

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA  
DINÁMICA DE SISTEMAS LINEALES POR PARTES

TESIS DOCTORAL  
POR ISAÍ MORENO ROQUE

ÁREA DE CONCENTRACIÓN: MATEMÁTICAS  
ASESOR: DR. RODOLFO SUÁREZ CORTEZ

A mi madre y mis hermanas  
Al escritor Roberto Bolaño (in memoriam)

Agradecimientos:

Esta tesis no se habría terminado sin el apoyo incondicional del doctor Rodolfo Suárez Cortez, mi asesor, quien atendió mis inquietudes, acaso obsesiones, y me planteó problemas de verdadero interés. Su mente abierta, así como su sentido lúdico para abordar la investigación, me resultaron fundamentales.

Agradezco los invaluable comentarios de los doctores Ernesto Lacomba, Joaquín Delgado y José Álvarez (de la Universidad Autónoma Metropolitana). Los de la doctora Eva Navarro (del Instituto Mexicano del Petróleo), y la revisión generosa del doctor Mario Sznaier desde la Penn State University. Todos ellos enriquecieron el panorama de la tesis.

Mención especial merecen Baltazar Aguirre, Luis Aguirre, Oswaldo González y Armando Velázquez, quienes me hicieron precisiones valiosas para la redacción y exposición. Estoy también en deuda con las doctoras Shirley Bromberg y Verónica Medina.

Agradezco el desinterés del doctor Motomasa Komuro, de la Nishi-Tokyo University, al enviarme impresiones de sus artículos de investigación, detonantes de algunos de los principales resultados de la tesis. No dejo sin mencionar al doctor Guillermo Romero Meléndez, y sus enseñanzas en topología algebraica, útiles para mi investigación.

Alguien más a quien debo gratitud es el doctor Gerardo F. Torres del Castillo: sus clases llenas de inspiración me condujeron, sin que él se lo propusiera, a la Matemática.

Y ...nalmente al Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma Metropolitana (campus Iztapalapa), por todo lo dispensado, amén del CONACyT, responsable de mi manutención durante gran parte del doctorado.

## ÍNDICE GENERAL

Introducción	7
Capítulo 1 Los sistemas lineales por partes	11
1.1 Preliminares	11
1.1.1 Un enfoque desde la Topología Algebraica	12
1.2 Condiciones para la continuidad de sistemas lineales por partes	17
1.3 Funciones de partición	20
1.4 Soluciones y unicidad en los sistemas lineales por partes	22
1.5 Puntos de equilibrio	24
1.6 Casos de funciones de partición	25
1.6.1 Hipótesis adicionales	30
1.6.2 Definiciones adicionales	31
Capítulo 2 $\alpha$ -sistemas bidimensionales	34
2.1 Puntos de equilibrio	34
2.2 Estabilidad de trayectorias	36
2.3 Regiones de atracción del origen	37
Capítulo 3 $\forall$ -sistemas bidimensionales	46
3.1 Regiones de estabilidad asintótica del origen	48
Capítulo 4 Clasi...cación de bifurcaciones en el plano	63
Capítulo 5 El caso n-dimensional	68
5.1 Regiones de atracción	71
Capítulo 6 Órbitas y estabilidad de sistemas lineales por partes	79
6.1 Un método para encontrar existencia de órbitas periódicas	83
6.2 Ejemplo	86
6.3 El ejemplo anterior como contraejemplo	93
Capítulo 7 Órbitas para sistemas lineales por partes en general	95
7.1 Existencia de órbita periódica	95

7.1.1 Simplificando el problema de existencia de órbita periódica	103
7.2 La aplicación tangente	105
7.3 Bifurcaciones locales	108
7.3.1 Ejemplo	111
7.3.2 Un resultado más concerniente a órbitas periódicas	111
7.4 Un caso particular de aplicación	112
Conclusiones y perspectivas	116
Apéndice	119
A1 La función $p(u(x))$ del capítulo 3 (3.1.3)	119
A2 Precandidatos para $\rho$ del capítulo 6 (6.2)	122
A3 Las matrices $Dg(z_0)$ y $C$ del capítulo 6 (6.2)	122
A4 Estabilidad de la órbita periódica del Capítulo 6	123
A5 Cálculo de errores para el Capítulo 6	126
Referencias y bibliografía	134

