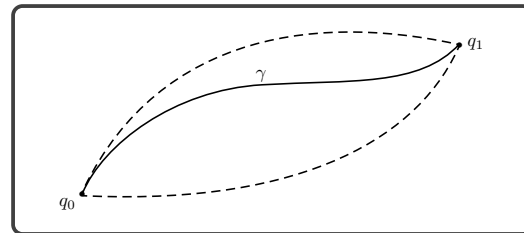


Figura 2.3.1: Curva de mínima Acción.

cual tenemos que en condiciones ideales la energía total es constante, es decir  $h = K(t) + V(t)$ , en donde el término  $K(t) = m\frac{v^2}{2}$  es conocida como **Energía Cinética** y  $V(t)$  es conocido como potencial de fuerza sujeto al tipo de fenómeno físico que se intenta describir.

Dicho lo anterior, la forma en la que Jacobi reformuló el **Principio de mínima Acción de Maupertuis** consiste en despejar el término de velocidad y llevarlo a la siguiente forma.

$$v = \sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{2}{m}(h - V)}$$

sustituyendo en la integral de **Acción** y dividiendo entre la raíz del valor de masa, considerando que es constante, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} S(\gamma) &= \int_{t_0}^{t_1} mv \, dl = \int_{t_0}^{t_1} m\sqrt{\frac{2}{m}(h - V)} \, dl = \sqrt{m} \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{2(h - V)} \, dl \\ \Rightarrow S_0(\gamma) &= \frac{1}{\sqrt{m}} S(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{2(h - V)} \, dl. \end{aligned}$$

Ahora, considerando que en una superficie el diferencial de longitud se puede expresar de la siguiente forma  $dl = \sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} \, dt$ , con esto podemos de manera equivalente formular el **Principio de mínima Acción de Maupertuis** dado en 2.3.1.

$$\begin{aligned} \min_{\gamma} S(\gamma) &= \min_{\gamma} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} mv \, dl \right\} \Rightarrow \\ \min_{\gamma} S_0(\gamma) &= \min_{\gamma} \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{2(h - V)} \, dl = \min_{\gamma} \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{2(h - V)} \sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} \, dt. \end{aligned}$$

Con esto llegamos a la formulación dada por Jacobi que se reinterpreta como encontrar las curvas que minimizan la métrica  $ds^2 = 2(h - V)g$  que en el contexto de la geometría diferencial es equivalente a encontrar las curvas geodésicas de esta métrica, que en términos del cálculo variacional se escribe como sigue.

$$\delta S_0(\gamma) = \delta \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{2(h - V)} \sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} \, dt = 0.$$

Con esto último llegamos a la formulación moderna y conocida comúnmente como la **Métrica de Jacobi-Maupertuis**, sin embargo ésta no es la forma en la que se presenta en algunos otros textos, para ello vamos a formalizar y abordar con mayor formalidad en el capítulo 5.

### 3. Preliminares Matemáticos

En esta sección vamos a introducir algunos conceptos y definiciones preliminares, necesarios para el desarrollo de la teoría en los capítulos posteriores, en particular comenzaremos con todo lo concerniente a dar las bases necesarias para lo que necesitaremos del **Análisis en Variedades**, la **Geometría Diferencial y Riemanniana**.

#### 3.1. Variedades Diferenciables

Para comenzar, en esta subsección tenemos algunas definiciones preliminares de ciertos aspectos relacionados con la **Topología** básica de las **Variedades Diferenciables**.

**Definición 3.1.1. Espacio Topológico:**

Sea  $\mathcal{M}$  un conjunto,  $\mathcal{T} \subseteq P(\mathcal{M})$  se dice una topología si:

- $\emptyset, \mathcal{M} \in \mathcal{T}$ .
- $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha \in \mathcal{T}$  para cualquier conjunto de índices  $\Lambda$ .
- $\bigcap_{k=1}^n V_k \in \mathcal{T}$ .

A la dupla  $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$  se le llama **espacio topológico**.

**Definición 3.1.2. Base de un Espacio Topológico:**

Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$  un espacio topológico, a un conjunto  $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$  se le llama **base del espacio topológico** si cumple las siguientes propiedades:

- $\forall U \in \mathcal{T}$ , Existe  $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$  tal que  $U = \bigcup_{W \in \mathcal{S}} W$ .
- Dados  $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$  y  $p \in U_1 \cap U_2$ , existe  $U \in \mathcal{B}$  tal que  $p \in U \subset U_1 \cap U_2$ .

**Definición 3.1.3. Espacios Segundo Numerable:**

Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$  un espacio topológico, este se dice, **segundo numerable** si este tiene una **base numerable**.

Continuando con la exposición, tenemos que las siguientes tres definiciones son fundamentales para dar la definición de **Variedades Topológica**.

**Definición 3.1.4. Continuidad:**

Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$  y  $(\mathcal{M}', \mathcal{T}')$  un par de espacios topológicos y  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ , una función, esta se dice **continua** si:  $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}, \forall U \in \mathcal{T}$ .

**Definición 3.1.5. Espacios tipo Hausdorff o  $T_2$ :**

Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$  un espacio topológico, este se dice **espacios tipo Hausdorff** o  $T_2$  si:

$$\forall p, q \in \mathcal{M} \text{ con } p \neq q, \exists U, V \in \mathcal{T} \text{ tal que} \\ U \cap V = \emptyset \text{ con } p \in U \text{ y } q \in V.$$

**Definición 3.1.6. Homeomorfismo:**

Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$  y  $(\mathcal{M}', \mathcal{T}')$  un par de espacios topológicos y  $f : U \subseteq \mathcal{M} \rightarrow V \subseteq \mathcal{M}'$ , una función continua, entonces  $f$  se dice un **homeomorfismo** entre  $U$  y  $V$  si existe una función continua  $g$  tal que  $g : V \subseteq \mathcal{M}' \rightarrow U \subseteq \mathcal{M}$ , es decir,  $g$  es una biyección entre los elementos de  $U$  y  $V$  con  $g = f^{-1}$ .

A continuación damos una definición fundamental para entender las **Variedades Topológicas** y como consecuencia, las **Variedades Diferenciables**.

**Definición 3.1.7. Espacios Localmente Euclidianos:**

Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$  un espacio topológico, este se dice **localmente euclidianos** si,  $\forall p \in \mathcal{M}, \exists U \in \mathcal{T}$  y un **homeomorfismo**  $\psi : U \rightarrow \psi(U)$  con  $\psi(U)$  abierto en  $\mathbb{R}^n$ .

A la dupla  $(U, \psi)$  se le llama **carta coordenada** y a la dupla  $(\psi(U), \psi^{-1})$  **parametrización**.

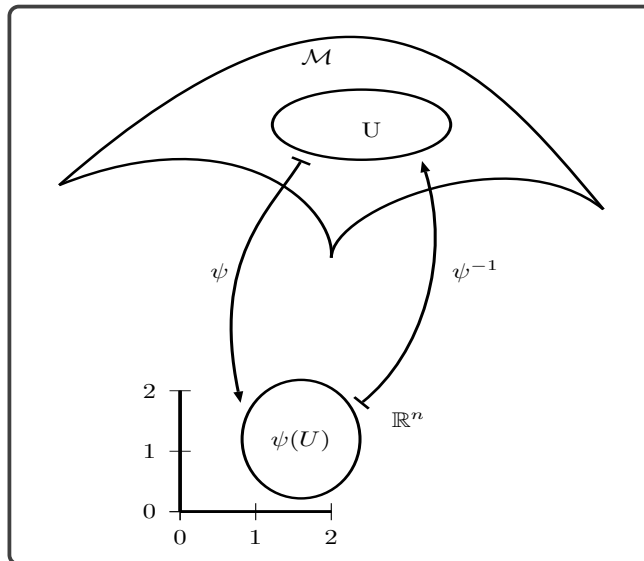


Figura 3.1.1: Carta y Parametrización.

**Definición 3.1.8. Variedad Topológica:**

Una **Variedad Topológica** es un espacio topológico  $\mathcal{M}$  localmente euclidiano, Hausdorff y con base numerable, conformado por la siguiente dupla,  $(\mathcal{M}, \mathcal{T}_{\mathcal{M}})$ .

Estando en este punto, sólo resta un par de definiciones que nos darán lo necesario para poder llegar finalmente a la definición de una **Variedad Diferenciable**.

**Definición 3.1.9. Cartas Compatibles:**

Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$  un espacio topológico, **localmente euclidiano**, dadas dos cartas  $(U_1, \psi_1)$ ,  $(U_2, \psi_2)$  tales que  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ , estas se dicen  **$C^k$ -Compatibles** si los siguientes mapeos:

- $\psi_1 \circ \psi_2^{-1} : \psi_2(U_1 \cap U_2) \rightarrow \psi_1(U_1 \cap U_2)$
- $\psi_2 \circ \psi_1^{-1} : \psi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \psi_2(U_1 \cap U_2)$

son  **$C^k$ -Diferenciables** (de clase  $C^k$ ). Ambos mapeos son llamados **Mapeos de Transición o Cambios de Coordenadas** entre las cartas.

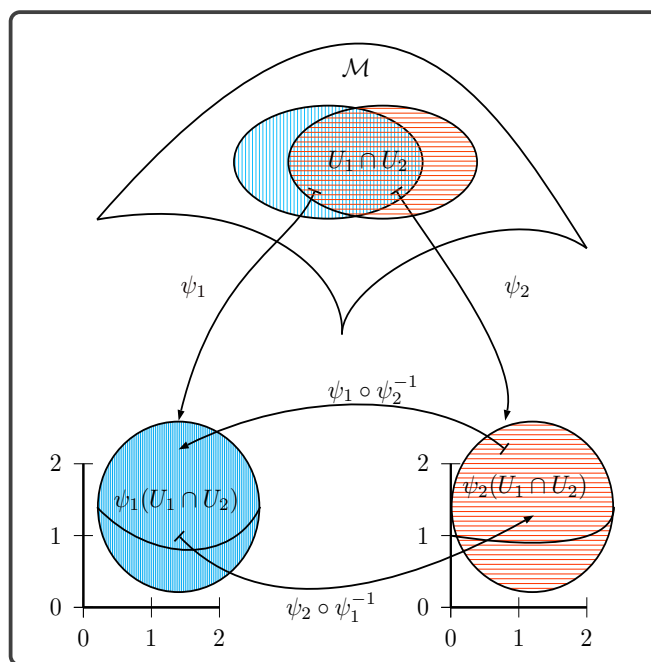


Figura 3.1.2: Cambio de coordenadas o Mapeo de Transición.

**Definición 3.1.10. Atlas:**

Un  **$C^k$ -Atlas** para un espacio topológico **localmente euclidiano**  $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$ , es una colección  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$  de cartas coordenadas  **$C^k$ -Compatibles** tales que  $\mathcal{M} = \bigcup_{\alpha} U_\alpha$ .

**Definición 3.1.11. Atlas Maximal o Estructura Diferencial:**

Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$  un espacio topológico, **localmente euclidiano**, un  $C^k$ -**Atlas Maximal o  $C^k$ -Estructura Diferencial** para el espacio topológico, es un  $C^k$ -**Atlas  $\mathcal{D}$**  tal que, dada una carta  $(U_0, \phi_0)$  arbitraria, si esta es  $C^k$ -**Compatible** con cualquier carta  $(U_\alpha, \phi_\alpha) \in \mathcal{D}$ , entonces  $(U_0, \phi_0) \in \mathcal{D}$ .

Finalmente tenemos lo necesario para la siguiente definición

**Definición 3.1.12. Variedad Diferenciable:**

Una **Variedad Diferenciable** de dimensión  $n$  y grado  $k$ , es una dupla  $(\mathcal{M}, \mathcal{D}_\mathcal{M})$ , conformada por una **variedad topológica**  $(\mathcal{M}, \mathcal{T}_\mathcal{M})$ , equipada con una  $C^k$ -**Estructura Diferencial  $\mathcal{D}_\mathcal{M}$ , Localmente Euclidiana a  $\mathbb{R}^n$** .

Para más información, revisar [GN14, Secciones 1.1 y 1.2] y [Tu11, Sección 5].

**3.1.1. Funciones en Variedades**

A continuación damos algunas definiciones básicas del **Análisis en Variedades** empezando por funciones continuas y diferenciables en Variedades.

**Definición 3.1.13. Funciones Continuas:**

Sean  $(\mathcal{M}, \mathcal{D}_\mathcal{M})$  y  $(\mathcal{N}, \mathcal{D}_\mathcal{N})$  dos variedades diferenciables, de dimensión,  $m$  y  $n$  respectivamente.

- Una función  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  es continua en  $p \in \mathcal{M}$  si y sólo si, existen dos cartas  $(U, \psi_\mathcal{M}) \in \mathcal{D}_\mathcal{M}$  y  $(V, \psi_\mathcal{N}) \in \mathcal{D}_\mathcal{N}$  tales que,  $p \in U$ ,  $f(p) \in f(U) \subset V$  y la función  $\psi_\mathcal{N} \circ f \circ \psi_\mathcal{M}^{-1} : \psi_\mathcal{M}(U) \rightarrow \psi_\mathcal{N}(V)$  es continua en  $\psi_\mathcal{M}(p) = 0$ .
- Una función  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  se dice continua en  $\mathcal{M}$  si y solo si,  $f$  es continua  $\forall p \in \mathcal{M}$ .
- Si  $f$  es continua se puede escribir de la siguiente forma:  $f \in C(\mathcal{M}, \mathcal{N})$

**Definición 3.1.14. Funciones Diferenciables:**

Sean  $(\mathcal{M}, \mathcal{D}_\mathcal{M})$  y  $(\mathcal{N}, \mathcal{D}_\mathcal{N})$  dos variedades diferenciables, de dimensión,  $m$  y  $n$  de grado  $l, s \geq k$  respectivamente.

- Una función  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  es diferenciable de clase  $C^k$  en  $p \in \mathcal{M}$  si y sólo si, existen dos cartas  $(U, \psi_\mathcal{M}) \in \mathcal{D}_\mathcal{M}$  y  $(V, \psi_\mathcal{N}) \in \mathcal{D}_\mathcal{N}$  tales que,  $p \in U$ ,  $f(p) \in f(U) \subset V$  y la función  $\psi_\mathcal{N} \circ f \circ \psi_\mathcal{M}^{-1} : \psi_\mathcal{M}(U) \rightarrow \psi_\mathcal{N}(V)$  es diferenciable de clase  $C^k$  en  $\psi_\mathcal{M}(p) = 0$ .
- Una función  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  se dice diferenciable de clase  $C^k$  en  $\mathcal{M}$  si y sólo si,  $f$  es diferenciable de clase  $C^k$   $\forall p \in \mathcal{M}$ .
- Si  $f$  es diferenciable de clase  $C^k$  se puede escribir de la siguiente forma:  $f \in C^k(\mathcal{M}, \mathcal{N})$

Para más información, revisar [GN14, Sección 1.3] y [Tu11, Sección 6].

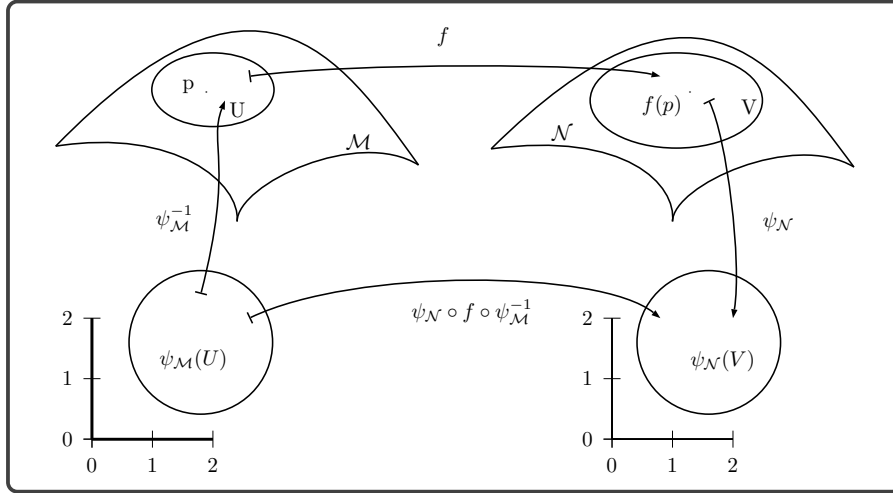


Figura 3.1.3: Funciones Diferenciables en Variedades.

### 3.2. Espacio Tangente

En esta subsección construimos algunos objetos matemáticos que usaremos para definir el **espacio tangente** y los **campos vectoriales**.

**Proposición 3.2.1. Curvas Tangencialmente Equivalentes:**

Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathcal{M}})$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$  con  $p \in \mathcal{M}$ . Dado el conjunto  $\mathcal{K}_p$  de curvas que pasan por  $p$  en  $t = 0$ , es decir

$$\mathcal{K}_p(\mathcal{M}) = \{\gamma \in C^\infty((-\epsilon, \epsilon), \mathcal{M}) : \gamma(0) = p\}.$$

Tomando  $\alpha, \beta \in \mathcal{K}_p(\mathcal{M})$  se dicen **Tangencialmente Equivalentes**,  $\alpha \sim \beta$ , si

$$(\phi \circ \alpha)'(0) = (\phi \circ \beta)'(0) \in \mathbb{R}^n.$$

Para alguna carta  $(\phi, U)$  con  $p \in U$ . Notemos que  $\sim$  es una relación de equivalencia.

**Definición 3.2.1. Espacio Tangente:**

Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathcal{M}})$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$  con  $p \in \mathcal{M}$ . Definimos al **espacio tangente** como el conjunto de clases de equivalencia

$$T_p\mathcal{M} := \mathcal{K}_p(\mathcal{M}) / \sim.$$

Donde  $\sim$  es la relación de curvas **tangencialmente equivalentes** y sus elementos son clases de equivalencia  $[\dot{\gamma}(0)] \in T_p\mathcal{M}$  que llamaremos **vectores tangentes** en  $p$ . En adelante consideraremos únicamente a los representantes de cada clase de equivalencia en  $T_p\mathcal{M}$ .



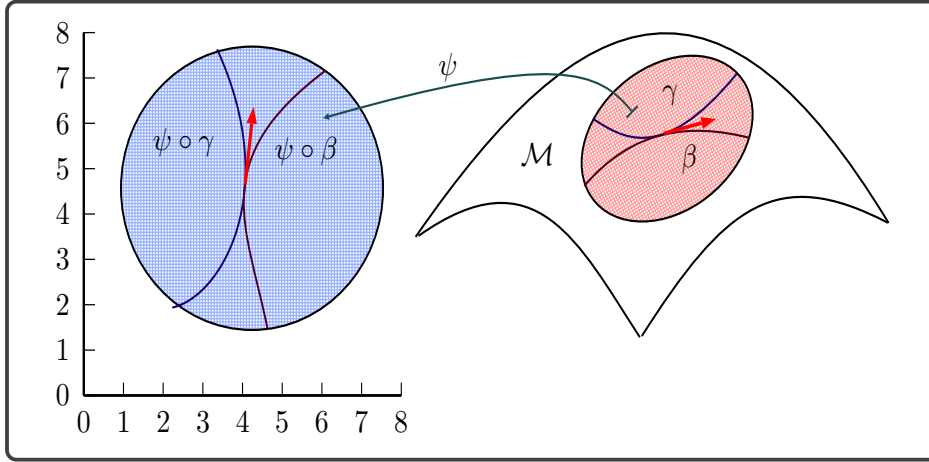


Figura 3.2.1: Curvas Tangencialmente Equivalentes.

Una definición alternativa para el **espacio tangente** que nos será de mayor utilidad se construye a continuación.

**Proposición 3.2.2. Germen:**

Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathcal{M}})$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$  con  $p \in \mathcal{M}$  fijo. Tomando  $f, g \in C^{\infty}(U, \mathbb{R})$  con  $U$  vecindad de  $p$ . Definimos una relación  $f \sim_U g$  si y sólo si  $f \equiv g$  en alguna vecindad  $V \subset U$  de  $p$ . Notemos que  $\sim_U$  es una relación de equivalencia y la clase  $[f]$  la llamaremos **germen** de  $f$  en  $p$ , al conjunto de todas las clases de equivalencia la denotamos por  $\mathcal{E}_p(U)$ .

**Definición 3.2.2. Espacio Tangente (Segunda Versión):**

Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathcal{M}})$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$  con  $p \in U \subset \mathcal{M}$  con  $U$  vecindad de  $p$ . Definimos al **Espacio Tangente** de  $\mathcal{M}$  en  $p$  como

$$T_p \mathcal{M} := \{v \in \mathfrak{L}(\mathcal{E}_p(U), \mathbb{R}) : v(f \cdot g) = g(p)v(f) + f(p)v(g)\}$$

Donde  $v$  es un operador lineal llamado **Vector Tangente** y la operación  $v(f)$  con  $f \in \mathcal{E}_p(U)$  es llamada **Derivación**.

**Proposición 3.2.3. Derivaciones:**

Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathcal{M}})$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$  con  $p \in \mathcal{M}$ . Dado  $v \in T_p \mathcal{M}$  y un  $f \in \mathcal{E}_p(U)$  arbitrario, entonces existe una curva  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{M}$  tal que  $\gamma(0) = p$  y  $[\dot{\gamma}(0)] \equiv v$  y expresamos a la **derivación** de  $v$  como sigue

$$v(f) = \dot{\gamma}(0)(f) = \frac{d}{dt} (f \circ \gamma)(0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\gamma(t)).$$

La demostración de esta proposición se puede encontrar en [Jä10, Sección 2.2].

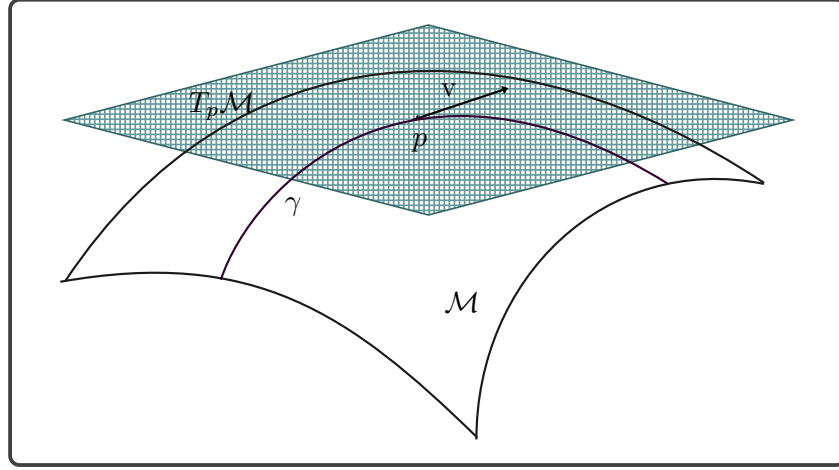


Figura 3.2.2: Espacio Tangente.

**Proposición 3.2.4. Caracterizaciones del Espacio Tangente:**

Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathcal{M}})$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$  con  $p \in \mathcal{M}$  fijo. Sea  $v$  tangente en  $p$ , es decir existe una curva diferenciable  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{M}$  y sea  $(U, \psi) \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$  una carta coordenada con  $p \in U$ , sea  $f \in \mathcal{E}_p(U)$  entonces  $v$  se puede caracterizar de la siguiente forma

$$v = \left( \sum_{i=1}^n \dot{x}^i(0) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\psi(p)} \right).$$

Considerando que  $\tilde{f} = f \circ \psi^{-1}$ ,  $x(t) = \psi \circ \gamma(t)$  y  $\psi(p) = x(0)$ , aquí usando de manera indistinta las siguientes notaciones  $x_i(t) = x^i(t)$ .

**Demostración.**

Consideremos  $f \in \mathcal{E}_p(U)$ , las definiciones de  $\tilde{f} = f \circ \psi^{-1}$  y  $x(t) = \psi \circ \gamma(t)$ , con ello tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} v(f) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\gamma(t)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \overbrace{(f \circ \psi^{-1})}^{\tilde{f}} \circ \overbrace{\psi \circ \gamma(t)}^x \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\tilde{f} \circ x(t)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \tilde{f}(x(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(x(0)) \frac{dx^i}{dt}(0) \\ &= \sum_{i=1}^n \dot{x}^i(0) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(\psi(p)) = \left( \sum_{i=1}^n \dot{x}^i(0) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\psi(p)} \right) \tilde{f} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Lema 3.2.1. Base del Espacio Tangente:**

Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathcal{M}})$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$ ,  $p \in \mathcal{M}$  y  $(U, \psi) \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$  una carta coordenada alrededor de  $p$  con  $T_p\mathcal{M}$  el espacio tangente en  $p$ , entonces cualquier elemento  $v$  se puede escribir como combinación lineal de las siguientes bases

$$T_p\mathcal{M} = \text{span} \left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_{\psi(p)}, i = 1, \dots, n \right\} \equiv \text{span} \left\{ \left. \frac{\partial}{\partial u_i} \right|_p, i = 1, \dots, n \right\}$$

con  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable y

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_{\psi(p)} (f) = \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_{\psi(p)} (f \circ \psi^{-1}) \equiv \left. \frac{\partial}{\partial u_i} \right|_p (f).$$

Recordemos que  $\tilde{f}$  y  $x_i$  son las coordenadas de la curva  $x$  dadas en la caracterización de la **Proposición 3.2.4**.

Con esto último podemos definir a la variedad diferencial que llamaremos **Haz Tangente**.

**Definición 3.2.3. Haz Tangente:**

Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathcal{M}})$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$  y  $p \in \mathcal{M}$  un punto fijo. Definimos el **haz tangente** como la unión de todos los espacios tangentes a cada punto en  $\mathcal{M}$ , es decir:

$$T\mathcal{M} = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} T_p\mathcal{M} = \{(p, v) : v \in T_p\mathcal{M}\}.$$

De manera alternativa podemos usar la siguiente notación  $v_p = (p, v)$  para elementos del Haz Tangente, en algunos casos se omite escribir explícitamente la dependencia de  $v$  respecto a  $p$  como elementos del **haz tangente**.

Así podemos definir la siguiente función  $\pi : T\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  como

$$\pi(v_p) = \pi(p, v) = p, \quad \forall v \in T_p\mathcal{M}.$$

Notemos que  $\pi^{-1}(p) = T_p\mathcal{M}$  y

$$T\mathcal{M} = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} \pi^{-1}(p).$$

Cabe resaltar que el **haz tangente** admite también una estructura diferencial.

Para más información, revisar [GN14, Sección 1.4], [Tu11, Sección 8] y [SMPV07, Sección 1.2]

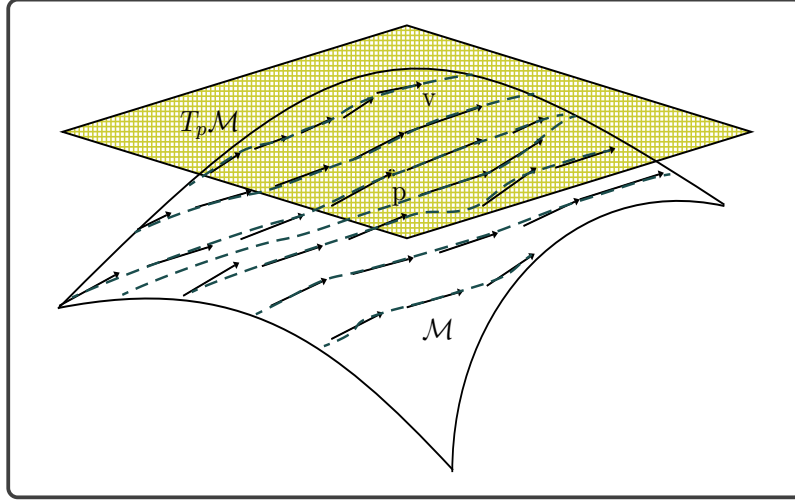


Figura 3.2.3: Campo Vectorial.

### 3.3. Campos Vectoriales

#### Definición 3.3.1. *Campo Vectorial:*

Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathcal{M}})$  una variedad diferenciable y sea  $p \in \mathcal{M}$ . Se define un **campo vectorial** en el punto  $p$  como sigue

$$\begin{cases} X : \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M} \\ p \mapsto X(p) := X_p \in T_p\mathcal{M} \end{cases}$$

El campo vectorial se dice diferenciable si, el mapeo es diferenciable, el conjunto de todos los campos vectoriales en  $\mathcal{M}$  es denotado por  $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ .

#### Proposición 3.3.1. *Caracterización de Campos Vectoriales:*

Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathcal{M}})$  una variedad diferenciable,  $p \in \mathcal{M}$  y  $X(p) \in T_p\mathcal{M}$  un campo vectorial en el punto  $p$ , por la proposición 3.2.4 y el lema 3.2.1 sabemos que  $X(p)$  se caracteriza como sigue

$$X(p) = \sum_{i=1}^n X_i(p) \frac{\partial}{\partial u_i} \Big|_p$$

#### Definición 3.3.2. *Curvas Integrales:*

Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathcal{M}})$  una variedad diferenciable, sea  $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  un campo vectorial el  $\mathcal{M}$ . Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo abierto tal que una curva  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$  es llamada una **curva integral** de  $X$  si satisface la siguiente ecuación

$$\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t))$$

$\forall t \in I$ .

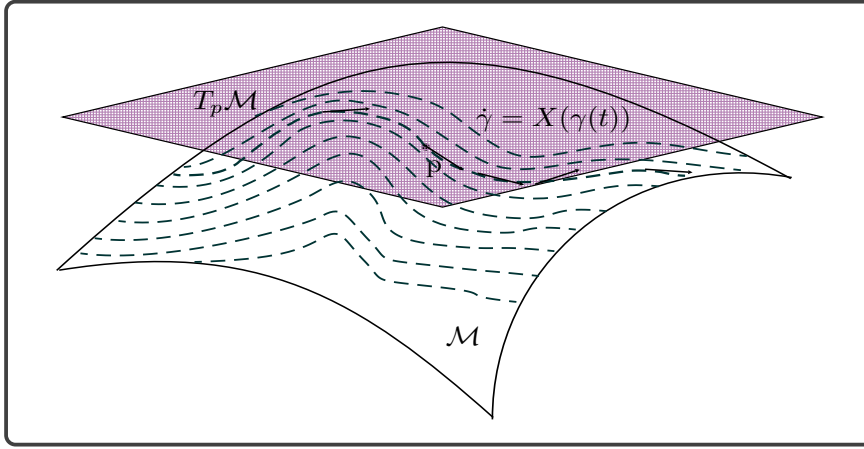


Figura 3.3.1: Curva Integral.

**Proposición 3.3.2. Bracket de Lie:**

Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathcal{M}})$  una variedad diferenciable y sean  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ , existe un único campo vectorial  $Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  tal que

$$Zf = (XY - YX)f$$

para toda función diferenciable  $f \in C^{\infty}(M)$ . A este campo vectorial se le llama **Bracket de Lie** y se denota como sigue

$$Z = [X, Y].$$

**Proposición 3.3.3. Propiedades del Bracket de Lie:**

Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathcal{M}})$  una variedad diferenciable y sean  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  entonces el Bracket de Lie tiene las siguientes propiedades

(i) **Bilinealidad:** Para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} [\alpha X + \beta Y, Z] &= \alpha [X, Z] + \beta [Y, Z] \\ [X, \alpha Y + \beta Z] &= \alpha [X, Y] + \beta [X, Z]. \end{aligned}$$

(ii) **Antisimetría:**

$$[X, Y] = -[Y, X].$$

(iii) **Identidad de Jacobi:**

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$$

(iv) **Regla de Leibniz:** Para todo par  $f, g \in C^{\infty}(M)$

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(X(g))Y - g(Y(f))X.$$

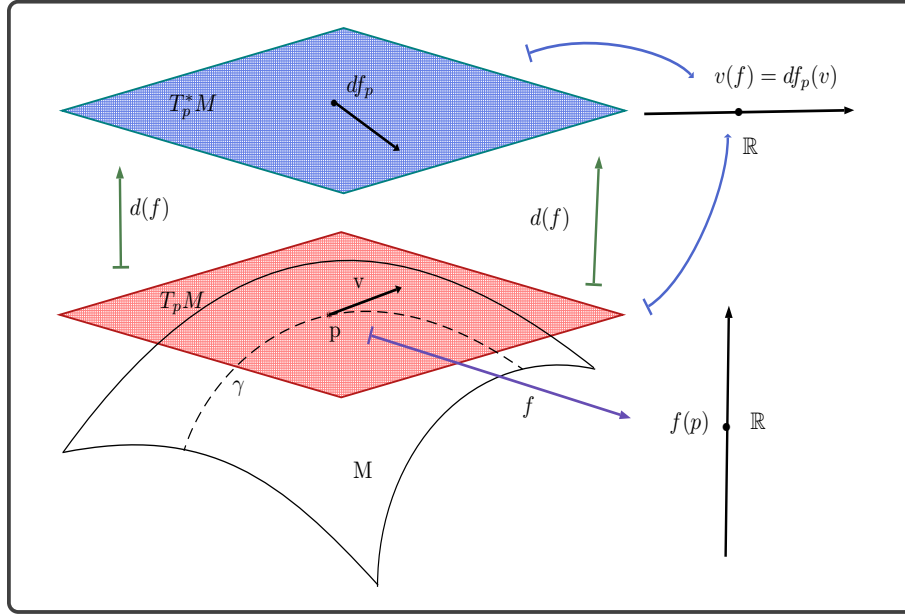


Figura 3.3.2: Diferencial y Espacio Cotangente.

**Definición 3.3.3. Diferencial de una Función y Espacio Cotangente:** Sea  $(M, \mathcal{D}_M)$  una variedad diferenciable, con  $v \in T_p M$  y  $p \in M$  fijo. Sea  $f \in C^1(M, \mathbb{R})$  arbitraria entonces se define la diferencial de  $df_p \in T_p^* M$  como una transformación lineal  $df_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$df_p(v) = v(f).$$

El conjunto  $T_p^* M$  es conocido como el **Espacio Cotangente** en el punto  $p$ , definido como

$$T_p^* M = \{df_p | f \in C^1(M, \mathbb{R}) \text{ y } p \in M \text{ fijo}\}.$$

El **Espacio Cotangente** es el espacio dual del **Espacio Tangente**.

**Definición 3.3.4. Haz Cotangente:**

Sea  $(M, \mathcal{D}_M)$  una variedad diferenciable, con  $p \in M$ . Sea  $f \in C^1(M, \mathbb{R})$  arbitraria tal que el diferencial  $df_p \in T_p^* M$  entonces se define el **Haz Cotangente** como

$$T^* M = \bigcup_{p \in M} T_p^* M := \{(p, df_p) : df_p \in T_p^* M, \forall f \in C^1(M, \mathbb{R}) \text{ y } \forall p \in M\}$$

Nuevamente cabe resaltar que el **Haz Cotangente** admite una estructura diferencial pues a su vez es una variedad diferenciable.

**Corolario 3.3.1. Bracket de Lie Nulo:**

Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathcal{M}})$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$ , con  $p \in U$  y  $(U, \psi) \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$  una carta coordenada, entonces dada una base de  $T_p\mathcal{M}$ , tenemos que

$$\left[ \frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j} \right] = 0, \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

**Demostración.**

Dado  $(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathcal{M}})$ ,  $p \in U$  y  $(U, \psi) \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$  una carta coordenada, con  $T_p\mathcal{M}$  el espacio tangente en  $p$ , por el lema 3.2.1 y la definición 3.2.3 obtenemos que

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \Big|_p (f) \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\psi(p)} (f \circ \psi^{-1})$$

Ahora, tomando  $\frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j} \in \mathfrak{X}(U)$  operadores de la base del haz tangente para cada  $p \in U$  y  $0 \neq f \in \mathcal{E}_p(U)$  entonces calculamos su Bracket de Lie

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j} \right] (f) &= \frac{\partial}{\partial u_i} \left( \frac{\partial}{\partial u_j} \right) (f) - \frac{\partial}{\partial u_j} \left( \frac{\partial}{\partial u_i} \right) (f) \\ &\equiv \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\psi(p)} (f \circ \psi^{-1}) - \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} \Big|_{\psi(p)} (f \circ \psi^{-1}) \\ &= \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_i \partial x_j} (\psi(p)) - \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_j \partial x_i} (\psi(p)) = 0 \end{aligned}$$

Lo último pues la función  $0 \neq \tilde{f} = f \circ \psi^{-1} : \psi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $\psi(U) \subset \mathbb{R}^n$  ■.

