Modelando a Mittag-Leffler

Tesis que presenta

Cecilia Hernández Domínguez

Para la obtención del grado de

Maestra en Ciencias
(Matemáticas)

Asesor:

Dr. Luis Miguel Villegas Silva

Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa

Marzo 2010

Agradecimientos

Quiero agradecer profundamente al Dr. Luis Miguel Villegas Silva por su invaluable apoyo en mis estudios y por su amistad. Agradezco a mis sinodales: Dra. María José Arroyo, Dr. Rogelio Fernández Alonso y Dr. Juan Antonio Nido, por su disponibilidad e interés al revisar esta tesis, ayudándome a enriquecerla.

Asimismo, agradezco al CONACYT por el apoyo económico que me brindó para realizar estos estudios.

Índice

Introducción

La relación entre teoría de modelos y álgebra ha sido muy fructífera, en especial en teoría de campos y teoría de módulos. La presente tesis está dedicada a la relación con la última, esto es, la teoría de modelos aplicada a módulos. Primero daremos un breve panorama de la relación entre estas dos ramas de la matemática y su buena interacción.

El concepto de *pureza* en álgebra fue introducido por Prüfer en [27] mediante la noción de *subgrupo puro* . Un subgrupo A de un grupo abeliano B es *puro* si $nB \cap A = nA$ para todo natural n, es decir, para cada $a \in A$ y cada n, si $n|a$ en B implica que $n|a$ también en A. Tal condición de divisibilidad $n|x$ se puede expresar mediante la fórmula $\exists y(x = ny)$ donde, en el lenguaje de grupos, ny es la abreviación de $y + y + \cdots + y$ n veces.

Este concepto fue generalizado a módulos mediante el producto tensorial por Cohn en [6], donde se encuentra una caracterización la cual es frecuentemente utilizada como la definición. Un submódulo A de un R-módulo izquierdo B (de manera similar con módulos derechos) se llama *puro* si cada sistema finito de ecuaciones con coeficientes en R y parámetros en A con solución en B era soluble en A. Esta condición también se puede expresar, tal como en el caso de grupos, mediante fórmulas de un lenguaje adecuado, la solución del sistema se representa como $\exists \bar{y} \bigwedge (\sum r_{ij} y_j + \sum s_{il} x_l = 0)$, las cuales son *pp-fórmulas*, fórmulas primitivo positivas.

Dentro de la teoría de modelos de módulos, las pp-fórmulas tienen especial relevancia, basta con mencionar al resultado clásico de Baur-Monk, *pp-eliminación de cuantificadores*, que aparece como tal en [5] y respecto a grupos abelianos en [24], el cual enuncia que cada fórmula en el lenguaje de los módulos es equivalente a una combinación booleana de pp-fórmulas, implicando así la simplificación de la estructura de los conjuntos definibles.

Este resultado permitió que a partir de conceptos referentes a la teoría de modelos, se puedan considerar sus versiones *positivas*. Por positivas nos referimos a que en lugar de fórmulas arbitarias sólo se consideran pp-fórmulas. Tales conceptos resultan equivalentes a conceptos puramente de teoría de módulos. Esto permite la combinación de métodos de teoría de modelos con métodos algebraicos. Por medio de esta combinación, se han podido obtener resultados algebraicos y también nuevas demostraciones más sencillas a las existentes.

Como ejemplo basta enunciar que la noción algebraica de módulo puro proyectivo coincide con la de módulo *construible positivo*, una noción de teoría de modelos. De manera similar, los módulos puro inyectivos son los *saturado positivos* y los módulos Mittag-Leffler son precisamente los *atómico positivos*; estos dos últimos se encuentran en extremos opuestos dentro de la teoría de modulos. Los primeros, satisfacen la mayor cantidad de *pp-tipos* posibles, mientras los Mittag-Leffler la menor cantidad de ellos.

Dado un R-módulo izquierdo M y una familia $\{N_i\}$ de R-módulos derechos es posible definir un homomorfismo canónico $(\prod_i N_i) \otimes_R M \longrightarrow \prod_i (N_i \otimes_R M)$. En [22], Lenzing demostró que tal homomorfismo es epimorfismo para cada familia de R-módulos derechos si y sólo si M es finitamente generado; y que es un isomorfismo si y sólo si M es finitamente presentado. Goodearl inició en [12] una investigación de las condiciones sobre M con las cuales este homomorfismo canónico es inyectivo; probó que es monomorfismo para cada familia $\{K_i\}$ de R-módulos planos si y sólo si para todo submódulo finitamente generado M' de M la inclusión, $M' \to M$ se factoriza a través de un módulo finitamente presentado. Después, Raynaud y Gruson en [28] colaboraron significativamente al estudio de los módulos M para los cuales el homorfismo en cuestión es inyectivo para cualquier familia $\{N_i\}$. Ellos llamaron a los módulos que cumplen tal propiedad módulos *Mittag-Leffler*. El motivo de este nombre es porque tales módulos pueden describirse como los módulos que son límites directos $\varinjlim F_j$ de R-módulos izquierdos finitamente presentados F_j tal que el sistema inverso de grupos abelianos $Hom_R(f_j, N)$ cumple la *condición Mittag-Leffler* (véase [28, p. 68]) para cada R-módulo izquierdo N. En el trabajo mencionado, Raynaud y Gruson dieron diversas caracterizaciones de los módulos Mittag-Leffler.

En este trabajo nos enfocaremos al estudio de la atomicidad de los módulos Mittag-Leffler, desarrollada en [31] por Rothmaler. Cabe señalar que, dentro de la teoría de modelos, los módulos puro inyectivos habían sido muy estudiados al contrario de los Mittag-Leffler.

Rothmaler realizó una caracterización, en teoría de modelos, de los módulos Mittag-Leffler mediante los pp-tipos que realizan. La principal herramienta que utilizó es el concepto de *dualidad*, desarrollada por Herzog en [16] entre pp-fórmulas izquierdas y pp-fórmulas derechas (el lado lo determina su pertenecia a la teoría de los R-módulos izquierdos o bien derechos), y su relación con el producto tensorial.

Debido a sus propiedades, los módulos Mittag-Leffler son en la actualidad objeto de estudio, como ejemplo los trabajos recientes [17] y [15].

A continuación se desglosa la estructura del presente trabajo:

Durante los primeros dos capítulos se desarrollan los conceptos y resultados necesarios en el estudio de la teoría de modelos en módulos. El Capítulo I contiene una introducción al lenguaje apropiado para los R-módulos, así como las definiciones y notaciones requeridas en el transcurso de este trabajo.

En el Capítulo II se introduce el concepto de pp-fórmula, el cual, como se había mencionado, es fundamental y el concepto de *tipo* se relativiza a esta clase de fórmulas para obtener un pp-tipo. Se introduce un orden entre las pp-fórmulas, luego se dota con una estructura de retícula al conjunto de ellas. Se establece una correspondencia entre módulos finitamente presentados y pp-fórmulas mediante las realizaciones libres. Se desarrolla en detalle la dualidad existente entre las pp-fórmulas derechas e izquierdas, la cual brinda una anti-isomorfismo entre las retículas correspondientes. Asimismo, para una teoría de módulos izquierdos se construye una teoría dual de módulos derechos. Se introduce el concepto de submódulo puro. Adicionalmente, como una parte relevante del presente trabajo se realiza una demostración completa y detallada del teorema fundamental de pp-eliminación de cuantificadores en la teoría de R-módulos, así como sus principales consecuencias.

Los conceptos de estructura atómica, construible y saturada se relativizan a las pp-fórmulas en el Capítulo III, para generar así sus versiones positivas. Los módulos construible positivos y positivo saturados se caracterizan en términos algebraicos en este mismo capítulo.

En el Capítulo IV esencialmente se presenta el resultado principal de este trabajo, el cual caracteriza a los módulos atómico positivos como los módulos Mittag-Leffler. Para finalizar se plantean algunos problemas en la misma línea de investigación.

En el Apéndice enunciaremos algunos conceptos algebraicos, necesarios a través de este trabajo, para que el lector pueda realizar una consulta rápida de ellos.

Capítulo I

Preliminares

Comenzaremos este trabajo dando un breve panorama de los conceptos básicos de Teoría de Modelos, en un lenguaje de primer orden, así como, de manera específica, de los conceptos orientados al estudio de la Teoría de Módulos.

I.1. Introducción a la teoría de modelos

Un lenguaje formal $\mathscr{L}$ consta de símbolos lógicos, encontrados en todo lenguaje, y no lógicos, los cuales son los que caracterizan a un lenguaje en particular. Los primeros están conformados por los conectivos $\vee, \wedge, \rightarrow, \neg$; los cuantificadores $\forall, \exists$; y variables $u, w, v, v_0, v_1, \dots, v_n, \dots$. Los símbolos no lógicos se agrupan en símbolos de constantes, de funciones y de relaciones. A partir de nuestros símbolos se construyen los términos y las fórmulas del lenguaje.

Si los símbolos no lógicos de $\mathscr{L}$ se interpretan en un conjunto M, tal conjunto junto con sus interpretaciones se dice que es una $\mathscr{L}$-estructura.

Denotamos con ${}_R\mathscr{L}$ al siguiente lenguaje, apropiado para los R-módulos izquierdos (respectivamente, $\mathscr{L}_R$ al lenguaje de los R-módulos derechos), donde R es un anillo asociativo con 1.

Para describir ${}_R\mathscr{L}$ empezaremos con sus símbolos no lógicos. El único símbolo de constante es 0, el cual se interpreta en un R-módulo de manera natural como el elemento neutro para la suma; el único símbolo de relación es la igualdad $=$; los símbolos de función son $+$ el cual representa la función binaria suma ($(u, v) \mapsto u + v$) y para cada $r \in R$ definimos un símbolo de función unario f_r, el cual representa la multiplicación escalar con r de los elementos del R-módulo ($v \mapsto rv$).

Un término del lenguaje se define, recursivamente, como una variable, una constante o un símbolo de función aplicado a un término. En el caso de ${}_R\mathscr{L}$, un término es "0" o bien "$r_1v_1 + r_2v_2 + \cdots + r_nv_n$" donde r_iv_i en realidad es $f_{r_i}(v_i), r_i \in R$ y las v_i son variables.

Con los términos definidos podemos construir las fórmulas del lenguaje empezando con las atómicas, las cuales son símbolos de relación aplicados a términos. En ${}_R\mathscr{L}$, una fórmula atómica es equivalente a "$r_1v_1 + r_2v_2 + \cdots + r_nv_n = 0$", una ecuación lineal con coeficientes en R.

A partir de dos fórmulas del lenguaje φ y ψ, de manera recursiva definimos las fórmulas $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$ y $\exists v\, \varphi$. No es necesario construir las fórmulas con los demás conectivos y el cuantificador universal, ya que se pueden considerar definidos a partir de la negación, conjunción y el cuantificador existencial: $\varphi \vee \psi := \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$, $\varphi \rightarrow \psi := \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$ y $\forall v\, \varphi := \neg(\exists v\, \neg\varphi)$. A las variables dentro de una fórmula φ que se encuentren en el alcance de algún cuantificador se les llama *variables acotadas*, en caso contrario se les llama *variables libres*; escribimos $\varphi(v_0, v_2, \dots, v_n)$ si las variables v_i son libres en φ. Si una fórmula no tiene variables libres se le llama enunciado.

Notación. Sea $\bar{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ una n-ada en M^n, es decir, $\bar{a} \in M^n$. Frecuentemente, de manera indistinta, escribiremos "$\bar{a}$ en M" en lugar de "$\bar{a} \in M^n$". Así podremos omitir el natural n cuando no sea necesario nombrarlo.

Definición I.1. Sea $\varphi(\bar{v})$ una fórmula con n variables libres y M un R-módulo. Si existe una n-ada $\bar{a}$ en M tal que al sustituirla en las variables libres de φ satisface a la fórmula, es decir, la hace cierta en M, decimos que M **modela** a φ, o bien, φ es **satisfacible** o **realizada** por $\bar{a}$ en M y escribimos $M \models \varphi(\bar{a})$. Además, se dice que $\bar{a}$ es una **realización** de φ en M. En caso contrario, esto es, si $\bar{a}$ no satisface a φ en M escribimos $M \not\models \varphi(\bar{a})$.

El **conjunto definido por $\boldsymbol{\varphi(\bar{v})}$**, $\varphi(M)$, es el subconjunto de M^n conformado por las n-adas que satisfacen a la fórmula,

$$\varphi(M) = \{\bar{a} \in M^n \mid M \models \varphi(\bar{a})\}.$$

Dos ${}_R\mathscr{L}$-fórmulas son **equivalentes en $\boldsymbol{M}$** si definen el mismo conjunto en M.

Dos ${}_R\mathscr{L}$-fórmulas son **equivalentes** si definen el mismo conjunto en cada R-módulo, lo cual denotaremos con $\equiv$.

Un subconjunto de A de M^n es **definible** si existe una fórmula φ en el lenguaje tal que $A = \varphi(M)$.

Decimos que un conjunto de fórmulas $\boldsymbol{\Phi}$ es **satisfacible** en $\boldsymbol{M}$, o bien, M realiza o es modelo de Φ, si existe una misma realización $\bar{a}$ de cada fórmula de Φ en M, es decir,

$$\Phi(M) = \{\bar{a} \in M^n \mid M \models \varphi(\bar{a}) \text{ para toda } \varphi \in \Phi\} = \bigcap \{\varphi(M) \mid \varphi \in \Phi\},$$

es no vacío.

En general, decimos que una fórmula o un conjunto de ellas es **consistente** si tiene un modelo.

Un conjunto de fórmulas Σ es **finito satisfacible** en M si cada subconjunto finito de Σ es satisfecho en M. Se dice que Σ es finito satisfacible si cada subconjunto finito de él tiene un modelo.

A continuación profundizaremos en la interpretación de cada fórmula en un R-módulo izquierdo M.

Una fórmula se identifica con el conjunto definido por ella. El subconjunto que define una fórmula atómica es un subgrupo, ya que es el conjunto solución de una ecuación lineal. Por ejemplo, si $R = \mathbb{Z}$, $6v = 0$ define al subgrupo de elementos anulados por el 6 del $\mathbb{Z}$-módulo, o grupo abeliano, M . Si φ y ψ son fórmulas, el conjunto definido por su conjunción $\varphi \wedge \psi$ es la intersección de los definidos por cada fórmula, por ejemplo $6v = 0 \wedge 4v = 0$ da lugar al conjunto de los elementos anulados por 12. Mediante la conjunción de fórmulas atómicas se puede representar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales. La negación de una fórmula, es decir, $\neg\varphi$ define al complemento del conjunto definido por φ. Claramente la disyunción $\varphi \vee \psi$ define la unión de los definidos por cada fórmula.

Las fórmulas obtenidas a partir sólo de fórmulas atómicas mediante combinaciones boolenas (combinaciones que sólo involucran $\wedge$, $\vee$ y $\neg$) se llaman libres de cuantificadores. Finalmente, agregamos a tales fórmulas los cuantificadores. Mediante el cuantificador existencial podemos definir una proyección de un conjunto definido. Por ejemplo si $\varphi(u, v) \equiv v = 2u$, entonces $\exists u\,(v = 2u)$ define los numeros pares, el cual es la proyección de $\varphi(M)$ el cual consiste en las parejas de la forma $(m, 2m)$.

Es importante notar que podemos enriquecer nuestro lenguaje admitiendo parámetros en las fórmulas, por ejemplo, parámetros de un subconjunto B de un módulo M. Esto se hace de manera formal agregando al lenguaje símbolos de constante b para cada elemento b de B, los cuales se interpretan en M de manera natural como el elemento correspondiente. Si nuestro lenguaje es $\mathscr{L}$, el lenguaje extendido se denota como $\mathscr{L}(B)$. En general, una interpretación M' de M como $\mathscr{L}(B)$-estructura se llama una $\mathscr{L}(B)$-expansión de M . A manera de ejemplo, veamos una interpretación de $\mathscr{L}(B)$ en un módulo distinto a M.

Observación I.2. Sea I un conjunto. Definimos la estructura M^I del lenguaje $\mathscr{L}(B)$ como el módulo potencia M^I, donde el símbolo de constante b, para $b \in B$, es interpretado como el elemento $(b : i \in I) \in M^I$.

Un concepto central en la teoría de modelos es el de tipo.

Definición I.3. Un **tipo** es un conjunto de fórmulas, en un lenguaje $\mathscr{L}$, finito satisfacible. En particular, si p es un conjunto de n-fórmulas (fórmulas con n variables libres) en $\mathscr{L}(B)$ finito satisfacible se dice que es un n-tipo sobre B. Observemos que al ser finito satisfacible, por el teorema Compacidad (citado en la página 5) todo tipo tiene un modelo.

Son de particular relevancia los tipos conformados por fórmulas con parámetros en B que satisfacen una n-ada específica en M, al cual se llama el **tipo de $\bar{a}$ sobre B en M**,

$$tp_M(\bar{a}/B) = \left\{\varphi(\bar{v}, \bar{b}) \in \mathscr{L}(B) \mid M \models \varphi(\bar{a}, \bar{b})\right\}.$$

Si $B = \emptyset$, simplemente escribimos $tp_M(\bar{a})$, el tipo de $\bar{a}$ en M.

Un n-tipo p es **completo** si para toda fórmula $\varphi(\bar{v})$ con n variables libres, $\varphi \in p$ o bien, $\neg\varphi \in p$. El tipo $tp_M(\bar{a}/B)$ es completo para toda $\bar{a} \in M$.

Podemos identificar a $tp_M(\bar{a}/B)$ con la colección de subconjuntos de M^n definibles (por fórmulas con parámetros en B) y que contienen a $\bar{a}$. Esta colección es un filtro (véase Apéndice, p. 65), aún más un ultrafiltro, en los conjuntos de M^n con la contención.

Continuaremos recordando algunas nociones y resultados de la teoría de modelos necesarios para nuestro fin.

Definición I.4. Sean M, M' R-módulos. M es **elementalmente equivalente** a M', $M \equiv M'$, si ambos satisfacen los mismos enunciados del lenguaje.

Un homomorfismo $f : M \to N$ se llama **elemental** si preserva satisfacibilidad de fórmulas, es decir, si para cada $\bar{a}$ en M, $tp_M(\bar{a}) = tp_N(f(\bar{a}))$. Denotamos con $M \leq N$ la inclusión o encaje de módulos. Decimos que es un **encaje elemental**, $M \prec N$, si $M \leq N$ y para cada $\bar{a}$ en M, $tp_M(\bar{a}) = tp_N(\bar{a})$, es decir, $\bar{a}$ satisface las mismas fórmulas en ambos módulos. M se llama **subestructura elemental** o **submódulo elemental** de N y N, a su vez, **extensión elemental** de M.

Observación I.5. Como $tp_M(\bar{a})$ contiene, en particular, todos los enunciados válidos en M, si $M \prec M'$ entonces M y M' son elementalmente equivalentes.

El encaje elemental de estructuras preserva subconjuntos definibles: si M es subestructura elemental de M' entonces $\varphi(M) = M \cap \varphi(M')$.

Ejemplo. Observemos que $M \leq M'$ y $M \cong M'$ no siempre implica que $M \prec M'$. Para ejemplificar esto, los $\mathbb{Z}$-módulos $2\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}$ son isomorfos y $2\mathbb{Z}$ es submódulo de $\mathbb{Z}$ pero no es elemental: si $\varphi(v) \equiv \exists w\, 2w = v$, entonces $\mathbb{Z} \models \varphi(2)$ pero $2\mathbb{Z} \not\models \varphi(2)$.

Definición I.6. La teoría de un módulo M, $Teo(M)$, es el conjunto de todos los enunciados que son ciertos en M. La teoría $Teo(\mathcal{K})$ de una clase de módulos $\mathcal{K}$ es el conjunto de enunciados que se satisfacen simultáneamente por todos los módulos de $\mathcal{K}$.

De manera general, una **teoría** T es un conjunto de enunciados de ${}_R\mathscr{L}$ consistente, es decir, que no se puede deducir una contradicción a partir de T. Un **modelo de una teoría** T es un módulo M que satisface todos los enunciados en T, $M \models T$.

Una teoría se llama **completa** si para todo enunciado σ del lenguaje, siempre sucede que σ o $\neg\sigma$ pertenecen a T.

La **cerradura deductiva** de una teoría T, en símbolos $T^{\models}$, es el conjunto de sus consecuencias lógicas, esto es, todo modelo de T es modelo de cada enunciado en $T^{\models}$.

Cualquier teoría de la forma $Teo(M)$, para un algún módulo M, es completa. Además toda teoría T puede extenderse a una teoría completa T' tomando a $T' = Teo(M)$ para algún modelo M de T.

Notemos que cualesquiera dos modelos de una teoría completa son elementalmente equivalentes.

Los siguientes enunciados son los axiomas (o esquemas de axiomas) de la teoría de los R-módulos izquierdos:

- $\forall u \forall v\, (u + v = v + u)$.
- $\forall u \forall v \forall w\, (u + (v + w) = (v + u) + w)$.
- $\forall u\, (u + 0 = u)$.
- $\forall u\, ((-1)u + u = 0)$, donde 1 es el neutro multiplicativo del anillo.
- $\forall u \forall v\, (r(u + v) = ru + rv)$, para todo $r \in R$.
- $\forall u\, ((r + s)u = ru + su)$, para todo $r, s \in R$.
- $\forall u\, ((rs)u = r(su))$, para todo $r, s \in R$.
- $\forall u\, ((1)u = u)$.

Al conjunto de estos axiomas lo denotamos por ${}_RT$.

Es decir, un R-módulo M, visto como una ${}_R\mathscr{L}$-estructura, modela a todos los enunciados anteriores.

Así, la teoría de los R-módulos izquierdos es la cerradura deductiva de ${}_RT$; para el caso de R-módulos derechos se procede de manera análoga. La teoría de R-módulos no es completa: el enunciado $\forall v(v = 0)$ es cierto en el módulo cero pero falso en todos los demás, de donde, ni él ni su negación pertenecen a ${}_RT^{\models}$.

En el desarrollo de este trabajo consideraremos como una teoría de módulos a una teoría en ${}_R\mathscr{L}$ (o en $\mathscr{L}_R$) que contenga al conjunto de axiomas anterior (o su equivalente para R-módulos derechos).

Un resultado relevante en teoría de modelos en módulos, aunque en este trabajo no nos enfocaremos en él, es que toda teoría T de módulos es *estable* (véase [26]).

Definición I.7. Una clase de módulos $\mathcal{K}$ se dice **axiomatizable** si es la clase de los modelos de una teoría de módulos T. La caracterización de clases axiomatizables en un lenguaje de primer orden es la siguiente: $\mathcal{K}$ es axiomatizable en ${}_R\mathscr{L}$ si y sólo si es cerrada respecto a ultraproductos y equivalencia elemental.

Para finalizar enunciaremos los teoremas clásicos de la lógica de primer orden, los cuales se utilizan de manera implicita en este trabajo.

Completud Si T es una teoría y σ un enunciado, entonces σ es válido en cada modelo de T si y sólo si T prueba σ.

Compacidad Un conjunto de fórmulas es satisfacible, es decir, tiene un modelo, si y sólo si es finito satisfacible (todo subconjunto finito es satisfacible). A saber, si $\Phi(\bar{v})$ es finito satisfacible en M, entonces existe una extensión elemental M' de M y una $\bar{a}$ en M' tal que $M' \models \Phi(\bar{a})$.

Löwenheim-Skolem ascendente Sea M una estructura con un universo infinito. Para cada cardinal $\lambda \geq |M| + |\mathscr{L}(M)|$ existe $N \succ M$ de cardinalidad al menos λ.

Löwenheim-Skolem descendente Sea N una estructura infinita de cardinalidad al menos $|\mathscr{L}(M)|$. Para cada $A \subseteq N$ existe $M \prec N$ tal que $A \subseteq M$ y $|M| \leq |A| + |\mathscr{L}(M)| + \aleph_0$.

Lema del diagrama Sean M y N $\mathscr{L}$-estructuras. M se encaja en N si y sólo si existe una $\mathscr{L}(M)$-expansión de N que es modelo del diagrama de M, $Diag(M)$, el cual es el conjunto de fórmulas atómicas y negaciones de fórmulas atómicas de $\mathscr{L}$ que modela M.

Amalgamación de estructuras Si M y M' son modelos de una teoría completa T, entonces existe un modelo de T que contiene a M y M' como subestructuras elementales.

Capítulo II

Teoría de modelos en módulos

En este capítulo se introducirá el concepto de fórmula primitivo positiva en el lenguage de los R-módulos y sus principales propiedades, incluida su dualidad. Asimismo, se expondrá el teorema esencial de pp-eliminación de cuantificadores.

II.1. Fórmulas primitivo positivas

Definición II.1. Una fórmula φ se llama **primitivo positiva**, **pp-fórmula**, si es de la forma $\exists\bar{w}\,\theta(\bar{w},\bar{v})$, donde θ es una conjunción finita de fórmulas atómicas.

En un lenguaje sin más símbolos de relación que la igualdad, cada fórmula atómica es una ecuación, así que una pp-fórmula expresa que cierto conjunto finito de ecuaciones tiene una solución, por lo que una pp-fórmula φ en ${}_R\mathscr{L}$ debe tener la siguente forma

$$\exists w_1,\dots,w_m \bigwedge_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{m} r_{ij}w_j - \sum_{l=1}^{n} s_{il}v_l = 0\right), \tag{$\star$}$$

donde $m,n,k\in\mathbb{N}$, $r_{ij},s_{il}\in R$ y $v_1,\dots,v_n$ son variables libres de φ. La fórmula φ puede o no tener variables acotadas.

Diremos que son pp-fórmulas izquierdas o derechas, dependiendo al lenguaje al que pertenezcan, esto es, respectivamente ${}_R\mathscr{L}$ o $\mathscr{L}_R$.

Observemos que el conjunto de todas la pp-fórmulas es cerrada bajo cuantificadores existenciales, aunque el número de variables libres cambia frecuentemente.

Otra manera de representar a $\varphi(\bar{v})$ es mediante matrices

$$\varphi(\bar{v}) \equiv \exists\bar{w}\,(A\bar{w}=B\bar{v});$$

una abreviación para tal fórmula es $A|B\bar{v}$ (de alguna manera φ representa que A divide a $B\bar{v}$).

Observación II.2 (Transformación de las pp-fórmulas en matrices)**.** Si $\varphi(\bar{v})$ es la siguiente pp-fórmula con n variables libres

$$\exists\, w_1,\dots,w_m \bigwedge_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{m} r_{ij}w_j = \sum_{l=1}^{n} s_{il}v_l\right),$$

desglosando las ecuaciones, es equivalente a

$$\exists\, w_1,\ldots,w_m \quad \begin{array}{rl} r_{11}w_1 + r_{12}w_2 + \cdots + r_{1m}w_m = & s_{11}v_1 + s_{12}v_2 + \cdots + s_{1m}v_n \\ r_{21}w_1 + r_{22}w_2 + \cdots + r_{2m}w_m = & s_{21}v_1 + s_{22}v_2 + \cdots + s_{2m}v_n \\ & \vdots \\ r_{k1}w_1 + r_{k2}w_2 + \cdots + r_{km}w_m = & s_{k1}v_1 + s_{k2}v_2 + \cdots + s_{km}v_n \end{array}$$

Así podemos reescribirla en su forma matricial $\varphi(\bar{v}) \equiv \exists \bar{w}\,(A\bar{w} = B\bar{v})$, donde

$$A = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{k1} & r_{k2} & \cdots & r_{km} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{k1} & s_{k2} & \cdots & s_{kn} \end{pmatrix}$$

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad \bar{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}.$$

Lema II.3 (Linealidad de las pp-fórmulas)**.** *Sea $\varphi(\bar{v})$ una pp-fórmula de ${}_R\mathscr{L}$. Para todo módulo M se cumple:*

(a) $M \models \varphi(\bar{0})$.

(b) $M \models \forall\, \bar{v}, \bar{u}\; (\varphi(\bar{v}) \wedge \varphi(\bar{u}) \rightarrow \varphi(\bar{v} - \bar{u}))$.

Demostración. Tomemos a φ como en $(\star)$.

Es claro (a), ya que $\varphi(\bar{0}) \equiv \exists w_1,\ldots,w_m \quad \bigwedge_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{m} r_{ij}w_j = 0\right)$ y por lo tanto, para que se cumpla $\varphi(\bar{0})$, basta tomar $w_j = 0$ para toda $1 \leq j \leq m$.

Para (b), sean $\bar{a} = (a_1,\ldots,a_n), \bar{b} = (b_1,\ldots,b_n)$ n-adas en M tales que $M \models \varphi(\bar{a}) \wedge \varphi(\bar{b})$, entonces existen $w_1,\ldots,w_m, w_1',\ldots,w_m' \in M$ tales que para toda $1 \leq i \leq k$

$$\sum_{j=1}^{m} r_{ij}w_j - \sum_{l=1}^{n} s_{il}a_l = 0 \quad y \quad \sum_{j=1}^{m} r_{ij}w_j' - \sum_{l=1}^{n} s_{il}b_l = 0,$$

de donde

$$\sum_{j=1}^{m} r_{ij}(w_j - w_j') - \sum_{l=1}^{n} s_{il}(a_l - b_l) = 0.$$

Por lo tanto, $M \models \varphi(\bar{a} - \bar{b})$. □

Definición II.4. Para todo R-módulo M y φ pp-fórmula con n variables libres, $\varphi(M)$ es un subgrupo definible de M^n, llamado **pp-subgrupo**.

Observación II.5. Más aún, si R es un anillo conmutativo $\varphi(M)$ también es un submódulo, sólo basta notar que si $r \in R$ y $\bar{a} \in \varphi(M)$, los elementos que atestiguan $\varphi(r\bar{a})$ son los testigos para $\bar{a}$ multiplicados por r. Si $\varphi(M) \equiv \exists \bar{w}\,(A\bar{w} = B\bar{v})$ para ciertas matrices A y B en R, dado que $\bar{a}$ la satisface, existe $\bar{c}$ en M tal que $A\bar{c} = B\bar{a}$, luego por la conmutatividad de R,

$$B(r\bar{a}) = r(B\bar{a}) = r(A\bar{c}) = A(r\bar{c}).$$

Los ejemplos más simples de pp-fórmulas son aquellas que representan condiciones de anulación y de divisibilidad.

Ejemplo. Sea M un R-módulo.

(a) Si $r \in R$, entonces la pp-fórmula $\varphi(v) \equiv rv = 0$ es realizada por $a \in M$ si y sólo si r anula al elemento a, entonces $\varphi(M) = \{a \in M \mid ra = 0\}$. Esta condición se puede generalizar con la pp-fórmula, con n variables libres,$\psi(\bar{v}) \equiv H\bar{v} = 0$, donde $H = (r_{ij})$ es una matriz en R de tamaño $n \times m$, así $\theta(M) = \{\bar{a} \in M^n \mid H\bar{a} = 0\}$.

(b) Si $r \in R$, entonces la pp-fórmula $\varphi(v) \equiv \exists w\,(v = rw)$, la cual en notación matricial es equivalente a $\exists w\,(1\ -r)\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$, es realizada por $a \in M$ si y sólo si a es divisible por r en M.

Notación. Dado un homomorfismo de R-módulos $f : M \longrightarrow N$, si $\bar{a}$ es una n-ada en M, digamos $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$, denotamos con $f(\bar{a})$ a la n-ada $(f(a_0), f(a_1), \ldots, f(a_{n-1}))$.

Lema II.6. *Sean M, N R-módulos, $f : M \longrightarrow N$ un homomorfismo entre ellos y $\varphi(\bar{v})$ una pp-fórmula. Entonces $M \models \varphi(\bar{a})$ implica que $N \models \varphi(f(\bar{a}))$ para cualquier $\bar{a}$ en M.*

Demostración. Supongamos que $\varphi(\bar{v}) \equiv \exists \bar{w}\theta(\bar{w}, \bar{v})$, donde θ es una conjunción de fórmulas atómicas (ecuaciones).

Sea $\bar{a}$ en M, si $M \models \varphi(\bar{a})$, existe $\bar{b}$ en M tal que $\theta(\bar{b}, \bar{a})$ se cumple en M. De la linealidad del homomorfismo f se sigue que $\theta(f(\bar{b}), f(\bar{a}))$ se cumple en N, por lo tanto $N \models \exists \bar{w}\,\theta(\bar{w}, f(\bar{a}))$, esto es, $N \models \varphi(f(\bar{a}))$ □

Luego, las realizaciones de una pp-fórmula se preservan respecto a homomorfismos.

Un pp-subgrupo $\varphi(M)$ no necesariamente es un R-submódulo, pero sí lo es, si se consideran como $End_R(M)$-módulos.

Observación II.7. Sea M un R-módulo y $End_R(M)$ el anillo de endomorfismos de M, es decir, R-homomorfismos $f : M \to M$. Recordemos que, para cualquier n natural, M^n es un $End(M)$-módulo si definimos la multiplicación escalar para $f \in End_R(M)$ y $\bar{a} = (a_0, \ldots, a_{n-1}) \in M^n$ como $f\bar{a} := f(\bar{a}) = (f(a_0), \ldots, f(a_{n-1}))$.

Sea φ una pp-fórmula . Entonces $\varphi(M)$ es un submódulo de M como $End_R(M)$-módulos.

Ejemplo. Sean $R = \mathbb{Z}$ y p un número primo. Sea $M = \bigoplus_I \mathbb{Z}_p$, donde I es un conjunto posiblemente infinito y $\mathbb{Z}_p$ denota al $\mathbb{Z}$-módulo cíclico de p elementos. La pp-fórmula $v = v$ (o equivalentemente, la pp-fórmula $0v = 0$) define a todo M, es decir, el pp-subgrupo definido por tal fórmula es M; la pp-fórmula $v = 0$ define al subgrupo cero. Además, no existen más pp-subgrupos de M: para cualesquiera dos elementos distintos de cero a, $b \in M$ existe un homomorfismo $f \in End_R(M)$ tal que $f(a) = b$, luego, si $\varphi(M)$ es un pp-subgrupo distinto de cero, digamos $0 \neq a \in \varphi(M)$, entonces para cualquier $b \in M$, $b \neq 0$, tenemos que $b = f(a) \in \varphi(M)$ para la f adecuada, de donde $\varphi(M) = M$.

Con una pp-fórmula no sólo podemos representar a un sistema de ecuaciones homogéneo. Si permitimos que en las pp-fórmulas se involucren parámetros se abre la posibilidad a más sistemas de ecuaciones.

Definición II.8. Una **pp-fórmula con parámetros**, digamos $\bar{b}$ de un módulo M, es el resultado de remplazar $\bar{u}$ con $\bar{b}$ (de manera formal, remplazar con símbolos de constante para $\bar{b}$) en una pp-fórmula $\varphi(\bar{v}, \bar{u})$ con $n+m$ variables libres. El resultado es $\varphi(\bar{v}, \bar{b})$ una pp-fórmula con n variables libres en el lenguaje extendido.

Para $\varphi(\bar{v}, \bar{u})$ una pp-fórmula con $n+m$ variables libres, denotamos

$$\varphi(M, \bar{b}) = \{\bar{a} \in M^n \mid M \models \varphi(\bar{a}, \bar{b})\}.$$

para cualquier m-ada $\bar{b}$ en M.

