



Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Iztapalapa
División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Posgrado en Ingeniería Química

**MODELADO DE FLUJO EN SISTEMAS
ESTRATIFICADOS**

**TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS (INGENIERÍA QUÍMICA)**

Presenta:

I.E. Jorge Chavarría Ornelas

Asesor:

Dr. Jesús Alberto Ochoa Tapia

México D.F. abril de 2016



Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Iztapalapa
División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Posgrado en Ingeniería Química

**MODELADO DE FLUJO EN SISTEMAS
ESTRATIFICADOS**

TESIS

Que para obtener el grado de

**MAESTRO EN CIENCIAS
(INGENIERÍA QUÍMICA)**

PRESENTA:

I.E. Jorge Chavarría-Ornelas

Asesor:

Dr. Jesús Alberto Ochoa-Tapia

México D.F., 5 de abril 2016



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00104

Matrícula: 2133803042

MODELADO DE FLUJO EN
SISTEMAS ESTRATIFICADOS

En la Ciudad de México, se presentaron a las 12:00 horas del día 5 del mes de abril del año 2016 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. HUGO JIMENEZ ISLAS
DR. FRANCISCO JOSE VALDES PARADA
DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA



JORGE CHAVARRIA ORNELAS
ALUMNO

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (INGENIERIA QUIMICA)

DE: JORGE CHAVARRIA ORNELAS

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

REVISÓ

LIC. JULIO CESAR DE LARA ISASSI
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JOSE GILBERTO CORDOBA HERRERA

PRESIDENTE

DR. HUGO JIMENEZ ISLAS

VOCAL

DR. FRANCISCO JOSE VALDES PARADA

SECRETARIO

DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA

Agradecimientos

La Maestría en Ciencias (Ingeniería Química) de la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa, pertenece al Padrón Nacional de Posgrados de Calidad del CONACyT por lo que agradece la beca recibida, a través del convenio No. (CVU/Becario): 549339/300723 para el desarrollo de esta tesis. Al mismo tiempo le estoy agradecido a mi asesor el Dr. Jesús Alberto Ochoa Tapia por haberme aceptado para llevar a cabo este trabajo.

Aprecio sinceramente las revisiones de las versiones preliminares del trabajo a los doctores Francisco José Valdés Parada y Hugo Jimenez Islas, quienes aportaron importantes mejoras en aspectos específicos del trabajo. Asimismo, deseo agradecer al M. en C. Guillermo Benitez Olivarez quien aportó importantes comentarios y sugerencias. Por último, estoy eternamente agradecido a mi familia y amigos, en particular a la Sra. Ada luz Esquinca Roque por todo el apoyo a lo largo de mi vida.

Índice general

Resumen	9
Nomenclatura	10
1. Introducción	12
1.1. Objetivo general	16
1.2. Objetivos particulares	16
2. Antecedentes	18
3. Método analítico para el flujo en un sistema estratificado	28
3.1. Flujo entre dos medios porosos	29
3.1.1. Región porosa homogénea ω	32
3.1.2. Región porosa homogénea η	33
3.1.3. Inter-región $\omega - \eta$	34
3.1.4. Inter-región medio poroso-pared.	37
3.2. Flujo en un canal y un medio poroso	39
3.2.1. Región porosa homogénea ω	40
3.2.2. Región de fluido homogéneo.	41
3.2.3. Inter-región medio poroso fluido.	42
3.2.4. Inter-región medio poroso-pared.	46
3.2.5. Inter-región fluido homogéneo pared.	47
3.3. Resultados del Sistema resuelto por el método analítico para dos medios porosos	49
3.4. Resultados del Sistema resuelto por el método analítico para un medio poroso y un fluido	52

4. Determinación de condiciones de salto para un sistema estratificado	57
4.1. Promedio volumétrico	58
4.2. Obtención de las ecuaciones para el modelo de uno y dos dominios	59
4.3. Problema de cerradura macroscópico	65
4.4. Procedimiento para la determinación de y_0	68
4.5. Primera condición de salto	68
4.6. Segunda condición de salto	70
5. Resultados y discusión	73
5.1. Obtención de perfiles para permeabilidad y porosidad	73
5.2. Variables de cerradura macroscópicas	74
5.3. Modelos de uno y dos dominios para el sistema	77
6. Conclusiones	83
6.1. Perspectivas	86
A. Solución para obtener las variables de cerradura.	88
B. Solución por diferencias finitas para el modelo de uno y dos dominios	94
Bibliografía	96

Índice de figuras

1.1. Esquema de una región porosa por estratos.	15
2.1. Esquema del experimento Beavers y Joseph.	20
2.2. Esquema de representación para el sistema estudiado por Ochoa- Tapia y Whitaker.	21
3.1. Esquema del sistema con dos medios porosos.	28
3.2. Esquema del sistema en forma de canales en dos medios porosos. . .	31
3.3. Fracción de fluido que queda dentro de la región de promediado. . .	35
3.4. Sistema Medio Poroso-Fluido.	39
3.5. Esquema del sistema suponiendo el medio poroso en forma de canales.	40
3.6. Perfil de velocidad en todo el sistema que va desde $-100r_0$ a $100r_0$.	50
3.7. Perfil de velocidad en la inter-región $\omega - \eta$	51
3.8. Perfil de velocidad en el medio poroso-pared.	52
3.9. Perfil de velocidad para el sistema completo.	53
3.10. Perfil de velocidad para el medio poroso-pared.	54
3.11. Perfil de velocidad para el medio poroso-fluido.	55
3.12. Perfil de velocidad para el fluido homogéneo-pared.	56
4.1. Sistema con dos medios porosos	58
5.1. Nodos en el programa para obtener y_0	75
5.2. Error de entre las cuatro condiciones de salto.	75
5.3. Perfil de la velocidad en el sistema de dos estratos con porosidades de $\varepsilon_\beta = 0.3$ y $\varepsilon_\beta = 0.9$ con coeficientes constantes TDA.	77

5.4. Perfil de la velocidad en la inter-región de dos estratos con porosidades de $\varepsilon_\beta = 0.3$ y $\varepsilon_\beta = 0.9$ con coeficientes constantes TDA.	78
5.5. Perfil de la velocidad en el sistema de dos estratos con porosidades de $\varepsilon_\beta = 0.3$ y $\varepsilon_\beta = 0.9$ con coeficientes variables ODA.	79
5.6. Perfil de la velocidad en la inter-región de dos estratos con porosidades de $\varepsilon_\beta = 0.3$ y $\varepsilon_\beta = 0.9$ en la inter-región con coeficientes variables ODA.	80
5.7. Comparación de los perfiles entre los modelos de uno y dos dominios	81
5.8. Comparación de los perfiles con un acercamiento para los modelos de uno y dos dominios	81
6.1. Promediado a gran escala	87

Resumen

Las condiciones de frontera adecuadas entre dos regiones son muy importantes en el desarrollo de modelos heterogeneos debido a que es indispensable saber lo que pasa entre las fases o regiones. Por tal razón, en este trabajo se desarrollaron condiciones para un modelo de transporte de cantidad de movimiento en un sistema estratificado donde se necesitan condiciones de frontera para el acoplamiento de las ecuaciones para cada estrato, a partir de un modelo de un dominio y un modelo de dos dominios. El primero se resuelve suponiendo que el sistema es pseudo-homogéneo y se expresa en términos de coeficientes de medio efectivo que dependen de la posición en la inter-región. Por su parte, en el segundo se toma una ecuación para cada estrato con coeficientes constantes y se unen mediante condiciones de frontera para acoplar las ecuaciones de cada región homogénea.

También se desarrolló analíticamente el sistema suponiendo los medios porosos como una serie de canales paralelos, donde se vieron los cambios en la velocidad del sistema entre medios porosos de distinta fracción volumétrica y del medio poroso con las paredes. Además se pudo obtener una expresión del coeficiente de permeabilidad de forma analítica utilizando la ecuación de Darcy.

Para el transporte de cantidad de movimiento entre cada estrato de medio poroso se obtuvieron dos condiciones de frontera, en términos de coeficientes de salto, a partir de la solución de un problema de cerradura macroscópico. Lo anterior, siguiendo la metodología de Valdés-Parada *y col.* (2013) que deriva los modelos de uno y dos dominios. Del problema de cerradura resultante también se determinó la posición en la cual las condiciones de frontera deben ser aplicadas. Este trabajo permitió observar el perfil de la velocidad promedio en un medio estratificado a partir de modelos de uno y dos dominios así como con una solución analítica.

Nomenclatura

$A_{\beta\sigma}$ área de la interfase, m^2

\mathbf{g} vector de gravedad, m^2/s

\mathbf{I} tensor identidad

\mathbf{K} tensor de permeabilidad, m^2

$\mathbf{n}_{\eta\omega}$ vector unitario normal dirigido de la región $-\eta$ hacia la región $-\omega$.

L longitud característica del sistema, m

ℓ longitud característica de la celda unitaria m

p_β presión en la fase $-\beta$, N/m^2

\hat{p}_β desviaciones espaciales de la presión en la fase $-\beta$, N/m^2

$\langle p_\beta \rangle^\beta$ promedio intrínseco de la presión, N/m^2

r_0 radio del volumen de promediado, m

$S_{\omega\eta}, S_{\omega\omega}, S_{\eta\eta}, S_{\eta\omega}$ variables de cerradura macroscópicas

$b_{\omega\eta}, b_{\omega\omega}, b_{\eta\eta}, b_{\eta\omega}$ variables de cerradura macroscópicas, m

S_i coeficientes de salto, $i = \omega, \eta$, m^{-1}

b_i coeficientes de salto, $i = \omega, \eta$

\mathbf{v}_β velocidad en la fase $-\beta$, m/s

\hat{v}_β desviaciones espaciales de la velocidad en la fase $-\beta$, m/s

$\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta$ promedio intrínseco de la velocidad, m/s

\mathcal{V} región de promediado

V volumen de promediado- j contenida en la región de promediado, m^3

$n_p\omega$ número de celdas localizadas en el medio poroso $-\omega$

$n_p\eta$ número de celdas localizadas en el medio poroso $-\eta$

n_0 número de celdas en el volumen promediante

$\ell_{\beta\omega}$ espesor del fluido en los poros de la región porosa ω , m

$\ell_{\beta\eta}$ espesor del fluido en los poros de la región porosa η , m

f_η fracción de celda η

f_ω fracción de celda ω

$f_{\beta\eta}$ fracción de fluido en η

$f_{\beta\omega}$ fracción de fluido en ω

Símbolos griegos

ε_β fracción volumétrica asociada a la fase $-\beta$

$\varepsilon_{\beta\omega}$ fracción volumétrica en la región porosa $-\omega$

$\varepsilon_{\beta\eta}$ fracción volumétrica en la región porosa $-\eta$

ψ_β función arbitraria asociada a la fase $-\beta$

ρ_β densidad del fluido $-\beta$, Kg/m³

μ_β viscosidad del fluido $-\beta$, Kg/ms

ξ coordenada con origen justo en la interfase sólido-líquido en la cual termina el medio poroso ω y comienza el medio poroso η

ξ_0 coordenada de posición del centriode en los canales.

Capítulo 1

Introducción

La necesidad de conocer los fenómenos por los que ocurre el transporte de cantidad de movimiento en sistemas tales como proliferación de contaminantes en suelos estratificados, en el aire y en aguas subterráneas o el transporte de nutrientes en tejidos celulares, por mencionar sólo algunos ejemplos, ha llevado al desarrollo del área de los fenómenos de transporte en varias fases y en particular de ecuaciones denominadas de medio efectivo. Para determinar los coeficientes de transporte de cantidad de movimiento involucrados en dichas ecuaciones se necesita realizar una serie de experimentos, y estos sólo son aplicables bajo las condiciones restringidas a las que se llevaron a cabo. Existen otras formas para obtener estos coeficientes, como los modelos estocásticos que no tienen una matemática que los respalde o los llamados DNS (Simulaciones Numéricas Directas) que requieren tiempo de computo. Con ese fin, se desarrolló una técnica para obtener modelos en sistemas de escalas múltiples llamado promedio volumétrico, el cual predice estos coeficientes para una gran cantidad de situaciones, además de que esta técnica nos permite obtener las restricciones que se deben cumplir para su aplicación. Por tal razón, para el presente trabajo se utilizará dicho método. Además, para la solución de este método, se resuelve un problema de cerradura que extrae la información importante y la conduce a otras escalas.

Cabe señalar que existen otros métodos y modelos Zaman y Jalali (2010) como los de Koseny-Carman para obtener coeficientes efectivos que, si bien,

pueden ser adecuados para describir un fenómeno en particular, se obtuvieron semiempíricamente y de manera frecuente incluyen coeficientes desconocidos.

Algunas investigaciones sobre descontaminación del subsuelo han mostrado que el transporte está influenciado por los fenómenos que se dan a nivel microscópico. Así, se ha determinado que la distribución y el transporte de contaminantes dependen de la geometría del poro, así como de las reacciones a esa misma escala.

Un caso particular de sistemas de varias fases son los medios porosos que son una red tridimensional interconectada de poros, cuyo grado de interconexión, tamaño y forma depende del material. Las propiedades de cada material, como la porosidad, permeabilidad y el área superficial, son relevantes en la industria. Por ejemplo, en la extracción de petróleo del subsuelo o el uso de membranas estratificadas, se pueden tener dos o más tipos de porosidades y es importante conocer los cambios drásticos de velocidad y del esfuerzo en las fronteras de cada estrato para poder optimizar su uso.

No obstante, aparte de los avances anteriores, existen sistemas que, a pesar de que existen estudios de ellos, se puede continuar con el desarrollo de su teoría. Unos de estos son los sistemas estratificados que tienen aplicaciones en procesos de separación industriales así como en sistemas biológicos y químicos. Ello motiva un campo importante para nuevas investigaciones. En el presente trabajo se desarrolla un modelo, con base en el promedio volumétrico, para describir el comportamiento del transporte de cantidad de movimiento dentro de un sistema estratificado. Los estratos poseen porosidades distintas y, por lo tanto, el transporte es diferente.

En este tipo de sistemas se desarrolla primeramente el modelo de un solo dominio (One Domain Approach, ODA), considerando dos estratos, η y ω (Figura 1.1). Éste consiste en promediar el transporte de cantidad de movimiento, expresado mediante la ecuación de Stokes. Cabe señalar que se prefiere ésta a la ecuación de Navier-Stokes debido a que los valores del número de Reynolds son bajos ($Re < 1$), esto quiere decir que las fuerzas viscosas son más importantes que las fuerzas inerciales. En este promediado los parámetros de porosidad y permeabilidad se consideran variables en el espacio. Los coeficientes del modelo requieren de la solución de un problema de cerradura, como se muestra en trabajos

anteriores Valdés-Parada *y col.* (2013), en este trabajo se desarrolla un método analítico para obtener dichos coeficientes.

Como siguiente paso, se desarrolla el modelo de transporte de cantidad de movimiento de dos dominios (Two Domain Approach, TDA), donde se mantienen constantes los parámetros en cada estrato del sistema. En consecuencia, se obtiene la ecuación de Darcy Brinkman, una para cada región.

Enseguida se emplea la metodología propuesta por Valdés-Parada *y col.* (2013), para obtener las condiciones de salto. Esta metodología es preferible pues se obtienen dos condiciones de salto, a diferencia de trabajos anteriores donde se obtiene una de éstas y se supone la segunda condición de frontera (Ochoa-Tapia y Whitaker, 1995a) y Beavers y Joseph (1967).

En el desarrollo de estos modelos es necesario conocer el comportamiento de dichos parámetros. Para ello, se realiza utiliza el desarrollo analítico suponiendo canales para cerrar el problema. De aquí se obtienen relaciones lineales en la inter-región que son necesarias en el problema de un solo dominio.

En dicha metodología se suman el ODA y el TDA y como resultado se obtiene otro problema de cerradura para las desviaciones macroscópicas. Para la solución se requiere de un método numérico. Para este problema se utiliza el método de diferencias finitas donde se requiere discretizar las ecuaciones. Las variables de cerradura obtenidas son muy importantes porque contienen información de la inter-región. Lo anterior, debido a que colapsan los fenómenos que ocurren en el volumen llamado inter-región para convertirlo en una superficie divisoria con posición en y_0 .

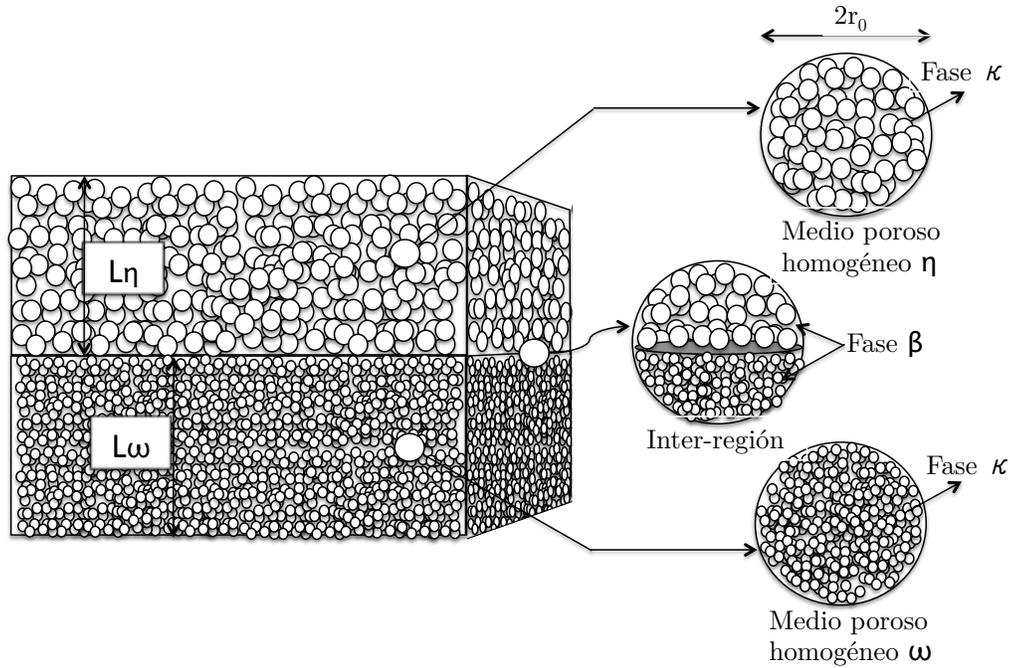


Figura 1.1. Esquema de una región porosa por estratos.

De acuerdo a la metodología para el desarrollo de condiciones de salto se busca que la diferencia entre el ODA y el TDA, integrada en un volumen, que incluya parte de las regiones homogéneas y la inter-región sea lo más cercana a cero. Esto con la finalidad de resolver el problema de manera más sencilla, ya que es más complicado resolver el ODA computacionalmente, que tener dos ecuaciones acopladas con condiciones a la frontera. Además, si se tienen ecuaciones promediadas de cada estrato y condiciones de frontera se podría hacer un segundo escalamiento a gran escala donde se podría modelar un sistema estratificado como una sola región homogénea.

Un aspecto importante que se debe tomar en cuenta al resolver estos sistemas reside en la geometría con la cual se resuelve el medio poroso, así como las restricciones de escala. Con estas últimas es posible determinar dónde es aplicable el modelo.

En este trabajo se busca una solución para dos medios porosos, donde se tiene como modelo un sistema formado por una serie de canales paralelos que forman el medio poroso. De esta manera, bajo condiciones de flujo laminar, se obtienen

los perfiles de velocidad analíticamente y se conoce la velocidad a la escala local en cualquier punto del canal. En consecuencia, se puede obtener exactamente el perfil de la velocidad promedio para cualquier posición del volumen que se use como muestra para promediar.

En esta forma de abordar el problema se obtienen ecuaciones algebraicas a partir de la simplificación de la ecuación de Stokes para flujo unidimensional. Esto representa una gran ventaja debido a que las ecuaciones son más fáciles de manipular, a diferencia de las ecuaciones diferenciales que se obtienen con otros métodos. Adicionalmente, con esta metodología se puede observar claramente la contribución de Brinkman cerca de la inter-región debido a que solamente es notable cerca de un cambio en la fracción volumétrica.

Si bien, el método analítico muestra la velocidad en cualquier punto del sistema requiere de una ecuaciones para cada región. En este trabajo se busca desarrollar un modelo que pueda homogeneizar un sistema de este tipo, primero realizando las ecuaciones de frontera entre cada medio poroso y más adelante se busca un promediado a gran escala para todo un sistema formado por dos o más estratos.

1.1. Objetivo general

Desarrollar un modelo macroscópico de transporte de cantidad de movimiento para un sistema formado por dos estratos porosos.

1.2. Objetivos particulares

- Desarrollar un modelo analítico para obtener de manera analítica los coeficientes de porosidad y permeabilidad.
- Desarrollar condiciones de salto cerradas de cantidad de movimiento para el sistema formado por dos estratos.
- Obtener la posición de la superficie divisoria

- Evaluar el efecto de las condiciones de salto para la velocidad y el esfuerzo en las ecuaciones promedio y en sus coeficientes efectivos.

Estructura de este trabajo

En el Capítulo 2 se revisan los trabajos más recientes en esta área.

En el Capítulo 3 se expone una forma de atacar el problema de un sistema estratificado de una manera analítica. Se supone el medio poroso como una serie de canales paralelos, donde se obtienen los perfiles de flujo para dos medios porosos y posteriormente un medio poroso y un canal.

Después, en el Capítulo 4 se deducen las condiciones de salto para el sistema de dos estratos, se aplica la técnica del promedio volumétrico a la ecuación de continuidad y la ecuación de Stokes para obtener el modelo de un solo dominio ODA y posteriormente el modelo de dos dominios TDA. Lo anterior, para obtener las condiciones de salto en la velocidad y en el esfuerzo en la inter-región entre dos estratos, pues es necesario colapsar la información de toda esta región en dos condiciones de frontera.

En el Capítulo 5 se muestran los resultados obtenidos al aplicar las condiciones de salto y la solución mediante un método analítico para un sistema formado por dos estratos de porosidades de 0.3 y 0.9.

En el Capítulo 6 se presentan las conclusiones del trabajo y algunas perspectivas sobre este.

Por último, en los apéndices se da a conocer a mayor detalle la solución a los problemas de cerradura y la solución por diferencias finitas.

Capítulo 2

Antecedentes

Antes de abordar el tema relativo a modelos en sistemas estratificados, vale la pena revisar las investigaciones más relevantes sobre transporte en medios porosos.

Para modelar el transporte de cantidad de movimiento dentro de los poros se utiliza la ecuación de Navier-Stokes, pero debido al número de Reynolds pequeños $Re < 1$ que se tiene en los medios porosos, en éstos se utiliza la ecuación de Stokes (2.1), Bird (1982), que contiene solo la parte difusiva de la ecuación. Sin embargo, algunos autores han utilizado diversas ecuaciones a partir de la ecuación (2.1). Una de las maneras consiste en promediar dicha ecuación y considerar la corrección de Brinkman, que algunos autores desprecian debido a que ésta solo es importante cerca de la inter-región que es la región donde cambia la fracción volumétrica entre dos estratos porosos.

$$0 = \underbrace{-\nabla p_\beta}_{\text{término superficial normal}} - \underbrace{\rho_\beta \mathbf{g}}_{\text{término volumétrico}} + \underbrace{\mu_\beta \nabla^2 \mathbf{v}_\beta}_{\text{término superficial viscoso}} \quad \text{en la fase } -\beta \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_\beta = 0 \quad \text{en la fase } -\beta \quad (2.2)$$

$$\mathbf{v}_\beta = 0 \quad \text{en la interfase} - \beta\sigma \quad (2.3)$$

En primer término, Beavers y Joseph (1967) propusieron un sistema que contiene dos regiones, un medio poroso homogéneo y un fluido, como se muestra en la Figura (2.1), donde desarrollaron experimentos de un canal parcialmente lleno con material poroso. Ellos propusieron utilizar la Ley de Darcy en el medio poroso homogéneo y una condición de deslizamiento en la interfase, y obtuvieron una condición de salto en la velocidad con un coeficiente ajustable que dependen de la geometría local de la interfase. De acuerdo con las ecuaciones, se obtuvieron perfiles que ajustaban a los experimentos realizados. Sin embargo, en este estudio no se toma en cuenta la corrección de Brinkman, además tal coeficiente ajustable contienen demasiadas suposiciones y debido a esto el modelo no tiene suficiente confiabilidad. Adicionalmente, en la segunda condición a la frontera se supuso continuidad en el esfuerzo.