Para más información revisar [PdC92, Sección 5, Capítulo 0], [GN14, Sección 1.6] y [WRAS20, Sección 2.4].

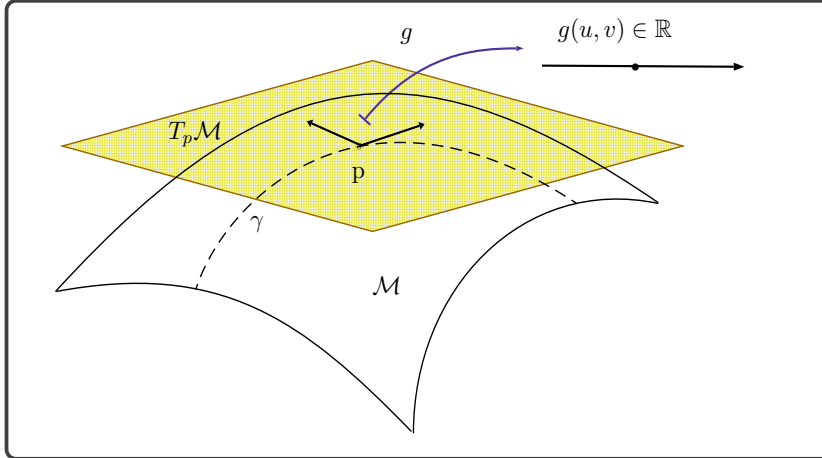


Figura 3.3.3: Métrica riemanniana.

### 3.4. Métrica Riemanniana

#### Definición 3.4.1. Producto Interior Euclidiano:

Sea  $u = (u_1, \dots, u_n), v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ , el **producto interior euclidiano** se define como sigue

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

#### Definición 3.4.2. Producto Interior:

Sea  $V$  un espacio vectorial, una función  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  se dice que es un **producto interior** si cumple con las siguientes propiedades:

- **Bilíneal:** para todos  $u, v, w \in V$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ .

$$\begin{aligned} \langle v, \alpha u + \beta w \rangle &= \langle v, \alpha u \rangle + \langle v, \beta w \rangle \\ \langle \alpha v + \beta u, w \rangle &= \langle \alpha v, w \rangle + \langle \beta u, w \rangle. \end{aligned}$$

- **Simétrica:** para todos  $u, v \in V$ .  $\langle v, u \rangle = \langle u, v \rangle$ .
- **Definida Positiva:**  $\forall u \in V \setminus \{0\}, \langle u, u \rangle > 0$ .

#### Definición 3.4.3. Métrica Riemanniana:

Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathcal{M}})$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$  y sea  $p \in \mathcal{M}$ . Se define una **métrica riemanniana** como una función  $g$  diferenciable tal que

$$g_p(*, *) = \langle *, * \rangle_p : T_p \mathcal{M} \times T_p \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall p \in \mathcal{M}$$

Donde  $g_p$  es un producto interior y adicionalmente definimos la longitud o norma de  $X \in T_p \mathcal{M}$  como  $\|X\| := g_p(X, X)^{\frac{1}{2}}$ .

#### Definición 3.4.4. Variedad Riemanniana:

Una **variedad riemanniana** es una variedad diferenciable  $(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathcal{M}})$  con una métrica riemanniana. Una **variedad riemanniana** se denota como  $(\mathcal{M}, g)$ .

#### Definición 3.4.5. Coeficientes de la Métrica:

Sea  $(\mathcal{M}, g)$  una variedad riemanniana,  $(U, \psi) \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$  una carta coordenada y  $T_p \mathcal{M}$  el espacio tangente con  $p \in U$ , entonces localmente los **Coeficientes de la Métrica** se definen como

$$g_{ij} := g \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right), \quad \forall i, j.$$

Además existe una representar matricial que opera sobre las coordenadas de los campos, denotada por  $G$  y conocida como **Tensor Métrico**

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}.$$

Finalmente hay que destacar que  $G$  es invertible y los coeficientes de la matriz inversa se denotan como  $G^{-1} = (g_{ij})^{-1} = (g^{ij}), \forall i, j$ .



**Definición 3.4.6. Campo Gradiente:**

Dada una **variedad riemanniana**  $(\mathcal{M}, g)$ , con  $p \in \mathcal{M}$  y sea  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces, se define el único vector **gradiente**  $\text{grad } f$ ,  $\forall v \in T\mathcal{M}_p$  como

$$v(f) = df_p(v) = g(\text{grad } f, v).$$

**Definición 3.4.7. Longitud de Arco:**

Dada una **variedad riemanniana**  $(\mathcal{M}, g)$ , con  $p, q \in \mathcal{M}$  y sea  $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathcal{M}$ , una curva tal que  $\gamma(a) = p$  y  $\gamma(b) = q$  entonces la **Longitud de Arco** de la curva  $\gamma$  se calcula como sigue

$$l_a^b(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Para más información, revisar [GN14, Capítulo 3] [Lee97].

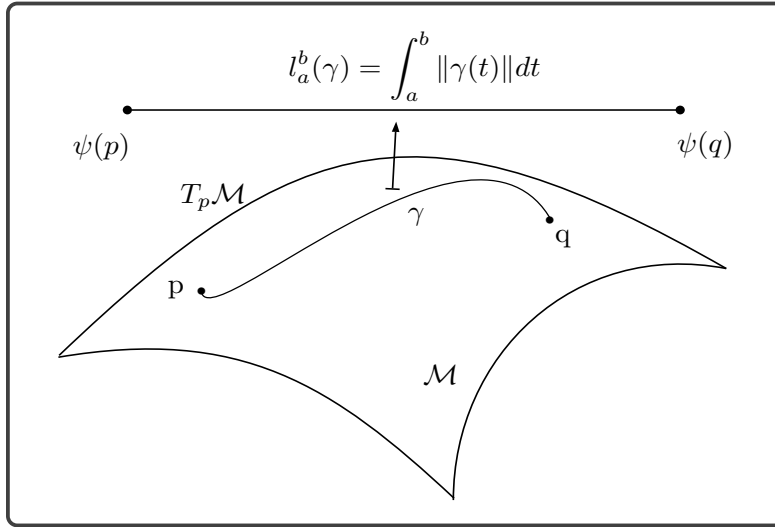


Figura 3.4.1: Longitud de Arco.

### 3.5. Conexión de Levi-Civita

**Definición 3.5.1. Conexión Afín:**

Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathcal{M}})$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$ , una conexión afín  $\nabla$ , es un mapeo  $\nabla : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  definido como  $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$  el cual  $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  y  $f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$  satisface las siguientes propiedades

- $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z.$
- $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z.$
- $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y.$

**Definición 3.5.2. Conexión de Levi-Civita:**

Sea  $(\mathcal{M}, \langle, \rangle)$  una variedad Riemanniana, la conexión de Levi-Civita  $\nabla$  en la variedad es una **Conexión Afín** que satisface las siguientes propiedades

a) **Simetría:**

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X.$$

b) **Compatibilidad con la Métrica:**

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle.$$

Adicionalmente como consecuencia de la linealidad, la compatibilidad con la métrica y la simetría de la **Conexión de Levi-Civita** tenemos la **Fórmula de Koszul**

$$\begin{aligned} 2 \langle Z, \nabla_Y X \rangle &= X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle \\ &\quad + \langle [Z, X], Y \rangle + \langle [Z, Y], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle. \end{aligned}$$

**Definición 3.5.3. Símbolos de Christoffel:**

Sea  $(\mathcal{M}, g)$  una variedad Riemanniana de dimensión  $n$ , con la conexión de Levi-Civita  $\nabla$ , dada  $(U, \psi) \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$  una carta coordenada y tomando  $T_p \mathcal{M}$  como en el lema 3.2.1, para algún  $p \in U$ , entonces los **Símbolos de Christoffel** se definen como

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (3.5.1)$$

**Proposición 3.5.1.**

Sea  $(\mathcal{M}, g)$  una variedad Riemanniana de dimensión  $n$ , con la conexión de Levi-Civita  $\nabla$ , dada  $(U, \psi) \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$  una carta coordenada y tomando  $T_p \mathcal{M}$  como en el lema 3.2.1, para algún  $p \in U$ , entonces los **Símbolos de Christoffel**  $\Gamma_{ij}^k$  tiene la siguiente forma

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \left[ \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial x_l} \right] g^{lk} \quad (3.5.2)$$

Más aún, si la base es ortogonal, es decir  $g_{ij} = g^{ij} = 0, \forall i \neq j$  entonces

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial x_k} \right] g^{kk}.$$

La demostración de estas afirmaciones es rutinaria y se pueden encontrar en [GN14, Teorema 3.2, Capítulo 3].

De ahora en adelante daremos por hecho que cuando trabajemos con una variedad Riemanniana  $\mathcal{M}$  estará equipada con la conexión de Levi-Civita.

### 3.5.1. Derivada Covariante

#### Proposición 3.5.2. Derivada Covariante:

Sea  $(\mathcal{M}, \langle, \rangle)$  una variedad Riemanniana. Existe una única correspondencia que asocia el campo vectorial  $V$  a lo largo de la curva diferenciable  $c : I \rightarrow \mathcal{M}$  con un campo vectorial  $\frac{DV}{dt}$  llamado la derivada covariante, tal que

- a)  $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$ .
- b)  $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$ , donde,  $V$  es un campo vectorial a lo largo de  $c$  y  $f$  es una función diferenciable a lo largo de  $I$ .
- c) si  $V$  es inducido por un campo vectorial  $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ , es decir  $V(t) = Y(c(t))$ , entonces  $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}}Y(c(t)) = \nabla_{\frac{dc}{dt}}V(t)$ .

#### Corolario 3.5.1. Compatibilidad con la Métrica:

Sea  $(\mathcal{M}, \langle, \rangle)$  una variedad Riemanniana entonces la **derivada covariante** es compatible con la métrica; es decir, para cualesquiera campos  $V$  y  $W$  a lo largo de una curva diferenciable  $c : I \rightarrow \mathcal{M}$

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle$$

para todo  $t \in I$ .

#### Proposición 3.5.3. Derivada Covariante en un Marco Local:

Sea  $(\mathcal{M}, \langle, \rangle)$  una variedad Riemanniana,  $(U, \psi) \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$  una carta coordenada,  $c(t) \in U$  una curva y un campo vectorial  $V(t) = Y(c(t))$  con una base de  $T_{c(t)}\mathcal{M}$  como en el lema 3.2.1 entonces la derivada covariante localmente es

$$\frac{DV}{dt} = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{dv_k}{dt} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k v_j \frac{dx_i}{dt} \right\} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

La demostración de esta proposición esta en [PdC92, Página 52].

### 3.5.2. Geodésicas

#### Definición 3.5.4. Geodésica:

Dada una variedad Riemanniana  $(\mathcal{M}, \langle, \rangle = g)$ , una curva parametrizada  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$  se dice geodésica en  $t_0 \in I$  si  $\frac{D}{dt} \left( \frac{d\gamma}{dt} \right) = 0$  en el punto  $t_0$ . Si  $\gamma(t)$  es geodésica  $\forall t \in I$  entonces decimos que  $\gamma(t)$  es una geodésica.

Una consecuencia de la definición anterior es que dada  $\gamma$  geodésica entonces

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{dt} \left( \frac{d\gamma}{dt} \right), \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0$$

lo que implica que  $\left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| = \text{constante}$ .

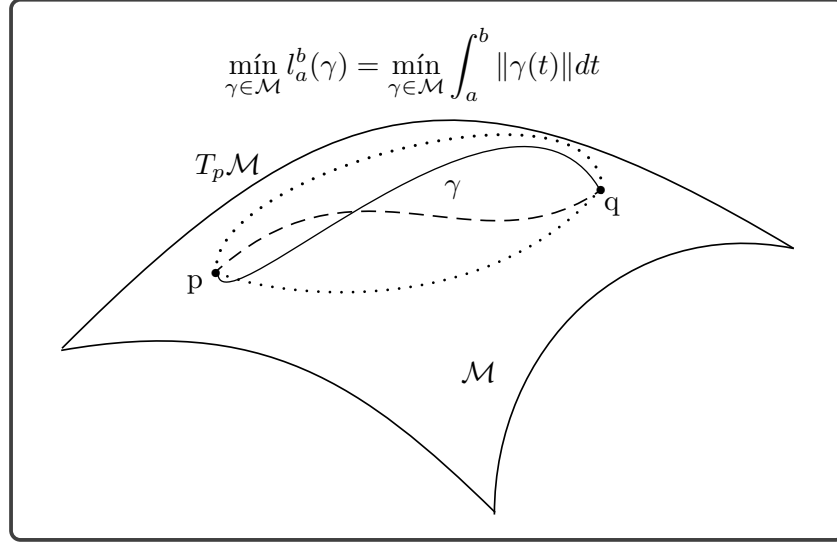


Figura 3.5.1: Geodésica.

**Corolario 3.5.2. Ecuaciones de la Geodésica:**

Dada una variedad Riemanniana  $(\mathcal{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ,  $(U, \psi) \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$  una carta coordenada y  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M} \cap U$  una curva geodésica  $\forall t \in I$  entonces cumple las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \frac{dx_j}{dt} \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^k = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

en donde  $(x_1(t), \dots, x_n(t)) = x(t) = \psi \circ \gamma(t)$  es la expresión local de  $\gamma(t) \in U$ .

**Demostración.**

Empecemos tomamos la definición 3.5.4 de la geodésica para utilizar la expresión de la curva geodésica en términos de la derivada covariante y usando la proposición 3.5.3 obtenemos que

$$\frac{D}{dt} \left( \frac{d\gamma}{dt} \right) = \frac{DV}{dt} = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{dv_k}{dt} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k v_j \frac{dx_i}{dt} \right\} \frac{\partial}{\partial x_k} = 0$$

ahora, tomando la expresión local de  $x(t) = \psi \circ \gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  y el campo  $x'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_n(t)) = (v_1(t), \dots, v_n(t))$  obtenemos que

$$\frac{D}{dt} \left( \frac{d\gamma}{dt} \right) = \frac{DV}{dt} = \sum_{k=1}^n \overbrace{\left\{ \frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{dx_j}{dt} \frac{dx_i}{dt} \right\}}^{\alpha_k} \frac{\partial}{\partial x_k} = 0 \quad (3.5.3)$$

Dado que  $\frac{\partial}{\partial x_k}$  es una base de  $T_{c(t)}\mathcal{M}$  por lo tanto cada uno de los coeficientes  $\alpha_k$  de 3.5.3 debe ser 0, lo cual nos lleva al resultado deseado ■

### 3.6. Operadores de Curvatura

En esta subsección abordamos el estudio de algunos de los operadores de curvatura básicos para la geometría Riemanniana que nos darán la herramienta más importante para el desarrollo de la tesis.

#### 3.6.1. Curvatura de Riemann

Empecemos por estudiar el **Operador de Curvatura de Riemann**.

**Definición 3.6.1. Operador de Curvatura de Riemann:**

Dada una variedad Riemanniana  $(\mathcal{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , el **operador de curvatura de Riemann** es un mapeo  $R(X, Y) : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  que para cada par  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  se define como

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}),$$

Donde  $\nabla$  es la conexión de Levi-Civita.

**Proposición 3.6.1.**

Sea  $\mathcal{M}, g$  una variedad Riemanniana y dados  $X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z, W \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  y  $\forall f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$ , el tensor de curvatura de Riemann cumple las siguientes propiedades

i) **Bilinealidad:**

$R$  es bilineal en  $\mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  es decir

$$\begin{aligned} R(fX_1 + gX_2, Y_1) &= fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1), \\ R(X_1, fY_1 + gY_2) &= fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2), \end{aligned}$$

ii) Para un par  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ , el operador de curvatura  $R(X, Y) : \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  es lineal tal que

$$\begin{aligned} R(X, Y)(Z + W) &= R(X, Y)Z + R(X, Y)W, \\ R(X, Y)fZ &= fR(X, Y)Z, \end{aligned}$$

**Definición 3.6.2. Coeficientes del Operador de Curvatura:**

Sea  $(\mathcal{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  una variedad Riemanniana y dada  $(U, \psi) \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$  una carta coordenada, entorno a  $p \in \mathcal{M}$  tenemos que dada una base  $\beta = \{\frac{\partial}{\partial x_k}, k = 1, 2, \dots, n\}$  y dados  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ , con expresiones locales de la forma

$$X = \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad Z = \sum_{k=1}^n w_k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Entonces por linealidad del operador definimos los **coeficientes del operador de curvatura**  $R_{ijk}^l$  como sigue

$$R(X, Y)Z = \sum_{i,j,k,l=1}^n u_i v_j w_k R_{ijk}^l \frac{\partial}{\partial x_l}$$

En donde  $R_{ijk}^l$  se puede expresar en términos de los símbolos de Christoffel como sigue

$$R_{ijk}^s = \sum_{l=1}^n \{\Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^s - \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^s\} + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^s - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{jk}^s \quad (3.6.1)$$

**Demostración.**

Sea  $(U, \psi) \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$  una carta coordenada para una vecindad de  $p \in \mathcal{M}$  y tomando una base de  $T_p \mathcal{M}$  de la forma dada en el lema 3.2.1, calculamos los símbolos de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$ . Calculando la curvatura para  $\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}$  y  $\frac{\partial}{\partial x_k}$ , tomando en cuenta la definición del operador de curvatura y sus coeficientes tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_k} &= \sum_{s=1}^n R_{ijk}^s \frac{\partial}{\partial x_s} \\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_k} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_k} + \nabla_{[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}]} \frac{\partial}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

Tomando en cuenta la definición de los símbolos de Christoffel, tenemos que

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_{l=1}^n \Gamma_{ik}^l \frac{\partial}{\partial x_l}, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_{l=1}^n \Gamma_{jk}^l \frac{\partial}{\partial x_l} \quad (3.6.3)$$

Sustituyendo 3.6.3 en 3.6.2, usando las propiedades (b) y (c) de la definición 3.5.1 de conexión afín y que  $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$  por el corolario 3.3.1, tenemos que

$$\begin{aligned} R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_k} &= \sum_{s=1}^n R_{ijk}^s \frac{\partial}{\partial x_s} \\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \left( \sum_{l=1}^n \Gamma_{ik}^l \frac{\partial}{\partial x_l} \right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left( \sum_{l=1}^n \Gamma_{jk}^l \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \\ &= \sum_{l=1}^n \left[ \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \left( \Gamma_{ik}^l \frac{\partial}{\partial x_l} \right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left( \Gamma_{jk}^l \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \right] \\ &= \sum_{l=1}^n \left[ \Gamma_{ik}^l \overbrace{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_l}}^1 + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^l \frac{\partial}{\partial x_l} - \Gamma_{jk}^l \overbrace{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_l}}^1 - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{jk}^l \frac{\partial}{\partial x_l} \right] \end{aligned}$$

Nuevamente usando la definición de los símbolos de Christoffel en los términos

marcados con (1) añadiendo el índice  $s$  en la suma obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_k} &= \sum_{s=1}^n R_{ijk}^s \frac{\partial}{\partial x_s} \\ &= \sum_{l=1}^n \left[ \Gamma_{ik}^l \sum_{s=1}^n \Gamma_{jl}^s \frac{\partial}{\partial x_s} + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^l \frac{\partial}{\partial x_l} \right] \\ &\quad - \sum_{l=1}^n \left[ \Gamma_{jk}^l \sum_{s=1}^n \Gamma_{il}^s \frac{\partial}{\partial x_s} + \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{jk}^l \frac{\partial}{\partial x_l} \right] \end{aligned}$$

Distribuyendo las sumas y reorganizando los términos obtenemos

$$\begin{aligned} R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_k} &= \sum_{s=1}^n R_{ijk}^s \frac{\partial}{\partial x_s} \\ &= \sum_{s=1}^n \sum_{l=1}^n [\Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^s - \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^s] \frac{\partial}{\partial x_s} \\ &\quad - \underbrace{\sum_{l=1}^n \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^l - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{jk}^l \right]}_2 \frac{\partial}{\partial x_l} \end{aligned}$$

Intercambiando los índices  $l \rightarrow s$  en el término marcado con (2) y factorizando obtenemos que

$$\begin{aligned} R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_k} &= \sum_{s=1}^n R_{ijk}^s \frac{\partial}{\partial x_s} \\ &= \sum_{s=1}^n \sum_{l=1}^n [\Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^s - \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^s] \frac{\partial}{\partial x_s} + \sum_{s=1}^n \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^s - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{jk}^s \right] \frac{\partial}{\partial x_s} \\ &= \sum_{s=1}^n \left[ \sum_{l=1}^n [\Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^s - \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^s] + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^s - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{jk}^s \right] \frac{\partial}{\partial x_s} \end{aligned}$$

ahora, dado que  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_s}, s = 1, 2, \dots, n \right\}$  conforma una base, podemos entonces notar que por independencia lineal

$$R_{ijk}^s = \sum_{l=1}^n [\Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^s - \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^s] + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^s - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{jk}^s$$

lo cual es el resultado deseado ■

Para más información, revisar [PdC92, sección 2, capítulo 3]

### 3.6.2. Curvatura Seccional

#### Proposición 3.6.2.

Sea  $\sigma \subset T_p\mathcal{M}$  un subespacio de dimensión 2 del espacio tangente  $T_p\mathcal{M}$ , sea  $X, Y \in \sigma$  dos vectores linealmente independientes, entonces

$$K_{sec}(X, Y) = \frac{\langle R(X, Y)X, Y \rangle}{\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2}$$

no depende de la elección de la base de los vectores  $X, Y \in \sigma$ . Para ver la demostración [PdC92, página 94].

#### Definición 3.6.3. Curvatura Seccional:

Dada un punto  $p \in \mathcal{M}$  y un subespacio  $\sigma$  de dimensión 2 entonces el número real  $K_{sec}(\sigma) = K_{sec}(X, Y)$  es llamado **Curvatura Seccional**, donde  $\{X, Y\}$  es base de  $\sigma$ .

#### Corolario 3.6.1. Curvatura Seccional en Coordenadas Locales:

Sea  $(\mathcal{M}, \langle, \rangle)$  una variedad Riemanniana, dada  $(U, \psi) \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$  una carta coordenada entorno a  $p \in \mathcal{M}$ , con  $\beta = \{\frac{\partial}{\partial x_k}, k = 1, 2, \dots, n\}$  base de  $T_p\mathcal{M}$  y  $\sigma_{ij} = \text{span}\{\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\} \subset T_p\mathcal{M}$  entonces la curvatura seccional  $K_{sec}(\sigma_{ij})$  tiene la forma

$$K_{sec}(\sigma_{ij}) = K_{sec}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\sum_{k=1}^n R_{ijki}^k g_{kj}}{g_{ii}g_{jj} - (g_{ij})^2} \quad \forall i, j = 1, \dots, n \text{ con } i \neq j. \quad (3.6.4)$$

Más aún, si la base  $\beta$  es una base ortogonal la curvatura seccional toma la forma

$$K_{sec}(\sigma_{ij}) = K_{sec}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{R_{ijji}^j}{g_{ii}}. \quad (3.6.5)$$

#### Demostración.

Sea  $(\mathcal{M}, \langle, \rangle)$  una variedad Riemanniana, dada  $(U, \psi) \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$  una carta coordenada,  $\beta = \{\frac{\partial}{\partial x_k}, k = 1, 2, \dots, n\}$  base de  $T_p\mathcal{M}$  y dados los subespacios  $\sigma_{ij} = \text{gen}\{\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\} \subset T_p\mathcal{M}$ , calculamos la curvatura seccional  $K_{sec}(\sigma_{ij})$

$$K_{sec}(\sigma_{ij}) = K_{sec}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\langle R(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle}{\|\frac{\partial}{\partial x_i}\|^2\|\frac{\partial}{\partial x_j}\|^2 - \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle^2}$$

Usando la definición 3.6.2 sabemos que  $R(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n R_{ijki}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$  y la definición de los coeficiente de la métrica 3.4.5, al sustituir y usar las propiedades



de linealidad de la métrica Riemanniana tenemos que

$$\begin{aligned} K_{sec} \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) &= \frac{\left\langle \sum_{k=1}^n R_{iji}^k \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle}{g_{ii}g_{jj} - (g_{ij})^2} = \frac{\sum_{k=1}^n R_{iji}^k \left\langle \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle}{g_{ii}g_{jj} - (g_{ij})^2} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^n R_{iji}^k g_{kj}}{g_{ii}g_{jj} - (g_{ij})^2}. \end{aligned}$$

Así obtenemos la primer formula. Para la segunda formula, si  $\beta$  es una base ortogonal entonces  $g_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$ , usando la primer formula tenemos que

$$K_{sec} \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \frac{R_{iji}^j g_{jj}}{g_{ii}g_{jj}} = \frac{R_{iji}^j}{g_{ii}}. \quad \blacksquare$$

### Corolario 3.6.2. Curvatura de Gauss:

Sea  $(\mathcal{M}, g)$  una superficie de dimensión 2 entonces la curvatura seccional  $K_{sec}(\sigma_{12}) = K_{sec}(T_p\mathcal{M})$ , tomando  $\frac{\partial}{\partial x_1}$  y  $\frac{\partial}{\partial x_2}$  como base del espacio tangente entonces definimos la **Curvatura de Gauss**.

$$K_{sec}(\sigma_{12}) = K_{sec}(T_p\mathcal{M}) = \frac{g_{12}R_{121}^1 + g_{22}R_{121}^2}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}$$

Si  $\frac{\partial}{\partial x_1}$  y  $\frac{\partial}{\partial x_2}$  son ortogonales, entonces

$$K_{sec} \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right) = \frac{R_{121}^2}{g_{11}}.$$

### Demostración.

Usando el primer resultado del corolario 3.6.1 obtenemos

$$K_{sec} \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right) = \frac{\sum_{k=1}^2 R_{121}^k g_{k2}}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} = \frac{R_{121}^1 g_{12} + R_{121}^2 g_{22}}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}$$

lo cual es el primer resultado. Para el segundo resultado usamos la segunda fórmula del corolario 3.6.1, así

$$K_{sec} \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right) = \frac{R_{121}^2}{g_{11}}. \quad \blacksquare$$

### 3.6.3. Curvatura de Ricci

#### Definición 3.6.4. Curvatura de Ricci:

Sea  $(\mathcal{M}, g)$  una variedad Riemanniana y sea  $\beta = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}, i = 1, \dots, n \right\} \subset T_p\mathcal{M}$  una base ortonormal de  $T_p\mathcal{M}$ , tomando  $\frac{\partial}{\partial x_j} \in \beta$ , entonces tenemos que la **Curvatura de Ricci** en dirección de  $\frac{\partial}{\partial x_j}$  se define como

$$Ric \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left\langle R \left( \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle$$

**Lema 3.6.1. Curvatura de Ricci(2):**

Sea  $(\mathcal{M}, g)$  una variedad Riemanniana y sea  $\beta = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}, i = 1, \dots, n \right\} \subset T_p\mathcal{M}$  una base ortonormal de  $T_p\mathcal{M}$ , tomando  $\frac{\partial}{\partial x_i} \in \beta$ , entonces tenemos que la **Curvatura de Ricci** en dirección de  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  tiene la forma

$$Ric \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{(n-1)} \sum_{j=1}^n K_{sec}(\sigma_{ij})$$

**Demostración.**

Usando la fórmula de la definición 3.6.4 tenemos que

$$Ric \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n \left\langle R \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$$

Ahora, recordando la fórmula de la curvatura seccional de la proposición 3.6.2, la definición 3.6.3 y dado que  $\beta$  es una base ortonormal tenemos entonces que

$$\left\langle R \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = K_{sec}(\sigma_{ij})$$

con esto tenemos finalmente que

$$\begin{aligned} Ric \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n \left\langle R \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle \quad \text{con } j \neq i \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n K_{sec}(\sigma_{ij}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Resaltamos que  $\forall X \in T_p\mathcal{M}$  podemos construir una base ortonormal  $\alpha \subset T_p\mathcal{M}$ , tomando  $\hat{X}, \hat{Y} \in \alpha$  con  $\hat{X} = \frac{X}{\|X\|}$  entonces como consecuencia de la proposición 3.6.2 la **Curvatura Seccional**  $K_{sec}(\sigma) = K_{sec}(W, Z)$  no depende de la elección de los elementos  $W, Z \in \sigma = \text{span}\{\hat{X}, \hat{Y}\} \subset T_p\mathcal{M}$  por lo tanto por el lema 3.6.1 la curvatura  $Ric(X)$  no depende de los elementos que se utilicen para construir una base de  $T_p\mathcal{M}$  mientras la base sea ortonormal.

**3.6.4. Curvatura Escalar**

**Definición 3.6.5. Curvatura Escalar:**

Sea  $(\mathcal{M}, g)$  una variedad Riemanniana y sea  $\beta = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}, i = 1, \dots, n \right\} \subset T_p\mathcal{M}$  una base ortonormal de  $T_p\mathcal{M}$ , tomando  $\frac{\partial}{\partial x_i} \in \beta$ , entonces tenemos que la **Curvatura Escalar** se define como

$$K(p) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Ric \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right).$$

## 4. Métricas Conformes a la Métrica Euclidiana

En este capítulo desarrollamos algunos resultados asociados a las conocidas **métricas conformes**, en particular las métricas conformes a la métrica Euclidiana, todo ello como pieza fundamental de esta tesis pues, algunos de los resultados que se presentan en el capítulo 6 y 7 son derivados de lo expuesto en esta sección.

### Teorema 4.0.1. Conexión Métrica Conforme:

Sea  $(\mathcal{M}, g)$  una variedad Riemanniana, dotada con una conexión de Levi-Civita  $\nabla$ . Tomando  $\tilde{g} = \lambda g$  una métrica conforme a  $g$ , entonces, para todo par de campos vectoriales  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  la conexión de Levi-Civita para  $(\mathcal{M}, \tilde{g})$  estará dada por:

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + A_X Y \quad \text{donde} \\ A_X Y &= \frac{1}{2\lambda} (d\lambda(X)Y + d\lambda(Y)X - g(X, Y) \text{grad } \lambda).\end{aligned}$$

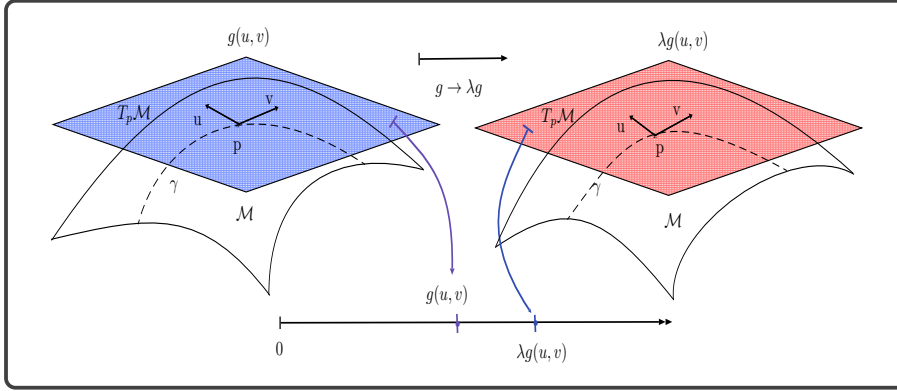


Figura 4.0.1: Métrica Conforme.

### Demostración.

Escribamos la fórmula de Koszul 3.5.2 para la conexión  $\nabla$

$$\begin{aligned}2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) \\ &\quad + g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g([Z, Y], X)\end{aligned}\quad (4.0.1)$$

para la conexión  $\tilde{\nabla}$  es de la forma

$$\begin{aligned}\overbrace{2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z)}^{(i)} &= \overbrace{X\tilde{g}(Y, Z)}^{(ii)} + \overbrace{Y\tilde{g}(X, Z)}^{(iii)} - \overbrace{Z\tilde{g}(X, Y)}^{(iv)} \\ &\quad + \overbrace{\tilde{g}([X, Y], Z) + \tilde{g}([Z, X], Y) + \tilde{g}([Z, Y], X)}^{(v)}\end{aligned}\quad (4.0.2)$$

Desarrollando de (i)-(v) tenemos que

$$\begin{aligned}
(i) \quad & 2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = 2\lambda g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) \\
(ii) \quad & X\tilde{g}(Y, Z) = X(\lambda g(Y, Z)) = X(\lambda)g(Y, Z) + \lambda Xg(Y, Z) \\
(iii) \quad & Y\tilde{g}(X, Z) = Y(\lambda g(X, Z)) = Y(\lambda)g(X, Z) + \lambda Yg(X, Z) \\
(iv) \quad & Z\tilde{g}(X, Y) = Z(\lambda g(X, Y)) = Z(\lambda)g(X, Y) + \lambda Zg(X, Y) \\
(v) \quad & \tilde{g}([X, Y], Z) + \tilde{g}([Z, X], Y) = \lambda \left\{ \begin{array}{l} g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) \\ + \tilde{g}([Z, Y], X) \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

Usando los términos desarrollados de (i)-(v), en 4.0.2 obtenemos que

$$\begin{aligned}
2\lambda g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = & X(\lambda)g(Y, Z) + Y(\lambda)g(X, Z) - Z(\lambda)g(X, Y) \\
& + \lambda \overbrace{\left\{ \begin{array}{l} Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) + \\ g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g([Z, Y], X) \end{array} \right\}}^{(6)}
\end{aligned}$$

Usando 4.0.1 en los términos marcados con (6) obtenemos

$$2\lambda g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = X(\lambda)g(Y, Z) + Y(\lambda)g(X, Z) - \overbrace{Z(\lambda)}^{(7)} g(X, Y) + 2\lambda g(\nabla_X Y, Z)$$

Dividiendo entre  $2\lambda$  y usando la definicion 3.4.6 del vector gradiente en (7)

$$Z(\lambda) = d\lambda(Z) = g(\text{grad } \lambda, Z)$$

Obtenemos lo siguiente

$$g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + \frac{1}{2\lambda} \{X(\lambda)g(Y, Z) + Y(\lambda)g(X, Z) - g(\text{grad } \lambda, Z)g(X, Y)\}$$

Ahora, agrupando todo dentro de la métrica usando su linealidad tenemos

$$g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = g(\nabla_X Y + \frac{1}{2\lambda} \{X(\lambda)Y + Y(\lambda)X - g(X, Y) \text{grad } \lambda\}, Z)$$

Finalmente usando que  $X(\lambda) = d\lambda(X)$ ,  $Y(\lambda) = d\lambda(Y)$  obtenemos la siguiente igualdad

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + \frac{1}{2\lambda} \{X(\lambda)Y + Y(\lambda)X - g(X, Y) \text{grad } \lambda\} \\
&= \nabla_X Y + \frac{1}{2\lambda} \{d\lambda(X)Y + d\lambda(Y)X - g(X, Y) \text{grad } \lambda\}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, queda demostrado el lema. ■

#### 4.1. Símbolos de Christoffel

**Corolario 4.1.1. Símbolos de Christoffel de Métricas Conformes:**

Sea  $(\mathcal{M}, g)$  una variedad Riemanniana de dimensión  $n$ , con una conexión Levi-Civita  $\nabla$ , dada la métrica  $\tilde{g} = \lambda g$  conforme a  $g$ , tenemos que para  $(\mathcal{M}, \tilde{g})$  y la conexión  $\tilde{\nabla}$  conforme los **Símbolos de Christoffel** son

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + \frac{1}{2\lambda} \sum_{l=1}^n \left[ g_{il} \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} + g_{lj} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} - g_{ji} \frac{\partial \lambda}{\partial x_l} \right] g^{lk} \quad (4.1.1)$$

donde  $\Gamma_{ij}^k$  y  $g_{ij}$  son los símbolos de Christoffel y términos de la métrica originales.