## ÍNDICE DE FIGURAS

### Capítulo 1

- 1.1 Situaciones típicas... 16
- 1.2 Una función lineal por partes... 26
- 1.3 Otro caso típico... 27
- 1.4 Funciones originadas por composición... 28

### Capítulo 2

- 2.1 Conexión heteroclínica... 41
- 2.2 Órbita periódica estable... 42

### Capítulo 3

- 3.1 Diagrama de fase... 56
- 3.2 Diagrama de fase... 56
- 3.3 Diagrama de fase... 57
- 3.4 Órbita estable... 62
- 3.5 Órbita inestable... 62

### Capítulo 4

- 4.1 Comportamiento de funciones... 64
- 4.2 Comportamiento de funciones... 64
- 4.3 Comportamiento de funciones... 65

### Capítulo 6

- 6.1 Semiaplicación de retorno... 84
- 6.2 Simulación numérica de una órbita periódica... 87
- 6.3 Simulación numérica... 90
- 6.4 El flujo del sistema.... 91

### Capítulo 7

- 7.1 Órbita periódica... 97
- 7.2 Aplicación completa de Poincaré... 113

7.3 El eigenespacio E...	114
Apéndice	
A.1 Figura A.1...	120
A.2 Figura A.2...	120
A.3 Figura A.3...	121
A.4 La aplicación de Poincaré T...	123

# INTRODUCCIÓN

## UN POCO DE HISTORIA

Durante mucho tiempo ha existido gran interés en determinar expresiones explícitas para soluciones de ecuaciones diferenciales del tipo

$$\dot{x} = f(x):$$

Es en realidad escasa la colección de casos para la que esto es factible. Debemos a H. Poincaré los enfoques para obtener la mayor información posible del comportamiento de las soluciones, aun sin conocer éstas, gracias al estudio de sus aspectos geométricos y su carácter cualitativo cuando el tiempo tiende a uno de los extremos del intervalo máximo de definición. De este modo, la expresión analítica de las soluciones pierde interés frente a la descripción del retrato de fases global del sistema, la cual no es otra cosa que una descripción del comportamiento cualitativo de las soluciones referido. A pesar de ello, la obtención de resultados elegantes que permitan describir el retrato de fases global de una ecuación diferencial, es sólo posible en variedades de dimensión 1 o 2 (por ejemplo, el Teorema de Poincaré-Bendixon, que nos garantiza, bajo condiciones de compacidad, el comportamiento cualitativo de las trayectorias). Sin embargo, ni aun en el plano se posee un conocimiento completo del retrato de fases global de cualquier ecuación diferencial: existen preguntas importantes sobre el número de órbitas periódicas y su distribución que aún continúan abiertas, tal como ocurre en el caso de sistemas de ecuaciones diferenciales polinomiales en el plano, cuestión conocida como la segunda parte del Problema 16 de Hilbert [21], planteada desde hace más de un siglo.

En general, los sistemas de ecuaciones que se estudian se clasifican en lineales y no lineales.

El estudio de esta tesis se centrará en sistemas lineales por partes, los cuales localmente son lineales y a nivel global resultan ser no lineales.

Estos sistemas, aunque han sido objeto de interés en algunos trabajos, como el clásico de Chua-Komuro-Matsumoto: The double scroll family [11, 16], no se han estudiado exhaustivamente y mucho menos de manera rigurosa debido a su complejidad, ya que a pesar de que el

análisis por partes se simplifica gracias a la linealidad local, a nivel global se comportan de modo tal que en sus dinámicas pueden aparecer órbitas periódicas, algunas bifurcaciones, hasta la manifestación de caos.