La ecuación resultante muestra la condición de salto en la velocidad y los coeficientes mencionados.

$$\langle \mathbf{v}_\beta \rangle = -\frac{\mathbf{K}_\beta}{\mu_\beta} \cdot (\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta - \rho_\beta \mathbf{g}) \quad (2.4)$$

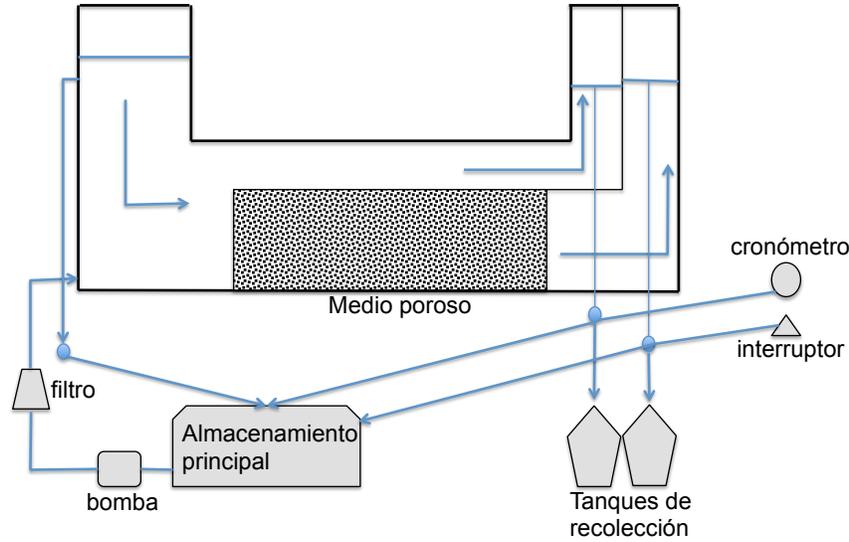


Figura 2.1. Esquema del experimento Beavers y Joseph.

$$\frac{d\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy} \Big|_{y_0} = \frac{\alpha}{\sqrt{k_{\beta\omega}}} (\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta \Big|_{y_0} - \varepsilon_{\beta\omega} \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta \Big|_{y_0}) \quad (2.5)$$

A partir del trabajo anterior, Ochoa-Tapia y Whitaker (1995a) abordaron el problema con uso del método del promedio volumétrico, donde se puede observar el desarrollo teórico del modelo a partir de las ecuaciones puntuales (2.1) y (2.2) además de la condición de no deslizamiento (2.3). Al aplicar el método del promedio volumétrico obtuvieron la ecuación de Darcy con la corrección de Brinkman (2.6).

$$\langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega = -\frac{\mathbf{K}_\beta}{\mu_\beta} \cdot \left[\nabla \langle p_\beta \rangle_\omega^\beta - \rho_\beta \mathbf{g} - \varepsilon_\beta^{-1} \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega \right] \quad (2.6)$$

Esta describe el flujo en un medio poroso y la corrección es importante en la inter-región, como se muestra en la Figura 2.2. Estos autores desarrollaron un método para obtener finalmente un condición de salto en el esfuerzo como se muestra en la ecuación (2.7). Este resultado contrasta con el trabajo de Beavers y Joseph donde se supuso continuidad en el esfuerzo. No obstante, Ochoa-Tapia y Whitaker (1995a) supusieron continuidad en la velocidad sin el desarrollo teórico realizado en la primera condición a través de la superficie divisoria y

realizaron una comparación con los experimentos de Beavers y Joseph (1967) en una segunda parte del trabajo efectuado por Ochoa-Tapia y Whitaker (1995b). Además consideraron que la condición de salto también contenía coeficientes ajustables.

$$\frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta|_{y_0}}{dy} - \frac{d\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta|_{y_0}}{dy} = \frac{\varepsilon_{\beta\omega}\beta}{\sqrt{K_{\beta\omega}}} (\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta|_{y_0}) \quad (2.7)$$

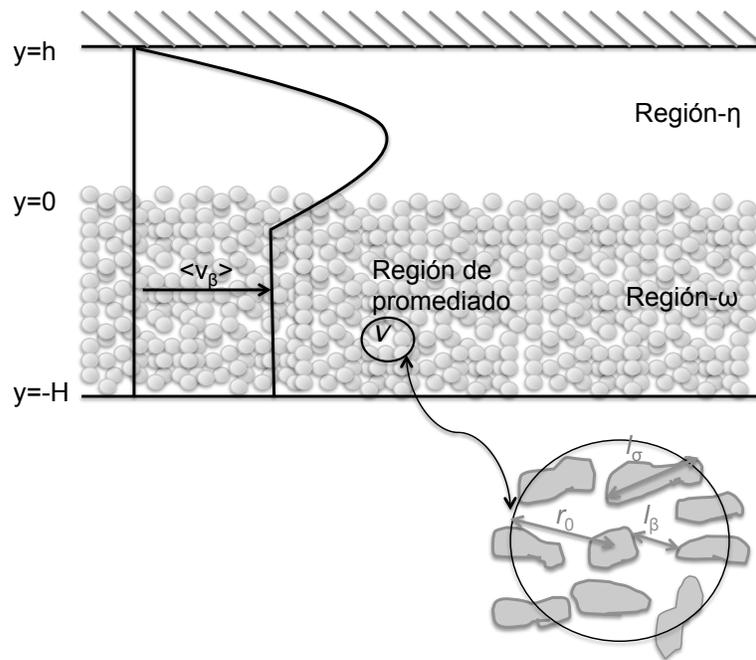


Figura 2.2. Esquema de representación para el sistema estudiado por Ochoa-Tapia y Whitaker.

Tras los intentos por conseguir una teoría más desarrollada en este tipo de sistemas y con trabajo de cómputo más avanzado, se demostró que mediante celdas unitarias se pudo modelar el comportamiento del fluido en la inter-región medio poroso-fluido Valdés-Parada *y col.* (2007). En este último trabajo se obtuvo el coeficiente de permeabilidad en función de la posición. Además, Valdés-Parada *y col.* (2010) realizaron la derivación de las condiciones de salto en la inter-región, donde se resolvió un problema de cerradura macroscópico.

De manera reciente, se abordaron de manera completa los trabajos mencionados anteriormente y Valdés-Parada *y col.* (2013) desarrollaron las dos condiciones de salto mostradas en las ecuaciones (2.8) y (2.9), el esfuerzo y en la velocidad

respectivamente. Además, por medio de método numéricos, se obtuvieron los coeficientes de dichas condiciones. Asimismo, se desarrolló una comparación gráfica del comportamiento del flujo con los modelos: Ochoa-Tapia y Whitaker (1995a) y Beavers y Joseph (1967) donde se mostró que, con las dos condiciones de salto, el modelo se ajustó más al de un solo dominio.

$$\frac{d\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta|_{y_0}}{dy} - \frac{\alpha}{\sqrt{k_{\beta\omega}}} \alpha_{\eta\omega} \frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta|_{y_0}}{dy} = \frac{\alpha}{\sqrt{k_{\beta\omega}}} (\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta|_{y_0} - \varepsilon_{\beta\omega} v \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta|_{y_0}) \quad (2.8)$$

$$\frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta|_{y_0}}{dy} - \omega \frac{d\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta|_{y_0}}{dy} = \frac{\alpha \varepsilon_{\beta\omega} \beta}{\sqrt{k_{\beta\omega}}} (\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta|_{y_0} - B_{\omega\eta} \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta|_{y_0}) \quad (2.9)$$

Por otro lado, se puede resaltar la aplicación de tales investigaciones a diferentes sistemas en otros campos. Por ejemplo, Wood *y col.* (2001) realizaron un estudio para métodos de predicción de coeficientes efectivos de difusión en sistemas celulares tomando información de la microescala, donde se llevó a cabo el intercambio de materia entre las células y el fluido. Después se obtuvieron ecuaciones promedio. Cabe mencionar que el coeficiente de difusión efectiva depende de los parámetros de transporte microscópico y de la geometría de la estructura. Por estas razones, en esta investigación se llevó a cabo la solución del problema de cerradura por dos métodos: uno, donde se consideró una celda unitaria de Chang de estructura sencilla, y fue posible resolver el problema de cerradura de forma analítica, y otro, donde se tomó la celda unitaria compleja, resolviendo el problema de cerradura numéricamente. Después se realizó una comparación entre ellas y se analizó la importancia de la geometría de la celda unitaria, debido a que si existen una diferencia entre estas.

Asimismo, Goyeau *y col.* (2003) realizaron el estudio de las condiciones de salto donde se abordó el problema de manera distinta, realizando como primer punto un modelo de un solo dominio para todo el sistema (fluido, inter-región y medio poroso) y otro con dos dominios donde se usan ecuaciones de medio efectivo en

las regiones homogéneas, las cuales se acoplan por medio de sus correspondientes condiciones de salto. Estos autores combinaron los modelos de uno y dos dominios, logrando una expresión del coeficiente β obtenido de las investigaciones de Ochoa y Whitaker(1995), en función de la solución del problema en un solo dominio.

Otro trabajo interesante en este tipo de sistemas es el abordado por Wood (2009), donde se demuestra el papel de las leyes de escalamiento en un sistema heterogéneo complejo donde se realizan distintos promediados y es notoria la importancia del cumplimiento de las restricciones de escala para el modelo.

Otros trabajos muestran las distintas formas de estudiar el flujo en estos tipos de sistemas, tal como es el caso de Zaman y Jalali (2010). Estos autores comparan diferentes correlaciones en la simulación de flujo en esferas monodispersas de paquetes aleatorios. El trabajo utilizó como principio la Ley de Darcy para obtener la permeabilidad, en la que se analizó la caída de presión, para distinto número de esferas en una celda. De esto se concluyó que, mediante el uso de una correlación de Stokes combinada con la ley de Darcy, fue posible obtener una nueva correlación de la permeabilidad. Esta fue válida para todo el rango de porosidades.

Asimismo, se estudió la variación de presión a lo largo del medio mediante la ecuación de Ergun (2.10) y la predicción de Stokes (2.11). Se obtuvo que la ecuación de Ergun sólo fue válida para porosidades menores a 0.7. Por lo tanto, se tomó la ecuación de la permeabilidad dada por Stokes. Este análisis se realizó para diferente número de esferas en el medio, y se observaron cambios menores.

$$\frac{\Delta P}{L} = 150 \frac{(1 - \varepsilon)^2 \mu u}{\varepsilon^3 d^2} + 1.75 \frac{1 - \varepsilon \rho u^2}{\varepsilon^3 d} \quad (2.10)$$

$$K_s = \frac{d^2}{180(1 - \varepsilon)} \quad (2.11)$$

donde ΔP se define como el gradiente de presión, L la longitud de la cama, u la velocidad superficial y d el diametro esférico. Adicionalmente, se combinó la ecuación de Darcy con la obtenida por Stokes para describir el gradiente de presión en el medio diluido, y se obtuvo una nueva expresión, representada en la ecuación

(2.12).

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{18\mu u(1 - \varepsilon)}{d^2} \quad (2.12)$$

La ecuación (2.12) se comparó con las correlaciones de Kozeny-Carman Rose (1993), Rumpf-Gupte Rumpf y Gupte (1971), Howells-Hinch Torquato (2013), observadas de manera respectiva en las ecuaciones (2.13), (2.14), (2.15). Se determinó que las simulaciones con 2000 esferas en el medio poroso tienen una buena aproximación para porosidades menores a 0.7, y todas predijeron resultados similares para la permeabilidad en el rango entre 0.7 y 0.8. Las ecuaciones (2.13) y (2.15) predijeron valores hasta de 0.8 a 0.9, a diferencia del modelo propuesto en el que alcanza a predecir la permeabilidad a porosidades mayores del 0.9. Por lo tanto, este modelo tiene mayor alcance. Sin embargo, la expresión depende del número de esferas.

$$K = \frac{\varepsilon d^2}{180(1 - \varepsilon)^2} \quad (2.13)$$

$$K = \frac{\varepsilon^{5.5} d^2}{5.6} \quad (2.14)$$

$$\frac{K}{K_s} = 1 + \frac{3}{\sqrt{2}}(1 - \varepsilon)^{\frac{1}{2}} + \frac{135}{64}(1 - \varepsilon)\ln(1 - \varepsilon) + 16.456(1 - \varepsilon) + \mathbf{O}((1 - \varepsilon)) \quad (2.15)$$

donde d es el diámetro de las esferas, de las cuales está compuesto el medio poroso, N el número de esferas y ε la porosidad.

$$d = \left(\frac{6(1 - \varepsilon)}{\pi N} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.16)$$

Lasseux *y col.* (2008) estudiaron otro problema en el cual se trabajó un medio poroso heterogéneo de dos fases con flujo inercial. En éste se utilizó el modelo de Darcy-Forchheimer ecuación (2.17), debido a que éste considera números de Reynolds altos y la parte inercial no puede ser despreciada. Además, este modelo

estudia fluidos compresibles, pues en el sistema se estudió una mezcla de agua y gas. Se estudiaron tres configuraciones de medios porosos distintas: capas paralelas al flujo, capas perpendiculares al flujo y medio nodular.

A diferencia de los trabajos mencionados anteriormente, en el desarrollo de este problema se supuso continuidad en la velocidad y en el esfuerzo en la inter-región del medio poroso heterogéneo. Se comparan los modelos de Darcy ecuación (2.4) y Darcy-Forchheimer ecuación (2.17), y se concluyó que la importancia de los efectos inerciales para números de Reynolds altos que sólo pueden verse con el modelo de Darcy-Forchheimer.

$$\langle \mathbf{v}_\alpha \rangle = - \left(\frac{\mu_\alpha}{\ell} (\ell \mathbf{K}_\alpha^{-1} + \beta_\alpha Re_\alpha) \right)^{-1} \cdot (\nabla \langle p_\alpha \rangle^\beta - \rho_\alpha \mathbf{g}) \quad (2.17)$$

donde $\alpha = \text{aceite, agua}$

En otra investigación realizada por Lasseux *y col.* (2014) se desarrolló el modelo macroscópico de transporte de masa y cantidad de movimiento para un gas ligeramente compresible con condición de frontera deslizante ecuación (2.18), donde se usó una condición de primer orden bajo la restricción de números de Knudsen $Kn \leq 0.1$ donde se llega a la ecuación de Darcy-Klinkenberg (2.19) que toma en cuenta la teoría cinética de los gases.

$$\tilde{\mathbf{v}}_\beta + \xi \lambda_\beta \mathbf{n} \cdot (\nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta + \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta^T) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{nn}) = -\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \quad (2.18)$$

$$\langle \mathbf{v}_\alpha \rangle = -\frac{1}{\mu_\beta} \mathbf{K} \cdot \left(1 + \frac{b_k}{\langle p_\beta \rangle^\beta} \right) \frac{d\langle p_\beta \rangle^\beta}{dx} \quad (2.19)$$

Primero realizaron la ecuación suponiendo gases ideales en un medio isotropo y luego desarrollaron el modelo tomando en cuenta la ecuación de Van Der Waals (2.20), donde \mathbf{K} es la permeabilidad y \mathbf{S} es el coeficiente de deslizamiento. Ahí,

el problema de cerradura se vuelve más complicado porque toma en cuenta el choque entre partículas.

$$\langle \mathbf{v}_\alpha \rangle = -\frac{1}{\mu_\beta} \mathbf{K} \cdot \left(\mathbf{I} + \frac{1}{\langle p_\beta \rangle^\beta} \mathbf{\Sigma} \right) \cdot \nabla \langle p_\beta \rangle^\beta \quad (2.20)$$

$$\mathbf{\Sigma} = \xi \mu_\beta \sqrt{\frac{\pi R \langle T_\beta \rangle^\beta}{2M}} \mathbf{S} \quad (2.21)$$

Otro análisis importante en los medios porosos fue realizado por Alazmi y Vafai (2001), donde se hizo una comparación de los modelos existentes de condiciones de frontera en la inter-región medio poroso-fluido. Para la transferencia de cantidad de movimiento se compararon los resultados siguientes: 1) continuidad de la velocidad y su gradiente, 2) continuidad de las propiedades de viscosidad efectiva y molecular, 3) las condiciones de Ochoa-Tapia y Whitaker (1995), 4) las condiciones de Ochoa-Tapia y Whitaker (1998) que considera los efectos inerciales y 5) la condición de BJ.

Recientemente Jimenez-Islas *y col.* (2009) realizaron un estudio numérico de la convección natural en 2-D para un sistema medio poroso-fluido donde se usaron los enfoques de uno y dos dominios. Para el modelo de un dominio se utilizó un parámetro binario para que las ecuaciones de cantidad de movimiento y energía tuvieran validez en todo el dominio y en el modelo de dos dominios se utilizaron las condiciones de la inter-región dadas por Beavers y Joseph (1967) descritas anteriormente. Para tal desarrollo se utilizaron las ecuaciones de Navier-Stokes y Darcy-Brinkman, se demostró que para ambos enfoques se encontraron resultados similares. Además se realizó una comparación entre los métodos numéricos de colocación ortogonal y diferencias finitas para la solución de las ecuaciones y se encontró que la primera requiere 2 ó 3 veces menor malleo que el segundo.

Por otra parte Ehrhardt (2010) realizó una recopilación de los diferentes

enfoques que se pueden tomar dentro de la inter-región medio poroso-fluido desde la aplicación de la ley de Darcy, Darcy-Brinkman, los trabajos con promedio volumétrico hasta llegar a trabajos interesantes como el de Le Bars y Worster (2006) donde proponen una nueva condición de frontera dentro de la región del medio poroso donde se dan los cambios llamada “zona de transición viscosa”.

A partir del análisis bibliográfico, es posible identificar una contribución en el desarrollo de las condiciones de salto para un medio estratificado donde se pueden tener dos o más capas de diferente material. Por lo anterior, cambian sus coeficientes efectivos, como la porosidad y la permeabilidad. Se necesitan condiciones de salto en la frontera para obtener un modelo más elaborado que pueda describir el transporte de cantidad de movimiento en todo el sistema tomando en cuenta la información de la inter-región, que estará contenida en sus condiciones de frontera.

Capítulo 3

Método analítico para el flujo en un sistema estratificado

En este capítulo se desarrolla un modelo simple que puede resolverse analíticamente donde la importancia radica en demostrar la contribución de la corrección de Brinkman y aplicarlo en el desarrollo de las condiciones de salto del siguiente capítulo. Además de obtener ecuaciones que permiten obtener coeficientes efectivos en cada región. Se supondrá el medio poroso como una serie de canales y a partir de la ecuación de Stokes para flujo unidimensional y con la condición de no deslizamiento se obtendrán los perfiles de velocidad en todo el sistema.

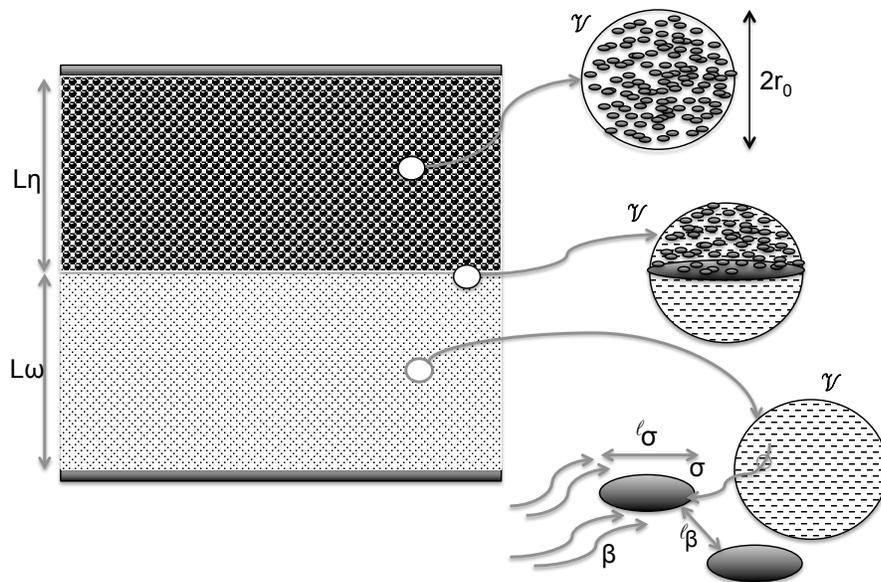


Figura 3.1. Esquema del sistema con dos medios porosos.

3.1. Flujo entre dos medios porosos

De acuerdo al sistema, se desarrolla un modelo para un sistema con dos medios porosos, primeramente se obtiene el perfil de velocidad para un canal y posteriormente se promedia para obtener el perfil en cada región o inter-región.

El perfil de velocidad para cada uno de los poros se obtiene de la simplificación de la ecuación de Stokes para flujo unidimensional es

$$0 = -\frac{dp}{dz} + \mu_\beta \frac{d^2 v_\beta^\omega}{dy_\omega^2} \quad (3.1)$$

Donde se considera la presión constante

$$\frac{dp}{dz} = \frac{p_L - p_0}{L} = A = \text{constante} < 0 \quad (3.2)$$

De tal manera que la ecuación (3.1) toma la forma:

$$\frac{d^2 v_\beta^\omega}{dy_\omega^2} = \frac{A}{\mu_\beta} \quad (3.3)$$

Esta ecuación debe ser resuelta sujeta a las condiciones de frontera siguientes

$$\text{En } y_\omega = b \quad v_\beta^\omega = 0 \quad (3.4)$$

$$\text{En } y_\omega = 0 \quad \frac{dv_\beta^\omega}{dy_\omega} = 0 \quad (3.5)$$

La integración de la ec.(3.6) junto con la aplicación de la condición de simetría dada por la ec. (3.5) da como resultado:

$$\frac{dv_\beta^\omega}{dy_\omega} = \frac{A}{\mu_\beta} y_\omega \quad (3.6)$$

Una nueva integración lleva a

$$v_\beta^\omega = \frac{A}{2\mu_\beta} y_\omega^2 + C_2 \quad (3.7)$$

Al aplicar la condición de frontera dada por la ecuación (3.4) se obtiene

$$\frac{A}{2\mu_\beta}b^2 + C_2 = 0 \quad (3.8)$$

de donde

$$C_2 = -\frac{Ab^2}{2\mu_\beta} \quad (3.9)$$

De tal manera que el perfil de velocidad en cada uno de los poros está dado por

$$v_\beta^\omega = -\frac{Ab^2}{2\mu_\beta} \left[1 - \left(\frac{y_\omega}{b} \right)^2 \right] \quad (3.10)$$

Que en términos de la velocidad máxima, en ausencia de deslizamiento en las paredes del sólido, dada por

$$v_{z,max}^\omega = -\frac{Ab^2}{2\mu_\beta} \quad (3.11)$$

toma la forma

$$v_\beta^\omega = v_{z,max}^\omega \left[1 - \left(\frac{y_\omega}{b} \right)^2 \right] \quad \text{para} \quad -b \leq y_\omega \leq +b \quad (3.12)$$

El perfil de velocidad para el canal del medio poroso η se puede obtener por un procedimiento análogo al anterior, está dado por

$$v_\beta^\eta = v_{z,max}^\eta \left[1 - \left(\frac{y_\eta}{B} \right)^2 \right] \quad \text{para} \quad -B \leq y_\eta \leq +B \quad (3.13)$$

En donde

$$v_{z,max}^\eta = -\frac{AB^2}{2\mu_\beta} \quad (3.14)$$

En la Figura 3.1 se muestra el sistema donde hay dos regiones porosas con porosidades $\varepsilon_{\beta\omega}$ y $\varepsilon_{\beta\eta}$ y una inter-región con un volumen promediante de $2r_0$. El esquema del sistema se muestra en la Figura 3.2.