**Demostración.**

Sea  $(U, \psi) \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$  una carta coordenada para una vecindad de  $p \in \mathcal{M}$  y tomando una base de  $T_p \mathcal{M}$  como en el lema 3.2.1, dada la métrica conforme  $\tilde{g} = \lambda g$  y los coeficientes de la métrica  $\tilde{g}_{ij} = \lambda g_{ij}$  para todo  $i, j$ , también sabemos que  $(\tilde{g}_{ij})^{-1} = (\tilde{g}^{ij}) = (\frac{g^{ij}}{\lambda})$ . Calculando los símbolos de Christoffel para la métrica  $\tilde{g}$  usando la fórmula dada de la definición 3.5.3 obtenemos

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{ij}^k &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \left[ \frac{\partial \tilde{g}_{il}}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{g}_{lj}}{\partial x_i} - \frac{\partial \tilde{g}_{ji}}{\partial x_l} \right] \tilde{g}^{lk} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \left[ \frac{\partial(\lambda g_{il})}{\partial x_j} + \frac{\partial(\lambda g_{lj})}{\partial x_i} - \frac{\partial(\lambda g_{ji})}{\partial x_l} \right] \frac{g^{lk}}{\lambda} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \left[ \overbrace{\lambda \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j}}^{(1)} + \overbrace{g_{il} \frac{\partial \lambda}{\partial x_j}}^{(2)} + \overbrace{\lambda \frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i}}^{(1)} + \overbrace{g_{lj} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}}^{(2)} - \overbrace{\lambda \frac{\partial g_{ji}}{\partial x_l}}^{(1)} - \overbrace{g_{ji} \frac{\partial \lambda}{\partial x_l}}^{(2)} \right] \frac{g^{lk}}{\lambda} \end{aligned}$$

Agrupando y factorizando  $\lambda$  en los términos marcados con (1) y agrupando los términos marcados con (2) tenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{ij}^k &= \overbrace{\frac{\lambda}{2} \sum_{l=1}^n \left[ \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial x_l} \right] \frac{g^{lk}}{\lambda}}^{\Gamma_{ij}^k} + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \left[ g_{il} \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} + g_{lj} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} - g_{ji} \frac{\partial \lambda}{\partial x_l} \right] \frac{g^{lk}}{\lambda} \\ &= \Gamma_{ij}^k + \frac{1}{2\lambda} \sum_{l=1}^n \left[ g_{il} \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} + g_{lj} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} - g_{ji} \frac{\partial \lambda}{\partial x_l} \right] g^{lk} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

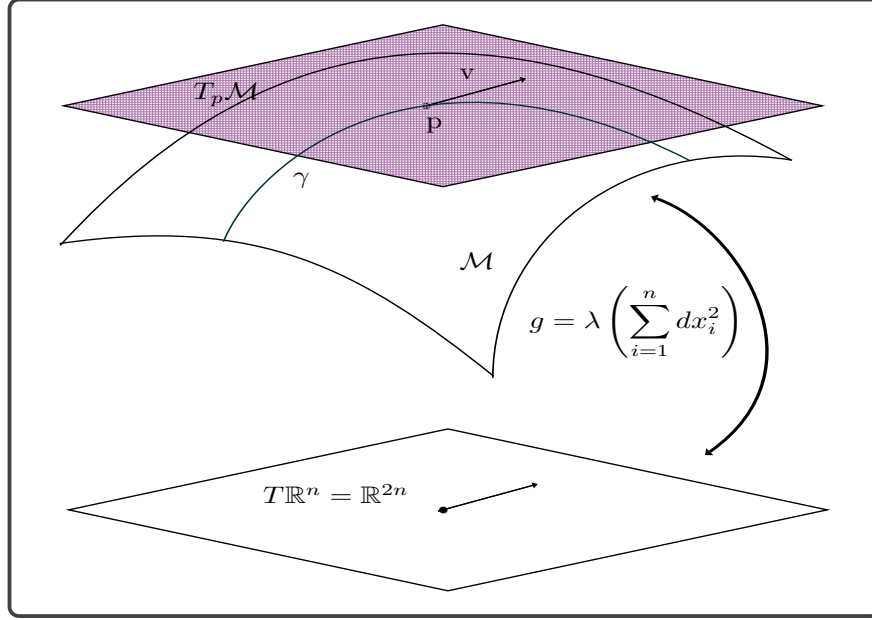


Figura 4.1.1: Métrica Conforme a la métrica Euclidiana.

**Corolario 4.1.2. Símbolos de Christoffel de Métricas Conformes a la métrica Euclidiana:**

Sea  $(\mathbb{R}^n, \tilde{g})$  una variedad Riemanniana de dimensión  $n$ , dotada con una conexión de Levi-Civita  $\tilde{\nabla}$  y una métrica conformes a la métrica Euclidiana  $\tilde{g} = \lambda(\sum_{k=1}^n dx_k^2)$ , entonces los **Símbolos de Christoffel** para  $(\mathbb{R}^n, \tilde{g})$  tienen las siguientes 5 reglas de cálculo.

- a) Si  $i \neq j \neq k$  entonces  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = 0$ .
- b) Si  $i = j \neq k$  entonces  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ii}^k = -\frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_k}$ .
- c) Si  $i = k \neq j$  entonces  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^i = \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_j}$ .
- d) Si  $k = j \neq i$  entonces  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^j = \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}$ .
- e) Si  $i = j = k$  entonces  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ii}^i = \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}$ .

**Demostración.**

Empecemos utilizando el resultado del corolario 4.1.1. Tenemos que los Símbolos de Christoffel para la métrica conforme son de la forma

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + \frac{1}{2\lambda} \sum_{l=1}^n \left[ g_{il} \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} + g_{lj} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} - g_{ji} \frac{\partial \lambda}{\partial x_l} \right] g^{lk}.$$

Tenemos que  $g_{ij} = \delta_{ij}$  y  $\Gamma_{ij}^k = 0$  pues son los Símbolos de Christoffel y los coeficientes de la métrica Euclídiana, por tanto

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \frac{1}{2\lambda} \left[ \delta_{ik} \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} + \delta_{kj} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} - \delta_{ji} \frac{\partial \lambda}{\partial x_k} \right].$$

Tomando en cuenta todas las posibles combinaciones con repetición de  $\{i, j, k = 1, 2, \dots, n\}$ , los cuales representan  $n^3$  posibles combinaciones, para calcularlas tenemos 5 casos posibles:

- a) Si  $i \neq j \neq k$  tenemos que en (4.28)  $\delta_{ik} = 0$ ,  $\delta_{kj} = 0$  y  $\delta_{ji} = 0$  por lo tanto  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = 0$ , lo que representa  $n(n-1)(n-2) = n^3 - 3n^2 + 2n$  términos.
- b) Si  $i = j \neq k$  tenemos que en (4.28)  $\delta_{ik} = 0$ ,  $\delta_{kj} = 0$  y  $\delta_{ji} = 1$  por lo tanto  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ii}^k = -\frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_k}$ , lo que representa  $n(n-1) = n^2 - n$  términos.
- c) Si  $i = k \neq j$  tenemos que en (4.28)  $\delta_{ik} = 1$ ,  $\delta_{kj} = 0$  y  $\delta_{ji} = 0$  por lo tanto  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^i = \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_j}$ , lo que representa  $n(n-1) = n^2 - n$  términos.
- d) Si  $k = j \neq i$  tenemos que en (4.28)  $\delta_{ik} = 0$ ,  $\delta_{kj} = 1$  y  $\delta_{ji} = 0$  por lo tanto  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^j = \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}$ , lo que representa  $n(n-1) = n^2 - n$  términos.
- e) Si  $i = j = k$  tenemos que en (4.28)  $\delta_{ik} = 1$ ,  $\delta_{kj} = 1$  y  $\delta_{ji} = 1$  y debido a que los índices son iguales, haciendo la suma total sólo queda un término, por lo tanto  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ii}^i = \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}$ , lo que representa  $n$  términos.

Finalmente hacemos la suma de los términos en a), b), c), d) y e), lo cual nos da  $n^3$  términos. ■

**Corolario 4.1.3. Símbolos de Christoffel de Métricas Conformes a la métrica Euclídiana en  $\mathbb{R}^2$ :**

Sea  $(\mathbb{R}^2, \tilde{g})$  una variedad Riemanniana con una métrica conforme a  $\mathbb{R}^2$ , es decir  $\tilde{g} = \lambda(dx_1^2 + dx_2^2)$  entonces tenemos que los **Símbolos de Christoffel** para  $(\mathbb{R}^2, \tilde{g})$  cumplen la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \\ \Gamma_{22}^2 &= \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = -\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_2}. \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

**Demostración.**

Usando el resultado del corolario anterior 4.1.2 y el hecho de que  $n = 2$ , obtenemos que hay  $2^3 = 8$  términos y correspondientemente 8 combinaciones de  $(i, j, k)$ , por tanto tenemos lo siguiente:

a)

Si  $i \neq j \neq k$  entonces  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = 0$ , pero no hay combinaciones de  $i, j$  y  $k$  en las cuales los 3 sean distintos índices.

b)

Si  $i = j \neq k$  entonces  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ii}^k = -\frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_k}$ , para este caso tenemos 2 posibles combinaciones  $(1, 1, 2)$  y  $(2, 2, 1)$ , así

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \quad (ii) \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \quad (i)$$

c)

Si  $i = k \neq j$  entonces  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^i = \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_j}$ , para este caso, tenemos las siguientes 2 combinaciones  $(1, 2, 1)$  y  $(2, 1, 2)$ , así

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \quad (ii) \quad \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \quad (i)$$

d)

Si  $k = j \neq i$  entonces  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^j = \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}$ , para este caso, tenemos las siguientes 2 combinaciones  $(2, 1, 1)$  y  $(1, 2, 2)$ , así

$$\Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \quad (ii) \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \quad (i)$$

e)

Si  $i = j = k$  entonces  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ii}^i = \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}$ , para este caso, tenemos las siguientes 2 combinaciones  $(1, 1, 1)$  y  $(2, 2, 2)$ , así

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \quad (i) \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \quad (ii)$$

Finalmente agrupando los términos marcados en (i) y (ii) obtenemos el resultado deseado. ■

**Corolario 4.1.4. Símbolos de Christoffel de Métricas Conformes a la métrica Euclidiana en  $\mathbb{R}^3$ :**

Sea  $(\mathbb{R}^3, \tilde{g})$  una variedad Riemanniana con una métrica conforme a la métrica Euclidiana  $\tilde{g} = \lambda(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$  entonces los **Símbolos de Christoffel** para  $(\mathbb{R}^3, \tilde{g})$  cumplen la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^3 &= \Gamma_{13}^2 = \Gamma_{21}^3 = \Gamma_{23}^1 = \Gamma_{31}^2 = \Gamma_{32}^1 = 0. \\ \Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = -\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{31}^3 = -\Gamma_{33}^1 = \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1}. \\ \Gamma_{22}^2 &= \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{23}^3 = -\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{32}^3 = -\Gamma_{33}^2 = \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_2}. \\ \Gamma_{33}^3 &= \Gamma_{31}^1 = \Gamma_{32}^2 = -\Gamma_{22}^3 = \Gamma_{23}^2 = \Gamma_{13}^1 = -\Gamma_{11}^3 = \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_3}. \end{aligned}$$



**Demostación.**

Usando el resultado del corolario 4.1.2 y el hecho de que  $n = 3$ , notamos que hay  $3^3 = 27$  términos que corresponden a 27 combinaciones de  $(i, j, k)$ , por tanto tenemos lo siguiente:

a)

Si  $i \neq j \neq k$  entonces  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = 0$ , lo que nos da 6 combinaciones posibles de  $i, j$  y  $k$  las cuales son  $(1, 2, 3)$ ,  $(1, 3, 2)$ ,  $(2, 1, 3)$ ,  $(2, 3, 1)$ ,  $(3, 1, 2)$  y  $(3, 2, 1)$ , por tanto tenemos que

$$\Gamma_{12}^3 = \Gamma_{13}^2 = \Gamma_{21}^3 = \Gamma_{23}^1 = \Gamma_{31}^2 = \Gamma_{32}^1 = 0. \quad (0)$$

b)

Si  $i = j \neq k$  entonces  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ii}^k = -\frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_k}$ , para este caso tenemos 6 posibles combinaciones  $(1, 1, 2)$ ,  $(2, 2, 1)$ ,  $(1, 1, 2)$ ,  $(2, 2, 1)$ ,  $(1, 1, 2)$  y  $(2, 2, 1)$  así

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^2 &= -\frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \quad (ii) & \Gamma_{11}^3 &= -\frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_3} \quad (iii) & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \quad (i) \\ \Gamma_{22}^3 &= -\frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_3} \quad (iii) & \Gamma_{33}^1 &= -\frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \quad (i) & \Gamma_{33}^2 &= -\frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \quad (ii) \end{aligned}$$

c)

Si  $i = k \neq j$  entonces  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^i = \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_j}$ , para este caso tenemos 6 posibles combinaciones  $(1, 2, 1)$ ,  $(1, 3, 1)$ ,  $(2, 1, 2)$ ,  $(2, 3, 2)$ ,  $(3, 1, 3)$  y  $(3, 2, 3)$  así

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \quad (ii) & \Gamma_{13}^1 &= \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_3} \quad (iii) & \Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \quad (i) \\ \Gamma_{23}^2 &= \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_3} \quad (iii) & \Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \quad (i) & \Gamma_{32}^3 &= \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \quad (ii) \end{aligned}$$

d)

Si  $k = j \neq i$  entonces  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^j = \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}$ , para este caso tenemos 6 posibles combinaciones  $(1, 2, 2)$ ,  $(1, 3, 3)$ ,  $(2, 1, 1)$ ,  $(2, 3, 3)$ ,  $(3, 1, 1)$  y  $(3, 2, 2)$  así

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \quad (i) & \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \quad (i) & \Gamma_{21}^1 &= \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \quad (ii) \\ \Gamma_{23}^3 &= \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \quad (ii) & \Gamma_{31}^1 &= \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_3} \quad (iii) & \Gamma_{32}^2 &= \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_3} \quad (iii) \end{aligned}$$

e)

Si  $i = j = k$  entonces  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ii}^i = \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}$ , para este caso tenemos 3 posibles combinaciones  $(1, 1, 1)$ ,  $(2, 2, 2)$  y  $(3, 3, 3)$  así

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} (i) \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} (ii) \quad \Gamma_{33}^3 = \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_3} (iii)$$

Finalmente agrupando los términos marcados en (i), (ii) y (iii) obtenemos el resultado deseado. ■

## 4.2. Curvatura Seccional

**Corolario 4.2.1. Curvaturas Seccionales Métrica Conforme a la Métrica Euclidiana:**

Sea  $(\mathbb{R}^n, \tilde{g})$  una variedad Riemanniana con  $\tilde{g} = \lambda(\sum_{k=1}^n dx_k^2)$  conformes a la métrica Euclidiana, entonces para una base  $\beta$  ortogonal del espacio tangente las curvaturas seccionales  $\tilde{K}_{sec}(\sigma_{ij}) = \tilde{K}_{sec}(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$  son

$$\tilde{K}_{sec}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = -\frac{\Delta_{ij} \ln \lambda}{2\lambda} - \frac{\|\nabla \lambda\|^2}{4\lambda^3} + \frac{\|\nabla_{ij} \lambda\|^2}{4\lambda^3} \quad (a)$$

$$= \tilde{K}_{sec}(\sigma_{ij}) = -\frac{\Delta_{ij} \lambda}{2\lambda^2} - \frac{\|\nabla \lambda\|^2}{4\lambda^3} + \frac{3\|\nabla_{ij} \lambda\|^2}{4\lambda^3} \quad (b) \quad (4.2.1)$$

$\forall i \neq j$  donde  $\Delta_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$  y  $\nabla_{ij} = (\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$ .

**Demostración.**

Empecemos a demostrar (a), haciendo uso de la fórmula (3.6.5) del corolario 3.6.1, así tenemos que  $\tilde{g}_{ii} = \lambda$  y

$$\tilde{K}_{sec}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\tilde{R}_{iji}^j}{\tilde{g}_{ii}} = \frac{\tilde{R}_{iji}^j}{\lambda} \quad (4.2.2)$$

Calculando el coeficiente del operador de curvatura  $\tilde{R}_{iji}^j$  usando la fórmula 3.6.1 de la definición 3.6.2 tenemos que

$$\tilde{R}_{iji}^j = \sum_{l=1}^n \overbrace{\{\tilde{\Gamma}_{ii}^l \tilde{\Gamma}_{jl}^j - \tilde{\Gamma}_{ji}^l \tilde{\Gamma}_{il}^j\}}^{(1)} + \overbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{\Gamma}_{ii}^j}^{(2)} - \overbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{\Gamma}_{ji}^j}^{(3)}} \quad (4.2.3)$$

Ahora, los términos  $\tilde{\Gamma}$  son los símbolos de Christoffel de la métrica conforme a la métrica Euclidiana que calculamos usando las reglas de cálculo del corolario 4.1.2, así los términos marcados con (1),(2) y (3), se desarrollan como sigue

(1) Para estos términos, la suma tiene la forma

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n \{\tilde{\Gamma}_{ii}^l \tilde{\Gamma}_{jl}^j - \tilde{\Gamma}_{ji}^l \tilde{\Gamma}_{il}^j\} &= \sum_{\substack{1 \leq l \leq n \\ l \neq i \neq j}} \{\tilde{\Gamma}_{ii}^l \tilde{\Gamma}_{jl}^j - \tilde{\Gamma}_{ji}^l \tilde{\Gamma}_{il}^j\} \\ &+ \overbrace{\{\tilde{\Gamma}_{ii}^i \tilde{\Gamma}_{ji}^j - \tilde{\Gamma}_{ji}^i \tilde{\Gamma}_{ii}^j\}}^{l=i} + \overbrace{\{\tilde{\Gamma}_{ii}^j \tilde{\Gamma}_{jj}^j - \tilde{\Gamma}_{ji}^j \tilde{\Gamma}_{ij}^j\}}^{l=j} \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Calculando los símbolos de Christoffel con las reglas de cálculo para el caso  $l = i$  y tomando en cuenta que  $i \neq j$  tenemos que

$$\left\{ \underbrace{\frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}}_{\tilde{\Gamma}_{ii}^i} \underbrace{\frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}}_{\tilde{\Gamma}_{ji}^j} - \underbrace{-\frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_j}}_{\tilde{\Gamma}_{ji}^i} \underbrace{\frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_j}}_{\tilde{\Gamma}_{ii}^j} \right\} = \frac{1}{4\lambda^2} \left( \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} \right)^2 \right)$$

Para el siguiente caso tenemos con las reglas de cálculo para el caso  $l = j$  y tomando en cuenta que  $i \neq j$  tenemos que

$$\left\{ \underbrace{-\frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_j}}_{\tilde{\Gamma}_{ii}^j} \underbrace{\frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_j}}_{\tilde{\Gamma}_{jj}^j} - \underbrace{\frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}}_{\tilde{\Gamma}_{ji}^j} \underbrace{\frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}}_{\tilde{\Gamma}_{ij}^j} \right\} = -\frac{1}{4\lambda^2} \left( \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} \right)^2 + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \right)^2 \right)$$

Sustituyendo en (4.2.4) obtenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n \{ \tilde{\Gamma}_{ii}^l \tilde{\Gamma}_{jl}^j - \tilde{\Gamma}_{ji}^l \tilde{\Gamma}_{il}^j \} &= \sum_{\substack{1 \leq l \leq n \\ l \neq i \neq j}} \{ \tilde{\Gamma}_{ii}^l \tilde{\Gamma}_{jl}^j - \tilde{\Gamma}_{ji}^l \tilde{\Gamma}_{il}^j \} \\ &+ \frac{1}{4\lambda^2} \left( \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} \right)^2 \right) - \frac{1}{4\lambda^2} \left( \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} \right)^2 + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \right)^2 \right) \\ &= \sum_{\substack{1 \leq l \leq n \\ l \neq i \neq j}} \left( \tilde{\Gamma}_{ii}^l \tilde{\Gamma}_{jl}^j - \tilde{\Gamma}_{ji}^l \tilde{\Gamma}_{il}^j \right) = \sum_{\substack{1 \leq l \leq n \\ l \neq i \neq j}} \tilde{\Gamma}_{ii}^l \tilde{\Gamma}_{jl}^j - \sum_{\substack{1 \leq l \leq n \\ l \neq i \neq j}} \tilde{\Gamma}_{ji}^l \tilde{\Gamma}_{il}^j \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Calculando los símbolos de Christoffel de la primera suma siguiendo las reglas de cálculo y dado que  $l \neq i \neq j$  tenemos lo siguiente

$$\tilde{\Gamma}_{ii}^l = -\frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_l} \quad \tilde{\Gamma}_{jl}^j = \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_l}.$$

Para la segunda suma siguiendo las reglas de cálculo y dado que  $l \neq i \neq j$  tenemos lo siguiente

$$\tilde{\Gamma}_{ji}^l = 0 \quad \tilde{\Gamma}_{il}^j = 0$$

Por tanto, la segunda suma se anula y la primera se escribe continuando en (4.2.5) como sigue

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n \{ \tilde{\Gamma}_{ii}^l \tilde{\Gamma}_{jl}^j - \tilde{\Gamma}_{ji}^l \tilde{\Gamma}_{il}^j \} &= \sum_{\substack{1 \leq l \leq n \\ l \neq i \neq j}} \{ \tilde{\Gamma}_{ii}^l \tilde{\Gamma}_{jl}^j - \tilde{\Gamma}_{ji}^l \tilde{\Gamma}_{il}^j \} = \sum_{\substack{1 \leq l \leq n \\ l \neq i \neq j}} \tilde{\Gamma}_{ii}^l \tilde{\Gamma}_{jl}^j - \sum_{\substack{1 \leq l \leq n \\ l \neq i \neq j}} \tilde{\Gamma}_{ji}^l \tilde{\Gamma}_{il}^j \\ &= \sum_{\substack{1 \leq l \leq n \\ l \neq i \neq j}} \tilde{\Gamma}_{ii}^l \tilde{\Gamma}_{jl}^j = \sum_{\substack{1 \leq l \leq n \\ l \neq i \neq j}} \left( -\frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_l} \right) \left( \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_l} \right) \\ &= -\frac{1}{4\lambda^2} \sum_{\substack{1 \leq l \leq n \\ l \neq i \neq j}} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_l} \right)^2. \end{aligned}$$

(2) Para el término marcado con (2) tenemos que calcular el símbolo de Christoffel  $\tilde{\Gamma}_{ii}^j$ , el cual con la regla de cálculo nos permite obtener lo siguiente

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{\Gamma}_{ii}^j = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \ln \lambda.$$

(3) Para el término marcado con (3) tenemos que calcular el símbolo de Christoffel  $\tilde{\Gamma}_{ji}^j$ , el cual con la regla de cálculo nos permite obtener lo siguiente

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{\Gamma}_{ji}^j = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \ln \lambda.$$

Hecho esto, podemos terminar de calcular el coeficiente del operador de curvatura  $\tilde{R}_{iji}^j$  continuando lo hecho en (4.2.3)

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{iji}^j &= \sum_{l=1}^n \overbrace{\{\tilde{\Gamma}_{il}^l \tilde{\Gamma}_{jl}^j - \tilde{\Gamma}_{ji}^l \tilde{\Gamma}_{il}^j\}}^{(1)} + \overbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{\Gamma}_{ii}^j}^{(2)} - \overbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{\Gamma}_{ji}^j}^{(3)} \\ &= -\frac{1}{4\lambda^2} \sum_{\substack{1 \leq l \leq n \\ l \neq i \neq j}} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_l} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \ln \lambda - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \ln \lambda \end{aligned}$$

Factorizando los términos como operadores de  $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  y  $\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$  y asociado a  $\Delta_{ij}$  tenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{iji}^j &= -\frac{1}{4\lambda^2} \sum_{\substack{1 \leq l \leq n \\ l \neq i \neq j}} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_l} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \ln \lambda - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \ln \lambda \\ &= -\frac{1}{4\lambda^2} \sum_{\substack{1 \leq l \leq n \\ l \neq i \neq j}} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_l} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \right) \ln \lambda \\ &= -\frac{1}{2} \Delta_{ij} \ln \lambda - \frac{1}{4\lambda^2} \sum_{\substack{1 \leq l \leq n \\ l \neq i \neq j}} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_l} \right)^2 \end{aligned}$$

Así continuamos con el cálculo de la curvatura seccional hecho en (4.2.2)

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{sec} \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) &= \frac{\tilde{R}_{iji}^j}{\lambda} = \frac{-\frac{1}{2} \Delta_{ij} \ln \lambda - \frac{1}{4\lambda^2} \sum_{\substack{1 \leq l \leq n \\ l \neq i \neq j}} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_l} \right)^2}{\lambda} \\ &= -\frac{1}{2\lambda} \Delta_{ij} \ln \lambda - \frac{1}{4\lambda^3} \sum_{\substack{1 \leq l \leq n \\ l \neq i \neq j}} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_l} \right)^2. \end{aligned}$$

Finalmente, intercambiamos  $l$  por  $k$ , además de sumar y restar los términos que faltan en la última suma, para los casos de  $k = i$  y  $k = j$ , así obtenemos

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{sec} \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) &= -\frac{1}{2\lambda} \Delta_{ij} \ln \lambda - \frac{1}{4\lambda^3} \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i \neq j}} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_k} \right)^2 \\ &= -\frac{1}{2\lambda} \Delta_{ij} \ln \lambda - \frac{1}{4\lambda^3} \|\nabla \lambda\|^2 + \frac{\left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} \right)^2}{4\lambda^3} \end{aligned}$$

Así, obtenemos el resultado en (a) definiendo  $\|\nabla_{ij}\lambda\|^2 = \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_j}\right)^2$ .

Para la fórmula (b) tenemos que usar las siguientes identidades

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \ln \lambda = \frac{\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_i^2}}{\lambda} - \frac{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_i}\right)^2}{\lambda^2} \quad \Rightarrow \quad \Delta_{ij} \ln \lambda = \frac{\Delta_{ij} \lambda}{\lambda} - \frac{\|\nabla_{ij} \lambda\|^2}{\lambda^2}$$

Usando esto en el resultado anterior tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{sec}(\sigma_{ij}) &= -\frac{1}{2\lambda} \Delta_{ij} \ln \lambda - \frac{1}{4\lambda^3} \|\nabla \lambda\|^2 + \frac{\|\nabla_{ij} \lambda\|^2}{4\lambda^3} \\ &= -\frac{1}{2\lambda^2} \Delta_{ij} \lambda + \frac{1}{2\lambda^3} \|\nabla_{ij} \lambda\|^2 - \frac{1}{4\lambda^3} \|\nabla \lambda\|^2 + \frac{\|\nabla_{ij} \lambda\|^2}{4\lambda^3} \\ &= -\frac{1}{2\lambda^2} \Delta_{ij} \lambda - \frac{1}{4\lambda^3} \|\nabla \lambda\|^2 + \frac{3\|\nabla_{ij} \lambda\|^2}{4\lambda^3}. \end{aligned}$$

Así, obtenemos el resultado deseado. ■

**Corolario 4.2.2. Curvatura Métrica Conforme a la Métrica Euclidiana en  $\mathbb{R}^2$ :** Sea  $(\mathcal{M}, \tilde{g})$  una variedad riemanniana con métrica  $\tilde{g} = \lambda(dx_1^2 + dx_2^2)$  conforme a la métrica Euclidiana en  $\mathbb{R}^2$ , entonces la curvatura seccional (Curvatura de Gauss)  $\tilde{K}_{sec}(\sigma_{12}) = \tilde{K}_{sec}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right) = \tilde{K}_{sec}(T_p\mathcal{M})$ , tiene la siguiente forma

$$\tilde{K}_{sec}(\sigma_{12}) = \tilde{K}_{sec}(T_p\mathcal{M}) = -\frac{\Delta \ln \lambda}{2\lambda} = -\frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) \ln \lambda}{2\lambda} \quad (4.2.6)$$

**Demostración.**

Usamos el corolario 4.2.1 tomando  $i = 1$ ,  $j = 2$  y  $n = 2$ , lo que hace que la fórmula (4.2.1-a) tome la forma siguiente

$$\tilde{K}_{sec}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right) = -\frac{1}{2\alpha} \Delta_{12} \ln \lambda = -\frac{1}{2\lambda} \Delta \ln \lambda. \quad \blacksquare \quad (4.2.7)$$

### 4.3. Curvatura de Ricci

**Lema 4.3.1. Curvatura de Ricci para Métricas Conformes a la Métrica Euclidiana  $\mathbb{R}^n$ :** Sea  $(\mathbb{R}^n, \tilde{g})$  una variedad riemanniana con  $\tilde{g} = \lambda(\sum_{i=1}^n dx_i^2)$  y sea  $\beta \subset T_p\mathcal{M}$  una base ortonormal de  $T_p\mathcal{M}$  entonces tenemos que la **Curvatura de Ricci** en dirección de  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  tiene la forma

$$\begin{aligned} Ric\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) &= -\frac{\Delta \ln \lambda}{2(n-1)\lambda} - \frac{(n-2)}{2\lambda(n-1)} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \ln \lambda \\ &\quad - \frac{(n-2)}{4\lambda^3(n-1)} \|\nabla \lambda\|^2 + \frac{(n-2)}{4\lambda^3(n-1)} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_i}\right)^2 \quad (a) \\ &= -\frac{\Delta \lambda}{2(n-1)\lambda^2} - \frac{(n-2)}{2(n-1)\lambda^2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_i^2} \\ &\quad - \frac{(n-4)}{4(n-1)\lambda^3} \|\nabla \lambda\|^2 + \frac{3(n-2)}{4(n-1)\lambda^3} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_i}\right)^2 \quad (b) \end{aligned}$$

**Demostración.**

Usando la fórmula del lema 3.6.1 y sustituyendo la fórmula del corolario 4.2.1 de las curvaturas seccionales, tenemos

$$\begin{aligned}
\text{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) &= \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} K_{\text{sec}}(\sigma_{ij}) \\
&= \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \left( -\frac{\Delta_{ij} \ln \lambda}{2\lambda} - \frac{\|\nabla \lambda\|^2}{4\lambda^3} + \frac{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_j}\right)^2}{4\lambda^3} \right) \\
&= \frac{1}{n-1} \left( \underbrace{-\frac{1}{2\lambda} \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \Delta_{ij} \ln \lambda}_{(1)} - \underbrace{\sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{\|\nabla \lambda\|^2}{4\lambda^3}}_{(2)} \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{\frac{1}{4\lambda^3} \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \left( \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_j}\right)^2 \right)}_{(3)} \right)
\end{aligned}$$

Calculando individualmente los términos marcados con (1),(2) y (3) tenemos que

(1) Para el término marcado con (1) calculamos la suma asociada al operador

$\Delta_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$  lo que nos lleva a lo siguiente

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \Delta_{ij} = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \right) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

La primera suma que no depende de  $j$ , entonces se suman  $(n-1)$  veces el término  $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ . En la segunda suma, sumamos y restamos el término  $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  lo que nos lleva a lo siguiente

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \Delta_{ij} &= \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \\
&= (n-1) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \\
&= (n-2) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \Delta
\end{aligned}$$

En la última línea tenemos finalmente  $\Delta$  como se define usualmente.