Un antecedente al estudio de estos sistemas (referente a campos vectoriales lineales por partes) podríamos encontrarlo en el empleo de las funciones lineales por partes. Citaremos dos ejemplos al respecto:

1. La función de Weierstrass: una función continua no diferenciable en ningún punto que se encuentra de manera iterativa y que en el límite tiene la propiedad referida. En cada uno de los pasos de su construcción, los elementos de la serie resultante son funciones lineales por partes [45].

2. Las funciones de interpolación fractal lineales por partes: en este caso, mediante sistemas de funciones iterativas continuas, las cuales son lineales por partes, se obtienen en el límite conjuntos fractales [6].

Resulta natural extender la idea de una función lineal por partes a un campo vectorial lineal por partes. Llevado al contexto de las ecuaciones diferenciales, los sistemas lineales por partes son de gran interés por la riqueza dinámica que pueden presentar debido a su no linealidad a nivel global, y a que, como demostraremos, suelen ser no diferenciables en una determinada cantidad de puntos.

En 1961 Y. Ueda [51], en 1963 E. Lorenz [35] y posteriormente O. E. RöSSLer [41], estudiaron sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, con términos tales como  $x^2$ ,  $xy$ ,  $x^3y$ , etc., que involucraban atractores extraños. Fue el mismo RöSSLer [42], en 1981, quien estudió por primera vez un sistema no lineal cuya característica distintiva era que constituía un sistema lineal por partes. En la modelación matemática empezaron a surgir muy pronto otros sistemas de este tipo, provenientes de las ciencias exactas y la ingeniería.

Los pocos estudios que con rigor formal se han realizado son los de Suárez et al [4], [5], [48]; Llible et al [8], [33], [34]; Moreno [37], [38] y Komuro [10], [25], [26], [27], [28], [29]. Las investigaciones formales no han abundado como se desearía. Otro de los escasos enfoques que se han empleado para la exploración de los sistemas lineales por partes desde el punto de vista matemático ha surgido de la topología algebraica [7].

Algunos otros acercamientos se han conseguido utilizando métodos aproximados, por ejem-

pló el Método de Balance Armónico, mismo que, exitosamente, ha sido de utilidad para predecir la existencia de órbitas periódicas de primer armónico [1], [2]. La mayoría de las aproximaciones al estudio de estos sistemas han estado más centradas en la simulación numérica [11], [17], [16], [20], [53].

## ACERCA DE LOS APORTES DE ESTA TESIS

El objetivo primordial de esta tesis ha sido el de, por vez primera, apuntalar a una teoría de los sistemas lineales por partes en general, basada en los estudios referidos párrafos arriba para casos particulares.

En nuestra tesis empezaremos haciendo un análisis grosso modo de estos sistemas en general, en el que aportamos resultados en su mayoría originales, y que, desde nuestro punto de vista, eran fundamentales para formalizar lo ya estudiado. Entre éstos hemos encontrado condiciones de necesidad y suficiencia para que el campo descrito por un sistema lineal por partes en general sea continuo, y la manera de codificarlo mediante una función continua. También hemos hallado las condiciones para la existencia y unicidad de soluciones en tales sistemas, así como la caracterización de las mismas, algo que no se había hecho hasta la fecha. A esto dedicaremos el capítulo primero.

Posteriormente, en los dos capítulos siguientes, se trabajará en casos en que ciertas funciones inducen particiones especiales de los espacios de estados, centrándonos en el caso de dimensión dos, para explotar aspectos de la teoría existente para tal dimensión. A continuación (capítulo cuatro), se hará una recapitulación y clasificación de todos los tipos de bifurcaciones aparecidas en los capítulos referidos, basadas en el comportamiento de las funciones de partición que inducen tales sistemas.

En el capítulo cinco se volverá al tema de los capítulos dos y tres, extendiendo los resultados a dimensión  $n$ , a expensas de las herramientas útiles empleadas en tales capítulos, pero llegando lo más lejos posible en la generalización.