A partir de este momento, siempre se mencionarán las restricciones de parámetros a las pp-fórmulas en cuestión.

Lema II.9. *El conjunto $\varphi(M, \bar{b})$ es vacío o es una clase lateral de M^n con respecto al subgrupo $\varphi(M, \bar{0})$.*

Demostración. Primero notemos que, efectivamente, $\varphi(\bar{v}, \bar{0})$ es una pp-fórmula sin parámetros, por lo cual $\varphi(M, \bar{0})$ es un subgrupo. Sea $\bar{b} \in M^n$, supongamos que $\varphi(M, \bar{b})$ no es vacío. Elegimos $\bar{c}^* \in \varphi(M, \bar{b})$ y afirmamos que $\varphi(M, \bar{b}) = \bar{c}^* + \varphi(M, \bar{0})$.

Sea $\bar{d}$ cualquier elemento de $\varphi(M, \bar{b})$, el lema II.3 implica que la pp-fórmula $\varphi(\bar{d} - \bar{c}^*, \bar{b} - \bar{b}) \equiv \varphi(\bar{d} - \bar{c}^*, \bar{0})$ se cumple en M, es decir, $\bar{d} - \bar{c}^* \in \varphi(M, \bar{0})$. De donde, $\bar{d} \in \bar{c}^* + \varphi(M, \bar{0})$.

Por otra parte, sea $\bar{d}$ un elemento de $\bar{c}^* + \varphi(M, \bar{0})$. Entonces $M \models \varphi(\bar{d} - \bar{c}^*, \bar{0})$, además $M \models \varphi(\bar{c}^*, \bar{b})$ por la elección de $\bar{c}^*$. Luego, nuevamente por la linealidad de las pp-formulas, $\varphi((\bar{d} - \bar{c}^*) + \bar{c}^*, \bar{0} + \bar{b}) \equiv \varphi(\bar{d}, \bar{b})$ se cumple en M, obteniéndose así la otra contención. □

II.2. La retícula de pp-fórmulas y pp-Tipos

Dotaremos a las pp-fórmulas sin parámetros (bajo equivalencia) de una estructura de retícula (veáse A.2).

Si φ, ψ son pp-fórmulas en el mismo número de variables libres, definimos $\psi \leqslant \varphi$ si $\psi(M) \subseteq \varphi(M)$ para todo R-módulo M, es decir, si ${}_R T \models \forall\, \bar{v}\, (\psi(\bar{v}) \to \varphi(\bar{v}))$.

Definimos la pp-fórmula $\varphi + \psi$ como $(\varphi + \psi)(\bar{v}) \equiv \exists \bar{z}(\varphi(\bar{v} - \bar{z}) \wedge \psi(\bar{z}))$. A partir de la definición se observa que el pp-subgrupo definido por $\varphi + \psi$ en un módulo M coincide con la suma de los pp-subgrupos definidos por φ y ψ: sólo notemos que si $\bar{a} \in (\varphi + \psi)(M)$, existe $\bar{c} \in \psi(M)$ tal que $\bar{b} = \bar{a} - \bar{c} \in \varphi(M)$, es decir, $\bar{a} = \bar{b} + \bar{c} \in \varphi(M) + \psi(M)$.

Sea PP_n el conjunto de clases de equivalencia de las pp-fórmulas de $\mathscr{L}_R$ con n variables libres respecto a la equivalencia de fórmulas $\equiv$, denotamos con $\overline{\varphi}$ a la clase de equivalencia de la pp-fórmula φ. Heredamos a PP_n de manera natural el orden $\leqslant$: $\overline{\varphi} \leqslant \overline{\psi}$ si y sólo si $\varphi_0 \leqslant \psi_0$ para cualesquiera, o equivalentemente, para todas las pp-fórmulas φ_0, ψ_0 tales que $\varphi_0 \equiv \varphi$ y $\psi_0 \equiv \psi$.

Dotamos al conjunto PP_n con el orden parcial $\leqslant$ de la estructura de retícula.

Primero definimos las operaciones $+$ y $\wedge$ para elementos de PP_n como $\overline{\varphi} + \overline{\psi} \equiv \overline{\varphi + \psi}$ y $\overline{\varphi} \wedge \overline{\psi} \equiv \overline{\varphi \wedge \psi}$, las cuales están bien definidas: si $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ y $\psi_1 \equiv \psi_2$ entonces

$$\begin{aligned}
(\varphi_1 + \psi_1)(\bar{v}) &\equiv \exists \bar{z}(\varphi_1(\bar{v} - \bar{z}) \wedge \psi_1(\bar{z})) \\
&\equiv \exists \bar{z}(\varphi_2(\bar{v} - \bar{z}) \wedge \psi_2(\bar{z})) \equiv (\varphi_2 + \psi_2)(\bar{v}),
\end{aligned}$$

$$(\varphi_1 \wedge \psi_1)(\bar{v}) \equiv (\varphi_2 \wedge \psi_2)(\bar{v}).$$

Es necesario notar que al utilizar las operaciones anteriores y el orden parcial de las clases de equivalencia es equivalente hacerlo en las pp-fórmulas representantes.

Se define al supremo y al ínfimo de $\overline{\varphi}$ y $\overline{\psi}$, respectivamente como $\overline{\varphi+\psi}$ y $\overline{\varphi\wedge\psi}$. Con el fin de verificar que cumplen con los requisitos necesarios para ser el supremo y el ínfimo, primero veamos que son cotas, respectivamente superior e inferior.

Para ver que $\overline{\varphi+\psi}$ es cota superior debemos mostrar que $\overline{\varphi} \leqslant \overline{\varphi+\psi}$ y $\overline{\psi} \leqslant \overline{\varphi+\psi}$, o bien, $\varphi \leqslant \varphi+\psi$ y $\psi \leqslant \varphi+\psi$. Sea M un R-módulo, si $M \models \varphi(\bar{a})$ entonces $(\varphi+\psi)(\bar{a})$ tiene como testigo $\bar{z}=\bar{0}$, de donde $\varphi(M) \subseteq (\varphi+\psi)(M)$. Si $M \models \psi(\bar{a})$ entonces $(\varphi+\psi)(\bar{a})$ se satisface por $\bar{z}=\bar{a}$, así $\varphi(M) \subseteq (\varphi+\psi)(M)$.

Claramente $\overline{\varphi\wedge\psi} \leqslant \overline{\varphi}$ y $\overline{\varphi\wedge\psi} \leqslant \overline{\psi}$, ya que el pp-subgrupo $\varphi(M)\cap\psi(M)$ está contenido en los pp-subgrupos $\varphi(M)$ y $\psi(M)$ para todo módulo M.

Finalmente, sean $\overline{\zeta}$ otra cota superior y $\overline{\gamma}$ otra cota inferior de $\overline{\varphi}$ y $\overline{\psi}$. Entonces, para todo módulo M, $\varphi(M) \subseteq \zeta(M)$ y $\psi(M) \subseteq \zeta(M)$, de donde, el subgrupo $(\varphi+\psi)(M) \equiv \varphi(M)+\psi(M) \subseteq \zeta(M)$. Así $\overline{\varphi+\psi}$ es la menor cota superior. Por otra parte $\gamma(M) \subseteq \varphi(M)$ y $\gamma(M) \subseteq \psi(M)$, lo cual implica que $\gamma(M) \subseteq \varphi(M)\cap\psi(M) \equiv (\varphi\wedge\psi)(M)$, con lo que se demuestra que $\overline{\varphi\wedge\psi}$ es la mayor cota inferior.

Definición II.10. Para cada n natural, la **pp-retícula** de R-Mod, $pp_n(R\text{-}Mod)$ es la retícula $(\mathsf{PP}_n, \leqslant, \wedge, +)$.

Dado un R-módulo M definimos la **pp-retícula de M**, $pp_n(M)$, sobre los conjuntos

$$\{\varphi(M) \mid \varphi \text{ es una pp-fórmula con } n \text{ variables libres}\}.$$

En ella, el supremo es la suma de grupos y el ínfimo la intersección de grupos, con el orden parcial $\subseteq$.

Seguiremos con otros conceptos relevantes.

Definición II.11. Un **pp-tipo** (parcial) es un tipo formado por pp-fórmulas, posiblemente con parámetros, en el mismo número de variables libres. En otras palabras, un pp-tipo es un conjunto de pp-fórmulas consistente (en la teoría que se considere, en nuestro caso, en la teoría los R-módulos).

Si los parámetros los tomamos en un conjunto B decimos que es un **pp-tipo sobre B**.

Si p es un tipo entonces las pp-fórmulas en él forman un pp-tipo, el cual es completo con respecto a consistencia, lo denotamos como p^+, la **pp-parte de p**.

Un pp-tipo p se llama **completo con respecto a consistencia** si para toda pp-fórmula $\varphi \notin p$, $\{\varphi\} \cup p$ no es consistente, es decir, finito satisfacible.

De manera frecuente trabajaremos con pp-tipos completos con respecto a consistencia, ya que son deductivamente cerrados, es decir, cerrados respecto a conjunciones finitas e implicación de pp-fórmulas.

Proposición II.12. *El cero siempre realiza a un pp-tipo Φ sin parámetros, y el conjunto de sus realizaciones forma un subgrupo en M.*

Demostración. Se sigue del lema II.3. $\square$

Existen varias propiedades inmediatas de los pp-tipos que necesitamos notar:

Observación II.13. Un pp-tipo sin parámetros completo es un filtro (véase Apéndice, p. 65): si $\varphi, \varphi' \in \Phi$ entonces $\varphi\wedge\varphi' \in \Phi$ y ψ es tal que $\varphi \leqslant \psi$ entonces $\psi \in \Phi$. Se induce un filtro mediante los subgrupos definidos por pp-fórmulas en Φ, en los subgrupos de M con la contención.

Observación II.14. Como un pp-tipo es consistente, no puede contener pp-fórmulas que den lugar a clases laterales distintas de un mismo subgrupo.

Demostración. Sean $\varphi(\bar{v},\bar{b}),\psi(\bar{v},\bar{c})$ en un pp-tipo Φ. Dado un módulo M, si $\varphi(M,\bar{b})$ y $\psi(M,\bar{c})$ son dos clases laterales distintas de un mismo subgrupo entonces $\varphi(M,\bar{b})\cap\psi(M,\bar{c})=\emptyset$, de donde $M\models\neg\exists\bar{v}(\varphi(\bar{v},\bar{b})\wedge\psi(\bar{v},\bar{c}))$, contradiciendo la consistencia de Φ. $\square$

Observación II.15. Si los parámetros de un pp-tipo son tomados de un módulo M, por ser un conjunto consistente existe una extensión elemental $N\succ M$ que realiza al pp-tipo.

Definición II.16. Dada una n-ada $\bar{a}$ en M el conjunto de pp-fórmulas a las que satisface $\bar{a}$ forman un tipo, llamado el **pp-tipo completo de $\bar{a}$ en M**

$$tp^+_M(\bar{a})=\{\varphi(\bar{v})\mid\varphi(\bar{v})\text{ es una pp-fórmula y }M\models\varphi(\bar{a})\}\,.$$

En particular, definimos el **pp-tipo de $\bar{a}$ sobre B en M** como

$$tp^+_M(\bar{a}/B)=\big\{\varphi(\bar{v},\bar{b})\mid\varphi(\bar{v},\bar{w})\text{ es una pp-fórmula,}\qquad \bar{b}\in B^m\text{ para alguna }m\text{ y }M\models\varphi(\bar{a},\bar{b})\big\}\,.$$

Lema II.17. *Si Φ es un pp-tipo completo (con respecto a consistencia) que se realiza en M entonces $\Phi=tp^+_M(\bar{a})$ para alguna $\bar{a}$ en M.*

Demostración. Como Φ es realizado en M, existe $\bar{a}$ tal que $\Phi\subseteq tp^+_M(\bar{a})$ y por ser completo debe suceder que $tp^+_M(\bar{a})\subseteq\Phi$. $\square$

Definición II.18. Si ψ y Φ son, respectivamente, una pp-fórmula y un pp-tipo sin parámetros, decimos que **ψ genera a Φ**, en símbolos $\psi\leqslant\Phi$, si $\psi\leqslant\varphi$ para toda $\varphi\in\Phi$, es decir, $\psi(M)\subseteq\varphi(M)$ para todo módulo M y para toda $\varphi\in\Phi$.

Decimos que la pp-fórmula con parámetros $\psi(\bar{v},\bar{b})$ genera a un pp-tipo con parámetros Φ, en símbolos $\psi(\bar{v},\bar{b})\leqslant\Phi$, si $\psi(\bar{v},\bar{0})$ genera al pp-tipo Φ_*, el cual no tiene parámetros y está formado a partir de los elementos de Φ de la siguiente manera: $\Phi_*=\{\varphi(\bar{v},\bar{0})\mid\varphi(\bar{v},\bar{c})\in\Phi\text{ para alguna }\bar{c}\}$.

Un pp-tipo es **finitamente generado** (**fg**) si es generado por una fórmula contenida en él.

Lema II.19. *Sea M un R-módulo.*

(a) *Para cualesquiera pp-fórmulas $\varphi(\bar{v},\bar{b})$, $\psi(\bar{v},\bar{c})$, con parámetros y con las mismas variables libres, se tiene que $\varphi(M,\bar{b})\subseteq\psi(M,\bar{c})$ si y sólo si $\varphi(M,\bar{0})\subseteq\psi(M,\bar{0})$ y $\varphi(M,\bar{b})\cap\psi(M,\bar{c})\neq\emptyset$.*

(b) *Un pp-tipo p realizado en M (en particular, $p=tp^+_M(\bar{a}/B)$) es finitamente generado por φ si y sólo si $\varphi(M)\subseteq\psi(M)$ para todo $\psi\in\Phi$.*

Demostración. Empecemos mostrando con detalle (a), que es el más técnico.

Para la suficiencia, si $\varphi(M,\bar{b})$ no es vacío elegimos $\bar{a}^*\in\varphi(M,\bar{b})\subseteq\psi(M,\bar{c})$, entonces $\varphi(M,\bar{b})=\bar{a}^*+\varphi(M,\bar{0})$ y $\psi(M,\bar{c})=\bar{a}^*+\psi(M,\bar{0})$, luego, por la hipótesis, $\varphi(M,\bar{0})\subseteq\psi(M,\bar{0})$.

Recíprocamente, es suficiente notar que $\bar{a}^*\in\varphi(M,\bar{b})\cap\psi(M,\bar{c})$ sirve como representante de ambas clases laterales con lo cual, como $\varphi(M,\bar{0})\subseteq\psi(M,\bar{0})$, obtenemos el resultado deseado.

Continuemos con (b).

Si $\varphi(\bar{v},\bar{b})\in p$ genera a p, entonces, por definición, $\varphi(\bar{v},\bar{0})\leqslant\psi(\bar{v},\bar{0})$ para toda $\psi(\bar{v},\bar{c})\in p$, además existe $\bar{a}\in\varphi(M,\bar{b})\cap\psi(M,\bar{c})$ por ser p finito satisfacible. De (a), $\varphi(M,\bar{b})\subseteq\psi(M,\bar{c})$.

La necesidad es inmediata utilizando nuevamente el inciso anterior. $\square$

Proposición II.20. *Toda pp-fórmula consistente genera un pp-tipo completo en algún módulo.*

Demostración. Sea φ una pp-fórmula consistente. Supongamos que es de la forma $\varphi(\bar{v},\bar{b})$, donde los parámetros $\bar{b}$ pertenecen a $B \subseteq M$, y además M la satisface. Sea $p = \{\psi(\bar{v},\bar{c}) \mid \psi$ es una pp-fórmula con $\bar{c}$ en B, $\varphi(M,\bar{b}) \subseteq \psi(M,\bar{c}),\ \ \varphi(\bar{v},\bar{0}) \leqslant \psi(\bar{v},\bar{0})\}$. Claramente $\varphi \leqslant p$ y $\varphi \in p$. A todas las pp-fórmulas $\psi(\bar{v},\bar{c})$, con $\bar{c}$ en B, que no pertenecen a p las colectamos en $\{\psi_i(\bar{v},\bar{c}_i) \mid i \in I\}$ donde I es un conjunto índice. Para cada $i \in I$ elegimos $\bar{a}_i \in \varphi(M,\bar{b}) - \psi_i(M,\bar{c}_i)$ y definimos $\bar{a} = (\bar{a}_i)_{i\in I}$ en M^I. Veamos que $tp^+_{M^I}(\bar{a}/B) = p$, donde la interpretación de M^I como ${}_R\mathscr{L}(B)$-estructura es la misma que en la observación I.2, con lo cual p tiene la forma necesaria para ser completo.

Empecemos con la contención $p \subseteq tp^+_{M^I}(\bar{a}/B)$. Basta mostrar que $\varphi(\bar{v},\bar{b}) \in tp^+_{M^I}(\bar{a}/B)$, pero que $\bar{a}$ satisfaga a $\varphi(\bar{v},\bar{b})$ en M^I es equivalente, por la interpretación en M^I, a que cada una de sus componentes $\bar{a}_i$ satisfaga a $\varphi(\bar{v},\bar{b})$ en M, lo cual se cumple por la elección de las $\bar{a}_i$.

Para la otra contención, sea $\psi(\bar{v},\bar{c})$ una pp-fórmula tal que $M^I \models \psi(\bar{a},\bar{c})$, lo que es lo mismo, $\bar{a}_i \in \psi(M,\bar{c})$ para toda $i \in I$, de donde ψ no puede ser ψ_j para ninguna $j \in I$, por lo cual $\psi \in p$. $\square$

II.3. Realizaciones Libres

Los módulos finitamente presentados y las pp-fórmulas guardan una relación relevante.

Definición II.21. Dada una pp-fórmula φ, una **realización libre de $\boldsymbol{\varphi}$**, es un par $(M,\bar{a})$ que consiste en un módulo M finitamente presentado (véase Apéndice, p. 66) y $\bar{a} \in \varphi(M)$ tal que para cualquier módulo N y $\bar{b} \in \varphi(N)$ existe un homomorfismo $f : M \to N$ tal que $\bar{a} \mapsto \bar{b}$ (lo denotamos[1] con $f : (M,\bar{a}) \to (N,\bar{b})$). En tal caso diremos que $\bar{a}$ realiza libremente a φ en M, y también que M realiza libremente a φ.

Lema II.22. *Para pp-fórmulas sin cuantificadores, es decir, fórmulas de la forma $\psi(\bar{v}) \equiv H\bar{v} = \bar{0}$ donde H es una matriz de tamaño apropiado, una realización libre $(M_H,\bar{a}_H)$ se obtiene de manera canónica tomando al módulo M_H como sigue: si H es una matriz de tamaño $n \times m$, consideramos el R-módulo izquierdo $M_H = R^m/K_H$, donde K_H es el submódulo generado por las n filas de H (así M_H es finitamente presentado). Y tomamos a $\bar{a}_H$ una sucesión de generadores de M_H.*

Demostración. Notemos que $K_H = \{\bar{r}H \mid \bar{r} \in R^n\}$. Si

$$H = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1m} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & s_{nm} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} K_H &= \langle (s_{11}, s_{12}, \cdots, s_{1m}), \ldots, (s_{n1}, s_{n2}, \cdots, s_{nm}) \rangle \\ &= \{r_1(s_{11}, s_{12}, \cdots, s_{1m}) + \cdots + r_n(s_{n1}, s_{n2}, \cdots, s_{nm}) \mid r_i \in R\} \\ &= \{(r_1 s_{11} + \cdots + r_n s_{n1}, \ldots, r_1 s_{1m} + \cdots + r_n s_{nm}) \mid r_i \in R\} \\ &= \{(r_1, r_2, \ldots, r_n)H \mid r_i \in R\}. \end{aligned}$$

Sea e_j el elemento de R^m que tiene 1 en la j-ésima entrada y 0 en las demás, sea

$$\bar{a}_H = (e_0 + K_H, \ldots, e_{m-1} + K_H)^t;$$

[1]Esta notación sólo indica la descripción del homomorfismo, no tiene una conotación en términos de teoría de modelos.

$\bar{a}_H$ es una sucesión de generadores de M_H. Sea G una matriz de tamaño $k \times m$ sobre R. Entonces

$$G(e_0, \ldots, e_{m-1})^t = G\mathbf{I} = G.$$

$G\bar{a}_H$ es igual a la k-ada de clases laterales de las filas de G.

$$\begin{aligned} G\bar{a}_H &= \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1m} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{k1} & g_{k2} & \cdots & g_{km} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_0 + K_H \\ e_1 + K_H \\ \vdots \\ e_{m-1} + K_H \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (g_{11}e_0 + \cdots + g_{1m}e_{m-1}) + K_H \\ (g_{21}e_0 + \cdots + g_{2m}e_{m-1}) + K_H \\ \vdots \\ (g_{k1}e_0 + \cdots + g_{km}e_{m-1}) + K_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (g_{11}, \ldots, g_{1m}) + K_H \\ (g_{21}, \ldots, g_{2m}) + K_H \\ \vdots \\ (g_{k1}, \ldots, g_{km}) + K_H \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Entonces $G\bar{a}_H = \bar{0}$ en M_H si y sólo si esta k-ada pertenece a K_H, equivalentemente, si cada entrada es de la forma $\bar{r}H$ para alguna $\bar{r}$ en R^n.

Por lo anterior, $G\bar{a}_H = \bar{0}$ en M_H si y sólo si $G = FH$ para alguna matriz $k \times n$ F. En particular, $H\bar{a}_H = \bar{0}$.

Para mostrar que $(M_H, \bar{a}_H)$ es una realización libre de ψ, sea M cualquier módulo y supongamos que $\bar{a} = (a_0, \ldots, a_{m-1}) \in M^m$ satisface tal fórmula, $M \models \psi(\bar{a})$. Con la asignación $e_i + K_H \mapsto a_i$, $i < m$, obtenemos el homomorfismo $f : (M_H, \bar{a}_H) \to (M, \bar{a})$: resta ver que esté bien definido. Si $\bar{t} + K_H \in M_H$ es cero, es decir, $\bar{t} = (t_0, \ldots, t_{m-1}) \in K_H$, entonces existe $\bar{r} \in R^n$ tal que $\bar{t} = \bar{r}H$. Luego,

$$f(\bar{t} + K_H) = f(\bar{t}\bar{a}_H) = \bar{t}f(\bar{a}_H) = \bar{t}\bar{a} = (\bar{r}H)\bar{a} = \bar{r}(H\bar{a}) = \bar{r}\bar{0} = \bar{0}.$$

$\square$

Observación II.23. Más aún, un módulo es finitamente presentado si y sólo si es de la forma M_H para alguna matriz H.

Demostración. Si M es finitamente presentado existe un epimorfismo $h : R^m \to M$, para algún m natural, tal que $Ker\, h$ es finitamente generado, digamos que por n elementos. Entonces H es la matriz de tamaño $n \times m$ cuyas filas son las m-adas generadoras de $Ker\, h$. Así $M \cong R^m/Ker\, h = M_H$ $\square$

Las realizaciones libres también existen para pp-fórmulas que incluyen cuantificadores como se puede observar en el siguiente resultado.

Lema II.24 (Existencia de realizaciones libres)**.**

(a) *Cada pp-fórmula libre de cuantificadores ψ tiene (salvo isomorfismos) una única realización libre $(M_\psi, \bar{a}_\psi)$ tal que $\bar{a}_\psi$ es una sucesión de generadores de M_ψ. Recíprocamente, para cada sucesión de generadores $\bar{a}$ en un módulo finitamente presentado M existe una pp-fórmula libre de cuantificadores ψ tal que $(M, \bar{a})$ es una realización libre de ψ.*

(b) *Cada pp-fórmula tiene una realización libre. Recíprocamente, para cada n-ada en un módulo M finitamente presentado existe una pp-fórmula φ tal que $(M, \bar{a})$ es una realización libre de φ; de manera más precisa, si $M = M_H$ entonces φ puede ser tomada de la forma $\exists \bar{w}(H\bar{w} = \bar{0} \wedge \bar{v} = G\bar{w})$.*

(c) *Sea* $(M, \bar{a})$ *es una realización libre de una pp-fórmula* φ. *Entonces para cualquier pp-fórmula* ψ *(en las mismas variables libres)*

$$M \models \psi(\bar{a}) \quad \textit{si y sólo si} \quad \varphi \leqslant \psi,$$

es decir, $tp^{+}_{M}(\bar{a})$ *es generado por* φ.

Demostración.

(a) Una pp-fórmula ψ libre de cuantificadores es de la forma $H\bar{v} = \bar{0}$ para cierta matriz H, entonces $(M_H, \bar{a}_H)$ es una realización libre de ψ. Sea $(M_\psi, \bar{a}_\psi)$ otra realización libre de ψ tal que $\bar{a}_\psi$ genera a M_ψ. Luego, existen morfismos $f : (M_H, \bar{a}_H) \to (M_\psi, \bar{a}_\psi)$ y $g : (M_\psi, \bar{a}_\psi) \to (M_H, \bar{a}_H)$. Tanto $\bar{a}_H$ como $\bar{a}_\psi$ son sucesiones de generadores, de donde f y g son morfismos inversos mutuamente, induciendo así un isomorfismo entre M_H y M_ψ.

Para el recíproco, si $\bar{a}$ es una sucesión de generadores en un módulo finitamente presentado M, primero elegimos una matriz H tal que M es de la forma M_H. Para la sucesión generadora $\bar{a}_H$ de $M_H = M$ podemos encontrar matrices A y B tales que $\bar{a} = A\bar{a}_H$ y $\bar{a}_H = B\bar{a}$. Sea $\psi(\bar{v})$ la pp-fórmula $AB\bar{v} = \bar{v} \wedge HB\bar{v} = \bar{0}$. Afirmamos que $(M, \bar{a})$ es una realización libre de ψ. Claramente $\bar{a}$ satisface ψ en M. Ahora, sea $\bar{b} \in \psi(N)$ para algún módulo N. Como $HB\bar{b} = \bar{0}$, existe un morfismo $f : (M, \bar{a}_H) \to (N, B\bar{b})$. Luego, $\bar{b} = AB\bar{b} = Af(\bar{a}_H) = f(A\bar{a}_H) = f(\bar{a})$. Por lo tanto, $f : (M, \bar{a}_H) \to (N, \bar{b})$.

(b) Sea $\varphi(\bar{v})$ una pp-fórmula de la forma $A|B\bar{v}$. Consideremos la matriz $H = (B, -A)$ y la realización libre $(M_H, \bar{a}_H)$ de la pp-fórmula $H\begin{pmatrix}\bar{v}\\ \bar{u}\end{pmatrix} = \bar{0}$. Expresamos de manera adecuada a través de una partición $\bar{a_H} = \begin{pmatrix}\bar{b}\\ \bar{c}\end{pmatrix}$. Entonces, $(M_H, \bar{b})$ es una realización libre de φ.

(c) Sea $(M, \bar{a})$ una realización libre de φ y supongamos que $M \models \psi(\bar{a})$. Para cualquier R-módulo N y $\bar{c}$ en N, si $N \models \varphi(\bar{c})$ entonces existe un morfismo $f : (M, \bar{a}) \to (N, \bar{c})$, de donde, por el lema II.6, $N \models \psi(f(\bar{a}))$, esto es, $N \models \psi(\bar{c})$, con lo cual demostramos $\varphi \leqslant \psi$.

□

Observación II.25. Si un módulo M es generado por una n-ada que tiene un pp-tipo en M finitamente generado, entonces M es finitamente presentado.

Demostración. Supongamos que $\bar{a}$ genera a M y $tp^{+}_{M}(\bar{a})$ es generado por $\varphi \in tp^{+}_{M}(\bar{a})$. Sea $(M_\varphi, \bar{a}_\varphi)$ una realización libre de φ. Como $\bar{a} \in \varphi(M)$ existe un homomorfismo $f : (M_\varphi, \bar{a}_\varphi) \to (M, \bar{a})$, además f es epimorfismo debido a que $\bar{a}$ genera M $(\bar{r}\bar{a} = f(\bar{r}\bar{a}_\varphi))$.

Por el lema II.24 (c), $tp^{+}_{M_\varphi}(\bar{a}_\varphi)$ está generado por φ, luego $\bar{a}$ y $\bar{a}_\varphi$ tienen el mismo pp-tipo. Por lo tanto, el homomorfismo se escinde y así $M \cong M_\varphi$. □

II.4. Dualidad en pp-fórmulas

La dualidad en pp-fórmulas se refiere a la dualidad existente entre pp-fórmulas izquierdas y pp-fórmulas derechas. Se establece un anti-isomorfismo (véase Apéndice, p. 65) entre las retículas de pp-fórmulas izquierdas y derechas sobre un anillo R en un conjunto fijo de variables.

Definición II.26. Sea $\varphi(\bar{v})$ una pp-fórmula izquierda de la forma $A|B\bar{v}$. Definimos el **dual de $\boldsymbol{\varphi}$** como la pp-fórmula derecha

$$\mathsf{D}(A|B\bar{v}) \equiv \exists \bar{z}\,(\bar{v} = \bar{z}B \wedge \bar{z}A = \bar{0})$$

o bien,

$$\mathsf{D}\varphi \equiv (B, A) \mid \bar{v}\left(\mathbf{I}_{l(\bar{v})}, \mathbf{0}_{l(\bar{v})\times k}\right)$$

en la forma oficial, donde k es el número de renglones de A, $l(\bar{v})$ la longitud de $\bar{v}$; $\mathbf{I}$ y $\mathbf{0}$ son las matrices identidad y cero, respectivamente.

El dual de una pp-fórmula derecha se define simétricamente. Observemos que $\mathsf{D}\varphi$ tiene el mismo número de variables libres que φ.

El dual de una pp-fórmula definido de la forma previa se encuentra motivado por los siguientes argumentos. Toda pp-fórmula $\varphi \equiv A \mid B\bar{v}$, que equivale a

$$\exists \bar{w}\ (B\bar{v} = A\bar{w}) \Leftrightarrow \exists \bar{w}\ (B\bar{v} - A\bar{w} = \bar{0}) \Leftrightarrow \exists \bar{w}\ (B, -A)\begin{pmatrix}\bar{v}\\ \bar{w}\end{pmatrix} = \bar{0}$$

se puede escribir de la forma

$$\exists \bar{z}\,(G\bar{z} = \bar{0} \wedge \bar{v} = H\bar{z})\,, \tag{$\star$}$$

es decir,

$$\varphi \equiv \begin{pmatrix}H\\ G\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}\mathbf{I}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}\bar{v},$$

donde $G = (B, -A)$, $H = \left(\mathbf{I}_{l(\bar{v})}, \mathbf{0}_{l(\bar{v})+l(\bar{w})}\right)$ y $l(\bar{z}) = l(\bar{v}) + l(\bar{w})$. Si sustituimos en $\star$, la pp-fórmula queda de la siguiente forma,

$$\exists \bar{z}\left((B, -A)\bar{z} = \bar{0} \wedge \bar{v} = \begin{pmatrix}\mathbf{I}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}\bar{z}\right).$$

Con lo cual obtenemos cierta simetría entre una pp-fórmula y su dual. Para demostrar que el dual define un morfismo en las retículas de pp-fórmulas, se necesita demostrar que es invariante bajo equivalencia lógica. Para esto necesitamos un hecho técnico, encontrado en [26, p. 180], el cual describe la forma que deben tener las pp-fórmulas implicadas por otra pp-fórmula dada.

Entonces, el fin es describir las pp-fórmulas $C \mid D\bar{v}$ que se implican lógicamente por $A \mid B\bar{v}$. Claramente, $A \mid B\bar{v} \leqslant GA \mid GB\bar{v}$ para cualquier matriz G de tamaño apropiado. Si $GA = CF$, también $GA \mid \bar{z} \leqslant C \mid \bar{z}$ pues

$$GA \mid \bar{z} \equiv \exists \bar{w}\, GA\bar{w} = \bar{z} \ \Rightarrow\ \exists \bar{w}\, CF\bar{w} = \bar{z} \ \Rightarrow\ \exists \bar{w}'\, C\bar{w}' = \bar{z},$$

de donde, $GA \mid GB\bar{v} \leqslant C \mid GB\bar{v}$ para cualquier matriz F tal que $GA = CF$.

Como $C \mid CH\bar{v}$ (o bien, $\exists \bar{w}\, C\bar{w} = CH\bar{v}$) se cumple para toda matriz H, se sigue que

$$A \mid B\bar{v} \leqslant C \mid (GB + CH)\,\bar{v}$$

siempre que $GA = CF$, para una matriz apropiada F. En este caso decimos que $C \mid (GB + CH)\,\bar{v}$ es trivialmente implicada por $A \mid B\bar{v}$. Veamos que esta es la única forma de que una pp-fórmula sea implicada por $A \mid B\bar{v}$.

Lema II.27. *$A \mid B\bar{v} \leqslant C \mid D\bar{v}$ si y sólo si $C \mid D\bar{v}$ es trivialmente implicada por $A \mid B\bar{v}$. es decir, si y sólo si $D = GB + CH$ para matrices G, H tales que $GA = CF$ para alguna matriz F.*

Demostración. Una dirección ya está verificada. Para la otra dirección, supongamos que $A \mid B\bar{v} \leqslant C \mid D\bar{v}$. Recordemos que

$$A \mid B\bar{v} \equiv \exists\bar{w}\,(\,A\bar{w} = B\bar{v}) \equiv \exists\bar{w}\,(-B, A)\begin{pmatrix}\bar{v}\\ \bar{w}\end{pmatrix} = \bar{0}.$$

Sea $(M, \bar{a}, \bar{b})$ una realización libre de la pp-fórmula $\psi \equiv (-B, A)\begin{pmatrix}\bar{v}\\ \bar{w}\end{pmatrix} = \bar{0}$, tal que $(\bar{a}, \bar{b})$ genera a $M = M_{(-B,A)}$. Por la construcción de la fórmula ψ, se cumple $A \mid B\bar{a}$, de donde también se cumple $C \mid D\bar{a}$ en M, es decir, existe $\bar{c}$ en M tal que $C\bar{c} = D\bar{a}$. Como $(\bar{a}, \bar{b})$ generan a M podemos escribir $\bar{c} = (H, F)\begin{pmatrix}\bar{a}\\ \bar{b}\end{pmatrix}$ para ciertas matrices H y F. Entonces

$$D\bar{a} = C\bar{c} = C\,(H, F)\begin{pmatrix}\bar{a}\\ \bar{b}\end{pmatrix} = CH\bar{a} + CF\bar{b},$$

luego $(CH - D)\bar{a} + CF\bar{b} = \bar{0}$, o equivalentemente $(CH - D, CF)\begin{pmatrix}\bar{a}\\ \bar{b}\end{pmatrix} = \bar{0}$.

Como se verificó en la demostración del lema II.22, $(CH - D, CF) = G(-B, A)$ para alguna matriz G, de donde $CH - D = -GB$, o bien, $CH + GB = D$ como lo deseabamos. □

Ahora, veamos que el dual de una pp-fórmula se preserva bajo equivalencia lógica.