(2) Para la suma (2) tenemos que no hay dependencia de  $j$  por lo tanto tenemos que

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{\|\nabla \lambda\|^2}{4\lambda^3} = (n-1) \frac{\|\nabla \lambda\|^2}{4\lambda^3}$$

(3) Para la suma marcada con (3) tenemos lo siguiente

$$\sum_{j \neq i}^{1 \leq j \leq n} \left( \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} \right)^2 \right) = \sum_{j \neq i}^{1 \leq j \leq n} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \right)^2 + \sum_{j \neq i}^{1 \leq j \leq n} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} \right)^2$$

En la primera suma tenemos que no depende de  $j$  entonces hay  $(n-1)$  veces  $\left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \right)^2$ . En la segunda expresión sumamos y restamos  $\left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \right)^2$  así obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq i}^{1 \leq j \leq n} \left( \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} \right)^2 \right) &= \sum_{j \neq i}^{1 \leq j \leq n} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \right)^2 + \sum_{j \neq i}^{1 \leq j \leq n} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} \right)^2 \\ &= (n-1) \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \right)^2 + \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} \right)^2 - \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \right)^2 \\ &= (n-2) \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \right)^2 + \|\nabla \lambda\|^2 \end{aligned}$$

Continuando con el cálculo original, sustituimos los resultados de las sumas en (1) (2) y (3)

$$\begin{aligned} Ric \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) &= \frac{1}{n-1} \left( \begin{array}{c} \overbrace{-\frac{1}{2\lambda} \sum_{j \neq i}^{1 \leq j \leq n} \Delta_{ij} \ln \lambda}^{(1)} - \overbrace{\sum_{j \neq i}^{1 \leq j \leq n} \frac{\|\nabla \lambda\|^2}{4\lambda^3}}^{(2)} \\ \overbrace{+\frac{1}{4\lambda^3} \sum_{j \neq i}^{1 \leq j \leq n} \left( \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} \right)^2 \right)}^{(3)} \end{array} \right) \\ &= \frac{1}{n-1} \left( \begin{array}{c} -\frac{1}{2\lambda} \left( \Delta \ln \lambda + (n-2) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \ln \lambda \right) - (n-1) \frac{\|\nabla \lambda\|^2}{4\lambda^3} \\ + \frac{1}{4\lambda^3} \left( (n-2) \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \right)^2 + \|\nabla \lambda\|^2 \right) \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ahora, haciendo álgebra y distribuyendo los términos tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} Ric \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) &= -\frac{1}{2\lambda(n-1)} \Delta \ln \lambda - \frac{n-2}{2\lambda(n-1)} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \ln \lambda \\ &\quad - \frac{(n-2)\|\nabla \lambda\|^2}{4\lambda^3(n-1)} + \frac{(n-2)}{4\lambda^3(n-1)} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \right)^2 \end{aligned}$$

Así obtenemos el resultado para (a). Para (b) usamos las siguientes identidades

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \ln \lambda = \frac{\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_i^2}}{\lambda} - \frac{\left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \right)^2}{\lambda^2} \quad \Rightarrow \quad \Delta \ln \lambda = \frac{\Delta \lambda}{\lambda} - \frac{\|\nabla \lambda\|^2}{\lambda^2}.$$

y haciendo un poco de álgebra en la fórmula (a) obtenemos (b). ■

#### 4.4. Curvatura Escalar

**Corolario 4.4.1.** *Curvatura Escalar para Métricas Conformes a la Métrica Euclidiana en  $\mathbb{R}^n$ :*

Sea  $(\mathbb{R}^n, \tilde{g})$  una variedad riemanniana, con  $\tilde{g} = \lambda g$ , siendo  $g$  la métrica usual de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $\beta \subset T_p\mathcal{M}$  una base del espacio tangente  $T_p\mathcal{M}$  como en el lema 3.2.1, entonces tenemos que la **Curvatura Escalar para Métrica Conforme a la Métrica Euclidiana en  $\mathbb{R}^n$**  tiene la siguiente forma

$$K(p) = -\frac{1}{n\lambda}\Delta \ln \lambda - \frac{(n-2)}{4n\lambda^3}\|\nabla\lambda\|^2 \quad (a)$$

$$= -\frac{1}{n\lambda^2}\Delta\lambda - \frac{(n-6)}{4n\lambda^3}\|\nabla\lambda\|^2 \quad (b)$$

**Demostración.**

Usando la fórmula de la definición 3.6.5 y las expresiones para la curvatura de Ricci del lema 4.3.1 obtenemos lo siguiente

$$K(p) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Ric \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( -\frac{\Delta \ln \lambda}{2(n-1)\lambda} - \frac{(n-2)}{2\lambda(n-1)} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \ln \lambda - \frac{(n-2)}{4\lambda^3(n-1)} \|\nabla\lambda\|^2 + \frac{(n-2)}{4\lambda^3(n-1)} \left( \frac{\partial\lambda}{\partial x_i} \right)^2 \right)$$

Distribuyendo la suma obtenemos que

$$K(p) = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta \ln \lambda}{2(n-1)\lambda} - \frac{(n-2)}{4n\lambda^3(n-1)} \sum_{i=1}^n \|\nabla\lambda\|^2 - \frac{(n-2)}{2n\lambda(n-1)} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \ln \lambda + \frac{(n-2)}{4n\lambda^3(n-1)} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial\lambda}{\partial x_i} \right)^2$$

Las dos primeras sumas no depende de  $i$  así tenemos  $n$  veces las expresiones sumadas, por otro lado las dos sumas restantes tienen como resultado el laplaciano y la norma al cuadrado del gradiente, por tanto

$$K(p) = -\frac{n\Delta \ln \lambda}{2n(n-1)\lambda} - \frac{n(n-2)}{4n\lambda^3(n-1)}\|\nabla\lambda\|^2 - \frac{(n-2)}{2n\lambda(n-1)}\Delta \ln \lambda + \frac{(n-2)}{4n\lambda^3(n-1)}\|\nabla\lambda\|^2$$

Factorizando términos comunes y haciendo álgebra obtenemos

$$\begin{aligned} K(p) &= -\frac{\Delta \ln \lambda}{2n(n-1)\lambda} (n+n-2) - \frac{n(n-2)}{4n\lambda^3(n-1)}\|\nabla\lambda\|^2 (n-1) \\ &= -\frac{2(n-1)\Delta \ln \lambda}{2n(n-1)\lambda} - \frac{n(n-1)(n-2)}{4n\lambda^3(n-1)}\|\nabla\lambda\|^2 \\ &= -\frac{\Delta \ln \lambda}{n\lambda} - \frac{(n-2)}{4\lambda^3}\|\nabla\lambda\|^2 \end{aligned}$$



Finalmente obtenemos la primera fórmula. Para la segunda fórmula, calculamos  $\Delta \ln \lambda$  como sigue

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \ln \lambda = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial x_i}}{\lambda} \right) = \frac{\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_i^2} \lambda - \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \right)^2}{\lambda^2} = \frac{\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_i^2}}{\lambda} - \frac{\left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \right)^2}{\lambda^2}$$

Con este cálculo obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \Delta \ln \lambda &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \ln \lambda = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_i^2}}{\lambda} - \frac{\left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \right)^2}{\lambda^2} \right) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_i^2}}{\lambda} - \frac{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \right)^2}{\lambda^2} = \frac{\Delta \lambda}{\lambda} - \frac{\|\nabla \lambda\|^2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

sustituyendo en la primera suma obtenemos

$$\begin{aligned} K(p) &= -\frac{1}{n\lambda} \Delta \ln \lambda - \frac{(n-2)}{n4\lambda^3} \|\nabla \lambda\|^2 = -\frac{1}{n\lambda} \left( \frac{\Delta \lambda}{\lambda} - \frac{\|\nabla \lambda\|^2}{\lambda^2} \right) - \frac{(n-2)}{n4\lambda^3} \|\nabla \lambda\|^2 \\ &= -\frac{\Delta \lambda}{n\lambda^2} + \frac{\|\nabla \lambda\|^2}{n\lambda^3} - \frac{(n-2)}{n4\lambda^3} \|\nabla \lambda\|^2 = -\frac{\Delta \lambda}{n\lambda^2} - \frac{(n-6)}{n4\lambda^3} \|\nabla \lambda\|^2 \end{aligned}$$

Así, hemos llegado finalmente al resultado de la fórmula (b). ■

## 4.5. Resultados Preliminares

**Ejemplo 4.5.1. Geodésicas para Métricas Conformes a la Métrica Euclidiana en  $\mathbb{R}^2$ :**

Sea  $(\mathbb{R}^2, \tilde{g})$  una variedad riemanniana con métrica conforme a la métrica Euclidiana, entonces las ecuaciones de las **geodésicas para las métricas conformes** en un sistema de coordenadas son de la forma

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \Gamma_{11}^1 \left( \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 \right) + 2\Gamma_{12}^1 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} &= 0 \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \Gamma_{22}^2 \left( \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 \right) + 2\Gamma_{12}^2 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

**Demostración.**

Usando los resultados del corolario 4.1.3. tenemos que los **Símbolos de Christoffel** para  $(\mathbb{R}^2, \tilde{g})$  cumplen la siguiente relación:

$$\begin{aligned} (i) \quad \Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1}. \\ (ii) \quad \Gamma_{22}^2 &= \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = -\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

Usando la fórmula para las ecuaciones de las geodésicas del corolario 3.5.2 que son de la forma

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^2 \frac{dx_j}{dt} \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^k = 0, \quad k = 1, 2.$$

Así la ecuación geodésica para el índice  $k = 1$  se ve

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^2 \frac{dx_j}{dt} \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^1 \\ &= \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \overbrace{\Gamma_{11}^1}^{(i)} \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 + \overbrace{\Gamma_{22}^1}^{(i)} \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 + \overbrace{\Gamma_{12}^1}^{(ii)} \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} + \overbrace{\Gamma_{21}^1}^{(ii)} \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} \end{aligned}$$

Identificando los símbolos de Christoffel marcados con (i) notamos que cumplen la siguiente relación  $\Gamma_{11}^1 = -\Gamma_{22}^1$ . Los términos marcados con (ii) cumplen que  $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$ . Sustituyendo  $\Gamma_{22}^1$  por  $\Gamma_{11}^1$  y  $\Gamma_{12}^1$  por  $\Gamma_{21}^1$  obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \Gamma_{11}^1 \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 - \Gamma_{11}^1 \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 + \Gamma_{12}^1 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} + \Gamma_{12}^1 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} \\ &= \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \Gamma_{11}^1 \left( \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 \right) + 2\Gamma_{12}^1 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} \end{aligned}$$

Así tenemos la primera ecuación geodésica.

Continuando con los cálculos, ahora con  $k = 2$ , tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^2 \frac{dx_j}{dt} \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^2 \\ &= \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \overbrace{\Gamma_{11}^2}^{(ii)} \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 + \overbrace{\Gamma_{22}^2}^{(i)} \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 + \overbrace{\Gamma_{12}^2}^{(i)} \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} + \overbrace{\Gamma_{21}^2}^{(i)} \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} \end{aligned}$$

Identificando los símbolos de Christoffel marcados con (i) notamos que cumplen la relación  $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$ . Los términos marcados con (ii) cumplen que  $\Gamma_{22}^2 = -\Gamma_{11}^2$ . Sustituyendo  $\Gamma_{11}^2$  por  $\Gamma_{22}^2$  y  $\Gamma_{21}^2$  por  $\Gamma_{12}^2$  obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2 x_2}{dt^2} - \Gamma_{22}^2 \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 + \Gamma_{22}^2 \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 + \Gamma_{12}^2 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} + \Gamma_{12}^2 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} \\ &= \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \Gamma_{22}^2 \left( \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 \right) + 2\Gamma_{12}^2 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos la segunda ecuación geodésica. ■

**Ejemplo 4.5.2. Geodésicas para Métricas Conformes a la Métrica Euclidiana en  $\mathbb{R}^3$ :** Sea  $(\mathbb{R}^3, \tilde{g})$  una variedad riemanniana con métrica conforme a la métrica Euclidiana, entonces tenemos que las ecuaciones de las **geodésicas** en un sistema de coordenadas son de la forma

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \Gamma_{11}^1 \left( \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_3}{dt} \right)^2 \right) + 2\Gamma_{12}^1 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} + 2\Gamma_{13}^1 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_3}{dt} &= 0 \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \Gamma_{22}^2 \left( \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_3}{dt} \right)^2 \right) + 2\Gamma_{12}^2 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} + 2\Gamma_{23}^2 \frac{dx_2}{dt} \frac{dx_3}{dt} &= 0 \\ \frac{d^2 x_3}{dt^2} + \Gamma_{33}^3 \left( \left( \frac{dx_3}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 \right) + 2\Gamma_{13}^3 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_3}{dt} + 2\Gamma_{23}^3 \frac{dx_2}{dt} \frac{dx_3}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

**Demostración.**

Empecemos usando los resultados del corolario 4.1.4 así tenemos que los **símbolos de Christoffel** para  $(\mathbb{R}^3, \tilde{g})$  cumplen la siguiente relación:

$$\begin{aligned} (0) \quad \Gamma_{12}^3 &= \Gamma_{13}^2 = \Gamma_{21}^3 = \Gamma_{23}^1 = \Gamma_{31}^2 = \Gamma_{32}^1 = 0 \\ (i) \quad \Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = -\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{31}^3 = -\Gamma_{33}^1 = \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \\ (ii) \quad \Gamma_{22}^2 &= \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{23}^3 = -\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{32}^3 = -\Gamma_{33}^2 = \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \\ (iii) \quad \Gamma_{33}^3 &= \Gamma_{31}^1 = \Gamma_{32}^2 = -\Gamma_{22}^3 = \Gamma_{23}^2 = \Gamma_{13}^3 = -\Gamma_{11}^3 = \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_3} \end{aligned}$$

También usando la fórmula para las ecuaciones de las geodésicas del corolario 3.5.2

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^3 \frac{dx_j}{dt} \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^k = 0, \quad k = 1, 2, 3 \quad (4.5.1)$$

La ecuación geodésica para el índice  $k = 1$  es la siguiente

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^3 \frac{dx_j}{dt} \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^1 &= \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \overbrace{\Gamma_{11}^1}^{(i)} \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 + \overbrace{\Gamma_{22}^1}^{(i)} \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 + \overbrace{\Gamma_{33}^1}^{(i)} \left( \frac{dx_3}{dt} \right)^2 \\ &+ \overbrace{\Gamma_{12}^1}^{(ii)} \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} + \overbrace{\Gamma_{13}^1}^{(iii)} \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_3}{dt} + \overbrace{\Gamma_{21}^1}^{(ii)} \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} \\ &+ \overbrace{\Gamma_{23}^1}^{(0)} \frac{dx_2}{dt} \frac{dx_3}{dt} + \overbrace{\Gamma_{31}^1}^{(iii)} \frac{dx_3}{dt} \frac{dx_1}{dt} + \overbrace{\Gamma_{32}^1}^{(0)} \frac{dx_3}{dt} \frac{dx_2}{dt} = 0 \end{aligned}$$

Identificando los símbolos de Christoffel marcados con (0) notamos que cumplen la siguiente relación  $\Gamma_{23}^1 = \Gamma_{32}^1 = 0$ . Los términos marcados con (i) cumplen que  $\Gamma_{11}^1 = -\Gamma_{22}^1 = -\Gamma_{33}^1$ . Los términos marcados con (ii) cumplen que  $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$ .

Para los términos marcados con (iii) cumplen la relación  $\Gamma_{31}^1 = \Gamma_{13}^1$ . Finalmente, sustituyendo  $\Gamma_{22}^1$ ,  $\Gamma_{33}^1$  por  $\Gamma_{11}^1$ ,  $\Gamma_{12}^1$  por  $\Gamma_{21}^1$  y  $\Gamma_{31}^1$  por  $\Gamma_{13}^1$  obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \frac{dx_j}{dt} \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^1 &= \frac{d^2 x_1}{dt^2} + 2\Gamma_{12}^1 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} + 2\Gamma_{13}^1 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_3}{dt} \\ &+ \Gamma_{11}^1 \left( \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_3}{dt} \right)^2 \right) = 0 \end{aligned}$$

Así tenemos la primera ecuación geodésica.

Continuando con los cálculos, ahora con  $k = 2$ , tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^3 \frac{dx_j}{dt} \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^2 &= \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \overbrace{\Gamma_{11}^2}^{(ii)} \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 + \overbrace{\Gamma_{22}^2}^{(ii)} \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 + \overbrace{\Gamma_{33}^2}^{(ii)} \left( \frac{dx_3}{dt} \right)^2 \\ &+ \overbrace{\Gamma_{12}^2}^{(i)} \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} + \overbrace{\Gamma_{13}^2}^{(0)} \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_3}{dt} + \overbrace{\Gamma_{21}^2}^{(i)} \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} \\ &+ \overbrace{\Gamma_{23}^2}^{(iii)} \frac{dx_2}{dt} \frac{dx_3}{dt} + \overbrace{\Gamma_{31}^2}^{(0)} \frac{dx_3}{dt} \frac{dx_1}{dt} + \overbrace{\Gamma_{32}^2}^{(iii)} \frac{dx_3}{dt} \frac{dx_2}{dt} = 0 \end{aligned}$$

Identificando los símbolos de Christoffel marcados con (0) que cumplen la relación  $\Gamma_{31}^2 = \Gamma_{13}^2 = 0$ . Los términos marcados con (ii) cumplen que  $\Gamma_{22}^2 = -\Gamma_{11}^2 = -\Gamma_{33}^2$ . Los términos marcados con (i) cumplen la relación  $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$ . Para los términos marcados con (iii) cumplen que  $\Gamma_{32}^2 = \Gamma_{23}^2$ . Sustituyendo  $\Gamma_{11}^2$ ,  $\Gamma_{33}^2$  por  $\Gamma_{22}^2$ ,  $\Gamma_{12}^2$  por  $\Gamma_{21}^2$  y  $\Gamma_{23}^2$  por  $\Gamma_{32}^2$  obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \frac{dx_j}{dt} \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^2 &= \frac{d^2 x_2}{dt^2} + 2\Gamma_{12}^2 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} + 2\Gamma_{23}^2 \frac{dx_2}{dt} \frac{dx_3}{dt} \\ &+ \Gamma_{22}^2 \left( \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_3}{dt} \right)^2 \right) = 0 \end{aligned}$$

Así tenemos la segunda ecuación geodésica.

Continuando con los cálculos, ahora con  $k = 3$ , tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_3}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^3 \frac{dx_j}{dt} \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^3 &= \frac{d^2 x_3}{dt^2} + \overbrace{\Gamma_{11}^3}^{(iii)} \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 + \overbrace{\Gamma_{22}^3}^{(iii)} \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 + \overbrace{\Gamma_{33}^3}^{(iii)} \left( \frac{dx_3}{dt} \right)^2 \\ &+ \overbrace{\Gamma_{12}^3}^{(0)} \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} + \overbrace{\Gamma_{13}^3}^{(i)} \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_3}{dt} + \overbrace{\Gamma_{21}^3}^{(0)} \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} \\ &+ \overbrace{\Gamma_{23}^3}^{(ii)} \frac{dx_2}{dt} \frac{dx_3}{dt} + \overbrace{\Gamma_{31}^3}^{(i)} \frac{dx_3}{dt} \frac{dx_1}{dt} + \overbrace{\Gamma_{32}^3}^{(ii)} \frac{dx_3}{dt} \frac{dx_2}{dt} = 0 \end{aligned}$$

Identificando los símbolos de Christoffel marcados con (0) cumplen la relación  $\Gamma_{12}^3 = \Gamma_{21}^3 = 0$ . Para los términos marcados con (iii) cumplen que  $\Gamma_{33}^3 = -\Gamma_{22}^3 = -\Gamma_{11}^3$ . Los términos marcados con (ii) cumplen que  $\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3$ . Por último para los términos marcados con (i) cumplen la relación  $\Gamma_{31}^3 = \Gamma_{13}^3$ . Sustituyendo  $\Gamma_{11}^3$ ,  $\Gamma_{22}^3$  por  $\Gamma_{33}^3$ ,  $\Gamma_{32}^3$  por  $\Gamma_{23}^3$  y  $\Gamma_{31}^3$  por  $\Gamma_{13}^3$  obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_3}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^3 \frac{dx_j}{dt} \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^3 &= \frac{d^2 x_3}{dt^2} + 2\Gamma_{23}^3 \frac{dx_2}{dt} \frac{dx_3}{dt} + 2\Gamma_{13}^3 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_3}{dt} \\ &+ \Gamma_{33}^3 \left( \left( \frac{dx_3}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 \right) = 0 \end{aligned}$$

Así tenemos la última ecuación geodésica. ■

**Ejemplo 4.5.3. Curvaturas Métricas Conformes a la Métrica Euclidiana en  $\mathbb{R}^2$ :** Sea  $(\mathbb{R}^2, \tilde{g})$  una variedad Riemanniana con métricas conformes a la métrica Euclidiana, entonces la **Curvatura de Gauss** cumple los siguiente

$$\tilde{K}_{sec}(\sigma_{12}) = \tilde{K}_{sec}(\sigma_{21}) = Ric \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right) = Ric \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \right) = \tilde{K}(p) = -\frac{\Delta \ln \lambda}{2\lambda}.$$

**Demostración.**

Usando las fórmulas del corolario 4.2.1, el lema 4.3.1 y el corolario 4.4.1, tomando  $n = 2$ , tenemos para la primera fórmula

$$\tilde{K}_{sec}(\sigma_{ij}) = -\frac{\Delta_{ij} \ln \lambda}{2\lambda} - \frac{\|\nabla \lambda\|^2}{4\lambda^3} + \frac{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_j}\right)^2}{4\lambda^3}$$

Ahora, tomando  $n = 2$  obtenemos dos curvaturas seccionales asociadas a dos subespacios de  $T_p \mathcal{M}$  es decir,  $\sigma_{12}, \sigma_{21} \subset T_p \mathcal{M}$ , generadas por la misma base,  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right\}$ , también tenemos que el operador  $\Delta_{ij}$  es simétrico, por tanto  $\Delta_{12} = \Delta_{21} = \Delta$ , así los últimos 2 términos de la suma se anulan debido a la definición de  $\|\nabla \lambda\|^2 = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_j}\right)^2$  lo que nos da finalmente

$$\tilde{K}_{sec}(\sigma_{12}) = \tilde{K}_{sec}(\sigma_{21}) = -\frac{\Delta \ln \lambda}{2\lambda} \quad (4.5.2)$$

Ahora, trabajando con la fórmula del lema 4.3.1 que corresponde a la curvatura de Ricci, tenemos

$$\begin{aligned} Ric \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) &= -\frac{\Delta \ln \lambda}{2(n-1)\lambda} - \frac{n-2}{2\lambda(n-1)} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \ln \lambda \\ &- \frac{n-2}{4\lambda^3(n-1)} \|\nabla \lambda\|^2 + \frac{n-2}{4\lambda^3(n-1)} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \right)^2 \end{aligned}$$

Dado que  $n = 2$  los últimos 3 términos de la fórmula se anulan por tanto obtenemos finalmente que

$$Ric \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right) = Ric \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \right) = -\frac{\Delta \ln \lambda}{2\lambda}$$

Para terminar tomamos la fórmula (a) del corolario 4.4.1 lo que nos da

$$K(p) = -\frac{1}{2\lambda} \Delta \ln \lambda - \frac{2-2}{n4\lambda^3} \|\nabla \lambda\|^2 = -\frac{1}{2\lambda} \Delta \ln \lambda.$$

Así finalmente obtenemos el resultado deseado, al considerar el resultado de los cálculos en las 3 curvaturas. ■

**Ejemplo 4.5.4. Métricas Conformes a la Métrica Euclidiana para múltiplo de funciones:** Sea  $(\mathbb{R}^n, \tilde{g})$  una variedad riemanniana con  $\tilde{g} = \lambda_1 \lambda_2 g$ , siendo  $g$  la métrica usual de  $\mathbb{R}^n$  y  $\lambda_1, \lambda_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $\lambda_1 > 0$  y  $\lambda_2 > 0$  entonces los **Símbolos de Christoffel** y las **Curvaturas** para la métrica Conforme en  $T\mathbb{R}_p^n$  tienen la siguiente forma

**Símbolos de Christoffel:**

- a) Si  $i \neq j \neq k$ ,  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = 0$ .
- b) Si  $i = j \neq k$ ,  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ii}^k = -\frac{1}{2\lambda_1} \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_k} - \frac{1}{2\lambda_2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_k}$ .
- c) Si  $i = k \neq j$ ,  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^i = \frac{1}{2\lambda_1} \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_j} + \frac{1}{2\lambda_2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_j}$ .
- d) Si  $k = j \neq i$ ,  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^j = \frac{1}{2\lambda_1} \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} + \frac{1}{2\lambda_2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_i}$ .
- e) Si  $i = j = k$ ,  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ii}^i = \frac{1}{2\lambda_1} \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} + \frac{1}{2\lambda_2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_i}$ .

**Curvatura Seccional:**

$$K_{sec}(\sigma_{ij}) = \frac{K_{sec}^{\lambda_1}(\sigma_{ij})}{\lambda_2} + \frac{K_{sec}^{\lambda_2}(\sigma_{ij})}{\lambda_1} - \frac{\nabla \lambda_1 \cdot \nabla \lambda_2}{2\lambda_1^2 \lambda_2^2} + \frac{1}{2\lambda_1^2 \lambda_2^2} \left( \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_i} + \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_j} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_j} \right).$$

**Curvatura de Ricci:**

$$Ric \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \frac{Ric^{\lambda_1} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)}{\lambda_2} + \frac{Ric^{\lambda_2} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)}{\lambda_1} - \frac{(n-2) \nabla \lambda_1 \cdot \nabla \lambda_2}{2(n-1) \lambda_1^2 \lambda_2^2} + \frac{(n-2) \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_i}}{2(n-1) \lambda_1^2 \lambda_2^2}.$$

**Curvatura Escalar:**

$$K(p) = \frac{K^{\lambda_1}(p)}{\lambda_2} + \frac{K^{\lambda_2}(p)}{\lambda_1} - \frac{(n-2)}{2n \lambda_1^2 \lambda_2^2} \nabla \lambda_1 \cdot \nabla \lambda_2.$$

Siendo  $K_{sec}^{(\cdot)}(\sigma_{ij})$ ,  $Ric^{(\cdot)}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$ , y  $K^{(\cdot)}(p)$  las fórmulas de las curvaturas asociadas a las métricas  $\lambda_1 g$  y  $\lambda_2 g$  respectivamente.

**Demostración.**

Empecemos por calcular los símbolos de Christoffel usando la regla de cálculo del corolario 4.1.2, tomando el factor conforme  $\lambda = \lambda_1 \lambda_2$  así obtenemos que

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \frac{\partial (\lambda_1 \lambda_2)}{\partial x_i} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_i} = \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} + \frac{1}{\lambda_2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_i}$$

Sustituyendo en las reglas de cálculo de corolario 4.1.2 obtenemos el resultado deseado. Para obtener las fórmulas primero hacemos los siguientes cálculos para  $\lambda = \lambda_1 \lambda_2$

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \ln \lambda = \frac{\partial}{\partial x_i} \ln \lambda_1 + \frac{\partial}{\partial x_i} \ln \lambda_2 \\ (ii) \quad \Delta_{ij} \ln \lambda = \Delta_{ij} \ln \lambda_1 + \Delta_{ij} \ln \lambda_2 \\ (iii) \quad \Delta \ln \lambda = \Delta \ln \lambda_1 + \Delta \ln \lambda_2 \\ (iv) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} = \lambda_2 \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_i} \\ (v) \quad \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \right)^2 = \lambda_2^2 \left( \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} \right)^2 + \lambda_1^2 \left( \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_i} \right)^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_i} \\ (vi) \quad \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} \right)^2 = \lambda_2^2 \left( \left( \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_j} \right)^2 \right) + \\ \lambda_1^2 \left( \left( \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_j} \right)^2 \right) + 2\lambda_1 \lambda_2 \left( \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_i} + \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_j} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_j} \right) \\ (vii) \quad \|\nabla \lambda\|^2 = \lambda_2^2 \|\nabla \lambda_1\|^2 + \lambda_1^2 \|\nabla \lambda_2\|^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 \nabla \lambda_1 \cdot \nabla \lambda_2 \end{array} \right.$$

Continuando con el cálculo, empezamos con la fórmula para la curvatura seccional dada en el corolario 4.2.1

$$\tilde{K}_{sec}(\sigma_{ij}) = \tilde{K}_{sec} \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = -\frac{\Delta_{ij} \ln \lambda}{2\lambda} - \frac{\|\nabla \lambda\|^2}{4\lambda^3} + \frac{\left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} \right)^2}{4\lambda^3}$$

Usando (ii), (vi) y (vii) en la fórmula obtenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{sec}(\sigma_{ij}) &= -\frac{\Delta_{ij} \ln \lambda}{2\lambda} - \frac{\|\nabla \lambda\|^2}{4\lambda^3} + \frac{\left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} \right)^2}{4\lambda^3} \\ &= -\frac{\overbrace{\Delta_{ij} \ln \lambda_1}^{(1)}}{2\lambda_1 \lambda_2} - \frac{\overbrace{\Delta_{ij} \ln \lambda_2}^{(2)}}{2\lambda_1 \lambda_2} - \frac{\overbrace{\lambda_2^2 \|\nabla \lambda_1\|^2}^{(1)}}{4\lambda_1^3 \lambda_2^3} - \frac{\overbrace{\lambda_1^2 \|\nabla \lambda_2\|^2}^{(2)}}{4\lambda_1^3 \lambda_2^3} \\ &\quad - \frac{\overbrace{2\lambda_1 \lambda_1 \nabla \lambda_1 \cdot \nabla \lambda_2}^{(3)}}{4\lambda_1^3 \lambda_2^3} + \frac{\overbrace{\lambda_2^2 \left( \left( \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_j} \right)^2 \right)}^{(1)}}{4\lambda_1^3 \lambda_2^3} \\ &\quad + \frac{\overbrace{\lambda_1^2 \left( \left( \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_j} \right)^2 \right)}^{(2)}}{4\lambda_1^3 \lambda_2^3} + \frac{\overbrace{2\lambda_1 \lambda_2 \left( \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_i} + \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_j} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_j} \right)}^{(3)}}{4\lambda_1^3 \lambda_2^3} \end{aligned}$$

Agrupando y simplificando los términos marcados con (1), (2) y (3) obtenemos

lo siguiente

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{sec}(\sigma_{ij}) &= \overbrace{\left( \frac{\Delta_{ij} \ln \lambda_1}{2\lambda_1} - \frac{\|\nabla \lambda_1\|^2}{4\lambda_1^3} + \frac{\left( \left( \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_j} \right)^2 \right)}{4\lambda_1^3} \right)}^{K_{sec}^{\lambda_1}(\sigma_{ij})} \frac{1}{\lambda_2} - \frac{\nabla \lambda_1 \cdot \nabla \lambda_2}{2\lambda_1^2 \lambda_2^2} \\ &+ \overbrace{\left( \frac{\Delta_{ij} \ln \lambda_2}{2\lambda_2} - \frac{\|\nabla \lambda_2\|^2}{4\lambda_2^3} + \frac{\left( \left( \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_j} \right)^2 \right)}{4\lambda_2^3} \right)}^{K_{sec}^{\lambda_2}(\sigma_{ij})} \frac{1}{\lambda_1} + \frac{\left( \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_i} + \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_j} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_j} \right)}{2\lambda_1^2 \lambda_2^2} \end{aligned}$$

Identificando los términos marcados con  $K_{sec}^{\lambda_1}(\sigma_{ij})$  y  $K_{sec}^{\lambda_2}(\sigma_{ij})$  los cuales son las curvaturas seccionales del corolario 4.2.1 aplicado a los factores conformes  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , esto nos lleva a la siguiente expresión

$$\tilde{K}_{sec}(\sigma_{ij}) = \frac{K_{sec}^{\lambda_1}(\sigma_{ij})}{\lambda_2} + \frac{K_{sec}^{\lambda_2}(\sigma_{ij})}{\lambda_1} - \frac{\nabla \lambda_1 \cdot \nabla \lambda_2}{2\lambda_1^2 \lambda_2^2} + \frac{\left( \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_i} + \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_j} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_j} \right)}{2\lambda_1^2 \lambda_2^2}$$

Así obtenemos el resultado deseado para la curvatura seccional.

Continuando con el cálculo usamos la fórmula del lema 3.6.1 para la curvatura de Ricci y la fórmula anterior para obtener lo siguiente

$$\widetilde{Ric} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{(n-1)} \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \tilde{K}_{sec}(\sigma_{ij}) = \frac{1}{(n-1)} \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \left( \frac{K_{sec}^{\lambda_1}(\sigma_{ij})}{\lambda_2} + \frac{\left( \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_i} + \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_j} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_j} \right)}{2\lambda_1^2 \lambda_2^2} + \frac{K_{sec}^{\lambda_2}(\sigma_{ij})}{\lambda_1} - \frac{\nabla \lambda_1 \cdot \nabla \lambda_2}{2\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right)$$

Distribuyendo la suma y agrupando obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \widetilde{Ric} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) &= \frac{\overbrace{\left( \frac{1}{(n-1)} \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} K_{sec}^{\lambda_1}(\sigma_{ij}) \right)}^{Ric^{\lambda_1} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)}}{\lambda_2} + \frac{\overbrace{\left( \frac{1}{(n-1)} \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} K_{sec}^{\lambda_2}(\sigma_{ij}) \right)}^{Ric^{\lambda_2} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)}}{\lambda_1} \\ &\quad - \frac{\nabla \lambda_1 \cdot \nabla \lambda_2}{2\lambda_1^2 \lambda_2^2} + \frac{\overbrace{\left( \frac{1}{(n-1)} \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \left( \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_i} + \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_j} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_j} \right) \right)}^{(*)}}{2\lambda_1^2 \lambda_2^2} \end{aligned}$$

Identificando  $Ric^{\lambda_1} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$  y  $Ric^{\lambda_2} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$  las curvaturas de Ricci del lema 3.6.1 correspondientes a los factores conformes  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , a continuación desarrollamos



el término marcado con (\*)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(n-1)} \sum_{j \neq i}^{1 \leq j \leq n} \left( \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_i} + \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_j} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_j} \right) &= \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_i} + \frac{1}{(n-1)} \sum_{j \neq i}^{1 \leq j \leq n} \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_j} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_j} \\
&= \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_i} + \frac{1}{(n-1)} \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_j} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_j} - \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_i} \right) \\
&= \frac{(n-2)}{(n-1)} \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_i} + \frac{\nabla \lambda_1 \cdot \nabla \lambda_2}{(n-1)}
\end{aligned}$$

Sustituyendo el cálculo anterior obtenemos finalmente el resultado deseado.

$$\begin{aligned}
\widetilde{Ric} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) &= \frac{Ric^{\lambda_1} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)}{\lambda_2} + \frac{Ric^{\lambda_2} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)}{\lambda_1} - \frac{\nabla \lambda_1 \cdot \nabla \lambda_2}{2\lambda_1^2 \lambda_2^2} + \frac{(n-2) \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_i}}{2(n-1)\lambda_1^2 \lambda_2^2} + \frac{\nabla \lambda_1 \cdot \nabla \lambda_2}{2(n-1)\lambda_1^2 \lambda_2^2} \\
&= \frac{Ric^{\lambda_1} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)}{\lambda_2} + \frac{Ric^{\lambda_2} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)}{\lambda_1} - \frac{(n-2)\nabla \lambda_1 \cdot \nabla \lambda_2}{2(n-1)\lambda_1^2 \lambda_2^2} + \frac{(n-2) \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_i}}{2(n-1)\lambda_1^2 \lambda_2^2}
\end{aligned}$$

Así hemos llegado al resultado deseada, sin embargo haciendo los cálculos partiendo de la fórmula dada en el lema 4.3.1, podemos notar que obtendríamos el mismo resultado.

Continuando con los cálculos, usaremos ahora la fórmula dada en en la definición 3.6.5 en resultado anterior para obtener la curvatura escalar, lo que nos da lo siguiente

$$\begin{aligned}
K(p) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Ric \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{Ric^{\lambda_1} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)}{\lambda_2} \right) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{Ric^{\lambda_2} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)}{\lambda_1} \right) \\
&\quad - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{(n-2)\nabla \lambda_1 \cdot \nabla \lambda_2}{2(n-1)\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{(n-2) \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_i}}{2(n-1)\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right)
\end{aligned}$$

Nuevamente identificando  $K^{\lambda_1}(x)$  y  $K^{\lambda_2}(x)$  correspondientes a las curvaturas escalares como en la definición 3.6.5 aplicadas a los factores conformes, divididos entre  $\lambda_2$  y  $\lambda_1$  respectivamente, por otro lado las sumas marcadas con (1) y (2) se calculan a continuación

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{(n-2)\nabla \lambda_1 \cdot \nabla \lambda_2}{2(n-1)\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) = \frac{n(n-2)\nabla \lambda_1 \cdot \nabla \lambda_2}{2n(n-1)\lambda_1^2 \lambda_2^2}$$

y

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{(n-2) \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_i}}{2(n-1)\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) = \frac{(n-2)\nabla \lambda_1 \cdot \nabla \lambda_2}{2n(n-1)\lambda_1^2 \lambda_2^2}$$

Substituyendo y calculando finalmente obtenemos

$$\begin{aligned}
 K(p) &= \frac{K^{\lambda_1}(p)}{\lambda_2} + \frac{K^{\lambda_2}(p)}{\lambda_1} - \frac{n(n-2)\nabla\lambda_1 \cdot \nabla\lambda_2}{2n(n-1)\lambda_1^2\lambda_2^2} + \frac{(n-2)\nabla\lambda_1 \cdot \nabla\lambda_2}{2n(n-1)\lambda_1^2\lambda_2^2} \\
 &= \frac{K^{\lambda_1}(p)}{\lambda_2} + \frac{K^{\lambda_2}(p)}{\lambda_1} + \frac{(1-n)(n-2)\nabla\lambda_1 \cdot \nabla\lambda_2}{2n(n-1)\lambda_1^2\lambda_2^2} \\
 &= \frac{K^{\lambda_1}(p)}{\lambda_2} + \frac{K^{\lambda_2}(p)}{\lambda_1} - \frac{(n-2)\nabla\lambda_1 \cdot \nabla\lambda_2}{2n\lambda_1^2\lambda_2^2}
 \end{aligned}$$

Finalmente hemos obtenido el resultado deseado. ■

**Ejemplo 4.5.5. Variedades de Curvatura Constante:**

Sea  $(\mathcal{M}, g)$  una variedad Riemanniana de dimensión  $n$  con curvatura constante  $K$ , podemos caracterizar estas variedades en 3 grupos importantes de la siguiente manera

$$K = \begin{cases} K < 0 & \text{Espacios Modelo hiperbólicos.} \\ K = 0 & \text{Espacios Modelo Euclidianos.} \\ K > 0 & \text{Espacios Modelo a la Esfera.} \end{cases}$$

El estudio de las curvaturas, símbolos de Christoffel y geodésicas para los espacios de curvatura  $K = 0$  correspondientes a espacios modelo Euclidianos, todo ello se reduce a considerar que los símbolos de Christoffel son  $\Gamma_{ij}^k = 0$  lo que implica que solución de las ecuación geodésicas dan como soluciones rectas en  $\mathbb{R}^n$ .

Continuando con las demás variedades las podemos caracterizar usando una métrica conforme a la métrica Euclidiana usando la  $n$ -esfera como espacios modelo ( $K > 0$ ) y el Disco de Poincaré ( $K < 0$ ), para estos casos usaremos una métrica auxiliar que nos permitirá hacer los cálculos para las curvaturas y corroborar que son constantes con el signo correspondiente, además de que podremos calcular los símbolos de Christoffel y las ecuaciones de las geodésicas.

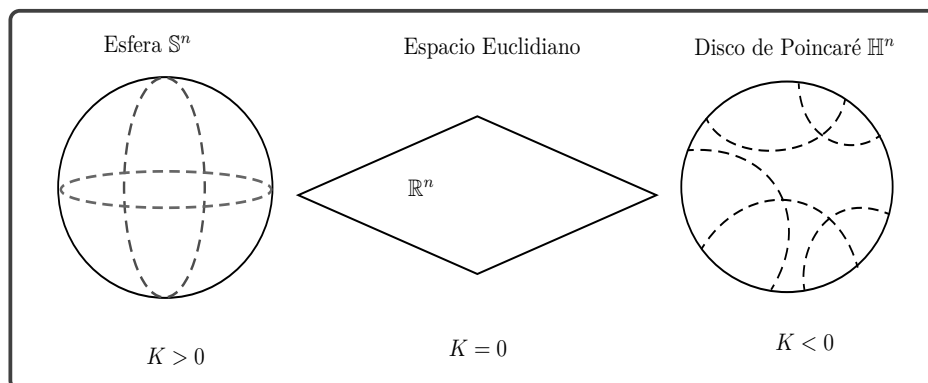


Figura 4.5.1: Espacios de Curvatura Constante.