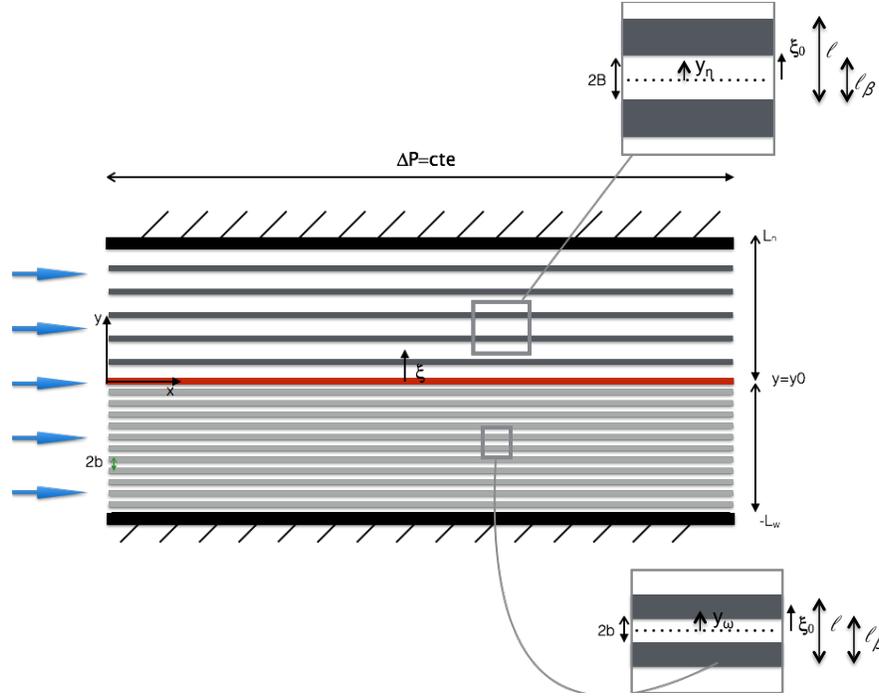


Figura 3.2. Esquema del sistema en forma de canales en dos medios porosos.

De acuerdo a las fórmulas de las definiciones dadas, las fracciones volumétricas del fluido en los medios porosos homogéneos están dadas por:

$$\varepsilon_{\beta\eta} = \frac{2B}{\ell} \qquad \varepsilon_{\beta\omega} = \frac{2b}{\ell}$$

El promedio intrínseco de la velocidad está definido por

$$\langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta = \frac{1}{V_\beta} \int_{V_\beta} \mathbf{v}_\beta dV \qquad (3.15)$$

en donde \mathbf{v}_β es un vector de la velocidad puntual en la dirección paralela a los canales de ambas regiones como se muestra en la Figura 3.2. La velocidad superficial está dada por :

$$\langle \mathbf{v}_\beta \rangle = \frac{1}{V} \int_{V_\beta} \mathbf{v}_\beta dV \quad (3.16)$$

Las secciones de promediado se muestran en la Figura 3.2 para los diferentes tipos de muestra que se deben considerar. Antes se definirá la coordenada ξ con origen justo en la interfase de los medios porosos en la cual comienza la región de fluido homogéneo con distinta porosidad.

Debido a la forma de seleccionar $\xi = 0$, la última celda unitaria del medio poroso no incluye sólido de la pared sólida. El tamaño de la sección de promediado está dado por $2r_0$ y contendrá n_0 celdas unitarias que en este trabajo se limitará a un número entero.

3.1.1. Región porosa homogénea ω .

En esta región los promedios se tomarán para posiciones del centroide ξ_0 , limitadas por

$$-L_\omega + r_0 < \xi_0 < -r_0$$

Es importante notar que para promedios en donde el total de muestra está localizada en el medio poroso homogéneo debido a la periodicidad del campo en los poros, la velocidad promedio dada por la ecuación (3.15) se puede escribir como:

$$\langle v_\beta \rangle^\beta = \frac{1}{V} \int_{v_\beta} v_\beta dV \quad (3.17)$$

$$\langle v_\beta \rangle^\beta = \frac{1}{n_0 \ell_{\beta\omega}} \sum_{i=1}^{n_0} \int_{-b}^b v_z^\omega dy \quad (3.18)$$

$$\langle v_\beta \rangle^\beta = \frac{1}{\ell_{\beta\omega}} \int_{-b}^b v_z^\omega dy \quad (3.19)$$

Se sustituye la ecuación (3.12) en la integral donde se realiza un cambio de variable $\varsigma = \frac{y_\omega}{b}$.

$$\frac{\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{v_{z,max}^\omega} = \frac{b}{\ell_{\beta\omega}} \int_{-1}^1 [1 - \varsigma^2] d\varsigma \quad (3.20)$$

y debido a que $\ell_{\beta\omega} = 2b$ la integral toma la forma

$$\frac{\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{v_{z,max}^\omega} = \int_0^1 [1 - \varsigma^2] d\varsigma \quad (3.21)$$

y se obtiene el perfil de velocidad promedio para la región porosa.

$$\frac{\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{v_{z,max}^\omega} = \frac{2}{3} \quad (3.22)$$

Es conveniente notar que, para la misma caída de presión, las velocidades máximas en los poros están relacionadas por:

$$\frac{v_{z,max}^\omega}{v_{z,max}^\eta} = \left(\frac{b}{B} \right)^2 \quad (3.23)$$

al sustituir la ecuación (3.23) en la ecuación (3.22) y se obtiene la velocidad adimensional

$$\frac{\langle v_z \rangle_\omega^\beta}{v_{z,max}^\eta} = \left(\frac{2}{3} \right) \left(\frac{b}{B} \right)^2 \quad (3.24)$$

y la ecuación se puede expresar en forma de promedio superficial

$$\frac{\langle v_z \rangle_\omega}{v_{z,max}^\eta} = \left(\frac{2}{3} \right) \left(\frac{b}{B} \right)^2 \varepsilon_{\beta\omega} \quad -L_\omega + r_0 < \xi_0 < -r_0 \quad (3.25)$$

3.1.2. Región porosa homogénea η .

En esta región, los promedios se tomarán para posiciones del centroide ξ_0 , limitadas por

$$r_0 < \xi_0 < L_\eta - r_0$$

y debido a que se tomará otra región porosa, se sigue el mismo camino que en la región porosa homogénea ω y se obtienen resultados similares.

$$\frac{\langle v_\beta \rangle^\beta}{v_{zmax}^\eta} = \frac{B}{l_0} \int_{-1}^1 [1 - \zeta^2] d\zeta \quad (3.26)$$

Resolviendo la integral se tiene

$$\frac{\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{v_{zmax}^\eta} = \frac{2}{3} \quad (3.27)$$

que también se puede expresar en forma de promedio superficie

$$\frac{\langle v_z \rangle_\eta}{v_{z,max}^\eta} = \left(\frac{2}{3} \right) \varepsilon_{\beta\eta} \quad r_0 < \xi_0 < L_\eta - r_0 \quad (3.28)$$

3.1.3. Inter-región $\omega - \eta$.

En la inter-región, los promedios se tomarán para posiciones del centroide ξ_0 , limitadas por

$$-r_0 \leq \xi_0 \leq r_0$$

La velocidad promedio se obtiene de la ecuación (3.17) que se expresa como:

$$\langle v_\beta \rangle_{\eta\omega}^\beta = \frac{1}{V_{\beta\omega} + V_{\beta\eta}} \left(\int_{V_{\beta\omega}} v_\beta dV + \int_{V_{\beta\eta}} v_\beta dV \right) \quad (3.29)$$

En donde $V_{\beta\omega}$ es el volumen del fluido en los capilares del medio poroso ω y $V_{\beta\eta}$ es el volumen del fluido en los capilares del medio poroso η .

Dentro de la fracción del volumen promediante en los medios porosos $V_{\beta\omega}$ y $V_{\beta\eta}$ puede haber además de n_p celdas unitarias completas, una fracción f que se determina del número entero resultante de la división indicada enseguida.

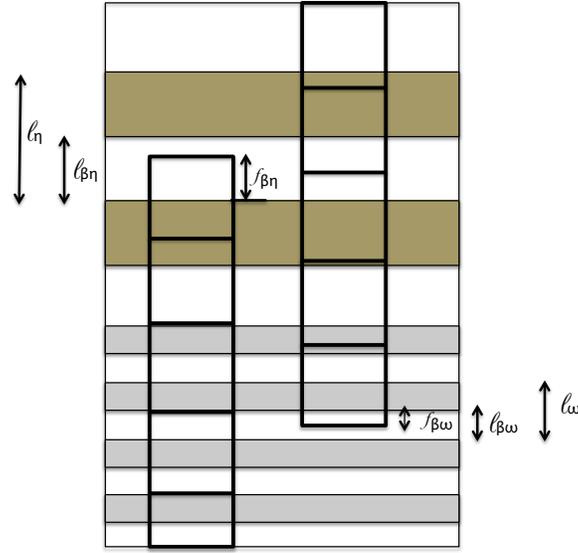


Figura 3.3. Fracción de fluido que queda dentro de la región de promediado.

$$-\frac{\xi_0 - r_0}{l_w} = n_p + f_w \quad (3.30)$$

$$-\frac{\xi_0 - r_0}{l_\eta} = n_p + f_\eta \quad (3.31)$$

En donde f indica una fracción de celda unitaria y tendrá contribución al flujo del fluido tan solo si satisface

$$f_w > 1 - \varepsilon_{\beta w} \quad (3.32)$$

$$f_\eta > 1 - \varepsilon_{\beta \eta} \quad (3.33)$$

de tal manera que f_β , dado por la ecuación siguiente, sea mayor que cero

$$f_{\beta w} = f - (1 - \varepsilon_{\beta w}) \quad (3.34)$$

$$f_{\beta \eta} = f - (1 - \varepsilon_{\beta \eta}) \quad (3.35)$$

Estas fracciones no serán las mismas para cada región ya que el tamaño de los canales son distintos, por lo tanto tendremos $f_{\beta w}$ y $f_{\beta \eta}$

Por ello la Ec. (3.29) puede escribirse como

$$\langle v_\beta \rangle_{\eta\omega}^\beta = \frac{1}{n_{p\omega}l_{\beta\omega} + f_{\beta\omega}l_\omega + n_{p\eta}l_{\beta\eta} + f_{\beta\eta}l_\eta} [n_{p\omega}l_{\beta\omega}\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta + f_{\beta\omega}l_\omega v_z^\omega + n_{p\eta}l_{\beta\eta}\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta + f_{\beta\eta}l_\eta v_z^\eta] \quad (3.36)$$

$$\langle v_\beta \rangle_{\eta\omega}^\beta = \frac{1}{2r_0} [n_{p\omega}l_{\beta\omega}\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta + f_{\beta\omega}l_\omega v_z^\omega + n_{p\eta}l_{\beta\eta}\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta + f_{\beta\eta}l_\eta v_z^\eta] \quad r_0 \leq \xi_0 \leq -r_0 \quad (3.37)$$

En donde $\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta$ está dada por la ecuación (3.24). A partir de la ecuación (3.12) se obtienen v_z^ω y v_z^η

$$(f_{\beta\omega}l_\omega)v_z^\omega = \int_{y_\omega}^{+b} v_z^\omega dy_\omega \quad (3.38)$$

$$(f_{\beta\eta}l_\eta)v_z^\eta = \int_{y_\eta}^{+B} v_z^\eta dy_\eta \quad (3.39)$$

En donde los límites inferiores de las integrales y_ω y y_η , que definen la posición del extremo inferior del volumen promediante en términos de las coordenadas locales del capilar, se obtienen de

$$y_\omega = \begin{cases} b - lf_\beta & \text{si } b \geq lf_\beta \\ -lf_\beta & \text{si } b < lf_\beta \end{cases} \quad (3.40)$$

$$y_\eta = \begin{cases} B - lf_\beta & \text{si } B \geq lf_\beta \\ -lf_\beta & \text{si } B < lf_\beta \end{cases} \quad (3.41)$$

La integral en la Ec. (3.38) está dada por

$$(f_\beta l)v_z^\omega = v_{z,max}^\omega \int_{y_\omega}^{+b} v_z^\omega dy = v_{z,max}^\omega \int_{y_\omega}^{+b} \left[1 - \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right] dy \quad (3.42)$$

$$v_{z,max}^{\omega} \int_{y_{\omega}}^{+b} v_z^{\omega} dy = v_{z,max}^{\omega} \left[\frac{2}{3}b - y_{\omega} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{y_{\omega}}{b} \right)^2 \right] \right] \quad (3.43)$$

por ello

$$\frac{v_z^{\omega}}{v_{z,max}^{\omega}} = \frac{\varepsilon_{\beta\omega}}{2f_{\beta\omega}} \left[\frac{2}{3} - \frac{y_{\omega}}{b} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{y_{\omega}}{b} \right)^2 \right] \right] \quad (3.44)$$

para dejar todas las ecuaciones de la misma forma divididas entre $v_{z,max}^{\eta}$ tenemos que la ecuación toma la forma

$$\frac{v_z^{\omega}}{v_{z,max}^{\eta}} = \frac{\varepsilon_{\beta\omega}}{2f_{\beta\omega}} \left(\frac{b}{B} \right)^2 \left[\frac{2}{3} - \frac{y_{\omega}}{b} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{y_{\omega}}{b} \right)^2 \right] \right] \quad (3.45)$$

y de igual forma para η

$$\frac{v_z^{\eta}}{v_{z,max}^{\eta}} = \frac{\varepsilon_{\beta\eta}}{2f_{\beta\eta}} \left[\frac{2}{3} - \frac{y_{\eta}}{B} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{y_{\eta}}{B} \right)^2 \right] \right] \quad (3.46)$$

3.1.4. Inter-región medio poroso-pared.

En esta región los promedios se tomarán para posiciones del centroide ξ_0 , limitadas por

$$-L_{\omega} - r_0 < \xi_0 \leq -L_{\omega} + r_0 \quad (3.47)$$

La velocidad promedio se obtiene de la ecuación (3.24), que se expresa como

$$\langle v_{\beta} \rangle_{\omega W}^{\beta} = \frac{1}{n_{p\omega} \ell_{\beta\omega} + f_{\beta\omega} \ell_{\beta}} [n_{p\omega} \ell_{\beta\omega} \langle v_{\beta} \rangle_{\omega}^{\beta} + f_{\beta\omega} \ell_{\omega} v_z^{\omega W}] \quad (3.48)$$

De igual forma

$$\langle v_{\beta} \rangle_{\omega W}^{\beta} = \frac{1}{2r_0} [n_{p\omega} \ell_{\beta\omega} \langle v_{\beta} \rangle_{\omega}^{\beta} + f_{\beta\omega} \ell_{\omega} v_z^{\omega W}] \quad -L_{\omega} - r_0 < \xi_0 \leq -L_{\omega} + r_0 \quad (3.49)$$

En donde $\langle v_{\beta} \rangle_{\omega}^{\beta}$ está dada por la ecuación (3.24) y $n_{p\omega}$ es el número de celdas unitarias de medio poroso contenidas por la sección; se obtiene de

$$\frac{\xi_0 + L_\omega + r_0}{\ell} = n_{p\omega} + f_\omega \quad (3.50)$$

La fracción $f_{\beta\omega}$ se calcula usando la fracción f con el uso de la relación

$$f_{\beta\omega} = \begin{cases} f_\omega, & f_\omega \leq \varepsilon_{\beta\omega} \\ \varepsilon_{\beta\omega}, & f_\omega > \varepsilon_{\beta\omega} \end{cases} \quad (3.51)$$

Finalmente $v_z^{\omega W}$ se obtiene

$$v_z^{\omega W} = \frac{1}{f_{\beta\omega} \ell_\omega} \int_{-b}^{f_{\beta\omega} \ell_\omega - b} v_z^\omega dy_\omega \quad (3.52)$$

$$v_z^{\omega W} = \int_{-b}^{f_{\beta\omega} \ell_\omega - b} v_z^\omega dy_\omega = \frac{v_{z,max}^\omega}{3} \left(\frac{f_{\beta\omega} \ell_\omega}{b} \right) \left[3 - \left(\frac{f_{\beta\omega} \ell_\omega}{b} \right) \right] \quad (3.53)$$

3.2. Flujo en un canal y un medio poroso

En esta sección se desarrolla el sistema medio poroso y fluido debido a que con la solución de la sección 3.1 no es posible obtener el caso límite con $\epsilon_\beta = 1$.

Para la solución se tienen los mismos perfiles para los canales del medio.

$$\text{fluido} \quad v_z^\eta = v_{z,max}^\eta \left(1 - \left(\frac{y_\eta}{B} \right)^2 \right) \quad -B < y_\eta < +B \quad (3.54)$$

$$\text{poro} \quad v_z^\omega = v_{z,max}^\omega \left(1 - \left(\frac{y_\omega}{b} \right)^2 \right) \quad -b < y_\omega < +b \quad (3.55)$$

donde las $v_{z,max}^f$ y $v_{z,max}^c$ representan las velocidades en el centro del canal y de los poros respectivamente, las cuales se obtienen por la condición de no deslizamiento en la superficie del sólido, y_f y y_c indican las coordenadas locales con respecto al centro de cada canal.

En la Figura 3.4 se observa el sistema donde se desarrolla el modelo de transporte de cantidad de movimiento que considera una parte porosa, una de fluido y paredes en los extremos.

Figura 3.4. Sistema Medio Poroso-Fluido.

Se hace la suposición de considerar la región porosa homogénea como una serie de canales y esto conduce al siguiente esquema:

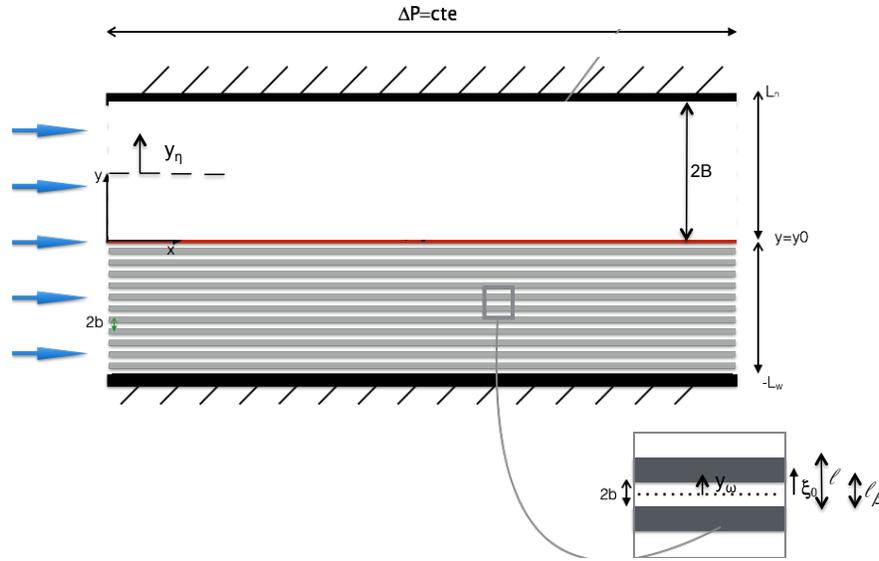


Figura 3.5. Esquema del sistema suponiendo el medio poroso en forma de canales.

El sistema se desarrolla bajo las mismas condiciones que en la primera sección de este capítulo. Las secciones de promediado se muestran en la Figura 3.5 para los cinco diferentes tipos de muestra que se deben considerar. Antes se definirá la coordenada ξ con origen justo en la interfase de los medios porosos en la cual comienza la región de fluido homogéneo con distinta porosidad.

Debido a la forma de seleccionar $\xi = 0$, la ultima celda unitaria del medio poroso no incluye sólido de la pared sólida. El tamaño de la sección de promediado está dado por $2r_0$ y contendrá n_0 celdas unitarias que en este trabajo se limitará a un número entero.

3.2.1. Región porosa homogénea ω

Debido a que para este sistema esta región es la misma que en la sección 3.1.1 se obtiene la misma ecuación que se presenta a continuación.

$$\frac{\langle v_\beta \rangle^\beta}{v_{zmax}^\omega} = \frac{2}{3} + k_n^\omega \quad (3.56)$$

Es conveniente notar que para la misma caída de presión la velocidad máxima en los poros están relacionadas por:

$$\frac{v_{z,max}^{\omega}}{v_{z,max}^{\eta}} = \left(\frac{b}{B}\right)^2 \quad (3.57)$$

$$\ell_{\beta\omega} = 2b \qquad \ell_{\beta\eta} = 2B \qquad N = \frac{B}{\ell}$$

De donde se obtiene una relación de la siguiente forma:

$$\frac{b}{B} = \frac{\ell\varepsilon_{\beta\omega}}{2B} = \frac{\varepsilon_{\beta\omega}}{2N} \quad (3.58)$$

$$\frac{v_{z,max}^{\omega}}{v_{z,max}^{\eta}} = \left(\frac{\varepsilon_{\beta\omega}}{2N}\right)^2 \quad (3.59)$$

La ecuación (3.59) se sustituye en la ecuación (3.56) debido a que todas las expresiones se escriben en este trabajo como ecuaciones adimensionales.

$$\frac{\langle v_z \rangle_{\omega}^{\beta}}{v_{z,max}^{\eta}} = \left(\frac{2}{3} + k_n^{\omega}\right) \left(\frac{\varepsilon_{\beta\omega}}{2N}\right)^2 \quad (3.60)$$

$$\frac{\langle v_z \rangle_{\omega}}{v_{z,max}^{\eta}} = \left(\frac{2}{3} + k_n^{\omega}\right) \left(\frac{\varepsilon_{\beta\omega}}{2N}\right)^2 \varepsilon_{\beta\omega} \qquad -L_{\omega} + r_0 < \xi_0 < -r_0 \quad (3.61)$$

3.2.2. Región de fluido homogéneo.

En esta región los promedios se tomarán para posiciones del centroide ξ_0 , limitadas por

$$r_0 < \xi_0 < L_{\eta} - r_0$$

En donde la región de promediado está localizada totalmente en el fluido homogéneo de tal manera que la ecuación (3.17) se puede escribir como.

$$\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta = \langle v_\beta \rangle_\eta = \frac{1}{2r_0} \int_{y_0-r_0}^{y_0+r_0} v_z^\eta dy_\eta \quad (3.62)$$

$$\frac{\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{v_{z,max}^\eta} = \frac{1}{2} \int_{Y_0-1}^{Y_0+1} [1 - \alpha^2 Y^2 + k_n^\eta] dY \quad (3.63)$$

En donde se han usado, por conveniencia, los términos adimensionales

$$Y = \frac{y_\eta}{r_0} \quad \alpha = \frac{r_0}{B} \quad Y_0 = \frac{y_0}{r_0} \quad (3.64)$$

Integrando la Ec. (3.63) se obtiene

$$\frac{\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{v_{z,max}^\eta} = \frac{1}{2} \left[Y_0 + 1 - (Y_0 - 1) - \frac{\alpha^2}{3} (Y_0 + 1)^3 + \frac{\alpha^2}{3} (Y_0 - 1)^3 + 2k_n^\eta \right] \quad (3.65)$$

$$\frac{\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{v_{z,max}^\eta} = \left[1 - \left(\frac{y_0}{B} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{r_0}{B} \right)^2 + k_n^\eta \right] \quad \text{para } -B + r_0 \leq y_0 \leq +B - r_0 \quad (3.66)$$

La ecuación (3.67) muestra el comportamiento de la velocidad en el fluido homogéneo.

$$\frac{\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{v_{z,max}^\eta} = \left[1 - \left(\frac{\xi_0}{B} - 1 \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{r_0}{B} \right)^2 + k_n^\eta \right] \quad \text{para } 2B - r_0 \leq \xi_0 \leq r_0 \quad (3.67)$$

3.2.3. Inter-región medio poroso fluido.

En esta región los promedios se tomarán para posiciones del centroide ξ_0 , limitadas por

$$-r_0 \leq \xi_0 \leq r_0 \quad (3.68)$$

La velocidad promedio se expresa como:

$$\langle v_\beta \rangle_{\eta\omega}^\beta = \frac{1}{V_{\beta\omega} + V_{\beta\eta}} \left(\int_{V_{\beta\omega}} v_\beta dV + \int_{V_{\beta\eta}} v_\beta dV \right) \quad (3.69)$$

En donde $V_{\beta\omega}$ es el volumen del fluido en los capilares del medio poroso ω y $V_{\beta\eta}$ es el volumen del fluido del canal.