En el capítulo seis responderemos la cuestión: "Que en cada subsistema de su partición, un sistema lineal por partes sea estable, ¿implicará que es globalmente asintóticamente estable?". Mostraremos, por otra parte, la dificultad para probar con rigor la existencia de órbitas periódicas para sistemas lineales por partes de dimensión tres o superior (misma que no se encuentra

en sistemas bidimensionales): para ello demostraremos la existencia de una de ellas en un caso particular, hecho que nos llevará a una conclusión general (a manera de contraejemplo) para responder la pregunta al inicio de este párrafo.

Finalmente, en el último capítulo, nos enfocaremos a uno de los problemas que motivaron de manera especial la investigación de esta tesis: el de la órbita periódica. Ahí haremos nuestro estudio en el caso más general posible, con el mínimo de restricciones sobre las funciones que inducen particiones en dimensión  $n$  (sólo requeriremos continuidad). Presentaremos algunas condiciones necesarias o suficientes de existencia, así como un análisis de los tipos de bifurcación que pueden presentar tales órbitas. En tal capítulo haremos algunas precisiones y correcciones a resultados publicados por Gonçalves y Megretski [12], [14].

# Chapter 1

## Los sistemas lineales por partes

### 1.1 Preliminares

Los sistemas no lineales del tipo

$$x^0 = f(x) \tag{1.1}$$

con  $x$  en un espacio euclidiano  $n$  dimensional  $E^n$  y  $f(x) : E^n \rightarrow E^n$  han sido objeto de amplio estudio. Sin embargo, analizar tales sistemas representa por lo regular dificultad pues sus dinámicas son complicadas debido a la no linealidad de  $f(x)$ , la cual a menudo implica la presencia de órbitas periódicas o atractores extraños, entre otros comportamientos interesantes.

Como ya se mencionó, cierto tipo de sistemas no lineales tienen la propiedad de ser lineales por partes y en ellos situaremos nuestro interés.

En general, un sistema lineal por partes es uno no lineal del tipo (1.1): en el que la aplicación  $f(x)$  (dada por partes) induce una partición en el sistema del tipo:

$$x^0 = f(x) = \begin{cases} A_1x + b_1; & x \in F_1 \\ A_2x + b_2; & x \in F_2 \\ \vdots \\ A_nx + b_n; & x \in F_n \end{cases} \tag{1.2}$$

en donde  $A_i \in M_{n \times n}(E^n)$ , y  $b_i \in E^n$  con  $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ . La clase  $F$  dada por:

$$F = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$$

con los conjuntos  $F_i \subseteq E^n$  determina una partición del espacio de estados,  $E^n$ , es decir:

$$\bigcup_{i=1}^n F_i = E^n \quad \text{y} \quad \bigcap_{i=1}^n F_i = \emptyset$$

Nótese que para la partición de  $E^n$  determinada por los conjuntos  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , la relación

$$xRy \text{ si y sólo si } x, y \in F_i$$

para algún  $i \in I$  es de equivalencia y sus elementos forman la clase de equivalencia  $E^n/R$ .

Para ser más específicos, debemos, antes que nada, denotar la naturaleza de las entidades que dan la partición. Éstas serán hiperplanos de dimensión  $n - 1$  de la forma:

$$F_i = \{x \in E^n \mid c_i^T x + d_i = 0\}; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.3)$$

donde  $c_i^T x$  denota el producto interno usual  $c_i^T x$ , con  $c_i$  elementos de  $E^n$  y  $d_i$  números reales.

### 1.1.1 Un enfoque desde la topología algebraica

Si los hiperplanos se intersectan (no necesariamente deben hacerlo) pueden formar eventualmente regiones poliédricas. En caso contrario, es posible probar [7] que existen regiones simpliciales (formadas por símlices) por las cuales pasan las trayectorias del sistema lineal, formando un complejo simplicial finito o infinito.

Dados  $p + 1$  puntos  $a_0, a_1, \dots, a_p$  arbitrarios en  $E^n$ , se define como un símlice de dimensión  $p$  o  $p$ -símlice al menor subconjunto convexo que los contiene. Los puntos referidos se llaman vértices del símlice al que denotaremos por  $S_p$ . Un punto  $x$  pertenecerá al  $p$ -símlice que contiene a  $a_0, a_1, \dots, a_p$  si, y sólo si, se puede expresar como una combinación lineal, es decir:  $x = \lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p$ , donde los  $\lambda_i$  son números reales no negativos y se cumple:  $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_p = 1$ .