Lema II.28. *Si $\psi \leqslant \varphi$ entonces $\mathsf{D}\varphi \leqslant \mathsf{D}\psi$. Por lo tanto, $\psi \equiv \varphi$ si y sólo si $\mathsf{D}\psi \equiv \mathsf{D}\varphi$, y además D establece un antimorfismo de órdenes parciales*

$$pp_n(R\text{-}Mod) \to pp_n(Mod\text{-}R) \quad (pp_n(Mod\text{-}R) \to pp_n(R\text{-}Mod))$$

el cual invierte el orden parcial $\leqslant$.

Demostración. Sea ψ la fórmula $A \mid B\bar{v}$ y φ la fórmula $C \mid D\bar{v}$. Por la hipótesis y el lema anterior existen matrices F, G y H tales que $D = GB + CH$ y $GA = CF$.

Además,

$$\begin{aligned}\mathsf{D}(A \mid B\bar{v}) &\equiv \exists\bar{w}(\bar{v} = \bar{w}B \wedge \bar{w}A = \bar{0}),\\ \mathsf{D}(C \mid D\bar{v}) &\equiv \exists\bar{z}(\bar{v} = \bar{z}D \wedge \bar{z}C = \bar{0}).\end{aligned}$$

Sea $\bar{a} \in \mathsf{D}\varphi(N)$ para algún módulo derecho N, por definición de dual existe $\bar{b}$ en N tal que $\bar{a} = \bar{b}D$ y $\bar{b}C = \bar{0}$. Queremos mostrar que $\bar{a}$ satisface también a $\mathsf{D}\psi$ en N.

Tenemos que

$$\begin{aligned}&\bar{a} = \bar{b}D = \bar{b}(GB + CH) = \bar{b}GB + \bar{b}CH = (\bar{b}G)B,\\ &(\bar{b}G)A = (\bar{b}C)F = \bar{0},\end{aligned}$$

así, $\bar{b}G$ atestigua $N \models \mathsf{D}\psi(\bar{a})$. Por lo tanto $\mathsf{D}(A \mid B\bar{v}) \leqslant \mathsf{D}(C \mid D\bar{v})$. □

Ejemplos Daremos algunos ejemplos de cálculos de duales de pp-fórmulas básicas, los cuales nos serán útiles durante el desarrollo del trabajo.

1. $\mathsf{D}(A \mid \bar{v}) \equiv \exists\bar{w}(\bar{v} = \bar{w}\mathbf{I} \wedge \bar{w}A = \bar{0}) \equiv \bar{v}A = \bar{0} \equiv \mathbf{0} \mid \bar{v}A$.

2. $\mathsf{D}(A\bar{v} = \bar{0}) \equiv \mathsf{D}(\exists\bar{w}\, A\bar{v} = \mathbf{0}\bar{w}) \equiv \mathsf{D}(\mathbf{0} \mid A\bar{v}) \equiv \exists\bar{z}(\bar{v} = \bar{z}A) \equiv A \mid \bar{v}$.

3. $\mathsf{D}(\bar{v} = \bar{0}) \equiv \mathsf{D}(\mathbf{0} \mid \mathbf{I}\bar{v}) \equiv \exists \bar{z}(\bar{v} = \bar{z}\mathbf{I} \wedge \bar{z}\mathbf{0} = \bar{0}) \equiv \bar{v} = \bar{v}$.

4. $\mathsf{D}(\bar{v} = \bar{v}) \equiv \mathsf{D}(\exists \bar{w}\, \mathbf{I}\bar{v} = \mathbf{I}\bar{w}) \equiv \mathsf{D}(\mathbf{I} \mid \mathbf{I}\bar{v}) \equiv \exists \bar{z}(\bar{v} = \bar{z}\mathbf{I} \wedge \bar{z}\mathbf{0} = \bar{0}) \equiv \bar{v} = \bar{0}$.

Sean $\bar{v}$, $\bar{u}$ conjuntos ajenos de variables; consideremos los morfismos $\exists_{\bar{u}}$ y $\mho_{\bar{u}}$ del conjunto de las pp-fórmulas $L^{+}_{\bar{v}\bar{u}}$ con variables libres $\bar{v}\,\bar{u}$, al conjunto de las pp-fórmulas $L^{+}_{\bar{v}}$ con variables libres $\bar{v}$, definidos como sigue:

$$\begin{aligned} \exists_{\bar{u}} &: \psi(\bar{v}, \bar{u}) \mapsto \exists \bar{u}\, \psi(\bar{v}, \bar{u}), \\ \mho_{\bar{u}} &: \psi(\bar{v}, \bar{u}) \mapsto \psi(\bar{v}, \bar{0}). \end{aligned}$$

Tales morfismos preservan el orden en las correspondientes retículas.

El siguiente resultado brinda una herramienta útil, la cual nos dice como calcular los duales de las fórmulas $\exists \bar{u}\, \psi(\bar{v}, \bar{u})$ y $\psi(\bar{v}, \bar{0})$ a partir del dual de $\psi(\bar{v}, \bar{u})$.

Denotamos con $\mathsf{D}_{\bar{v}}$ a la restricción de la dualidad D al conjunto $L^{+}_{\bar{v}}$.

Lema II.29. *Sea Λ_k la retícula $pp_k(R - Mod)$ y Λ^{op}_k la retícula $pp_k(Mod - R)$, para todo k natural. Los morfismos $\exists$ y $\mho$ se comportan con respecto a la dualidad como se muestra en el siguiente diagrama.*

$$\begin{tikzcd} \Lambda_{n+m} \arrow[r, "\exists"] \arrow[d, "\mathsf{D}"'] & \Lambda_n \arrow[d, "\mathsf{D}"] \\ \Lambda^{op}_{n+m} \arrow[r, "\mho"] & \Lambda^{op}_n \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Lambda_{n+m} \arrow[r, "\mho"] \arrow[d, "\mathsf{D}"'] & \Lambda_n \arrow[d, "\mathsf{D}"] \\ \Lambda^{op}_{n+m} \arrow[r, "\exists"] & \Lambda^{op}_n \end{tikzcd}$$

Demostración. Debemos mostrar que $\mathsf{D}_{\bar{v}}(\exists\, \bar{u}\psi)$ es equivalente a $\mho_{\bar{u}}\, \mathsf{D}_{\bar{v},\bar{u}}(\psi)$ para toda pp-fórmula $\psi(\bar{v}, \bar{u})$. Para simplificar la prueba, supongamos que ψ no tiene cuantificadores (de lo contrario, la prueba se puede realizar de manera similar). Entonces ψ es de la forma $A\bar{u} = B\bar{v}$, o equivalentemente, $(B, -A)(\bar{v}, \bar{u})^T = \bar{0}$. Mediante cálculos directos (ayudándonos de los ejemplos anteriores), tenemos que

$$\begin{aligned} \mathsf{D}_{\bar{v},\bar{u}}(\psi) &\equiv \exists \bar{w}\, ((\bar{v}, \bar{u}) = \bar{w}(B, -A)) \\ &\equiv \exists \bar{w}\, (\bar{v} = \bar{w}B \,\wedge\, -\bar{u} = \bar{w}A). \end{aligned}$$

De aquí,

$$\begin{aligned} \mho_{\bar{u}}\, \mathsf{D}_{\bar{v},\bar{u}}(\psi) &\equiv \exists \bar{w}\, (\bar{v} = \bar{w}B \,\wedge\, \bar{w}A = \bar{0}) \\ &\mathsf{D}_{\bar{v}}(A|B\bar{v}). \end{aligned}$$

Pero sabemos que $A|B\bar{v} \equiv \exists \bar{u}\, \psi$, obteniendo así el resultado deseado. $\square$

Proposición II.30. *El operador dualidad D induce un anti-isomorfismo (véase Apéndice, p. 65) entre las retículas $pp_n(R\text{-}Mod)$ y $pp_n(Mod\text{-}R)$ para toda n, el cual tiene como inverso a él mismo.*

En particular,

$$\begin{aligned} \mathsf{D}(\varphi + \psi) &\equiv \mathsf{D}\varphi \wedge \mathsf{D}\psi \\ \mathsf{D}(\varphi \wedge \psi) &\equiv \mathsf{D}\varphi + \mathsf{D}\psi \end{aligned}$$

para todas las pp-fórmulas φ y ψ (izquierdas o derechas) en las mismas variables libres.

Demostración. Por el lema II.28 los morfismos

$$\mathsf{D} : pp_n(R\text{-}Mod) \to pp_n(Mod\text{-}R)$$
$$\mathsf{D} : pp_n(Mod\text{-}R) \to pp_n(R\text{-}Mod)$$

están bien definidos e invierten el orden parcial $\leqslant$. Para verificar que $\mathsf{D}^2 = Id$, debemos mostrar que la pp-fórmula derecha $\exists \bar{z}(\bar{v} = \bar{z}B \wedge \bar{z}A = \bar{0})$ (o bien, $(B, A) \mid \bar{v}(\mathbf{I}, \mathbf{0})$) tiene un dual equivalente a $A \mid B\bar{v}$. Entonces, por definición, el dual de tal fórmula es

$$\psi \equiv \exists \bar{w}\, (\bar{v} = (\mathbf{I}, \mathbf{0})\bar{w} \wedge (B, A)\bar{w} = \bar{0}),$$

la cual equivale a

$$\begin{aligned} \psi &\equiv \exists \bar{w}_1,\, \bar{w}_2((\bar{v} = \mathbf{I}\bar{w}_1 + \mathbf{0}\bar{w}_2) \wedge (B\bar{w}_1 + A\bar{w}_2 = \bar{0})) \\ &\equiv \exists \bar{w}_1,\, \bar{w}_2((\bar{v} = \bar{w}_1) \wedge (B\bar{w}_1 + A\bar{w}_2 = \bar{0})) \\ &\equiv \exists \bar{w}_2(B\bar{v} = A(-\bar{w}_2)) \\ &\equiv A \mid B\bar{v}. \end{aligned}$$

Se deduce que el operador D induce un anti-isomorfismo de órdenes parciales, lo cual implica que es también un anti-isomorfismo retículas. $\square$

Un aspecto relevante del dual es el siguiente resultado, el cual es fundamental en la demostración del teorema IV.6.

Notación. Dada una n-ada $\bar{a} = (a_0, \ldots, a_{n-1})$ en M^n y una n-ada $\bar{b} = (b_0, \ldots, b_{n-1})$ en N^n, el elemento $\bar{a} \otimes \bar{b}$ de $M \otimes N$ denota la suma $\sum_{i<n} a_i \otimes b_i$. Todo elemento de $M \otimes N$ se puede expresar como $\bar{a} \otimes \bar{b}$ para ciertas $\bar{a}$ y $\bar{b}$ (véase A.11).

Lema II.31. *Sean M un R-módulo derecho y N un R-módulo izquierdo.*

(a) $\bar{a} \otimes \bar{b} = 0$ *en* $M \otimes_R N$ *si y sólo si existe una pp-fórmula derecha con n variables libres φ tal que $\bar{a} \in \varphi(M)$ y $\bar{b} \in \mathsf{D}\varphi(N)$.*

(b) *Sea $(M_\varphi, \bar{a}_\varphi)$ una realización libre de una pp-fórmula derecha φ con n variables libres. Entonces para cualquier $\bar{b} \in N^n$, $\bar{a}_\varphi \otimes \bar{b} = 0$ en $M_\varphi \otimes_R N$ si y sólo si $\bar{b} \in \mathsf{D}\varphi(N)$.*

Demostración.

(a) Comencemos por suponer que $\bar{a} \in \varphi(M)$ y $\bar{b} \in \mathsf{D}\varphi(N)$ para la pp-fórmula derecha $\varphi(\bar{v}) \equiv \exists \bar{w}(\bar{w}A = \bar{v}B)$ y su dual, la pp-fórmula izquierda, $\mathsf{D}\varphi(\bar{v}) \equiv \exists \bar{z}(\bar{v} = B\bar{z} \wedge A\bar{z} = \bar{0})$. Entonces existen $\bar{c}$ en M y $\bar{d}$ en N tales que $\bar{c}A = \bar{a}B$, $\bar{b} = B\bar{d}$ y $A\bar{d} = \bar{0}$, luego

$$\bar{a} \otimes \bar{b} = \bar{a} \otimes B\bar{d} = \bar{a}B \otimes \bar{d} = \bar{c}A \otimes \bar{d} = \bar{c} \otimes A\bar{d} = \bar{c} \otimes \bar{0} = \bar{0}.$$

Para el recíproco sea $\bar{a} \otimes \bar{b} = 0$ en $M \otimes N$. Como consecuencia de la propiedad del producto tensorial enunciada en la observación A.11 (del Apéndice), podemos suponer que M es finitamente generado, digamos que es generado por $(\bar{a}, \bar{c})$ para alguna $\bar{c}$ en M.

Nuestro objetivo es encontrar una fórmula φ que cumpla nuestros requisitos. Si tenemos una pp-fórmula derecha $\psi(\bar{v}, \bar{w})$ tal que $M \models \psi(\bar{a}, \bar{c})$ y $N \models \mathsf{D}\psi(\bar{b}, \bar{0})$ entonces la pp-fórmula

$\varphi \equiv \exists \bar{w}\, \psi$ cumpliría que $\bar{a} \in \varphi(M)$ y $\bar{b} \in \mathsf{D}\varphi(N)$ por el lema II.29 en el cual se deduce que $\mathsf{D}(\exists \bar{w} \psi) \equiv \mathsf{D}\psi(\bar{v}, \bar{0})$.

Para simplificar notemos que si $\bar{a} \otimes \bar{b} = 0$ entonces también $(\bar{a}, \bar{c}) \otimes (\bar{b}, \bar{0}) = 0$,

$$(\bar{a}, \bar{c}) \otimes (\bar{b}, \bar{0}) = \sum_i a_i \otimes b_i + \sum_j c_j \otimes 0 = 0,$$

para cualquier $\bar{c}$. Con esto podemos suponer que $\bar{a}$ genera a M.

Sea Φ el pp-tipo de $\bar{a}$ en M. Consideremos $K = \sum_{\varphi \in \Phi} \mathsf{D}\varphi(N)$ y la asignación $h : (\bar{a}\bar{r}, d) \mapsto \bar{r}d + K$ de $M \times N$ a N^n/K, con $\bar{r}$ en R y $d \in N$.

Esta asignación está bien definida: si $\bar{a}\bar{r} = 0$, la fórmula $\psi \equiv \bar{v}\bar{r} = 0$ pertenece a Φ, y su dual, como ya lo habíamos calculado antes, es la pp-fórmula izquierda $\exists w \bigwedge_i (v_i = r_i w)$ claramente satisfecha por $\bar{r}d$ en N, $N \models \exists w \bigwedge_i (r_i d = r_i w)$ tomando $w = d$, de donde $\bar{r}d \in \mathsf{D}\psi(N) \subseteq K$.

Además, debido a su construcción es inmediato notar que h es bilineal. Así, por la propiedad universal de producto tensorial existe un homomorfismo $f : M \otimes N \to N^n/K$ tal que $f(\bar{a}\bar{r} \otimes d) = \bar{r}d + K$.

Denotamos para cada $i < n$, como es común, $\bar{e}_i \in R^n$ a la n-ada que tiene a 1 en su i-ésima coordenada y cero en las demás. Podemos expresar $\sum_{i<n} (\bar{a}\bar{e}_i \otimes \bar{b}_i) = \bar{a} \otimes \bar{b} = \bar{0}$, por lo cual si aplicamos el morfismo f obtenemos $K = f(\sum (\bar{a}\bar{e}_i \otimes \bar{b}_i)) = \sum \bar{e}_i b_i + K$, es decir, $\bar{b} = \sum_{i<n} \bar{e}_i \bar{b}_i \in K^n$.

Como Φ es un filtro, entonces $\{\mathsf{D}\varphi \mid \varphi \in \Phi\}$ es un ideal (véase Apéndice, p. 65). De donde, $K = \bigcup_{\varphi \in \Phi} \mathsf{D}\varphi(N)$, por lo cual existe $\varphi \in \Phi$ tal que $\bar{b} \in \mathsf{D}\varphi$ como lo deseabamos.

(b) Por el inciso anterior, $\bar{a}_\varphi \otimes \bar{b} = 0$ si y sólo si existe ψ tal que $\bar{a}_\varphi \in \psi(M_\varphi)$ y $\bar{b} \in \mathsf{D}\psi(N)$. Como φ genera al pp-tipo de $\bar{a}_\varphi$, entonces $\varphi \leqslant \psi$, lo cual equivale a $\mathsf{D}\psi \leqslant \mathsf{D}\varphi$. Por lo tanto, $\bar{b} \in \mathsf{D}\varphi(N)$.

□

El siguiente corolario será de gran utilidad en la proposición IV.3.

Corolario II.32. *Sean M un módulo derecho, N un módulo izquierdo, $\bar{a}$ en M y $\bar{b}$ en N. Si $\bar{a} \otimes \bar{b} = 0$ en $M \otimes N$, entonces existen un módulo derecho F finitamente presentado, $\bar{c}$ en F y un morfismo $h : (F, \bar{c}) \to (M, \bar{a})$ tales que $\bar{c} \otimes \bar{b} = 0$ en $F \otimes N$.*

Demostración. La prueba es casi inmediata del lema anterior.

Como $\bar{a} \otimes \bar{b} = 0$, entonces existe una pp-fórmula derecha φ tal que $\bar{a} \in \varphi(M)$ y $\bar{b} \in \mathsf{D}\varphi(N)$. Sea $(F, \bar{c})$ una realización libre de φ. Se sigue de II.31(b) que $\bar{c} \otimes \bar{b} = 0$. □

II.5. Pureza

Una importante propiedad de las pp-fórmulas es que son preservadas por homomorfismos. Esto es, dado un homomorfismo de módulos $f : M \to M'$, por el lema II.6 siempre sucede lo siguiente: $M \models \varphi(\bar{a})$ implica que $M' \models \varphi(f(\bar{a}))$ para cualquier $\varphi(\bar{v})$ una pp-fórmula y $\bar{a}$ en M. Dicho de otra manera, siempre que tengamos una solución a un sistema finito de ecuaciones en M, a ese mismo sistema lo satisface la imagen respecto de f de tal solución en M'.

El recíproco de esta propiedad define a un homomorfismo puro.

Definición II.33. Sean M y M' R-módulos. El homomorfismo $f : M \to M'$ se dice **puro** si para toda pp-fórmula $\varphi(\bar{v})$ y cada $\bar{a}$ en M

$$M' \models \varphi(f(\bar{a})) \Rightarrow M \models \varphi(\bar{a}).$$

Notemos que todo homomorfismo puro es monomorfismo: si f es puro, dada la pp-fórmula $\varphi(v,u) \equiv v = u$, entonces $M \models \varphi(f(a), f(b))$ si y sólo si $f(a) = f(b)$, y por pureza, esto implica que, $M \models \varphi(a,b)$, es decir, $a = b$.

Por lo tanto, un homorfismo puro es llamado **encaje puro** (o monomorfismo puro).

Definición II.34. Si M es un submódulo de M' decimos que un **submódulo puro** (o simplemente, $\boldsymbol{M}$ es **puro en** $\boldsymbol{M'}$) si la incusión es un encaje puro, esto es, para toda pp-fórmula $\varphi(\bar{v})$ y cada $\bar{a}$ en M

$$M \models \varphi(\bar{a}) \Rightarrow M' \models \varphi(\bar{a}).$$

Es inmediato de la definición que, M es puro en M' si cada sistema finito de ecuaciones lineales con coeficientes en R, parámetros en M y con una solución en M', tiene una solución en M, es decir, esta definición es equivalente a la definición algebraica de pureza (véase Apéndice, p. 66).

Ejemplo. El $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}_2$ no es puro en $\mathbb{Z}_4$: si $\varphi(v) \equiv 2v = 0$, entonces $\mathbb{Z}_2 \models \varphi(1)$ pero en $\mathbb{Z}_4$ $2 \cdot 1 = 2$, por lo tanto $\mathbb{Z}_4 \not\models \varphi(1)$.

Proposición II.35. *Si $M \prec M'$, entonces M es puro en M'.*

Demostración. Claramente los encajes elementales son encajes puros. □

Ahora veamos el concepto dual de encaje puro, el de epimorfismo puro.

Definición II.36. Una sucesión exacta $0 \to K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$, es **pura-exacta** si f es un encaje puro. A la g de la sucesión se le llama **epimorfismo puro**.

Existe una condición sobre el epimorfismo puro g que lo caracteriza y frecuentemente se utiliza como la definición.

Proposición II.37. *indexepimorfismo!puro $g : M \to N$ es un **epimorfismo puro** si y sólo si para cualquier pp-fórmula $\varphi(\bar{v})$, cada $\bar{c} \in \varphi(N)$ tiene una g-preimagen en $\varphi(M)$, es decir, existe $\bar{a} \in \varphi(M)$ tal que $g(\bar{a}) = \bar{c}$.*

Demostración. Supongamos que $0 \to K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ es una sucesión pura-exacta. Sean $\varphi(\bar{v})$ una pp-fórmula y $\bar{c} \in \varphi(N)$. Podemos suponer que φ es de la forma $\exists \bar{w}\ H(\bar{v}, \bar{w}) = \bar{0}$, para cierta matriz H en R, recordemos que si $\varphi(\bar{v}) \equiv \exists\, \bar{w}\, A\bar{w} = B\bar{v}$ entonces $H = (B, -A)$.

Entonces, existe $\bar{d}$ en N tal que $H(\bar{c}, \bar{d}) = \bar{0}$. Como g es epimorfismo, elegimos $\bar{e}$, $\bar{b}$ en M tales que $g(\bar{e}) = \bar{c}$ y $g(\bar{b}) = \bar{d}$. Luego, $g(H(\bar{e}, \bar{d})) = Hg(\bar{e}, \bar{d}) = H(\bar{c}, \bar{d}) = \bar{0}$, lo cual implica que $f(\bar{a}) = H(\bar{e}, \bar{d}) \in Ker\, g = Im\, f$ para alguna $\bar{a}$ en K.

Definimos la pp-fórmula $\psi(\bar{u}) \equiv \exists \bar{v}, \bar{w}(H(\bar{v}, \bar{w}) = \bar{u})$, la cual es satisfecha por $f(\bar{a})$ en M. De donde, como f es un encaje puro en M, $\bar{a}$ satisface a ψ en K, es decir, existen $\bar{a}'$, $\bar{a}''$ en K tales que $H(\bar{a}', \bar{a}'') = \bar{a}$. Obtenemos que $H(\bar{e} - f(\bar{a}'), \bar{b} - f(\bar{a}'')) = H(\bar{e}, \bar{b}) - H(f(\bar{a}', \bar{a}'')) = \bar{0}$, esto es, $M \models \varphi(\bar{e} - f(\bar{a}'))$, además $g(\bar{e} - f(\bar{a}')) = g(\bar{e}) - g(f(\bar{a}')) = \bar{c}$. Por lo tanto $\bar{e} - f(\bar{a}')$ es una g-preimagen de $\bar{c}$ en $\varphi(M)$.

Ahora demostraremos el recíproco. Para este fin, construimos la sucesión exacta $0 \to Ker\, g \xrightarrow{\imath} M \xrightarrow{g} N \to 0$, mostraremos que es pura-exacta.

Sea $\varphi(\bar{v}) \equiv \exists\bar{w}\ \ H(\bar{v},\bar{w}) = \bar{0}$ una pp-fórmula y $\bar{a}$ en $Ker\, g$ tal que $\bar{a} = \imath(\bar{a}) \in \varphi(M)$. Entonces existe $\bar{b}$ en M tal que $H(\bar{a},\bar{b}) = \bar{0}$. Luego, mediante g obtenemos que $\bar{0} = g(H(\bar{a},\bar{b})) = H(g(\bar{a}),g(\bar{b})) = H(\bar{0},g(\bar{b}))$, es decir, $g(\bar{b})$ satisface la pp-fórmula $\psi(\bar{w}) \equiv H(\bar{0},\bar{w}) = \bar{0}$ en N. Por hipótesis, existe $\bar{b}'$, una g-preimagen de $g(\bar{b})$ en $\psi(M)$, por lo cual $g(\bar{b}) = g(\bar{b}')$, o equivalentemente, $g(\bar{b} - \bar{b}') = \bar{0}$. Por lo tanto $H(\bar{a},\bar{b} - \bar{b}') = H(\bar{a},\bar{b}) - H(\bar{0},g(\bar{b})) = \bar{0}$ y $\bar{b} - \bar{b}'$ pertenece a $Ker\, g$, así $\bar{a} \in \varphi(Ker\, g)$. $\square$

Proposición II.38. *Si N es un sumando directo de M, entonces N es puro en M.*

Demostración. Basta con notar que dada una solución de un sistema de ecuaciones en $M = N \oplus N' = N \times N'$, la podemos proyectar a N. Esto es, si $a \in N$ y $\varphi(v) \equiv \exists\bar{w}\,\theta(v,\bar{w})$ (utilizamos una pp-fórmula con una variable libre para simplificar la notación), $M \models \varphi(a)$ si existen $(b_0,c_0),\ldots,(b_{m-1},c_{m-1})$ en M que satisfacen todas las ecuaciones en θ, por ejemplo, si la ecuación $rv = s_0w_0 + \cdots + s_{m-1}w_{m-1}$ aparece en tal conjunción, entonces

$$M \models r(a,0) = s_0(b_0,c_0) + \cdots + s_{m-1}(b_{m-1},c_{m-1}),$$

y por lo tanto, $N \models ra = s_0b_0 + \cdots + s_{m-1}b_{m-1}$. Se sigue que $N \models \varphi(a)$. $\square$

Proposición II.39. *Si N es puro en M, entonces $tp^+_M(\bar{a}) = tp^+_N(\bar{a})$, para toda $\bar{a}$ en N.*

Demostración. Sólo debemos resaltar que cualquier n-ada $\bar{a}$ en N satisface las mismas pp-fórmulas en N y M. $\square$

II.6. pp-Eliminación de Cuantificadores

En esta sección presentamos un resultado que muestra que la teoría de los R-módulos admite un tipo de eliminación de cuantificadores, a saber, todas las fórmulas del lenguaje son equivalentes a combinaciones booleanas de un cierto tipo de fórmulas, las pp-fórmulas.

Lema II.40 (Principio de Sylvester)**.** *Sean $A_0, A_1, \ldots, A_k$ subconjuntos de un conjunto dado, A_0 finito. Entonces $A_0 \subseteq \bigcup_{i=1}^k A_i$ si y sólo si*

$$\sum_{\Delta\subseteq\{1,\ldots,k\}} (-1)^{|\Delta|}|A_0 \cap \bigcap_{i\in\Delta} A_i| = 0$$

donde $|\Delta|$ es la cardinalidad de los subconjuntos Δ.

Demostración. Como A_0 es finito, también lo son $A_0 \cap A_i$, $1 \leq i \leq k$. Por el principio combinatorio de *inclusión - exclusión* (A.1) se tiene

$$\begin{aligned} \left|A_0 \cap \bigcup_{1\leq i\leq k} A_i\right| &= \left|\bigcup_{1\leq i\leq k}(A_0 \cap A_i)\right| \\ &= \sum_{\Delta\subseteq\{1,\ldots,k\},\Delta\neq\emptyset} (-1)^{|\Delta|+1}\left|\bigcap_{i\in\Delta}(A_0 \cap A_i)\right|. \end{aligned}$$

$A_0 \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ si y sólo si $A_0 \cap \bigcup_{1\leq i\leq k} A_i = A_0$. Entonces la igualdad anterior equivale a

$$|A_0| = \sum_{\Delta\subseteq\{1,\ldots,k\},\Delta\neq\emptyset} (-1)^{|\Delta|+1} \left|\bigcap_{i\in\Delta}(A_0\cap A_i)\right|,$$

o bien,

$$\begin{aligned} |A_0| + \sum_{\Delta\subseteq\{1,\ldots,k\},\Delta\neq\emptyset} (-1)^{|\Delta|} \left|\bigcap_{i\in\Delta}(A_0\cap A_i)\right| &= 0 \\ \sum_{\Delta\subseteq\{1,\ldots,k\}} (-1)^{|\Delta|} \left|\bigcap_{i\in\Delta}(A_0\cap A_i)\right| &= 0, \end{aligned}$$

de donde se sigue la equivalencia deseada. □

Lema II.41. *Si $(K_j)_{1\leq j\leq m}$ es una familia finita de subgrupos (se admiten repeticiones), cada uno de los cuales tiene índice infinito en el grupo abeliano G, entonces*

$$\bigcup_{1\leq j\leq m}(b_j+K_j) \subsetneqq G$$

para cualesquiera $b_j \in G$, $\quad 1\leq j\leq m$.

Demostración. Sea r el número de distintos subgrupos en $(K_j)_{1\leq j\leq m}$. La prueba se hará por inducción sobre r.
Si $r=1$, entonces $(K_j)_{1\leq j\leq m} = \{K\}$ y $b+K \subsetneqq G$ para toda b en G, ya que $[G:K]$ es infinito.

Ahora probaremos el enunciado si el número de subgrupos distintos es r, suponiéndolo válido cuando dicha familia tiene menos que r elementos distintos.

Supongamos que existen $b_j \in G$ tales que

$$G = \bigcup_{1\leq j\leq m}(b_j+K_j)$$

y que $K_j = K$ para $1\leq j\leq s$, $K\neq K_j$ para $s<j\leq m$, donde $s=(m-r)+1$, es decir, existen r subgrupos distintos entre sí.

Como $[G:K]=\infty$, existe una clase lateral $b+K$ tal que $b+K \subseteq G - \bigcup_{1\leq j\leq s}(b_j+K)$. Pero $G-\bigcup_{1\leq j\leq s}(b_j+K) \subseteq \bigcup_{s<j\leq m}(b_j+K_j)$, por lo tanto, $K\subseteq \bigcup_{s<j\leq m}(b_j-b+K_j)$. Así, para toda $1\leq i\leq s$, $b_i+K_i \subseteq \bigcup_{s<j\leq m}(b_i+b_j-b+K_j)$.

Luego,

$$G = \bigcup_{1\leq i\leq s}\left(\bigcup_{s<j\leq m}(b_i+b_j-b+K_j)\right) \cup \bigcup_{s<j\leq m}(b_j+K_j).$$

Lo cual no puede ser, ya que en esta última igualdad aparecen $r-1$ distintos subgrupos y contradice a la hipótesis de inducción. □

Lema II.42. *Sean $H_1,\cdots,H_l,K_1,\cdots,K_m$ subgrupos de un grupo abeliano G tales que $[G:H_i]<\infty$ para $1\leq i\leq l$ y $[G:K_j]=\infty$ para $1\leq j\leq m$.*

Si existen clases laterales $a_i + H_i$*,* $1 \leq i \leq l$*,* $b_j + K_j$*,* $1 \leq j \leq m$ *tales que*

$$G = \bigcup_{1 \leq i \leq l} (a_i + H_i) \cup \bigcup_{1 \leq j \leq m} (b_j + K_j),$$

entonces

$$G = \bigcup_{1 \leq i \leq l} (a_i + H_i).$$

Demostración. Sea $K = \bigcap_{i=1}^{l} H_i$. Observemos que los índices $[G : K]$ y $[H_i : K]$ son finitos, ya que

$$\begin{aligned} [G : K] &= |\{g + K \mid g \in G\}| \\ &= |\{(g + H_1) \cap \cdots \cap (g + H_l) \mid g \in G\}| \\ &\leq [G : H_1] \cdots [G : H_l] < \infty \end{aligned}$$

y además, $[G : K] = [G : H_i]\,[H_i : K]$ para toda $1 \leq i \leq l$.

Luego, dada i sea $l^* = [H_i : K]$. Entonces existen $c_j^i \in G$ tales que

$$a_i + H_i = \bigcup_{j=1}^{l^*} (c_j^i + K).$$

Por lo anterior, $\bigcup_{1 \leq i \leq l} (a_i + H_i)$ se puede expresar como la unión finita de clases laterales de K.

Así, es suficiente probar la afirmación en el caso en que $H_1 = H_2 = \cdots = H_l = H$, supongamos que $\bigcup_{1 \leq i \leq l} (a_i + H) \subsetneq G$, entonces debe existir una $a \in G$ tal que $a + H \subseteq \bigcup_{1 \leq j \leq m} (b_j + K_j)$ y por lo tanto $a_i + H \subseteq \bigcup_{1 \leq j \leq m} (b_j - a + a_i + K_j)$, $1 \leq i \leq l$. Se sigue que G es la unión finita de clases laterales de K_j, pero por hipótesis $[G : K_j] = \infty$, lo cual no puede suceder por el lema II.41. Por lo tanto, $G = \bigcup_{1 \leq i \leq l} (a_i + H_i)$. □

Lema II.43. *Sean* $H_0, H_1, \ldots, H_n$ *subgrupos de un grupo* G*, y* $a_0, a_1 \ldots, a_n$ *elementos de* G*. Entonces para toda* $1 \leq i \leq n$ *se cumple*

$$(a_0 + H_0) \cap (a_i + H_i) = \emptyset$$

o

$$(a_0 + H_0) \cap (a_i + H_i) = a + H_0 \cap H_i \quad \textit{para} \quad \textit{algún} \quad a \in G.$$

Demostración. Sea $1 \leq i \leq n$, y supongamos que $(a_0 + H_0) \cap (a_i + H_i) \neq \emptyset$. Podemos elegir $g \in G$ tal que $g = a_i + h_i$ y $g = a_0 + h_0$ con $h_i \in H_i$,$h_0 \in H_0$.

Se afirma que $(a_0 + H_0) \cap (a_i + H_i) = g + H_0 \cap H_i$.

Sea $g^* \in (a_0 + H_0) \cap (a_i + H_i)$, $\quad g^* = a_i + h_i^* = a_0 + h_0^*$ para algunos $h_0^* \in H_0$, $h_i^* \in H_i$. Sabemos que $a_i = g - h_i$, por lo tanto $g^* = (g - h_i) + h_i^*$. Además,

$$\begin{aligned} -h_i + h_i^* &= (a_i + h_i^*) - (a_i + h_i) \\ &= (a_0 + h_0^*) - (a_0 + h_0) = -h_0 + h_0^* \qquad \in H_0. \end{aligned}$$

De lo anterior, se sigue que $g^* = g + (-h_i + h_i^*) \in g + H_0 \cap H_i$.