Antes de empezar cabe resaltar que esta métrica auxiliar esta basada en la métrica obtenida gracias a la proyección estereográfica, las referencia para obtener las métrica que inspiran el factor conforme que usaremos se pueden encontrar en [CFK<sup>+</sup>97, Sección - Hyperbolic Geometry], [Lee19, Sección 3 -Spheres] y [Lee19, Sección 3 - Hyperbolic Spaces].

Para comenzar usaremos una métrica auxiliar que involucra el uso del parámetro  $s$ , el cual dependiendo de su signo permite obtener los casos de curvatura positiva o negativa respectivamente, así tenemos  $(\mathcal{M}, g)$  una variedad de curvatura constante  $K$  con la métrica conforme a la métrica Euclidiana.

$$g = \lambda(x) \left( \sum_{i=1}^n dx_i^2 \right) = \frac{4C^2 \left( \sum_{i=1}^n dx_i^2 \right)}{(C + s\|x\|^2)^2} = \frac{4C^2 \left( \sum_{i=1}^n dx_i^2 \right)}{(C + s(\sum_{i=1}^n x_i^2))^2}$$

Entonces podemos usar las fórmulas del corolario 4.1.2 para calcular los símbolos de Christoffel, el corolario 4.2.1, lema 4.3.1 y corolario 4.4.1 para las curvaturas Seccional, Ricci y Escalar respectivamente. Calculando para la función conforme  $\lambda(x) = \frac{4C^2}{(C+s\|x\|^2)^2}$  lo siguiente

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} = -\frac{4^2 s C^2 x_i}{(C + s\|x\|^2)^3} = -\frac{s x_i \lambda^2}{C^2} (C + s\|x\|^2) \\ (ii) \quad \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \right)^2 = \frac{4^4 s^2 C^4 x_i^2}{(C + s\|x\|^2)^6} = \frac{4s^2 x_i^2 \lambda^3}{C^2} \\ (iii) \quad \|\nabla \lambda\|^2 = \frac{4s^2}{C^2} \lambda^3 \|x\|^2 \\ (iv) \quad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_i^2} = \frac{6s^2}{C^2} x_i^2 \lambda^2 - \frac{s \lambda^2}{C^2} (C + s\|x\|^2) \\ (v) \quad \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} \right)^2 = \frac{4s^2 \lambda^3}{C^2} (x_i^2 + x_j^2) \\ (vi) \quad \Delta_{ij} \lambda = \frac{6s^2}{C^2} \lambda^2 (x_i^2 + x_j^2) - \frac{2s \lambda^2}{C^2} (C + s\|x\|^2) \end{array} \right.$$

Con esto calculamos la curvatura seccional del subespacio  $\sigma_{ij} \subset T\mathcal{M}$  partiendo de la fórmula del corolario 4.2.1 además de usar (iii), (v) y (vi) obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{sec}(\sigma_{ij}) &= -\frac{\Delta_{ij} \lambda}{2\lambda^2} - \frac{\|\nabla \lambda\|^2}{4\lambda^3} + \frac{3}{4} \frac{\left( \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} \right)^2 \right)}{\lambda^3} \\ &= -\frac{6s^2 \lambda^2 (x_i^2 + x_j^2)}{2C^2 \lambda^2} + \frac{2s \lambda^2 (C + s\|x\|^2)}{2C^2 \lambda^2} - \frac{4s^2 \lambda^3 \|x\|^2}{4C^2 \lambda^3} + \frac{3}{4} \frac{4s^2 \lambda^3 (x_i^2 + x_j^2)}{C^2 \lambda^3} \\ &= -\frac{3s^2}{C^2} (x_i^2 + x_j^2) + \frac{s}{C^2} (C + s\|x\|^2) - \frac{s^2}{C^2} \|x\|^2 + \frac{3s^2}{C^2} (x_i^2 + x_j^2) \\ &= \frac{s}{C} \end{aligned}$$

Así hemos obtenido que  $\tilde{K}_{sec}(\sigma_{ij}) = \frac{s}{C}$ ,  $\forall i, j$ , continuando usamos los resultados del lema 3.6.1 para la curvatura de Ricci

$$Ric\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{(n-1)} \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} K_{sec}(\sigma_{ij}) = \frac{1}{(n-1)} \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{s}{C} = \frac{s}{C}$$

Nuevamente tenemos que  $Ric\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{s}{C}$ ,  $\forall i$ , a continuación usamos la fórmula dada en la definición 3.6.5

$$K(p) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Ric\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{s}{C} = \frac{s}{C}$$

Por lo tanto obtenemos

$$\tilde{K}_{sec}(\sigma_{ij}) = Ric\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = K(p) = \frac{s}{C} = K$$

Para todo  $i, j$ , con este resultado podemos caracterizar los dos grupos de variedades de curvatura constante considerando  $C > 0$  e intercambiando de signo del parámetro  $s = -1, 1$ .

$K > 0 \Rightarrow s = 1$	$K < 0 \Rightarrow s = -1$
$\lambda(x) = \frac{4C^2}{(C + \ x\ ^2)^2}$	$\lambda(x) = \frac{4C^2}{(C - \ x\ ^2)^2}$
$\tilde{K}_{sec}(\sigma_{ij}) = \frac{1}{C}$	$\tilde{K}_{sec}(\sigma_{ij}) = -\frac{1}{C}$
$Ric\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{C}$	$Ric\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = -\frac{1}{C}$
$K(p) = \frac{1}{C}$	$K(p) = -\frac{1}{C}$

Ahora pasamos al cálculo de las ecuaciones geodésicas para los casos de dimensión  $n=2,3$ . Empezaremos por el siguiente cálculo usando (i)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} &= -\frac{sx_i \lambda^2}{2\lambda C^2} (C + s\|x\|^2) = -\frac{sx_i \lambda}{2C^2} (C + s\|x\|^2) \\ &= -\frac{4sx_i C^2 (C + s\|x\|^2)}{2C^2 (C + s\|x\|^2)^2} = -\frac{2sx_i}{C + s\|x\|^2} \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

Para el caso de dimensión  $n=2$ , los símbolos de Christoffel de acuerdo al corolario 4.1.3 y a (4.5.3) son de la forma siguiente

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} = -\frac{2sx_1}{C + s\|x\|^2} \\ \Gamma_{22}^2 &= \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = -\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} = -\frac{2sx_2}{C + s\|x\|^2} \end{aligned}$$

Usando el ejemplo 4.5.1 las ecuaciones geodésicas con estos símbolos de Christoffel para la primera ecuación se ven así

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \Gamma_{11}^1 \left( \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 \right) + 2\Gamma_{12}^1 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} \\
&= \frac{d^2 x_1}{dt^2} - \frac{2sx_1}{C + s\|x\|^2} \left( \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 \right) - \frac{4sx_2}{C + s\|x\|^2} \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} \\
&= \frac{d^2 x_1}{dt^2} - \frac{2s}{C + s\|x\|^2} \left( \left( \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 \right) x_1 + 2x_2 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} \right)
\end{aligned}$$

Para la segunda ecuación tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \Gamma_{22}^2 \left( \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 \right) + 2\Gamma_{12}^2 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} \\
&= \frac{d^2 x_2}{dt^2} - \frac{2sx_2}{C + s\|x\|^2} \left( \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 \right) - \frac{4sx_1}{C + s\|x\|^2} \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} \\
&= \frac{d^2 x_2}{dt^2} - \frac{2s}{C + s\|x\|^2} \left( \left( \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 \right) x_2 + 2x_1 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} \right)
\end{aligned}$$

Hecho lo anterior, para espacios de curvatura constante  $K > 0$  es decir  $s = 1$  obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
(i) \quad & \frac{d^2 x_1}{dt^2} - \frac{2}{C + \|x\|^2} \left( \left( \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 \right) x_1 + 2x_2 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} \right) = 0 \\
(ii) \quad & \frac{d^2 x_2}{dt^2} - \frac{2}{C + \|x\|^2} \left( \left( \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 \right) x_2 + 2x_1 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} \right) = 0
\end{aligned}$$

Para espacios de curvatura constante  $K < 0$  es decir  $s = -1$  obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
(i) \quad & \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{2}{C - \|x\|^2} \left( \left( \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 \right) x_1 + 2x_2 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} \right) = 0 \\
(ii) \quad & \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \frac{2}{C - \|x\|^2} \left( \left( \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 \right) x_2 + 2x_1 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} \right) = 0
\end{aligned}$$

Continuando con el caso de dimensión  $n=3$  nuevamente usando (4.5.3) y el corolario 4.1.4 con esto tenemos que los símbolos de Christoffel cumplen lo si-

guiente

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}^3 &= \Gamma_{13}^2 = \Gamma_{21}^3 = \Gamma_{23}^1 = \Gamma_{31}^2 = \Gamma_{32}^1 = 0 \\ \Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = -\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{31}^3 = -\Gamma_{33}^1 = \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} = -\frac{2sx_1}{C+k\|x\|^2} \\ \Gamma_{22}^2 &= \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{23}^3 = -\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{32}^3 = -\Gamma_{33}^2 = \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} = -\frac{2sx_2}{C+k\|x\|^2} \\ \Gamma_{33}^3 &= \Gamma_{31}^1 = \Gamma_{32}^2 = -\Gamma_{22}^3 = \Gamma_{23}^2 = \Gamma_{13}^1 = -\Gamma_{11}^3 = \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_3} = -\frac{2sx_3}{C+k\|x\|^2}\end{aligned}$$

Ahora usando el ejemplo 4.5.2 y haciendo cálculos similares al caso para  $n = 2$  obtenemos que las ecuaciones geodésicas con estos símbolos de Christoffel son

$$\begin{aligned}\frac{d^2x_1}{dt^2} - \frac{2s}{C+s\|x\|^2} \left( \left( \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_3}{dt} \right)^2 \right) x_1 + 2x_2 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} + 2x_3 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_3}{dt} \right) &= 0 \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} - \frac{2s}{C+s\|x\|^2} \left( \left( \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_3}{dt} \right)^2 \right) x_2 + 2x_1 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} + 2x_3 \frac{dx_2}{dt} \frac{dx_3}{dt} \right) &= 0 \\ \frac{d^2x_3}{dt^2} - \frac{2s}{C+s\|x\|^2} \left( \left( \left( \frac{dx_3}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 \right) x_3 + 2x_1 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_3}{dt} + 2x_2 \frac{dx_2}{dt} \frac{dx_3}{dt} \right) &= 0\end{aligned}$$

Hecho lo anterior, tenemos que para espacios de curvatura constante  $K > 0$  es decir  $s = 1$  tenemos

$$\begin{aligned}(i) \quad \frac{d^2x_1}{dt^2} - \frac{2}{C+\|x\|^2} \left( \left( \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_3}{dt} \right)^2 \right) x_1 + 2x_2 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} + 2x_3 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_3}{dt} \right) &= 0 \\ (ii) \quad \frac{d^2x_2}{dt^2} - \frac{2}{C+\|x\|^2} \left( \left( \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_3}{dt} \right)^2 \right) x_2 + 2x_1 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} + 2x_3 \frac{dx_2}{dt} \frac{dx_3}{dt} \right) &= 0 \\ (iii) \quad \frac{d^2x_3}{dt^2} - \frac{2}{C+\|x\|^2} \left( \left( \left( \frac{dx_3}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 \right) x_3 + 2x_1 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_3}{dt} + 2x_2 \frac{dx_2}{dt} \frac{dx_3}{dt} \right) &= 0\end{aligned}$$

Finalmente para espacios de curvatura constante  $K < 0$  es decir  $s = -1$  obtenemos

$$\begin{aligned}(i) \quad \frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{2}{C-\|x\|^2} \left( \left( \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_3}{dt} \right)^2 \right) x_1 + 2x_2 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} + 2x_3 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_3}{dt} \right) &= 0 \\ (ii) \quad \frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{2}{C-\|x\|^2} \left( \left( \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_3}{dt} \right)^2 \right) x_2 + 2x_1 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} + 2x_3 \frac{dx_2}{dt} \frac{dx_3}{dt} \right) &= 0 \\ (iii) \quad \frac{d^2x_3}{dt^2} + \frac{2}{C-\|x\|^2} \left( \left( \left( \frac{dx_3}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 \right) x_3 + 2x_1 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_3}{dt} + 2x_2 \frac{dx_2}{dt} \frac{dx_3}{dt} \right) &= 0\end{aligned}$$

Con esto concluimos el ejemplo para variedades de curvatura constante.

## 5. Preliminares Físicos

**Definición 5.0.1. Sistema Mecánico Simple:**

Sea  $(\mathcal{M}, g)$  una variedad Riemanniana y  $V : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable llamada **Función Potencial** entonces llamaremos a la tripleta  $(\mathcal{M}, g, V)$  **Sistema Mecánico Simple**. A la variedad  $\mathcal{M}$  se le llama **Espacio de Configuración**, al haz tangente  $T\mathcal{M}$  se le llama **Espacio Fase** o **Espacio de Estados**. Un punto  $(p, v) \in T\mathcal{M}$  es un estado del sistema mecánico el cual involucra la posición y velocidad de una partícula en el sistema mecánico. Empecemos definiendo la **Energía Cinética**  $K : T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  de la siguiente forma

$$K(v_p) = \frac{1}{2}g_p(v, v) \quad \forall v_p \in T\mathcal{M}.$$

Con esto se puede construir la comúnmente conocida como **Energía Total** del sistema  $E : T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$E(v_p) = K(v) + V(\pi(v_p)) \quad \forall v_p \in T\mathcal{M}.$$

También podemos definir la función **Lagrangiano**  $\mathcal{L} : T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  que tiene la forma

$$\mathcal{L}(v_p) = K(v) - V(\pi(v_p)) \quad , \forall v_p \in T\mathcal{M} \quad (5.0.1)$$

Hay que resaltar que en el caso más general estas funciones pueden explícitamente depender del tiempo, sin embargo en nuestro caso estas depende implícitamente del tiempo por lo cual agregamos la palabra "**Simple**". Ahora vamos a definir las **Órbitas** o **Trayectorias Físicas**, así podremos diferenciar los criterios y condiciones a cumplir para considerarlas soluciones del sistema mecánico.

**Definición 5.0.2. Trayectorias Físicas:**

Sea  $(\mathcal{M}, g)$  una variedad Riemanniana y  $(\mathcal{M}, g, V)$  un **Sistema Mecánico Simple**. Una **Órbita** o **Trayectoria Física** es una curva  $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathcal{M}$  que satisface la ecuación de movimiento (**Sistema Dinámico**)

$$\frac{D}{dt}\dot{\gamma}(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)}\dot{\gamma}(t) = -(\text{grad } V)_\gamma \quad (5.0.2)$$

Con esta definición de **Trayectorias Físicas** tenemos lo necesario para desarrollar la parte central de este trabajo, cabe resaltar que esta definición es consistente con el **Principio de Mínima Acción de Maupertuis** y el **Principio de Conservación de la Energía**.

Continuando con esta exposición vamos a dar una pequeña demostración del **Principio de Conservación de la Energía**.

**Proposición 5.0.1. Conservación de la Energía:**

Dada  $(\mathcal{M}, g, V)$  un **Sistema Mecánico Simple** y  $\gamma(t)$  una trayectoria física entonces la **Energía Total** es constante a lo largo de  $\gamma$ , dicho de otra forma  $E(\dot{\gamma}_\gamma) = C$ .

**Demostración.** Supongamos que  $\gamma(t)$  es una trayectoria física del sistema mecánico simple  $(\mathcal{M}, g, V)$ , tenemos que la función de energía en esta trayectoria tiene la siguiente forma

$$E(\dot{\gamma}_\gamma(t)) = K(\dot{\gamma}(t)) + V(\pi(\dot{\gamma}_\gamma(t))) = K(\dot{\gamma}(t)) + V(\gamma(t)).$$

Calculando la derivada respecto del tiempo de la función de energía tenemos los siguiente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(\dot{\gamma}_\gamma(t)) &= \frac{d}{dt} (K(\dot{\gamma}(t)) + V(\gamma(t))) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}g_p(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) + V(\gamma(t)) \right) \end{aligned}$$

Dado que la **Conexión de Levi-Civita** es compatible con la Métrica Riemanniana (Corolario 3.5.1) y dada la definición 3.4.6 del campo gradiente tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(\dot{\gamma}_\gamma(t)) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}g_p(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) + V(\gamma(t)) \right) \\ &= g_p \left( \frac{D}{dt}\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \right) + dV_\gamma(\dot{\gamma}(t)) \\ &= g_p \left( \frac{D}{dt}\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \right) + g_p((\text{grad } V)_\gamma, \dot{\gamma}(t)) \end{aligned}$$

Haciendo uso de la definición 5.0.2 de **Trayectoria Física** tenemos finalmente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(\dot{\gamma}_\gamma(t)) &= g_p \left( \frac{D}{dt}\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \right) + g_p((\text{grad } V)_\gamma, \dot{\gamma}(t)) \\ &= g_p(-(\text{grad } V)_\gamma, \dot{\gamma}(t)) + g_p((\text{grad } V)_\gamma, \dot{\gamma}(t)) = 0 \end{aligned}$$

Con esto concluimos que la función de energía total es constante. ■

A continuación podemos hacer una distinción de la región en la cual la función de energía total tiene sentido, es decir dado  $E(v) = h$  siendo  $h$  un valor constante de energía, entonces tenemos que dada  $(\mathcal{M}, g, V)$  y el valor de energía constante tenemos que

$$h = K + V \Rightarrow h - V = K = \frac{1}{2}g \geq 0 \Rightarrow V \leq h.$$

Con esto podemos definir lo que conoceremos como la cerradura del  **$h$ -Espacio de Configuración** siendo de la siguiente forma

$$\overline{\mathcal{M}}_h = \{x \in \mathcal{M} : V(x) \leq h\}.$$

Dado que  $g$  es no degenerada tenemos que el  **$h$ -Espacio de Configuración** es

$$\mathcal{M}_h = \{x \in \mathcal{M} : V(x) < h\}.$$



Lo cual representa una **Subvariedad** de  $\mathcal{M}$ .  
Denotaremos a la **Frontera del  $h$ -Espacio de Configuración** como

$$\partial\mathcal{M}_h = \{x \in \mathcal{M} : V(x) = h\}.$$

En algún momento vamos a hacer uso de la **Frontera del  $h$ -Espacio de Configuración** pues bajo la definición de la **Métrica de Jacobi-Maupertuis** ésta será degenerada.

## 5.1. El Principio de Maupertuis

Ahora tenemos lo necesario para justificar y construir adecuadamente la que conoceremos como **métrica de Jacobi-Maupertuis** y señalar las diferencias entre el **principio de Maupertuis** y el **principio de mínima acción** de la **mecánica clásica**, pues la formulación matemática de **principio de Maupertuis** es un caso particular dentro de las formulaciones **Hamiltoniana** y **Lagrangiana** de la mecánica, para ello definimos de manera general la formulación de la **mecánica Lagrangiana**, para señalar finalmente las limitaciones o restricciones bajo las cuales trabajaremos con la **métrica de Jacobi-Maupertuis**.

### Definición 5.1.1. Sistema Mecánico Lagrangiano:

Sea  $(\mathcal{M}, g)$  una variedad Riemanniana y  $V : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  una **función potencial**, se define un **Sistema Mecánico Lagrangiano** como la dupla  $(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ , siendo  $\mathcal{L}$  una función **Lagrangiano** definida con la ecuación 5.0.1.

### Definición 5.1.2. La Acción en Sistemas Mecánicos Lagrangianos:

Sea  $(\mathcal{M}, g)$  una variedad Riemanniana,  $V : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  una **función potencial** y  $(\mathcal{M}, \mathcal{L})$  el **Sistema Mecánico Lagrangiano** asociado, definimos así la **Acción** de una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$  como

$$S(\gamma) := \int_a^b \mathcal{L}(\dot{\gamma}(t)) dt.$$

### Definición 5.1.3. Principio de Mínima Acción:

Sea  $(\mathcal{M}, \mathcal{L})$  un **Sistema Mecánico Lagrangiano**, una curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ , se dice que es un **extremal de la acción** si esta curva minimiza el funcional  $S$  es decir

$$\min_{\gamma \in \mathcal{M}} S(\gamma) := \min_{\gamma \in \mathcal{M}} \int_a^b \mathcal{L}(\dot{\gamma}(t)) dt = \int_a^b \mathcal{L}(\dot{\alpha}(t)) dt.$$

A esta afirmación se le conoce como el **Principio de Mínima Acción**.

Para más información sobre la formulación matemática moderna en términos del cálculo variacional se puede consultar [Arn97, Capítulo 3], [LLBP78, Capítulo 1, Sección 2] y [AKN10, Sección 1.2]. Una forma equivalente del **Principio de Mínima Acción** se expresa mediante las ecuaciones siguientes.

**Definición 5.1.4. Las Ecuaciones de Euler-Lagrange:**

Sea  $(\mathcal{M}, g)$  una variedad Riemanniana de dimensión  $n$ ,  $V : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  una **función potencial**,  $(\mathcal{M}, \mathcal{L})$  el **Sistema Mecánico Lagrangiano** asociado y  $\psi \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$  una carta arbitraria (o cartas) que contiene a  $\gamma$ , entonces se dice que  $\gamma$  cumple con el **Principio de Mínima Acción** si y solo si, la curva  $x(t) = \psi \circ \gamma(t)$  satisface las **Ecuaciones de Euler-Lagrange**

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Aquí consideramos  $\dot{x}(t) = d\psi_{\gamma} \circ \dot{\gamma}(t)$ .

**Definición 5.1.5. Acción Reducida o de Maupertuis:**

Sea  $V : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  una **función potencial** con  $(\mathcal{M}, g, V)$  el sistema mecánico simple asociado y dada una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ , se define la **Acción Reducida** (o Acción en el sentido de Maupertuis) como sigue

$$S_0(\gamma) := \int_{\gamma} \sqrt{2K(\dot{\gamma})} dl = \int_{\gamma} \sqrt{2(h - V)} \sqrt{g_{\gamma}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} dt.$$

Esta definición está motivada al hacer una analogía a lo hecho en la subsección 2.3, sin embargo debido a que estamos trabajando en el haz tangente tenemos que el diferencial de longitud es  $dl = \sqrt{g} dt$  y si consideramos un valor de energía fijo  $h$  el hamiltoniano del sistema mecánico a lo largo de la curva es

$$h = E(\dot{\gamma}) = K(\dot{\gamma}) + V(\pi(\dot{\gamma})) \quad \Rightarrow \quad h - V(\pi(\dot{\gamma})) = K(\dot{\gamma}) \quad \forall \dot{\gamma} \in T_{\gamma}\mathcal{M} \subset T\mathcal{M}.$$

Despejando obtenemos la expresión que aparece en la segunda integral.

**Proposición 5.1.1. Principio de Mínima Acción de Maupertuis:**

Sea  $(\mathcal{M}, g, V)$  sistema mecánico simple, dada una curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$  y la **Acción Reducida** de la curva, entonces  $\alpha$  es una **Trayectoria Física** si minimiza la **Acción Reducida** es decir

$$\min_{\gamma \in \mathcal{M}} S_0(\gamma) := \min_{\gamma \in \mathcal{M}} \int_{\gamma} \sqrt{2(h - V)} g_{\gamma} dt = \int_{\alpha} \sqrt{2(h - V)} g_{\alpha} dt.$$

Esta afirmación es una paráfrasis del **Principio de Mínima Acción de Maupertuis** expuesto en el capítulo 2 y con más énfasis en la sección 2.3. Para más información respecto a la formulación matemática de este principio revisar [Arn97, Capítulo 9, página 245], [Pin75, Sección 1.2] y quizás la referencia con mejor explicación física [LLBP78, Capítulo 7, Sección 44, página 169].

## 6. La Métrica de Jacobi-Maupertuis

### 6.1. Generalidades de la Métrica de J-M

**Definición 6.1.1. Métrica de Jacobi-Maupertuis:**

La métrica de Jacobi-Maupertuis  $g_h : T\mathcal{M} \times T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^+$  correspondiente a un valor de energía  $h$ , de un sistema mecánico  $(\mathcal{M}, g, V)$  es dado por

$$g_h(v_p) = 2(h - V)g(v)_p.$$

A veces usaremos la abreviación *J-M* para referirnos a Jacobi-Maupertuis.

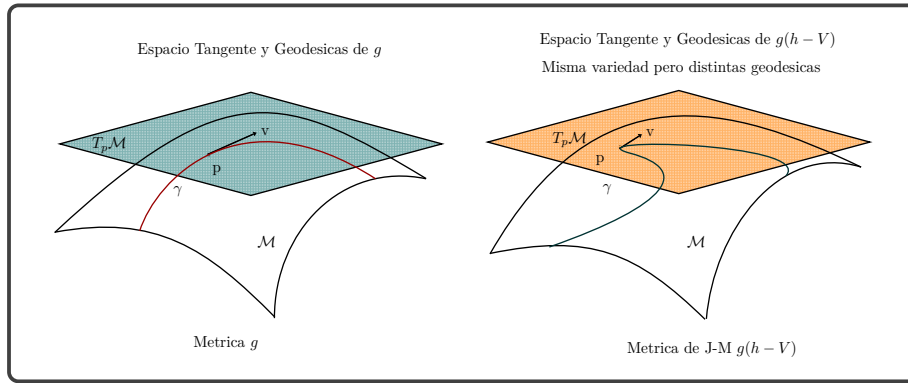


Figura 6.1.1: Métrica de Jacobi-Maupertuis

**Lema 6.1.1. Conexión Métrica Conforme (Segunda Versión):**

Sea  $(\mathcal{M}, g)$  una variedad Riemanniana, dotada con una conexión de Levi-Civita  $\nabla$ . Tomando  $\tilde{g}_p(v) = e^{2\rho(v_p)}g_p(v)$  una métrica conforme a la métrica Riemanniana  $g$ , entonces, para todo par de campos vectoriales  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  la conexión de Levi-Civita para  $(\mathcal{M}, \tilde{g})$  esta dada por

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + A_X Y \quad \text{donde} \\ A_X Y &= d\rho(X)Y + d\rho(Y)X - g(X, Y) \text{grad } \rho \end{aligned}$$

**Demostración.**

Utilizando la fórmula del lema 4.0.1 tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + A_X Y \quad \text{donde} \\ A_X Y &= \frac{1}{2\lambda} (d\lambda(X)Y + d\lambda(Y)X - g(X, Y) \text{grad } \lambda) \end{aligned}$$

Tomando  $\lambda = e^{2\rho(v_p)}$ , tenemos que  $d\lambda = 2e^{2\rho(v_p)}d\rho$  y  $\text{grad } \lambda = 2e^{2\rho(v_p)} \text{grad } \rho$

así, tenemos que

$$\begin{aligned}
A_X Y &= \frac{1}{2\lambda} (d\lambda(X)Y + d\lambda(Y)X - g(X, Y) \text{grad } \lambda) \\
&= \frac{2e^{2\rho(v_p)}}{2e^{2\rho(v_p)}} (d\rho(X)Y + d\rho(Y)X - g(X, Y) \text{grad } \rho) \\
&= d\rho(X)Y + d\rho(Y)X - g(X, Y) \text{grad } \rho
\end{aligned}$$

Finalmente obtenemos el resultado deseado.

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + A_X Y \quad \text{donde} \\
A_X Y &= d\rho(X)Y + d\rho(Y)X - g(X, Y) \text{grad } \rho. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

**Teorema 6.1.1. Teorema de Jacobi:**

Las trayectorias físicas de  $(\mathcal{M}, g, V)$  de energía total  $h$ , son geodésicas de la variedad Riemanniana  $(\mathcal{M}_h, g_h)$  donde  $g_h$  es la métrica de Jacobi-Maupertuis.

**Demostración.**

Usando  $e^{2\rho} = 2(h - V)$  tenemos que

$$e^{2\rho} d\rho = -dV$$

por lo tanto tenemos que dada la definición 3.4.6 de campo gradiente asociado a la métrica  $g$  aplicada a un vector tangente arbitrario, tenemos por tanto

$$2(h - V) \text{grad } \rho = -\text{grad } V \quad (6.1.1)$$

Ahora, sea  $\gamma(t)$  una trayectoria física de energía  $h$ , es decir

$$\nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t) = -\text{grad } V \quad (6.1.2)$$

tenemos también que la energía cinética es

$$2K(\gamma(t)) = g(\gamma'(t), \gamma'(t)) = 2(h - V(\gamma(t))) \quad (6.1.3)$$

Usando el lema 6.1.1, tenemos que

$$\tilde{\nabla}_{\gamma'(t)} \gamma'(t) = \nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t) + 2d\rho(\gamma'(t))\gamma'(t) - g(\gamma'(t), \gamma'(t)) \text{grad } \rho$$

Por (6.1.1), (6.1.2) y (6.1.3) tenemos que

$$\tilde{\nabla}_{\gamma'(t)} \gamma'(t) = -\text{grad } V + 2d\rho(\gamma'(t))\gamma'(t) + \text{grad } V$$

por lo tanto

$$\tilde{\nabla}_{\gamma'(t)} \gamma'(t) = 2d\rho(\gamma'(t))\gamma'(t). \quad (6.1.4)$$

Ahora haciendo una reparametrización por longitud de arco, tenemos que

$$\left\{ \begin{array}{l} t \rightarrow r(s) \\ s \rightarrow r^{-1}(t) \\ s = r^{-1}(t) = \int_{t_0}^t 2(h - V(\gamma(\tau))) d\tau = \int_{t_0}^t e^{2\rho} d\tau. \end{array} \right.$$

Por el teorema de la función inversa y derivando  $h(s)$  tenemos que

$$\frac{dr}{ds}(s) = \frac{1}{e^{2\rho}} = \frac{1}{2(h - V(\gamma(t)))}. \quad (6.1.5)$$

Ahora derivando la curva reparametrizada por longitud de arco, tenemos que

$$\frac{d}{ds}\gamma(r(s)) = \frac{dr}{ds} \frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{e^{2\rho(\gamma)}} \frac{d\gamma}{dt}$$

Calculando la derivada covariante de  $\frac{d\gamma}{ds}(r(s))$  respecto a sí misma y usando las propiedades (a) y (c) de la definición de conexión afín 3.5.1, tenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\frac{d\gamma}{ds}(r(s))} \left[ \frac{d\gamma}{ds}(r(s)) \right] &= \tilde{\nabla}_{\frac{dr}{ds} \frac{d\gamma}{dt}} \left[ \frac{dr}{ds} \frac{d\gamma}{dt} \right] \\ &= \frac{dr}{ds} \left( \tilde{\nabla}_{\frac{d\gamma}{dt}} \left[ \frac{dr}{ds} \frac{d\gamma}{dt} \right] \right) \\ &= \frac{dr}{ds} \left( \overbrace{\left[ \frac{d\gamma}{dt} \left( \frac{dr}{ds} \right) \right]}^1 \frac{d\gamma}{dt} + \overbrace{\frac{dr}{ds} \tilde{\nabla}_{\frac{d\gamma}{dt}} \frac{d\gamma}{dt}}^2 \right) \end{aligned} \quad (6.1.6)$$

utilizando 6.1.5 en 1 y 2 tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} \left( \frac{dr}{ds} \right) &= d(e^{-2\rho}) \left( \frac{d\gamma}{dt} \right) \\ &= -\frac{1}{e^{2\rho}} 2d\rho \left( \frac{d\gamma}{dt} \right) \\ \frac{dr}{ds} \tilde{\nabla}_{\frac{d\gamma}{dt}} \frac{d\gamma}{dt} &= \frac{1}{e^{2\rho}} \tilde{\nabla}_{\frac{d\gamma}{dt}} \frac{d\gamma}{dt} \end{aligned}$$

Sustituyendo en 6.1.6 tenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\frac{d\gamma}{ds}(r(s))} \left[ \frac{d\gamma}{ds}(r(s)) \right] &= \frac{dr}{ds} \left( \left[ \frac{d\gamma}{dt} \left( \frac{dr}{ds} \right) \right] \frac{d\gamma}{dt} + \frac{dr}{ds} \tilde{\nabla}_{\frac{d\gamma}{dt}} \frac{d\gamma}{dt} \right) \\ &= \frac{1}{e^{2\rho}} \left( -\frac{1}{e^{2\rho}} \left[ 2d\rho \left( \frac{d\gamma}{dt} \right) \right] \frac{d\gamma}{dt} + \frac{1}{e^{2\rho}} \tilde{\nabla}_{\frac{d\gamma}{dt}} \frac{d\gamma}{dt} \right) \\ &= \frac{1}{e^{4\rho}} \left( -\left[ 2d\rho \left( \frac{d\gamma}{dt} \right) \right] \frac{d\gamma}{dt} + \tilde{\nabla}_{\frac{d\gamma}{dt}} \frac{d\gamma}{dt} \right) = 0 \end{aligned}$$

Finalmente utilizando 6.1.4 obtenemos la última igualdad. Por lo tanto, tenemos que

$$\tilde{\nabla}_{\frac{d\gamma}{ds}(r(s))} \left[ \frac{d\gamma}{ds}(r(s)) \right] = 0.$$

Es decir, la curva  $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(r(s))$  parametrizada por longitud de arco, es geodésica con la conexión asociada a la métrica  $g_h(v_p) = 2(h - V)g_p(v)$ , por lo tanto, cualquier trayectoria o curva física de energía  $h$  en  $(\mathcal{M}, g, V)$  es geodésica en  $(\mathcal{M}, g_h)$ . ■

**Lema 6.1.2. Parametrización por longitud de arco:**

Como consecuencia de la demostración del teorema de Jacobi, tenemos que la reparametrización por longitud de arco es la siguiente.

$$r(s) = \int_0^s \frac{d\tau}{e^{2\rho((\gamma'(\tau)))}} = \int_0^s \frac{d\tau}{2(h - V(\gamma(\tau)))}.$$

Continuando con los resultados derivados de la sección 4 y 5 tenemos lo siguiente.

**Corolario 6.1.1. Símbolos de Christoffel Métrica Jacobi-Maupertuis:**

Sea  $(\mathcal{M}, g)$  una variedad Riemanniana de dimensión  $n > 1$  y la métrica de Jacobi-Maupertuis  $g_h = 2(h - V)g$ , entonces los símbolos de Christoffel de la métrica de J-M dependen únicamente del potencial  $V$ , los coeficientes de la métrica y los símbolos de Christoffel de la métrica  $g$  con la forma

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + \frac{1}{2(h - V)} \sum_{l=1}^n \left[ g^{jl} \frac{\partial V}{\partial x_l} - g^{il} \frac{\partial V}{\partial x_j} - g^{lj} \frac{\partial V}{\partial x_i} \right] g^{lk}. \quad (6.1.7)$$

Más aún si  $g$  es la métrica Euclidiana, entonces los símbolos de Christoffel son de la siguiente forma

- a) Si  $i \neq j \neq k$  entonces  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = 0$ .
- b) Si  $i = j \neq k$  entonces  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ii}^k = \frac{1}{2(h - V)} \frac{\partial V}{\partial x_k}$ .
- c) Si  $i = k \neq j$  entonces  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^i = -\frac{1}{2(h - V)} \frac{\partial V}{\partial x_j}$ .
- d) Si  $k = j \neq i$  entonces  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^j = -\frac{1}{2(h - V)} \frac{\partial V}{\partial x_i}$ .
- e) Si  $i = j = k$  entonces  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ii}^i = -\frac{1}{2(h - V)} \frac{\partial V}{\partial x_i}$ .

**Demostración.**

Usando las fórmula (6.1.7) y (4.1.1) además del corolario 4.1.1 y  $\lambda = 2(h - V)$  obtenemos que  $\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} 2(h - V) = -2 \frac{\partial V}{\partial x_i}$ , al sustituir en (4.1.1) demostramos la primera afirmación y la formula.