Un complejo simplicial  $K$  en  $E^n$  es una colección finita de símlices en  $E^n$  en la que, para cada símlice, tal colección contiene a todas sus caras. Si en el complejo simplicial  $K$  dos símlices se cortan lo hacen según una cara común. La unión de los símlices de un complejo simplicial  $K$ , al ser subespacio de un espacio euclídeo, puede ser transformada en un espacio topológico dotándolo de una topología inducida. Un complejo  $K$ , considerado de este modo como un espacio topológico, se llama poliedro, y se designa por  $|K|$ .

**Definición.** Una triangulación de un espacio topológico  $X$  consta de un complejo simplicial  $K$  y de un homeomorfismo  $h : |K| \rightarrow X$ .

Ahora pasaremos a describir los grupos de homología  $H_p(K)$  asociados a un poliedro  $|K|$  de  $K$ . Llamaremos  $p$ -cadena o cadena  $p$ -dimensional al grupo abeliano libre  $C_p(K)$  generado por los  $p$ -símlices de  $K$ . Definamos un homomorfismo frontera  $\partial_p : C_p \rightarrow C_{p-1}$  en cada símlice orientado (es decir, con una elección específica de orientación)  $S_p = (a_0; a_1; \dots; a_p)$  por

$$\partial_p S_p = \sum_{i=1}^p (-1)^i (a_0; \dots; \hat{a}_i; \dots; a_p)$$

el cual se puede extender por linealidad a  $C_p$ . Tal homomorfismo cumple que  $\partial_{p-1} \partial_p = 0$  para todo  $p$ . Si  $Z_p(K)$  denota el kernel del homomorfismo frontera  $\partial_p$  y  $B_p(K)$  es la imagen del homomorfismo  $\partial_{p+1}$ , el  $p$ -ésimo grupo de homología de  $K$  será definido entonces por

$$H_p(K) = Z_p / B_p.$$

El anterior es un grupo abeliano finitamente generado y constituye un invariante de homotopía [22], [44].

Para un sistema lineal por partes es posible determinar una triangulación, y, dada una condición inicial, conocer por cuáles símlices irá pasando la trayectoria y, en consecuencia, encontrar grupos de homología asociados a los complejos simpliciales generados. Tales grupos  $H_p(K)$  ayudan a determinar la naturaleza dinámica de un sistema.

Dada una triangulación adecuada, supongamos que para cada subsistema  $x^0 = A_i x + b_i$  del sistema (1.2) las trayectorias son transversales respecto de las fronteras  $(n_i - 1)$ -dimensionales de todos los símlices próximos. Dado un subsistema  $x^0 = Ax + b$  y un símlice  $S$  en  $E^n$  con

vértices  $a_0; a_1; \dots; a_n$ , un punto  $x \in S$  puede ser escrito de manera única como  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$ , donde las coordenadas simpliciales (o baricéntricas)  $\alpha_i$  cumplen  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$  y  $\alpha_i \geq 0$ .

Por lo anterior un subsistema,  $\dot{x} = A_k x + b_k$  en relación al símplex  $S_k$ , puede ser escrito como

$$\dot{z}_k = \alpha_k z_k + \beta_k$$

donde  $z_k$  y  $\beta_k$  son vectores cuyas coordenadas son simpliciales, es decir,  $z_k = (\alpha_{k1}; \dots; \alpha_{kp})$  y  $\beta_k = (\beta_{k1}; \dots; \beta_{kp})$ .