Recíprocamente, si tomamos $g^* \in g + H_0 \cap H_i$, $\quad g^* = g + h$ para algún $h \in H_0 \cap H_i$. Entonces

$$g^* = (a_i + h_i) + h = a_i + (h_i + h) \quad \in a_i + H_i$$

y

$$g^* = (a_0 + h_0) + h = a_0 + (h_0 + h) \quad \in a_0 + H_0,$$

por lo tanto $g^* \in (a_0 + H_0) \cap (a_i + H_i)$. $\square$

Corolario II.44. *Con las mismas hipótesis del lema II.43, para toda $1 \leq i \leq n$ tenemos que $H_0 \cap (a_i + H_i)$ es vacía, o bien, $H_0 \cap (a_i + H_i) = a + H_0 \cap H_i$ para algún $a \in G$.*

Demostración. La prueba de esta afirmación es similar a la del lema mencionado, poniendo $a_0 = 0$. $\square$

Corolario II.45. *Sean $H_0, H_1, \ldots, H_n$ subgrupos de un grupo G, y $a_0, \ldots, a_n \in G$. Entonces $\bigcap_{0 \leq i \leq n}(a_i + H_i)$ es vacía, o bien, es igual a $a + \bigcap_{0 \leq i \leq n} H_i$ para algún $a \in G$.*

Lema II.46 (Neumann)**.** *Sean $H_0, H_1, \cdots, H_n$ subgrupos de un grupo abeliano* G*. Si para algunos elementos $g_0, g_1, \cdots, g_n \in$ G se tiene que $g_0 + H_0 \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq n}(g_i + H_i)$ y $[H_0 : H_0 \cap H_i]$ es infinito para $i > k$, entonces*

$$g_0 + H_0 \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq k} (g_i + H_i).$$

Demostración. Sean $g_0, g_1, \cdots, g_n \in G$ tales que

$$g_0 + H_0 \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq n} (g_i + H_i). \tag{$\star$}$$

Supongamos que $(g_0 + H_0) \cap (g_i + H_i) \neq \emptyset$ para toda i, de no ser así, simplemente eliminamos de la unión las clases laterales que no cumplan con esta condición, ya que no contribuyen.

Por el lema II.43, para toda i existe g_i' tal que

$$g_i' + H_0 \cap H_i = H_0 \cap ((g_i - g_0) + H_i). \tag{$\star\star$}$$

De la inclusión ($\star$), se sigue que

$$H_0 = \bigcup_{1 \leq i \leq n} ((g_i - g_0) + H_i) \cap H_0. \tag{$\star\star\star$}$$

Por ($\star\star$) y ($\star\star\star$),

$$H_0 = \bigcup_{1 \leq i \leq n} (g_i' + H_i \cap H_0).$$

Como $[H_0 : H_0 \cap H_i] = \infty$ para $i > k$, del lema II.42 se obtiene que

$$\begin{aligned} H_0 &= \bigcup_{1 \leq i \leq k} (g_i' + H_i \cap H_0) \\ &= \bigcup_{1 \leq i \leq k} ((g_i - g_0) + H_i) \cap H_0. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$g_0 + H_0 \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq k} (g_i + H_i).$$

$\square$

II.6.1. Teorema de Baur-Monk

Presentamos una prueba detallada del teorema de pp-eliminación de cuantificadores. En la demostración se obtiene, dada una fórmula cualquiera del lenguaje, la combinación booleana a la cual es equivalente. En seguida, damos una caracterización, concluida en [32], importante para poder determinar cuando dos módulos son elementalmente equivalentes, la cual sólo depende de los invariantes de las pp-fórmulas con una variable libre.

Teorema II.47 (Baur-Monk)**.** *Para cualquier R-Módulo M, cada fórmula σ en ${}_R\mathscr{L}$ es equivalente en M a una combinación booleana*[2] *de pp-fórmulas.*

Esta combinación booleana puede ser elegida de tal manera que sólo dependa de σ y de los índices $[\psi(M):\varphi(M)]$ donde ψ,φ son pp-fórmulas tales que $\varphi\leqslant\psi$.

Demostración. Sean M un R-Módulo y φ cualquier fórmula de ${}_R\mathscr{L}$. Podemos suponer que φ está en su forma normal prenexa

$$\varphi\equiv(Q_1v_1)\cdots(Q_mv_m)\psi$$

donde Q_i es un cuantificador universal o existencial (puede no haber cuantificadores), v_i son variables, y ψ es una fórmula sin cuantificadores.

El teorema se demostrará por inducción en el número de cuantificadores.

Si φ no tiene cuantificadores, entonces es una combinación booleana de fórmulas atómicas, pero una fórmula atómica es, en particular, una pp-fórmula. Por lo tanto, el paso inductivo se cumple.

Ahora, sea $\psi(v,u_1,\ldots,u_m)$ una fórmula equivalente en M, a una combinación booleana de pp-fórmulas. Por demostrar que $(Qv)\psi(v,u_1,\ldots,u_m)$, donde Q puede ser $\exists$ o $\forall$, también es equivalente en M a una combinación booleana de pp-fórmulas.

Es suficiente demostrar el caso en que $Q=\forall$. En el caso $Q=\exists$, como es cierto que $\exists v\psi\equiv\neg\forall v\neg\psi$, entonces si ψ es una combinación booleana de pp-fórmulas también lo es $\neg\psi$, y por el caso $\forall$, para $\forall v\neg\psi$ es válido el teorema. Por lo tanto $\exists v\psi$ sería equivalente a la negación de la combinación booleana que se obtiene para $\forall v\neg\psi$.

Observemos que las pp-fórmulas son cerradas respecto a conjunción, es decir, si $\sigma(\bar v)$ y $\sigma'(\bar v')$ son pp-fórmulas de la forma $\sigma\equiv\exists\bar w\left(\bigwedge_i\sum_j r_{ij}w_j=\sum_l s_{il}v_l\right)$ y $\sigma'\equiv\exists\bar w'\left(\bigwedge_i\sum_j r'_{ij}w'_j=\sum_l s'_{il}v'_l\right)$, respectivamente, entonces su conjunción es

$$\sigma\wedge\sigma'\equiv\exists\bar w,\bar w'\left(\bigwedge_i\sum_j r_{ij}w_j=\sum_l s_{il}v_l\wedge\bigwedge_i\sum_j r'_{ij}w'_j=\sum_l s'_{il}v'_l\right).$$

Como ψ es una combinación booleana de fórmulas, puede ser llevada a la forma

$$\psi\equiv\bigvee_{i=1}^{n_1}\neg\phi_i\vee\bigvee_{j=1}^{n_2}\varphi_j.$$

En nuestro caso ϕ_i, φ_j son pp-fórmulas de ${}_R\mathscr{L}$, por lo tanto

$$\bigvee_{i=1}^{n_1}\neg\phi_i\equiv\neg\left(\bigwedge_{i=1}^{n_1}\phi_i\right)\equiv\neg\varphi_0$$

[2]Es decir, una combinación que sólo involucra $\wedge$, $\vee$ $\neg$.

para alguna pp-fórmula φ_0.

Así, es suficiente estudiar los casos cuando ψ es de la forma $\neg\varphi_0$ o bien, $\neg\varphi_0 \vee \varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \cdots \vee \varphi_n$ donde φ_i es una pp-fórmula con variables libres $v, u_1, \ldots, u_m$.

Por lo anterior, la fórmula $\forall v(\psi(v, u_1, \ldots, u_m))$ es equivalente a $\forall v(\neg\varphi_0)$, o bien, $\forall v(\neg\varphi_0 \vee \varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n)$.

La fórmula $\forall v(\neg\varphi_0)$ es equivalente a $\neg(\exists v\varphi_0)$, que es la negación de un pp-fórmula, es decir, una combinación booleana de pp-fórmulas. Como consecuencia, sólo faltaría probar la afirmación cuando la fórmula $\forall v\psi$ es equivalente a $\forall v(\neg\varphi_0 \vee (\varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n))$.

Es decir, basta probar que la fórmula

$$\varphi(\bar{u}) \equiv \forall v\,(\varphi_0(v, \bar{u}) \longrightarrow \varphi_1(v, \bar{u}) \vee \cdots \vee \varphi_n(v, \bar{u}))\,, \tag{$\bigstar$}$$

con φ_i una pp-fórmula para toda i, es equivalente en M a una combinación booleana de pp-fórmulas.

Sean $H_i = \varphi_i(M, \bar{0})$ para $0 \le i \le n$. Podemos elegir $k \ge 0$ tal que $[H_0 : H_0 \cap H_i]$ es finito para $1 \le i \le k$ e infinito para $k < i \le n$.

Fijemos $\bar{a} \in M^m$.

Se obtiene inmediatamente de la definición de φ que $M \models \varphi(\bar{a})$ se cumple si y sólo si $\varphi_0(M, \bar{a}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \varphi_i(M, \bar{a})$.

Si $\varphi(\bar{a})$ se cumple en M entonces, para toda $v \in M$, si se cumple $\varphi_0(v, \bar{a})$ también se cumple $\varphi_i(v, \bar{a})$ para toda i, de donde se sigue la inclusión deseada.

Por el lema II.9, sabemos que para toda $0 \le i \le n$, si $\varphi_i(M, \bar{a})$ no es vacío, es una clase lateral de M con respecto a $\varphi_i(M, \bar{0}) = H_i$.

En el caso de que alguno de los $\varphi_i(M, \bar{a})$ fuera vacío para $1 \le i \le n$, simplemente se desecharía de la unión y se procedería similarmente sin esa pp-fórmula.

Supongamos que $\varphi_i(M, \bar{a}) \neq \emptyset$ para $0 \le i \le n$. Por lo tanto, $\varphi_0(M, \bar{a}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \varphi_i(M, \bar{a})$ es una inclusión de clases laterales de M, y por el lema de Neumann (lema II.46), es equivalente a la inclusión

$$\varphi_0(M, \bar{a}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \varphi_i(M, \bar{a}).$$

Sea $\pi : M \to M\diagup H_0 \cap \cdots \cap H_k$ la proyección canónica. Definimos $A_i = \pi(\varphi_i(M, \bar{a}))$, para $1 \le i \le k$.

Se afirma que A_i es vacío o es una clase lateral de $M\diagup H_0 \cap \cdots \cap H_k$ con respecto a $H_i\diagup H_0 \cap \cdots \cap H_k$.

Si $\varphi_i(M, \bar{a}) = \emptyset$ entonces $A_i = \emptyset$. En caso contrario, $\varphi_i(M, \bar{a}) = a^* + H_i$ para algún $a^* \in M$ y en consecuencia

$$\begin{aligned} A_i &= \pi(\varphi_i(M, \bar{a})) = \pi(a^* + H_i) \\ &= \{m + H_0 \cap \cdots \cap H_k \mid m \in a^* + H_i\} \\ &= \{(a^* + h) + H_0 \cap \cdots \cap H_k \mid h \in H_i\} \\ &= \{(a^* + H_0 \cap \cdots \cap H_k) + (h + H_0 \cap \cdots \cap H_k) \mid h \in H_i\} \\ &= (a^* + H_0 \cap \cdots \cap H_k) + H_i\diagup H_0 \cap \cdots \cap H_k. \end{aligned}$$

Con lo que queda establecida la afirmación.

Obervemos que

$$\varphi_0(M, \bar{a}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \varphi_i(M, \bar{a}) \quad \Leftrightarrow \quad A_0 \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} A_i.$$

Sea $\Delta \subseteq \{1,\ldots,k\}$, denotamos por $A_\Delta = \bigcap_{i\in\Delta} A_i$. Por el Principio de Sylvester (lema II.40), $A_0 \subseteq \bigcup_{i=1}^k A_i$ se cumple si y sólo si

$$\sum_{\Delta\subseteq\{1,\ldots,k\}} (-1)^{|\Delta|}|A_0 \cap A_\Delta| = 0.$$

Afirmamos que $A_0\cap A_\Delta = \emptyset$ o consiste de N_Δ clases laterales de M con respecto a $H_0\cap\cdots\cap H_k$, donde

$$N_\Delta = [H_0 \cap H_\Delta : H_0 \cap \cdots \cap H_k]\,.$$

Sabemos que A_i es una clase lateral de $M\diagup H_0 \cap\cdots\cap H_k$ con respecto a $H_i\diagup H_0\cap\cdots\cap H_k$. Por el corolario II.45, si $A_0 \cap A_\Delta$ no es vacía entonces existe $c \in M\diagup H_0\cap\cdots\cap H_k$ tal que

$$\begin{aligned} A_0 \cap A_\Delta &= c + (H_0\diagup H_0\cap\cdots\cap H_k) \cap \bigcap_{i\in\Delta}(H_i\diagup H_0\cap\cdots\cap H_k) \\ &= c + H_0 \cap H_\Delta\diagup H_0\cap\cdots\cap H_k \\ &= c + \{d + H_0\cap\cdots\cap H_k \mid d \in H_0 \cap H_\Delta\} \\ &= \{(c+d) + H_0\cap\cdots\cap H_k \mid d \in H_0\cap H_\Delta\}\,, \end{aligned}$$

por lo tanto $|A_0 \cap A_\Delta| = N_\Delta$, con lo cual la afirmación se verifica.

Denotemos por $\wp$ al conjunto potencia de $\{1,\ldots,k\}$. De la serie de equivalencias anteriores podemos concluir que

$$M \models \varphi(\bar a)$$

si y solo si

$$\sum_{\Delta\in\mathcal{N}^*} (-1)^{|\Delta|}N_\Delta = 0,$$

donde $\mathcal{N}^* = \{\Delta \in \wp \mid A_0 \cap A_\Delta \neq \emptyset\}$.

Para cada $\Delta \in \wp$ definimos la fórmula

$$\tau_\Delta(\bar u) \equiv \exists v \left(\varphi_0(v,\bar u) \wedge \bigwedge_{i\in\Delta} \varphi_i(v,\bar u)\right).$$

Notemos que $\tau_\Delta(\bar u)$ es una pp-fórmula que expresa la condición de que $A_0 \cap A_\Delta \neq \emptyset$ cuando $A_i = \varphi_i(M,\bar u)\diagup H_0\cap\cdots\cap H_k$.

Como consecuencia

$$M \models \varphi(\bar u) \longleftrightarrow \sum_{\Delta\in\mathcal{N}(\bar u)} (-1)^{|\Delta|}N_\Delta = 0 \qquad (\bullet)$$

donde $\mathcal{N}(\bar u) = \{\Delta \in \wp \mid M \models \tau_\Delta(\bar u)\}$.

Ahora, sea $\mathcal{S}$ la familia (finita) de subconjuntos $\mathcal{N}$ de $\wp$ para los cuales

$$\sum_{\Delta\in\mathcal{N}} (-1)^{|\Delta|}N_\Delta = 0.$$

Así, de $(\bullet)$ se deduce que

$$M \models \varphi(\bar u) \quad \text{si y solo si} \quad \mathcal{N}(\bar u) \in \mathcal{S}. \qquad (\bullet\bullet)$$

A cada subconjunto $\mathcal{N}$ de $\wp$ le asociamos la conjunción

$$\tau_{\mathcal{N}}(\bar{u}) \equiv \bigwedge_{\Delta\in\mathcal{N}} \tau_{\Delta}(\bar{u}) \wedge \bigwedge_{\Delta\in\wp\setminus\mathcal{N}} \neg\tau_{\Delta}(\bar{u}),$$

y definimos la fórmula

$$\tau(\bar{u}) \equiv \bigvee_{\mathcal{N}\in S} \tau_{\mathcal{N}}(\bar{u}),$$

la que es una combinación booleana de pp-fórmulas.

Afirmamos que $\tau(\bar{u})$ es equivalente en M a la fórmula ($\bigstar$).

Por (••) es suficiente demostrar que

$$M \models \tau(\bar{u}) \quad \text{si y sólo si} \quad \mathcal{N}(\bar{u}) \in \mathcal{S}.$$

Sea $\bar{a} \in M^m$, donde m es, recordemos, la longitud de las variables libres $\bar{u}$. Si $\mathcal{N}(\bar{a}) \in \mathcal{S}$, claramente $\tau(\bar{a})$ se cumple en M.

Ahora, si la fórmula $\tau(\bar{a})$ es cierta en M, entonces $\tau_{\mathcal{N}}(\bar{a})$ se cumple en M para un $\mathcal{N} \in \mathcal{S}$. Basta probar que $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\bar{a})$, lo cual es inmediato de la definición de $\tau_{\mathcal{N}}$, ya que para todo $\Delta \in \wp$:

Si $\Delta \in \mathcal{N}$, entonces $M \models \tau_{\Delta}(\bar{a})$ lo cual implica $\Delta \in \mathcal{N}(\bar{a})$. Si $\Delta \notin \mathcal{N}$, entonces $M \models \neg\tau_{\Delta}(\bar{a})$ lo cual implica $\Delta \notin \mathcal{N}(\bar{a})$.

Esto muestra que

$$M \models \forall v(\varphi_0(v,\bar{u}) \longrightarrow \varphi_1(v,\bar{u}) \vee \cdots \vee \varphi_n(v,\bar{u})) \longleftrightarrow \tau(\bar{u}).$$

Además, observemos que τ sólo depende de los índices N_{Δ}, con lo cual se termina la prueba. □

Corolario II.48 (Sabbagh). *Sean M, M' R-módulos. Entonces, $M \equiv M'$ (véase la definición I.4) si y sólo si para todas las pp-fórmulas con una variable libre tales que $\psi \leqslant \varphi$, los subgrupos definidos por ψ, φ en M y M' cumplen que los índices $[\varphi(M) : \psi(M)]$, $[\varphi(M') : \psi(M')]$ son iguales o ambos son infinitos.*

Para la demostración de este corolario necesitamos varios lemas previos.

Sean ψ, φ pp-fórmulas con el mismo número de variables libres, digamos n. Para k natural, definimos el siguiente enunciado

$$\chi_k \equiv \forall \bar{v_1}, \dots \bar{v_k} \quad \exists \bar{v} \left(\varphi(\bar{v}) \wedge \bigwedge_{1\leq i\leq k} \neg\psi(\bar{v} - \bar{v_i}) \right).$$

También, dado M un R-módulo denotaremos con $Inv(M,\varphi,\psi)$ al índice $[\varphi(M) : \varphi(M) \cap \psi(M)]$. Si $\psi \leqslant \varphi$, claramente $Inv(M,\varphi,\psi) = |\varphi(M)/\psi(M)|$.

Lema II.49. *Supongamos que $\psi \leqslant \varphi$. Entonces, $Inv(M,\varphi,\psi) > k$ si y sólo si el enunciado χ_k se cumple en M.*

Demostración. Supongamos que $M \models \chi_k$. Sean $\bar{a_1}, \dots \bar{a_k} \in M^n$, entonces existe $\bar{a} \in M^n$ tal que $M \models \varphi(\bar{a})$ y $M \models \neg\psi(\bar{a} - \bar{a_i})$ para toda $1 \leq i \leq k$. De donde $\bar{a} \in \varphi(M)$ y $\bar{a} - \bar{a_i} \notin \psi(M)$. Por lo tanto

$$\bar{a} + \psi(M) \neq \bar{a_i} + \psi(M) \quad 1 \leq i \leq k,$$

es decir, existen al menos $k+1$ clases laterales de $\varphi(M)$ con respecto al subgrupo $\psi(M)$.

Ahora, supongamos que χ_k no se cumple en M. Por lo tanto existen $\bar{a_1}, \dots \bar{a_k} \in M^n$ tales que $M \models \forall \bar{v}(\neg\varphi(\bar{v}) \vee \bigvee_{1\leq i\leq k} \psi(\bar{v} - \bar{a_i}))$. Observemos que si $\bar{a} \in \varphi(M)$ entonces $\bar{a} - \bar{a_i} \in \psi(M)$ para alguna i, de donde

$$\forall \bar{a} \in \varphi(M) \quad \exists i \in \{1, \dots, k\} \text{ tal que } \bar{a} + \psi(M) = \bar{a_i} + \psi(M).$$

Lo cual implica que $Inv(M, \varphi, \psi) \leq k$. □

Por esta razón, para cada k natural, abreviamos el enunciado χ_k como $|\varphi/\psi| > k$, a su negación como $|\varphi/\psi| \leq k$ y $|\varphi/\psi| = k$ denota la conjunción de $|\varphi/\psi| > k$ y $|\varphi/\psi| \leq k + 1$. El conjunto de enunciados $|\varphi/\psi| > k$, para toda $k > 0$, se abrevia como $|\varphi/\psi| = \infty$.

Lema II.50. *La propiedad $Inv(M, \varphi, \psi) = k$ es expresada por el enunciado $|\varphi/\psi| = k$. Además, $Inv(M, \varphi, \psi)$ es infinito si $M \models |\varphi/\psi| = \infty$, por lo cual es una propiedad que se axiomatiza mediante una cantidad infinita de enunciados.*

A estos enunciados de primer orden se les llama **invariantes**. Este nombre hace referencia a que dada una teoría completa de módulos T, el valor de $|\varphi/\psi|$ es el mismo en todos sus modelos.

Notemos que la relación $\psi \leqslant \varphi$ se expresa por el invariante $|\psi/(\varphi \wedge \psi)| = 1$: como $\psi(M) \subseteq \varphi(M)$ entonces $\psi(M) = \varphi(M) \cap \psi(M)$ y por lo tanto su cociente resulta ser el grupo trivial, $\psi(M)/(\varphi(M) \cap \psi(M)) \cong 0$.

Demostración del corolario II.48. Supongamos que $M \equiv M'$ y que

$$[\varphi(M) : \psi(M)] = k$$

para alguna $k \in \omega$. Como $\psi \subseteq \varphi$ entonces

$$[\varphi(M) : \psi(M)] = [\varphi(M) : \psi(M) \cap \varphi(M)] = Inv(M, \varphi, \psi)$$

y

$$[\varphi(M') : \psi(M')] = [\varphi(M') : \psi(M') \cap \varphi(M')] = Inv(M', \varphi, \psi).$$

Por el lema II.50 tenemos que

$$M \models \forall v_1, \dots v_k \quad \exists v(\varphi(v) \wedge \bigwedge_{1\leq i\leq k} \neg\psi(v - v_i))$$

y

$$M \models \neg(\forall v_1, \dots v_k, v_{k+1} \quad \exists v(\varphi(v) \wedge \bigwedge_{1\leq i\leq k+1} \neg\psi(v - v_i))).$$

Pero M y M' son elementalmente equivalentes, por lo que

$$M' \models \forall v_1, \dots v_k \quad \exists v(\varphi(v) \wedge \bigwedge_{1\leq i\leq k} \neg\psi(v - v_i))$$

y

$$M' \models \neg(\forall v_1, \dots v_k, v_{k+1} \quad \exists v(\varphi(v) \wedge \bigwedge_{1\leq i\leq k+1} \neg\psi(v - v_i))),$$

es decir, $Inv(M', \varphi, \psi) = k$. En consecuencia

$$[\varphi(M) : \psi(M)] = [\varphi(M') : \psi(M')] .$$

Si $[\varphi(M):\psi(M)]$ es infinito, por los mismos argumentos que antes, el índice $[\varphi(M'):\psi(M')]$ también es infinito.

Recíprocamente, sea σ un enunciado de ${}_R\mathscr{L}$. Por el teorema II.47, σ es equivalente en M a una combinación booleana de pp-fórmulas que sólo depende de los índices $[\psi(M):\varphi(M)]$ con φ,ψ pp-fórmulas $\psi\subseteq\varphi$.

Por hipótesis $[\psi(M):\varphi(M)]=[\psi(M'):\varphi(M')]$ para todas las pp-fórmulas con esas condiciones. Además, una pp-fórmula sin variables libres es de la forma

$$\exists w_1,\ldots,w_m \quad \bigwedge_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{m} r_{ij}w_j=0\right),$$

el cual es un enunciado siempre verdadero (en cualquier R-módulo tomamos a $w_i=0$).

Por lo tanto, σ es equivalente en M' a la misma combinación booleana, y así $M\models\sigma$ si y sólo si $M'\models\sigma$. $\square$

Corolario II.51. *Toda teoría completa de módulos puede ser axiomatizada por enunciados de la forma $|\varphi/\psi|>k$ y $|\varphi/\psi|\leq l$ $(k,l\in\omega)$ donde ψ,φ son pp-fórmulas con una variable libre.*

Demostración. Sea T una teoría completa de ${}_R\mathscr{L}$.

Como T es una teoría completa existe un módulo M tal que $T=Teo(M)$, entonces $Inv(M,\varphi,\psi)$ es finito o infinito para cualquier par ψ,φ de pp-fórmulas con una variable libre.

Se define el conjunto $A_{\varphi,\psi}$ de enunciados como sigue: si $Inv(M,\varphi,\psi)=k$, para alguna k natural, entonces $A_{\varphi,\psi}=\{|\varphi/\psi|>k,\ |\varphi/\psi|\leq k+1\}$. En el caso de que $Inv(M,\varphi,\psi)$ sea infinito, $A_{\varphi,\psi}=\{|\varphi/\psi|>k \mid k\in\omega\}$.

Definimos

$$A=\bigcup\{A_{\varphi,\psi} \mid \psi,\varphi \text{ pp-fórmulas}\}.$$

Afirmamos que A axiomatiza a T. Sean $\mathscr{C}$ la clase de los R-módulos que satisfacen T y $\mathscr{C}'$ la clase de los R-módulos que satisfacen A; debemos mostrar que las clases son iguales.

Claramente, $\mathscr{C}\subseteq\mathscr{C}'$ ya que $A\subset T$.

Si $N\in\mathscr{C}'$ es suficiente demostrar que $M\equiv N$ para que $N\in\mathscr{C}$. Para cualesquiera pp-fórmulas $\psi\subseteq\varphi$, como N y M son modelos de A se tiene

$$N\models A_{\varphi,\psi} \quad \text{y} \quad M\models A_{\varphi,\psi}.$$

En consecuencia, $[\varphi(M):\psi(M)]=[\varphi(N):\psi(N)]$ ya que los enunciados de $A_{\varphi,\psi}$ representan el valor de estos índices. Del corolario II.48 se sigue que $M\equiv N$, por lo tanto $\mathscr{C}'\subseteq\mathscr{C}$.

$\square$

Corolarios de la pp-eliminación de cuantificadores

En esta sección presentamos algunos corolarios cuyas pruebas son más sencillas a partir de la pp-eliminación de cuantificadores en la teoría de módulos. Veamos antes algunos lemas auxiliares.

Lema II.52. *Sea M_i, $i\in I$, una familia de R-módulos y $\varphi(\bar v)$, una pp-fórmula. Entonces*

(a) $\varphi\left(\prod_{i\in I}M_i\right)=\prod_{i\in I}\varphi(M_i)$

(b) $\varphi\left(\bigoplus_{i\in I}M_i\right)=\bigoplus_{i\in I}\varphi(M_i)$

Demostración. La igualdad es un abuso de notación, se obtiene si φ tiene una variable libre, en otro caso sólo tenemos un isomorfismo.

(a) Sea $\bar{a}$ una n-ada de $\prod_{i\in I} M_i$, $\bar{a} = \left((a_i^1)_{i\in I}, (a_i^2)_{i\in I}, \ldots, (a_i^n)_{i\in I}\right)$. Claramente $\left(\prod_{i\in I} M_i\right)^n \cong \prod_{i\in I}(M_i^n)$, entonces podemos asociar a $\bar{a}$ con su correspondiente $\bar{a'} \in \prod_{i\in I}(M_i^n)$, donde $\bar{a'} = \left(a_i^1, a_i^2, \ldots, a_i^n\right)_{i\in I}$.

Demostraremos que $\bar{a} \in \varphi(\prod_{i\in I} M_i)$ si y sólo si $\bar{a'} \in \prod_{i\in I} \varphi(M_i)$.

Supongamos que $\bar{a} \in \varphi(\prod_{i\in I} M_i)$. Dado $j \in I$, sea $p_j : \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow M_j$ la proyección j-ésima. Por el lema II.6 sabemos que $M_j \models \varphi(p_j(\bar{a}))$, es decir,

$$M_j \models \varphi(a_j^1, a_j^2, \ldots, a_j^n),$$

luego $M_j \models \varphi(\bar{a'}_j)$, y por lo tanto $\bar{a'} \in \prod_{i\in I} \varphi(M_i)$.

Recíprocamente, supongamos que $\bar{a'} \in \prod_{i\in I} \varphi(M_i)$ y que φ tiene la forma

$$\exists w_1, \ldots, w_m \bigwedge_{h=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{m} r_{hj} w_j - \sum_{l=1}^{n} s_{hl} v_l = 0 \right).$$

Dado $i \in I$, $\varphi(a_i^1, a_i^2, \ldots, a_i^n)$ se cumple en M_i, por lo que existen testigos $b_i^1, b_i^2, \ldots, b_i^m$ en M_i tales que

$$\forall h \in \{1, \ldots, k\} \sum_{j=1}^{m} r_{hj} b_i^j - \sum_{l=1}^{n} s_{hl} a_i^l = 0.$$

Así, para todo $h = 1, \ldots, k$ se sigue que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m} r_{hj}(b_i^j)_{i\in I} - \sum_{l=1}^{n} s_{hl}(a_i^l)_{i\in I} &= \sum_{j=1}^{m}(r_{hj} b_i^j)_{i\in I} - \sum_{l=1}^{n}(s_{hl} a_i^l)_{i\in I} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{m} r_{hj} b_i^j - \sum_{l=1}^{n} s_{hl} a_i^l \right)_{i\in I} \\ &= (0)_{i\in I} \end{aligned}$$

Concluimos que $\prod_{i\in I} M_i \models \varphi(\bar{a})$.

(b) La demostración es análoga al inciso (a).

$\square$

Lema II.53. *Sean M, N, N' y M_i, $i \in I$, R-módulos. Entonces*

(a) *Si M es submódulo puro de N entonces*

$$Inv(N, \varphi, \psi) = Inv(M, \varphi, \psi) \cdot Inv(N/M, \varphi, \psi)$$

para cualesquiera φ, ψ pp-fórmulas con una variable libre, de donde $N \equiv M \oplus (N/M)$. En particular $Inv(M, \varphi, \psi) \leq Inv(N, \varphi, \psi)$.

(a') *Si* $M \prec N$ *entonces* $N \equiv M \oplus (N/M)$. *Si además* $N \prec N'$ *entonces* N/M *es submódulo puro de* N'/M.

(b) $Inv(M \oplus N, \varphi, \psi) = Inv(M, \varphi, \psi) \cdot Inv(N, \varphi, \psi)$ *para cualesquiera* φ, ψ *pp-fórmulas.*

(c) $Inv(\bigoplus_{i \in I} M_i, \varphi, \psi) \doteq \prod_{i \in I} Inv(M_i, \varphi, \psi) = Inv(\prod_{i \in I} M_i, \varphi, \psi)$ *para cualesquiera* φ, ψ *pp-fórmulas, donde* $\doteq$ *significa que son iguales o ambos infinitos.*

Demostración.

(c) Del lema II.52 se sigue que el cociente $\varphi\left(\prod M_i\right)/\psi\left(\prod M_i\right)$ es isomorfo a $\prod \varphi(M_i) / \prod \psi(M_i)$ y también que $\varphi\left(\bigoplus M_i\right)/\psi\left(\bigoplus M_i\right)$ es isomorfo a $\bigoplus \varphi(M_i) / \bigoplus \psi(M_i)$.

Si asignamos $(a_i^1, \ldots, a_i^n)_{i \in I} + \prod \psi(M_i) \mapsto \left((a_i^1, \ldots, a_i^n) + \psi(M_i)\right)_{i \in I}$ claramente obtenemos que $\prod \varphi(M_i) / \prod \psi(M_i) \cong \prod \left(\varphi(M_i)/\psi(M_i)\right)$, y de manera análoga, $\bigoplus \varphi(M_i) / \bigoplus \psi(M_i) \cong \bigoplus \left(\varphi(M_i)/\psi(M_i)\right)$.

De lo anterior se sigue que $\left|\varphi\left(\prod M_i\right)/\psi\left(\prod M_i\right)\right| = \left|\prod\left(\varphi(M_i)/\psi(M_i)\right)\right|$, o de manera equivalente, $Inv\left(\prod M_i, \varphi, \psi\right) = \prod Inv(M_i, \varphi, \psi)$.

Ahora, para demostrar que $Inv(\bigoplus M_i, \varphi, \psi) \doteq \prod Inv(M_i, \varphi, \psi)$, sólo es necesario comprobar que $\left|\bigoplus\left(\varphi(M_i)/\psi(M_i)\right)\right| \doteq \prod Inv(M_i, \varphi, \psi)$.

Si para algún $i \in I$, $|\varphi(M_i)/\psi(M_i)|$ es infinito, entonces también lo son $\left|\bigoplus\left(\varphi(M_i)/\psi(M_i)\right)\right|$ y $\prod Inv(M_i, \varphi, \psi)$; si para una cantidad infinita de $i \in I$, $|\varphi(M_i)/\psi(M_i)| > 1$, también ambas cardinalidades son infinitas. Finalmente, si para cada $i \in I$, $|\varphi(M_i)/\psi(M_i)|$ es finita y sólo para algunos es mayor que 1, es decir, para una cantidad infinita de $i \in I$ el único elemento de $\varphi(M_i)/\psi(M_i)$ es el "0" $(\psi(M_i))$, entonces cada elemento de $\prod\left(\varphi(M_i)/\psi(M_i)\right)$ tiene infinitas entradas "0" y por lo tanto $\bigoplus\left(\varphi(M_i)/\psi(M_i)\right) = \prod\left(\varphi(M_i)/\psi(M_i)\right)$.

(b) Es el caso particular de (c), cuando I tiene dos elementos.

(a) Primero demostraremos que si M es puro en N y $\sigma(v)$ es una pp-fórmula entonces $|\sigma(N/M)| = |\sigma(N)/\sigma(M)|$. Supongamos que σ es de la forma

$$\sigma(v) \equiv \exists w_1, \ldots, w_m \quad \bigwedge_{i=1}^{k} \left(r_i v + \sum_{l=1}^{m} t_{il} w_l = 0\right),$$

con $r_i, t_{il} \in R$.

Notemos que $\sigma(M) = M \cap \sigma(N)$, ya que para cualquier a en M, como M es puro N entonces $a \in \sigma(M)$ si y sólo si $a \in \sigma(N)$.

Además, observemos que por el lema II.6, si $N \models \sigma(a)$ entonces $N/M \models \sigma(a + M)$.

Por lo anterior, definimos el homomorfismo $f : \sigma(N)/\sigma(M) \to \sigma(N/M)$ como $f(a + \sigma(M)) = a + M$ para $a \in \sigma(N)$. Claramente f está bien definido, $a + \sigma(M) = b + \sigma(M)$ implica que $a - b \in \sigma(M) \subseteq M$.

Veamos que f es un monomorfismo. Sean $a, b \in \sigma(N)$ tales que $a + M = b + M$, entonces $a + \sigma(M) = a + M \cap \sigma(N)$ por una observación anterior, pero $a \in \sigma(N)$ por lo tanto $a + \sigma(M) = (a + M) \cap \sigma(N)$ y por hipótesis $a + \sigma(M) = (b + M) \cap \sigma(N) = b + \sigma(M)$.

Más aún, f es un epimorfismo. Sea $a \in M$ tal que $N/M \models \sigma(a + M)$.

Llamemos θ a la siguiente fórmula

$$\theta(\bar{w}, v) \equiv \bigwedge_{i=1}^{k} \left(r_i v + \sum_{l=1}^{m} t_{il} w_l = 0 \right),$$

o sea, a σ la podemos expresar como $\sigma(v) \equiv \exists \bar{w} \theta(\bar{w}, v)$. Entonces $N/M \models \exists \bar{w} \theta(\bar{w}, a + M)$, es decir, existen $b_1, \ldots, b_m \in N$ tales que $\theta(b_1 + M, \ldots, b_m + M, a + M)$ se cumple en N/M.