Para la segunda afirmación usamos el corolario 4.1.2,  $\lambda = 2(h - V)$  y  $\frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} = \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial}{\partial x_i} 2(h - V) = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial V}{\partial x_i} = -\frac{1}{2(h - V)} \frac{\partial V}{\partial x_i}$ . ■

Como consecuencia del capítulo 4 podemos obtener expresiones para las curvaturas seccionales, de Ricci y escalares para la métrica de J-M en  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 6.1.2. Curvaturas Mecánicas de la Métrica de J-M:**

Sea  $(\mathcal{M}, g)$  una variedad Riemanniana de dimensión  $n \geq 2$ , dada la métrica de Jacobi-Maupertuis  $g_h = 2(h - V)g$  se definen las **Curvaturas Mecánicas de la Métrica de Jacobi-Maupertuis**  $K_{sec}^{2(h - V)}$  seccionales,  $Ric^{2(h - V)}$  Ricci y  $K^{2(h - V)}$  escalar respectivamente como las curvaturas seccionales, Ricci y escalar de  $(\mathcal{M}_h, g_h)$ .

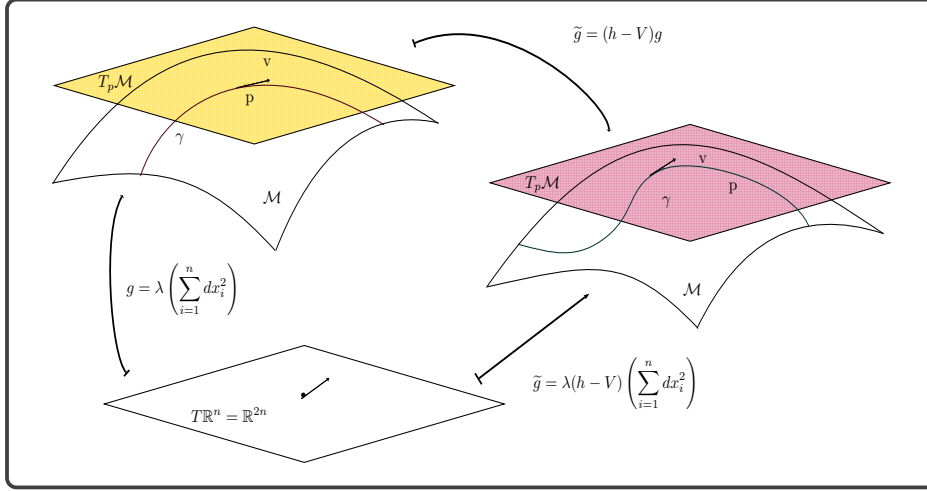


Figura 6.1.2: Métrica de J-M conformes a la métrica Euclidiana

**Corolario 6.1.2. Curvaturas Mecánicas de la Métrica de J-M conformes a la métrica Euclidiana:**

Sea  $(\mathbb{R}_h^n, g_h)$  una variedad Riemanniana de dimensión  $n \geq 2$ , con la métrica de J-M  $g_h = 2(h - V)g$ , con  $g$  la métrica usual de  $\mathbb{R}^n$ , entonces las **curvaturas mecánicas** son

(i) **Curvatura Mecánica Seccional:**

$$\begin{aligned}
 K_{sec}^{2(h-V)} \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) &= -\frac{\Delta_{ij} \ln(h - V)}{4(h - V)} - \frac{\|\nabla V\|^2}{8(h - V)^3} + \frac{\|\nabla_{ij} V\|^2}{8(h - V)^3} \quad (a) \\
 &= \frac{\Delta_{ij} V}{4(h - V)^2} - \frac{\|\nabla V\|^2}{8(h - V)^3} + \frac{3\|\nabla_{ij} V\|^2}{8(h - V)^3} \quad (b)
 \end{aligned}
 \tag{6.1.8}$$

(ii) **Curvatura Mecánica de Ricci:**

$$\begin{aligned}
 Ric^{2(h-V)} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) &= -\frac{\Delta \ln(h - V)}{4(n - 1)(h - V)} - \frac{(n - 2) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \ln(h - V)}{4(n - 1)(h - V)} \\
 &\quad - \frac{(n - 2)\|\nabla V\|^2}{8(n - 1)(h - V)^3} + \frac{(n - 2) \left( \frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^2}{8(n - 1)(h - V)^3} \quad (a) \\
 &= \frac{\Delta V}{4(n - 1)(h - V)^2} + \frac{(n - 2) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} V}{4(n - 1)(h - V)^2} \\
 &\quad - \frac{(n - 4)\|\nabla V\|^2}{8(n - 1)(h - V)^3} + \frac{3(n - 2) \left( \frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^2}{8(n - 1)(h - V)^3} \quad (b)
 \end{aligned}
 \tag{6.1.9}$$

(iii) *Curvatura Mecánica Escalar:*

$$K^{2(h-V)}(p) = -\frac{\Delta \ln(h-V)}{2n(h-V)} - \frac{(n-2)\|\nabla V\|^2}{8n(h-V)^3} \quad (a)$$

$$= \frac{\Delta V}{2n(h-V)^2} - \frac{(n-6)\|\nabla V\|^2}{8n(h-V)^3} \quad (b) \quad (6.1.10)$$

**Demostración.**

Empecemos considerando que  $(\mathbb{R}_h^n, g_h)$  es una variedad Riemanniana con métrica de J-M conforme a la métrica Euclidiana e identificamos el factor conforme como  $\lambda = 2(h-V)$  calculamos lo siguiente

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} = -2 \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (a) \quad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_i^2} = -2 \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} \quad (b) \quad \Delta \lambda = -2 \Delta V \quad (c)$$

$$\ln 2(h-V) = \ln(h-V) \quad (d) \quad \|\nabla \lambda\|^2 = 4\|\nabla V\|^2 \quad (e)$$

Sustituyendo (a), (b), (d) y (e) la fórmula (4.2.1-(a)) del corolario 4.2.1 obtenemos

$$\begin{aligned} K_{sec}^{2(h-V)}(\sigma_{ij}) &= -\frac{\Delta_{ij} \ln \lambda}{2\lambda} - \frac{\|\nabla \lambda\|^2}{4\lambda^3} + \frac{(\frac{\partial \lambda}{\partial x_i})^2 + (\frac{\partial \lambda}{\partial x_j})^2}{4\lambda^3} \\ &= -\frac{\Delta_{ij} \ln(h-V)}{4(h-V)} - \frac{4\|\nabla V\|^2}{4(2(h-V))^3} + \frac{4(\frac{\partial V}{\partial x_i})^2 + 4(\frac{\partial V}{\partial x_j})^2}{4(2(h-V))^3} \\ &= -\frac{\Delta_{ij} \ln(h-V)}{4(h-V)} - \frac{\|\nabla V\|^2}{8(h-V)^3} + \frac{(\frac{\partial V}{\partial x_i})^2 + (\frac{\partial V}{\partial x_j})^2}{8(h-V)^3} \end{aligned}$$

Así obtenemos (i-a), la fórmula (i-b) es consecuencia de la identidad dada en el corolario 4.2.1.

Para (ii-a) usamos (a), (b), (d) y (e) en la primera fórmula del lema 4.3.1

$$\begin{aligned} Ric^{2(h-V)}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) &= -\frac{\Delta \ln \lambda}{2(n-1)\lambda} - \frac{n-2}{2\lambda(n-1)} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \ln \lambda \\ &\quad - \frac{n-2}{4\lambda^3(n-1)} \|\nabla \lambda\|^2 + \frac{n-2}{4\lambda^3(n-1)} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_i}\right)^2 \\ &= -\frac{\Delta \ln(h-V)}{4(n-1)(h-V)} - \frac{n-2}{4(n-1)(h-V)} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \ln(h-V) \\ &\quad - \frac{4(n-2)}{4(n-1)(2(h-V))^3} \|\nabla V\|^2 + \frac{4(n-2)}{4(n-1)(2(h-V))^3} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 \\ &= -\frac{\Delta \ln(h-V)}{4(n-1)(h-V)} - \frac{n-2}{4(n-1)(h-V)} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \ln(h-V) \\ &\quad - \frac{n-2}{8(n-1)(h-V)^3} \|\nabla V\|^2 + \frac{n-2}{8(n-1)(h-V)^3} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 \end{aligned}$$



La fórmula (ii-b) es consecuencia del lema 4.3.1.

Para (iii-a) usamos (a), (b), (d) y (e) además de las fórmulas del corolario 4.4.1 obtenemos

$$\begin{aligned} K^{2(h-V)}(p) &= -\frac{1}{n\lambda}\Delta \ln \lambda - \frac{n-2}{n4\lambda^3}\|\nabla\lambda\|^2 \\ &= -\frac{1}{2n(h-V)}\Delta \ln(h-V) - \frac{n-2}{4n(2(h-V))^3}4\|\nabla V\|^2 \\ &= -\frac{1}{2n(h-V)}\Delta \ln(h-V) - \frac{n-2}{8n(h-V)^3}\|\nabla V\|^2 \end{aligned}$$

Para (iii-b) usamos (c) y (e)

$$\begin{aligned} K^{2(h-V)}(p) &= -\frac{1}{n\lambda^2}\Delta\lambda - \frac{n-6}{n4\lambda^3}\|\nabla\lambda\|^2 \\ &= -\frac{1}{n(2(h-V))^2}(-2\Delta V) - \frac{n-6}{4n(2(h-V))^3}4\|\nabla V\|^2 \\ &= \frac{1}{2n(h-V)^2}\Delta V - \frac{n-6}{8n(h-V)^3}\|\nabla V\|^2 \end{aligned}$$

Con el último calculo hemos obtenido las fórmulas deseadas. ■

**Ejemplo 6.1.1. La Métrica de Jacobi-Maupertuis y la Partícula Libre:** Sea  $(\mathcal{M}, g)$  una variedad Riemanniana conexa de dimensión  $n$ , dada la métrica de Jacobi-Maupertuis  $g_h = 2(h-V)g$ , consideremos el caso asociado a la partícula libre, es decir, el caso en el cual un cuerpo se encuentra libre sin la acción de alguna fuerza externa actuando sobre él, esto es equivalente a considerar que

$$\nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = -\text{grad} V = 0.$$

La ecuación anterior nos dice que la función potencial  $V$  es igual a una constante, lo que implica las siguientes afirmaciones

- a) Las trayectorias físicas son las geodésicas de  $(\mathcal{M}, g)$ .
- b) Las curvaturas mecánicas son proporcionales a las curvaturas de  $(\mathcal{M}, g)$ .

**Demostración.**

Comencemos con  $-\text{grad} V = 0$  que implica que el potencial es  $V = C \in \mathbb{R}$  constante, por lo tanto la Métrica de J-M es de la forma  $g_h = 2(h-C)g$ . Renombrado  $2(h-C)$  como  $\tilde{C} = 2(h-C)$  y calculando los símbolos de Christoffel usando el corolario 4.1.1 con el factor conforme  $\lambda = \tilde{C}$ , tenemos que  $\frac{\partial\lambda}{\partial x_i} = 0$  para todo  $i = 1, \dots, n$ , por lo tanto los símbolos de Christoffel de  $(\mathcal{M}, g_h)$  son de la siguiente forma

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + \frac{1}{2\lambda} \sum_{l=1}^n \left[ g_{il} \frac{\partial\lambda}{\partial x_j} + g_{lj} \frac{\partial\lambda}{\partial x_i} - g_{ji} \frac{\partial\lambda}{\partial x_l} \right] g^{lk} = \Gamma_{ij}^k. \quad (6.1.11)$$

Así tenemos que las ecuaciones de las geodésicas coinciden con las del corolario 3.5.2 por tanto las geodésicas de  $(\mathcal{M}, g_h)$  son las mismas que  $(\mathcal{M}, g)$ , esto demuestra la afirmación (a).

Para la afirmación (b) usamos la definición de los coeficientes del operador de curvatura de la definición 3.6.2 y la ecuación (6.1.11) con lo cual obtenemos que  $\tilde{R}_{ijk}^s = R_{ijk}^s$ . Considerando que  $\tilde{g}_{ij}^k = \tilde{C}g_{ij}$  y la fórmula (3.6.4) del corolario 3.6.1 obtenemos la curvatura seccional

$$K_{sec}^{2(h-V)}(\sigma_{ij}) = \frac{\sum_{k=1}^n \tilde{R}_{iji}^k \tilde{g}_{kj}}{\tilde{g}_{ii} \tilde{g}_{jj} - (\tilde{g}_{ij})^2} = \frac{\tilde{C}}{\tilde{C}^2} \left( \frac{\sum_{k=1}^n R_{iji}^k g_{kj}}{g_{ii} g_{jj} - (g_{ij})^2} \right) = \frac{1}{\tilde{C}} K_{sec}(\sigma_{ij})$$

Continuando con los cálculos y usando el lema 3.6.1 para la curvatura de Ricci obtenemos lo siguiente

$$Ric^{2(h-V)} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} K_{sec}^{2(h-V)}(\sigma_{ij}) = \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{1}{\tilde{C}} K_{sec}(\sigma_{ij}) = \frac{1}{\tilde{C}} Ric \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$$

Usando la definición de la curvatura escalar dada en la definición 3.6.5 tenemos que

$$K^{2(h-V)}(p) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Ric^{2(h-V)} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\tilde{C}} Ric \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{\tilde{C}} K(p)$$

Así hemos demostrado que las curvaturas mecánicas son proporcionales a las curvaturas de  $(\mathcal{M}, g)$  con factor  $\frac{1}{\tilde{C}} = \frac{1}{2(h-C)}$ . ■

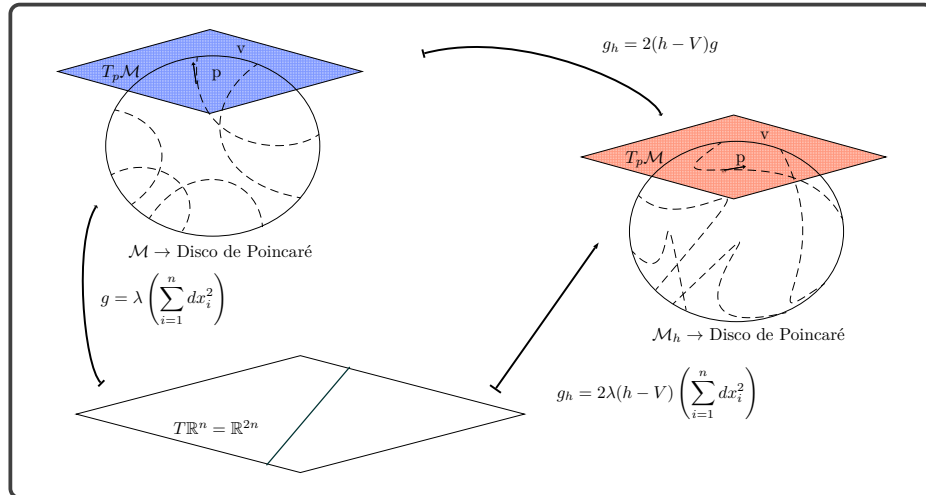


Figura 6.1.3: Métrica de J-M de espacios de Curvatura Negativa.

**Ejemplo 6.1.2. La Métrica de Jacobi-Maupertuis en Variedades de Curvatura Constante:**

Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana conexa de dimensión  $n$ , de curvatura constante. Sabemos que estas variedades se pueden modelar como en el ejemplo 4.5.5, además podemos calcular las curvaturas mecánicas utilizando los resultados del ejemplo 4.5.4, sin embargo el caso de curvatura cero se aborda en el corolario 6.1.2, entonces continuamos con los casos de curvatura positiva y negativa usando las funciones  $\lambda_1(x) = \frac{4C^2}{(C+s\|x\|^2)^2}$  y  $\lambda_2 = 2(h-V)$  como factores conformes para construir la métrica de Jacobi-Maupertuis  $g_h = \lambda_1\lambda_2g$  con  $g$  la métrica Euclidiana, así las curvaturas mecánicas son

i) **Curvatura Mecánica Seccional:**

$$K_{sec}^{2\lambda(h-V)} \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \frac{s}{2C(h-V)} + \frac{(C+s\|x\|^2)^2}{4C^2} K_{sec}^{2(h-V)}(\sigma_{ij}) + \frac{s(C+s\|x\|^2)}{4C^2(h-V)^2} \left( \frac{\partial V}{\partial x_i} x_i + \frac{\partial V}{\partial x_j} x_j - \nabla V \cdot x \right).$$

ii) **Curvatura Mecánica de Ricci:**

$$Ric^{2\lambda(h-V)} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \frac{s}{2C(h-V)} + \frac{(C+s\|x\|^2)^2}{4C^2} Ric^{2(h-V)} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + \frac{s(n-2)(C+s\|x\|^2)}{4C^2(n-1)(h-V)^2} \left( \frac{\partial V}{\partial x_i} x_i - \nabla V \cdot x \right).$$

iii) **Curvatura Mecánica Escalar:**

$$K^{2\lambda(h-V)}(x) = \frac{s}{2C(h-V)} + \frac{(C+s\|x\|^2)^2}{4C^2} K^{2(h-V)}(x) - \frac{s(n-2)(C+s\|x\|^2)}{4C^2n(h-V)^2} \nabla V \cdot x.$$

Donde  $K_{sec}^{2(h-V)}(\sigma_{ij})$ ,  $Ric^{2(h-V)} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$  y  $K^{2(h-V)}(x)$  son las fórmulas del corolario 6.1.2 y el parámetro toma los valores  $s = 1$  para curvatura positiva,  $s = -1$  para curvatura negativa.

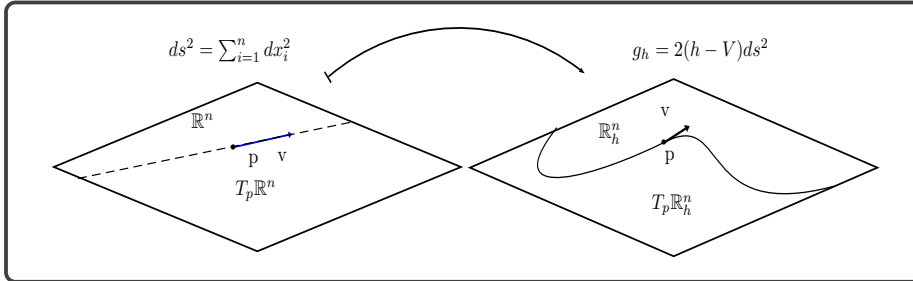


Figura 6.1.4: Métrica de J-M en  $\mathbb{R}^n$ .

**Demostración.**

Usando las funciones  $\lambda_1(x) = \frac{4C^2}{(C+s\|x\|^2)^2}$ ,  $\lambda_2(x) = 2(h-V)$  y del ejemplo 4.5.5 tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
 (i) \quad K_{sec}^{\lambda_1} \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) &= \frac{s}{C} & (ii) \quad \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} &= -\frac{s x_i \lambda_1^2}{C^2} (C + s\|x\|^2) \\
 (iii) \quad \nabla \lambda_1 &= -\frac{s \lambda_1^2}{C^2} (C + s\|x\|^2) x & (iv) \quad \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_i} &= -2 \frac{\partial V}{\partial x_i} \\
 (v) \quad \nabla \lambda_2 &= -2 \nabla V & & (6.1.12)
 \end{aligned}$$

Usando la fórmula del ejemplo 4.5.4 y los cálculos anteriores obtenemos

$$\begin{aligned}
 K_{sec}(\sigma_{ij}) &= \frac{K_{sec}^{\lambda_1}(\sigma_{ij})}{\lambda_2} + \frac{K_{sec}^{\lambda_2}(\sigma_{ij})}{\lambda_1} - \frac{\nabla \lambda_1 \cdot \nabla \lambda_2}{2\lambda_1^2 \lambda_2^2} + \frac{1}{2\lambda_1^2 \lambda_2^2} \left( \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_i} + \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_j} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_j} \right) \\
 &= \frac{s}{2C(h-V)} + \frac{(C + s\|x\|^2)^2}{4C^2} K_{sec}^{2(h-V)}(\sigma_{ij}) \\
 &\quad - \frac{2 \frac{s \lambda_1^2}{C^2} (C + s\|x\|^2) \nabla V \cdot x}{2\lambda_1^2 4(h-V)^2} + \frac{2 \frac{s \lambda_1^2}{C^2} (C + s\|x\|^2)}{2\lambda_1^2 4(h-V)^2} \left( \frac{\partial V}{\partial x_i} x_i + \frac{\partial V}{\partial x_j} x_j \right) \\
 &= \frac{s}{2C(h-V)} + \frac{(C + s\|x\|^2)^2}{4C^2} K_{sec}^{2(h-V)}(\sigma_{ij}) \\
 &\quad + \frac{s(C + s\|x\|^2)}{4C^2(h-V)^2} \left( \frac{\partial V}{\partial x_i} x_i + \frac{\partial V}{\partial x_j} x_j - \nabla V \cdot x \right)
 \end{aligned}$$

Ahora usando el ejemplo 4.5.4 y los resultados de 6.1.12 obtenemos

$$\begin{aligned}
 Ric \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) &= \frac{Ric^{\lambda_1} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)}{\lambda_2} + \frac{Ric^{\lambda_2} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)}{\lambda_1} - \frac{(n-2) \nabla \lambda_1 \cdot \nabla \lambda_2}{2(n-1) \lambda_1^2 \lambda_2^2} + \frac{(n-2) \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_i}}{2(n-1) \lambda_1^2 \lambda_2^2} \\
 &= \frac{s}{2C(h-V)} + \frac{(C + s\|x\|^2)^2}{4C^2} Ric^{2(h-V)} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\
 &\quad - \frac{2(n-2) \frac{s \lambda_1^2}{C^2} (C + s\|x\|^2) \nabla V \cdot x}{2(n-1) \lambda_1^2 4(h-V)^2} + \frac{2(n-2) \frac{s \lambda_1^2}{C^2} (C + s\|x\|^2) \frac{\partial V}{\partial x_i} x_i}{2(n-1) \lambda_1^2 4(h-V)^2} \\
 &= \frac{s}{2C(h-V)} + \frac{(C + s\|x\|^2)^2}{4C^2} Ric^{2(h-V)} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\
 &\quad + \frac{s(n-2)(C + s\|x\|^2)}{4(n-1)C^2(h-V)^2} \left( \frac{\partial V}{\partial x_i} x_i - \nabla V \cdot x \right)
 \end{aligned}$$

Finalmente usamos el ejemplo 4.5.4 y obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
 K(p) &= \frac{K^{\lambda_1}(x)}{\lambda_2} + \frac{K^{\lambda_2}(x)}{\lambda_1} - \frac{(n-2)}{2n \lambda_1^2 \lambda_2^2} \nabla \lambda_1 \cdot \nabla \lambda_2 \\
 &= \frac{s}{2C(h-V)} + \frac{(C + s\|x\|^2)^2}{4C^2} K^{2(h-V)}(x) - \frac{2(n-2) \frac{s \lambda_1^2}{C^2} (C + s\|x\|^2) \nabla V \cdot x}{2n \lambda_1^2 4(h-V)^2} \\
 &= \frac{s}{2C(h-V)} + \frac{(C + s\|x\|^2)^2}{4C^2} K^{2(h-V)}(x) - \frac{s(n-2)(C + s\|x\|^2)}{4nC^2(h-V)^2} \nabla V \cdot x \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

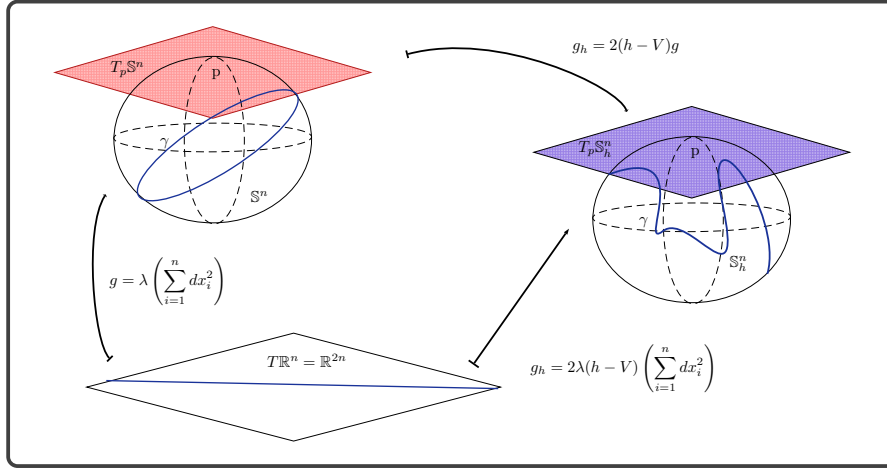


Figura 6.1.5: Métrica de J-M en espacios de curvatura positiva.

Continuando con el ejemplo tomamos (ii) y (iv) de (6.1.12) para calcular lo siguiente

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\lambda_1} \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} + \frac{1}{2\lambda_2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_i} &= \frac{-\frac{s x_i \lambda_1^2}{C^2} (C + s \|x\|^2)}{2\lambda_1} + \frac{-2 \frac{\partial V}{\partial x_i}}{4(h-V)} \\
 &= -\frac{s x_i \lambda_1 (C + s \|x\|^2)}{2C^2} - \frac{\frac{\partial V}{\partial x_i}}{2(h-V)} \\
 &= -\frac{s x_i 4C^2 (C + s \|x\|^2)}{2C^2 (C + s \|x\|^2)^2} - \frac{\frac{\partial V}{\partial x_i}}{2(h-V)} \\
 &= -\frac{2s x_i}{(C + s \|x\|^2)} - \frac{\frac{\partial V}{\partial x_i}}{2(h-V)}
 \end{aligned}$$

Así, usando el ejemplo 4.5.4 concluimos que los símbolos de Christoffel son **Símbolos de Christoffel:**

- Si  $i \neq j \neq k$  entonces  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = 0$
- Si  $i = j \neq k$  entonces  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ii}^k = \frac{2s x_k}{(C + s \|x\|^2)} + \frac{\frac{\partial V}{\partial x_k}}{2(h-V)}$
- Si  $i = k \neq j$  entonces  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^i = -\frac{2s x_j}{(C + s \|x\|^2)} - \frac{\frac{\partial V}{\partial x_j}}{2(h-V)}$
- Si  $k = j \neq i$  entonces  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^j = -\frac{2s x_i}{(C + s \|x\|^2)} - \frac{\frac{\partial V}{\partial x_i}}{2(h-V)}$
- Si  $i = j = k$  entonces  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ii}^i = -\frac{2s x_i}{(C + s \|x\|^2)} - \frac{\frac{\partial V}{\partial x_i}}{2(h-V)}$

Aquí recordemos que  $s = 1$  para curvatura positiva y  $s = -1$  para curvatura negativa.

**Ejemplo 6.1.3. La Métrica de Jacobi-Maupertuis en Variedades de Curvatura Constante de Dimensión 2:**

Sea  $(\mathcal{M}, g)$  una variedad Riemanniana conexa de dimensión 2, de curvatura constante, tomamos nuevamente los factores conformes  $\lambda_1(x) = \frac{4C^2}{(C+s\|x\|^2)^2}$  y  $\lambda_2(x) = 2(h-V)$ , para construir la métrica de Jacobi-Maupertuis  $g_h = 2(h-V)g = 2\lambda_1(h-V)(dx_1^2 + dx_2^2)$  para la variedad  $(\mathcal{M}_h, g_h)$ .

Empecemos por calcular las curvaturas tomando en cuenta los resultados de los ejemplos 6.1.2 y 4.5.3, así tenemos que la curvatura seccional, Ricci y escalar, coinciden

$$K_{sec}^{\lambda_1\lambda_2}(\sigma_{12}) = Ric^{\lambda_1\lambda_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = K^{\lambda_1\lambda_2}(x) = \frac{s}{2C(h-V)} + \frac{(C+s\|x\|^2)^2}{4C^2}K^{2(h-V)}(x)$$

Haciendo uso del corolario 3.6.2 tenemos que  $K^{2(h-V)}(x)$  es la curvatura mecánica para la métrica euclidiana en  $\mathbb{R}^2$ , lo que nos lleva a lo siguiente

$$\begin{aligned} K^{\lambda_1\lambda_2}(x) &= \frac{s}{2C(h-V)} + \frac{(C+s\|x\|^2)^2}{4C^2}K^{2(h-V)}(x) \\ &= \frac{s}{2C(h-V)} - \frac{(C+s\|x\|^2)^2}{4^2C^2(h-V)}\Delta \ln(h-V) \\ &= \frac{s}{2C(h-V)} + \frac{(C+s\|x\|^2)^2}{4^2C^2(h-V)^2}\Delta V + \frac{(C+s\|x\|^2)^2}{4^2C^2(h-V)^3}\|\nabla V\|^2 \end{aligned}$$

Con esto hacemos la siguiente tabla para caracterizar las curvaturas mecánicas

Curvatura Positiva	
$\frac{1}{C} = K > 0 \Rightarrow s = 1$	$\lambda_1(x) = \frac{4C^2}{(C + \ x\ ^2)^2}$
$K^{2\lambda_1(h-V)}(x) = \frac{1}{2C(h-V)} + \frac{(C+\ x\ ^2)^2}{4^2C^2(h-V)^2}\Delta V + \frac{(C+\ x\ ^2)^2}{4^2C^2(h-V)^3}\ \nabla V\ ^2$	
Curvatura Cero	
$K = 0$	
$K^{2\lambda_1(h-V)}(x) = \frac{1}{4(h-V)^2}\Delta V + \frac{1}{4(h-V)^3}\ \nabla V\ ^2$	
Curvatura Negativa	
$-\frac{1}{C} = K < 0 \Rightarrow s = -1$	$\lambda_1(x) = \frac{4C^2}{(C - \ x\ ^2)^2}$
$K^{2\lambda_1(h-V)}(x) = -\frac{1}{2C(h-V)} + \frac{(C-\ x\ ^2)^2}{4^2C^2(h-V)^2}\Delta V + \frac{(C-\ x\ ^2)^2}{4^2C^2(h-V)^3}\ \nabla V\ ^2$	

Figura 6.1.6: Curvaturas Mecánicas de la Métrica de J-M.

De los ejemplos 4.5.5 y 4.1.3 tenemos los símbolos de Christoffel.

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = -\Gamma_{22}^1 = -\frac{2sx_1}{(C+s\|x\|^2)} - \frac{\frac{\partial V}{\partial x_1}}{2(h-V)} \\ \Gamma_{22}^2 &= \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = -\Gamma_{11}^2 = -\frac{2sx_2}{(C+s\|x\|^2)} - \frac{\frac{\partial V}{\partial x_2}}{2(h-V)} \end{aligned}$$

Notemos que estos símbolos de Christoffel describen los 3 casos, pues en el caso de curvatura 0, basta tomar  $s=0$ .

Para concluir calcularemos las geodésicas, usando el ejemplo 4.5.2 y los Símbolos de Christoffel calculados, así tenemos lo siguiente

$$(i) \quad \frac{d^2x_1}{dt^2} - \frac{1}{2(h-V)} \left( \left( \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 \right) \frac{\partial V}{\partial x_1} + 2 \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} \right) - \frac{2s}{C+k\|x\|^2} \left( \left( \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 \right) x_1 + 2x_2 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} \right) = 0$$

$$(ii) \quad \frac{d^2x_2}{dt^2} - \frac{1}{2(h-V)} \left( \left( \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 \right) \frac{\partial V}{\partial x_2} + 2 \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} \right) - \frac{2s}{C+k\|x\|^2} \left( \left( \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 \right) x_2 + 2x_1 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} \right) = 0$$

Finalmente podemos caracterizar cada caso,  $s = 1$  para curvatura positiva,  $s = -1$  para curvatura negativa y  $s = 0$  para los espacios Euclidianos.

**Ejemplo 6.1.4. La Métrica de Jacobi-Maupertuis en Variedades de Curvatura Constante de Dimensión 3:**

Nuevamente sea  $(\mathcal{M}, g)$  una variedad Riemanniana conexa de dimensión 3, de curvatura constante con factores conformes a la métrica euclidiana  $\lambda_1(x) = \frac{4C^2}{(C+s\|x\|^2)^2}$  y  $\lambda_2(x) = 2(h-V)$  para construimos la métrica de Jacobi-Maupertuis para  $(\mathcal{M}_h, g_h)$ .

De nuevo calculamos las curvaturas mecánicas, para espacios  $K = 0$  partiendo del corolario 6.1.2 sustituyendo  $n = 3$

i) **Curvatura Mecánica Seccional**  $K_{sec}^{2(h-V)}$ :

$$K_{sec}^{2(h-V)} \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = -\frac{\Delta_{ij} \ln(h-V)}{4(h-V)} - \frac{\|\nabla V\|^2}{8(h-V)^3} + \frac{\left( \frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial x_j} \right)^2}{8(h-V)^3}$$

ii) **Curvatura Mecánica de Ricci**  $Ric^{2(h-V)}$ :

$$Ric^{2(h-V)} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = -\frac{\Delta \ln(h-V)}{8(h-V)} - \frac{\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \ln(h-V)}{8(h-V)} - \frac{\|\nabla V\|^2}{4^2(h-V)^3} + \frac{\left( \frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^2}{4^2(h-V)^3}$$

iii) **Curvatura Mecánica Escalar**  $K^{2(h-V)}$ :

$$K^{2(h-V)}(x) = -\frac{\Delta \ln(h-V)}{6(h-V)} - \frac{\|\nabla V\|^2}{24(h-V)^3} \quad (1)$$

$$= \frac{\Delta V}{6(h-V)^2} + \frac{\|\nabla V\|^2}{8(h-V)^3} \quad (2)$$

Ahora, tomando los ejemplos 4.5.5, 4.5.4 y las curvaturas  $K_{sec}^{2(h-V)}(\sigma_{ij})$ ,  $Ric^{2(h-V)}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$  y  $K^{2(h-V)}(x)$  para expresar las curvaturas mecánicas en los casos de curvatura positiva y negativa

i) **Curvatura Mecánica Seccional:**

$$K_{sec}^{\lambda_1 \lambda_2} \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \frac{s}{2C(h-V)} + \frac{(C + s\|x\|^2)^2}{4C^2} K_{sec}^{2(h-V)}(\sigma_{ij}) + \frac{s(C + s\|x\|^2)}{4C^2(h-V)^2} \left( \frac{\partial V}{\partial x_i} x_i + \frac{\partial V}{\partial x_j} x_j - \nabla V \cdot x \right)$$

ii) **Curvatura Mecánica de Ricci:**

$$Ric^{\lambda_1 \lambda_2} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \frac{s}{2C(h-V)} + \frac{(C + s\|x\|^2)^2}{4C^2} Ric^{2(h-V)} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + \frac{s(C + s\|x\|^2)}{8C^2(h-V)^2} \left( \frac{\partial V}{\partial x_i} x_i - \nabla V \cdot x \right)$$

iii) **Curvatura Mecánica Escalar:**

$$K^{\lambda_1 \lambda_2}(x) = \frac{s}{2C(h-V)} + \frac{(C + s\|x\|^2)^2}{4C^2} K^{2\lambda_1(h-V)}(x) - \frac{s(C + s\|x\|^2)}{8C^2(h-V)^2} \nabla V \cdot x \quad (1)$$

$$= \frac{s}{2C(h-V)} + \frac{(C + s\|x\|^2)^2}{4C^2} K^{2\lambda_1(h-V)}(x) - \frac{s(C + s\|x\|^2)}{8C^2(h-V)^2} \nabla V \cdot x \quad (2)$$

Para describir las curvaturas tomamos  $s = 1$  para curvatura positiva y  $s = -1$  para curvatura negativa.

Continuando con el cálculo de los símbolos de Christoffel usando el ejemplo 4.5.5 y el corolario 4.1.4 tenemos lo siguiente.

$$\Gamma_{12}^3 = \Gamma_{13}^2 = \Gamma_{21}^3 = \Gamma_{23}^1 = \Gamma_{31}^2 = \Gamma_{32}^1 = 0$$

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = -\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{31}^3 = -\frac{2sx_1}{(C + s\|x\|^2)} - \frac{\frac{\partial V}{\partial x_1}}{2(h-V)}$$

$$\Gamma_{22}^2 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{23}^3 = -\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{32}^3 = -\frac{2sx_2}{(C + s\|x\|^2)} - \frac{\frac{\partial V}{\partial x_2}}{2(h-V)}$$

$$\Gamma_{33}^3 = \Gamma_{31}^1 = \Gamma_{32}^2 = -\Gamma_{22}^3 = \Gamma_{23}^2 = \Gamma_{13}^1 = -\frac{2sx_3}{(C + s\|x\|^2)} - \frac{\frac{\partial V}{\partial x_3}}{2(h-V)}$$

Cabe resaltar que estos símbolos de Christoffel describen los 3 casos, pues en el caso de curvatura 0, basta tomar  $s = 0$ .