Dentro de la fracción del volumen promediante en el medio poroso $V_{\beta c}$ puede haber además de n_p celdas unitarias completas, una fracción f que se determina del número entero resultante de la división indicada enseguida.

$$-\frac{\xi_0 - r_0}{\ell} = n_p + f \quad (3.70)$$

En donde f indica una fracción de celda unitaria y tendrá contribución al flujo del fluido tan solo si satisface

$$f > 1 - \varepsilon_{\beta\omega} \quad (3.71)$$

de tal manera que f_β , dado por la ecuación siguiente, sea mayor que cero

$$f_\beta = f - (1 - \varepsilon_{\beta\omega}) \quad (3.72)$$

Por ello la ecuación (3.69) puede escribirse como

$$\langle v_\beta \rangle_{\eta\omega}^\beta = \frac{1}{n_p \ell_\beta + f_\beta \ell + \xi_0 + r_0} [n_p \ell_\beta \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta + f_\beta \ell v_z^\omega + (\xi_0 + r_0) v_z^\eta] \quad (3.73)$$

$$\langle v_\beta \rangle_{\eta\omega}^\beta = \frac{1}{2r_0} [n_p \ell_\beta \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta + f_\beta \ell v_z^\omega + (\xi_0 + r_0) v_z^\eta] \quad -r_0 \leq \xi_0 \leq r_0 \quad (3.74)$$

En donde $\langle v_\beta \rangle_{\eta\omega}^\beta$ está dada por la Ec. (3.60). A partir de la Ec. (??) obtiene v_z^ω y es

$$(f_\beta \ell) v_z^\omega = \int_{y_\omega}^{+b} v_z^\omega dy_\omega \quad (3.75)$$

En donde el límite inferior de la integral y_ω , que define la posición del extremo inferior del volumen promediante en términos de las coordenadas locales del capilar, se obtiene de

$$y_\omega = \begin{cases} b - \ell f_\beta & \text{si } b \leq \ell f_\beta \\ -\ell f_\beta & \text{si } b < \ell f_\beta \end{cases} \quad (3.76)$$

La integral en la ecuación (3.29) está dada por

$$\int_{y_\omega}^{+b} v_z^\omega dy_\omega = \int_{y_\omega}^{+b} \left[1 - \left(\frac{y_\omega}{b} \right)^2 + k_n^\omega \right] dy_\omega \quad (3.77)$$

$$\int_{y_\omega}^{+b} v_z^\omega dy_\omega = \left[\frac{2}{3}b - y_\omega \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{y_\omega}{b} \right)^2 + k_n^\omega (b - y_\omega) \right] \right] \quad (3.78)$$

Por ello

$$\frac{v_z^\omega}{v_{z,max}^\omega} = \frac{\varepsilon_{\beta\omega}}{2f_\beta} \left[\frac{2}{3} - \frac{y_\omega}{b} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{y_\omega}{b} \right)^2 + k_n^\omega \left(1 - \frac{y_\omega}{b} \right) \right] \right] \quad (3.79)$$

y usando ec. (3.59)

$$\frac{v_z^\omega}{v_{z,max}^\omega} = \frac{\varepsilon_{\beta\omega}}{2f_\beta} \left(\frac{\varepsilon_{\beta\omega}}{2f_\beta} \right)^2 \left[\frac{2}{3} - \frac{y_\omega}{b} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{y_\omega}{b} \right)^2 + k_n^\omega \left(1 - \frac{y_\omega}{b} \right) \right] \right] \quad (3.80)$$

Enseguida se obtiene v_z^η que corresponde al fluido homogéneo encontrado en la región

$$-B \leq y_\eta \leq -B + (r_0 + \xi_0) \quad \text{ó} \quad 0 \leq \xi \leq r_0 + \xi_0$$

$$v_z^\eta = \frac{1}{\xi_0 + r_0} \int_{-B}^{-(B-\xi_0+r_0)} v_z^\eta dy_\eta \quad (3.81)$$

se cambia de coordenada y toma la siguiente forma

$$v_z^\eta = \frac{1}{\xi_0 + r_0} \int_0^{\xi_0+r_0} v_z^\eta(\xi) d\xi \quad (3.82)$$

en donde

$$v_z^\eta(\xi) = v_{z,max}^\eta \left[1 - \left(\frac{\xi - B}{B} \right)^2 + k_n^\eta \right] \quad \text{para} \quad 0 \leq \xi \leq 2B \quad (3.83)$$

Por ello la ecuación (3.82) es ahora

$$\begin{aligned} \frac{v_z^\eta}{v_{z,max}^\eta} &= \frac{1}{\varsigma_0 + \alpha} \int_0^{\varsigma_0+\alpha} [1 - (\varsigma - 1)^2 + k_n^\eta] d\varsigma \\ \frac{v_z^\eta}{v_{z,max}^\eta} &= \frac{1}{\varsigma_0 + \alpha} \int_0^{\varsigma_0+\alpha} [2\varsigma - \varsigma^2 + k_n^\eta] d\varsigma \end{aligned} \quad (3.84)$$

con el cambio de variable

$$\varsigma = \frac{\xi}{B} \quad (3.85)$$

por ello

$$\frac{v_z^\eta}{v_{z,max}^\eta} = \frac{1}{\varsigma_0 + \alpha} \left[\varsigma^2 - \frac{1}{3}\varsigma^3 + k_n^\eta \varsigma \right]_0^{\varsigma_0+\alpha} \quad (3.86)$$

La ecuación resultante toma la siguiente forma

$$\frac{v_z^\eta}{v_{z,max}^\eta} = \left(\frac{\xi_0}{B} + \frac{r_0}{B} \right) \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\xi_0}{B} + \frac{r_0}{B} \right) \right] + k_n^\eta \quad (3.87)$$

3.2.4. Inter-región medio poroso-pared.

En esta región los promedios se tomarán para posiciones del centroide ξ_0 , limitadas por

$$-L_\omega - r_0 < \xi_0 \leq -L_\omega + r_0 \quad (3.88)$$

La velocidad promedio se obtiene de la ecuación. (3.15), que se expresa como

$$\langle v_\beta \rangle_{\omega W}^\beta = \frac{1}{n_p \ell_\beta + f_\beta \ell} [n_p \ell_\beta \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta + f_\beta \ell v_z^{\omega W}] \quad (3.89)$$

De igual forma

$$\langle v_\beta \rangle_{\omega W} = \frac{1}{2r_0} [n_p \ell_\beta \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta + f_\beta \ell v_z^{\omega W}] \quad -L_\omega - r_0 < \xi_0 \leq -L_\omega + r_0 \quad (3.90)$$

En donde $\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta$ está dada por la ecuación (3.60) y n_p es el número de celdas unitarias de medio poroso contenidas por la sección; se obtiene de

$$\frac{\xi_0 + L_\omega + r_0}{\ell} = n_p + f \quad (3.91)$$

La fracción f_β se calcula usando la fracción f con el uso de la relación

$$f_\beta = \begin{cases} f, & f \leq \varepsilon_{\beta\omega} \\ \varepsilon_{\beta\omega}, & f > \varepsilon_{\beta\omega} \end{cases} \quad (3.92)$$

Finalmente $v_z^{\omega W}$ se obtiene

$$v_z^{\omega W} = \frac{1}{f_\beta \ell} \int_{-b}^{f_\beta \ell - b} v_z^\omega dy_\omega \quad (3.93)$$

$$v_z^{\omega W} = \int_{-b}^{f_\beta \ell - b} v_z^\omega dy_\omega = \frac{v_{z,max}^\omega}{3} \left(\frac{f_\beta \ell}{b} \right) \left[3 - \left(\frac{f_\beta \ell}{b} \right) + 3k_n^\omega \right] \quad (3.94)$$

3.2.5. Inter-región fluido homogéneo pared.

En esta región los promedios se tomarán para posiciones del centroide ξ_0 , limitadas por

$$2B - r_0 \leq \xi_0 < 2B + r_0$$

La velocidad promedio toma la forma

$$\langle v_\beta \rangle_{\eta W}^\beta = \frac{1}{V_{\beta\eta}} \int_{V_{\beta\eta}} v_z dV = \frac{1}{B - y_\eta} \int_{y_\eta}^B v_z^\eta dy_\eta \quad (3.95)$$

En donde

$$y_\eta = \xi_0 - r_0 - B$$

Por ello, la ecuación (3.95) toma la forma

$$\frac{\langle v_\beta \rangle_{\eta W}^\beta}{v_{z,maz}^\eta} = \frac{1}{2B + r_0 - \xi_0} \int_{y_\eta}^B \left[1 - \left(\frac{y_\eta}{B} \right)^2 \right] dy_\eta$$

$$\frac{\langle v_\beta \rangle_{\eta W}^\beta}{v_{z,maz}^\eta} = \frac{B}{2B + r_0 - \xi_0} \int_{\frac{y_\eta}{B}}^1 [1 - (\varsigma - 1)^2] d\varsigma$$

Y resulta la siguiente ecuación adimensional

$$\frac{\langle v_\beta \rangle_{\eta W}^\beta}{v_{z,maz}^\eta} = \frac{B}{2B + r_0 - \xi_0} \left[\frac{2}{3} - \frac{y_\eta}{B} + \frac{1}{3} \left(\frac{y_\eta}{B} \right)^3 \left(1 - \frac{y_\eta}{B} \right) \right] \quad 2B - r_0 \leq \xi_0 < 2B + r_0 \quad (3.96)$$

Resumen de las ecuaciones de acuerdo a cada sistema

Ecuaciones para los poros

$$\begin{array}{lll} \text{canal en } & \eta & v_z^\eta = v_{z,max}^\eta \left(1 - \left(\frac{y_\eta}{B} \right)^2 \right) \quad -B < y_\eta < +B \\ \text{canal en } & \omega & v_z^\omega = v_{z,max}^\omega \left(1 - \left(\frac{y_\omega}{b} \right)^2 \right) \quad -b < y_\omega < +b \end{array}$$

Región medio poroso-medio poroso

$$\frac{\langle v_z \rangle_\omega}{v_{z,max}^\eta} = \left(\frac{2}{3} \right) \left(\frac{b}{B} \right)^2 \varepsilon_{\beta\omega} \quad -L_\omega + r_0 < \xi_0 < -r_0$$

$$\frac{\langle v_z \rangle_\eta}{v_{z,max}^\eta} = \left(\frac{2}{3} \right) \varepsilon_{\beta\eta} \quad r_0 < \xi_0 < L_\eta - r_0$$

$$\langle v_\beta \rangle_{\eta\omega}^\beta = \frac{1}{2r_0} [n_{p\omega} \ell_{\beta\omega} \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta + f_{\beta\omega} \ell v_z^\omega + n_p \ell_{\beta\eta} \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta + f_{\beta\eta} \ell v_z^\eta] \quad r_0 \leq \xi_0 \leq -r_0$$

Región medio poroso-fluido

$$\frac{\langle v_z \rangle_\omega}{v_{z,max}^\eta} = \left(\frac{2}{3} \right) \left(\frac{\varepsilon_{\beta\omega}}{2N} \right)^2 \varepsilon_{\beta\omega} \quad -L_\omega + r_0 < \xi_0 < -r_0$$

$$\frac{\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{v_{z,max}^\eta} = \left[1 - \left(\frac{\xi_0}{B} - 1 \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{r_0}{B} \right)^2 \right] \quad \text{para } 2B - r_0 \leq \xi_0 \leq r_0$$

$$\langle v_\beta \rangle_{\eta\omega}^\beta = \frac{1}{2r_0} [n_p \ell_\beta \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta + f_\beta \ell v_z^\omega + (\xi_0 + r_0) v_z^\eta] \quad -r_0 \leq \xi_0 \leq r_0$$

$$\langle v_\beta \rangle_{\omega W} = \frac{1}{2r_0} [n_{p\omega} \ell_{\beta\omega} \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta + f_{\beta\omega} \ell_\omega v_z^{\omega W}] \quad -L_\omega - r_0 < \xi_0 \leq -L_\omega + r_0$$

3.3. Resultados del Sistema resuelto por el método analítico para dos medios porosos

En esta sección se muestran las gráficas de las ecuaciones desarrolladas en este Capítulo para un caso específico donde se tomó un sistema formado por dos estratos porosos, ω y η uno con una porosidad de 0.3 y otro de 0.9, respectivamente.

Por consiguiente al tener las ecuaciones del comportamiento en cada una de las regiones del sistema se realiza un programa para graficar el comportamiento del transporte de cantidad de movimiento. Adicionalmente a esto, se muestra que, en la forma en que se hace el estudio, que consiste en tomar una región de promediado que barre todo el sistema y nos permite tener información de dos regiones a la vez y así observar lo que para en las inter-regiones. De esta manera podemos observar el comportamiento de la velocidad en las inter-región medio poroso-pared y medio poroso-medio poroso.

$$\frac{\langle v_z \rangle_\eta}{v_{z,max}^\eta} = \left(\frac{2}{3} \right) \varepsilon_{\beta\eta} \quad r_0 < \xi_0 < L_\eta - r_0$$

$$\frac{\langle v_z \rangle_\omega}{v_{z,max}^\omega} = \left(\frac{2}{3} \right) \left(\frac{b}{B} \right)^2 \varepsilon_{\beta\omega} \quad -L_\omega + r_0 < \xi_0 < -r_0$$

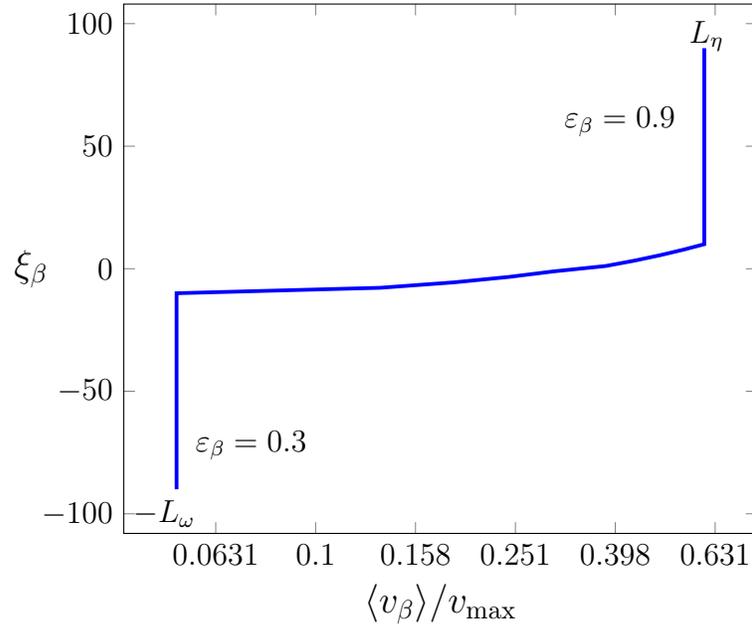


Figura 3.6. Perfil de velocidad en todo el sistema que va desde $-100r_0$ a $100r_0$.

En la Figura 3.6 se muestra el perfil de velocidad en el sistema formado por dos medios porosos donde se puede observar los dos medios porosos además de la inter-región. Para notar el cambio gradual en la inter-región en esta gráfica se redujeron los puntos tomados.

$$\langle v_\beta \rangle_{\eta\omega}^\beta = \frac{1}{2r_0} [n_{p\omega} \ell_{\beta\omega} \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta + f_{\beta\omega} \ell v_z^\omega + n_{p\eta} \ell_{\beta\eta} \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta + f_{\beta\eta} \ell v_z^\eta] \quad -r_0 \leq \xi_0 \leq r_0$$

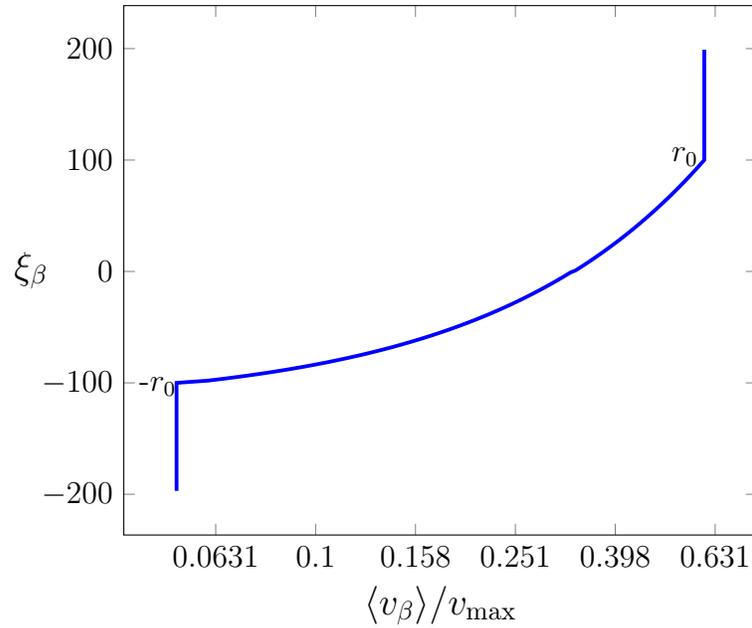


Figura 3.7. Perfil de velocidad en la inter-región $\omega - \eta$.

En la Figura 3.7 se muestra el perfil de la velocidad en la inter-región entre los medios porosos ω y η , además se puede observar que fuera de $-r_0 \leq \xi_\beta \leq r_0$ ya no contiene información de la inter-región y se observa el perfil del seno de cada medio poroso.

Este resultado muestra por que es importante mantener la corrección de Brinkman, además de obtener de aquí, ecuaciones que permiten obtener los coeficientes de permeabilidad y porosidad necesarios en el desarrollo de condiciones de salto. Además de que nos muestra de una manera sencilla el comportamiento de la velocidad resolviendo el problema de forma analítica. Es por ello que se utilizará en el tratamiento para desarrollar las condiciones de salto en el Capítulo 4.

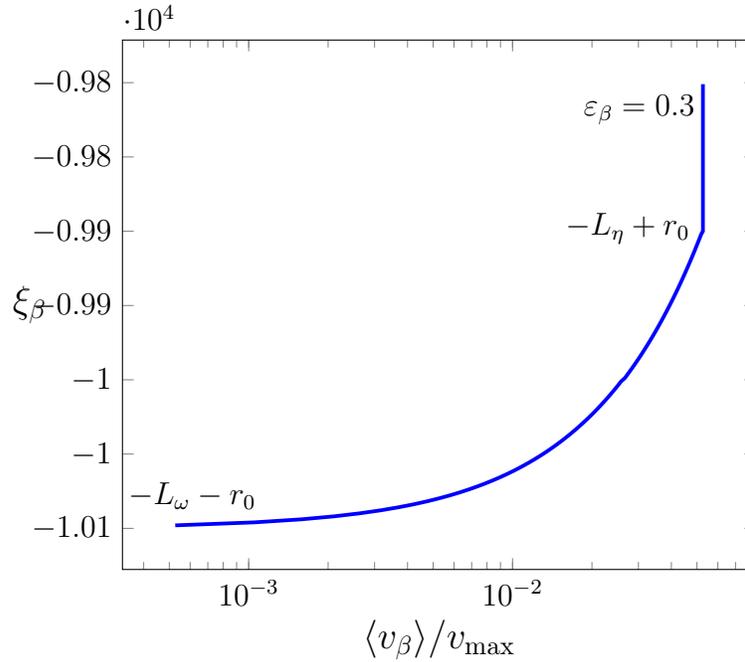


Figura 3.8. Perfil de velocidad en el medio poroso-pared.

En la figura 3.8 se muestra el comportamiento de la relación velocidad promedio en función de la velocidad max calculada a partir de la siguiente ecuación

$$\langle v_\beta \rangle_{\omega W} = \frac{1}{2r_0} [n_p \ell_\beta \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta + f_\beta \ell v_z^{\omega W}] \quad -L_\omega - r_0 < \xi_0 \leq -L_\omega + r_0$$

Respecto a la región promediante, se observa el perfil exponencial que tiene que ver con la capa de Brinkman y a partir de donde la región promediante ya no tiene información de la pared se ve el perfil del medio poroso.

3.4. Resultados del Sistema resuelto por el método analítico para un medio poroso y un fluido

Teniendo las ecuaciones del comportamiento en cada una de las regiones del sistema se realiza un programa para graficar el comportamiento del transporte de cantidad de movimiento. Adicionalmente a esto, se muestra que, en la forma en

que se hace el estudio, que consiste en tomar una región de promediado que barre todo el sistema y nos permite tener información de dos regiones a la vez y así observar lo que pasa en las inter-regiones. De esta manera podemos observar el comportamiento de la velocidad en las inter-regiones medio poroso-pared, medio poroso-fluido y fluido-pared.

$$\frac{\langle v_z \rangle_\omega}{v_{z,max}^\eta} = \left(\frac{2}{3} + k_n^\omega \right) \left(\frac{\varepsilon_{\beta\omega}}{2N} \right)^2 \varepsilon_{\beta\omega} \quad -L_\omega + r_0 < \xi_0 < -r_0$$

$$\frac{\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{v_{z,max}^\eta} = \left[1 - \left(\frac{\xi_0}{B} - 1 \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{r_0}{B} \right)^2 + k_n^\eta \right] \quad \text{para} \quad 2B - r_0 \leq \xi_0 \leq r_0$$

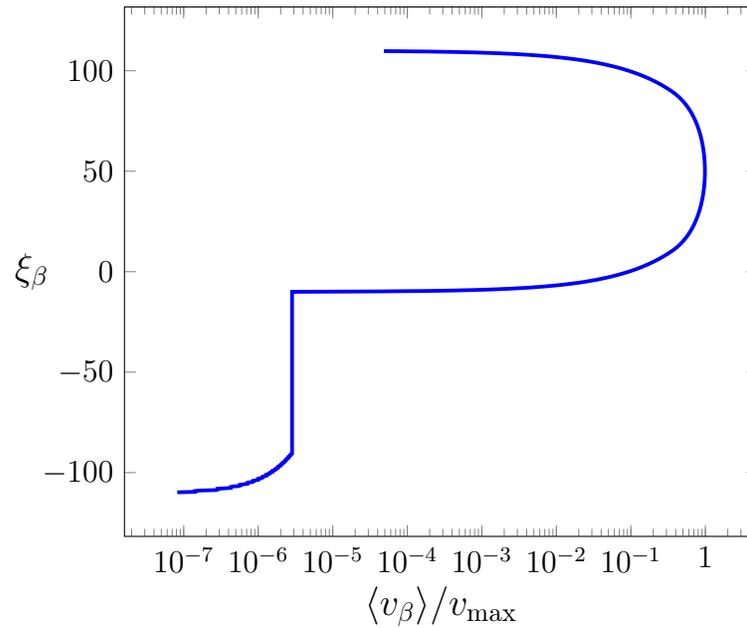


Figura 3.9. Perfil de velocidad para el sistema completo.

En Figura 3.9 se muestra el perfil de la velocidad en todo el sistema de estudio medio poroso-fluido.

Es notorio que la contribución de Brinkman varía de acuerdo al cambio de la fracción volumétrica desde que existe un medio poroso hasta que la fracción

volumetrica tienda a uno sin llegar a ser un fluido.

$$\langle v_\beta \rangle_{\omega W} = \frac{1}{2r_0} [n_p \ell_\beta \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta + f_\beta \ell v_z^{\omega W}] \quad -L_\omega - r_0 < \xi_0 \leq -L_\omega + r_0$$

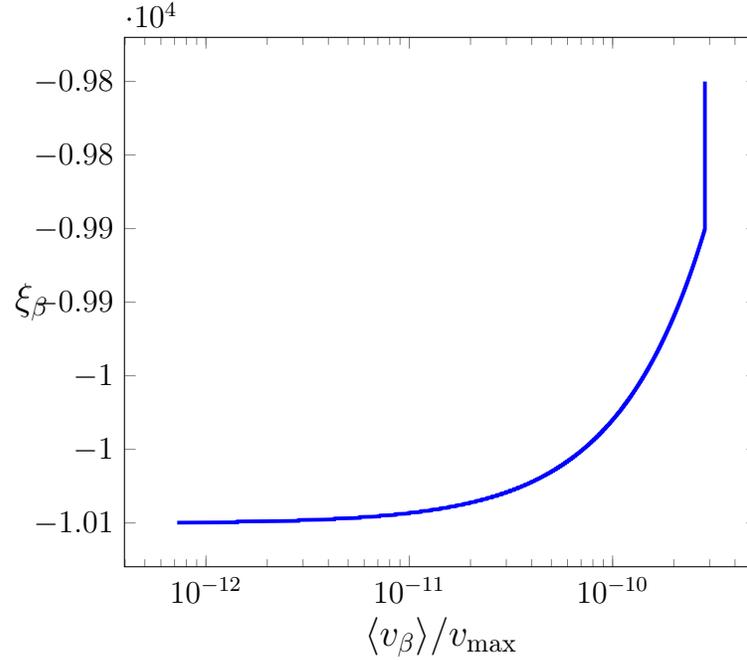


Figura 3.10. Perfil de velocidad para el medio poroso-pared.