Ahora, si al elemento neutro "0" lo tomamos como parámetro, podemos reemplazar a θ con la fórmula $\theta_0(\bar{w}, v, \bar{0})$ donde

$$\theta_0(\bar{w}, v, \bar{z}) \equiv \bigwedge_{i=1}^{k} \left(r_i v + \sum_{l=1}^{m} t_{il} w_l = z_i \right).$$

Tenemos que $N/M \models \theta_0(\bar{b}, a, \bar{0})$, es decir, $r_i(a + M) + \sum_{l=1}^{m} t_{il}(b_l + M) = M$ para $i = 1, \ldots k$, o equivalentemente, $r_i a + \sum_{l=1}^{m} t_{il} b_l = c_i$ para ciertos $c_i \in M$. Luego, $N \models \theta_0(\bar{b}, a, \bar{c})$.

Por lo tanto, $\exists \bar{w}, v\, \theta_0(\bar{w}, v, \bar{c})$ es una pp-fórmula que se cumple en M. Como M es puro en N y $\bar{c}$ está en M entonces $\exists \bar{w}, v \theta_0(\bar{w}, v, \bar{c})$ también se cumple en M. En consecuencia existen $\bar{b}'$ ya' en M tales que M modela $\theta_0(\bar{b}', a', \bar{c})$ y, por lo tanto, también N lo hace.

Así, por la linealidad de las pp-fórmulas, la fórmula $\theta_0(\bar{b} - \bar{b}', a - a', \bar{c} - \bar{c}) \equiv \theta_0(\bar{b} - \bar{b}', a - a', \bar{0})$ es válida en N. En particular, $N \models \exists \bar{w}\, \theta_0(\bar{w}, a - a', \bar{0})$, y por las definiciones de θ_0 y de θ obtenemos que $N \models \sigma(a - a')$, es decir, $a - a' \in \sigma(N)$. Además, $a - a' + M = a + M$ ya que $a' \in M$.

Por lo tanto, $a+M = f((a-a')+\sigma(M))$, y así f es un isomorfismo entre $\sigma(N/M)$ y $\sigma(N)/\sigma(M)$.

Ahora veamos que $Inv(N, \varphi, \psi) = Inv(M, \varphi, \psi) \cdot Inv(N/M, \varphi, \psi)$; podemos suponer que $\psi \leqslant \varphi$.

Como $\psi(N/M) \leq \varphi(N/M)$, entonces por el conocido teorema de Lagrange

$$|\varphi(N/M)| = [\varphi(N/M) : \psi(N/M)]\, |\varphi(N/M)|.$$

Pero $|\varphi(N/M)| = |\varphi(N)/\varphi(M)|$ y $|\psi(N/M)| = |\psi(N)/\psi(M)|$. Luego,

$$[\varphi(N) : \varphi(M)] = [\varphi(N/M) : \psi(N/M)]\, [\psi(N) : \psi(M)]\,. \qquad (\star)$$

Por otro lado, como $\psi(M) \leq \psi(N) \leq \varphi(N)$ y $\psi(M) \leq \varphi(M) \leq \varphi(N)$ tenemos que

$$\begin{aligned} [\varphi(N) : \psi(M)] &= [\varphi(N) : \psi(N)]\, [\psi(N) : \psi(M)] \\ [\varphi(N) : \psi(M)] &= [\varphi(N) : \varphi(M)]\, [\varphi(M) : \psi(M)]\,. \end{aligned}$$

Entonces, por la igualdad $(\star)$ obtenemos

$$\begin{aligned} [\varphi(N) : \psi(N)]\, [\psi(N) : \psi(M)] &= [\varphi(N) : \varphi(M)]\, [\varphi(M) : \psi(M)] \\ &= ([\varphi(N/M) : \psi(N/M)]\, [\psi(N) : \psi(M)])\, [\varphi(M) : \psi(M)] \qquad (\star\star) \end{aligned}$$

Además, debido a que $[\psi(N) : \psi(M)]$ es menor o igual que $[\varphi(N) : \psi(N)]$ y $[\varphi(M) : \psi(M)]$, la igualdad $(\star\star)$ es equivalente a

$$[\varphi(N) : \psi(N)] = [\varphi(N/M) : \psi(N/M)]\, [\varphi(M) : \psi(M)]$$

como se quería.

Finalmente, por el inciso (b)

$$Inv(M \oplus N/M, \varphi, \psi) = Inv(M, \varphi, \psi) \cdot Inv(N/M, \varphi, \psi).$$

Luego $Inv(M \oplus N/M, \varphi, \psi) = Inv(N, \varphi, \psi)$ para todas las pp-fórmulas tales que $\psi \subseteq \varphi$, y por el corolario II.48 se concluye que $N \equiv M \oplus (N/M)$.

(a') Si $M \prec N$, en particular M es puro en N y por (a) se obtiene $N \equiv M \oplus (N/M)$.

Para la siguiente afirmación supongamos que además $N \prec N'$. Debemos mostrar que N/M es submódulo puro de N'/M.

Sean $\varphi(\bar{v})$ una pp-fórmula y $\bar{a} = (a_0, \ldots, a_{n-1}) \in M^n$. Supongamos que $\bar{a} + M \in \varphi(N'/M)$ donde $\bar{a} + M$ denota a la n-ada $(a_0 + M, \ldots, a_{n-1} + M) \in (N/M)^n$. Análogamente a la demostración del inciso (a) podemos encontrar $\bar{a}' \in M^n$ tal que $N' \models \varphi(\bar{a} - \bar{a}')$. En particular, $\bar{a} - \bar{a}' \in N^n$ y como $N \prec N'$ entonces $N \models \varphi(\bar{a} - \bar{a}')$. De donde concluimos que $\bar{a} + M = (\bar{a} - \bar{a}') + M \in \varphi(N/M)$, es decir,

$$N/M \models \varphi(\bar{a} + M).$$

□

Corolario II.54. *Sean M, y M_i $i \in I$, R-módulos.*

(a) $\bigoplus_{i \in I} M_i \equiv \prod_{i \in I} M_i$.

(b) $M^{(\kappa)} \equiv M^{(\aleph_0)} \equiv M^{\aleph_0} \equiv M^{\kappa}$ *para cualquier κ infinita. (Si λ es un cardinal $M^{(\lambda)} = \bigoplus_{\nu<\lambda} M$ y $M^{\lambda} = \prod_{\nu<\lambda} M$).*

Demostración. Los dos incisos se siguen del lema II.53(c) y de la caracterización en el corolario II.48. □

Lema II.55. *Sean M, M' y N R-módulos. Si M es puro en N, N puro en M' y $M \equiv M'$ entonces $M \prec N$ y $N \prec M'$.*

Demostración. Por lema II.53(a), tenemos que

$$Inv(M, \varphi, \psi) \leq Inv(N, \varphi, \psi) \leq Inv(M', \varphi, \psi).$$

Además, por el corolario II.48, $Inv(M, \varphi, \psi) \doteq Inv(M', \varphi, \psi)$ lo cual implica que $M \equiv N$.

Sean $\bar{a}$ en M y $\sigma(\bar{v})$ cualquier fórmula del lenguaje. Por el teorema de Baur-Monk (II.47) σ es una combinación booleana de pp-fórmulas. Luego, como M es puro en N, cada pp-fórmula de esa combinación se cumple en M si y sólo si se cumple en N. Por lo tanto, $M \models \sigma(\bar{a})$ si y sólo si $N \models \sigma(\bar{a})$, esto es, $M \prec N$. Por los mismos argumentos, $N \prec M'$. □

Corolario II.56. *Si M es elementalmente equivalente a N entonces cualquier encaje puro de M en N es un encaje elemental, en particular, si M es puro en N, $M \prec N$.*

Demostración. Sea $f : M \to N$ un encaje puro y σ una fórmula del lenguaje. Por argumentos similares a la prueba anterior, a cada pp-fórmula de la combinación boolena correspondiente la satisface una n-ada de M si y sólo si su imagen respecto a f la satisface en N. Luego, $M \models \sigma(\bar{a})$ si y sólo si $N \models \sigma(f(\bar{a}))$, siendo así f elemental. □

Corolario II.57. *Sea M_i, $i \in I$, una familia de R-módulos. Entonces*

$$\bigoplus_{i\in I} M_i \prec \prod_{i\in I} M_i.$$

Demostración. Primero veamos que $\bigoplus M_i$ es puro en $\prod M_i$.

Sea $\varphi(\bar{v}) \equiv \exists \bar{w}\theta(\bar{w},\bar{v})$ una pp-fórmula y $\bar{a} = \left(\left(a_i^1\right)_{i\in I}, \ldots, \left(a_i^n\right)_{i\in I} \right)$ con $\left(a_i^1\right)_{i\in I} \in \bigoplus M_i$ para $1 \leq j \leq n$. Si $\prod M_i \models \varphi(\bar{a})$, entonces existen $\left(b_i^1\right)_{i\in I}, \ldots, \left(b_i^n\right)_{i\in I} \in \prod M_i$ tales que $\theta(\bar{b},\bar{a})$ se cumple.

Para cada $k = 1, \ldots n$ e $i \in I$ definimos

$$c_i^k = \begin{cases} b_i^k & \text{si } a_i^n \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

Claramente, $\left(c_i^1\right)_{i\in I}, \ldots, \left(c_i^n\right)_{i\in I}$ son elementos de $\bigoplus M_i$, con los cuales obtenemos que $\bigoplus M_i \models \varphi(\bar{a})$.

Luego, por los Corolarios II.54 y II.56 concluimos que $\bigoplus M_i \prec \prod M_i$. ☐

Corolario II.58. *Para cualquier R-módulo M se cumple*

$$M \equiv M^{(\aleph_0)} \Longleftrightarrow M \equiv M^2.$$

Demostración. Sean φ, ψ pp-fórmulas con una variable libre ($\psi \subseteq \varphi$). Del corolario II.48, si $M \equiv M^{(\aleph_0)}$ entonces $Inv(M,\varphi,\psi) \doteq Inv(M^{(\aleph_0)}\varphi,\psi)$.

Pero, por el lema II.53, $Inv(M^{(\aleph_0)},\varphi,\psi) \doteq \prod_{n<\aleph_0} Inv(M,\varphi,\psi)$, por lo tanto $Inv(M,\varphi,\psi) \doteq \prod_{n<\aleph_0} Inv(M,\varphi,\psi)$, lo cual ocurre si y sólo si $Inv(M,\varphi,\psi) = \kappa \geq \aleph_0$. De donde, $Inv(M,\varphi,\psi) \doteq (Inv(M,\varphi,\psi))^2$ y del mismo lema concluimos que $M \equiv M^2$. El recíproco es análogo. ☐

II.7. Teorías y sus duales en el lenguaje de los R-Módulos

Daremos algunas definiciones dentro del contexto de este trabajo. Por una **teoría de R-módulos izquierdos** (respectivamente, R-módulos derechos) entenderemos una unión de los axiomas $_RT$ (resp. T_R) y un conjunto de combinaciones booleanas de enunciados invariantes finitos, que es consistente (es decir, que existe un módulo que satisface tanto a las fórmulas de tal conjunto así como a los axiomas).

Como permitimos infinitos enunciados invariantes para cada teoría, basta con un enunciado invariante por cada par φ, ψ de pp-fórmulas tales que $\varphi \leqslant \psi$. Así, los axiomas de una teoría de R-módulos pueden describirse mediante una función f que asigna un invariante (finito o infinito) a pares de pp-fórmulas izquierdas (derechas).

Por el corolario II.51, (los axiomas de) una teoría completa T podemos pensarla como una función del conjunto de todos los pares de pp-fórmulas φ, ψ con una variable libre tales que $\varphi \leqslant \psi$, al conjunto $\{\infty, 1, 2, 3, \ldots\}$ (obviamente que sea consistente con $_RT$ o T_R según sea el caso). A dicha función se le llama **función definición de $\boldsymbol{T}$**, f_T.

Por las observaciones anteriores, frecuentemente describiremos una teoría por su función definición f, es decir,

$$T_f = {}_RT \cup \{f(\varphi/\psi) \mid \varphi/\psi \in \mathrm{dom} f\}.$$

Definición II.59. Dada cualquier teoría T, izquierda o derecha, denotamos por $\boldsymbol{T^*}$ a la teoría completa de la suma directa de $\aleph_0$ copias de cada modelo de T de cardinalidad κ_R (recordemos que $\kappa_R = |R| + \aleph_0$, la cardinalidad del lenguaje de los R-módulos),

$$T^* = Teo\left(\bigoplus \left\{M^{\aleph_0} \mid M \models T \text{ y } |M| = \kappa_R\right\}\right).$$

A las teorías $Teo(R\text{-}Mod)^*$ y $Teo(Mod\text{-}R)^*$ se les llaman las teorías más grandes de R-módulos izquierdos y derechos, respectivamente.

Definición II.60. El dual $\mathsf{D}(|\varphi/\psi| > \alpha)$ del enunciado invariante $|\varphi/\psi| > \alpha$ ($\alpha \in \{\infty, 1, 2, 3, \dots\}$) es, por definición, el enunciado $|\mathsf{D}\psi/\mathsf{D}\varphi| > \alpha$. Similarmente se definen los duales de los demás enunciado invariantes. El dual de una combinación booleana de enunciados invariantes se define como la misma combinación de los correspondientes duales de los invariantes.

El dual de una teoría (izquierda) T se define como la unión de T_R con el conjunto de duales de las combinaciones booleanas que ocurren en T.

Es más, si T está dada por una función f_T, el dual de tal teoría $\mathsf{D}T$ puede darse por la función $f_{\mathsf{D}T}$ definida como:

$$f_{\mathsf{D}T}\left(\mathsf{D}\psi/\mathsf{D}\varphi\right) = f_T\left(\varphi/\psi\right),$$

para todos los pp-pares con una variable libre en el dominio de f_T. A continuación corroboraremos que, efectivamente, el conjunto $\mathsf{D}T$ definido con la función $f_{\mathsf{D}T}$ es consistente, esto es, que tiene un modelo, el cual construiremos.

Construcción del modelo para $f_{\mathsf{D}T}$.

Sea M^+ el módulo de caracteres (véase Apéndice, definición A.15) del R-módulo izquierdo M, es decir, el R-módulo derecho $Hom_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. El módulo de caracteres de un modelo de una teoría T dada, es nuestro candidato para un modelo de $\mathsf{D}T$.

Lema II.61. *Para todo R-módulo M, $\left(M^+\right)^n \cong \left(M^n\right)^+$.*

Demostración. Dado $\bar{f} = (f_i : i < n)$ en $\left(M^+\right)^n$, sea $\bar{f}(\bar{x})$ el caracter en M^n (es decir, que pertenece a $\left(M^n\right)^+$) que transforma cada $\bar{a} = (a_i : i < n) \in M^n$ en $\bar{f}(\bar{a}) := \sum_{i<n} f_i(a_i)$. Entonces $\bar{f} \mapsto \bar{f}(\bar{x})$ define un epimorfismo de $\left(M^+\right)^n$ a $\left(M^n\right)^+$.

De hecho, es un isomorfismo: si $\bar{f}(\bar{x})$ es el morfismo cero en $\left(M^n\right)^+$, es decir, $\bar{f}(\bar{a}) = 0$ para toda $\bar{a} \in M^n$, entonces $\bar{f}(\bar{e}_i) = 0$. Lo cual implica que $f_i(1) = 0$ para todo $i < n$, de donde los f_i son los morfismos cero para todo i. Así, efectivamente el morfismo definido antes es inyectivo. □

Primero observemos que existe un homomorfismo $^\wedge : M \to M^{++}$ donde a cada $a \in M$ se le asigna el caracter $\hat{a} : M^+ \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ definido por $\hat{a}(f) = f(a)$ para toda $f \in M^+$.

Como $\left(M^+\right)^n \cong \left(M^n\right)^+$, escribiremos $\bar{f}$ para $\bar{f}(\bar{x})$. Luego, $Ker\,\bar{f}$ es igual a $\left\{\bar{a} \in M^n \mid \bar{f}(\bar{a}) = 0\right\}$.

Dado un subgrupo A de M^n, definimos su complemento ortogonal , $\boldsymbol{A^\perp}$, en M^+ como el subgrupo $\left\{\bar{f} \in \left(M^+\right)^n \mid A \subseteq Ker\,\bar{f}\right\}$.

Dado un subgrupo F de $\left(M^+\right)^n$, definimos su complemento ortogonal, $\boldsymbol{F^\top}$, en M como el subgrupo $\bigcap_{\bar{f}\in F} Ker\,\bar{f}$.

Los complementos ortogonales $\perp$ y $\top$ establecen una conexión de Galois entre subgrupos de M^n y subgrupos de $\left(M^+\right)^n$, esto es, $A \subseteq A^{\perp\top}$; $F \subseteq F^{\top\perp}$; si $A \subseteq B$, entonces $B^\perp \subseteq A^\perp$; y si $F \subseteq G$, entonces $G^\top \subseteq F^\top$ para todos los subgrupos A, B de M^n y F, G de $\left(M^+\right)^n$.

A continuación daremos algunas propiedades de esta conexión.

Lema II.62. $(A_0 \cap A_1)^{\perp} \subseteq {A_0}^{\perp} + {A_1}^{\perp}$, *para cualesquiera subconjuntos* A_0 *y* A_1 *de* M^n.

Demostración. Para simplificar la notación podemos suponer que $n = 1$. Cualquier morfismo $f \in (A_0 \cap A_1)^{\perp}$ da lugar a un caracter $F \in (M/(A_0 \cap A_1))^{\perp}$ que envía $a + A_0 \cap A_1$ a $f(a)$. Como $M/(A_0 \cap A_1)$ se encaja en $M/A_0 \oplus M/A_1$ mediante $e : a + A_0 \cap A_1 \mapsto (a + A_0, a + A_1)$, el morfismo F puede ser factorizado a través de e. Luego, existen caracteres $g_i \in (M/A_i)^{+}$ tales que $f(a) = F(a + A_0 \cap A_1) = g_0(a + A_0) + g_1(a + A_1)$. Consideremos los epimorfismos canónicos $\pi_i : M \to M/A_i$ y sean $h_i = g_i \circ \pi_i$. Entonces, $h_i \in {A_i}^{\perp}$ y $h_0(a) + h_1(a) = g_0(a + A_0) + g_a(a + A_1) = f(a)$ para toda $a \in M$. Por lo tanto, $f = h_0 + h_1 \in {A_0}^{\perp} + {A_1}^{\perp}$. $\square$

Lema II.63. *Supongamos que* M *es un grupo abeliano y* A, B *son subgrupos de* M^n.

(a) *Para cualquier* $\bar{a} \in M^n - A$ *existe algún* $\bar{f} \in A^{\perp}$ *tal que* $\bar{f}(\bar{a}) \neq 0$.

(b) $A^{\perp\top} = A$.

(c) $A \subseteq B$ *si y sólo si* $B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$. *Por lo tanto,* $A = B$ *si y sólo si* $B^{\perp} = A^{\perp}$.

(d) *Si* $B \subseteq A$, *entonces* $B^{\perp}/A^{\perp} \cong (A/B)^{+}$.

Demostración. Sin pérdida de la generalidad, debido a que $(M^{+})^{n} \cong (M^{n})^{+}$, supongamos que $n = 1$.

(a) Sea B el subgrupo de M generado por $\{a\} \cup A$. Como $a \in M - A$ entonces $B/A \neq 0$, por lo cual también $(B/A)^{+}$ es diferente al grupo trivial. De donde, existe un caracter en B/A, digamos f, que no anula $a + A$. Consideremos $f' = f \circ \pi$, donde π es la proyección canónica de B a B/A. El morfismo f' un caracter en B que se puede extender a $\bar{f}$, un caracter en M, por la inyectividad de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, como lo muestra el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\imath"] \arrow[d, "f'"'] & M \arrow[dl, dashed, "\bar{f}"] \\ & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

Claramente $A \subseteq Ker\,\bar{f}$, y además $\bar{f}(a) = f'(a) = f(\pi(a)) = f(a + A) \neq 0$.

(b) Sabemos que $A \subseteq A^{\perp\top}$. Supongamos que la otra contención no se cumple, entonces existe $c \in A^{\perp\top} - A$. Por el inciso anterior podemos encontrar $f \in A^{\perp}$, $f : M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tal que $A \subseteq Ker\, f$, que satisface $f(c) \neq 0$. Pero $c \in (A^{\perp})^{\top} = \bigcap_{g \in A^{\perp}} Ker\, g$, lo cual es una contradicción.

(c) $A \subseteq B$ implica $B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$; y esta contención implica a su vez $B^{\perp\top} \subseteq A^{\perp\top}$, que por el inciso anterior es equivalente a $A \subseteq B$.

(d) Definimos el morfismo $\Upsilon : B^{\perp}/A^{\perp} \to (A/B)^{+}$ de la siguiente manera: para $f \in B^{\perp}$, es decir $f : M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ y $B \subseteq Ker\, f$,

$$\Upsilon(f + A^{\perp}) = \bar{f},$$

donde $f^{*} : A/B \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tal que $\bar{f}(a + B) = f(a)$ para toda $a \in A$.

Υ está bien definido: Si $f \in A^{\perp}$, entonces $A \subseteq Ker\, f$, por lo cual para toda $a \in A$, $0 = f(a) = \bar{f}(a + B)$, así $\bar{f} = 0$.

Ahora, comprobemos que Υ es un isomorfismo. La inyectividad es inmediata de la definición, ya que si $\Upsilon(f + A^{\perp}) = \bar{f} = 0$ entonces $A \subseteq Ker\, f$, o bien, $f \in A^{\perp}$.

Verifiquemos que también sea epimorfismo. Sea g un caracter en A/B e $\imath : A/B \to M$ el monomorfismo tal que $a+B \mapsto a$. Tenemos el siguiente diagrama por la inyectividad de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A/B \arrow[r, "\imath"] \arrow[d, "g"'] & M \arrow[dl, dashed, "f_g"] \\ & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

De donde, $g(a+B) = f_g(\imath(a+B)) = f_g(a)$. Además el morfismo f_g es un caracter en M tal que $f_g(b) = g(b+B) = g(0) = 0$ para todo $b \in B$, lo cual implica $B \subseteq Ker\, f_g$, por lo cual $f_g \in B^{\perp}$. Así $\Upsilon(f_g + A^{\perp}) = g$, como se requería.

$\square$

Regresando a nuestro objetivo inicial, en el siguiente resultado veremos la conexión entre el complemento ortogonal y su dual.

Lema II.64. *Sea φ una pp-fórmula. Entonces,*

$$\varphi(M)^{\perp} = \mathsf{D}\varphi(M^{+}) \text{ y } \mathsf{D}\varphi(M^{+})^{\top} = \varphi(M).$$

Demostración. Es suficiente verificar que $\varphi(M)^{\perp}$ es igual a $\mathsf{D}\varphi(M^{+})$. La segunda igualdad es el resultado inmediato de aplicar el lema II.63(b) a la primera igualdad.

Empezaremos con la contención $\mathsf{D}\varphi(M^{+}) \subseteq \varphi(M)^{\perp}$. Supongamos que φ es de la forma $G|H\bar{v}$ por lo que su dual $\mathsf{D}\varphi$ es $\exists \bar{z}\,(\bar{v} = \bar{z}H \wedge \bar{z}G = \bar{0})$. Si $\bar{f}$ satisface a $\mathsf{D}\varphi$ en M^{+}, podemos escribir $\bar{f} = \bar{g}H$ donde $\bar{g}G = \bar{0}$, para cierta $\bar{g}$ en M^{+}. Dada $\bar{a} \in \varphi(M)$ con $\bar{b}$ como testigo, escribimos $H\bar{a} = G\bar{b}$. Entonces $\bar{f}(\bar{a}) = (\bar{g}H)(\bar{a}) = \bar{g}(H\bar{a}) = \bar{g}(G\bar{b}) = (\bar{g}G)(\bar{b}) = 0$, con lo cual se verifica $\varphi(M) \subseteq Ker\, \bar{f}$. Por lo tanto, $\bar{f} \in \varphi(M)^{\perp}$.

La demostración de la contención restante se realizará por inducción en la construcción de φ. Supongamos que tiene n variables libres.

- **φ es primitiva**. En nuestro lenguaje, es este caso φ debe ser equivalente a $\sum_{i<n} r_i v_i = 0$ para ciertos $r_i \in R$. De los ejemplos en la página 17, si utilizamos las matrices adecuadas, obtenemos su dual,

  $$\mathsf{D}\left(\sum_{i<n} r_i v_i = 0\right) \equiv \exists w \bigwedge_{i<n} v_i = w r_i.$$

  Sea $A = \varphi(M)$. Debemos probar $A^{\perp} \subseteq \mathsf{D}\varphi(M^{+})$. Para simplificar a escritura denotaremos con t al término en φ, $t(\bar{v}) = \sum_{i<n} r_i v_i$, es decir, $\varphi(\bar{v}) \equiv t(\bar{v}) = \bar{0}$.

  Si $\bar{f} \in A^{\perp}$, entonces $\bar{f} \in (M^{+})^{n}$ y es tal que $\bar{f}(\bar{a}) = 0$ para toda n-ada $\bar{a}$ que satisfaga $t(\bar{a}) = 0$. Así, la asignación $t(\bar{a}) \mapsto \bar{f}(\bar{a})$ define un caracter en $\sum_{i<n} r_i M$. Tal morfismo lo extendemos a un caracter $f \in M^{+}$ por la inyectividad de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Entonces

  $$\sum f_i(a_i) = \bar{f}(\bar{a}) = f(t(\bar{a})) = \sum (f r_i)(a_i),$$

  para toda $\bar{a} = (a_i : i < n)$. De donde, $\bar{f} = (f r_i : i < n)$, con lo cual, debido al isomorfismo del lema II.61, se verifica que $\bar{f}$ satisface $\mathsf{D}\varphi$.

- $\boldsymbol{\varphi \equiv \varphi_1 \wedge \varphi_2}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que φ_1 y φ_2 tienen el mismo número de variables libres, en caso contrario simplemente renombramos a las variables de, digamos, φ_2 con un conjunto ajeno a las variables en φ_1 y después se añadiría a cada fórmula las variables de la contraria con coeficientes todos cero.

  Como D es un anti-isomorfismo en las pp-retículas, entonces $\mathsf{D}(\varphi_0 \wedge \varphi_1) \equiv \mathsf{D}\varphi_0 + \mathsf{D}\varphi_1$.

  Así, nuestro resultado a probar es $(\varphi_0 \wedge \varphi_1)(M)^\perp = (\mathsf{D}\varphi_0 + \mathsf{D}\varphi_1)(M^+)$, lo cual, al realizar las operaciones en subgrupos definibles y aplicar la hipótesis de recursión a φ_0 y φ_1, es equivalente a

  $$\begin{aligned}(\varphi_0(M) \cap \varphi_1(M))^\perp &= \mathsf{D}\varphi_0(M^+) + \mathsf{D}\varphi_1(M^+) \\ &= \varphi_0(M)^\perp + \varphi_1(M)^\perp.\end{aligned}$$

  La otra contención se obtiene del lema II.62.

- $\boldsymbol{\varphi \equiv \exists w\, \psi(\bar{v}, w)}$. Por el lema II.29, $\mathsf{D}\varphi(\bar{v})$ es de la forma $\mho_w \mathsf{D}\psi(\bar{v}, w)$.

  Primero demostraremos que si B es un subgrupo de M^{n+1} cuya proyección sobre los primeros n componentes es A, entonces

  $$A^\perp = \left\{\bar{f} \in (M^+)^n \mid (\bar{f}, 0) \in B^\perp\right\}.$$

  Sea $\bar{f} \in A^\perp$ y $\bar{b}$ en B. Si escribimos $\bar{b} = (\bar{a}, c)$ con $\bar{a}$ en A y $c \in M$, obtenemos $(\bar{f}, 0)(\bar{b}) = \bar{f}(\bar{a}) = 0$, por lo cual $(\bar{f}, 0) \in M^\perp$.

  Si $B = \psi(M)$, entonces $A = \varphi(M)$, y por la observación previa, $\varphi(M)^\perp$ está contenido en la proyección de las primeras n coordenadas de $\psi(M)^\perp$. Pero, por hipótesis de inducción en ψ, $\psi(M)^\perp \subseteq \mathsf{D}\psi(M^+)$, por lo cual $\varphi(M)^\perp$ está contenido también en la proyección de las primeras n coordenadas de $\mathsf{D}\psi(M^+)$, es decir, $\mho_w \mathsf{D}\psi(M^+) = \mathsf{D}\varphi(M^+)$, con lo cual se obtenemos el resultado deseado.

□

Finalmente, obtenemos la consistencia de $\mathsf{D}T$ definido por la función $f_{\mathsf{D}T}$.

Proposición II.65. *Sea T una teoría izquierda de módulos y M un R-módulo izquierdo. Entonces $M \models T$ si y sólo $M^+ \models \mathsf{D}T$.*

Demostración. Mostraremos que $M \models |\varphi/\psi| > k$ si y sólo si $M^+ \models |\mathsf{D}\psi/\mathsf{D}\varphi| > k$ para cualquier par de pp-fórmulas φ, ψ con una variable libre, tales que $\psi \leqslant \varphi$ y para cualquier número natural k. Luego, esto mismo se hereda a las combinaciones booleanas. Así, como toda teoría de módulos T es axiomatizada por enunciados invariantes, y $\mathsf{D}T$ está definida mediante los duales de tales invariantes, obtenemos el resultado deseado.

Sean $\varphi(v)$, $\psi(v)$ pp-fórmulas como arriba. Sabemos que $\psi(M) \subseteq \varphi(M)$, lo cual equivale, por el lema II.63(b) , a $\varphi(M)^\perp \subseteq \psi(M)^\perp$.

Por el lema anterior, $\mathsf{D}\psi(M^+) = \psi(M)^\perp$ y $\mathsf{D}\varphi(M^+) = \varphi(M)^\perp$, de donde, $\mathsf{D}\psi(M^+)/\mathsf{D}\varphi(M^+) = \psi(M)^\perp/\varphi(M)^\perp$, pero lo cual a su vez, por II.63(b) es isomorfo a $(\varphi(M)/\psi(M))^+$. Es decir,

$$\mathsf{D}\psi(M^+)/\mathsf{D}\varphi(M^+) \cong (\varphi(M)/\psi(M))^+.$$

Si un grupo es finito entonces es isomorfo a su grupo de caracteres (véase Apéndice, observación A.14). Luego, que $\varphi(M)/\psi(M)$ sea finito, es decir, $M \models |\varphi/\psi| = k$ para alguna k natural, equivale a que $(\varphi(M)/\psi(M))^+$ sea finito y con la misma cardinalidad, lo cual equivale también, por el isomorfismo de arriba, a que $\mathsf{D}\psi(M^+)/\mathsf{D}\varphi(M^+)$ sea finito y además $M^+ \models |\mathsf{D}\psi/\mathsf{D}\varphi| = k$ para la misma k.

Si un grupo es infinito también lo es su grupo de caracteres, así que por los mismos argumentos que antes, si $\varphi(M)/\psi(M)$ es infinito también lo es $\mathsf{D}\psi(M^+)/\mathsf{D}\varphi(M^+)$. De donde, los invariantes $|\varphi/\psi| > k$, $|\mathsf{D}\psi/\mathsf{D}\varphi| > k$ se cumplen en M y M^+, respectivamente, para todo k natural. □

El siguiente corolario resume los resultados obtenidos en el transcurso de esta sección.

Corolario II.66.

(a) *Una teoría de módulos T es consistente si y sólo si su dual lo es.*

(b) *Cada teoría es un dual de alguna teoría.*

Demostración. El único inciso que requiere un poco más de explicación es el segundo. Dada una teoría de módulos T obtenemos su teoría dual $\mathsf{D}T$ mediante los duales sus enunciados invariantes. Pero, recordemos que D es un anti-isomorfismo tal que $\mathsf{DD}\varphi \equiv \varphi$, lo cual implica, por la definición del dual de un invariante, que $\mathsf{D}\left(\mathsf{D}(|\varphi/\psi| > k)\right) \equiv |\varphi/\psi| > k$ para todo enunciado invariante. Así $T = \mathsf{D}(\mathsf{D}T)$. □

Para terminar esta parte, relativizaremos algunos conceptos, de la clase o la teoría de todos los R-módulos, a subclases y otras teorías.

El orden parcial $\leqslant$ en pp-fórmulas lo relativizamos a una clase arbitraria de módulos $\mathcal{K}$, escribimos

$$\boldsymbol{\psi \leqslant_{\mathcal{K}} \varphi}$$

si $\psi(N) \subseteq \varphi(N)$ para todo $N \in \mathcal{K}$; si $\mathcal{K} = \{N\}$ sólo escribimos $\psi \leqslant_N \varphi$. Por esta definición, $\leqslant$ es el mismo orden que $\leqslant_{R\text{-}Mod}$ y $\leqslant_{Mod\text{-}R}$.

Proposición II.67. *El orden $\leqslant_{\mathsf{fp}}$ (fp es la clase de los módulos finitamente presentados) es el mismo que $\leqslant$.*

Demostración. Es una consecuencia del lema II.24. Supongamos que $\psi \leqslant_{\mathsf{fp}} \varphi$ y sea $(M_\psi, \bar{a}_\psi)$ una realización libre de ψ. Como M_ψ es finitamente presentado, por nuestra hipótesis tenemos que $\psi(M_\psi) \subseteq \varphi(M_\psi)$, de donde, $M_\psi \models \varphi(\bar{a}_\psi)$. Entonces, por el inciso (c) del lema antes mencionado, $\psi \leqslant \varphi$. □

Ahora lo extendemos a las teorías; $\leqslant_T$ representanta al orden $\leqslant_{ModT}$. También definimos T-equivalencia $\equiv_T$ por $\leqslant_T$ *y* $\geqslant_T$; y $\mathcal{K}$-equivalencia $\equiv_{\mathcal{K}}$ por $\leqslant_{\mathcal{K}}$ *y* $\geqslant_{\mathcal{K}}$.

Así, el conjunto de clases $\equiv_T$-equivalentes de pp-fórmulas, con n variables libres, forma una retícula respecto a $\wedge$ y $+$, la cual denotamos por $pp_n(T)$, donde su orden es, claramente, $\leqslant_T$. A estas retículas nos referiremos como las pp-retículas de T. Se pueden definir similarmente las pp-retículas de $\mathcal{K}$, $pp_n(\mathcal{K})$, notando que $pp_n(\{M\})$ es exactamente la misma retícula que la definida con anterioridad, $pp_n(M)$.

Notemos que debido a que las pp-fórmulas conmutan con sumas directas, entonces el orden $\leqslant_{T^*}$, donde la teoría T^* está definida en II.59, coincide con el orden $\leqslant_T$.

Como se había mencionado previamente, $Teo(Mod\text{-}R)^*$ es llamada la teoría más grande de módulos derechos, en general se dice que $Teo(\mathcal{K})^*$ es la teoría más grande de módulos en $\mathcal{K}$. El uso del término "más grande"viene del hecho de que estas teorías son las más grandes con respecto al orden entre teorías definido por

$$\leqslant_T \text{ implica } \leqslant_{T'} .$$

Si T es una teoría de R-módulos (izquierdos o derechos), denotamos con $\mathcal{K}_T$ a la clase de los sumandos directos de modelos de T (y por lo tanto incluye a todo $Mod T$). Nuevamente, ya que las pp-fórmulas conmutan con sumas directas, $\leqslant_{\mathcal{K}_T}$ y $\leqslant_T$ son iguales. Por lo anterior $\leqslant_T$, $\leqslant_{T^*}$ y $\leqslant_{\mathcal{K}_T}$ coinciden.