Se puede encontrar una matriz  $N$  (compleja) invertible tal que la solución del subsistema anterior puede escribirse como

$$z_k(t) = N_k^{-1} \exp(\alpha_k t) N_k z_{k0} + \int_0^t N_k^{-1} \exp(\alpha_k(t-s)) N_k \beta_k ds$$

donde  $\alpha_k$  es la matriz en forma de Jordan de  $\alpha_k$ . Así

$$z_k(t) = N_k^{-1} \exp(\alpha_k t) N_k z_{k0} + N_k^{-1} \alpha_k (I - \exp(\alpha_k t)) N_k \beta_k$$

Es posible escribir la  $i$ -ésima componente de  $z_k(t)$  en la forma:  $(z_k(t))_i = \sum_{j=1}^p \alpha_{ij}^k \exp(\lambda_j t) + \beta_i^{-k}$ , donde  $\lambda_j$  es el conjunto de eigenvalores de  $\alpha_k$ ,  $\alpha_{ij}^k$  depende de  $\lambda_j$  y  $z_{k0}$  y  $\beta_i^{-k}$  depende de  $\lambda_j$  y  $\beta_k$ .

Para determinar la sucesión  $S_{i_1}; S_{i_2}; \dots$  de símplexes por los que una trayectoria dada pasará supongamos que ésta ha pasado por los símplexes  $S_{i_1}; S_{i_2}; \dots; S_{i_k}$  y se encuentra en la frontera de  $S_{i_k}$  en el punto  $x_{i_k}$ . Entonces contamos con el siguiente teorema:

**Teorema.** Dada una triangulación de un espacio de estados para un sistema lineal por partes, la trayectoria del sistema entrará al símplex  $S_k$  si se satisface:

$$\sum_{j=1}^p \alpha_{ij}^k (z_{k0})_{\lambda_j} > 0.$$

La expresión del último teorema nos permite determinar la sucesión de símplexes  $S_{i_1}; S_{i_2}; \dots$

por los que pasa una trayectoria dada. Renumerando éstos podemos suponer que la trayectoria pasa por los simplices  $S_1; S_2; \dots$ . Sea  $K_k$  el complejo simplicial generado por los simplices  $S_1; S_2; \dots; S_k$ , estamos interesados en la información topológica de  $K_k$  que nos proporcionarán los grupos de homología  $H_p(K_k)$ . Éstos son solamente, como hemos mencionado, invariantes de homotopía, pero pueden ayudarnos a determinar el número de huecos, en una estructura global y así distinguir entre ciclos límite, fenómenos de doblamiento de órbita y posiblemente la presencia de atractores extraños. Podemos hacer una evaluación recursiva de los grupos de homología  $H_p(K_k)$ . Una descomposición sucesivamente fina de  $E^n$  nos puede ser de mucha más ayuda al buscar una aproximación a la topología de las trayectorias que una integración numérica.

El método que Banks-Khathur proponen [7] es el de la determinación de una sucesión de Mayer-Vietoris para el complejo  $K_k$  y para el  $K_{k+1}$  para obtener el cambio desde el punto de vista topológico de  $K_k$  a  $K_{k+1}$ . El empleo de una sucesión de Mayer-Vietoris simplifica el cálculo recursivo de los grupos de homología. Para nuestro caso, puesto que para el simplejo  $S_{k+1}$

$$\begin{aligned} H_q(S_{k+1}) &= 0; \quad q > 0 \\ H_0(S_{k+1}) &= \mathbb{Z}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

la sucesión de Mayer-Vietoris puede reducirse a una sucesión exacta.

Existen dos casos típicos para  $K_{k+1}$  del modo siguiente (ver Figura 1.1):

- (a) Cuando es tal que  $K_k \cap S_{k+1}$  es el complejo de un simplejo  $(n-1)$ -dimensional, y
- (b) Cuando  $K_k \cap S_{k+1}$  es la unión del complejo de un simplejo  $(n-1)$ -dimensional y su vértice opuesto, o bien, la intersección  $K_k \cap S_{k+1}$  no es única, sino dos simplejos  $(n-1)$ -dimensionales.