En la Figura 3.10 se muestra el comportamiento de la relación velocidad promedio en función de la velocidad max calculada a partir de la ec. (3.89) respecto a la región promediante. Se observa un comportamiento exponencial que tiene que ver con la capa de Brinkman y a partir de donde la región promediante ya no tiene información de la pared se ve el comportamiento del medio poroso. Esto no puede verse en un estudio donde se desprecia la corrección mencionada.

$$\langle v_\beta \rangle_{\eta\omega}^\beta = \frac{1}{2r_0} [n_p \ell_\beta \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta + f_\beta \ell v_z^\omega + (\xi_0 + r_0) v_z^\eta] \quad -r_0 \leq \xi_0 \leq r_0$$

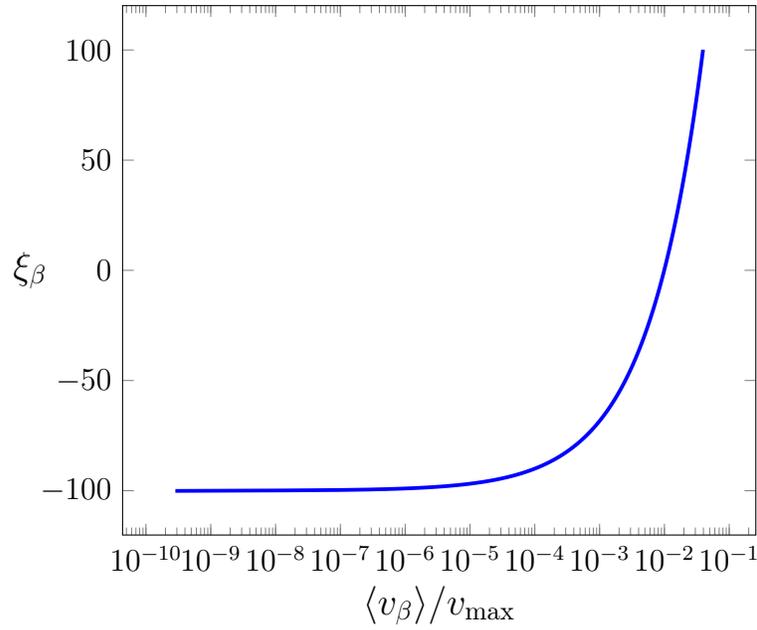


Figura 3.11. Perfil de velocidad para el medio poroso-fluido.

En la Figura 3.11 se muestra el comportamiento de la relación velocidad promedio en función de la velocidad máxima calculada a partir de la ec. (3.80) respecto a la región promediante. Se observa un comportamiento creciente donde cambia suavemente desde la región de medio poroso al fluido, debido al método se puede observar el cambio en la inter-región.

$$\frac{\langle v_\beta \rangle_{\eta W}^\beta}{v_{z, maz}^\eta} = \frac{B}{2B + r_0 - \xi_0} \left[\frac{2}{3} - \frac{y_\eta}{B} + \frac{1}{3} \left(\frac{y_\eta}{B} \right)^3 + k_n^\eta \left(1 - \frac{y_\eta}{B} \right) \right] \quad 2B - r_0 \leq \xi_0 < 2B + r_0$$

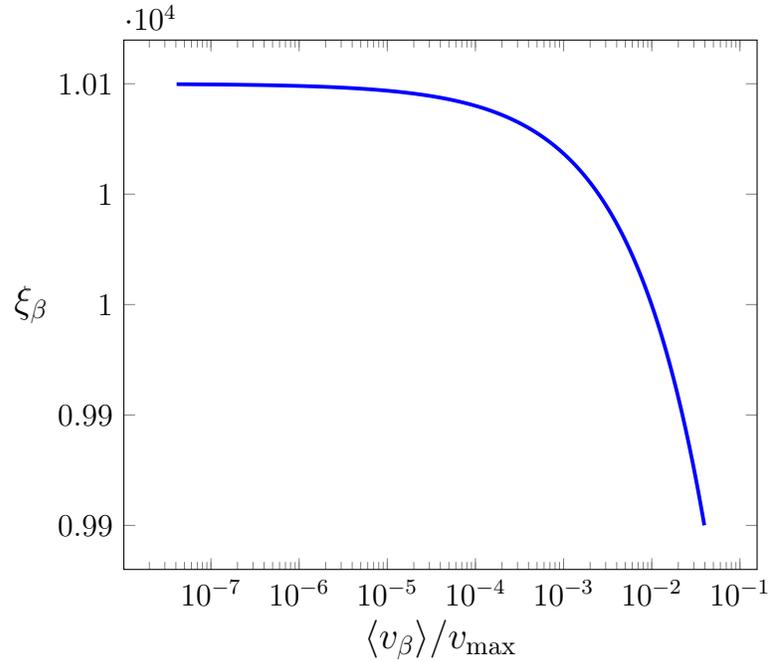


Figura 3.12. Perfil de velocidad para el fluido homogéneo-pared.

En la Figura 3.12 se muestra la relación velocidad promedio en función de la velocidad máxima calculada a partir de la ec. (3.96) respecto a la región promediante. Se observa un comportamiento exponencial que tiene que ver con la capa de Brinkman y a partir de donde la región promediante ya no tiene información de la pared es notorio el perfil del fluido. Esto no puede verse en un estudio donde se desprecia la corrección mencionada.

Capítulo 4

Determinación de condiciones de salto para un sistema estratificado

En este capítulo se desarrolla un modelo matemático mediante un enfoque distinto al expuesto en el capítulo anterior, donde se obtiene un modelo que se resuelve analíticamente para demostrar la importancia de la corrección de Brinkman en la inter-región.

Se tratan las ecuaciones puntuales y se aplica la técnica del promedio volumétrico para obtener el modelo de uno y dos dominios. Con esto se pretende obtener las condiciones de salto, siguiendo el método de Valdés-Parada *y col.* (2013).

Para este tipo de sistemas se desarrolla primeramente el modelo de un solo dominio (one domain approach) ODA que es válido tanto en las regiones homogéneas como en la inter-región, mostradas en la Figura 4.1. El análisis comienza con el planteamiento del problema de transporte de cantidad de movimiento a la escala del continuo. En este caso las ecuaciones gobernantes del movimiento del fluido β a través de la matriz porosa de sólido σ son las de Stokes (4.5) y la de continuidad (4.6) para un fluido incompresible:

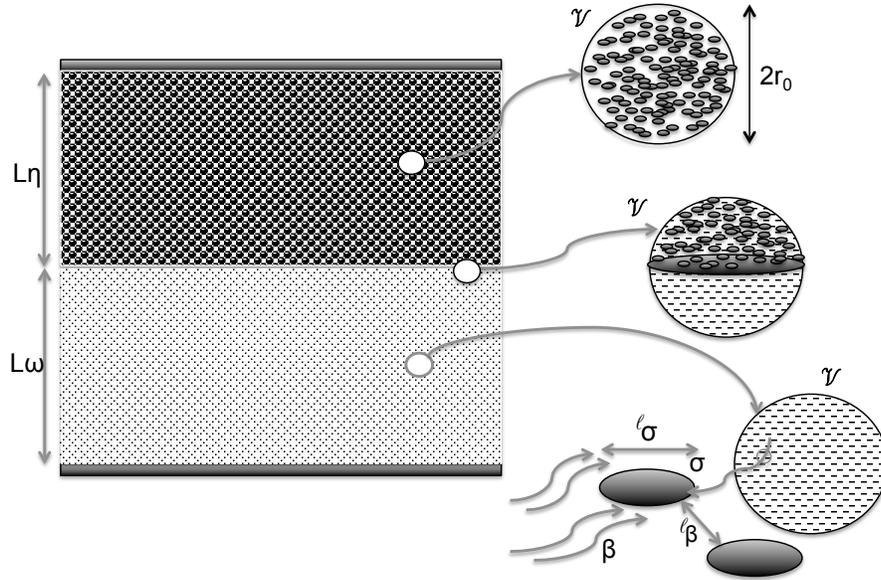


Figura 4.1. Sistema con dos medios porosos

4.1. Promedio volumétrico

Para comenzar con el análisis se define una región de promediado (V) de volumen V como se muestra en la Figura 4.1 la cual puede estar localizada en cualquier parte del sistema y se define como sigue

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_\beta + \mathcal{V}_\sigma \quad (4.1)$$

donde \mathcal{V}_i denota el volumen ocupado por la fase i en V . Para promediar las ecuaciones que gobiernan el transporte es necesario definir los operadores de promediado superficial e intrínseco para una propiedad ψ_β definida en la fase β .

$$\langle \psi_\beta \rangle = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{V}_\beta} \psi_\beta dV \quad (4.2)$$

$$\langle \psi_\beta \rangle^\beta = \frac{1}{V_\beta} \int_{\mathcal{V}_\beta} \psi_\beta dV \quad (4.3)$$

estos operadores están relacionados por la fracción volumétrica de fluido.

$$\psi_\beta = \langle \psi_\beta \rangle^\beta \varepsilon_\beta \quad (4.4)$$

debido a las integrales de las definiciones.

Además de esto se debe definir el concepto de región homogénea como una porción del sistema que no es influenciada por sus fronteras y que sus propiedades no dependen de la posición. Por otro lado, se maneja el concepto de inter-región a la porción de volumen que divide dos regiones homogéneas y por último la superficie divisoria que divide las regiones homogéneas.

4.2. Obtención de las ecuaciones para el modelo de uno y dos dominios

Como se mencionó anteriormente el desarrollo de uno y dos dominios comienza con el promediado de las ecuaciones de Stokes (4.5) y de continuidad (4.6) así como de la condición de frontera ecuación (4.7).

$$0 = \underbrace{-\nabla p_\beta}_{\text{término superficial normal}} - \underbrace{\rho_\beta \mathbf{g}}_{\text{término volumétrico}} + \underbrace{\mu_\beta \nabla^2 \mathbf{v}_\beta}_{\text{término superficial viscoso}} \quad \text{en la fase } - \beta \quad (4.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_\beta = 0 \quad \text{en la fase } - \beta \quad (4.6)$$

$$\mathbf{v}_\beta = 0 \quad \text{en la interfase } - \beta \sigma \quad (4.7)$$

se promedian la ecuaciones (4.5) y (4.6), utilizando las ecuaciones (4.2), (4.8) y (4.4).

$$\langle \nabla \psi_\beta \rangle = \nabla \langle \psi_\beta \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \psi_\beta dA \quad (4.8)$$

Se realiza primero el promediado de la ecuación de continuidad en su forma de promedio superficial y se tiene

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{v}_\beta \rangle = 0 \quad (4.9)$$

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{v}_\beta \rangle = \nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \mathbf{v}_\beta dA = 0 \quad (4.10)$$

se utiliza la condición de frontera de la ecuación (4.7) y se obtiene que

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle = 0 \quad (4.11)$$

ahora se cambia el promedio superficial por el promedio intrínseco de acuerdo a la ecuación (4.4).

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle = -\varepsilon_\beta^{-1} \nabla \varepsilon_\beta \cdot \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \quad (4.12)$$

de la misma forma se realiza el promediado para la ecuación de Stokes término a término.

$$\langle \nabla p_\beta \rangle = \varepsilon_\beta \nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \langle p_\beta \rangle^\beta \nabla \varepsilon_\beta + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} p_\beta dA \quad (4.13)$$

es necesario descomponer los valores puntuales de presión y velocidad de acuerdo a

$$p_\beta = \langle p_\beta \rangle^\beta + \tilde{p}_\beta \quad \mathbf{v}_\beta = \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \widetilde{\mathbf{v}}_\beta \quad (4.14)$$

y se obtiene

$$\langle \nabla p_\beta \rangle = \varepsilon_\beta \nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \langle p_\beta \rangle^\beta \nabla \varepsilon_\beta + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \langle p_\beta \rangle^\beta dA + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \tilde{p}_\beta dA \quad (4.15)$$

donde se aplica la siguiente definición

$$\frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \langle \psi_\beta \rangle^\beta dA = \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} dA \langle \psi_\beta \rangle^\beta = -(\nabla \varepsilon_\beta) \langle \psi_\beta \rangle^\beta \quad (4.16)$$

y se llega a que el promedio del gradiente de presión toma la forma

$$\langle \nabla p_\beta \rangle = \varepsilon_\beta \nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \tilde{p}_\beta dA \quad (4.17)$$

en este punto es necesario recordar que para dichas definiciones que se han aplicado existen restricciones de escala que se presentan en Whitaker (1999) y son descritas a continuación

$$\ell_\beta \ll r_0 \qquad r_0^2 \ll L^2 \quad (4.18)$$

además se puede ver que las variaciones de $\langle \psi_\beta \rangle^\beta$ son despreciables dentro del promedio

$$\langle \langle \psi_\beta \rangle^\beta \rangle \simeq \langle \psi_\beta \rangle^\beta \quad (4.19)$$

y en consecuencia el promedio de las desviaciones debe satisfacer que

$$\langle \tilde{\psi}_\beta \rangle \simeq 0 \quad (4.20)$$

Ahora se realiza el promediado del tercer término de la ecuación donde se repite el procedimiento que al gradiente de presión

$$\langle \nabla \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta \rangle = \nabla \cdot \langle \nabla \mathbf{v}_\beta \rangle - \nabla \varepsilon_\beta \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta dA \quad (4.21)$$

donde se tiene que

$$\langle \nabla \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta \rangle = \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle + \nabla \cdot \left[\frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \mathbf{v}_\beta dA \right] - \nabla \varepsilon_\beta \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta dA \quad (4.22)$$

y se aplica la condición de frontera de no deslizamiento descrita en la ecuación (4.7).

$$\langle \nabla \cdot \nabla \mathbf{v}_\beta \rangle = \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle - \nabla \varepsilon_\beta \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta dA \quad (4.23)$$

Finalmente juntando los términos se tiene la ecuación

$$0 = -\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \varepsilon_\beta \rho_\beta \mathbf{g} + \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \varepsilon^{-1} \mu_\beta \nabla \varepsilon_\beta \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \varepsilon^{-1} \mu_\beta \nabla^2 \varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (-\tilde{p}_\beta \mathbf{l} + \mu_\beta \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta) dA \quad (4.24)$$

donde se propone que

$$\frac{1}{V} \int_{A_{\beta\sigma}} \mathbf{n}_{\beta\sigma} \cdot (-\tilde{p}_\beta \mathbf{l} + \mu_\beta \nabla \tilde{\mathbf{v}}_\beta) dA = -\mu_\beta \mathbf{K}^{-1} \cdot \varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta \quad (4.25)$$

y se obtiene la ecuación que representa el promedio de la ecuación de Stokes

$$0 = -\nabla \langle p_\beta \rangle^\beta + \rho_\beta \mathbf{g} + \mu_\beta \nabla^2 \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta + \mu_\beta \mathbf{K}^{-1} \cdot \varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta - \varepsilon_\beta^{-1} \mu_\beta \nabla \cdot (\nabla \varepsilon_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \rangle^\beta) \quad (4.26)$$

Para cerrar el problema en este trabajo no se resuelve un problema de cerradura debido a que se tiene una solución analítica del problema descrito en el Capítulo 3. Es por ello que se tiene el perfil de la velocidad en todo el sistema y, bajo la siguiente suposición donde la gradiente de presión es constante, se puede obtener una expresión para la permeabilidad.

En este caso, se supone que el diferencial de presión es constante en todo el sistema en una sola dirección y se utiliza la ley de Darcy (4.27) de uno de los estratos de referencia.

$$\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta = -\frac{K_{\beta\omega}}{\mu_\beta \varepsilon_{\beta\omega}} \frac{d\langle p_\beta \rangle^\beta}{dx} \quad (4.27)$$

$$\frac{d\langle p_\beta \rangle^\beta}{dx} = \frac{d\langle p_\beta \rangle_\eta^\beta}{dx} = \frac{d\langle p_\beta \rangle_\omega^\beta}{dx} = -\frac{\mu_\beta \varepsilon_{\beta\omega}}{K_{\beta\omega}} \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta \quad (4.28)$$

se puede reescribir de la siguiente forma

$$K_{\beta\omega} = -\frac{\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta \mu_\beta \varepsilon_{\beta\omega}}{A} \quad \text{donde} \quad \frac{d\langle p_\beta \rangle^\beta}{dx} = cte = A \quad (4.29)$$

De acuerdo con la ecuación (4.29) podemos obtener los perfiles de la permeabilidad de acuerdo con la velocidad promedio obtenidas en el Capítulo 3. Además de obtener las ecuaciones para el seno de cada medio poroso y la inter-región entre medios porosos, en este trabajo es posible tener las ecuaciones de la inter-región medio poroso-pared.

$$K_{\beta\omega} = \frac{\varepsilon_{\beta\omega}^3 \ell^2}{12} \quad \text{en la región} \quad \omega \quad (4.30)$$

$$K_{\beta\eta} = \frac{\varepsilon_{\beta\eta}^3 \ell^2}{12} \quad \text{en la región} \quad \eta \quad (4.31)$$

Para el caso de la inter-región, no es posible usar la ley de Darcy debido a que ésta, sólo se aplica en el seno de una región.

de igual forma para la permeabilidad se pueden obtener los perfiles en cada región.

$$\varepsilon_\beta = \begin{cases} \varepsilon_{\beta\eta} & \text{en } \eta \\ \varepsilon_\beta = a \frac{y}{r_0} + b & \text{en inter-región} \\ \varepsilon_{\beta\omega} & \text{en } \omega \end{cases} \quad (4.32)$$

ODA

Resuelto el problema de las desviaciones se regresa al problema original como se tiene en la ecuación (4.26), pero con la expresión de permeabilidad desarrollada para la componente x. Se llega a la ecuación (4.33) que representa el enfoque de un dominio para la cantidad de movimiento en todo el sistema.

$$0 = \frac{d^2 \langle v_\beta \rangle^\beta}{dy^2} - \varepsilon_\beta^{-1} \frac{d\varepsilon_\beta}{dy} \frac{d \langle v_\beta \rangle^\beta}{dy} + (\varepsilon_\beta^{-1} \frac{d^2 \varepsilon_\beta}{dy^2} - \varepsilon_\beta K^{-1}) \langle v_\beta \rangle^\beta + \varepsilon_{\beta\omega} K_{\beta\omega}^{-1} \langle v_\beta \rangle_{\omega,\infty}^\beta \quad (4.33)$$

Esta ecuación es válida para todo el sistema sólo bajo las supocisiones debido a que tiene coeficientes variables y toma el nombre de modelo de un solo dominio, también contiene un coeficiente constante de la permeabilidad debido a que se tomó como referencia el estrato ω para el diferencial de presión.

Ahora, para obtener los coeficientes efectivos en la inter-región entre medios porosos y medio poroso-pared es necesario el uso de los resultados en el Capítulo 3 y la ecuación (4.33) ya que esta es valida en todo el sistema.

A continuación se presentan las expresiones de la velocidad y la porosidad en la inter-región.

$$\langle v_\beta \rangle_{\eta\omega}^\beta = \frac{1}{2r_0} [n_{p\omega} \ell_{\beta\omega} \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta + f_{\beta\omega} \ell v_z^\omega + n_{p\eta} \ell_{\beta\eta} \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta + f_{\beta\eta} \ell v_z^\eta] \quad -r_0 \leq \xi_0 \leq r_0$$

$$\varepsilon_\beta = a \frac{y}{r_0} + b \quad \text{en la inter-región}$$

con estas expresiones es posible obtener el perfil de la permeabilidad en la inter-región necesaria para obtener los coeficientes de salto.

$$\varepsilon_\beta K^{-1} \langle v_\beta \rangle_{\omega\eta}^\beta = \frac{d^2 \langle v_\beta \rangle_{\omega\eta}^\beta}{dy^2} + \varepsilon_\beta^{-1} \frac{d\varepsilon_\beta}{dy} \frac{d \langle v_\beta \rangle_{\omega\eta}^\beta}{dy} + \varepsilon_{\beta\omega} K_{\beta\omega}^{-1} \langle v_\beta \rangle_{\omega,\infty}^\beta \quad \text{en la inter-región} \quad (4.34)$$

TDA

A continuación, se desarrolla el modelo de transporte de cantidad de movimiento de dos dominios (two domain approach) TDA. De la ecuación (4.33) se llega a las ecuaciones (4.35) y (4.36) donde se toman constantes los parámetros efectivos ε y K en cada estrato y por lo tanto desaparecen algunos términos.

$$0 = \frac{d^2 \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy^2} - \varepsilon_{\beta\eta} K_{\beta\eta}^{-1} \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta + \varepsilon_{\beta\omega} K_{\beta\omega}^{-1} \langle v_\beta \rangle_{\omega,\infty}^\beta \quad \text{en } \eta \quad (4.35)$$

$$0 = \frac{d^2 \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy^2} - \varepsilon_{\beta\omega} K_{\beta\omega}^{-1} (\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta - \langle v_\beta \rangle_{\omega,\infty}^\beta) \quad \text{en } \omega \quad (4.36)$$

Las ecuaciones (4.35) y (4.36) son más sencillas que el ODA ya que sólo son aplicables en el seno de cada estrato y requieren condiciones de frontera que se obtendrán mas adelante.