Observación II.68. Para cualquier teoría T o clase $\mathcal{K}$ existe un módulo N de cardinalidad κ_R, digamos cualquier modelo de T^* o $Teo(\mathcal{K})^*$ de esa cardinalidad (el cual existe por el teorema de Löwenheim-Skolem), tal que $\leqslant_T$ o $\leqslant_{\mathcal{K}}$ coinciden con $\leqslant_N$.

Proposición II.69. *Sea $\mathcal{K}$ una clase de módulos. Si N es un módulo tal que $\leqslant_N$ coincide con $\leqslant_{\mathcal{K}}$ entonces $N \models Teo(\mathcal{K})^*$.*

Demostración. Supongamos que $\leqslant_N$ y $\leqslant_{\mathcal{K}}$ coinciden, pero N no es modelo de $Teo(\mathcal{K})^*$. Entonces existe un enunciado, en particular podemos elegir a una pp-fórmula $\varphi \in Teo(\mathcal{K})^*$ tal que $N \not\models \varphi$. Sea ψ cualquier otra pp-fórmula tal que $\neg\psi \in Teo(\mathcal{K})^*$. Tenemos que $N \models \varphi \to \psi$, es decir, $\varphi \leqslant_N \psi$. De donde, por hipótesis, se cumple que $\varphi \leqslant_{\mathcal{K}} \psi$, lo cual impica que $\varphi \leqslant_{Teo(\mathcal{K})^*} \psi$, lo cual es una contradicción ya que $\neg(\varphi \to \psi) \equiv \varphi \wedge \neg\psi \in Teo(\mathcal{K})^*$. □

Finalmente relativizamos el anti-isomorfismo D a retículas de teorías. Sabemos que $\leqslant_T$ y $\leqslant_{T'}$ son los mismos si y sólo si para todos las pp-fórmulas φ, ψ, $\psi \leqslant_T \varphi$ si y sólo si $\psi \leqslant_{T'} \varphi$.

Proposición II.70. D *es un anti-isomorfismo entre $pp_n(T)$ y $pp_n(\mathsf{D}T)$ (y por lo tanto también entre $pp_n(M)$ y $pp_n(M^+)$), es decir, $\psi \leqslant_T \varphi$ si y sólo si $\psi \leqslant_{\mathsf{D}T} \varphi$ para todos los pp-pares (con n variables libres).*

Demostración. Si $\mathsf{D}\varphi \equiv_{\mathsf{D}T} \mathsf{D}\psi$, entonces $\mathsf{D}\varphi(N) = \mathsf{D}\psi(N)$ para todo N modelo de $\mathsf{D}T$. Por la proposición II.65 $M^+ \models \mathsf{D}T$ para cada modelo M de T, de donde $\mathsf{D}\varphi(M^+) = \mathsf{D}\psi(M^+)$. Por el lema II.63 y la observación II.64, $\varphi(M) = \psi(M)$ para cada modelo M de T, es decir, $\varphi \equiv_T \psi$.

Como $\mathsf{D}^2 = Id$, el regreso se sigue de manera análoga. □

Capítulo III

Sobre satisfacibilidad de pp-tipos: atomicidad, saturación y constructibilidad positivas

En teoría de modelos se definen dos tipos de estructuras en extremos contrarios respecto a la cantidad de tipos que realizan. Aquellos modelos que realizan la mayor cantidad de tipos posibles se les llama *saturados* (o κ-saturados para algún cardinal κ) y a los que realizan los menos posibles (sólo los tipos finitamente generados o aislados) se les llama *atómicos*. En analogía a estos conceptos con respecto a los pp-tipos es que se define constructibilidad positiva, atomicidad positiva y saturación positiva. Estas versiones "positivas" son generalizaciones de los conceptos de atomicidad y constructibilidad en [25].

Definición III.1. Sea M un R-módulo.

Diremos que M es **positivo saturado** (+-saturado) si realiza a todos los pp-tipos sobre M.

Dado $A \subseteq M$, A es un subconjunto atómico positivo (+-atómico) si todo subconjunto finito de A da lugar a un pp-tipo finitamente generado. Si $A = M$ se dice que el módulo M es **atómico positivo**.

Una construcción positiva (para $A \subseteq M$) en M es una sucesión $(a_i : i < \alpha)$ (que enumera al conjunto A) de elementos de M no necesariamente distintos, α un ordinal, tal que $tp^+_M(a_i/A_i)$ es finitamente generado para todo $i < \alpha$, donde $A_i = (a_j : j < i)$. $A \subseteq M$ se dice **construible positivo** (+-construible) en M si existe una construcción positiva para A en M. Si $A = M$ decimos que el módulo M es construible positivo.

A continuación caracterizaremos a estas versiones positivas.

III.1. Módulos puro inyectivos

La noción de inyectividad en módulos se puede retringir a una cierta clase de encajes. En particular, si la clase es la de encajes puros obtenemos los módulo puro inyectivos.

Definición III.2. Un módulo M es **puro inyectivo** si para cualesquiera módulos N, N', $f : N \longrightarrow M$ un homomorfismo y $g : N \longrightarrow N'$ un encaje puro, existe un homomorfismo $f' : N' \longrightarrow M$ tal que $f = f' \circ g$, es decir, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "g", "\prec^+"'] \arrow[d, "f"'] & N' \arrow[dl, dashed, "f'"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Observación III.3. Un módulo M es puro inyectivo si y sólo si cada encaje puro $f : M \hookrightarrow N$ se escinde. De donde, si M es puro en un módulo N, $N = M \oplus N'$ para cierto submodulo N'.

Un módulo M se dice **algebraicamente compacto** (o compacto por ecuaciones) si cada conjunto $\Sigma(\bar{v})$, $\bar{v}$ posiblemente infinito, de fórmulas atómicas con parámetros en M que sea finito satisfacible en M es realizado en M.

En otras palabras, para I, J conjuntos índice, cada sistema de ecuaciones lineales

$$\sum_{j \in J} r_{ij} v_j = c_i \quad (i \in I)$$

donde $c_i \in M$, y $r_{ij} \in R$ tales que para cada i fijo casi todos los r_{ij} son cero, si restringiendo a cualquier subconjunto finito $I' \subseteq I$ tal sistema tiene solución en M^J, el sistema completo también tiene solución en M^J.

Teorema III.4. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un módulo M.*

(a) *M es puro inyectivo.*

(b) *M es algebraicamente compacto.*

(c) *M es $+$-saturado.*

Demostración. (a)$\Rightarrow$(c). Utilizaremos la caracterización de (a) en la observación III.3. Sea $p(\bar{v})$ un pp-tipo parcial sobre M. Entonces, p es realizado por $\bar{c}$ en alguna extensión elemental N de M. Como $M \prec N$, en particular M es puro en N. Por hipótesis, este encaje se escinde, es decir, $N = M \oplus N'$ para algún N'. Escribimos $\bar{c} = (\overline{m}, \overline{n}) \in M \oplus N'$. Las pp-fórmulas son preservadas por morfismos, proyectamos $p(\bar{c})$ al componente M, $M \models p(\overline{m})$. Por lo tanto, existe una realización de p en M.

(c)$\Rightarrow$(b). Sea $\Theta(\bar{v})$ un sistema de ecuaciones finito satisfacible en M, supongamos que la longitud de $\bar{v}$ es α, $\bar{v} = (v_\beta)_{\beta<\alpha}$.

Denotamos con Θ_{v_0} al conjunto de pp-fórmulas que resultan de cuantificar existencialmente a todas las variables de $\bar{v}$ excepto a v_0 en las ecuaciones de Θ (en cada ecuación o fórmula atómica aparecen una cantidad finita de variables de $\bar{v}$). Como el conjunto inicial era finito satisfacible también lo es Θ_{v_0}, por lo cual es un pp-tipo con una variable libre, v_0.

Por (c), Θ_{v_0} es realizado en M, digamos por $a_0 \in M$. Ahora, si sustituimos las apariciones de v_0 por a_0 en todas las ecuaciones de Θ, obtenemos un nuevo sistema de ecuaciones Θ' con variables $\bar{v} - \{v_0\} = (v_\beta)_{0<\beta<\alpha}$. Es claro que una solución $\bar{b}$ para Θ' da lugar a la solución $a_0{}^\frown\bar{b}$ del sistema original Θ, tal solución es la sucesión que resulta de concatenar $\bar{b}$ a a_0. Así, el siguiente paso es encontrar una solución para Θ' cuantificando existencialmente a todas las variables en las ecuaciones de Θ' excepto una, digamos v_1, y obtenemos una solución a_1 para el nuevo sistema de ecuaciones, con la cual sustituiremos a v_1 en Θ'. Este sistema de ecuaciones resultante tiene como variables libres $\bar{v} - \{v_0, v_1\} = (v_\beta)_{1<\beta<\alpha}$.

Continuamos por inducción obteniendo una realización variable por variable, y así obtener al final una realización de Θ en M.

(b)⇒(c). Realizaremos la prueba directa de esta implicación para mostrar el método, aunque no es necesaria, ya que está cubierta dentro de las otras implicaciones.

Sea $\Phi(\bar{v})$ un pp-tipo. Cada fórmula $\varphi \in \Phi$ la escribimos de la forma $\varphi(\bar{v}) \equiv \exists \bar{w}_\varphi \, \theta_\varphi(\bar{v}, \bar{w}_\varphi)$, donde $\theta_\varphi(\bar{v}, \bar{w}_\varphi)$ es una conjunción de fórmulas atómicas, de tal manera que para φ, $\psi \in \Phi$, si $\varphi \neq \psi$ las variables en $\bar{w}_\varphi$ y $\bar{w}_\psi$ son distintas.

Sea $\bar{w}$ de la longitud necesaria para abarcar todas las $\bar{w}_\varphi$ (puede ser infinita). Para cada φ escribimos $\theta_\varphi(\bar{v}, \bar{w})$ para representar a la misma conjunción de ecuaciones en $\theta_\varphi(\bar{v}, \bar{w}_\varphi)$, es decir, a las variables $\bar{w} - \bar{w}_\varphi$ las antecede el coeficiente cero. Colectamos en Θ todas las $\theta_\varphi(\bar{v}, \bar{w})$ con $\varphi \in \Phi$; notemos inmediatamente que es un conjunto de ecuaciones finito satisfacible. Por (b) existe una solución para Θ en M, digamos $(\bar{a}, \bar{b})$.

Veamos que $\bar{a}$ es una solución de Φ: sea $\varphi \in \Phi$, M modela $\theta_\varphi(\bar{a}, \bar{b})$ o equivalentemente $M \models \theta_\varphi(\bar{a}, \bar{b}_\varphi)$ (donde $\bar{b}_\varphi$ es la parte de $\bar{b}$ que corresponde a $\bar{w}_\varphi$), lo cual implica que $M \models \exists \bar{w}_\varphi \theta_\varphi(\bar{a}, \bar{w}_\varphi)$. De donde $M \models \varphi(\bar{a})$.

(b)⇒(a). Supongamos que M es algebraicamente compacto. Sean $g : N \to N'$ un encaje puro y $f : N \to M$ cualquier homomorfismo. Construiremos un homomorfismo h que extienda f, es decir, con el cual conmute el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & N' \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Para simplificar la notación supongamos g es la inclusión, es decir, que $N \subseteq N'$. Para cada elemento $b \in N' - N$ utilizamos una variable v_b. Para cada combinación lineal de la forma $\sum_{i<n} r_i b_i = a$ que se cumple en N', con $b_i \in N' - N$, $r_i \in R$ y $a \in N$ para alguna n natural (a se puede escribir como una combinación lineal de elementos de $N' - N$), formamos la ecuación $\sum_{i<n} r_i v_{b_i} = f(a)$. Sea Θ el conjunto de todas esta ecuaciones, el cual tiene parámetros en M, mostraremos que Θ es soluble en M.

Sea Θ' un subconjunto finito de Θ, de tal manera que cada ecuación contenga las mismas variables libres. Esto es posible ya que a cada ecuación en Θ' podemos agregar las variables que no aparecen en ella pero sí en alguna otra ecuación con coeficiente cero sin afectar la solución de tal ecuación.

Supongamos que Θ' es el conjunto de ecuaciones $\sum_{i<n} r_{ij} v_{b_i} = f(a_j)$, para $j < m$. Entonces, las combinaciones lineales $\sum_{i<n} r_{ij} b_i = a_j$ se cumplen en N', es decir, la pp-fórmula $\varphi(v_0, \ldots, v_{m-1}) \equiv \exists \bar{w} \bigwedge_{j<m} (\sum_{i<n} r_{ij} w_i = v_j)$ es satisfecha por $\bar{a} = (a_0, \ldots, a_{m-1})$ en N'. Por la pureza de g, $N \models \varphi(\bar{a})$. Luego, existen $b'_0, \ldots, b'_{n-1} \in N$ tales que $\sum_{i<n} r_{ij} b'_i = a_j$ para $j < m$. Entonces $\sum_{i<n} r_{ij} f(b'_i) = f(a_j)$ se cumple en M, de donde $(f(b'_0), \ldots, f(b'_{n-1}))$ es una solución de Θ' en M.

Por lo tanto Θ es finito satisfacible, pero M es algebraicamente compacto, por lo cual existe una solución de Θ en M. Por el *Axioma de Elección* podemos elegir una solución $\bar{c}$ para Θ. Si $c_b \in M$ es el valor asignado por tal solución a x_b, entonces definimos al morfismo $h : N' \to M$ tal que $b \mapsto c_b$ si $b \in N' - N$ y $b \mapsto f(b)$ si $N' \in N$. Veamos que h es, por construcción de Θ, un homomorfismo que extiende a f.

Para mostrar que h es un homomorfismo, sean $b_1, b_2, b_3 \in N'$ y $r \in R$. Primero debemos comprobar que $h(b_1 + b_2) = h(b_1) + h(b_2)$. Claramente h restringido a N coincide con f, por lo tanto, primero supongamos que $b_1 \in N' - N$ y $b_2 \in N$. Si $b_1 + b_2 = b_3$ entonces la combinación lineal $b_3 - b_1 = b_2$ cumple con lo necesario para que la fórmula $v_{b_3} - v_{b_1} = f(b_2) \equiv v - u = f(b_2)$ pertenezca a Θ, de donde, tal fórmula se satisface en M con $c_{b_3} - c_{b_1} = f(b_2)$, es decir, $h(b_3) - h(b_1) = h(b_2)$, o bien, $h(b_1) + h(b_2) = h(b_3) = h(b_1 + b_2)$. De manera análoga se demuestra la igualdad cuando b_1 y b_2 pertenecen a $N' - N$, y también $b_3 \in N' - N$, mediante la ecuación $v_{b_1} + v_{b_2} - v_{b_3} = 0$.

Finalmente, para comprobar que $h(rb_1) = rh(b_1)$, sólo necesario si $b_1 \in N' - N$, utilizamos la igualdad $rb_1 = b_2$ en N' para construir la pp-fórmula $rv_{b_1} - v_{b_2} = 0 \equiv rv - u = 0$, la cual pertenece Θ.

$\square$

III.2. Módulos puro proyectivos

Definición III.5. Un módulo N es **puro proyectivo** si para todo epimorfismo puro $g : M \to N'$, cualquier homomorfismo de N a N' se factoriza a través de g, es decir, para todo $f : N \to N'$ el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, dashed, "f'"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "g"] & N' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Recordemos que un módulo es proyectivo si y sólo si es un sumando directo de un módulo libre. Asimismo, un módulo es puro proyectivo si y sólo si es un sumando directo de una suma directa de módulos finitamente presentados (véase [11, p. 240]).

En la siguiente proposición veremos que es suficiente revisar el caso cuando $N' = N$ y el homomorfismo en cuestión es la identidad.

Lema III.6. *Sean Q, A, B y C R-módulos. Consideremos el siguiente diagrama, el cual es el producto fibrado de f y g,*

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & B \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

Si g es un epimorfismo puro, entonces también lo es g'.

Demostración. Sea φ una pp-fórmula con n variables libres y sea $\bar{b} \in \varphi(B)$. Debemos exhibir una g'-preimagen de $\bar{b}$ en $\varphi(Q)$.

Tenemos que $f(\bar{b}) \in \varphi(C)$ dado que $\bar{b}$ está en $\varphi(B)$. Luego como g es puro, existe $\bar{a} \in \varphi(A)$ tal que $g(\bar{a}) = f(\bar{b})$. Por la construcción de Q (veáse [14] Prop. X.2.2) sucede que $(\bar{a}, \bar{b}) \in Q$, donde $(\bar{a}, \bar{b}) = (a_i, b_i)_{i<n}$, y además $g'(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{b}$. Para finalizar sólo notemos que $(\bar{a}, \bar{b}) \in \varphi(A \oplus B) \cap Q = \varphi(Q)$.

$\square$

Proposición III.7. *N es puro proyectivo si y sólo si cada sucesión pura-exacta de la forma $0 \to K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$, se escinde.*

Demostración. La dirección de izquierda a derecha es inmediata: aplicando la definición obtenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} & & & N \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "id"] & \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde h es la inversa derecha necesaria para g.

Para la dirección no trivial, sea $g : M \to N'$ un epimorfismo puro, $f : N \to N'$ un homomorfismo. Necesitamos mostrar que f se factoriza a través de g. Formamos la sucesión pura-exacta $0 \to K \xrightarrow{g_0} M \xrightarrow{g} N' \to 0$, donde $K = Ker\, g$, $g_0 = ker\, g$.

Por medio del producto fibrado de f y g (p. 67), obtenemos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, equal] & Q \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"] & N \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "g_0"] & M \arrow[r, "g"] & N' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Debido a que g es epimorfismo puro, por el lema III.6 también lo es $g' : Q \to N$. Luego, la sucesión de arriba es pura-exacta y por hipótesis se escinde. Entonces existe $g'' : N \to Q$ tal que $g''g' = id_Q$. Definimos $h := f'g''$, así $gh = f$. $\square$

En analogía con las versiones modelo teóricas se mostrará que todo modelo +-construible es +-atómico. Tal como en esa versión debemos empezar demostrando la monotonía y transitividad.

Lema III.8. *Sean $\bar{b}$ y $\bar{c}$ en un módulo N y A un subconjunto de N. Entonces $tp_N^+(\bar{b}\,\bar{c}/A)$ es finitamente generado si y sólo si $tp_N^+(\bar{b}/A)$ y $tp_N^+(\bar{c}/A\bar{b})$ son finitamente generados.*

Demostración. Con el fin de simplificar la notación, supongamos que $A = \emptyset$, en caso contrario la demostración se realiza de manera similar.

Para la monotonía supongamos que $\varphi(\bar{v}, \bar{u}) \leqslant tp_N^+(\bar{b}\,\bar{c})$ con φ en dicho pp-tipo, es decir,

$$M \models \forall\, \bar{v}\, \forall\, \bar{u}\ (\varphi(\bar{v}, \bar{u}) \to \psi(\bar{v}, \bar{u}))\,,$$

para toda $\psi \in tp_N^+(\bar{b}\,\bar{c})$ y todo módulo M.

Veremos que $tp_N^+(\bar{b})$ es finitamente generado por $\exists \bar{u}\, \varphi(\bar{v}, \bar{u})$ y a su vez, $tp_N^+(\bar{c}/\bar{b})$ es finitamente generado por $\varphi(\bar{b}, \bar{u})$.

Sea $\psi(\bar{v}) \in tp_N^+(\bar{b})$, entonces $(\psi(\bar{v}) \wedge \bar{u} = \bar{u}) \in tp_N^+(\bar{b}\,\bar{c})$. Luego, $\varphi(\bar{v}, \bar{u}) \leqslant \psi(\bar{v}) \wedge \bar{u} = \bar{u}$, de donde $\exists \bar{u}\, \varphi(\bar{v}, \bar{u}) \leqslant \psi(\bar{v})$. Además, es claro que $\exists \bar{u}\, \varphi(\bar{v}, \bar{u}) \in tp_N^+(\bar{b})$.

Para la segunda afirmación notemos que $\varphi(\bar{b}, \bar{u}) \in tp_N^+(\bar{c}/\bar{b})$, sólo resta probar que $\varphi(\bar{0}, \bar{u}) \leqslant tp_N^+(\bar{c}/\bar{b})_*$ (recordemos la definición en la página 12, por la cual si $p = tp_N^+(\bar{c}/\bar{b})$, entonces $p_* = \{\psi(\bar{0}, \bar{u}) \mid \psi(\bar{b}, \bar{u}) \in p\}$).

Sea $\psi(\bar{0}, \bar{u}) \in tp_N^+(\bar{c}/\bar{b})_*$, es decir, $\psi(\bar{v}, \bar{u}) \in tp_N^+(\bar{c}/\bar{b})$. Luego, $\psi(\bar{v}, \bar{u}) \in tp_N^+(\bar{b}, \bar{c})$, por lo cual $\varphi(\bar{v}, \bar{u}) \leqslant \psi(\bar{v}, \bar{u})$, en particular

$$M \models \forall\, \bar{u}\ \ (\varphi(\bar{0}, \bar{u}) \to \psi(\bar{0}, \bar{u}))\,,$$

para cualquier M. Se sigue que $\varphi(\bar{0}, \bar{u}) \leqslant tp_N^+(\bar{c}/\bar{b})_*$.

A continuación mostraremos la transitividad. Supongamos que $\varphi(\bar{v}) \in tp_N^+(\bar{b})$ y $\psi(\bar{b}, \bar{u}) \in tp_N^+(\bar{c}/\bar{b})$ y ambas pp-fórmulas generan a sus respectivos pp-tipos. Afirmamos que $\varphi(\bar{v}) \wedge \psi(\bar{v}, \bar{u})$ genera finitamente a $tp_N^+(\bar{b}\,\bar{c})$.

Sea $\eta(\bar{v}, \bar{u}) \in tp_N^+(\bar{b}\,\bar{c})$. Por ser un filtro tenemos que $\psi(\bar{v}, \bar{u}) \wedge \eta(\bar{v}, \bar{u})$ pertenece a $tp_N^+(\bar{b}\,\bar{c})$. Entonces $\exists\, \bar{u}\, (\psi(\bar{v}, \bar{u}) \wedge \eta(\bar{v}, \bar{u})) \in tp_N^+(\bar{b})$ y así $\varphi(\bar{v}) \leqslant \exists\, \bar{u}\, (\psi(\bar{v}, \bar{u}) \wedge \eta(\bar{v}, \bar{u}))$. Además, es inmediato que $\psi(\bar{0}, \bar{u}) \leqslant \eta(\bar{0}, \bar{u})$.

Para probar nuestra afirmación, sea M un módulo cualquiera, $\bar{d} \in \varphi(M)$ y $\bar{d}\,\bar{e} \in \psi(M)$. Debemos mostrar que $\bar{d}\,\bar{e} \in \eta(M)$.

Como $\bar{d} \in \varphi(M)$ existe $\bar{e}' \in M$ tal que $\bar{d}\,\bar{e}' \in (\psi \wedge \eta)(M) = \psi(M) \cap \eta(M)$. Luego, $\bar{d}\,\bar{e}'$ y $\bar{d}\,\bar{e}$ pertenecen a $\psi(M)$, y por linealidad de las pp-fórmulas $\bar{d}\,\bar{e}' - \bar{d}\,\bar{e} \in \psi(M)$. Esto implica que $\bar{e}' - \bar{e} \in \psi(\bar{0}, M)$. Pero $\psi(\bar{0}, M) \subseteq \eta(\bar{0}, M)$, entonces $\bar{e}' - \bar{e} \in \eta(\bar{0}, M)$. De lo cual se sigue, aunado a $\bar{d}\,\bar{e}' \in \eta(M)$, que $\bar{d}\,\bar{e} = \bar{d}\,\bar{e}' + \bar{0}(\bar{e} - \bar{e}') \in \eta(M)$. $\square$

Proposición III.9. *Módulos +-construibles son +-atómicos.*

Demostración. Sea M un módulo construible positivo. Sea $(a_i)_{i<\alpha}$ una +-construcción de M. Mostraremos por inducción sobre $j < \alpha$ que cualquier conjunto finito de la forma $\bar{a}\, a_j$ con $\bar{a}$ en A_j (de cualquier longitud finita) tiene un pp-tipo finitamente generado.

Para $j = 0$, $A_0 = \emptyset$ de donde $tp^+_M(a_0/\emptyset) = tp^+_M(a_0)$ el único conjunto finito posible es a_0 y tiene un pp-tipo finitamente generado por hipótesis.

Ahora sea $j > 0$. Sabemos que $tp^+_M(a_j/A_j)$ es finitamente generado, por lo que existe una fórmula φ_j con parámetros, digamos $\bar{b}$ en A_j, que genera a este pp-tipo.

Observemos que $tp^+_M(a_j/\bar{b}\,\bar{a})$ es finitamente generado por la misma fórmula, debido a que $tp^+_M(a_j/\bar{b}\,\bar{a}) \subseteq tp^+_M(a_j/A_j)$ y además $\varphi_j \in tp^+_M(a_j/\bar{b}\,\bar{a})$.

Como $\bar{b}\,\bar{a}$ pertenecen a A_j, por hipótesis de inducción $tp^+_M(\bar{b}\,\bar{a})$ es finitamente generado, entonces por transitividad $tp^+_M(\bar{b}\,\bar{a}\,a_j)$ también lo es y por monotonicidad $tp^+_M(\bar{a}\,a_j)$ es finitamente generado. □

Si el módulo es numerablemente generado, el recíproco es cierto como se verá más adelante, en la Proposición III.12.

Observación III.10. Supongamos que N es un submódulo puro de un módulo M. Entonces cualquier +-construcción es M que esté contenida en N es también un +-construcción en N ya que, por II.39, $tp^+_N(a_i/A_i) = tp^+_M(a_i/A_i)$ para $a_i \in N$, $A_i \subseteq N$.

Lema III.11. *Cualquier +-construcción en un módulo M genera un submódulo +-construible, de hecho cualquier +-construcción en M puede ser extendida a una +-construcción del submódulo que esta genera.*

Demostración. Sea $A = (a_i)_{i<\alpha}$ una +-construcción en M, y sea N el submódulo que genera. Debemos mostrar que N es +-construible.

Para cada elemento d en N existe un término $t(\bar{w})$ y una n-ada $\bar{a}$ en A tal que $d = t(\bar{a})$, para alguna $n \in \omega$. Luego, para cualquier conjunto $C \subseteq N$ que contenga a $\bar{a}$, el pp-tipo $tp^+_N(d/C)$ está generado por la fórmula $v = t(\bar{a})$ (como ejemplo, $t(\bar{0}) = 0$ y la fórmula $v = 0$ implica cada pp-fórmula sin parámetros).

Cualquier enumeración de N que empiece con la +-construcción A es una +-construcción de N en M. Para comprobar esto, si $A' = (a_i)_{i<\beta}$, $\beta \geq \alpha$, es una enumeración con a_i igual que en A para $i < \alpha$, entonces para $j \geq \alpha$ siempre sucede que A_j contiene una n-ada $\bar{a}$ tal que $t(\bar{a}) = a_j$, de donde $tp^+_N(a_j/A_j)$ es finitamente generado. □

La siguiente proposición es el recíproco parcial de la proposición III.9.

Proposición III.12. *Un submódulo numerablemente generado de un módulo M es +-construible en M si y sólo si es +-atómico en M*

Demostración. Para la dirección que falta, sea $N \subseteq M$ un submódulo numerablemente generado y +-atómico en M.

Elegimos un conjunto numerable X que genere a N. Por +-atomicidad, cada subconjunto finito de X tiene un pp-tipo finitamente generado en M. Esto implica que cualquier enumeración de X de longitud ω es una +-construcción: si $(a_i : i < \omega)$ es tal enumeración, podemos ver a A_j como una n-ada pues es siempre finito, de donde $tp^+_M(a_i/\bar{A}_j)$ es finitamente generado y por el lema III.8 $tp^+_M(a_i/A_j)$ también lo es.

Aplicando el lema anterior podemos extender esta +-construcción a N. □

Lema III.13. *Una suma directa de módulos +-construibles es +-construible.*

Demostración. Supongamos que A y B son +-construibles en M y $M = A \oplus B$. Sean $(a_i : i < \alpha)$ y $(b_j : j < \beta)$ las +-construcciones de A y de B, respectivamente. Entonces, la concatenación $(a_i : i < \alpha)^\frown(b_j : j < \beta)$ es una +-construcción en M. Sabemos que $tp^+_M(a_i/C_i)$ es finitamente generado para $i < \alpha$, pues $C_i = A_i$. Luego, sólo debemos mostrar que $tp^+_M(b_j/C_j)$ es finitamente generado para cada $j < \beta$, donde $C_j = A^\frown B_j$. Supongamos que $\varphi(v, \bar{c})$ pertenece a $tp^+_M(b_j/B_j)$ y lo genera.Claramente, $\varphi(v, \bar{c}) \in tp^+_M(b_j/C_j)$. Sea $\psi(v, \overline{m})$ una pp-fórmula en $tp^+_M(b_j/C_j)$, por lo cual $\overline{m}$ pertenece a C_j. Sea $\overline{m}'$ la proyección de $\overline{m}$ sobre B_j. De la linealidad de las pp-fórmulas, $\psi(v, \overline{m}') \in tp^+_M(b_j/B_j)$, por lo que $\varphi(v, \bar{0}) \leqslant \psi(v, \bar{0})$. Así $\varphi(v, \bar{c})$ genera a $tp^+_M(b_j/C_j)$.

De manera general si $M = \bigoplus_{i<\lambda} N_i$, entonces procedemos inductivamente para construir una +-construcción en M mediante concatenaciones. Luego, por el lema III.11, tal construcción se puede extender a una +-construcción que enumera a M. $\square$

Teorema III.14. *Un módulo es +-construible si y sólo si es puro proyectivo.*

Demostración. Sea N un módulo +-construible. Sea $(a_i : i < \alpha)$ una +-construcción de N y denotamos, para todo $i < \alpha$, como $p_i = tp^+_M(a_i/A_i)$ finitamente generado por $\varphi_i(v, \bar{b}_i)$, donde los parámetros $\bar{b}_i$ están en A_i.

Supongamos que $0 \to K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ es una sucesión pura-exacta. Demostraremos que esta sucesión se escinde; con este fin definiremos de manera inductiva sobre $i < \alpha$ una cadena creciente de inversas derechas parciales de g, de N a M, $h_i : A_i \to M$, $A_i \subseteq N$ (es decir, homomorfismos cuyos dominios estan contenidos en N tales que $gh_i = id_{A_i}$).

Sea $h_0 = \emptyset$ y $h_\delta = \bigcup_{j\in\delta} h_j$ para $\delta \leq \alpha$ ordinal límite.

Para el paso sucesor $i + 1$ (donde $i < \alpha$) supongamos que la sección parcial $h_i : A_i \to M$ de g ha sido definida.

Como $\varphi_i(v, \bar{b}_i) \leqslant p_i$, entonces para toda $\theta(v, \bar{c}) \in p_i$ tenemos que $\varphi_i(v, \bar{0}) \leqslant \theta(v, \bar{0})$ y $\varphi_i(N, \bar{b}_i) \cap \theta(N, \bar{c}) \neq \emptyset$.

Sabemos que la pp-fórmula $\exists\, \bar{v}\, \varphi_i(v, \bar{b}_i)$ es cierta en N (cuyo testigo es a_i), de donde existe $d'_i \in \varphi_i(M, h_i(\bar{b}_i))$, por ser h_i es un homomorfismo.

Entonces $g(d'_i) \in \varphi_i(N, \bar{b}_i)$ porque $g(h_i(\bar{b}_i)) = \bar{b}_i$, y así $a_i - g(d'_i) \in \varphi_i(N, \bar{0})$. Como g es epimorfismo puro, existe una g-preimagen $d''_i \in \varphi_i(M, \bar{0})$. Definimos $h_{i+1}(a_i) = d_i := d'_i + d''_i$. Claramente $g(d_i) = a_i$.

Para ver que h_{i+1} es un homomorfismo parcial (de N a M con dominio A_{i+1}), sea $\theta(v, \bar{c}) \in p_i$; debemos verificar que $d_i \in \theta(M, h_{i+1}(\bar{c}))$. Por construcción, $d_i \in \varphi_i(M, h_i(\bar{b}_i))$, por lo cual es suficiente verificar que $\varphi_i(M, h_i(\bar{b}_i)) \subseteq \theta(M, h_i(\bar{c}))$ (porque h_i y h_{i+1} coinciden en A_i, y como consecuencia también en $\bar{c}$). Esto último se verifica si $\varphi_i(v, \bar{0}) \leqslant_M \theta(v, \bar{0})$ y $\varphi_i(M, h_i(\bar{b}_i)) \cap \theta(M, h_i(\bar{c})) \neq \emptyset$. Pero notemos que es cierto, ya que se sigue de $\varphi_i(v, \bar{0}) \leqslant \theta(v, \bar{0})$ y de aplicar h_i al hecho $\varphi_i(M, \bar{b}_i) \cap \theta(M, \bar{c}) \neq \emptyset$.

Así $h = \bigcup_{j<\alpha} h_j$ es un homomorfismo de $A_\alpha = N$ a M, la cual es una inversa derecha de g, por lo cual la sucesión pura-exacta se escinde.

Para la otra dirección, sea M un módulo puro proyectivo. Empecemos recordando la observación de que un módulo es puro proyectivo si y sólo si es un sumando directo de una suma directa de módulos finitamente presentados. Por [11, p. 197 Lema 1.7][1], M es una suma directa de módulos numerablemente generados puro proyectivos. Entonces, por el lema III.13, podemos suponer que M es numerablemente generado.

[1]Tal resultado se encuentra enunciado en el teorema 1 de [19].

Luego, por la proposición III.12, es equivalente demostrar que M es $+$-atómico. Como lo veremos más adelante en el capítulo IV, con una demostración independiente al capítulo actual, los módulos finitamente presentados son Mittag-Leffler, los cuales son $+$-atómicos, y por ser finitamente generados, el lema III.12 implica que los finitamente presentados también son $+$-construibles. Nuevamente, por el lema III.13, una suma directa de finitamente presentados es $+$-construible, la cual del lema III.9 es $+$-atómica. Por lo cual, M es un sumando directo de un módulo N $+$-atómico. Entonces, por la observación II.38, M es un submódulo puro de N, de lo que se sigue que el pp-tipo de cada n-ada $\bar{a}$ de M es finitamente generado, ya que coincide con el pp-tipo de $\bar{a}$ en N.

$\square$

En el siguiente capítulo se verá que los módulos $+$-atómicos son precisamente los módulos llamados Mittag-Leffler. Como consecuencia, todo módulo puro proyectivo es Mittag-Leffler, el recíproco es cierto para módulos numerables (aún más, para módulos numerablemente generados).

Capítulo IV

Módulos Mittag-Leffler

Para iniciar este capítulo, generalizaremos el orden entre la pp-fórmulas.