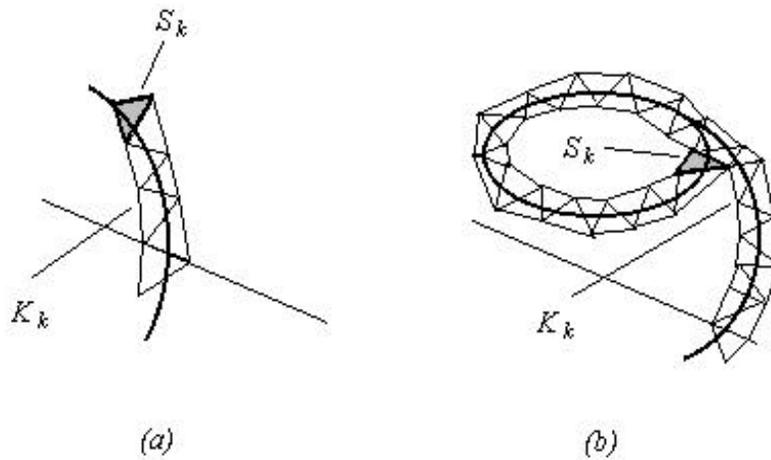


Figura 1.1 Situaciones típicas para  $K_{k+1}$ .

En el caso (a), puesto que  $S_{k+1}$  es contraíble, el grupo de homología de  $K_{k+1}$  es el mismo que el de  $K_k$ . Lo anterior se debe al hecho de que los grupos de homología son invariantes de homotopía, y por las relaciones (1.4).

Para el caso (b), de (1.4) tenemos

$$0 \xrightarrow{i^j} H_j(K_k) \xrightarrow{j^j} H_j(K_{k+1}) \xrightarrow{\alpha^j} 0$$

para  $j > 1$  y por lo tanto

$$H_j(K_k) \cong H_j(K_{k+1}) \text{ para } j > 1$$

Consideremos el caso  $j = 1$ . Entonces tenemos la sucesión exacta

$$0 \xrightarrow{i^1} H_1(K_k) \xrightarrow{j^1} H_1(K_{k+1}) \xrightarrow{\alpha^1} H_0(K_k \setminus S_{k+1}) \xrightarrow{i^1} H_0(K_k) \otimes \mathbb{Z} \xrightarrow{j^1} H_0(K_{k+1})$$

para homomorfismos inducidos  $\alpha_\alpha; i_\alpha$  y  $j_\alpha$  referentes a los grupos de homología generados por los complejos simpliciales que se forman de manera recursiva.

Sin embargo, puesto que el complejo  $K_k$  ( $k \geq 1$ ) es conexo (siendo derivado de una trayectoria conexa), tenemos

$$H_0(K_k) = H_0(K_{k+1}) = \mathbb{Z}$$

y la última sucesión se reduce a la siguiente

$$0 \rightarrow H_1(K_k) \rightarrow H_1(K_{k+1}) \rightarrow \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Al reducir la sucesión tenemos

$$H_1(K_{k+1}) \cong H_1(K_k) \otimes \mathbb{Z}$$

Ideas similares se pueden aplicar a casos más generales.

Por otra parte, se puede probar que, bajo ciertas condiciones, a un sistema no lineal (1.1) se le puede asociar un sistema lineal por partes tan cercano a él como se desee [7], de aquí la importancia y el interés de estudiar estos sistemas.

## 1.2 Condiciones para la continuidad de sistemas lineales por partes

Nos interesa establecer condiciones necesarias y suficientes para que, dada una partición, el campo vectorial de los sistemas que nos ocupan sea continuo en las fronteras determinadas por los hiperplanos  $\pi_i$ . La continuidad es importante para nosotros. Más adelante, al final de esta tesis, la requeriremos igualmente al concentrarnos en el tema de existencia de órbitas periódicas para estos sistemas en general.

Supongamos que tenemos dos sistemas lineales próximos entre sí (en regiones conexas) cuya frontera común es el hiperplano  $\pi_k$ . Sean  $A_k x + b_k$  y  $A_{k+1} x + b_{k+1}$  tales sistemas. Al ser continuos en la frontera se habrá de satisfacer  $A_k x + b_k = A_{k+1} x + b_{k+1}$ , de donde tendremos el sistema lineal:

$$(A_k - A_{k+1})x = b_{k+1} - b_k. \tag{1.5}$$

Ya que  $x \in \pi_k$ , y puesto que deseamos que la continuidad no sea exclusivamente en un sólo

elemento, tenemos la siguiente proposición.