4.3. Problema de cerradura macroscópico

Lo que se busca en este trabajo es que el modelo de dos dominios sea lo más parecido al modelo de un dominio. Es por ello que se realiza una diferencia entre modelos como se muestra en la ecuación (4.37) y posteriormente integrar e igualar con cero. De esta manera, se asegura que los coeficientes que se obtienen de este problema, al ser aplicados como condiciones de frontera del modelo de dos dominios será comparable al de un dominio con un error despreciable.

$$\widehat{v}_\lambda = \langle v_\beta \rangle^\beta - \langle v_\beta \rangle_\lambda^\beta \quad \text{para } \lambda = \eta, \omega \quad (4.37)$$

al realizar la diferencia se obtienen las ecuaciones (4.38) y (4.39).

$$0 = \frac{d^2 \hat{v}_\omega}{dy^2} - \varepsilon_\beta^{-1} \frac{d\varepsilon_\beta}{dy} \frac{d\hat{v}_\omega}{dy} - \underbrace{\varepsilon_\beta^{-1} \frac{d\varepsilon_\beta}{dy} \frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy}}_{\text{fuente}} \Big|_{y_0} + (\varepsilon_\beta^{-1} \frac{d^2 \varepsilon_\beta}{dy^2} - \varepsilon_\beta K_\beta^{-1}) \hat{v}_\omega + \quad (4.38)$$

$$\underbrace{\left(\varepsilon_\beta^{-1} \frac{d^2 \varepsilon_\beta}{dy^2} - \varepsilon_\beta K_\beta^{-1} + \varepsilon_{\beta\omega} K_{\beta\omega}^{-1} \right)}_{\text{fuente}} \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta \Big|_{y_0} \text{ para la región } \omega$$

$$0 = \frac{d^2 \hat{v}_\eta}{dy^2} - \varepsilon_\beta^{-1} \frac{d\varepsilon_\beta}{dy} \frac{d\hat{v}_\eta}{dy} - \underbrace{\varepsilon_\beta^{-1} \frac{d\varepsilon_\beta}{dy} \frac{d\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy}}_{\text{fuente}} \Big|_{y_0} + (\varepsilon_\beta^{-1} \frac{d^2 \varepsilon_\beta}{dy^2} - \varepsilon_\beta K_\beta^{-1}) \hat{v}_\eta + \quad (4.39)$$

$$\underbrace{\left(\varepsilon_\beta^{-1} \frac{d^2 \varepsilon_\beta}{dy^2} - \varepsilon_\beta K_\beta^{-1} + \varepsilon_{\beta\eta} K_{\beta\eta}^{-1} \right)}_{\text{fuente}} \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta \Big|_{y_0} \text{ para la región } \eta$$

Las condiciones de frontera para el problema de las desviaciones se muestran a continuación y se dice que las desviaciones macroscópicas de la velocidad son igual con cero debido a que estas son resultado de la diferencia del TDA y ODA y justamente en el punto y_η y y_ω los valores de la velocidad son iguales, por lo tanto, la diferencia de la velocidad es igual con cero y de igual forma sus desviaciones así como la derivada de las desviaciones.

$$\text{en } y_\omega \quad \hat{v}_\omega = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d\hat{v}_\omega}{dy} = 0 \quad (4.40)$$

$$\text{en } y_\eta \quad \hat{v}_\eta = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d\hat{v}_\eta}{dy} = 0 \quad (4.41)$$

y para $y_0 = 0$ se supone que la velocidad y su derivada por la izquierda es la

misma que por la derecha

$$\text{en } y = 0 \quad \langle v_\beta \rangle^\beta|_{y_0^-} = \langle v_\beta \rangle^\beta|_{y_0^+} \quad \text{y} \quad \mu_\beta \frac{d\langle v_\beta \rangle^\beta}{dy}|_{y_0^-} = \mu_\beta \frac{d\langle v_\beta \rangle^\beta}{dy}|_{y_0^+} \quad (4.42)$$

$$\underbrace{\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta|_{y_0^-}}_{\text{fuente}} + \hat{v}_\omega = \underbrace{\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta|_{y_0^+}}_{\text{fuente}} + \hat{v}_\eta \quad \text{y} \quad \underbrace{\frac{d\langle v \rangle_\eta^\beta}{dy}|_{y_0}}_{\text{fuente}} + \frac{d\hat{v}_\eta}{dy} = \underbrace{\frac{d\langle v \rangle_\omega^\beta}{dy}|_{y_0}}_{\text{fuente}} + \frac{d\hat{v}_\omega}{dy} \quad (4.43)$$

Se puede demostrar con una serie de Taylor que:

$$\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta|_y = \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta|_{y_0} + y_0 \frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy}|_{y_0} + \frac{1}{2} y_0^2 \frac{d^2\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy^2}|_{y_0} + \dots \quad (4.44)$$

$$\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta = \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta|_{y_0} \quad (4.45)$$

$$\frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy}|_y = \frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy}|_{y_0} + (y - y_0) \frac{d^2\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy^2}|_{y_0} + \frac{1}{2} (y - y_0)^2 \frac{d^3\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy^3}|_{y_0} + \dots \quad (4.46)$$

$$\frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy} = \frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy}|_{y_0} \quad (4.47)$$

Sólo bajo la restricción de escala $\frac{y_\omega}{L_\omega} \ll 1$ y $\frac{y_\eta}{L_\eta} \ll 1$

Se propone la solución del problema definido en las ecuaciones (4.38) y (4.39) de las desviaciones con base en el principio de superposición.

$$\hat{v}_\omega = S_{\omega\eta} \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta|_{y_0} + S_{\omega\omega} \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta|_{y_0} + b_{\omega\eta} \frac{d\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy}|_{y_0} + b_{\omega\omega} \frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy}|_{y_0} \quad (4.48)$$

$$\hat{v}_\eta = S_{\eta\eta} \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta |_{y_0} + S_{\eta\omega} \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta |_{y_0} + b_{\eta\eta} \frac{d \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy} |_{y_0} + b_{\eta\omega} \frac{d \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy} |_{y_0} \quad (4.49)$$

4.4. Procedimiento para la determinación de y_0

Para obtener las variables de cerradura macroscópicas se sustituyen las soluciones (4.48) y (4.49) en las ecuaciones (4.38) y (4.39) y se resuelve el sistema de ecuaciones por el método de diferencias finitas como se muestra en el Apéndice A. Debido a que se tiene 2 condiciones de frontera en cada extremo (4.40), (4.41) y sólo son necesarias una de cada lado, se parte de esta condición extra para conocer el valor de y_0 .

Se realizan las corridas y se varía la posición de la superficie divisoria, se realiza la diferencia entre los valores del área bajo la curva y se cambia de posición de y_0 hasta obtener un error absoluto menor a 1×10^{-3} .

4.5. Primera condición de salto

Ahora para obtener la primera condición de salto se evalúa la primer restricción de las desviaciones dadas en la ecuación (4.50).

En el Apéndice A se desarrolla la solución por diferencias finitas para las variables de cerradura macroscópicas, dadas por las ecuaciones anteriores.

Una vez obtenida la solución anterior, se considera que la ecuación (4.20) dada anteriormente debe cumplirse.

$$\langle \hat{v}_\beta \rangle = 0 \quad (4.50)$$

y aplicando la definición de promedio se tiene:

$$\frac{1}{y_\eta + y_\omega} \int_{-y_\omega}^{y_\eta} \hat{v} dy = 0 \quad (4.51)$$

como se tienen 2 regiones, la integral se subdivide como se expresa en la ecuación

$$(4.52) \quad \int_{-y_\omega}^{y_0} \hat{v}_\omega dy + \int_{y_\omega}^{y_\eta} \hat{v}_\eta dy = 0 \quad (4.52)$$

cuyo desarrollo posterior permite obtener la ecuación (4.53)

$$\begin{aligned} & \left(\int_{-y_\omega}^{y_0} S_{\omega\eta} dy + \int_{y_0}^{y_\eta} S_{\eta\eta} dy \right) \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta |_{y_0} + \left(\int_{-y_\omega}^{y_0} S_{\omega\omega} dy + \int_{y_0}^{y_\eta} S_{\eta\omega} dy \right) \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta |_{y_0} + \\ & \left(\int_{-y_\omega}^{y_0} b_{\omega\eta} dy + \int_{y_0}^{y_\eta} b_{\eta\eta} dy \right) \frac{d \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy} |_{y_0} + \left(\int_{-y_\omega}^{y_0} b_{\omega\omega} dy + \int_{y_0}^{y_\eta} b_{\eta\omega} dy \right) \frac{d \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy} |_{y_0} = 0 \end{aligned} \quad (4.53)$$

Que se puede escribir de una forma simplificada de la siguiente forma:

$$I_1 \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta |_{y_0} + I_2 \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta |_{y_0} + I_3 \frac{d \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy} |_{y_0} + I_4 \frac{d \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy} |_{y_0} = 0 \quad (4.54)$$

Se despeja uno de los términos y se renombran los parámetros para llegar a la condición de salto de la velocidad (4.55).

Condición de salto en la velocidad

$$\frac{d \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy} |_{y_0} - \Gamma \frac{d \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy} |_{y_0} = \Theta (\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta |_{y_0} - \Lambda \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta |_{y_0}) \quad (4.55)$$

Con los parámetros descritos a partir de las integrales de las variables de cerradura. Donde el término Θ nos muestra el coeficiente global de transferencia de cantidad de movimiento a partir de la información de las variables de cerradura del problema asociado.

$$\Gamma = -\frac{I_4}{I_3} \quad \Theta = -\frac{I_1}{I_3} \quad \Lambda = -\frac{I_2}{I_1} \quad (4.56)$$

Y se puede observar que la forma de la condición de salto es la misma a la ecuación (2.8) de la que se habló en el Capítulo 2. y que se muestra a continuación con sus respectivos coeficientes obtenidos de la misma manera.

$$\frac{d\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta|_{y_0}}{dy} - \frac{\alpha}{\sqrt{k_{\beta\omega}}} \alpha_{\eta\omega} \frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta|_{y_0}}{dy} = \frac{\alpha}{\sqrt{k_{\beta\omega}}} (\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta|_{y_0} - \varepsilon_{\beta\omega} \nu \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta|_{y_0})$$

$$\frac{\alpha}{\sqrt{K_{\beta\omega}}} = -\frac{I_1}{I_3} \quad \varepsilon_{\beta\omega} \nu = -\frac{I_2}{I_1} \quad \alpha_{\eta\omega} = -\frac{I_4}{I_1}$$

4.6. Segunda condición de salto

Para obtener la segunda condición de salto se integran las ecuaciones (4.38) y (4.39) para la ω y η respectivamente. Debido a que se busca que el TDA sea lo más parecida al ODA para ello primero se realizó la resta de estas y ahora se integra la diferencia igualada a cero para, de este modo, obtener una condición de salto que contenga esta información, cuyo desarrollo permite llegar a las ecuaciones (4.6) y (4.6).

$$0 = \frac{d\hat{v}_\omega}{dy} - \int_{-y_\omega}^{y_0} \frac{d\ln\varepsilon_\beta}{dy} \frac{d\hat{v}_\omega}{dy} dy - \ln \frac{\varepsilon_\beta|_{y_0}}{\varepsilon_{\beta\omega}} \frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta|_{y_0}}{dy} + \int_{-y_\omega}^{y_0} (\varepsilon_\beta^{-1} \frac{d^2\varepsilon_\beta}{dy^2} - \varepsilon_\beta K_\beta^{-1}) \hat{v}_\omega dy + \left(\int_{-y_\omega}^{y_0} (\varepsilon_\beta^{-1} \frac{d^2\varepsilon_\beta}{dy^2} - \varepsilon_\beta K_\beta^{-1}) dy + \varepsilon_{\beta\omega} K_{\beta\omega}^{-1} (y_0 - y_\omega) \right) \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta|_{y_0} \text{ para la región } \omega \quad (4.57)$$

$$0 = -\frac{d\hat{v}_\eta}{dy} - \int_{y_0}^{y_\eta} \frac{d\ln\varepsilon_\beta}{dy} \frac{d\hat{v}_\eta}{dy} dy + \ln \frac{\varepsilon_\beta|_{y_0}}{\varepsilon_{\beta\eta}} \frac{d\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta|_{y_0}}{dy} + \int_{y_0}^{y_\eta} (\varepsilon_\beta^{-1} \frac{d^2\varepsilon_\beta}{dy^2} - \varepsilon_\beta K_\beta^{-1}) \hat{v}_\eta dy + \int_{y_0}^{y_\eta} (\varepsilon_\beta^{-1} \frac{d^2\varepsilon_\beta}{dy^2} - \varepsilon_\beta K_\beta^{-1}) dy \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta \text{ para la región } \eta \quad (4.58)$$

Se agrupan las ecuaciones (4.6) y (4.6) en una sola y se reduce la ecuación usando condiciones a la frontera (4.40) y (4.41) para obtener la condición de salto.

$$\begin{aligned}
 0 = \int_{-y_\omega}^{y_\eta} \left(M_\beta - \frac{d \ln \varepsilon_\beta}{dy} \frac{d}{dy} \right) \hat{v}_\lambda dy - \left(1 + \ln \frac{\varepsilon_\beta(y_0)}{\varepsilon_{\beta\omega}} \right) \frac{d \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta |_{y_0}}{dy} + \quad (4.59) \\
 \left(1 + \ln \frac{\varepsilon_\beta(y_0)}{\varepsilon_{\beta\eta}} \right) \frac{d \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta |_{y_0}}{dy} + \left(\int_{-y_\omega}^{y_0} M_\beta dy + \varepsilon_{\beta\omega} K_{\beta\omega}^{-1}(y_0 + y_\omega) \right) \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta |_{y_0} + \\
 \left(\int_{y_0}^{y_\eta} M_\beta dy + \varepsilon_{\beta\eta} K_{\beta\eta}^{-1}(y_\eta - y_0) \right) \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta |_{y_0}
 \end{aligned}$$

Se sustituye la solución del problema de las desviaciones macroscópicas y se obtienen 4 ecuaciones que dependen de las variables de cerradura.

$$\begin{aligned}
 S_\omega = \int_{-y_\omega}^{y_0} \left(M_\beta - \frac{d \ln \varepsilon_\beta}{dy} \frac{d}{dy} \right) S_{\omega\omega} dy + \int_{y_0}^{y_\eta} \left(M_\beta - \frac{d \ln \varepsilon_\beta}{dy} \frac{d}{dy} \right) S_{\eta\omega} dy + \quad (4.60) \\
 \int_{-y_\omega}^{y_0} M_\beta dy + (y_0 + y_\omega) \varepsilon_{\beta\omega} K_{\beta\omega}^{-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_\eta = \int_{-y_\omega}^{y_0} \left(M_\beta - \frac{d \ln \varepsilon_\beta}{dy} \frac{d}{dy} \right) S_{\omega\eta} dy + \int_{y_0}^{y_\eta} \left(M_\beta - \frac{d \ln \varepsilon_\beta}{dy} \frac{d}{dy} \right) S_{\eta\eta} dy + \quad (4.61) \\
 \int_{y_0}^{y_\eta} M_\beta dy + (y_\eta - y_0) \varepsilon_{\beta\eta} K_{\beta\eta}^{-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_\eta = \int_{-y_\omega}^{y_0} \left(M_\beta - \frac{d \ln \varepsilon_\beta}{dy} \frac{d}{dy} \right) b_{\omega\eta} dy + \int_{y_0}^{y_\eta} \left(M_\beta - \frac{d \ln \varepsilon_\beta}{dy} \frac{d}{dy} \right) b_{\eta\eta} dy + 1 + \ln \frac{\varepsilon_\beta(y_0)}{\varepsilon_{\beta\eta}} \quad (4.62)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_\omega = \int_{-y_\omega}^{y_0} \left(M_\beta - \frac{d \ln \varepsilon_\beta}{dy} \frac{d}{dy} \right) b_{\omega\omega} dy + \int_{y_0}^{y_\eta} \left(M_\beta - \frac{d \ln \varepsilon_\beta}{dy} \frac{d}{dy} \right) b_{\eta\omega} dy - 1 - \ln \frac{\varepsilon_\beta(y_0)}{\varepsilon_{\beta\omega}} \quad (4.63)
 \end{aligned}$$

Se sustituye en la ecuación (4.59) y se obtiene la siguiente ecuación

$$S_\omega \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta|_{y_0} + S_\eta \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta|_{y_0} + b_\omega \frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta|_{y_0}}{dy} + b_\eta \frac{d\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta|_{y_0}}{dy} = 0 \quad (4.64)$$

$$\frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta|_{y_0}}{dy} + \frac{b_\eta}{b_\omega} \frac{d\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta|_{y_0}}{dy} = -\frac{S_\omega}{b_\omega} \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta|_{y_0} - \frac{S_\eta}{b_\omega} \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta|_{y_0} \quad (4.65)$$

Para fines comparativos se hace un reacomodo de los parámetros y se presenta la condición de la siguiente forma.

Condición de salto en el esfuerzo

$$\frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta|_{y_0}}{dy} - \Pi \frac{d\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta|_{y_0}}{dy} = \Psi (\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta|_{y_0} - \Omega \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta|_{y_0}) \quad (4.66)$$

$$\Pi = -\frac{b_\eta}{b_\omega} \quad \Psi = -\frac{S_\omega}{b_\omega} \quad \Omega = -\frac{S_\eta}{S_\omega} \quad (4.67)$$

donde el resultado también tiene la misma forma que la ecuación descrita en el Capítulo 2

$$\frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta|_{y_0}}{dy} - \omega \frac{d\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta|_{y_0}}{dy} = \frac{\alpha \varepsilon_{\beta\omega} \beta}{\sqrt{k_{\beta\omega}}} (\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta|_{y_0} - B_{\omega\eta} \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta|_{y_0})$$

En esta metodología se obtienen dos condiciones de salto, a diferencia de trabajos anteriores, donde se obtiene una de éstas y se supone la segunda condición de frontera.

Las ecuaciones (4.55) y (4.66) difieren de las desarrolladas anteriormente por Valdés-Parada *y col.* (2013) debido a que se tienen dos medios porosos. Si bien la estructura es equivalente, los coeficientes son distintos.

Capítulo 5

Resultados y discusión

5.1. Obtención de perfiles para permeabilidad y porosidad

En esta sección se presentan los resultados de los perfiles para la permeabilidad y la porosidad para un caso específico de estudio. En este se tomó un sistema formado por dos estratos porosos, ω y η uno con una porosidad de 0.3 y otro de 0.9 respectivamente.

$$K_{\beta\omega} = \frac{\varepsilon_{\beta\omega}^3 \ell^2}{12} = 0.00225\ell^2 \quad \text{en la región } -\omega \quad (5.1)$$

$$K_{\beta\eta} = \frac{\varepsilon_{\beta\eta}^3 \ell^2}{12} = 0.06072\ell^2 \quad \text{en la región } -\eta \quad (5.2)$$

$$\varepsilon_{\beta} K_{\omega\eta}^{-1} \langle v_{\beta} \rangle_{\omega\eta}^{\beta} = \frac{d^2 \langle v_{\beta} \rangle_{\omega\eta}^{\beta}}{dy^2} + \varepsilon_{\beta}^{-1} \frac{d\varepsilon_{\beta}}{dy} \frac{d \langle v_{\beta} \rangle_{\omega\eta}^{\beta}}{dy} + \varepsilon_{\beta\omega} K_{\beta\omega}^{-1} \langle v_{\beta} \rangle_{\omega,\infty}^{\beta} \quad \text{en la inter-región} \quad (5.3)$$

$$\varepsilon_{\beta} = \begin{cases} \varepsilon_{\beta\eta} = 0.9 & \text{en } \eta \\ \varepsilon_{\beta} = a \frac{y}{r_0} + b & \text{en inter-región} \\ \varepsilon_{\beta\omega} = 0.3 & \text{en } \omega \end{cases} \quad (5.4)$$

Las relaciones anteriores se usarán en el modelo de un dominio debido a que

contiene coeficientes variables como se vió en el Capítulo 4.

5.2. Variables de cerradura macroscópicas

De acuerdo al Capítulo 4 se siguió la metodología y se obtuvo un problema de cerradura de las desviaciones macroscópicas donde se calcularon 8 variables de cerradura. Las soluciones de esto, obtenidas mediante MatLab se presentan en la Tabla 5.1 y fueron tomados para una $y_0 = -9$ ó $y_0 = 0.36r_0$ en un sistema formado por 100 nodos que fue el mejor ajuste para que se cumplieran las condiciones de frontera mencionadas en el Capítulo 4 para satisfacer un error absoluto menor al 1×10^{-3} . La forma en que se trabajó y_0 fue debido a que se tienen 2 condiciones de frontera para cada uno de los extremos del sistema y solo son necesarias dos, es por ello que se fue recorriendo el nodo de la línea divisoria hasta satisfacer las 4 condiciones de frontera. En la Figura 5.1 se ejemplifica la forma del malleo en que se trabajó para la búsqueda de el punto y_0 donde se puede observar la posición de los extremos y el punto central donde se realizaron las pruebas para que se cumplieran las condiciones de frontera y saber donde se localiza la superficie divisoria.

Se realizaron simulaciones para diferentes porosidades y se concluyo que la relación de la porosidad con la permeabilidad $M_{\beta i} = -\frac{\varepsilon_{\beta i}}{K_i}$, donde $i = \omega, \eta$ es un parámetro que determina la posición de y_0 entre dos medio porosos. Si $M_{\beta\omega} > M_{\beta\eta}$, la posición de y_0 se *inclinará* hacia la región $-\omega$, en el caso contrario, $M_{\beta\omega} < M_{\beta\eta}$, se *inclinará* hacia la región $-\eta$. Cabe señalar que la región $-\omega$ es menos porosa que la región $-\eta$.

Para todos los casos, la posición de y_0 está más influenciada por la región menos porosa, debido a que los cambios de la velocidad en dicha región son más significativos.

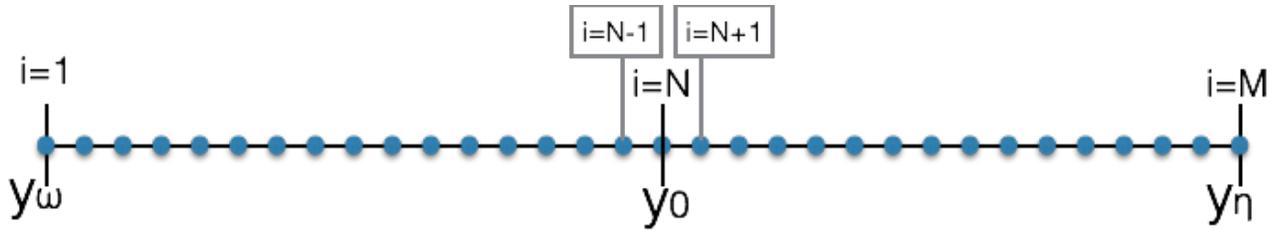


Figura 5.1. Nodos en el programa para obtener y_0 .

En la Figura 5.2 se muestra el punto donde se satisface el menor error que indica el lugar de la línea divisoria y_0 .

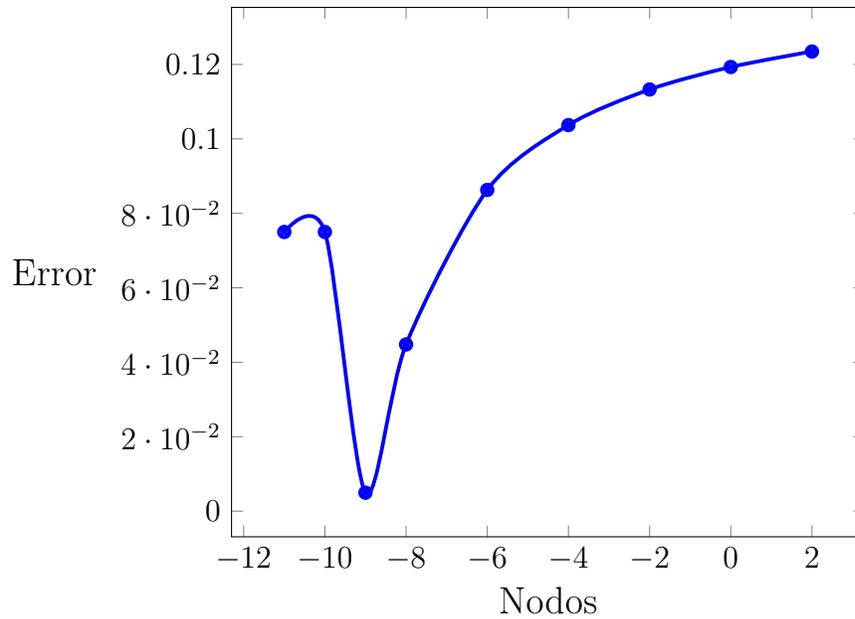


Figura 5.2. Error de entre las cuatro condiciones de salto.

En las ecuaciones (4.48) y (4.49) se muestran las 8 variables de cerradura que se obtuvieron mediante el método de diferencias finitas como se muestra en el Apéndice A al final de este trabajo.

$$\hat{v}_\omega = S_{\omega\eta} \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta |_{y_0} + S_{\omega\omega} \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta |_{y_0} + b_{\omega\eta} \frac{d \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy} |_{y_0} + b_{\omega\omega} \frac{d \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy} |_{y_0} \quad (5.5)$$

$$\hat{v}_\eta = S_{\eta\eta} \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta |_{y_0} + S_{\eta\omega} \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta |_{y_0} + b_{\eta\eta} \frac{d \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy} |_{y_0} + b_{\eta\omega} \frac{d \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy} |_{y_0} \quad (5.6)$$

$S_{\omega\omega}$	$S_{\eta\omega}$	$S_{\omega\eta}$	$S_{\eta\eta}$	$b_{\omega\omega}$	$b_{\eta\omega}$	$b_{\omega\eta}$	$b_{\eta\eta}$
3.6264	3.6160	-2.1246	-2.1197	0.0349	0.0349	0.0407	0.0406

Tabla 5.1. Coeficientes de cerradura para obtener las desviaciones de la velocidad

Para las condiciones de salto se obtuvieron 6 coeficientes de salto a partir de las integrales de las variables de cerradura mostradas en la Tabla 5.1 La condición de salto en la velocidad esta dada en la ecuación (5.7) y contiene tres coeficientes de salto que son el resultado de las variables de cerradura. Se puede ver que el coeficiente de mayor importancia dado por Θ que proviene de las integrales dadas por los coeficientes I_1 y I_2 es el de mayor valor, esto nos indica que los coeficientes están mayormente influenciadas por la región de mayor porosidad, en este caso la región η . En la literatura este coeficiente es llamado coeficiente global de transferencia de cantidad de movimiento.

$$\frac{d\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy} \Big|_{y_0} - \Gamma \frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy} \Big|_{y_0} = \Theta (\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta \Big|_{y_0} - \Lambda \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta \Big|_{y_0}) \quad (5.7)$$

$$\Gamma = -\frac{I_4}{I_3} = -8.1644 \quad \Theta = -\frac{I_1}{I_3} = -3063.61 \quad \Lambda = -\frac{I_2}{I_1} = 1.8065 \quad (5.8)$$

La condición de salto en el esfuerzo se muestra en la ecuación (5.9) que de igual manera contiene tres coeficientes de salto, a diferencia de la ecuación (5.7) el coeficiente Ψ que proviene de los términos de ω es el menor. El término Π tiene el valor aproximado de la unidad, y es el resultado de los coeficientes de las derivadas que a su vez, son el término de mayor importancia en esta condición debido a que es el mayor.

$$\frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy} \Big|_{y_0} - \Pi \frac{d\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy} \Big|_{y_0} = \Psi (\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta \Big|_{y_0} - \Omega \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta \Big|_{y_0}) \quad (5.9)$$

$$\Pi = -\frac{b_\eta}{b_\omega} = -0.9936 \quad \Psi = -\frac{S_\omega}{b_\omega} = -0.3882 \quad \Omega = \frac{S_\eta}{S_\omega} = 2.5057 \quad (5.10)$$

5.3. Modelos de uno y dos dominios para el sistema

En esta sección se discutirán las gráficas del comportamiento de la velocidad para el sistema formado por dos estratos de $\varepsilon_\beta = 0.3$ y $\varepsilon_\beta = 0.9$ utilizando los dos enfoques de uno y dos dominios discutidos anteriormente en los Capítulos 4 y 5.