Para concluir calculamos las geodésicas usando el ejemplo 4.5.2 y los símbolos



de Christoffel calculados

$$\begin{aligned}
(i) \quad & \frac{d^2 x_1}{dt^2} - \frac{2s}{C + s\|x\|^2} \left( \left( \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_3}{dt} \right)^2 \right) x_1 + 2x_2 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} + 2x_3 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_3}{dt} \right) \\
& - \frac{1}{2(h-V)} \left( \left( \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_3}{dt} \right)^2 \right) \frac{\partial V}{\partial x_1} + 2 \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} + 2 \frac{\partial V}{\partial x_3} \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_3}{dt} \right) = 0 \\
(ii) \quad & \frac{d^2 x_2}{dt^2} - \frac{2s}{C + s\|x\|^2} \left( \left( \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_3}{dt} \right)^2 \right) x_2 + 2x_1 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} + 2x_3 \frac{dx_2}{dt} \frac{dx_3}{dt} \right) \\
& - \frac{1}{2(h-V)} \left( \left( \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_3}{dt} \right)^2 \right) \frac{\partial V}{\partial x_2} + 2 \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} + 2 \frac{\partial V}{\partial x_3} \frac{dx_2}{dt} \frac{dx_3}{dt} \right) = 0 \\
(iii) \quad & \frac{d^2 x_3}{dt^2} - \frac{2s}{C + s\|x\|^2} \left( \left( \left( \frac{dx_3}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 \right) x_3 + 2x_1 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_3}{dt} + 2x_2 \frac{dx_2}{dt} \frac{dx_3}{dt} \right) \\
& - \frac{1}{2(h-V)} \left( \left( \left( \frac{dx_3}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 \right) \frac{\partial V}{\partial x_3} + 2 \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_3}{dt} + 2 \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} \frac{dx_3}{dt} \right) = 0
\end{aligned}$$

Con esto último podemos expresar las geodésicas para los 3 casos  $s = 1$  para curvatura positiva,  $s = 0$  curvatura nula y  $s = -1$  curvatura negativa.

## 6.2. Ejemplos y Aplicaciones

Para comenzar con los ejemplos y aplicaciones presentamos al oscilador armónico simple, el cual es un sistema mecánico que es muy utilizado en física y sirve para describir el movimiento de un péndulo con longitud de cuerda fija y oscilaciones angulares pequeñas o de manera equivalente también el movimiento de un resorte.

### Ejemplo 6.2.1. Oscilador Armónico Simple:

El problema con condiciones iniciales asociado al oscilador armónico simple está descrito por las siguientes expresiones.

$$\begin{cases} \ddot{x} + \alpha^2 x = 0 \\ x(t_0) = x_0 \\ v(t_0) = \dot{x}(t_0) = v_0. \end{cases}$$

Donde  $\alpha$  está asociada al valor de la amplitud de onda de las soluciones. Las soluciones de este sistema de ecuaciones están dadas por

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos(\alpha t) + \frac{v_0}{\alpha} \sin(\alpha t) \\ v(t) = -\alpha x_0 \sin(\alpha t) + v_0 \cos(\alpha t). \end{cases}$$

Las funciones lagrangiano y hamiltoniano del sistema están dadas por los siguientes términos

$$\begin{cases} H(t) = \frac{1}{2}(v^2 + \alpha^2 x^2) \\ L(t) = \frac{1}{2}(v^2 - \alpha^2 x^2). \end{cases}$$

El término asociado a la energía potencial es  $\frac{\alpha^2}{2}x^2$ , finalmente la métrica de Jacobi-Maupertuis asociada a este sistema mecánico es

$$g_h(v) = 2(h - \alpha^2 x^2)g(v).$$

Ahora, redefiniendo los valores de  $x_0$  y  $\frac{v_0}{\alpha}$  en términos de una variable angular tenemos que

$$\begin{cases} x_0 = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\alpha^2}} \text{Sen}(\phi) \\ \frac{v_0}{\alpha} = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\alpha^2}} \text{Cos}(\phi) \\ x(t) = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\alpha^2}} (\text{Sen}(\phi)\text{Cos}(\alpha t) + \text{Cos}(\phi)\text{Sen}(\alpha t)) \\ \quad = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\alpha^2}} \text{Cos}(\alpha t + \phi) \\ v(t) = -\alpha \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\alpha^2}} \text{Sen}(\alpha t + \phi). \end{cases}$$

Renombrando  $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\alpha^2}}$  tenemos que las soluciones del sistema en el hamiltoniano y el lagrangiano toman la forma.

$$\begin{cases} x(t) = A \text{Cos}(\alpha t + \phi) \\ v(t) = -A\alpha \text{Sen}(\alpha t + \phi) \\ H(t) = \frac{1}{2}(v^2 + \alpha^2 x^2) \\ \quad = \frac{\alpha^2 A^2}{2} (\text{Sen}^2(\alpha t + \phi) + \text{Cos}^2(\alpha t + \phi)) = \frac{\alpha^2 A^2}{2} = h \\ L(t) = \frac{1}{2}(v^2 - \alpha^2 x^2) = \frac{\alpha^2 A^2}{2} (\text{Sen}^2(\alpha t + \phi) - \text{Cos}^2(\alpha t + \phi)) \\ \quad = \frac{\alpha^2 A^2}{2} \text{Cos}(2(\alpha t + \phi)). \end{cases}$$

La métrica de Jacobi-Maupertuis a lo largo de una solución toma la siguiente forma

$$g_h(v) = 2(h - \alpha^2 x^2)g(v) = v^2 g(v) = A^2 \alpha^2 \text{Sen}^2(\alpha t + \phi)g(v)$$

y calculando la reparametrización por longitud de arco para la métrica de Jacobi-Maupertuis

$$\left\{ \begin{aligned} r(s) &= \int_{s_0}^s \frac{d\tau}{2(h - V(\gamma(\tau)))} = \int_{s_0}^s \frac{d\tau}{A^2\alpha^2 \text{Sen}^2(\alpha\tau + \phi)} \\ &= \frac{1}{A^2\alpha^2} \int_{s_0}^s \text{Csc}^2(\alpha\tau + \phi) d\tau = -\frac{1}{A^2\alpha^2} \text{Cot}(\alpha\tau + \phi) \Big|_{s_0}^s. \end{aligned} \right.$$

**Ejemplo 6.2.2. Problemas de Fuerza Central y la Métrica de Jacobi-Maupertuis en  $\mathbb{R}_h^n$ :**

En este ejemplo estudiaremos algunos casos particulares de potenciales conocidos como **Potenciales de Fuerza Central**, los cuales históricamente están relacionados con el llamado **Problema de Kepler** el cual es un caso particular del problema de 2 cuerpos para la mecánica Newtoniana, es decir uno de los cuerpos está estático en el centro coordenado y sometido a la atracción producida por el **Potencial de Fuerza Central**, en ese sentido, estudiaremos este problema considerando la siguiente familia de potenciales tomando a  $\omega$  y  $\alpha$  como parámetros que posteriormente nos servirán para particularizar ejemplos históricamente muy importantes <sup>2</sup>

$$V(x) = \frac{\omega}{\|x\|^\alpha} = \frac{\omega}{(\sum_{k=1}^n x_k^2)^{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{\omega}{r^\alpha}. \quad (6.2.1)$$

Calculando sus derivadas parciales, su laplaciano y la norma del gradiente obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} (a) \quad \frac{\partial V}{\partial x_i} &= -\frac{\alpha\omega x_i}{\|x\|^{\alpha+2}} = -\frac{\alpha\omega x_i}{r^{\alpha+2}} \\ (b) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} &= \frac{\alpha(\alpha+2)\omega x_i^2}{\|x\|^{\alpha+4}} - \frac{\alpha\omega}{\|x\|^{\alpha+2}} = \frac{\alpha(\alpha+2)\omega x_i^2}{r^{\alpha+4}} - \frac{\alpha\omega}{r^{\alpha+2}} \\ (c) \quad \left( \frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^2 &= \frac{\alpha^2\omega^2 x_i^2}{\|x\|^{2\alpha+4}} = \frac{\alpha^2\omega^2 x_i^2}{r^{2\alpha+4}} \\ (d) \quad \|\nabla V\|^2 &= \frac{\omega^2\alpha^2}{\|x\|^{2\alpha+2}} = \frac{\omega^2\alpha^2}{r^{2\alpha+2}} \\ (e) \quad \Delta V &= \frac{\omega\alpha(\alpha+2-n)}{r^{\alpha+2}} \end{aligned}$$

Calculemos la curvatura mecánica escalar para este potencial usando el corolario 6.1.2 para los espacios de curvatura cero, es decir para la métrica de J-M en  $\mathbb{R}_h^n$

$$\begin{aligned} K^{2(h-V)}(x) &= \frac{\Delta V}{2n(h-V)^2} - \frac{(n-6)\|\nabla V\|^2}{8n(h-V)^3} \\ &= \frac{\omega\alpha(\alpha+2-n)}{2nr^{\alpha+2}(h-V)^2} - \frac{(n-6)\omega^2\alpha^2}{8nr^{2\alpha+2}(h-V)^3} \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Elijiendo  $\omega = -mMG$  y  $\alpha = 1$  nos permitirá abordar el problema de Kepler.

Para continuar calculamos lo siguiente

$$\frac{1}{(h-V)^l} = \frac{1}{\left(h - \frac{\omega}{r^\alpha}\right)^l} = \frac{1}{\frac{(hr^\alpha - \omega)^l}{r^{l\alpha}}} = \frac{r^{l\alpha}}{(hr^\alpha - \omega)^l}$$

Con esto continuamos y obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} K^{2(h-V)}(x) &= \frac{\omega\alpha(\alpha+2-n)}{2nr^{\alpha+2}(h-V)^2} - \frac{(n-6)\omega^2\alpha^2}{8nr^{2\alpha+2}(h-V)^3} \\ &= \frac{\omega\alpha r^{2\alpha}(\alpha+2-n)}{2nr^{\alpha+2}(hr^\alpha - \omega)^2} - \frac{(n-6)\omega^2\alpha^2 r^{3\alpha}}{8nr^{2\alpha+2}(hr^\alpha - \omega)^3} \\ &= \frac{\omega\alpha r^{\alpha-2}(\alpha+2-n)}{2n(hr^\alpha - \omega)^2} - \frac{(n-6)\omega^2\alpha^2 r^{\alpha-2}}{8n(hr^\alpha - \omega)^3} \\ &= \frac{\omega\alpha r^{\alpha-2}}{8n(hr^\alpha - \omega)^3} (4(hr^\alpha - \omega)(\alpha+2-n) - (n-6)\omega\alpha) \\ &= \frac{\omega\alpha r^{\alpha-2}}{8n(hr^\alpha - \omega)^3} \left( 4hr^\alpha(\alpha+2-n) - \omega \overbrace{((n-6)\alpha + 4(\alpha+2-n))}^{(*)} \right) \end{aligned}$$

Haciendo álgebra con el término marcado con (\*) tenemos

$$\begin{aligned} (n-6)\alpha + 4(\alpha+2-n) &= (n-6)\alpha + 4\alpha + 4(2-n) \\ &= (n-2)\alpha - 4(n-2) = (n-2)(\alpha-4) \end{aligned}$$

Sustituyendo en el cálculo anterior, finalmente llegamos a lo siguiente

$$K^{2(h-V)}(x) = \frac{\omega\alpha r^{\alpha-2}}{8n(hr^\alpha - \omega)^3} \overbrace{(4hr^\alpha(\alpha+2-n) - \omega(n-2)(\alpha-4))}^{Q(n,\alpha)} \quad (6.2.2)$$

Con esto resulta interesante identificar algunos casos particulares haciendo variación de los parámetros  $\alpha$  y  $n$ , para ello necesitamos estudiar la siguiente expresión que obtenemos en la curvatura escalar.

$$Q(n, \alpha) = 4hr^\alpha \overbrace{(\alpha+2-n)}^{(1)} - \omega(n-2)(\alpha-4)$$

En uno de los casos nos conviene expresar  $\alpha$  en función de  $n$  partiendo del término marcado con (1), tomando  $\alpha = n-2$  obtenemos el siguiente resultado.

**Corolario 6.2.1.**

Sea  $(\mathbb{R}_h^n, g_h)$  un ***h-Espacio de Configuración*** de dimensión  $n$ , con  $n > 2$ , con métrica de Jacobi-Maupertuis asociada al siguiente potencial

$$V(x) = \frac{\omega}{\|x\|^{n-2}} = \frac{\omega}{\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{\frac{n-2}{2}}} = \frac{\omega}{r^{n-2}}$$

Entonces, la curvatura mecánica escalar es

$$K^{2(h-v)}(x) = -\frac{\omega^2(n-6)(n-2)^2 r^{n-4}}{8n(hr^{n-2} - \omega)^3}.$$

**Demostración.**

La curvatura mecánica para la métrica de Jacobi-Maupertuis asociada al potencial (6.2.1) tiene la forma dada en (6.2.2)

$$K^{2(h-V)}(x) = \frac{\omega \alpha r^{\alpha-2}}{8n(hr^\alpha - \omega)^3} Q(n, \alpha)$$

pero sabemos que  $\alpha = n - 2$ , así sustituyendo obtener lo siguiente

$$\begin{aligned} K^{2(h-V)}(x) &= \frac{\omega \alpha r^{\alpha-2}}{8n(hr^\alpha - \omega)^3} Q(n, \alpha) \\ &= \frac{\omega(n-2)r^{n-4}}{8n(hr^{n-2} - \omega)^3} Q(n, n-2) \\ &= \frac{\omega(n-2)r^{n-4}}{8n(hr^{n-2} - \omega)^3} (-\omega(n-2)(n-6)) \\ &= -\frac{\omega^2(n-6)(n-2)^2 r^{n-4}}{8n(hr^{n-2} - \omega)^3} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Con el corolario anterior encontramos dos casos particulares, cuando  $n = 2$  que al substituir su valor para  $\alpha$  en el potencial, regresamos a un caso abordado en el ejemplo 6.1.1. El siguiente ejemplo importante es para el valor  $n = 6$ .

**Corolario 6.2.2.**

Sea  $(\mathbb{R}_h^6, g_h)$  un ***h-Espacio de Configuración*** de dimensión 6, con métrica de Jacobi-Maupertuis asociada al siguiente potencial

$$V(x) = \frac{\omega}{\|x\|^4} = \frac{\omega}{(\sum_{k=1}^6 x_k^2)^2} = \frac{\omega}{r^4}.$$

Entonces la curvatura mecánica escalar es cero.  $\blacksquare$

A continuación tenemos otros dos casos particulares, cuando  $n = 2$  y  $\alpha = 4$  que nos permiten escribir el siguiente par de resultados.

**Corolario 6.2.3.**

Sea  $(\mathbb{R}_h^n, g_h)$  un ***h-Espacio de Configuración*** de dimensión  $n$ , con Métrica de Jacobi-Maupertuis asociada al siguiente potencial

$$V(x) = \frac{\omega}{\|x\|^4} = \frac{\omega}{(\sum_{k=1}^n x_k^2)^2} = \frac{\omega}{r^4}$$

Entonces la curvatura mecánica escalar es de la siguiente forma.

$$K^{2(h-V)}(x) = \frac{2h\omega(6-n)r^6}{n(hr^4 - \omega)^3} \quad (6.2.3)$$

**Demostración.**

Tomando la curvatura mecánica para la métrica de Jacobi-Maupertuis asociada

al potencial (6.2.1) con la forma dada en (6.2.2) y considerando que  $\alpha = 4$  obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} K^{2(h-V)}(x) &= \frac{4\omega r^{4-2}}{8n(hr^4 - \omega)^3} Q(n, 4) \\ &= \frac{4\omega r^2}{8n(hr^4 - \omega)^3} (4hr^4(6 - n)) \\ &= \frac{2h\omega(6 - n)r^6}{n(hr^4 - \omega)^3} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

A continuación abordamos el caso más importante de este ejemplo, cuando  $n = 2$  pues se estudiará con más detalle en los ejemplos posteriores.

**Corolario 6.2.4.**

Sea  $(\mathbb{R}_h^2, g_h)$  un ***h-Espacio de Configuración*** de dimensión 2, con Métrica de Jacobi-Maupertuis asociada al siguiente potencial

$$V(x) = \frac{\omega}{\|x\|^\alpha} = \frac{\omega}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{\omega}{r^\alpha}$$

Entonces la curvatura mecánica escalar es de la siguiente forma.

$$K^{2(h-V)}(x) = \frac{h\omega\alpha^2 r^{2\alpha-2}}{4(hr^\alpha - \omega)^3}$$

**Demostración.**

Comencemos la curvatura mecánica escalar calculada en (6.2.2) para los potenciales (6.2.1) y considerando  $n = 2$

$$\begin{aligned} K^{2(h-V)}(x) &= \frac{\omega\alpha r^{\alpha-2}}{16(hr^\alpha - \omega)^3} Q(2, \alpha) \\ &= \frac{\omega\alpha r^{\alpha-2}}{16(hr^\alpha - \omega)^3} (4hr^\alpha\alpha) \\ &= \frac{h\omega\alpha^2 r^{2\alpha-2}}{4(hr^\alpha - \omega)^3} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Para concluir este ejemplo revisaremos el último caso de interés para este trabajo, cuando  $n = 3$ , pues por razones de interés físico es obligado su estudio.

**Corolario 6.2.5.**

Sea  $(\mathbb{R}_h^3, g_h)$  un ***h-Espacio de Configuración*** de dimensión 3, con Métrica de Jacobi-Maupertuis asociada al siguiente potencial

$$V(x) = \frac{\omega}{\|x\|^\alpha} = \frac{\omega}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{\omega}{r^\alpha}$$

Entonces la curvatura mecánica escalar es de la siguiente forma.

$$K^{2(h-V)}(x) = \frac{\omega\alpha r^{\alpha-2}}{24(hr^\alpha - \omega)^3} (4hr^\alpha(\alpha - 1) - \omega(\alpha - 4))$$

La demostración es similar a las anteriores al considerar  $n = 3$  y sustituir  $Q(3, \alpha) = 4hr^\alpha(\alpha - 1) - \omega(\alpha - 4)$  en (6.2.2). ■

**Ejemplo 6.2.3. Curvaturas Mecánicas para Funciones Armónicas:**

En este ejemplo empezamos a analizar las funciones armónicas en  $\mathbb{R}^n$  y usaremos estas funciones para describir las curvaturas mecánicas. Una función armónica es una función  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  solución de la siguiente ecuación diferencial parcial.

$$\Delta V = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial x_k^2} = 0. \quad (6.2.4)$$

Para solucionar esta ecuación diferencial hacemos el cambio de variable  $r = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$ , con esta variable calculamos lo siguiente

$$\begin{aligned} (i) \quad & \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} \\ (ii) \quad & \frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2} = \frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \\ (iii) \quad & \left( \frac{\partial r}{\partial x_i} \right)^2 = \frac{x_i^2}{r^2} \\ (iv) \quad & \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \left( \frac{\partial r}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2} \\ (v) \quad & \|\nabla V\|^2 = \left\| \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i} \right\|^2 = (v')^2 \frac{\|x\|^2}{r^2} = (v')^2. \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

Considerando que sólo tenemos la variable radial podemos expresar  $\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{d^2 V}{dr^2} = v''$  y  $\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{dV}{dr} = v'$  con esto calculamos lo siguiente

$$\begin{aligned} \Delta V &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial x_k^2} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \left( \frac{\partial r}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x_k^2} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \left( \frac{\partial r}{\partial x_k} \right)^2 v'' + \frac{\partial^2 r}{\partial x_k^2} v' \right) = \sum_{k=1}^n \left( \frac{x_k^2}{r^2} v'' + \left( \frac{1}{r} - \frac{x_k^2}{r^3} \right) v' \right) \\ &= \frac{r^2}{r^2} v'' + \left( \frac{n}{r} - \frac{r^2}{r^3} \right) v' = v'' + \frac{(n-1)}{r} v' = 0. \end{aligned}$$

Solucionando esta ecuación diferencial tenemos lo siguiente

$$v'' + \frac{(n-1)}{r} v' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{v''}{v'} = -\frac{n-1}{r}.$$

Integrando tenemos que para alguna constante  $b$

$$\ln(v') = \int \frac{v''}{v'} dr = - \int \frac{n-1}{r} dr = \ln(r^{-(n-1)}) + b.$$

Despejando e integrando tenemos

$$v(r) = \int v' dr = \int \frac{b}{r^{(n-1)}} dr \Rightarrow v(r) = \begin{cases} b \ln(r) + c & (n = 2) \\ \frac{b}{r^{(n-2)}} + c & (n \geq 3) \end{cases}$$

Para  $c = 0$  la función potencial satisface la ecuación diferencial (6.2.4), sustituyendo en la fórmula para la curvatura escalar del corolario 6.1.2 y tomando en cuenta que  $v' = -\frac{b(n-2)}{r^{(n-1)}}$  obtenemos

$$\begin{aligned} K^{2(h-V)}(x) &= K^{2(h-V)}(x) = \frac{\Delta V}{2n(h-V)^2} - \frac{(n-6)\|\nabla V\|^2}{8n(h-V)^3} \\ &= -\frac{(n-6)\|\nabla V\|^2}{8n(h-V)^3} = -\frac{(n-6)(v')^2}{8n(h-V)^3} \\ &= -\frac{(n-6)\frac{(n-2)^2 b^2}{r^{2(n-1)}}}{8n\frac{(hr^{(n-2)}-b)^3}{r^{3(n-2)}}} = -\frac{(n-6)(n-2)^2 b^2 r^{3(n-2)}}{8n(hr^{(n-2)}-b)^3 r^{2(n-1)}} \\ &= -\frac{(n-6)(n-2)^2 b^2 r^{(3n-6)}}{8n(hr^{(n-2)}-b)^3 r^{(2n-2)}} = -\frac{b^2(n-6)(n-2)^2 r^{(n-4)}}{8n(hr^{(n-2)}-b)^3} \end{aligned}$$

Así podemos mejorar el corolario 6.2.1, al incluir el caso  $n = 2$  excluido en el corolario y a su vez agregando la propiedad de armonicidad a los potenciales de fuerza central (6.2.1) con  $\alpha = n - 2$ , sin embargo, aún necesitamos calcular el caso  $n = 2$  para las funciones armónicas, es decir con el potencial  $v(r) = b \ln(r)$ , calculando la curvatura escalar usando el corolario 6.1.2 tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} K^{2(h-V)}(x) &= K^{2(h-V)}(x) = \frac{\Delta V}{2n(h-V)^2} - \frac{(n-6)\|\nabla V\|^2}{8n(h-V)^3} \\ &= -\frac{(-4)\|\nabla V\|^2}{16(h-V)^3} = \frac{(v')^2}{4(h-b \ln(r))^3} \\ &= \frac{\frac{b^2}{r^2}}{4(h-b \ln(r))^3} = \frac{b^2}{4r^2(h-b \ln(r))^3} \end{aligned}$$

Finalmente podemos reformular el corolario 6.2.1 en la siguiente forma.

**Corolario 6.2.6.**

Sea  $(\mathbb{R}_h^n, g_h)$  un ***h-Espacio de Configuración*** de dimensión  $n$ , con  $n \geq 2$ , con métrica de Jacobi-Maupertuis asociada al siguiente potencial armónico de fuerza central.

$$V(x) = \begin{cases} \omega \ln(r) & (n = 2) \\ \frac{\omega}{r^{n-2}} & (n \geq 3) \end{cases}$$



Entonces, la curvatura mecánica escalar es

$$K^{2(h-V)}(x) = \begin{cases} \frac{\omega^2}{4r^2(h - \omega \ln(r))^3} & (n = 2) \\ \frac{-\omega^2(n-6)(n-2)^2 r^{n-4}}{8n(hr^{n-2} - \omega)^3} & (n \geq 3) \end{cases}$$

La demostración es inmediata tomando los cálculos de este ejemplo y el corolario 6.2.1. ■

**Ejemplo 6.2.4. Problemas de Fuerza Central y la Métrica de J-M en  $\mathbb{R}^2$ :**

Continuamos los casos particulares de **Potenciales de Fuerza Central** abordados en el ejemplo 6.2.2. Del corolario 6.2.4 tenemos que la curvatura mecánica Gaussiana asociada a la métrica de Jacobi-Maupertuis para el potencial

$$V(x) = \frac{\omega}{\|x\|^\alpha} = \frac{\omega}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{\omega}{r^\alpha}$$

es

$$K^{2(h-V)}(x) = \frac{h\omega\alpha^2 r^{2\alpha-2}}{4(hr^\alpha - \omega)^3}$$

Con esto podemos abordar los siguientes casos, considerando  $\alpha = 1$ .

(1) **Problema de Kepler:**

Considerando  $\omega = -mMG$  donde  $m$  y  $M$  son las masas positivas del cuerpo en atracción y el central respectivamente, además de que  $G$  es la constante de gravitación.

(2) **Potencial Electrostático de Coulomb:**

Considerando  $\omega = qQK$ , donde  $Q$  y  $q$  son un par de cargas en atracción o repulsión dependiendo del signo de las cargas, aquí  $Q$  es la carga central y  $K$  la constante de Coulomb.

Este ejemplo considera  $q, Q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , en ese sentido el producto  $qQK$  depende del signo de las cargas  $q$  y  $Q$ .

Con esto podemos obtener los siguientes resultados.

**Corolario 6.2.7.**

Sea  $(\mathbb{R}_h^2, g_h)$  un  **$h$ -Espacio de Configuración** de dimensión 2, con Métrica de Jacobi-Maupertuis asociada al siguiente potencial gravitacional.

$$V(x) = -\frac{mMG}{\|x\|} = -\frac{mMG}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{mMG}{r}$$

Entonces la curvatura mecánica escalar es

$$K^{2(h-V)}(x) = -\frac{hmMG}{4(hr + mMG)^3}$$

La demostración es inmediata al usar el corolario 6.2.4 y tomando los valores de los parámetros en (1), es decir  $\omega = -mMG$  y  $\alpha = 1$ . ■

Continuando con el caso (2) obtenemos

**Corolario 6.2.8.**

Sea  $(\mathbb{R}_h^2, g_h)$  un ***h-Espacio de Configuración*** de dimensión 2, con Métrica de Jacobi-Maupertuis asociada al siguiente potencial Coulombiano.

$$V(x) = \frac{qQK}{\|x\|} = \frac{qQK}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{qQK}{r}$$

Entonces la curvatura mecánica escalar es

$$K^{2(h-V)}(x) = \frac{hqQK}{4(hr - qQK)^3}$$

Nuevamente usando el corolario 6.2.4 y los valores de los parámetros en (2) es decir  $\omega = qQK$  y  $\alpha = 1$  obtenemos el resultado deseado. ■

En los siguientes ejemplos se analiza con mayor profundidad estos casos particulares de potenciales Gravitacional y Coulombiano, sin embargo para continuar vamos a calcular las ecuaciones geodésicas asociadas a esta clase de potenciales de fuerza central, usando el ejemplo 6.1.3 tenemos lo siguiente

$$(a) \quad \frac{\partial V}{\partial x_1} = -\frac{\alpha\omega x_1}{\|x\|^{\alpha+2}} = -\frac{\alpha\omega x_1}{r^{\alpha+2}}$$

$$(b) \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = -\frac{\alpha\omega x_2}{\|x\|^{\alpha+2}} = -\frac{\alpha\omega x_2}{r^{\alpha+2}}$$

Así tenemos que las ecuaciones geodésicas toman la forma

$$(i) \quad \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{\alpha\omega}{2r^2(hr^\alpha - \omega)} \left( \left( \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 \right) x_1 + 2x_2 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} \right) = 0$$

$$(ii) \quad \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \frac{\alpha\omega}{2r^2(hr^\alpha - \omega)} \left( \left( \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 \right) x_2 + 2x_1 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} \right) = 0.$$

A continuación usamos el ejemplo anterior para abordar los espacios de curvatura constante y después nos concentraremos en los casos particulares relativos al **Problema de Kepler y Potencial Electrostático de Coulomb**.

**Ejemplo 6.2.5. Problemas de Fuerza Central y La Métrica de J-M en Espacios de Curvatura Constante  $n=2$ :**

Para los espacios modelos  $(M, g)$  de curvatura  $(K = \frac{s}{C})$  constante positiva y negativa, tomando los ejemplos 4.5.5, 6.1.3 y el corolario 6.2.4 tenemos que la métrica de Jacobi-Maupertuis para el ***h-Espacio de Configuración***  $(M_h, g_h)$  asociado al siguiente potencial

$$V(x) = \frac{\omega}{\|x\|^\alpha} = \frac{\omega}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{\omega}{r^\alpha}$$

es decir con  $g_h = 2(h - V)\lambda(dx_1^2 + dx_2^2)$  y  $\lambda(x) = \frac{4C^2}{(C+s\|x\|^2)^2}$ , entonces la curvatura mecánica Gaussiana es

$$\begin{aligned} K_{sec}^{2(h-V)\lambda}(\sigma_{12}) &= Ric^{2(h-V)\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = K^{2(h-V)\lambda}(x) \\ &= \frac{s}{2C(h-V)} + \frac{(C+s\|x\|^2)^2}{4C^2}K^{2(h-V)}(x) \\ &= \frac{sr^\alpha}{2C(hr^\alpha - \omega)} + \frac{h\omega\alpha^2r^{2\alpha-2}(C+sr^2)^2}{16C^2(hr^\alpha - \omega)^3} \end{aligned}$$

Usando los ejemplos 6.1.3 y 6.2.4 tenemos que las ecuaciones geodésicas asociadas a esta métrica son

$$\begin{aligned} (i) \quad \frac{d^2x_1}{dt^2} + \left(\frac{\alpha\omega}{2r^2(hr^\alpha - \omega)} - \frac{2s}{C+sr^2}\right) \left(\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2\right) x_1 + 2x_2 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} &= 0 \\ (ii) \quad \frac{d^2x_2}{dt^2} + \left(\frac{\alpha\omega}{2r^2(hr^\alpha - \omega)} - \frac{2s}{C+sr^2}\right) \left(\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2\right) x_2 + 2x_1 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

**Ejemplo 6.2.6. La Métrica de J-M y el Problema de Kepler en Espacios de Curvatura Constante  $n = 2$ :**

Continuamos con el desarrollo hecho en los ejemplos 6.2.4 y 6.2.5 podemos extender los resultados a espacios de curvatura constante y el **Problema de Kepler**.

Sea  $(\mathcal{M}, g)$  una variedad Riemanniana conexa de dimensión 2, de curvatura constante entonces tomamos la función  $\lambda(x) = \frac{4C^2}{(C+s\|x\|^2)^2}$  como factor conforme y tomamos el potencial  $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$V(x) = -\frac{mMG}{\|x\|} = -\frac{mMG}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{mMG}{r}$$

Con esto construimos la métrica de Jacobi-Maupertuis  $g_h = 2\lambda(h-V)(dx_1^2 + dx_2^2)$  para el  **$h$ -Espacio de Configuración**  $(\mathcal{M}_h, g_h)$ . Del corolario 6.2.4 tenemos que la curvatura mecánica para  $(\mathbb{R}_h^2, g_h)$  es

$$K^{2(h-V)}(x) = K^{2(h-V)}(x) = -\frac{hmMG}{4(hr + mMG)^3}$$

Haciendo uso del ejemplo 6.2.5 tenemos que la curvatura mecánica para los  **$h$ -Espacio de Configuración** asociados a los espacios de curvatura positiva y negativa tomando  $\alpha = 1$  y  $\omega = -mMG$  tienen la forma

$$\begin{aligned} K^{2\lambda(h-V)}(x) &= \frac{s}{2C(h-V)} + \frac{(C+s\|x\|^2)^2}{4C^2}K^{2(h-V)}(x) \\ &= \frac{sr^\alpha}{2C(hr^\alpha - \omega)} + \frac{h\omega\alpha^2r^{2\alpha-2}(C+sr^2)^2}{16C^2(hr^\alpha - \omega)^3} \\ &= \frac{sr}{2C(hr + mMG)} - \frac{hmMG(C+sr^2)^2}{16C^2(hr + mMG)^3} \end{aligned}$$

Con esto podemos hacer la siguiente tabla.

Curvatura Positiva	
$\frac{1}{C} = K > 0 \Rightarrow s = 1$	$\lambda(x) = \frac{4C^2}{(C + \ x\ ^2)^2}$
$K^{2\lambda(h-V)}(x) = \frac{r}{2C(hr+mMG)} - \frac{hmMG(C+r^2)^2}{16C^2(hr+mMG)^3}$	
Curvatura Cero	
$K = 0$	
$K^{2(h-V)}(x) = -\frac{hmMG}{4(hr+mMG)^3}$	
Curvatura Negativa	
$-\frac{1}{C} = K > 0 \Rightarrow s = -1$	$\lambda(x) = \frac{4C^2}{(C - \ x\ ^2)^2}$
$K^{2\lambda(h-V)}(x) = -\frac{r}{2C(hr+mMG)} - \frac{hmMG(C-r^2)^2}{16C^2(hr+mMG)^3}$	

El siguiente paso es obtener las ecuaciones geodésicas, partiendo del ejemplo 6.2.4 con  $\alpha = 1$  y  $\omega = -mMG$  podemos escribir las ecuaciones geodésicas para  $(\mathbb{R}_h^2, g_h)$

$$(i) \frac{d^2 x_1}{dt^2} - \frac{mMG}{2r^2(hr+mMG)} \left( \left( \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 \right) x_1 + 2x_2 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} \right) = 0$$

$$(ii) \frac{d^2 x_2}{dt^2} - \frac{mMG}{2r^2(hr+mMG)} \left( \left( \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 \right) x_2 + 2x_1 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} \right) = 0$$

Para espacios de curvatura constante positiva usamos el ejemplo 6.2.5 y tomado  $s = 1$  las geodésicas de  $(\mathbb{S}_h^2, g_h)$  son

$$(i) \frac{d^2 x_1}{dt^2} - \left( \frac{mMG}{2r^2(hr+mMG)} + \frac{2}{C+r^2} \right) \left( \left( \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 \right) x_1 + 2x_2 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} \right) = 0$$

$$(ii) \frac{d^2 x_2}{dt^2} - \left( \frac{mMG}{2r^2(hr+mMG)} + \frac{2}{C+r^2} \right) \left( \left( \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 \right) x_2 + 2x_1 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} \right) = 0$$

Para espacios de curvatura constante negativa usamos el ejemplo 6.2.5 y tomado  $s = -1$  las geodésicas de  $(\mathbb{H}_h^2, g_h)$  son

$$(i) \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \left( \frac{2}{C-r^2} - \frac{mMG}{2r^2(hr+mMG)} \right) \left( \left( \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 \right) x_1 + 2x_2 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} \right) = 0$$

$$(ii) \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \left( \frac{2}{C-r^2} - \frac{mMG}{2r^2(hr+mMG)} \right) \left( \left( \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 \right) x_2 + 2x_1 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} \right) = 0$$

Con esto concluimos este ejemplo que corresponde al inciso (1) de 6.2.4.

**Ejemplo 6.2.7. La Métrica de J-M y el Potencial Electrostático de Coulomb en Espacios de Curvatura Constante  $n = 2$ :**

Finalmente desarrollamos el inciso (2) de 6.2.4 y hacemos uso del ejemplo 6.2.5 para extender los resultados a espacios de curvatura constante en el problema de dos cargas bajo un **Potencial Electrostático de Coulomb**.