Dados dos pp-tipos Φ y Ψ con el mismo número de variables libres, la relación $\boldsymbol{\Psi \leqslant_{\mathcal{K}} \Phi}$ quiere decir que $\psi \leqslant_{\mathcal{K}} \varphi$ para toda $\psi \in \Psi$ y toda $\varphi \in \Phi$.

Nuevamente extendemos este concepto a las teorías, escribiendo $\Psi \leqslant_T \Phi$ si $\psi \leqslant_T \varphi$ para todas las pp-fórmulas respectivas de ambos pp-tipos.

Relativizaremos algunos conceptos a un conjunto Γ de pp-fórmulas y a una clase de módulos $\mathcal{K}$ (estas nociones son equivalentes a las ya vistas cuando Γ son todas las pp-fómulas y $\mathcal{K}$ es R-Mod o Mod-R). A la restricción del pp-tipo de una n-ada $\bar{a} \in M^n$, $\Gamma \cap tp_M^+(\bar{a})$, le llamaremos el Γ-tipo de $\bar{a}$ en M; por ejemplo, Γ puede ser el conjunto qf de todas las pp-fórmulas sin cuantificadores.

El Γ-tipo de $\bar{a}$ en M se dice $\mathcal{K}$ generado por φ si $\varphi \in tp_M^+(\bar{a})$ y $\varphi \leqslant_{\mathcal{K}} \Gamma \cap tp_M^+(\bar{a})$, y $\mathcal{K}$ finitamente generado si es generado por alguna $\varphi \in \Gamma$. Si un pp-tipo de $\bar{a}$ en un módulo M es $\mathcal{K}$ finitamente generado, entonces también lo es el pp-tipo de cualquier subconjunto de $\bar{a}$.

Un homomorfismo $h : (C, \bar{c}) \to (M, \bar{a})$ se dice que se Γ-factoriza a través de un módulo B, si existen homomorfismos $f : C \to B$ y $g : B \to M$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
(C,\bar{c}) \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & (M,\bar{a}) \\
& (B, f(\bar{c})) \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

y $\Gamma \cap tp_B^+(f(\bar{c})) = \Gamma \cap tp_M^+(\bar{a})$ (es decir, g no incrementa el Γ-tipo de $f(\bar{c})$). Si Γ son todas las pp-fórmulas decimos que se pp-factoriza.

Lema IV.1. *Sean A un módulo finitamente generado, por la n-ada $\bar{a}$, y $h : A \to M$ un homomorfismo. Entonces para cualquier conjunto de pp-fórmulas Γ que contenga al conjunto qf las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *El Γ-tipo de $h(\bar{a})$ es finitamente generado en M.*

(b) *$h : (A, \bar{a}) \to (M, h(\bar{a}))$ se Γ-factoriza a través de un módulo finitamente presentado.*

Demostración. Empecemos con $(a) \Rightarrow (b)$.

Sea $\psi \in tp_M^+(h(\bar{a}))$ la pp-fórmula que genera al Γ-tipo de $h(\bar{a})$. Elegimos una realización libre $(B, \bar{b})$ de ψ, B es finitamente presentado y existe un homomorfismo $g : (B, \bar{b}) \to (M, h(\bar{a}))$. Escribimos $\bar{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ y $\bar{b} = (b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$.

Como $\sum_{i<n} r_i v_i = 0$ pertenece a qf $\subseteq \Gamma$, tenemos que si $h(\bar{a})$ satisface a tal pp-fórmula, entonces $\psi \leqslant \sum_{i<n} r_i v_i = 0$. De donde, para tales r_i, $\sum r_i h(a_i) = 0$, $B \models \psi(\bar{b})$ implica que $B \models \sum r_i b_i = 0$ en B.

En particular, si $\sum r_i a_i = 0$ en A, entonces $\sum r_i h(a_i) = 0$ en M y por lo tanto, $\sum r_i b_i = 0$. Esto nos da pie para poder definir correctamente el homorfismo $\sum_{i<n} r_i a_i \mapsto \sum_{i<n} r_i b_i$, digamos $f : (A, \bar{a}) \to (B, \bar{b})$, tal que $g \circ f = h$.

$$g \circ f(\sum r_i a_i) = g(\sum r_i b_i) = \sum r_i g(b_i) = \sum r_i h(a_i) = h((\sum r_i a_i),$$

para todo $r_i \in R$, $i < n$.

Además, por ser $(B, \bar{b})$ una realización libre de ψ, se deduce que $\psi \leqslant tp_B^+(\bar{b})$. Luego, $\Gamma \cap tp_B^+(\bar{b}) = \Gamma \cap tp_M^+(h(\bar{a}))$ como lo necesitabamos.

Para $(b) \Rightarrow (a)$, sean $f : A \to B$ y $g : B \to M$ tal que B es finitamente presentado y se cumplen las condiciones para que f se Γ-factorice a través de B. Sea ψ la pp-fórmula que genera a $tp_B^+(f(\bar{a}))$, en particular,

$$\psi \leqslant \Gamma \cup tp_B^+(f(\bar{a})) = \Gamma \cup tp_M^+(h(\bar{a})).$$

También, como $B \models \psi(f(\bar{a}))$, entonces mediante g, $M \models \psi(gf(\bar{a}))$, de donde $\psi \in tp_M^+(gf(\bar{a}) = tp_M^+(h(\bar{a}))$. □

Un ejemplo de la utilización de este lema es el caso en el que A es un submódulo de M, generado por una n-ada $\bar{a}$ en M, y h la inclusión correpondiente. Si Γ es el conjunto de todas las pp-fórmulas, el lema dice que el pp-tipo de $\bar{a}$ es finitamente generado si y sólo si la inclusión h se pp-factoriza a través de un módulo finitamente presentado.

IV.1. Los módulos ML son atómicos

Definición IV.2. Dada una familia $\mathcal{K}$ de R-módulos derechos, un R-módulo izquierdo M se llama **$\mathcal{K}$-Mittag-Leffler** si el morfismo canónico

$$\left(\prod_{i \in I} N_i\right) \otimes_R M \longrightarrow \prod_{i \in I} (N_i \otimes_R M)$$

es un monomorfismo para todas las subfamilias $\{N_i \mid i \in I\}$ de $\mathcal{K}$.

Tal morfismo realiza la asignación $(n_i : i \in I) \otimes m \mapsto (n_i \otimes m : i \in I)$. Recordemos que por la propiedad universal del producto tensorial, para definir cualquier morfismo en el producto tensorial es suficiente hacerlo en sus generadores.

Para simplificar la notación prescindiremos de R en el símbolo $\otimes$ cuando no exista ambigüedad, y abreviaremos $\mathcal{K}$-Mittag-Leffler como $\mathcal{K}$-ML. Si $\mathcal{K} = \{N\}$ simplemente escribiremos N-ML. Si $\mathcal{K} = Mod\text{-}R$ se omitirá $\mathcal{K}$, es decir, nos referimos a los módulos **Mittag-Leffler**, los mismos que se definieron en [28, pp. 69-70].

Es claro que la propiedad $\mathcal{K}$-ML implica N-ML para todo módulo $N \in \mathcal{K}$. Además veamos que los módulos ML coinciden con los fp-ML.

Proposición IV.3. *Sea M un R-módulo izquierdo. M es ML si y sólo si es* fp*-ML.*

Demostración. Para el lado no trivial probaremos que si un módulo no es Mittag-Leffler tampoco es fp-Mittag-Leffler. Entonces, sea M un R-módulo izquierdo que no es ML, de donde, existe una familia $\{N_i \mid i < \lambda\}$ de R-módulos derechos tales que el morfimo canónico $h : \left(\prod_{i<\lambda} N_i\right) \otimes M \longrightarrow \prod_{i<\lambda} (N_i \otimes M)$ no es inyectivo.

Recordemos la notación introducida en II.4 para los elementos de un producto tensorial. Sea $\bar{a} \otimes \bar{b}$ un elemento no cero de $Ker\, h$, con $\bar{b}$ en M y donde el j-ésimo elemento de la n-ada $\bar{a}$ es de la forma $(a_{i,j} : i < \lambda)$, es decir, $\bar{a} \otimes \bar{b} = \sum_{j<n}((a_{i,j} : i < \lambda) \otimes b_j)$. Aplicando el morfismo h obtenemos que $\sum_j (a_{i,j} \otimes b_j) = 0$ para todo $i < \lambda$. Por el corolario II.32, para cada $i < \lambda$ existe $f_i : (F_i, \bar{c}_i) \to (N_i, \bar{a})$, con F_i finitamente presentado y $\bar{c}_i = (c_{i,j} : j < n)$, tal que $\sum_j (c_{i,j} \otimes b_j) = 0$. Podemos construir el siguiente diagrama conmutativo, donde f y f' son inducidas por las f_i.

$$\begin{tikzcd} (\prod_i F_i) \otimes M \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "f"'] & \prod_i (F_i \otimes M) \arrow[d, "f'"] \\ (\prod_i N_i) \otimes M \arrow[r, "h"'] & \prod_i (N_i \otimes M) \end{tikzcd}$$

El elemento $e = \sum_j ((c_{i,j} : i < \lambda) \otimes b_j) \in (\prod_i F_i) \otimes M$ no es cero porque su imagen respecto a f es $\sum_j ((a_{i,j} : i < \lambda) \otimes b_j) \neq 0$. Pero, por la elección de $\bar{c}_i$, $h'(e) = (\sum_j (c_{i,j} \otimes b_j) : i < \lambda) = 0$. Concluimos que el morfismo canónico h' no es inyectivo y así, M no es fp-ML. $\square$

Por el teorema IV.6, como los órdenes de las pp-fórmulas en las clases R-Mod y fp son equivalentes, también se puede deducir la proposición anterior, sin una prueba directa.

El concepto de ML también lo extenderemos a las teorías. Si T es una teoría de R-módulos derechos, decimos T-Mittag-Leffler en lugar de $Mod\, T$-ML. Más adelante veremos que $\mathcal{K}$-ML, $Teo(\mathcal{K})$-ML y $Teo(\mathcal{K})^*$-ML significan lo mismo.

Lema IV.4. *Si M es $\mathcal{K}$-ML entonces también es $\mathcal{K}'$-ML, donde $\mathcal{K}'$ consiste en los productos de los miembros de $\mathcal{K}$.*

Demostración. El morfismo canónico

$$f : \left(\prod_I \prod_J N_{ij}\right) \otimes M \longrightarrow \prod_I \prod_J (N_{ij} \otimes M)$$

se factoriza a través del morfismo canónico

$$h : \left(\prod_I \prod_J N_{ij}\right) \otimes M \longrightarrow \prod_I \left(\prod_J N_{ij} \otimes M\right)$$

es decir, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} (\prod_I \prod_J N_{ij}) \otimes M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & \prod_I \prod_J (N_{ij} \otimes M) \\ & \prod_I (\prod_J N_{ij} \otimes M) \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Además, si $f = g \circ h$ es un monomorfismo, también lo es h. Por ambas observaciones podemos concluir que $\mathcal{K}$-ML implica $\mathcal{K}'$-ML. $\square$

Es necesario introducir notación extra para los próximos resultados.

Dada una retícula $(\Lambda, \leq)$, sea $\Delta(\Lambda)$ el cardinal más pequeño κ tal que cada ideal (p. 65) es generado por κ elementos.

Proposición IV.5. *Los siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\Delta(\Lambda)$ *es finito.*

(b) $\Delta(\Lambda) = 1$, *es decir, todos los ideales en* Λ *son principales.*

Demostración. Si $\Delta(\Lambda)$ es finito, digamos n. Sea $\mathcal{I}$ un ideal de Λ, existen elementos $x_0, \ldots, x_{n-1} \in \mathcal{I}$ que generan al ideal, es decir, para toda $x \in \mathcal{I}$, $x \leq x_0 \vee \cdots \vee x_{n-1}$. Pero, por ser ideal, $x_0 \vee \cdots \vee x_{n-1} \in \mathcal{I}$, por lo cual, $\mathcal{I}$ es generado por un elemento, es decir, es principal. Por lo tanto $\Delta(\Lambda) = 1$.

$\square$

Para un módulo N, denotamos con $\Delta(N)$ (respectivamente $\Delta(T)$) al supremo de los cardinales $\Delta(pp_n(N))$ (resp. $\Delta(pp_n(T))$) para todo n natural. Como no existen mas de κ_R pp-fórmulas, $\Delta(N)$ y $\Delta(T)$ están acotadas por κ_R.

Teorema IV.6. *Sea* $\mathcal{K}$ *una clase y sea* T *una teoría, ambas de* R*-módulos derechos tales que* $\leqslant_T$ *y* $\leqslant_{\mathcal{K}}$ *coinciden. Sea* N *un* R*-módulo derecho tal que* $\leqslant_N$ *y* $\leqslant_{\mathcal{K}}$ *coinciden*[1]*. Consideramos pp-tipos sin parámetros.*

Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes para cualquier R*-módulo izquierdo* M*:*

(a) M *es* $\mathcal{K}$*-ML.*

(b) M *es* T*-ML.*

(c) M *es* T^**-ML.*

(d) M *es* $\mathcal{K}_T$*-ML.*

(e) M *es* N*-ML.*

(f) *El homomorfismo canónico*

$$N^{\Delta(N)\cdot|N|} \otimes M \to (N \otimes M)^{\Delta(N)\cdot|N|}$$

es monomorfismo.

(g) $\Phi(M) \subseteq \bigcup\{\theta(M) \mid \theta$ *es una pp-fórmula y* $\mathsf{D}\varphi \leqslant_{\mathcal{K}} \mathsf{D}\theta$ *para toda* $\varphi \in \Phi\}$ *para cada pp-tipo completo* Φ *en* ${}_R\mathscr{L}$*.*

(h) M *realiza únicamente pp-tipos completos* $\mathsf{D}T$ *finitamente generados. Es decir,* $tp_M^+(\bar{a})$ *es* $\mathsf{D}T$ *finitamente generado para cada* $\bar{a}$ *en* M*.*

Demostración. Empezamos con (g) implica (a).

Sea $\{N_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{K}$ y consideremos el homomorfismo canónico

$$h : \left(\prod_{i\in I} N_i\right) \otimes M \longrightarrow \prod_{i\in I} (N_i \otimes M)\,.$$

Necesitamos mostrar que h es un monomorfismo. Para esto, supongamos que $h((\bar{b}_i : i \in I)\otimes\bar{a}) = (\bar{b}_i \otimes \bar{a} : i \in I) = 0$, debemos verificar que $(\bar{b}_i : i \in I) \otimes \bar{a}$ es cero en $(\prod N_i) \otimes M$.

Dado que $\bar{b}_i \otimes \bar{a} = 0$, para todo $i \in I$, por el lema II.31, existen pp-fórmulas (sin parámetros) φ_i tales que $\bar{a} \in \varphi_i(M)$ y $\bar{b}_i \in \mathsf{D}\varphi_i(N_i)$.

Sea $\Phi = tp_M^+(\bar{a})$, tenemos que $\{\varphi_i \mid i \in I\} \subseteq \Phi$. Como $\bar{a} \in \bigcap \varphi_i(M) \subseteq \Phi(M)$, por nuestra hipótesis existe una pp-fórmula θ tal que $\bar{a} \in \theta(M)$ y , en particular, $\mathsf{D}\varphi_i \leqslant_{\mathcal{K}} \mathsf{D}\theta$ para todo $i \in I$.

[1]Dada $\mathcal{K}$, $T = Teo(\mathcal{K})$, $N \models T^*$ cumplen los requisitos.

Luego, $\bar{b}_i \in \mathsf{D}\theta(N_i)$, lo cual implica que $(\bar{b}_i : i \in I) \in \prod_I \mathsf{D}\theta(N_i) = \mathsf{D}\theta(\prod_I(N_i))$. Del mismo corolario antes mencionado se deduce que $(\bar{b}_i : i \in I) \otimes \bar{a} = 0$.

Concluimos que M es $\mathcal{K}$-ML.

Debido a que los órdenes $\leqslant_T$, $\leqslant_{T^*}$, $\leqslant_{\mathcal{K}_T}$ y $\leqslant_N$ son todos iguales a $\leqslant_{\mathcal{K}}$, la misma prueba sirve para demostrar que (g) implica (b),(c),(d) y (e).

La implicación (e)⇒(f) es inmediata de la definición de N-Mittag Leffler módulo.

Ahora probaremos (f)⇒(g). Fijamos un pp-tipo Φ y recordemos que Φ es también un filtro. Entonces $\{\mathsf{D}\varphi(N) \mid \varphi \in \Phi\}$ es un ideal en el correspondiente $pp_n(N)$, y está generado por $\{\mathsf{D}\varphi_i(N) \mid i < \Delta(N)\}$ para algún subconjunto $\{\varphi_i \mid i < \Delta(N)\} \subseteq \Phi$. En el momento de comprobar $\mathsf{D}\varphi \leqslant_{\mathcal{K}} \mathsf{D}\theta$ para toda $\varphi \in \Phi$ (cuando ya se tenga a tal θ), o equivalentemente $\mathsf{D}\varphi \leqslant_N \mathsf{D}\theta$, es suficiente verificar que $\mathsf{D}\varphi_i \leqslant_N \mathsf{D}\theta$ para todo $i \in I$: si $\mathsf{D}\varphi_i(N) \subseteq \mathsf{D}\theta(N)$ para toda i, dada $\varphi \in \Phi$ existen m pp-fórmulas, digamos $\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_m}$ tales que $\mathsf{D}\varphi(N) \subseteq \mathsf{D}\varphi_{i_1}(N) \cup \cdots \cup \mathsf{D}\varphi_{i_m}(N) \subseteq \mathsf{D}\theta(N)$.

Dado cualquier $\bar{a} \in \Phi(M)$, debemos encontrar el correspondiente θ.

En el caso de que $\Delta(N) = 1$, en particular si N es finito, si tomamos simplemente $\theta \equiv \varphi_0$ funciona para el conjunto entero $\Phi(M)$, esto es, si el ideal $\{\mathsf{D}\varphi(N) \mid \varphi \in \Phi\}$ es generado por $\mathsf{D}\varphi_0$ entonces, por definición, $\mathsf{D}\varphi \leqslant_N \mathsf{D}\varphi_0$ para toda[2] $\varphi \in \Phi$ y $\Phi(M) = \cap_{\varphi\in\Phi}\varphi(M) \subseteq \varphi_0(M)$.

Supongamos entonces que N es infinito. Sea $\left\{\bar{b}_{ij} \mid j < |N|\right\}$ una enumeración de $\mathsf{D}\varphi_i(N)$.

Para cada $i < \Delta(N)$ y $j < |N|$ elegimos una copia N_{ij} de N, consideramos su producto $N^{\Delta(N)\cdot|N|}$ y la n-ada $\bar{b} = (\bar{b}_{ij} : i < \Delta(N), j < |N|)$ en tal producto[3]. Denotamos el morfismo en (f) como f.

Como $\bar{b}_{ij} \in \mathsf{D}\varphi_i(N_{ij}) = \mathsf{D}\varphi_i(N)$ y $\bar{a} \in \Phi(M) \subseteq \varphi_i(M)$ entonces $\bar{b}_{ij} \otimes \bar{a} = 0$ en cada $N_{ij} \otimes M$.

Con los siguientes cálculos directos,

$$\begin{aligned} f(\bar{b} \otimes \bar{a}) &= f(((b_{ij_k} : i, j) : k < n) \otimes (a_k : k < n)) \\ &= f(\sum_{k<n}(b_{ij_k} : i, j) \otimes a_k) = \sum_{k<n} f((b_{ij_k} : i, j) \otimes a_k) \\ &= \sum_{k<n}(b_{ij_k} \otimes a_k : i, j) = (\sum_{k<n}(b_{ij_k} \otimes a_k) : i, j) \\ &= (\bar{b}_{ij} \otimes \bar{a} : i, j), \end{aligned}$$

obtenemos que $f(\bar{b} \otimes \bar{a}) = (\bar{b}_{ij} \otimes \bar{a} : i < \Delta(N), j < |N|) = 0$ en $(N \otimes M)^{\Delta(N)\cdot|N|}$.

Como f es monomorfismo podemos deducir que $\bar{b} \otimes \bar{a}$ es cero. Entonces existe una pp-fórmula θ tal que

$$\bar{a} \in \theta(M) \text{ y } \bar{b} \in \mathsf{D}\theta(N^{\Delta(N)\cdot|N|}) = \mathsf{D}\theta(\prod N_{ij}) = \prod \mathsf{D}\theta(N_{ij}),$$

de donde $\bar{b}_{ij} \in \mathsf{D}\theta(N_{ij}) = \mathsf{D}\theta(N)$ para todo $j < |N|$, por lo cual se sigue que

$$\mathsf{D}\varphi_i(N) \subseteq \mathsf{D}\theta(N),$$

[2] En este parráfo de la demostración no se utiliza que el homomorfismo sea inyectivo en (f), por lo que no depende de M. Así, en general, en el caso de que $\Delta(N) = 1$, por las equivalencias en este teorema, todo módulo izquierdo M es N-ML.

[3] Aquí existe un abuso de notación. Utilizando el isomorfismo $(N^n)^{\Delta(N)\cdot|N|} \cong \left(N^{\Delta(N)\cdot|N|}\right)^n$ podemos considerar a $\bar{b}$ como una n-ada en $N^{\Delta(N)\cdot|N|}$. Si para todo i y todo j, $\bar{b}_{ij} = (b_{ij_0}, b_{ij_1}, \ldots, b_{ij_{(n-1)}})$, la manera correcta, sin embargo no por eso la más apropiada, de expresar a $\bar{b}$ sería

$$\bar{b} = \Big((b_{ij_0} : i < \Delta(N), j_0 < |N|), (b_{ij_1} : i < \Delta(N), j_1 < |N|), \ldots, (b_{ij_{(n-1)}} : i < \Delta(N), j_{n-1} < |N|)\Big).$$

es decir, $\mathsf{D}\varphi_i \leqslant_N \mathsf{D}\theta$ para todo $i < \Delta(N)$, con lo que se cumplen las condiciones de (g).

Continuemos con (a)⇒(e). Sea M un módulo $\mathcal{K}$-ML, debemos probar que también es un módulo N-ML, para cualquier N que tenga la propiedad de que los órdenes $\leqslant_N$ y $\leqslant_{\mathcal{K}}$ son iguales.

Elegimos una subfamilia $\mathcal{K}' = \{N_j \mid j < \alpha\} \subseteq \mathcal{K}$ de representantes de equivalencia elemental de los elementos de $\mathcal{K}$, es decir, para cada módulo $K \in \mathcal{K}$ existe un $j < \alpha$ tal que $K \equiv N_j$ (K es elementalmente equivalente a N_j).

La familia $\mathcal{K}'$ es efectivamente un conjunto: cada módulo K en $\mathcal{K}$ se puede diferenciar de otros, que no son elementalmente equivalentes a él, porque K modela a un enunciado de ${}_R\mathscr{L}$ y los demás no. Así, cada clase de equivalencia elemental corresponde a un enunciado de ${}_R\mathscr{L}$, de los cuales existen a $\kappa_R = |R| + \aleph_0$. Por lo tanto $\alpha \leq \kappa_R$.

Consideremos el R-módulo derecho

$$N_{\mathcal{K}} = \prod_{j<\alpha} N_j.$$

Observemos que $\leqslant_{N_{\mathcal{K}}}$ y $\leqslant_{\mathcal{K}}$ son iguales:

Sean φ, ψ pp-fórmulas. Primero comprobaremos que $\leqslant_{\mathcal{K}}$ implica $\leqslant_{N_{\mathcal{K}}}$. Si $\varphi \leqslant_{\mathcal{K}} \psi$, en particular $\varphi(N_j) \subseteq \psi(N_j)$, para todo $j < \alpha$, lo cual equivale a que $\prod_{j<\alpha} \varphi(N_j) \subseteq \prod_{j<\alpha} \psi(N_j)$, y por la conmutatividad de las pp-fórmulas con el producto obtenemos

$$\varphi(N_{\mathcal{K}}) = \varphi\left(\prod_{j<\alpha} N_j\right) \subseteq \psi\left(\prod_{j<\alpha} N_j\right) = \psi(N_{\mathcal{K}}).$$

Por otro lado, si $\varphi(N_{\mathcal{K}}) \subseteq \psi(N_{\mathcal{K}})$, dado cualquier módulo $N \in \mathcal{K}$ existe $j < \alpha$ tal que $N \equiv N_j$, para el cual $\varphi(N_j) \subseteq \psi(N_j)$. En N_j se cumple el enunciado $\forall\bar{v}(\varphi(\bar{v}) \to \psi(\bar{v}))$ y por lo tanto también se cumple en N. Concluimos que $\leqslant_{N_{\mathcal{K}}}$ implica $\leqslant_{\mathcal{K}}$.

Por lema IV.4, si un módulo es $\mathcal{K}$-ML entonces también es $N_{\mathcal{K}}$-ML. Con esto se demuestra (e) para el módulo $N_{\mathcal{K}}$, y veamos que es suficiente para que M sea N-ML.

Sabemos que los órdenes $\leqslant_{\mathcal{K}}$ y $\leqslant_N$ coinciden. Entonces, por la proposición II.69, N es modelo de $Teo(\mathcal{K})^*$, pero por construcción, $N_{\mathcal{K}}$ también es modelo de tal teoría completa. Entonces, N y $N_{\mathcal{K}}$ son elementalmente equivalentes. Así M es N-ML.

Siguiendo la misma construcción, esta vez utilizando la clase $Mod\,T$ se muestra que (b) implica (e) para el módulo $N_{Mod\,T}$. Análogamente, para (c) implica (e) utilizamos la clase $Mod\,T^*$ y finalmente para (d) implica (e), la clase $Mod\,\mathcal{K}_T$.

Después de esto, hemos mostrado las equivalencias desde (a) hasta (g).

Para la última equivalencia, y no por eso menos importante, probaremos (g) si y sólo si (h).

Supongamos que se cumple (g). Debemos probar que todos los pp-tipos completos (sin parámetros) realizados en M son $\mathsf{D}T$-finitamente generados. Sea $\bar{a}$ en M y sea $\Phi = tp^+_M(\bar{a})$. Como $\bar{a} \in \Phi(M)$, por la hipótesis existe una pp-fórmula θ tal que $\bar{a} \in \theta(M)$ y $\mathsf{D}\varphi \leqslant_{\mathcal{K}} \mathsf{D}\theta$, o bien, $\mathsf{D}\varphi \leqslant_T \mathsf{D}\theta$ para toda $\varphi \in \Phi$. Por la dualidad, es equivalente a $\theta \leqslant_{\mathsf{D}T} \varphi$ para toda $\varphi \in \Phi$, lo cual significa que Φ es $\mathsf{D}T$ generado por la pp-fórmula θ.

Para el recíproco, sea Φ un pp-tipo completo sin parámetros, elegimos $\bar{a} \in \Phi(M) = \bigcap_{\varphi\in\Phi} \varphi(M)$. Como el tipo $tp^+_M(\bar{a})$ es $\mathsf{D}T$-finitamente generado, existe una pp-fórmula $\theta \leqslant_{\mathsf{D}T} tp^+_M(\bar{a})$ tal que $\theta \in tp^+_M(\bar{a})$ ($\bar{a} \in \theta(M)$). Pero $\bar{a}$ satisface a todas las pp-fórmulas en Φ, de donde $\Phi \subseteq tp^+_M(\bar{a})$, así θ también $\mathsf{D}T$ genera a Φ. Lo cual implica, por dualidad, $\mathsf{D}\varphi \leqslant_T \mathsf{D}\theta$ para todo $\varphi \in \Phi$. Se sigue (g). □

La equivalencia de los incisos (a) y (h) del teorema anterior, cuando $\mathcal{K}$ es la clase de todos los R-módulos derechos, nos brinda la caracterización de los módulos atómicos positivos definidos en III.1.

Teorema IV.7. *Un módulo es Mittag-Leffler si y sólo si es +-atómico.*

En el teorema se muestra que $tp^+_M(\bar{a})$ es finitamente generado para M-Mittag-Leffler, pero se puede decir aún más, los $tp^+_M(\bar{a}/B)$ también son finitamente generado.

Corolario IV.8. *Sea M un módulo ML, entonces los pp-tipos completos (con o sin parámetros) que realiza son finitamente generados. Es decir, $tp^+_M(\bar{a}/B)$ es finitamente generado para cada $\bar{a}$ en M, $B \subseteq M$.*

Demostración. Sea $\bar{a}$ una n-ada en M y $B \subseteq M$, sea $p = tp^+_M(\bar{a}/B)$. Recordemos que $p_* = \{\psi(\bar{v},\bar{0}) \mid \psi(\bar{v},\bar{b}) \in p,\ \bar{b} \text{ en } B\}$, como p_* es realizado en M (por el cero) entonces está contenido en algún pp-tipo completo, tal pp-tipo, por IV.6(h), es finitamente generado por alguna pp-fórmula sin parámetros $\varphi(\bar{v},\bar{0})$. Luego, $\varphi(\bar{v},\bar{0}) \leqslant p_*$ y además la pp-fórmula $\varphi(\bar{v},\bar{c})$, con $\bar{c}$ en B, tal que $\varphi(M,\bar{c})$ es la clase lateral $\bar{a} + \varphi(M,\bar{0})$ pertenece a p, ya que $M \models \varphi(\bar{a},\bar{c})$. Por lo tanto p es finitamente generado por $\varphi(\bar{v},\bar{c})$. □

De donde se deduce que un módulo es Mittag-Leffler si y sólo si todos los pp-tipos completos que realiza son finitamente generados.

En particular, como se puede observar en el siguiente resultado, cualquier R-módulo realiza los pp-tipos finitamente generados. Por lo tanto, M es ML si realiza la menor cantidad posible de pp-tipos completos.

Proposición IV.9. *Todo módulo realiza a los pp-tipos (con o sin parámetros) finitamente generados.*

Demostración. Sea p un pp-tipo generado por $\varphi(\bar{v},\bar{b}) \in p$ y sea M un R-módulo. Como p es finito satisfacible, en particular, $M \models \exists\,\bar{v}\,\varphi(\bar{v},\bar{b})$. De donde, $\varphi(M,\bar{b}) \neq \emptyset$. Tomamos $\bar{a}^* \in \varphi(M,\bar{b})$, entonces $\bar{a}^* \in p(M) = \varphi(M)$. □

IV.1.1. Aplicaciones a la Teoría de Módulos

En esta sección se expondrán algunos resultados clásicos utilizando el teorema anterior para su prueba.

Corolario IV.10. *Sea $\mathcal{K}$ una clase de R-módulos derechos.*

(a) *Un módulo M es $\mathcal{K}$-ML si y sólo si cada subconjunto finito de M está contenido en un submódulo puro de M el cual es $\mathcal{K}$-ML.*

(b) *La clase de módulos $\mathcal{K}$-ML es cerrada respecto a submódulos puros y extensiones puras.*

(c) *Una suma directa es $\mathcal{K}$-ML si y sólo si todos los sumandos son $\mathcal{K}$-ML.*

(d) *Un módulo finitamente generado es finitamente presentado si y sólo si es ML.*

(e) *Si N es un submódulo puro finitamente generado de un módulo $\mathcal{K}$-ML M, entonces M/N también es $\mathcal{K}$-ML.*

Demostración.

(a) Recordemos que el pp-tipo de una n-ada en un módulo M es el mismo si lo vemos en M o en un submódulo puro de él que la contenga.

Por lo tanto, $tp_N^+(\bar{a})$ es ($\mathsf{D}T$-)finitamente generado si y sólo si $tp_M^+(\bar{a})$ es ($\mathsf{D}T$-)finitamente, para N puro en M. En esta prueba tomamos $T = Teo(\mathcal{K})$.

La suficiencia es inmediata. Para la otra implicación, dado $\{a_0, \ldots, a_{n-1}\} \subseteq M$, existe un submódulo $\mathcal{K}$-ML N puro en M que contiene a $\bar{a}$ (la n-ada correspondiente a tal conjunto), por (h) del teorema anterior, $tp_N^+(\bar{a}) = tp_M^+(\bar{a})$ es finitamente generado, lo cual implica que M es $\mathcal{K}$-ML.

(b) El mismo argumento de la prueba (a) muestra que un submódulo puro de un módulo $\mathcal{K}$-ML es $\mathcal{K}$-ML.

Para mostrar que las extensiones puras de $\mathcal{K}$-ML también lo son, sea $0 \to K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$, una sucesión pura-exacta y supongamos que K y N son $\mathcal{K}$-ML. Debemos mostrar que también lo es M. Para simplificar la notación supongamos que la clase $\mathcal{K}$ es Mod-R.

Sean $\overline{m}$ en M y $\bar{n} = g(\overline{m})$. Por hipótesis $tp_N^+(\bar{n})$ es finitamente generado por alguna pp-fórmula ψ. Como g es epimorfismo puro, existe $\overline{m}' \in \psi(M)$ tal que $g(\overline{m}') = \bar{n}$, de donde $g(\overline{m} - \overline{m}') = \bar{0}$, es decir, $\overline{m} - \overline{m}' \in Ker\, g = Im\, f$, digamos que $f(\bar{k}) = \overline{m} - \overline{m}'$. Pero f es puro, y K realiza sólo los tipos finitamente generados, entonces $tp_K^+(\bar{k}) = tp_M^+(\overline{m} - \overline{m}')$ es finitamente generado por alguna φ. Así el pp-tipo $tp_M^+(\overline{m})$ contiene a la fórmula $\exists \bar{z}(\psi(\bar{z}) \wedge \varphi(\bar{v} - \bar{z}))$.

Afirmamos que, de hecho, es generado por esa fórmula. Sea θ en $tp_M^+(\overline{m})$, entonces θ también pertenece a $tp_N^+(\bar{n})$, de donde $\psi \leqslant \theta$. Se sigue que $M \models \theta(\overline{m}')$ (porque $M \models \psi(\overline{m}')$), y por la linealidad de las pp-fórmulas $M \models \theta(\overline{m} - \overline{m}')$. Luego, $\varphi \leqslant \theta$.

Para mostrar que $\exists \bar{z}(\psi(\bar{z}) \wedge \varphi(\bar{v} - \bar{z})) \leqslant \theta$, supongamos que se satisface $\psi(\bar{b}) \wedge \varphi(\bar{a} - \bar{b})$ en algún módulo M' para ciertas $\bar{a}$, $\bar{b}$. Debemos mostrar que $M' \models \theta(\bar{a})$. Como $\psi \leqslant \theta$ y $\varphi \leqslant \theta$, claramente $M \models \theta(\bar{b}) \wedge \theta(\bar{a} - \bar{b})$. Nuevamente por la linealidad, se sigue que $M \models \theta(\bar{a})$.

Concluimos que $tp_M^+(\overline{m})$ es finitamente generado y por lo tanto, M es ML.

(c) Para este inciso utilizaremos el hecho de que un sumando directo es también un submódulo puro (veáse observación II.38), y la caracterizacion de $\mathcal{K}$-ML en (h) del teorema anterior.

Sea $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$. Por la observación anterior todos los M_i son puros en M.