Se realizó un programa en MatLab donde se siguió la restricción de longitudes de escala $\ell \ll r_0 \ll L$ aumentando por dos ordenes de magnitud a las demás escalas. Para este sistema se tomaron 10 000 puntos con una $r_0 = 100\ell$. Se presentan los perfiles de velocidad para la inter-región, para la región porosa con la pared así como todo el sistema y las ecuaciones que las representan.

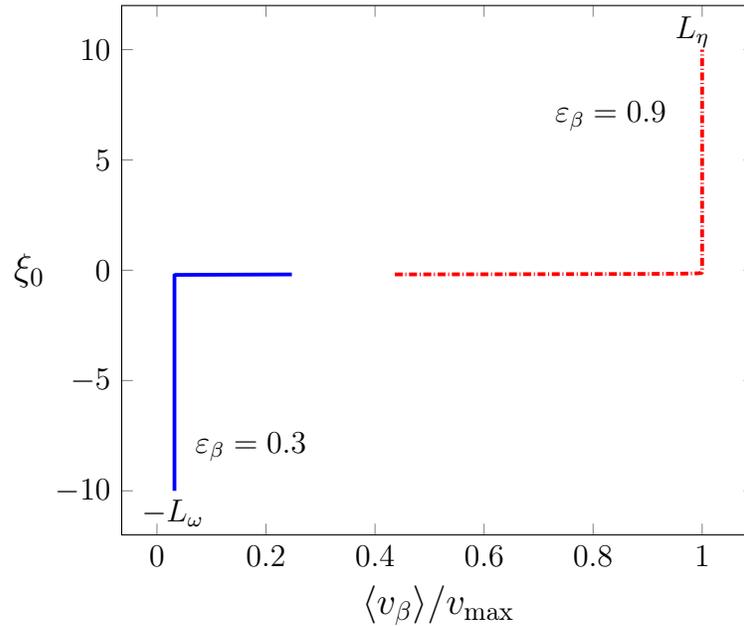


Figura 5.3. Perfil de la velocidad en el sistema de dos estratos con porosidades de $\varepsilon_\beta = 0.3$ y $\varepsilon_\beta = 0.9$ con coeficientes constantes TDA.

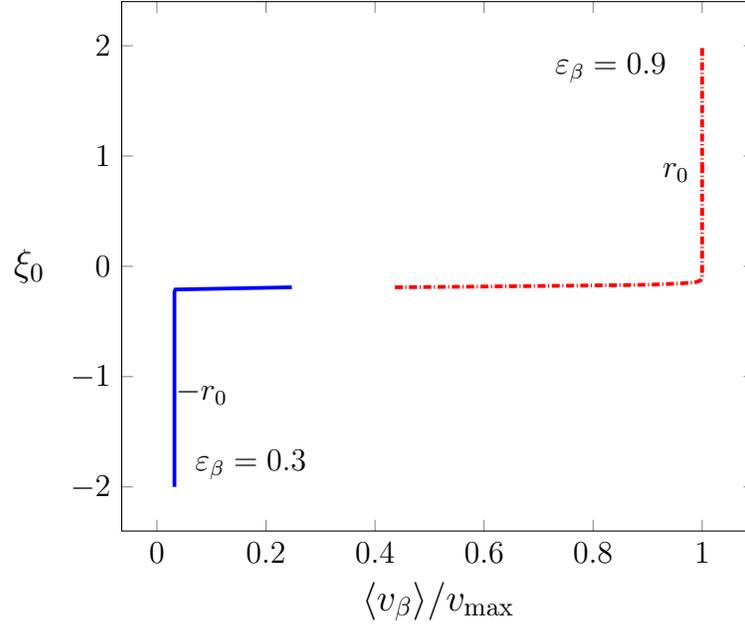


Figura 5.4. Perfil de la velocidad en la inter-región de dos estratos con porosidades de $\varepsilon_\beta = 0.3$ y $\varepsilon_\beta = 0.9$ con coeficientes constantes TDA.

$$0 = \frac{d^2 \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy^2} - \varepsilon_{\beta\eta} K_{\beta\eta}^{-1} \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta + \varepsilon_{\beta\omega} K_{\beta\omega}^{-1} \langle v_\beta \rangle_{\omega,\infty}^\beta \quad \text{en la región homogénea } -\eta$$

$$0 = \frac{d^2 \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy^2} - \varepsilon_{\beta\omega} K_{\beta\omega}^{-1} (\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta - \langle v_\beta \rangle_{\omega,\infty}^\beta) \quad \text{en la región homogénea } -\omega$$

En la Figura 5.3 se observa el comportamiento de la velocidad en los medios porosos en el sistema tomando en cuenta la condición de frontera obtenida mediante los coeficientes de salto donde se puede observar la influencia del medio poroso superior η tiene un efecto importante en el medio poroso inferior ω debido a que la fracción volumétrica η es mayor que ω es por ello que la superficie divisoria que se encontró se encuentra localizada en la parte inferior de la inter-región.

Para el desarrollo de estas gráficas se utilizó un mallado de 2000 puntos, mil para cada estrato, donde 200 conforman la inter-región. La posición de la superficie divisoria obtenida se encuentra en la posición $y_0 = -9$ tomando como 0 el punto medio del sistema, en este punto es donde se aplican las condiciones de salto

obtenidas en el Capítulo 4.

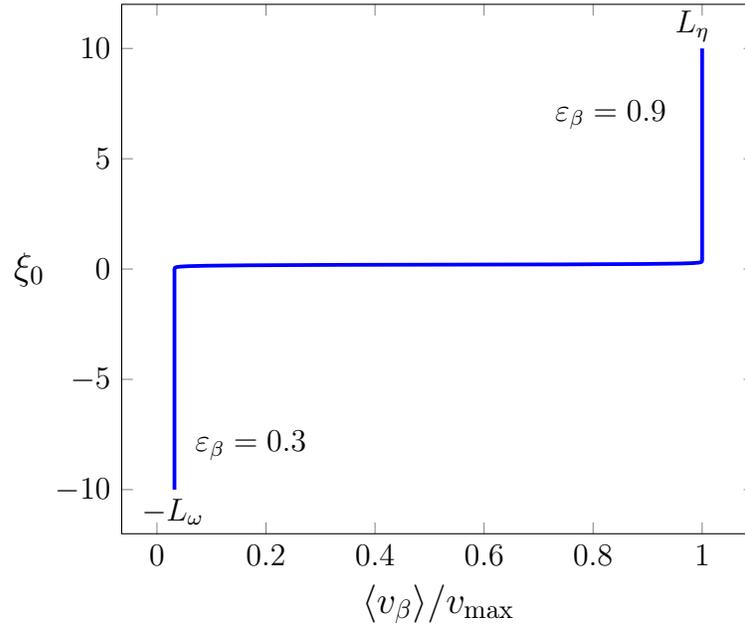


Figura 5.5. Perfil de la velocidad en el sistema de dos estratos con porosidades de $\varepsilon_\beta = 0.3$ y $\varepsilon_\beta = 0.9$ con coeficientes variables ODA.

$$0 = \frac{d^2 \langle v_\beta \rangle^\beta}{dy^2} + \varepsilon_\beta^{-1} \frac{d\varepsilon_\beta}{dy} \frac{d \langle v_\beta \rangle^\beta}{dy} + \left(\varepsilon_\beta^{-1} \frac{d^2 \varepsilon_\beta}{dy^2} - \varepsilon_\beta K^{-1} \right) \langle v_\beta \rangle^\beta + \varepsilon_{\beta\omega} K_{\beta\omega}^{-1} \langle v_\beta \rangle_{\omega,\infty}^\beta$$

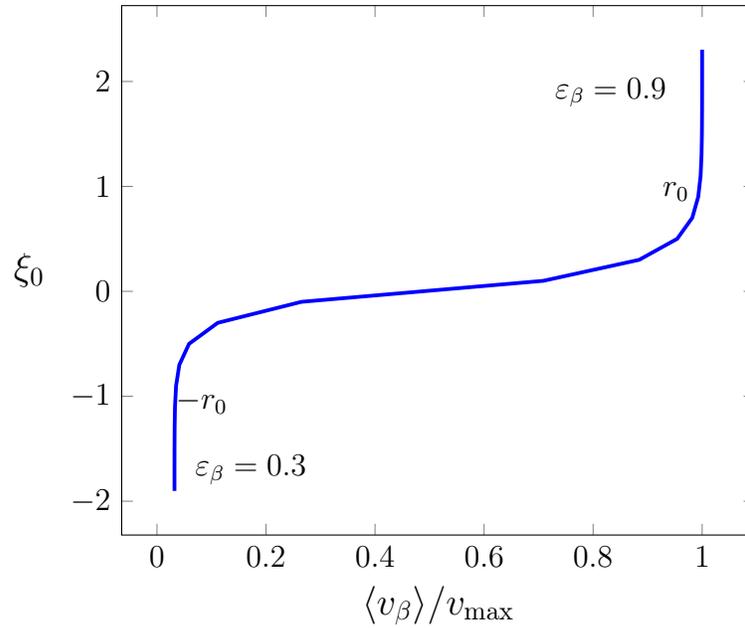


Figura 5.6. Perfil de la velocidad en la inter-región de dos estratos con porosidades de $\varepsilon_\beta = 0.3$ y $\varepsilon_\beta = 0.9$ en la inter-región con coeficientes variables ODA.

En la Figura (5.5) se muestra el comportamiento de la velocidad a lo largo del sistema desde el medio poroso ω con fracción volumétrica de $\varepsilon_\beta = 0.3$ hasta el medio poroso η con fracción volumétrica $\varepsilon_\beta = 0.9$ que tienen un comportamiento de flujo tapón en el seno de cada región porosa y en la inter-región se realizó el tratamiento del cambio de la velocidad dependiente de la posición debido a que al cambiar la fracción volumétrica en la región de promediado cambia la permeabilidad y esto afecta directamente el valor de la velocidad.

En la Figura 5.6 se muestra el comportamiento de la velocidad en el sistema con coeficientes variables o enfoque de un dominio ODA donde se observa el cambio suave en la inter-región entre un medio poroso y debido a que los coeficientes fueron calculados punto a punto en el sistema.

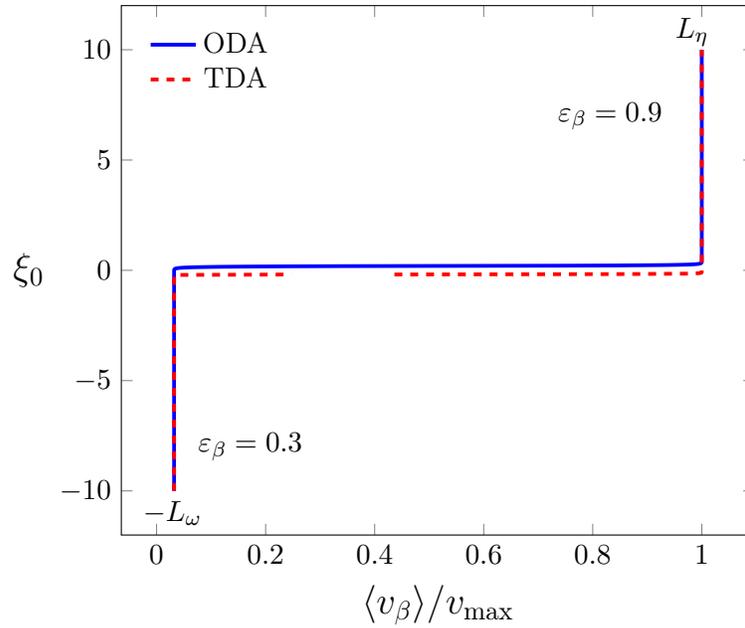


Figura 5.7. Comparación de los perfiles entre los modelos de uno y dos dominios

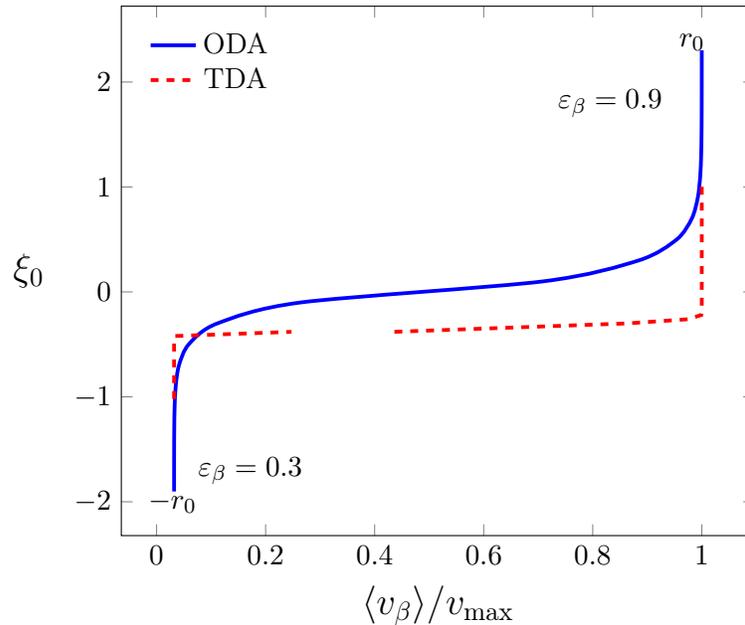


Figura 5.8. Comparación de los perfiles con un acercamiento para los modelos de uno y dos dominios

En las Figuras 5.7 y 5.8 se muestra la comparación de los modelos donde se pueden ver que ambos tienen los mismos perfiles de velocidad en las regiones homogéneas y solo difieren en la inter-región debido a que en el TDA los cambios en la velocidad se dan en el medio poroso ω debido a que se encontró una $y_0 =$

$-0.36r_0$. Esto quiere decir que desde el momento en el que una pequeña parte de la región de promediado se encuentra en el medio poroso con mayor porosidad, la velocidad comienza a cambiar.

Aportaciones	Limitaciones
Se puede describir el perfil de velocidad en toda la región de forma analítica.	Se supuso el medio poroso como canales capilares
Se obtuvieron coeficientes efectivos de forma analítica que fueron usados en el desarrollo del modelo de un dominio	En la solución analítica es necesaria una ecuación para cada región o inter-región.
Con la solución analítica es posible determinar, además de los coeficientes en la inter-región entre medios porosos, coeficientes entre medio poroso-pared.	El modelo fue desarrollado sólo para dos estratos, no para todo sistema estratificado
En principio, la metodología describe que se deben realizar 2 problemas de cerradura y en este trabajo solo fue necesaria una.	Para la aplicación del modelo, es necesario satisfacer restricciones de escala.
Se obtuvieron las ecuaciones promedio para cada región y 2 condiciones de salto cerradas, entonces es posible realizar un promediado a gran escala, para describir un sistema estratificado con un sólo modelo.	

Tabla 5.2. Esquema de aportaciones y limitaciones del modelo para un sistema estratificado

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo se estudió el transporte de cantidad de movimiento en un sistema formado por dos estratos con fracciones volumétricas distintas, esto se realizó bajo un gradiente de presión constante. El desarrollo condujo a dos modelos distintos utilizando la técnica del promedio volumétrico, el primero llamado modelo de un dominio donde su ecuación contiene coeficientes variables en el espacio y el segundo llamado modelo de dos dominios que contiene dos ecuaciones, una para cada estrato, con coeficientes constantes pero que requiere de condiciones de frontera entre cada estrato. Se obtuvieron dichas ecuaciones con la metodología desarrollada por Valdés-Parada *y col.* (2013).

Con esta metodología se pudo obtener tanto las ecuaciones diferenciales como condiciones a la frontera cerradas. De esta manera se obtuvo el modelo de transporte de cantidad de movimiento para dos estratos con ecuaciones de medio efectivo y condiciones de frontera.

En el caso del modelo de transporte suponiendo el medio poroso como canales paralelos (Capítulo 3), el cual se resolvió analíticamente, analizando los cambios de fracción volumétrica y con las paredes del sistema. En la solución se pudo ver el perfil de velocidades y se encontró que la corrección de Brinkman existe y que tiene una dependencia directamente proporcional a la fracción volumétrica. Por ejemplo en el sistema resuelto en este trabajo se encontró que para la porosidad $\varepsilon_\beta = 0.3$ es mayor la contribución que en una de $\varepsilon_\beta = 0.9$, pero que siempre y

cuando la fracción volumétrica sea $\varepsilon_\beta \neq 1$ la contribución existe y por lo tanto su aporte es importante en el sistema.

El contar con la solución analítica, permitió que en el desarrollo de las condiciones de salto se realizaran un menor número de suposiciones. Es por ello que se obtuvo el perfil de la permeabilidad en la inter-región, esto quiere decir que no se realizó el primer problema de cerradura. Además de que fue posible obtener los coeficientes de permeabilidad del medio poroso con las paredes.

Para el desarrollo de las condiciones de salto siguiendo la metodología (Capítulo 4), se obtuvieron dos modelos, el modelo de un dominio donde previamente se obtuvieron relaciones lineales del comportamiento de la permeabilidad y porosidad en el Capítulo 3, y el modelo de dos dominios con coeficientes constantes. La resta de estos modelos condujo a otro problema con condiciones a la frontera que llevó a obtener coeficientes de cerradura con la información de la inter-región para colapsarla en condiciones de frontera para aplicarlos en una superficie divisoria. Gracias a las condiciones del nuevo problema, se logró obtener la posición de la superficie divisoria donde se deben aplicar las condiciones de salto. Se observó que ésta, tiende a situarse en la región de menor porosidad debido a que es influenciada por el sistema con mayor porosidad y por lo tanto, mayor velocidad. Para un sistema formado por un malleo de 200 puntos, donde 100 es el $y_0 = 0$ se encontró la posición de la superficie divisoria en $y_0 = -9$.

Los resultados (Capítulo 5) muestran en general el comportamiento de la velocidad para el sistema similar en el caso de la solución analítica y la numérica. Adicionalmente se observó el salto en la velocidad en el caso donde se aplican las condiciones de salto.

Se realizó el desarrollo de las condiciones de salto aún teniendo la solución analítica debido a que se busca tener un desarrollo matemático más detallado en este tipo de sistemas para trabajos futuros donde se pueda lograr un segundo promediado y poder trabajar un sistema estratificado con un solo modelo pero

con la información de cada región.

Otra contribución de este trabajo consiste en que con un modelo de dos dominios se puede resolver un sistema de manera más sencilla al tener coeficientes de medio efectivo constantes y por lo tanto, un menor tiempo de cómputo a diferencia del modelo de un dominio, donde los coeficientes son variables en el espacio y esto dificulta la solución.

6.1. Perspectivas

Con base en los resultados de este trabajo, al tener las ecuaciones promediadas de cada estrato y las condiciones de salto entre cada uno de estos es posible realizar un segundo promediado donde se puede llegar a una escala mayor para ver un sistema estratificado como una región homogénea como se muestra en la Figura 6.1.

También es posible realizar tablas de coeficientes de salto para distintos materiales comunes en este tipo de sistemas, de acuerdo con su fracción volumétrica y geometría.

$$0 = \frac{d^2 \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy^2} - \varepsilon_{\beta\eta} K_{\beta\eta}^{-1} \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta + \varepsilon_{\beta\omega} K_{\beta\omega}^{-1} \langle v_\beta \rangle_{\omega,\infty}^\beta \quad \text{en la región homogénea } -\eta \quad (6.1)$$

$$0 = \frac{d^2 \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy^2} - \varepsilon_{\beta\omega} K_{\beta\omega}^{-1} (\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta - \langle v_\beta \rangle_{\omega,\infty}^\beta) \quad \text{en la región homogénea } -\omega \quad (6.2)$$

$$\frac{d \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy} \Big|_{y_0} - \Gamma \frac{d \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy} \Big|_{y_0} = \Theta (\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta \Big|_{y_0} - \Lambda \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta \Big|_{y_0}) \quad \text{en la inter-región } \omega - \eta \quad (6.3)$$

$$\frac{d \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy} \Big|_{y_0} - \Pi \frac{d \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy} \Big|_{y_0} = \Psi (\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta \Big|_{y_0} - \Omega \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta \Big|_{y_0}) \quad \text{en la inter-región } \omega - \eta \quad (6.4)$$

Esto podría ser aplicado por ejemplo al flujo de contaminantes en el aire o en suelos estratificados o con fines de extracción de gas o petróleo en regiones con estas características.

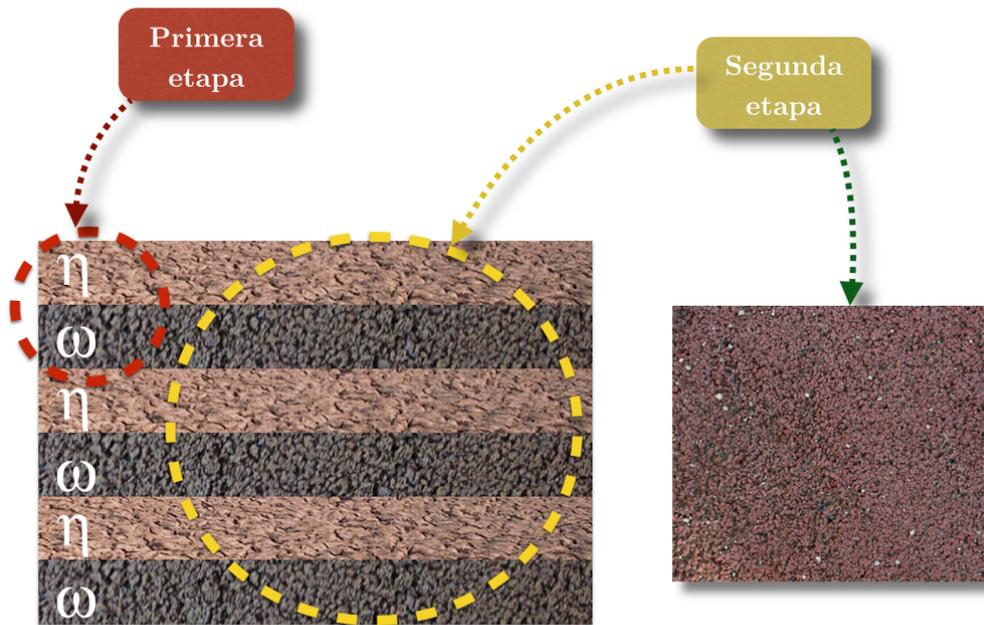


Figura 6.1. Promediado a gran escala

Apéndice A

Solución para obtener las variables de cerradura.