Ahora, sea  $(\mathcal{M}, g)$  una variedad Riemanniana conexa de dimensión 2, de curvatura constante. Tomando nuevamente la función  $\lambda(x) = \frac{4C^2}{(C+s\|x\|^2)^2}$  como factor conforme y tomamos el potencial  $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$V(x) = \frac{qQK}{\|x\|} = \frac{qQK}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{qQK}{r}$$

Para construir la métrica de Jacobi-Maupertuis  $g_h = 2\lambda(h - V)(dx_1^2 + dx_2^2)$  para el  **$h$ -Espacio de Configuración**  $(\mathcal{M}_h, g_h)$ . Del corolario 6.2.4 tenemos que la curvatura mecánica para  $(\mathbb{R}_h^2, g_h)$  es

$$K^{2(h-V)}(x) = K^{2(h-V)}(x) = \frac{hqQK}{4(hr - qQK)^3}$$

De nuevo haciendo uso del ejemplo 6.2.5 tenemos que la curvatura mecánica para los  **$h$ -Espacios de Configuración** asociados a los espacios de curvatura positiva y negativa tomando  $\alpha = 1$  y  $\omega = qQK$  tienen la forma

$$\begin{aligned} K^{2\lambda(h-V)}(x) &= \frac{s}{2C(h-V)} + \frac{(C+s\|x\|^2)^2}{4C^2} K^{2(h-V)}(x) \\ &= \frac{sr^\alpha}{2C(hr^\alpha - \omega)} + \frac{h\omega\alpha^2 r^{2\alpha-2} (C+sr^2)^2}{16C^2 (hr^\alpha - \omega)^3} \\ &= \frac{sr}{2C(hr - qQK)} + \frac{hqQK(C+kr^2)^2}{16C^2 (hr - qQK)^3} \end{aligned}$$

Variando el parámetro  $s = 1, -1$  obtenemos la siguiente tabla

Curvatura Positiva	
$\frac{1}{C} = K > 0 \Rightarrow k = 1$	$\lambda(x) = \frac{4C^2}{(C + \ x\ ^2)^2}$
$K^{2\lambda(h-V)}(x) = \frac{r}{2C(hr - qQK)} + \frac{hqQK(C+r^2)^2}{16C^2 (hr - qQK)^3}$	
Curvatura Cero	
$K = 0$	
$K^{2(h-V)}(x) = -\frac{hqQK}{4(hr - qQK)^3}$	
Curvatura Negativa	
$-\frac{1}{C} = K > 0 \Rightarrow k = -1$	$\lambda(x) = \frac{4C^2}{(C - \ x\ ^2)^2}$
$K^{2\lambda(h-V)}(x) = -\frac{r}{2C(hr - qQK)} + \frac{hqQK(C-r^2)^2}{16C^2 (hr - qQK)^3}$	

Finalmente las ecuaciones geodésicas a partir del ejemplo 6.2.4 con  $\alpha = 1$  y  $\omega = qQK$  las ecuaciones geodésicas para  $(\mathbb{R}_h^2, g_h)$  son

$$(i) \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{qQK}{2r^2(hr - qQK)} \left( \left( \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 \right) x_1 + 2x_2 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} \right) = 0$$

$$(ii) \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \frac{qQK}{2r^2(hr - qQK)} \left( \left( \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 \right) x_2 + 2x_1 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} \right) = 0$$

Para espacios de curvatura constante positiva usamos el ejemplo 6.2.5 y tomado  $s = 1$  las geodésicas de  $(\mathbb{S}_h^2, g_h)$  son

$$(i) \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \left( \frac{qQK}{2r^2(hr - qQK)} - \frac{2}{C + r^2} \right) \left( \left( \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 \right) x_1 + 2x_2 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} \right) = 0$$

$$(ii) \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \left( \frac{qQK}{2r^2(hr - qQK)} - \frac{2}{C + r^2} \right) \left( \left( \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 \right) x_2 + 2x_1 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} \right) = 0$$

Por último para espacios de curvatura constante negativa usamos el ejemplo 6.2.5 y tomado  $s = -1$  las geodésicas de  $(\mathbb{H}_h^2, g_h)$  son

$$(i) \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \left( \frac{2}{C - r^2} + \frac{qQK}{2r^2(hr - qQK)} \right) \left( \left( \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 \right) x_1 + 2x_2 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} \right) = 0$$

$$(ii) \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \left( \frac{2}{C - r^2} + \frac{qQK}{2r^2(hr - qQK)} \right) \left( \left( \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 \right) x_2 + 2x_1 \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} \right) = 0.$$

## 7. Resultados y Conclusiones

Para concluir esta tesis, presentaremos algunos de los resultados que a juicio del autor, vale la pena resaltar y describir.

### 7.1. Resultados Generales

La siguiente afirmación es una consecuencia directa del corolario 6.1.2, lo cual nos permite dar una primera clasificación del signo de las curvaturas al menos a nivel local (puntos críticos) en  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposición 7.1.1. Curvaturas Mecánicas de métricas conformes a  $\mathbb{R}^n$  en puntos críticos:**

Sea  $(\mathbb{R}_h^n, g_h)$  un  **$h$ -Espacio de Configuración** de dimensión  $n \geq 2$ , con métrica de  $J$ -M  $g_h = 2(h - V)g$  conforme a la métrica euclidiana, tomando  $r_0 \in \mathbb{R}^n$  punto crítico, es decir  $\nabla V(r_0) = 0$  entonces las curvaturas son

i) **Curvatura Mecánica Seccional:**

$$K_{sec}^{2(h-V)} \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \frac{\Delta_{ij}V}{4(h-V)^2}$$

ii) **Curvatura Mecánica de Ricci:**

$$Ric^{2(h-V)} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \frac{\Delta V}{4(n-1)(h-V)^2} + \frac{(n-2)\frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}}{4(n-1)(h-V)^2}$$

iii) **Curvatura Mecánica Escalar:**

$$K^{2(h-V)}(x) = K^{2(h-V)}(x) = \frac{\Delta V}{2n(h-V)^2}$$

Además podemos dar ciertas condiciones para determinar el signo de la **Curvatura Mecánica Seccional**.

i-a) si  $\Delta_{ij}V(r_0) > 0$  entonces  $K_{sec}^{2(h-V)}(\sigma_{ij}) > 0$ .

i-b) si  $\Delta_{ij}V(r_0) < 0$  entonces  $K_{sec}^{2(h-V)}(\sigma_{ij}) < 0$ .

i-c) si  $\Delta_{ij}V(r_0) = 0$  entonces  $K_{sec}^{2(h-V)}(\sigma_{ij}) = 0$ .

Continuando con la **Curvatura Mecánica de Ricci**.

ii-a) si  $\Delta V(r_0) + (n-2)\frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}(r_0) > 0$  entonces  $Ric^{2(h-V)}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) > 0$ .

ii-b) si  $\Delta V(r_0) + (n-2)\frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}(r_0) < 0$  entonces  $Ric^{2(h-V)}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) < 0$ .

ii-c) si  $\Delta V(r_0) + (n-2)\frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}(r_0) = 0$  entonces  $Ric^{2(h-V)}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = 0$ .

y para la **Curvatura Escalar**.

iii-a) si  $\Delta V(r_0) > 0$  entonces  $K^{2(h-V)}(r_0) > 0$ .

iii-b) si  $\Delta V(r_0) < 0$  entonces  $K^{2(h-V)}(r_0) < 0$ .

iii-c) si  $\Delta V(r_0) = 0$  entonces  $K^{2(h-V)}(r_0) = 0$ .

A diferencia de la proposición anterior, en el caso de funciones potenciales armónicas podemos hacer una clasificación del signo de las curvaturas en función de la dimensión del espacio asociado a los sistemas mecánicos que describe.

**Proposición 7.1.2. Curvaturas Mecánicas Escalares en  $\mathbb{R}^n$  y Potenciales Armónicos:**

Sea  $(\mathbb{R}_h^n, g_h)$  un  **$h$ -Espacio de Configuración** de dimensión  $n \geq 2$ , con la métrica de Jacobi-Maupertuis  $g_h = 2(h - V)g$  conforme a la métrica usual en  $\mathbb{R}^n$ , suponiendo que  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es un **Potencial Armónico**, es decir  $\Delta V = 0$ , entonces las siguientes afirmaciones se cumplen para la curvatura Mecánica Escalar.

- $K^{2(h-V)} > 0$  para  $n < 6$ .
- $K^{2(h-V)} < 0$  para  $n > 6$ .
- $K^{2(h-V)} = 0$  para  $n = 6$ .

La demostración es inmediata, haciendo uso de la fórmula dada en el corolario 6.2.6:

$$K^{2(h-V)}(x) = \frac{\Delta V}{2n(h-V)^2} - \frac{(n-6)\|\nabla V\|^2}{8n(h-V)^3} = -\frac{(n-6)\|\nabla V\|^2}{8n(h-V)^3}$$

Por otro lado, también se puede demostrar haciendo uso de la fórmula de **Curvatura Mecánica Escalar** calculada en el corolario 6.1.2 .

Este es un resultado particular de uno más general presente en [Pin75, Página 291]

**Proposición 7.1.3. Curvatura Mecánica en espacios de curvatura  $K$  constante de dimensión 2:**

Sea  $(\mathcal{M}_h, g_h)$  un  **$h$ -Espacio de Configuración** de dimensión 2, de un espacio de curvatura constante, con factor conforme  $\lambda(x) = \frac{4C^2}{(C+s\|x\|^2)^2}$  a la métrica euclidiana y con  $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  función potencial para la métrica de Jacobi-Maupertuis  $g_h = 2\lambda(h - V)(dx_1^2 + dx_2^2)$ .

Como consecuencia del ejemplo 6.1.3 en la tabla 6.1.6 tenemos expresiones para las curvaturas mecánicas en términos del potencial, con esto hacemos una clasificación de la curvatura mecánica a partir del signo de la curvatura de la variedad original.

**Corolario 7.1.1.**

Sea  $(\mathbb{S}_h^2, g_h)$  un  **$h$ -Espacio de Configuración** de un espacio de curvatura constante positiva con métrica de Jacobi-Maupertuis  $g_h = 2\lambda(h - V)(dx_1^2 + dx_2^2)$ , si  $V$  es un potencial armónico o bien  $\Delta V > 0$  entonces  $K^{2\lambda(h-V)}(x) > 0$ .



En el caso del ***h-Espacio de Configuración*** de un espacios de curvatura negativa el análisis es un poco más complicado lo cual nos lleva solamente a poder analizar de manera sencilla los puntos críticos del potencial.

**Corolario 7.1.2.**

Sea  $(\mathbb{H}_h^2, g_h)$  un ***h-Espacio de Configuración*** de un espacio de curvatura constante negativa con métrica de Jacobi-Maupertuis  $g_h = 2\lambda(h - V)(dx_1^2 + dx_2^2)$ , tomando  $x_0$  un punto crítico del potencial, si  $V$  es armónico o bien  $\Delta V(x_0) < 0$  entonces  $K^{2\lambda(h-V)}(x_0) < 0$ .

Finalmente recordemos que en el ejemplo 6.1.3 el parámetro  $s$  en el factor  $\lambda$  toma los valores  $-1$  y  $1$  para espacios de curvatura negativa y positiva respectivamente.

## 7.2. Potenciales de Fuerza Central

A continuación, resaltaremos algunos de los resultados de mayor interés físico que son consecuencia de lo calculado en los ejemplos del capítulo anterior.

### 7.2.1. Curvatura Mecánica en $\mathbb{R}_h^n$

En esta subsección vamos a abordar de manera particular algunos resultados calculados principalmente en el ejemplo 6.2.2, también sintetizamos y resaltamos algunas propiedades de las curvaturas mecánicas consecuencia de los corolarios obtenidos en este ejemplo.

**Teorema 7.2.1.**

Sea  $(\mathbb{R}_h^n, g_h)$  un ***h-Espacio de Configuración*** de dimensión  $n$ , con  $n > 2$ , con Métrica de Jacobi-Maupertuis  $g_h = 2(h - V)(\sum_{i=1}^n dx_i^2)$  asociada al siguiente potencial

$$V(x) = \frac{\omega}{\|x\|^\alpha} = \frac{\omega}{(\sum_{k=1}^n x_k^2)^{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{\omega}{r^\alpha}$$

Entonces la Curvatura Mecánica Escalar es de la forma

$$K^{2(h-V)}(x) = \frac{\omega\alpha r^{\alpha-2}}{8n(hr^\alpha - \omega)^3} (4hr^\alpha(\alpha + 2 - n) - \omega(n - 2)(\alpha - 4))$$

La demostración de este teorema se sigue de los cálculos hechos en el ejemplo 6.2.2.

Hay que resaltar que la expresión para la Curvatura Mecánica Escalar del teorema 7.2.1 depende de 4 parámetros  $n$ ,  $h$ ,  $\omega$  y  $\alpha$ .

A continuación vamos a hacer un pequeño estudio paramétrico variando solamente  $n$  y  $\alpha$  lo cual nos permite obtener algunos resultados interesantes.

**Teorema 7.2.2.**

Sea  $(\mathbb{R}_h^n, g_h)$  un ***h-Espacio de Configuración*** dimensión  $n > 2$ , con Métrica de Jacobi-Maupertuis  $g_h = 2(h - V)(\sum_{i=1}^n x_i^2)$  asociada al siguiente potencial

$$V(x) = \frac{\omega}{\|x\|^\alpha} = \frac{\omega}{r^\alpha}$$

Entonces la curvatura mecánica escalar es de la forma

i) Si  $\alpha = n - 2$ , entonces

$$K^{2(h-V)}(x) = -\frac{\omega^2(n-6)(n-2)^2 r^{n-4}}{8n(hr^{n-2} - \omega)^3}$$

*Demostración: Corolario 6.2.1*

ii) Si  $n = 6$  y  $\alpha = 4$  entonces la curvatura mecánica escalar es

$$K^{2(h-V)}(x) = 0$$

*Demostración: Corolario 6.2.2*

iii) Si  $\alpha = 4$  entonces

$$K^{2(h-V)}(x) = \frac{2h\omega(6-n)r^6}{n(hr^4 - \omega)^3}$$

*Demostración: Corolario 6.2.3*

iv) Si  $n = 2$  entonces

$$K^{2(h-V)}(x) = \frac{h\omega\alpha^2 r^{2\alpha-2}}{4(hr^\alpha - \omega)^3}$$

*Demostración: Corolario 6.2.4*

v) Si  $n = 3$  entonces la Curvatura Mecánica Escalar es

$$K^{2(h-V)}(x) = \frac{\omega\alpha r^{\alpha-2}}{24(hr^\alpha - \omega)^3} (4hr^\alpha(\alpha - 1) - \omega(\alpha - 4))$$

*Demostración: Corolario 6.2.5*

En las siguientes subsecciones veremos casos particulares de mayor interés como los potenciales armónicos y los potenciales en dimensión  $n = 2$  y  $n = 3$ .

**7.2.2. Potenciales de Fuerza Central Armónicos**

Como resultado del ejemplo 6.2.3 y el corolario 6.2.6 podemos hacer algunas clasificaciones de las curvaturas haciendo variar los parámetros  $\omega$ ,  $h$  y  $n$ , a continuación presentamos teoremas en el caso  $n = 2$  y  $n > 2$

**Teorema 7.2.3.**

Sea  $(\mathbb{R}_h^2, g_h)$  un ***h-Espacio de Configuración*** de dimensión 2, con Métrica de Jacobi-Maupertuis  $g_h = 2(h - V)(dx_1^2 + dx_2^2)$  asociada al siguiente potencial

$$V(x) = \omega \ln(r)$$

con curvatura mecánica escalar

$$K^{2(h-V)}(x) = \frac{\omega^2}{4r^2(h - \omega \ln(r))^3}$$

Entonces las curvaturas mecánicas escalares se clasifican de la siguiente manera

$n = 2$	$h > 0$	$h < 0$	$h = 0$
$\omega > 0$	$K^{2(h-V)} > 0$	$K^{2(h-V)} < 0$	$K^{2(h-V)} < 0$
$\omega < 0$	$K^{2(h-V)} > 0$	$K^{2(h-V)} < 0$	$K^{2(h-V)} > 0$

La demostración es inmediata haciendo uso del corolario 6.2.6.

**Teorema 7.2.4.**

Sea  $(\mathbb{R}_h^n, g)$  un ***h-Espacio de Configuración*** de dimensión  $n > 2$ , con Métrica de Jacobi-Maupertuis  $g_h = 2(h - V)(\sum_{i=1}^n dx_i^2)$  asociada al siguiente potencial

$$V(x) = \frac{\omega}{r^{n-2}}$$

con curvatura mecánica escalar

$$K^{2(h-V)}(x) = -\frac{\omega^2(n-6)(n-2)^2 r^{n-4}}{8n(hr^{n-2} - \omega)^3}$$

Entonces las curvaturas mecánicas escalares se clasifican de la siguiente manera

$n < 6$	$h > 0$	$h < 0$	$h = 0$
$\omega > 0$	$K^{2(h-V)} > 0$	$K^{2(h-V)} < 0$	$K^{2(h-V)} < 0$
$\omega < 0$	$K^{2(h-V)} > 0$	$K^{2(h-V)} < 0$	$K^{2(h-V)} > 0$
$n > 6$			
$\omega > 0$	$K^{2(h-V)} < 0$	$K^{2(h-V)} > 0$	$K^{2(h-V)} > 0$
$\omega < 0$	$K^{2(h-V)} < 0$	$K^{2(h-V)} > 0$	$K^{2(h-V)} < 0$

La demostración es inmediata haciendo uso del corolario 6.2.6.

**7.2.3. Problema de Kepler y Coulomb en  $\mathbb{R}_h^2$  y  $\mathbb{R}_h^3$**

Para terminar en esta subsección vamos a clasificar el tipo de geodésicas que genera la métrica de Jacobi-Maupertuis en el plano, haciendo variación del parámetro de energía como resultado de usar los corolarios 6.2.7 y 6.2.8 y la clasificación dada en [Pol76], cabe resaltar que estos resultados son un poco más generales comparados al resultado dado en [Pin75, Sección 2.2], para ello tenemos el siguiente par de teoremas.

**Teorema 7.2.5.**

Sea  $(\mathbb{R}_h^2, g_h)$  un ***h-Espacio de Configuración*** de dimensión 2, con Métrica de Jacobi-Maupertuis  $g_h = 2(h - V)(dx_1^2 + dx_2^2)$  asociada al potencial gravitacional.

$$V(x) = -\frac{mMG}{\|x\|} = -\frac{mMG}{r}$$

Con curvatura mecánica Gaussiana

$$K^{2(h-V)}(x) = -\frac{hmMG}{4(hr + mMG)^3}$$

Entonces las geodésicas se clasifican de la siguiente forma

Energía	Curvatura	Geodésica
$h > 0$	$K^{2(h-V)} < 0$	Órbita Hiperbólica
$h = 0$	$K^{2(h-V)} = 0$	Órbita Parabólica
$h < 0$	$K^{2(h-V)} > 0$	Órbita Elíptica

La demostración de este teorema esencialmente es aplicar la variación de signos de  $h$  al corolario 6.2.7 y usar la clasificación hecha en [Pol76, Capítulo 1, Sección 7-10]

**Teorema 7.2.6.**

Sea  $(\mathbb{R}_h^2, g_h)$  un ***h-Espacio de Configuración*** de dimensión 2, con Métrica de Jacobi-Maupertuis  $g_h = 2(h - V)(dx_1^2 + dx_2^2)$  asociada al potencial Coulombiano.

$$V(x) = \frac{qQK}{\|x\|} = \frac{qQK}{r}$$

Con curvatura mecánica Gaussiana

$$K^{2(h-V)}(x) = \frac{hqQK}{4(hr - qQK)^3}$$

Entonces las geodésicas son clasificadas de la siguiente forma

$Qq > 0$	Energía	Curvatura	Geodésica
	$h > 0$	$K^{2(h-V)} > 0$	Órbita Elíptica
	$h = 0$	$K^{2(h-V)} = 0$	Órbita Parabólica
	$h < 0$	$K^{2(h-V)} > 0$	Órbita Elíptica
$Qq < 0$			
	$h > 0$	$K^{2(h-V)} < 0$	Órbita Hiperbólica
	$h = 0$	$K^{2(h-V)} = 0$	Órbita Parabólica
	$h < 0$	$K^{2(h-V)} < 0$	Órbita Hiperbólica

La demostración de este teorema esencialmente es aplicar la variación de signos de  $h$  al corolario 6.2.8 y usar la clasificación hecha en [Pol76, Capítulo 1, Sección 7-10]

Finalmente resta calcular y clasificar el caso  $n = 3$  para el potencial de fuerza central.

**Teorema 7.2.7.**

Sea  $(\mathbb{R}_h^3, g_h)$  un ***h-Espacio de Configuración*** de dimensión 3, con métrica de Jacobi-Maupertuis  $g_h = 2(h - V)(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$  asociada al potencial de fuerza central.

$$V(x) = \frac{\omega}{\|x\|} = \frac{\omega}{(\sum_{k=1}^n x_k^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\omega}{r}$$

Entonces el potencial es un potencial armónico y la curvatura escalar es de la forma

$$K^{2(h-V)}(x) = \frac{\omega^2}{8r(hr - \omega)^3}$$

La demostración es inmediata partiendo del teorema 7.2.4 y tomando  $n = 3$ . Este resultado también se puede obtener derivado del teorema (7.2.2 - v) tomando  $\alpha = 1$ .

### 7.3. Comentarios Finales

Aquí resaltamos algunos aspectos y temas que quedaron pendientes de estudio, pues, debido a que estos temas hacen necesario extender mucho más este trabajo y debido a la falta de espacio y tiempo es necesario dejarlos como pendientes o estudio a futuro.

A continuación se hace una breve lista de estos temas pendientes, además de una breve descripción.

- **Métrica Braquistócrona:**  
Existe una forma de relacionar el problema de la Braquistócrona con la **Métrica de J-M**, algunos resultados asociados a este y que se pudieron explorar se encuentran en [Lau65, Sección 14.4].
- **Estabilidad de las Geodésicas:**  
A lo largo de los capítulos 6 y 7 se estudian distintos tipos de curvaturas, sin embargo, la utilidad de esto y las conclusiones finales nos pueden llevar a hacer un estudio dinámico asociado a las **Geodésicas** de la **Métrica de J-M**, pues se puede estudiar la estabilidad asintótica de las mismas, sin embargo en el caso de variedades de dimensión 2, basta con fijarse en el signo de la **Curvatura Gaussiana**, todo ello gracias a los **Campos de Jacobi**.  
Algunos resultados y discusiones al rededor de la estabilidad de las geodésicas se pueden encontrar en las siguientes 2 referencias [Lau65, Sección 14.5] y ([GLHP]).
- **Encajes de Sistemas Mecánicos en Superficies de Revolución:**  
Usando la **Métrica de J-M** en  $\mathbb{R}^2$  se puede construir un encaje que nos

permite construir una parametrización de un **Superficies de Revolución**, siendo así, es posible estudiar en algunos casos también el comportamiento de las geodésicas y algunas otras propiedades.

Algunos resultados y referencias relativos a este tema se pueden encontrar en [Pin75, Sección 2.3] y [Moe18].

Como conclusión final, podemos ver que el estudio de la **Métrica de Jacobi-Maupertuis** es relativamente poco conocido, sin embargo se podría considerar como una formulación alternativa para la mecánica clásica que puede tener cierta utilidad e incluso dar una perspectiva más geométrica comparado a las formulaciones más estándar utilizadas por los físicos, tales como la formulación Hamiltoniana y Lagrangiana de la mecánica, sin embargo, el estudio hecho aquí es parcial y solo se enfoca a las curvaturas pues como se explica en la lista de temas pendientes a estudiar, las implicaciones dinámicas haciendo uso de los **Campos de Jacobi** nos permitiría al menos saber el comportamiento asintótico que seguiría una partícula sometida a algún potencia de fuerza y con ello describir algunos comportamientos dinámicos de interés físico lo cual completaría aun más los pendientes de este trabajo de investigación relativo a la **Métrica de Jacobi-Maupertuis**.

## 8. Índices

### Índice de figuras

2.3.1. Curva de mínima Acción. . . . .	10
3.1.1. Carta y Parametrización. . . . .	13
3.1.2. Cambio de coordenadas o Mapeo de Transición. . . . .	14
3.1.3. Funciones Diferenciables en Variedades. . . . .	16
3.2.1. Curvas Tangencialmente Equivalentes. . . . .	17
3.2.2. Espacio Tangente. . . . .	18
3.2.3. Campo Vectorial. . . . .	20
3.3.1. Curva Integral. . . . .	21
3.3.2. Diferencial y Espacio Cotangente. . . . .	22
3.3.3. Métrica riemanniana. . . . .	23
3.4.1. Longitud de Arco. . . . .	25
3.5.1. Geodésica. . . . .	28
4.0.1. Métrica Conforme. . . . .	35
4.1.1. Métrica Conforme a la métrica Euclidiana. . . . .	38
4.5.1. Espacios de Curvatura Constante. . . . .	58
6.1.1. Métrica de Jacobi-Maupertuis . . . . .	67
6.1.2. Métrica de J-M conformes a la métrica Euclidiana . . . . .	71
6.1.3. Métrica de J-M de espacios de Curvatura Negativa. . . . .	74
6.1.4. Métrica de J-M en $\mathbb{R}^n$ . . . . .	75
6.1.5. Métrica de J-M en espacios de curvatura positiva. . . . .	77
6.1.6. Curvaturas Mecánicas de la Métrica de J-M. . . . .	78

## Índice alfabético

- Acción, 11, 65
- Acción Reducida, 66
- Acción Reducida o de Maupertuis, 66
- Atlas, 14
- Atlas Maximal, 15
  
- Base de un Espacio Topológico, 12
- Base del Espacio Tangente, 19
- Bracket de Lie, 21
- Braquistócrona, 8, 101
  
- Cambios de Coordenadas, 14
- Campo Gradiente, 25
- Campo Vectorial, 20
- Caracterizaciones del Espacio Tangente, 18
- Caracterización de Campos Vectoriales, 20
- Carta Coordenada, 13
- Cartas Compatibles, 14
- Coefficientes de la Métrica, 24
- Coefficientes del Operador de Curvatura, 29
- Compatibilidad con la Métrica, 27
- Conexión Afín, 25
- Conexión de Levi-Civita, 26, 64
- Conexión Métrica Conforme, 35, 67
- Conservación de la Energía, 63
- Continuidad, 12
- Curvas Integrales, 20
- Curvas Tangencialmente Equivalentes, 16
- Curvatura de Gauss, 33, 45
- Curvatura de Ricci, 33, 34, 45
- Curvatura Escalar, 34, 48
- Curvatura Mecánica de Ricci, 71, 75, 79, 95
- Curvatura Mecánica en espacios de curvatura, 96
- Curvatura Mecánica Escalar, 72, 75, 79, 80, 95
- Curvatura Mecánica Seccional, 71, 79, 80, 95
- Curvatura Mecánicas Seccional, 75
- Curvatura Métrica Conforme a la métrica Euclidiana en  $\mathbb{R}^2$ , 45
- Curvatura Seccional, 32, 42
- Curvatura Seccional en Coordenadas Locales, 32
- Curvaturas Mecánica de Ricci, 80
- Curvaturas Mecánicas, 70, 71, 95
- Curvaturas Mecánicas Escalares en  $\mathbb{R}^n$  y Potenciales Armónicos, 96
- Curvaturas Mecánicas para Funciones Armónicas, 87
- Curvaturas Métricas Conformes a la Métrica Euclidiana en  $\mathbb{R}^2$ , 53
  
- Demostración del Teorema de Jacobi, 68
- Derivada Covariante, 27
- Derivada Covariante en un Marco Local, 27
- Diferencial de Funciones, 22
  
- Ecuaciones de Euler-Lagrange, 66
- Ecuaciones de la Geodésica, 28
- Encajes de Sistemas Mecánicos en Superficies de Revolución, 101
- Energía Cinética, 11, 63
- Energía Total, 10, 63
- Espacio Cotangente, 22
- Espacio de Estados, 63
- Espacio Fase, 63
- Espacio Tangente, 16, 17
- Espacio Topológico, 12
- Espacios Hausdorff, 13
- Espacios Localmente Euclidianos, 13
- Espacios Segundo Numerable, 12
- Estabilidad de las Geodésicas, 101
- Estructura Diferencial, 15



Frontera del h-Espacio de Configuración, 65  
 Funciones Continuas, 15  
 Funciones Diferenciables, 15  
  
 Geodésica, 27  
 Geodésicas, 49, 51, 79  
 Germenés, 17  
  
 h-Espacio de Configuración, 64  
 Haz Cotangente, 22  
 Haz Tangente, 19  
 Homeomorfismo, 13  
  
 La Acción en Sistemas Mecánicos Lagrangianos, 65  
 Las Ecuaciones de Euler-Lagrange, 66  
 Leonhard Euler, 6  
 Longitud de Arco, 25  
  
 Mapeos de Transición, 14  
 Mecánica Clásica, 6, 65  
 Métrica de Jacobi-Maupertuis, 6, 10, 11, 65, 67, 73, 75, 78, 79, 91, 93  
 Métrica Riemanniana, 24  
 Métricas Conformes a la Métrica Euclidiana para múltiplo de funciones, 54  
  
 Operador de Curvatura de Riemann, 29  
 Oscilador Armónico Simple, 81  
  
 Parametrización, 13  
 Parametrización por longitud de arco, 70  
 Pierre Louis Maupertuis, 6  
  
 Potencial de Coulomb, 100  
 Potencial Electroestático de Coulomb, 89, 90, 93  
 Potenciales de Fuerza Central, 83, 89  
 Principio de Conservación de la Energía, 10, 63  
 Principio de Fermat, 8  
 Principio de Maupertuis, 6  
 Principio de Mínima Acción, 6–8, 10, 65  
 Principio de Mínima Acción de Lagrange, 10  
 Principio de Mínima Acción de Maupertuis, 7, 9, 63, 66  
 Principio de mínima Resistencia, 9  
 Principio de Tiempo Mínimo, 8  
 Problema de Kepler, 83, 89–91, 100  
 Problemas de Fuerza Central, 83, 89, 90  
 Producto Interior, 24  
 Producto Interior Euclidiano, 24  
 Propiedades del Bracket de Lie, 21  
  
 Sistema Mecánico Lagrangiano, 65  
 Sistema Mecánico Simple, 63  
 Símbolos de Christoffel, 26, 37–40, 70, 77, 80  
  
 Teorema de Jacobi, 68  
 Trayectoria Física, 63, 66  
  
 Variedad Diferenciable, 15  
 Variedad Riemanniana, 24  
 Variedad Topológica, 13  
 Variedades de Curvatura Constante, 58  
  
 Órbita, 63

## Referencias

- [AKN10] V. I. Arnold, V. V. Kozlov, and A. I. Neishtadt, *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*. Springer Berlin Heidelberg, 2010. [Online]. Available: <https://www.springer.com/gp/book/9783540282464>
- [Arn97] V. I. Arnol'd, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer New York, 1997. [Online]. Available: <https://www.springer.com/gp/book/9780387968902>
- [CFK<sup>+</sup>97] J. W. Cannon, W. J. Floyd, R. Kenyon, Walter, and R. Parry, *Flavors of Geometry*. University Press, 1997, ch. Hyperbolic Geometry, pp. 59–115. [Online]. Available: <http://library.msri.org/books/Book31/contents.html>
- [Coo17] J. Coopersmith, *The Lazy Universe : An Introduction to the Principle of Least Action*. Great Clarendon Street, Oxford, OX2 6DP, United Kingdom: Oxford University Press, 2017. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1119/1.5024210>
- [Dug89] R. Dugas, *A History of Mechanics*. Dover Publications Inc., 1989. [Online]. Available: [www.amazon.com.mx/History-Mechanics-Rene-Dugas/dp/0486656322](http://www.amazon.com.mx/History-Mechanics-Rene-Dugas/dp/0486656322)
- [GLHP] A. Gonzalez L. and J. L. Hernandez P., “On the Jacobi-Metric Stability Criterion.” [Online]. Available: <https://arxiv.org/abs/0705.4437>
- [GN14] L. Godinho and J. Natário, *An Introduction to Riemannian Geometry: With Applications to Mechanics and Relativity*, ser. Universitext. Springer International Publishing, 2014. [Online]. Available: <https://www.springer.com/gp/book/9783319086651>
- [Jä10] K. Jänich, *Vector Analysis*. Springer New York, 2010. [Online]. Available: <https://www.springer.com/gp/book/9780387986494>
- [Lau65] D. Laugwitz, *Differential and Riemannian Geometry*. New York: Academic Press, 1965. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/C2013-0-12414-2>
- [Lee97] J. M. Lee, *Riemannian Manifolds : An Introduction to Curvature*, ser. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1997. [Online]. Available: <https://www.springer.com/gp/book/9780387982717>
- [Lee19] —, *Introduction to Riemannian Manifolds*. Springer-Verlag, 2019. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-91755-9>
- [LLBP78] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, V. B. Berestetskii, and L. P. Pitaevskii, *Física Teórica Mecánica*, curso de física teórica: landau ed. Barcelona: Editorial Reverté, 1978, vol. Vol. I. [Online]. Available: [https://www.reverte.com/libro/fisica-teorica-mecanica-vol-i\\_91625](https://www.reverte.com/libro/fisica-teorica-mecanica-vol-i_91625)

- [Moe18] R. Moeckel, “Embedding the Kepler Problem as a Surface of Revolution,” *Regular and Chaotic Dynamics*, vol. 23, no. 6, pp. 695–703, nov 2018. [Online]. Available: <https://link.springer.com/article/10.1134/S1560354718060059>
- [New02] I. Newton, *Mathematical Principles of Natural Philosophy*. A. Strahan, 1802.
- [PdC92] M. Perdigão do Carmo, *Riemannian Geometry*, F. Flaherty, Ed. Birkhäuser, 1992. [Online]. Available: <https://www.springer.com/gp/book/9780817634902>
- [Pin75] O. C. Pin, “Curvature and Mechanics,” *Advances in Mathematics*, vol. 15, no. 3, pp. 269–311, mar 1975. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0001870875901395>
- [Pol76] H. Pollard, *Celestial Mechanics*. Washington: Mathematical Association of America, 1976. [Online]. Available: <https://www.ams.org/books/car/018/>
- [RB18] A. Rojo and A. Bloch, *The Principle of Least Action*. Cambridge University Press, 2018. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1017/9781139021029>
- [SMPV07] H. Sánchez M. and O. A. Palmas V., *Geometría Riemanniana*. Distrito Federal: FACULTAD DE CIENCIAS , UNAM, 2007. [Online]. Available: <http://www.librosoa.unam.mx/handle/123456789/281>
- [Tu11] L. W. Tu, *An Introduction to Manifolds*, ser. Universitext. Springer-Verlag New York, 2011. [Online]. Available: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4419-7400-6>
- [WRAS20] J. W. Robbin and D. A. Salamon, *INTRODUCTION TO DIFFERENTIAL GEOMETRY*. Online, Apr. 2020. [Online]. Available: <https://people.math.ethz.ch/~salamon/PREPRINTS/diffgeo.pdf>



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

# ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00217

Matricula: 2182800668

La Métrica de Jacobi-Maupertuis, su Relación con la Geometría Riemanniana y sus Aplicaciones a la Mecánica Clásica.



Con base en la Legislación de la Universidad Autónoma Metropolitana, en la Ciudad de México se presentaron a las 16:00 horas del día 25 del mes de mayo del año 2021 POR VÍA REMOTA ELECTRÓNICA, los suscritos miembros del jurado designado por la Comisión del Posgrado:

DR. OSCAR ALFREDO PALMAS VELASCO  
DR. JOSUE MELENDEZ SANCHEZ  
DR. JOSE ANTONIO GARCIA RODRIGUEZ

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

DE: LUIS ENRIQUE ASCENCIO GOROZPE

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

*Ascencio Gorozpe Luis E.*

LUIS ENRIQUE ASCENCIO GOROZPE  
ALUMNO

*Aprobar*

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

REVISÓ

MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ  
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA

PRESIDENTE

DR. OSCAR ALFREDO PALMAS VELASCO

VOCAL

*JOSUE MELENDEZ*

DR. JOSUE MELENDEZ SANCHEZ

SECRETARIO

DR. JOSE ANTONIO GARCIA RODRIGUEZ

El presente documento cuenta con la firma –autógrafa, escaneada o digital, según corresponda- del funcionario universitario competente, que certifica que las firmas que aparecen en esta acta – Temporal, digital o dictamen- son auténticas y las mismas que usan los c.c. profesores mencionados en ella