Primero, si M es $\mathcal{K}$-ML dada $\bar{a}$ en M_i, para algún $i \in I$, por ser M_i puro en M, su pp-tipo en M_i es el mismo que en M, entonces $tp_{M_i}^+(\bar{a}) = tp_M^+(\bar{a})$ es $\mathsf{D}T$-finitamente generado. Luego, M_i es $\mathcal{K}$-ML.

Para el recíproco, sea $\bar{a}$ en M y debemos probar que $tp_M^+(\bar{a})$ es $\mathsf{D}T$-finitamente generado. Como $\bar{a}$ es finito, existe un k tal que $\bar{a}$ pertenece a $\bigoplus_{i<k} M_i = M'$. Es claro que, por ser su sumando directo, M' es puro en M, por lo cual

$$tp_{M'}^+(\bar{a}) = tp_M^+(\bar{a}).$$

Así, basta con probar que $tp_{M'}^+(\bar{a})$ es $\mathsf{D}T$-finitamente generado. Sin perder generalidad lo demostraremos para $k = 2$, entonces $M' = M_0 \oplus M_1$. Supongamos que $\bar{a} = \bar{a}_0 + \bar{a}_1$.

Observemos que $tp_{M_0 \oplus M_1}^+(\bar{a}_0 + \bar{a}_1) = tp_{M_0}^+(\bar{a}_0) \cap tp_{M_1}^+(\bar{a}_1)$, ya que para toda pp-fórmula φ

$$M_0 \oplus M_1 \models \varphi(\bar{a}_0 + \bar{a}_1) \Leftrightarrow M_0 \models \varphi(\bar{a}_0) \text{ y } M_1 \models \varphi(\bar{a}_1).$$

La suficiencia es consecuencia de la pureza de M_i en $M_0 \oplus M_1$ y la necesidad de la conmutatividad de la suma con las pp-fórmulas.

Como los M_i son $\mathcal{K}$-ML, existen φ_0 y φ_1 que $\mathsf{D}T$-generan, respectivamente, a $tp^+_{M_0}(\bar{a}_0)$ y $tp^+_{M_1}(\bar{a}_1)$. Afirmamos que la pp-fórmula $\varphi_0 + \varphi_1$ $\mathsf{D}T$-genera al pp-tipo de $\bar{a}_0 + \bar{a}_1$ en M'.

Sea $\theta \in tp^+_{M_0 \oplus M_1}(\bar{a}_0 + \bar{a}_1)$, mostraremos que $\varphi_0 + \varphi_1 \leqslant_{\mathsf{D}T} \theta$. Dado cualquier módulo N (modelo de $\mathsf{D}T$), sabemos que $\varphi_0(N) \subseteq \theta(N)$ y $\varphi_1(N) \subseteq \theta(N)$, de donde

$$(\varphi_0 + \varphi_1)(N) = \varphi_0(N) + \varphi_1(N) \subseteq \theta(N).$$

Podemos concluir que $M = \bigoplus M_i$ es $\mathcal{K}$-ML.

(d) Por el lema II.24 inciso (b), dados un módulo finitamente presentado M y una n-ada $\bar{a}$ en M se puede construir una pp-fórmula φ para la cual $(M, \bar{a})$ es su realización libre. Aún más, por el inciso (c), el tipo de $\bar{a}$ en M está generado por φ. Como consecuencia, todos los pp-tipos realizados en un módulo finitamente presentado son finitamente generados. Por lo tanto, todos los módulos f.p son ML.

Para la implicación restante, sea M un módulo Mittag-Leffler finitamente generado, digamos por $\bar{a}$. Tal $\bar{a}$ tiene un pp-tipo en M finitamente generado. Por la observación II.25, M es finitamente presentado.

(e) N puro en M implica que N es $\mathcal{K}$-ML por (b), y por el inciso anterior, como N es finitamente generado también es finitamente presentado.

Para probar que M/N es $\mathcal{K}$-ML mostraremos que cualquier n-ada $\bar{c} = \bar{b} + N$ en $M' = M/N$ tiene un pp-tipo $\mathsf{D}T$-finitamente generado. Supongamos que $\bar{a}$ es quien genera a N.

Al ser M $\mathcal{K}$-ML, el pp-tipo $tp^+_M(\bar{a}, \bar{b})$ es $\mathsf{D}T$-finitamente generado por alguna pp-fórmula $\theta(\bar{w}, \bar{v})$ tal que $M \models \theta(\bar{a}, \bar{b})$. Si aplicamos el epimorfismo (puro) canónico $h : M \to M'$ tenemos que

$$M' \models \theta(\bar{a} + N, \bar{b} + N), \text{ o bien, } M' \models \theta(\bar{0}, \bar{c}).$$

De donde, la pp-fórmula $\theta'(\bar{v}) \equiv \theta(\bar{0}, \bar{v})$ pertenece a $tp^+_{M'}(\bar{c})$. Veamos que tal fórmula $\mathsf{D}T$-genera a este pp-tipo.

Sea $\varphi(\bar{v}) \in tp^+_{M'}(\bar{c})$. Como h es un epimorfismo puro y $\bar{c} \in \varphi(M')$, existe $\bar{b}' \in \varphi(M)$ tal que $h(\bar{b}') = \bar{b}' + N = \bar{c}$, por lo cual $\bar{b}' - \bar{b} \in N^n$. Luego podemos escribir a este elemento en términos del generador de N, $\bar{b}' - \bar{b} = \bar{r}\bar{a}$, donde $\bar{r}$ está en R (y es columna o renglón dependiendo de como tomemos a $\bar{r}$). Entonces $M \models \varphi(\bar{b}')$ lo escribimos como $M \models \varphi(\bar{r}\bar{a} + \bar{b})$. Si consideramos la pp-fórmula $\varphi'(\bar{w}, \bar{v}) \equiv \varphi(\bar{r}\bar{w} + \bar{v})$ tenemos que $\varphi' \in tp^+_M(\bar{a}, \bar{b})$. Por lo tanto, $\theta(\bar{w}, \bar{v}) \leqslant_{\mathsf{D}T} \varphi'(\bar{w}, \bar{v})$. Entonces en cualquier módulo D en $\mathcal{K}$ y $\bar{d}$ en D, las implicaciones

$$\theta'(\bar{d}) \Rightarrow \theta(\bar{0}, \bar{d}) \Rightarrow \varphi'(\bar{0}, \bar{d}) \Rightarrow \varphi(\bar{r}\bar{0} + \bar{d}) \Rightarrow \varphi(\bar{d}),$$

se cumplen. Lo cual implica que $\theta'(\bar{v}) \leqslant_{\mathsf{D}T} \varphi(\bar{v})$.

□

En el siguiente resultado se establecen caracterizaciones de los conceptos de un módulo finitamente generado y de un módulo finitamente presentado.

Corolario IV.11.

(a) *Un módulo M es finitamente generado si y sólo si el homomorfismo canónico*

$$h : \left(\prod_{i \in I} N_i\right) \otimes_R M \longrightarrow \prod_{i \in I} (N_i \otimes_R M)$$

es un epimorfismo para todas las familias de R-módulos derechos $\{N_i \mid i \in I\}$.

(b) *Un módulo M es finitamente presentado si y sólo si h es un isomorfismo para todas las familias $\{N_i \mid i \in I\}$.*

Demostración.

(a) Supongamos que M es generado por la n-ada $\bar{a}$, la cual da origen al epimorfismo $f : R^n \to M$ ($\bar{r} \mapsto \bar{r}\bar{a}$).

Una propiedad relevante del producto tensorial es que, en particular, $A \otimes R^n \cong A^n$, para cualquier módulo A (veáse [14, p. 439]). De donde,

$$\left(\prod N_i\right) \otimes R^n \cong \left(\prod N_i\right)^n \cong \prod (N_i{}^n) \cong \prod (N_i \otimes R^n) .$$

Por lo cual, el homomorfismo canónico

$$g : \left(\prod_I N_i\right) \otimes R^n \longrightarrow \prod_I (N_i \otimes R^n)$$

es un isomorfismo.

Además, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
(\prod N_i) \otimes R^n \arrow[r, "id_{\prod N_i} \otimes f"] \arrow[d, "g"] & (\prod N_i) \otimes M \arrow[d, "h"'] \\
\prod (N_i \otimes R^n) \arrow[r, "\prod(id_{N_i} \otimes f)"'] & \prod (N_i \otimes M)
\end{tikzcd}$$

Debido a que f es epimorfismo, también lo es $\prod(id_{N_i} \otimes f)$. Por la conmutatividad del diagrama, $h(id_{\prod N_i} \otimes f) = (\prod(id_{N_i} \otimes f))g$, como g es epimorfismo, es obligatorio que h sea también epimorfismo.

Ahora demostraremos el recíproco.

Primero observemos que $R \otimes M \cong M$, con la asignación $r \otimes m \mapsto rm$. Por nuestra hipótesis, el homomorfismo

$$h : R^M \otimes M \to (R \otimes M)^M \cong M^M$$

es epimorfismo. Primero elegimos una sucesión en M^M, $c = (c_i : i \in M)$, que enumere a los elementos de M, es decir, $c_i \neq c_j$ para $i \neq j$. Para tal sucesión elegimos una h-preimagen en $R^M \otimes M$, la cual debe tener la forma, por la observación A.11, $\bar{s} \otimes \bar{a} = \sum_{j<k} s_j \otimes a_j$ para $s_j \in R^M$ y $a_j \in M$. En resumen, $h(\bar{s} \otimes \bar{a}) = c$.

Afirmamos que $\bar{a}$ genera a M. Expresamos a los s_j como $s_j = (r_i^j : i \in M)$ para todo $j < k$.

$$\begin{aligned}
(c_i : i \in M) &= h\,(\bar{s} \otimes \bar{a}) \\
&= h\left(\sum_{j<k} s_j \otimes a_j\right) \\
&= \sum_{j<k} h\,(s_j \otimes a_j) \\
&= \sum_{j<k} h\left(\left(r_i^j : i \in M\right) \otimes a_j\right) \\
&= \sum_{j<k} \left(r_i^j \otimes a_j : i \in M\right).
\end{aligned}$$

Entonces $c_i = \sum_{j<k}(r_i^j \otimes a_j) \simeq \sum_{j<k}(r_i^j a_j)$ para todo $i \in M$.

(b) Por (a), h es epimorfismo si y sólo si M es finitamente generado, y es monomorfimso si y sólo si M es ML, luego es un isomorfismo si y sólo si M es finitamente generado y ML, y por IV.10 (d) si y sólo si M es finitamente generado y finitamente presentado.

□

Un módulo N tal que N-ML es lo mismo que $\mathcal{K}$-ML es llamado un **módulo de prueba** para $\mathcal{K}$-ML. El teorema IV.6 implica que cualquier módulo N tal que $\leqslant_N$ y $\leqslant_{\mathcal{K}}$ son el mismo orden, es un módulo de prueba para $\mathcal{K}$-ML.

Dado un módulo de prueba N, una transformación natural $\tau : N^I \otimes - \to (N \otimes -)^I$ como en el inciso (f) de tal teorema, es decir una transformación para demostrar $\mathcal{K}$-ML, es llamada una **transformación de prueba** para $\mathcal{K}$-ML. Al módulo N en τ lo llamamos el módulo de prueba en τ y al conjunto I el exponente de τ. Para indicar esto se escribe $\tau = \tau_{N,I}$.

En cierta manera, es interesante encontrar transformaciones de prueba con un exponente *pequeño* y con módulo de prueba *pequeño*. En el siguiente corolario se puede ver este aspecto.

Corolario IV.12. *Sea $\mathcal{K}$ una clase de módulos derechos.*

(a) *Existe una transformación de prueba $\tau : N^N \otimes - \to (N \otimes -)^N$ para $\mathcal{K}$-ML cuyo módulo de prueba N tiene cardinalidad κ_R.*

(b) *Cada módulo de prueba N para $\mathcal{K}$-ML tiene una transformación de prueba con exponente de cardinalidad no mayor a $\Delta(N) \cdot |N|$.*

Demostración.

(a) Según el teorema IV.6 cualquier módulo N tal que $\leqslant_N$ y $\leqslant_{\mathcal{K}}$ coinciden, es un módulo prueba para $\mathcal{K}$-ML, y ya sabemos que cualquier modelo de T^* tiene esa propiedad. Entonces, sea $N \models T^*$. Por el teorema de Löwenheim-Skolem podemos elegir a N de cardinalidad κ_R. Tenemos la transformación de prueba que nos brinda el teorema

$$N^{\Delta(N)\cdot|N|} \otimes - \to (N \otimes -)^{\Delta(N)\cdot|N|},$$

pero $\Delta(N) \leq \kappa_R = |N|$, con lo que obtenemos la trasformación deseada con exponente N.

(b) Por el inciso (f) de IV.6.

□

Ejemplos de módulos Mittag-Leffler

Para finalizar esta sección enunciaremos algunos ejemplos relacionados a módulos Mittag-Leffler.

- Del teorema III.14, los módulos +-construibles son exactamente los módulos puro proyectivos y por la proposición III.9 los +-construibles son también +-atómicos. De donde, los módulos *puro proyectivos* son Mittag-Leffler.
- Como todos los módulos *proyectivos* son también puro proyectivos, en particular, son Mittag-Leffler.
- Los módulos libres son *proyectivos*, en particular, son Mittag-Leffler.
- Por corolario IV.11(b), los módulos *finitamente presentados* son Mittag-Leffler.
- El $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}^X$ es Mittag-Leffler para cualquier conjunto X, pero no es libre (por lo tanto, tampoco es proyectivo ni puro-proyectivo) si X es infinito (veáse [4, p. 117]).
- Dado un número p primo, sea $\mathbb{Z}_p$ el $\mathbb{Z}$-módulo cíclico con p elementos. El $\mathbb{Z}$-módulo $\prod_p \mathbb{Z}(p)$, donde p recorre todos los números primos, no es Mittag-Leffler (veáse [10, p. 127]).
- Sea A un anillo noetheriano no necesariamente conmutativo y M un A-módulo. Entonces, $M^* = Hom_A(M, A)$ es un A-módulo plano Mittag-Leffler (veáse [28, p. 77]).

Un R-módulo M es **separable** si cada subconjunto finito de M está contenido en un sumando directo finitamente presentado de M ([17]).

Un R-módulo Mes **localmente puro proyectivo** si cada epimorfimo puro $g : N \to M$ se escinde localmente, esto es, si para cada subconjunto finito $S \subseteq M$ existe un homomorfismo $h : M \to N$ tal que $gh(a) = a$ para todo $a \in S$ [3].

Un R-módulo M es **estrictamente Mittag-Leffler** si para cualquier homomorfismo $\upsilon : F \to M$, con F finitamente presentado, existe un módulo finitamente presentado S y un homomorfismo $\nu : F \to S$, tal que υ se factoriza a través de ν y para cada módulo B y cualquier homomorfismo $f : S \to B$ existe $g : M \to B$ con $g\upsilon = f\nu$ [28].

- Los módulos estrictamente Mittag-Leffler que coinciden con los *localmente puro proyectivos* son Mittag-Leffler, podemos encontrar algunos ejemplos en [3].
- M separable implica M estrictamente Mittag-Leffler, lo cual a su vez implica Mittag-Leffler (véase [17, p. 14]). Por lo tanto los módulos *separables* son Mittag-Leffler.

  En el libro de Eklof y Mekler [9] se pueden encontrar diversos ejemplos de $\mathbb{Z}$-módulos separables ($\aleph_0$-separables), y por lo tanto ML. Para mencionar algunos: $\mathbb{Z}^\kappa$, para cualquier κ cardinal infinito; para cualquier R-módulo M, $M^* = Hom_R(M, R)$.

IV.2. Problemas propuestos

1. Sea κ un ordinal y M un R-módulo. Una cadena creciente de submódulos de M, $\mathcal{F} = (M_\alpha \mid \alpha < \kappa)$, es una **filtración** de M si sucede que $M_0 = 0$, $M_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta$ para α límite y $M = \bigcup_{\alpha<\kappa} M_\alpha$.

Dada una propiedad de módulos es natural preguntarse respecto a cuales operaciones de módulos se preserva, por ejemplo, respecto a submódulos, extensiones, producto o sumas directas, filtraciones, étcetera; algunas respuestas son más inmediatas que otras.

En [9], Eklof y Mekler formulan la siguiente cuestión: si M es casi-libre, esto es, si existe $\mathcal{F}$ una filtración en M y cada elemento de la filtración es libre, entonces, ¿es necesario que M sea también un módulo libre? Ellos presentan respuestas parciales, que dependen de la teoría de conjuntos. En [11, p. 537], Fuchs responde afirmativamente la misma pregunta, pero para módulos proyectivos, es decir, si M es casi-proyectivo, entonces M es proyectivo. En los dos casos anteriores se utilizan ciertas restricciones cardinales.

Lo cual nos lleva a la pregunta:

- Dados un módulo M y $\mathcal{F}$ una filtración en M tal que cada elemento de $\mathcal{F}$ es Mittag-Leffler, ¿M es Mittag-Leffler?.

2. Si introducimos la siguiente noción, un módulo M se llama κ-Mittag-Leffler si para todo $N \subseteq M$, $|N| < \kappa$, N es Mittag-Leffler. Entonces, nos formulamos la pregunta:

   - ¿Todo módulo κ-Mittag-Leffler es Mittag-Leffler?

   Esta respuesta es afirmativa para las nociones análogas con módulos torsionless en [23] y con módulos proyectivos en [11], para ciertas restricciones cardinales.

3. Una pregunta natural en teoría de modelos para toda clase de estructuras en un lenguaje es si se puede axiomatizar.

   - ¿La clase $\mathcal{ML}$ de los módulos Mittag-Leffler es axiomatizable?

   Lo cual es equivalente a demostrar que $\mathcal{ML}$ es cerrada respecto a ultraproductos y equivalencia elemental. La cerradura de los módulos Mittag-Leffler respecto equivalencia elemental se demuestra abajo, en IV.13, por lo cual sólo resta comprobarla para ultraproductos.

Proposición IV.13. *Sean M, N módulos tales que $M \equiv N$. Si $M \in \mathcal{ML}$ entonces $N \in \mathcal{ML}$.*

Demostración. Por la caracterización en el teorema IV.6, basta probar que todas las n-adas en N tienen un pp-tipo finitamente generado. Sea $\bar{a}$ en N y $p = tp^+_N(\bar{a})$.

Primero observemos que p es finito satisfacible en M, ya que para todo subconjunto $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n$ de pp-fórmulas en p, $N \models \exists \bar{v} \bigwedge_{i<n} \psi_i(\bar{v})$, lo cual implica que, por equivalencia elemental, $M \models \exists \bar{v} \bigwedge_{i<n} \psi_i(\bar{v})$.

Además p es un pp-tipo completo en M: si existe una pp-fórmula $\phi \notin p$, tal que $p \cup \{\phi\}$ es finito satisfacible en M, nuevamente por equivalencia elemental, también sería finito satisfacible en N, lo cual no puede ser.

Por lo tanto, existe una extensión elemental $M' \succ M$, en particular pura, y $\bar{a}' \in M'$ tal que $p = tp^+_{M'}(\bar{a}')$. Del corolario IV.10(b) $\mathcal{ML}$ es cerrada respecto a extensiones puras, así M' es Mittag-Leffler. De donde, $tp^+_{M'}(\bar{a}')$ es finitamente generado por una fórmula φ.

Así, $\varphi \in p$ y $\varphi \leqslant p$ como se requería. $\square$

Apéndice

Este sección tiene el objetivo de recordar algunos conceptos algebraicos, los cuales son utilizados en el transcurso del presente trabajo.

Proposición A.1 (Principio de inclusión-exclusión)**.** *Si $A_1, A_2, \ldots, A_r$ son conjuntos finitos, entonces $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_r|$ es:*

$$\sum_{i=1}^{r} |A_i| - \sum_{i<j=1}^{r} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k=1}^{r} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{r-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_r|.$$

Definición A.2. Un orden parcial $(\Lambda, \leq)$ es una **retícula** $(\Lambda, \leq, \wedge, \vee)$ si para cualesquiera dos elementos x,y en Λ existen un ínfimo y un supremo respecto al orden, los cuales denotamos como $x \wedge y$ y $x \vee y$, respectivamente.

Un subconjunto no vacío $\mathcal{J} \subseteq \Lambda$ es una **subretícula** de Λ si es cerrado respecto $\wedge$ y $\vee$. La subretícula generada por $H \subseteq \Lambda$, $\langle H \rangle$,es la más pequeña que contiene a H.

$\mathcal{I} = \langle H \rangle$ si y sólo si $H \subseteq \mathcal{I}$ y para toda $x \in \mathcal{I}$ existe un entero $n \geq 1$ y existen h_0, h_1, $\ldots$, $h_{n-1} \in H$ tales que $x \leq h_0 \vee h_1 \vee \cdots \vee h_{n-1}$.

La colección de subconjuntos de un conjunto C, $\wp(C)$, es una retícula con el orden parcial $\subseteq$, donde el ínfimo es $A \cap B$ y el supremo $A \cup B$ para $A, B \in \wp(C)$.

Definición A.3. Sean $(\Lambda, \leq)$ y $(\Upsilon, \leq')$ órdenes parciales. Un homomorfismo entre órdenes parciales $f : (\Lambda, \leq) \to (\Upsilon, \leq')$ es un morfismo que preserva órdenes: si $x \leq y$ entonces $f(y) \leq' f(x)$.

Si además Λ y Υ son retículas, un homomorfismo de retículas es un homomorfismo de órdenes parciales $f : \Lambda \to \Upsilon$ tal que preserva ínfimos y supremos. Se dice que es **isomorfismo de retículas** si es biyectivo.

Un **anti-isomorfismo de retículas** es un morfismo biyectivo $f : \Lambda \to \Upsilon$ tal que invierte el orden, es decir, si $x \leq y$ entonces $f(y) \leq' f(x)$ y ademas $f(x \wedge y) = f(x) \vee f(y)$ y $f(x \vee y) = f(x) \wedge f(y)$ para todo $x, y \in \Lambda$.

Observación A.4. Un (anti-) isomorfismo de órdenes parciales $f : \Lambda \to \Upsilon$ es también un (anti-) isomorfismo de retículas. Pero, un homomorfismo de órdenes parciales no siempre es un homomorfismo de retículas (véase [13, p. 16]).

Definición A.5. Un **ideal** $\mathcal{I}$ de una retícula $(\Lambda, \leq)$ es una subretícula de Λ que cumple:

- Si $x \leq y \in \mathcal{I}$ entonces $x \in \mathcal{I}$.
- Si x, $y \in \mathcal{I}$ entonces $x \vee y \in \mathcal{I}$.

Un ideal es **principal** si es generado por un elemento a, es decir, si es de la forma $\{x \in \Lambda \mid x \leq a\}$ para alguna a en $\mathcal{I}$.

Un filtro es el concepto dual de ideal. $\mathcal{F}$ es un **filtro** en una retícula Λ si es una subretícula que cumple:

- Si $x \leq y$, $x \in \mathcal{F}$ entonces $y \in \mathcal{F}$.
- Si x, $y \in \mathcal{F}$ entonces $x \wedge y \in \mathcal{F}$.

Un **ultrafiltro** es un filtro propio máximo respecto al orden $\leq$.

Teoría de módulos

Definición A.6. Un módulo **finitamente generado** (**fg**) M, es un módulo que tiene una cantidad finita de generadores. También se puede definir como una imagen homomórfica de un módulo libre con una cantidad finita de generadores, es decir, existe $h : F \to M$, epimorfismo, tal que F es libre y con finitos generadores. De donde, $F \cong R^k$ para algún $k \in \omega$, luego podemos elegir $h : R^k \to M$.

Si además el núcleo de h, $Ker\, h$, es finitamente generado[4] entonces se dice que M es **finitamente presentado** (**fp**). Como $M \cong R^k/Ker\, h$, los elementos de M pueden ser descritos por una cantidad finita de generadores de R^k y $Ker\, h$. Trivialmente R^k es finitamente presentado para todo k natural.

Definición A.7. Sean M, N R-módulos, tales que $M \leq N$. Entonces $\boldsymbol{M}$ es **puro** en $\boldsymbol{N}$, o bien, N es una **extensión pura** de M, si para todo sistema finito $\sum r_i j x_i = cj$ con $c_j \in M$, $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq m$, de ecuaciones en M con solución en N, tal sistema ya tenía una solución en M.

Definición A.8. Una sucesión de R-módulos $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ es **pura exacta** si, es una sucesión exacta corta y, si la imagen $\alpha(A) \leq B$ es pura en B.

Un módulo P tiene la propiedad proyectiva respecto a esta sucesión si para cada homomorfismo $f : P \to C$ existe un homomorfismo $g : P \to B$ tal que $f = \beta g$. Un R-módulo P es **puro proyectivo** si tiene la propiedad proyectiva respecto a todas las sucesiones puras exactas. De donde, todo módulo proyectivo es, en particular, puro proyectivo.

Un módulo I tiene la propiedad inyectiva respecto a la sucesión de arriba si para cada homomorfismo $f : I \to A$ existe un homomorfismo $g : I \to B$ tal que $g = \alpha f$. El R-módulo I es **puro inyectivo** si tiene la propiedad inyectiva respecto a todas las sucesiones puras exactas. Así, todo módulo inyectivo es, en particular, puro inyectivo.

A continuación daremos un breve recordatorio de las propiedades básicas del producto tensorial de módulos. Consideremos un R-módulo derecho M, un R-módulo izquierdo N y C un grupo abeliano.

Definición A.9. Un homomorfismo $\beta : M \times N \to C$ es **bilineal** si

$$\begin{aligned} \beta(a + a', b) &= \beta(a, b) + \beta(a', b), \\ \beta(a, b + b') &= \beta(a, b) + \beta(a, b'), \\ \beta(ar, b) &= \beta(a, rb), \end{aligned}$$

para todo a, $a' \in A$, b, $b' \in B$ y $r \in R$.

[4] Un submódulo de un módulo finitamente generado no necesariamente es finitamente generado.

Si $\beta : M \times N \to C$ es bilineal y $\phi : C \to D$ es un homomorfismo de grupos abelianos, entonces $\phi \circ \beta : M \times N \to D$ es también bilineal.

Definición A.10. El **producto tensorial de** M **y** N es un grupo abeliano $M \otimes_R N$ junto con un homomorfismo bilineal $\tau : M \times N \to M \otimes_R N$ a partir del cual todo homomorfismo bilineal de $M \times N$ a un grupo abeliano C puede ser recuperado en forma única de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[d, "\tau"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ M \otimes_R N \arrow[r, dashed, "\exists ! \beta'"'] & C \end{tikzcd}$$

Denotamos como $a \otimes b$ la imagen de (a, b) repecto a τ, el *morfismo tensor*.

Existe $M \otimes_R N$ y su morfismo tensor, y son únicos salvo isomorfismo (para su construcción veáse [14, p. 434]). Cuando no exista confusión eliminaremos el anillo R en la notación, quedando $M \otimes N$.

Debido a las propiedades de bilinealidad de τ, es inmediato observar que para todo a, $a' \in A$, b, $b' \in B$ y $r \in R$,

$$\begin{aligned} & a \otimes rb = ar \otimes b, \\ & (a + a') \otimes b = a \otimes b + a' \otimes b \text{ y } a \otimes (b + b') = a \otimes b + a \otimes b', \\ & a \otimes 0 = 0 \otimes b = 0. \end{aligned}$$

Aún más, si H es una matriz en R, entonces, $a \otimes Hb = aH \otimes b$.

Observación A.11. Es importante notar que cada elemento de $M \otimes N$ es una suma finita $\sum_i a_i \otimes b_i$, donde $a_i \in M$ y $b_i \in N$. Además, si $\sum_i a_i \otimes b_i = 0$ en $M \otimes N$ entonces $\sum_i a_i \otimes b_i = 0$ en $M' \otimes N'$ para algunos submódulos finitamente generados, $M' \subseteq M$ y $N' \subseteq N$ (veáse [14, p. 436]).

Definición A.12. Sea $f_1 : M_1 \to M$, $f_2 : M_2 \to M$ morfismos de R-módulos. El diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & M_2 \arrow[d, "f_2"] \\ M_1 \arrow[r, "f_1"] & M \end{tikzcd}$$

es llamado **producto fibrado** (o *pullback*) para el par (f_1, f_2) si, para cada par de morfismos $g_1 : X \to M_1$, $g_2 : X \to M_2$ con $f_1 g_1 = f_2 g_2$, existe un único morfismo $g : X \to P$ con $p_1 g = g_1$ y $p_2 g = g_2$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, dashed, "g"] \arrow[drr, "g_2"] \arrow[ddr, "g_1"'] & & \\ & P \arrow[r, "p_2"'] \arrow[d, "p_1"] & M_2 \arrow[d, "f_2"] \\ & M_1 \arrow[r, "f_1"'] & M \end{tikzcd}$$

Para cada par de morfismo (f_1, f_2) existe un producto fibrado y es único salvo isomorfismos (veáse [33, p. 73]).

Definición A.13. El **grupo de caracteres A^+** de un grupo abeliano A es el grupo abeliano $Hom_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Recordemos que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un cogenerador inyectivo para la categoría de los grupos abelianos.

A los elementos de A^+ se les llama caracteres en A.

Por la inyectividad de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, existe un morfismo canónico del grupo de caracteres A^+ al grupo de caracteres B^+ de cualquier subgrupo B de A.

Observación A.14. Además, $(\bigoplus A_i)^+ \cong \prod A_i^+$, es decir, $Hom_{\mathbb{Z}}(\bigoplus A_i, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \prod Hom_{\mathbb{Z}}(A_i, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Se sigue que, grupos abelianos finitos son isomorfos a su grupo de caracteres y cada grupo abeliano infinito tiene un grupo de caracteres infinito.

Definición A.15. El **módulo de caracteres M^+** de un R-módulo izquierdo M es el R-módulo derecho del grupo de caracteres del grupo aditivo de M, y $r \in R$ actúa en $f \in Hom_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ por $(fr)(a) = f(ra)$.

Bibliografía

[1] W. A. Adkins y S. H. Weintraub, *Algebra: An Approach via Module Theory*, Springer-Verlag, 1992.

[2] F. W. Anderson y K. R. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag, 1992.

[3] G. Azumaya, *Locally Pure-proyective Modules*, Contemporary Math. (1992).

[4] G. Azumaya y A. Facchini, *Rings of Pure Global Dimension Zero and Mittag-Leffler Modules*, Journal of Pure and Applied Algebra (1989).

[5] W. Baur, *Elimination of Quantifiers*, Israel Journal of Mathematics (1976).

[6] P. M. Cohn, *On the Free Product of Associative Rings*, Mathematische Zeitschrift **71** (1959), no. 1.

[7] J. Dauns, *Modules and Rings*, Cambridge University Press, 1994.

[8] K. Devlin, *The Joy of Sets*, Springer-Verlag, 1993.

[9] Paul C. Eklof y Alan H. Mekler, *Almost Free Modules*, North-Holland, 1990.

[10] A. Facchini, *Mittag-Leffler Modules, Reduced Products, and Direct Products*, Rediconditi del Seminario Matematico della Università di Padova **85** (1991).

[11] L. Fuchs y L. Salce, *Modules over Non-Noetherian*, American Mathematical Society, 2000.

[12] K. R. Goodearl, *Distributing Tensor Product over Direct Product*, Pacific J. Math. **43** (1972).

[13] G. Grätzer, *General Lattice Theory*, Academic Press, 1978.

[14] A. Grillet, *Abstract Algebra*, Springer, 2007.

[15] D. Herbera y J. Trlifaj, *Almost Free Modules and Mittag-Leffler conditions*, 2009.

[16] Ivo Herzog, *Elementary Duality of Modules*, Transactions of the American Mathematical Society **340** (1993), no. 1.

[17] L. A. Hügel, D. Herbera, y J. Trlifaj, *Baer and Mittag-Leffler Modules over Tame Hereditary Modules*, Mathematische Zeitschrift (2009).

[18] C. U. Jensen y H. Lenzing, *Model Theoretic Algebra*, Gordon and Breach Science Publishers, 1989.

[19] I. Kaplansky, *Projective Modules*, Annals of Mathematics **68** (1958).

[20] T. G. Kucera y Ph. Rothmaler, *Pure-Projective Modules and Positive Constructibility*, The Journal of Symbolic Logic **65** (2000), no. 1.

[21] A. Laradji, *A short algebraic proof of a Theorem of Warfield*, Mathematika **40** (1993), no. 2.

[22] H. Lenzing, *Endlich präsentierbare Moduln*, Arch.Math. **20** (1969).

[23] P. Mendoza, J. A. Nido, y L. M. Villegas, *Weakly Compact Cardinals and κ-torsionless Modules*, Aceptado para su publicación en la Revista Colombiana de Matemáticas, 2009.

[24] L. Monk, *Elementary-Recursive Decision Procedures*, Ph.D. thesis, University of California, Berkeley, 1975.

[25] A. Pillay, *An Introduction to Stability Theory*, Oxford University Press, 1983.

[26] M. Prest, *Model Theory and Modules*, Cambridge University Press, 1988.

[27] H. Prüfer, *Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppen*, Mathematische Zeitschrift (1923).

[28] M. Raynaud y L. Gruson, *Critères de platitude et de projectivité*, Inventiones Mathematicae **13** (1971), no. 1.

[29] D. J. S. Robinson, *An Introduction to Abstract Algebra*, Walter de Gruyter, 2003.

[30] P. Rothmaler, *Introduction to Model Theory*, Gordon and Breach Science Publishers, 2000.

[31] Philipp Rothmaler, *Mittag-Leffler Modules and Positive Atomicity*, Habilitationsschrift, Kiel, 1994.

[32] G. Sabbagh, *Sous-modules Purs, Existentiellement Clos et Élémentaires*, C.R. Acad. Sci. Paris (1971).

[33] R. Wisbauer, *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach Science Publishers, 1991.

[34] M. Ziegler, *Model Theory of Modules*, Annals of Pure and Applied Logic, North-Holland, 1984.

Índice alfabético

CONSTANCIA DE PRESENTACION DE EXAMEN DE GRADO

La Universidad Autónoma Metropolitana extiende la presente CONSTANCIA DE PRESENTACION DE EXAMEN DE GRADO de MAESTRA EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS) de la alumna CECILIA HERNANDEZ DOMINGUEZ, matrícula 206381032, quien cumplió con los 141 créditos correspondientes a las unidades de enseñanza aprendizaje del plan de estudio. Con fecha doce de marzo del 2010 presentó la DEFENSA de su EXAMEN DE GRADO cuya denominación es:

MODELANDO A MITTAG-LEFFLER

Cabe mencionar que la aprobación tiene un valor de 60 créditos y el programa consta de 192 créditos.

El jurado del examen ha tenido a bien otorgarle la calificación de:

APROBAR

JURADO

Presidenta

DRA. MARIA JOSE ARROYO PANIAGUA

Secretario

DR. ROGELIO FERNANDEZ ALONSO GONZALEZ

Vocal

DR. JUAN ANTONIO NIDO VALENCIA

Vocal

DR. LUIS MIGUEL VILLEGAS SILVA

UNIDAD IZTAPALAPA
Coordinación de Sistemas Escolares
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina, México, DF, CP 09340 Apdo. Postal 555-320-9000
Tels. 5804-4880 y 5804-4883 Fax: 5804-4876