A partir de los problemas de las desviaciones para cada región y de la solución propuesta de las mismas, se sustituye la solución para posteriormente obtener una ecuación que depende únicamente de las variables macroscópicas de cerradura. Estas se separan para obtener un sistema de ecuaciones, que se resuelven por diferencias finitas.

$$0 = \frac{d^2 \hat{v}_\omega}{dy^2} - \varepsilon_\beta^{-1} \frac{d\varepsilon_\beta}{dy} \frac{d\hat{v}_\omega}{dy} - \varepsilon_\beta^{-1} \frac{d\varepsilon_\beta}{dy} \frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy} \Big|_{y_0} + (\varepsilon_\beta^{-1} \frac{d^2 \varepsilon_\beta}{dy^2} + \varepsilon_\beta K_\beta^{-1}) \hat{v}_\omega +$$

$$(\varepsilon_\beta^{-1} \frac{d^2 \varepsilon_\beta}{dy^2} - \varepsilon_\beta K_\beta^{-1} + \varepsilon_{\beta\omega} K_{\beta\omega}^{-1}) \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta \Big|_{y_0} \text{ para la región } \omega \quad (\text{A.1})$$

$$0 = \frac{d^2 \hat{v}_\eta}{dy^2} - \varepsilon_\beta^{-1} \frac{d\varepsilon_\beta}{dy} \frac{d\hat{v}_\eta}{dy} - \varepsilon_\beta^{-1} \frac{d\varepsilon_\beta}{dy} \frac{d\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy} \Big|_{y_0} + (\varepsilon_\beta^{-1} \frac{d^2 \varepsilon_\beta}{dy^2} + \varepsilon_\beta K_\beta^{-1}) \hat{v}_\eta +$$

$$(\varepsilon_\beta^{-1} \frac{d^2 \varepsilon_\beta}{dy^2} - \varepsilon_\beta K_\beta^{-1}) \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\eta^\beta + \varepsilon_{\beta\eta} K_{\beta\eta}^{-1} \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta \Big|_{y_0} \text{ para la región } \eta \quad (\text{A.2})$$

$$\hat{v}_\omega = S_{\omega\eta} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\eta^\beta \Big|_{y_0} + S_{\omega\omega} \langle \mathbf{v}_\beta \rangle_\omega^\beta \Big|_{y_0} + b_{\omega\eta} \frac{d\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy} \Big|_{y_0} + b_{\omega\omega} \frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy} \Big|_{y_0} \quad (\text{A.3})$$

$$\hat{v}_\eta = S_{\eta\eta}\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta|_{y_0} + S_{\eta\omega}\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta|_{y_0} + b_{\eta\eta}\frac{d\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy}|_{y_0} + b_{\eta\omega}\frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy}|_{y_0} \quad (\text{A.4})$$

Se sustituye la solución del problema de las desviaciones macroscópicas (A.3) y (A.4) en las ecuaciones (A.1) y (A.2) y en las condiciones de frontera (4.40), (4.41) y (4.43)

$$0 = \left[\frac{d^2 S_{\eta\eta}}{dy^2} - \varepsilon_\beta^{-1} \frac{d\varepsilon_\beta}{dy} \frac{dS_{\eta\eta}}{dy} + M_\beta S_{\eta\eta} \right] \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta + M_\beta \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta \quad (\text{A.5})$$

$$\left[\frac{d^2 S_{\eta\omega}}{dy^2} - \varepsilon_\beta^{-1} \frac{d\varepsilon_\beta}{dy} \frac{dS_{\eta\omega}}{dy} + M_\beta S_{\eta\omega} \right] \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta + \varepsilon_\beta K_{\beta\omega}^{-1} \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta \quad (\text{A.6})$$

$$\left[\frac{d^2 b_{\eta\eta}}{dy^2} - \varepsilon_\beta^{-1} \frac{d\varepsilon_\beta}{dy} \frac{db_{\eta\eta}}{dy} + M_\beta b_{\eta\eta} \right] \frac{d\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy} - \varepsilon_\beta^{-1} \frac{d\varepsilon_\beta}{dy} \frac{d\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy} \Big|_{y_0} \quad (\text{A.7})$$

$$\left[\frac{d^2 b_{\eta\omega}}{dy^2} - \varepsilon_\beta^{-1} \frac{d\varepsilon_\beta}{dy} \frac{db_{\eta\omega}}{dy} + M_\beta b_{\eta\omega} \right] \frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy} \quad (\text{A.8})$$

$$0 = \left[\frac{d^2 S_{\omega\eta}}{dy^2} - \varepsilon_\beta^{-1} \frac{d\varepsilon_\beta}{dy} \frac{dS_{\omega\eta}}{dy} + M_\beta S_{\omega\eta} \right] \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta \quad (\text{A.9})$$

$$\left[\frac{d^2 S_{\omega\omega}}{dy^2} - \varepsilon_\beta^{-1} \frac{d\varepsilon_\beta}{dy} \frac{dS_{\omega\omega}}{dy} + M_\beta S_{\omega\omega} \right] \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta + (M_\beta + \varepsilon_\beta K_{\beta\omega}^{-1}) \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta \quad (\text{A.10})$$

$$\left[\frac{d^2 b_{\omega\eta}}{dy^2} - \varepsilon_\beta^{-1} \frac{d\varepsilon_\beta}{dy} \frac{db_{\omega\eta}}{dy} + M_\beta b_{\omega\eta} \right] \frac{d\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy} \quad (\text{A.11})$$

$$\left[\frac{d^2 b_{\omega\omega}}{dy^2} - \varepsilon_\beta^{-1} \frac{d\varepsilon_\beta}{dy} \frac{db_{\omega\omega}}{dy} + M_\beta b_{\omega\omega} \right] \frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy} - \varepsilon_\beta^{-1} \frac{d\varepsilon_\beta}{dy} \frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy} \Big|_{y_0} \quad (\text{A.12})$$

Condiciones de frontera para el problema de las desviaciones macroscópicas

$$S_{\omega\eta}\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta + (S_{\omega\omega} + 1)\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta + b_{\omega\eta}\frac{d\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy} + b_{\omega\omega}\frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy} \quad (\text{A.13})$$

$$= (S_{\eta\eta} + 1)\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta + S_{\eta\omega}\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta + b_{\eta\eta}\frac{d\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy} + b_{\eta\omega}\frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy} \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{dS_{\omega\eta}}{dy} \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta + \frac{dS_{\omega\omega}}{dy} \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta + \frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy} + \frac{db_{\omega\eta}}{dy} \frac{d\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy} + \frac{db_{\omega\omega}}{dy} \frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy} \quad (\text{A.15})$$

$$= \frac{dS_{\eta\eta}}{dy} \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta + \frac{d\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy} + \frac{dS_{\eta\omega}}{dy} \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta + \frac{db_{\eta\eta}}{dy} \frac{d\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta}{dy} + \frac{db_{\eta\omega}}{dy} \frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta}{dy} \quad (\text{A.16})$$

De aquí se obtiene un sistema de ecuaciones que se resuelven en pares debido al acoplamiento en sus condiciones de frontera utilizando el método de diferencias finitas.

Para este método se necesitan dos condiciones en los extremos y una en la posición de la línea divisoria. Dichas condiciones están descritas en las ecuaciones (4.40), (4.41) y (4.43) y debido a que tenemos 4 ecuaciones (A.17) que deben cumplirse y solo son necesarias dos, se realizan pruebas para cada par de condiciones de frontera donde se comienza suponiendo la superficie divisoria justo a la mitad del sistema y se mueve el nodo hasta alcanzar un error menor a 1×10^{-3} como se muestra en la Figura 5.2. El error se obtiene al realizar la diferencia de las integrales de cada par de variables de cerradura

Condiciones de frontera para los extremos en una malla formada por un número M de nodos y $M = 2N$ donde N es la posición $y_0 = 0$. Este nodo se mueve hasta alcanzar el mismo valor para las integrales de las variables de cerradura con los dos pares de condiciones de frontera en los extremos los extremos.

Se discretizan las ecuaciones (A.18), (A.24), (A.30), (A.36) en diferencias finitas y de las dos condiciones de frontera de cada par en la posición de la superficie divisoria se forma una sola para el nodo N .

$$\begin{aligned}
 \text{C.F.}\omega 1 & S_1 = 0 \\
 \text{C.F.}\omega 2 & -S_1 + S_2 = 0 \\
 \text{C.F.}\eta 1 & S_M = 0 \\
 \text{C.F.}\eta 2 & -S_{M-1} + S_M = 0
 \end{aligned} \tag{A.17}$$

Problema con valor a la frontera para determinar las variables de cerradura macroscópico $S_{\omega\eta}$ y $S_{\eta\eta}$

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{d^2 S_{\omega\eta}}{dy^2} - \varepsilon_\beta^{-1} \frac{d\varepsilon_\beta}{dy} \frac{dS_{\omega\eta}}{dy} + M_\beta S_{\omega\eta} \right] = 0 \\
 & \left[\frac{d^2 S_{\eta\eta}}{dy^2} - \varepsilon_\beta^{-1} \frac{d\varepsilon_\beta}{dy} \frac{dS_{\eta\eta}}{dy} + M_\beta S_{\eta\eta} + M_\beta \right] = 0
 \end{aligned} \tag{A.18}$$

$$\text{C.F.1} \quad S_{\eta\eta} = S_{\omega\eta} + 1 \tag{A.19}$$

$$\text{C.F.2} \quad \frac{dS_{\eta\eta}}{dy} = \frac{dS_{\omega\eta}}{dy} \tag{A.20}$$

$$S_{i-1} - [2 - \lambda(u)(\Delta u) - M_\beta r_0^2 (\Delta u)^2] S_i + [1 - \lambda(u)(\Delta u)] S_{i+1} = -M_\beta r_0^2 (\Delta u)^2 \tag{A.21}$$

$$S_{i-1} - [2 - \lambda(u)(\Delta u) - M_\beta r_0^2 (\Delta u)^2] S_i + [1 - \lambda(u)(\Delta u)] S_{i+1} = 0 \tag{A.22}$$

$$\text{C.F.1} \quad S_{N-1} - 2S_N + S_{N+1} = 1 \tag{A.23}$$

Problema con valor a la frontera para determinar las variables de cerradura macroscópico $S_{\omega\omega}$ y $S_{\eta\omega}$

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2 S_{\omega\omega}}{dy^2} - \varepsilon_{\beta}^{-1} \frac{d\varepsilon_{\beta}}{dy} \frac{dS_{\omega\omega}}{dy} + M_{\beta} S_{\omega\omega} + M_{\beta} + \varepsilon_{\beta\omega} K_{\beta\omega}^{-1} \right] &= 0 \\ \left[\frac{d^2 S_{\eta\omega}}{dy^2} - \varepsilon_{\beta}^{-1} \frac{d\varepsilon_{\beta}}{dy} \frac{dS_{\eta\omega}}{dy} + M_{\beta} S_{\eta\omega} + \varepsilon_{\beta\omega} K_{\beta\omega}^{-1} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

$$\text{C.F.1} \quad S_{\omega\omega} + 1 = S_{\eta\omega} \quad (\text{A.25})$$

$$\text{C.F.2} \quad \frac{dS_{\omega\omega}}{dy} = \frac{dS_{\eta\omega}}{dy} \quad (\text{A.26})$$

$$\begin{aligned} S_{i-1} - [2 - \lambda(u)(\Delta u) - M_{\beta} r_0^2 (\Delta u)^2] S_i + [1 - \lambda(u)(\Delta u)] S_{i+1} = \\ -M_{\beta} r_0^2 (\Delta u)^2 - \varepsilon_{\beta} r_0^2 K_{\beta\omega}^{-1} (\Delta u)^2 \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

$$S_{i-1} - [2 - \lambda(u)(\Delta u) - M_{\beta} r_0^2 (\Delta u)^2] S_i + [1 - \lambda(u)(\Delta u)] S_{i+1} = -M_{\beta} r_0^2 (\Delta u)^2 \quad (\text{A.28})$$

$$\text{C.F.} \quad S_{N-1} - 2S_N + S_{N+1} = 1 \quad (\text{A.29})$$

Problema con valor a la frontera para determinar las variables de cerradura macroscópico $b_{\omega\eta}$ y $b_{\eta\eta}$

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2 b_{\omega\eta}}{dy^2} - \varepsilon_{\beta}^{-1} \frac{d\varepsilon_{\beta}}{dy} \frac{db_{\omega\eta}}{dy} + M_{\beta} b_{\omega\eta} \right] &= 0 \\ \left[\frac{d^2 b_{\eta\eta}}{dy^2} - \varepsilon_{\beta}^{-1} \frac{d\varepsilon_{\beta}}{dy} \frac{db_{\eta\eta}}{dy} + M_{\beta} b_{\eta\eta} + \lambda(u) \right] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

$$\text{C.F.1} \quad b_{\eta\eta} = b_{\omega\eta} \quad (\text{A.31})$$

$$\text{C.F.2} \quad \frac{db_{\eta\eta}}{dy} + 1 = \frac{db_{\omega\eta}}{dy} \quad (\text{A.32})$$

$$b_{i-1} - [2 - \lambda(u)(\Delta u) - M_\beta r_0^2 (\Delta u)^2] b_i + [1 - \lambda(u)(\Delta u)] b_{i+1} = 0 \quad (\text{A.33})$$

$$b_{i-1} - [2 - \lambda(u)(\Delta u) - M_\beta r_0^2 (\Delta u)^2] b_i + [1 - \lambda(u)(\Delta u)] b_{i+1} = \lambda(u)(\Delta u)^2 \quad (\text{A.34})$$

$$\text{C.F.} \quad b_{N-1} - 2b_N + b_{N+1} = -\Delta u \quad (\text{A.35})$$

Problema con valor a la frontera para determinar las variables de cerradura macroscópico $b_{\omega\omega}$ y $b_{\eta\omega}$

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2 b_{\omega\omega}}{dy^2} - \varepsilon_\beta^{-1} \frac{d\varepsilon_\beta}{dy} \frac{db_{\omega\omega}}{dy} + M_\beta b_{\omega\omega} \right] &= \varepsilon_\beta^{-1} \frac{d\varepsilon_\beta}{dy} \\ \left[\frac{d^2 b_{\eta\omega}}{dy^2} - \varepsilon_\beta^{-1} \frac{d\varepsilon_\beta}{dy} \frac{db_{\eta\omega}}{dy} + M_\beta b_{\eta\omega} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

$$\text{C.F.1} \quad b_{\omega\omega} = b_{\eta\omega} \quad (\text{A.37})$$

$$\text{C.F.2} \quad \frac{db_{\omega\omega}}{dy} + 1 = \frac{db_{\eta\omega}}{dy} \quad (\text{A.38})$$

$$\begin{aligned} b_{i-1} - [2 - \lambda(u)(\Delta u) - M_\beta r_0^2 (\Delta u)^2] b_i + [1 - \lambda(u)(\Delta u)] b_{i+1} &= \lambda(u)(\Delta u)^2 \\ b_{i-1} - [2 - \lambda(u)(\Delta u) - M_\beta r_0^2 (\Delta u)^2] b_i + [1 - \lambda(u)(\Delta u)] b_{i+1} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

$$\text{C.F.} \quad b_{N-1} - 2b_N + b_{N+1} = -\Delta u \quad (\text{A.40})$$

Apéndice B

Solución por diferencias finitas para el modelo de uno y dos dominios

En esta sección se presenta el adimensionamiento y solución mediante diferencias finitas de los modelos ODA y TDA.

$$0 = \frac{d^2 \langle v_\beta \rangle^\beta}{dy^2} + \varepsilon_\beta^{-1} \frac{d\varepsilon_\beta}{dy} \frac{d \langle v_\beta \rangle^\beta}{dy} + (\varepsilon_\beta^{-1} \frac{d^2 \varepsilon_\beta}{dy^2} - \varepsilon_\beta K^{-1}) \langle v_\beta \rangle^\beta + \varepsilon_{\beta\omega} K_{\beta\omega}^{-1} \langle v_\beta \rangle_{\omega,\infty}^\beta \quad (\text{B.1})$$

Se desarrollaron las ecuaciones en forma adimensional, utilizando las siguientes variables adimensionales.

$$u = \frac{y}{r_0} \quad v = \frac{\langle v_\beta \rangle_i^\beta}{\langle v_\beta \rangle_{\omega,\infty}^\beta} \quad i = \omega, \eta \quad (\text{B.2})$$

donde los coeficientes tienen la forma

$$\varepsilon_\beta = au + b \quad \text{en la inter-región}$$

$$\varepsilon_\beta K^{-1} r_0^2 \langle v_\beta \rangle_{\omega\eta}^\beta = \frac{d^2 \langle v_\beta \rangle_{\omega\eta}^\beta}{du^2} + \varepsilon_\beta^{-1} \frac{d\varepsilon_\beta}{du} \frac{d \langle v_\beta \rangle_{\omega\eta}^\beta}{du} + \varepsilon_{\beta\omega} K_{\beta\omega}^{-1} r_0^2 \langle v_\beta \rangle_{\omega,\infty}^\beta \quad (\text{B.3})$$

$$0 = \frac{d^2v}{du^2} + \underbrace{\varepsilon_{\beta}^{-1} \frac{d\varepsilon_{\beta}}{du}}_{\lambda(u)} \frac{dv}{du} + \left(\varepsilon_{\beta}^{-1} \frac{d^2\varepsilon_{\beta}}{du^2} - \underbrace{\varepsilon_{\beta} K_{\beta}^{-1} r_0^2}_{Mb} \right) v + \varepsilon_{\beta\omega} K_{\beta\omega}^{-1} r_0^2 \quad (\text{B.4})$$

Se discretizó la ecuación y se obtuvieron:

$$[1 - \lambda(u)(\Delta u)]v_{i-1} - [2 - \lambda(u)(\Delta u) - Mb(\Delta u)^2]v_i + v_{i+1} = Mb(\Delta u)^2 \quad (\text{B.5})$$

Para el modelo de dos dominios se realizó el mismo procedimiento, partiendo de las ecuaciones dimensionales se obtuvieron las ecuaciones (B.8) y (B.9).

$$0 = \frac{d^2\langle v_{\beta} \rangle_{\eta}^{\beta}}{dy^2} + \varepsilon_{\beta\eta} K_{\beta\eta}^{-1} \langle v_{\beta} \rangle_{\eta}^{\beta} + \varepsilon_{\beta\omega} K_{\beta\omega}^{-1} \langle v_{\beta} \rangle_{\omega, \infty}^{\beta} \text{ en } \eta \quad (\text{B.6})$$

$$0 = \frac{d^2\langle v_{\beta} \rangle_{\omega}^{\beta}}{dy^2} + \varepsilon_{\beta\omega} K_{\beta\omega}^{-1} (\langle v_{\beta} \rangle_{\omega}^{\beta} + \langle v_{\beta} \rangle_{\omega, \infty}^{\beta}) \text{ en } \omega \quad (\text{B.7})$$

Se desarrolla en forma adimensional

$$0 = \frac{d^2v}{du^2} + \varepsilon_{\beta\eta} K_{\beta\eta}^{-1} r_0^2 v + \varepsilon_{\beta\omega} K_{\beta\omega}^{-1} r_0^2 \text{ en } \eta \quad (\text{B.8})$$

$$0 = \frac{d^2v}{du^2} + \varepsilon_{\beta\omega} K_{\beta\omega}^{-1} r_0^2 v + \varepsilon_{\beta\omega} K_{\beta\omega}^{-1} r_0^2 \text{ en } \omega \quad (\text{B.9})$$

Y se discretiza de la siguiente manera

$$v_{i-1} - [2 + Mb_{\omega}(\Delta u)^2]v_i + v_{i+1} = Mb_{\omega}(\Delta u)^2 \quad (\text{B.10})$$

$$v_{i-1} - [2 + Mb_{\eta}(\Delta u)^2]v_i + v_{i+1} = Mb_{\eta}(\Delta u)^2 \quad (\text{B.11})$$

Para las condiciones de salto se realizó la discretización y se unió para formar una condición valida para la condición de frontera.

$$\frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta|_{y_0}}{dy} - \omega \frac{d\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta|_{y_0}}{dy} = \frac{\alpha \varepsilon_{\beta\omega} \beta}{\sqrt{k_{\beta\omega}}} (\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta|_{y_0} - B_{\omega\eta} \langle v_\beta \rangle_\eta^\beta|_{y_0}) \quad (\text{B.12})$$

$$\frac{d\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta|_{y_0}}{dy} - \frac{\alpha}{\sqrt{k_{\beta\omega}}} \alpha_{\eta\omega} \frac{d\langle v_\beta \rangle_\omega^\beta|_{y_0}}{dy} = \frac{\alpha}{\sqrt{k_{\beta\omega}}} (\langle v_\beta \rangle_\eta^\beta|_{y_0} - \varepsilon_{\beta\omega} v \langle v_\beta \rangle_\omega^\beta|_{y_0}) \quad (\text{B.13})$$

$$Av_{i-1} - Bv_i + Cv_{i+1} = 0 \quad (\text{B.14})$$

Donde A , B y C son coeficientes que resultan del problema de cerradura y que contienen la información de la inter-región.

Bibliografía

- Alazmi, B., Vafai, K. (2001). Analysis of fluid flow and heat transfer interfacial conditions between a porous medium and a fluid layer. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 44, 1735 – 1749.
- Beavers, G., Joseph, D. (1967). Boundary conditions at a naturally permeable wall. *J. Fluid Mech* 30, 197–207.
- Bird, B. (1982). *Fenómenos de Transporte*. Limusa Wiley. segunda edición.
- Ehrhardt (2010). *An Introduction to Fluid-Porous Interface Coupling*. Bergische Universität Wuppertal.
- Goyeau, B., Lhuillier, D., Gobin, D., Velarde, M. (2003). Momentum transport at a fluid–porous interface. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 46, 4071 – 4081.
- Jimenez-Islas, H., Calderon-Ramirez, M., Navarrete-Bolaños, J., Botello-Alvarez, J., Martínez-González, G., López-Isunza, F. (2009). Numerical study of natural convection in a 2-d square cavity with fluid-porous medium interface and heat generation. *Revista Mexicana de Ingeniería Química* 8, 169–185.
- Lasseux, D., Ahmadi, A., Arani, A.A.A. (2008). Two-phase inertial flow in homogeneous porous media: a theoretical derivation of a macroscopic model. *Transport in porous media* 75, 371–400.
- Lasseux, D., Valdés-Parada, F., Ochoa-Tapia, J., Goyeau, B. (2014). A macroscopic model for slightly compressible gas slip-flow in homogeneous porous media. *Physics of Fluids (1994-present)* 26.

- Le Bars, M., Worster, M. (2006). Interfacial conditions between a pure fluid and a porous medium: implications for binary alloy solidification. *J. Fluid Mech* 550, 149–173.
- Ochoa-Tapia, J., Whitaker, S. (1995a). Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid. part 1. theoretical development. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 38, 2635 – 2646.
- Ochoa-Tapia, J., Whitaker, S. (1995b). Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid. part 2. comparison with experiment. *International Journal of Heat and Mass Transfer* .
- Ochoa-Tapia, J.A., Whitaker, S. (1998). Heat transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid: The one-equation model. *Journal of Porous Media* , 31–46.
- Rose, A.W. (1993). *Porous media: Fluid transport and pore structure* (2nd ed.): F.a.l. dullien. academic press, san diego, ca, 1992, 574 pp.,. *Journal of Geochemical Exploration* 48, 372 –.
- Rumpf, H.C.H., Gupte, A.R. (1971). Einflüsse der porosität und korngößenverteilung im widerstandsgesetz der porenströmung. *Chemie Ingenieur Technik* 43, 367–375.
- Torquato, S. (2013). *Random Heterogeneous Materials: Microstructure and Macroscopic Properties*. Springer New York.
- Valdés-Parada, F.J., Aguilar-Madera, C.G., Ochoa-Tapia, J.A., Goyeau, B. (2013). Velocity and stress jump conditions between a porous medium and a fluid. *Advances in Water Resources* 62, Part B, 327–339.
- Valdés-Parada, F.J., Goyeau, B., Ochoa-Tapia, J.A. (2007). Jump momentum boundary condition at a fluid–porous dividing surface: Derivation of the closure problem. *Chemical engineering science* 62, 4025–4039.

- Valdés-Parada, F.J., Goyeau, B., Ochoa-Tapia, J.A. (2010). Derivation of complete jump boundary conditions between homogeneous media. *Porous Media and Its Applications in Science, Engineering and Industry* .
- Whitaker, S. (1999). *The Method of Volume Averaging. Theory and Applications of Transport in Porous Media*.
- Wood, B., Quintard, M., Whitaker, S. (2001). Methods for predicting coefficients in biofilms and cellular systems. *Methods in enzymology* 337, 319–338.
- Wood, B.D. (2009). The role of scaling laws in upscaling. *Advances in Water Resources* 32, 723–736.
- Zaman, E., Jalali, P. (2010). On hydraulic permeability of random packs of monodisperse spheres: Direct flow simulations versus correlations. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 389, 205 – 214.