**Proposición 1.1.** Para que el campo vectorial, en la región  $i_k$ , que delimita los sistemas lineales  $A_k x + b_k$  y  $A_{k+1} x + b_{k+1}$  sea continuo en tal frontera con  $A_k \notin A_{k+1}$ , se debe cumplir lo siguiente:

$$\det(A_k \text{ ; } A_{k+1}) = 0. \quad (1.6)$$

Obsérvese que el caso  $A_k = A_{k+1}$  es el más trivial posible e implica necesariamente  $b_k = b_{k+1}$ .

El siguiente teorema es mucho más específico, pues, dada la matriz  $A_k$  que determina el flujo  $A_k x + b_k$ , nos dice cómo debe ser la matriz  $A_{k+1}$  que determina el flujo  $A_{k+1} x + b_{k+1}$  para que haya continuidad.

**Teorema 1.2.** El campo vectorial en una frontera  $i_k$  (ver (1.3)) entre los sistemas lineales  $A_k x + b_k$  y  $A_{k+1} x + b_{k+1}$  es continuo ahí si y sólo si:

$$A_{k+1} = A_k + \frac{1}{d_k} (b_{k+1} \text{ ; } b_k) c_k^T$$

con  $d_k \notin 0$ .

**Demostración.**

Sea  $y_1 \in i_k$ . Entonces es cierto que,  $hc_k; y_1 i + d_k = 0$  y se cumple la igualdad  $(A_k \text{ ; } A_{k+1}) y_1 = b_{k+1} \text{ ; } b_k$ . Escojamos elementos  $y_2, y_3, \dots, y_n$  en  $E^n$ , linealmente independientes, de modo que  $hc_k; y_i i = 0$ , con  $i = 2, 3, \dots$ . Definamos una matriz  $Y \in GL(E^n)$  dada por  $Y = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n]$ . Puesto que  $y_1 + y_i \in i_k$  entonces  $A_k(y_1 + y_i) + b_k = A_{k+1}(y_1 + y_i) + b_{k+1}$  y por (1.5) tenemos:

$$(A_k \text{ ; } A_{k+1}) y_i = (A_{k+1} \text{ ; } A_k) y_1 + b_{k+1} \text{ ; } b_k = 0.$$

Ahora, notemos que:  $c_k^T Y = c_k^T [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n] = (d_k; 0; 0; \dots; 0) = d_k(1; 0; 0; \dots; 0)$ .

Además:

$$\begin{aligned} (A_k \text{ ; } A_{k+1}) Y &= (A_k \text{ ; } A_{k+1}) [y_1 y_2 \dots y_n] \\ &= (b_{k+1} \text{ ; } b_k; 0; 0; \dots; 0) \\ &= (b_{k+1} \text{ ; } b_k)(1; 0; 0; \dots; 0) \\ &= \frac{1}{d_k} (b_k \text{ ; } b_{k+1}) c_k^T Y; \end{aligned}$$

Multiplicando por  $Y^{-1}$  a la derecha de ambos miembros de la igualdad tenemos lo que

deseábamos demostrar.

Por otra parte, supongamos cierta la igualdad  $A_{k+1} = A_k + \frac{1}{d_k}(b_{k+1} \text{ } b_k)c_k^T$ . Para  $x \in \mathbb{R}^k$  se tiene:

$$(A_{k+1} \text{ } A_k)x = \frac{1}{d_k}(b_{k+1} \text{ } b_k)c_k^T x$$

y ya que  $c_k^T x = d_k$ , entonces  $(A_{k+1} \text{ } A_k)x = (b_{k+1} \text{ } b_k)$  y por lo tanto  $(A_k \text{ } A_{k+1})x = (b_{k+1} \text{ } b_k)$ , lo cual implica continuidad en  $\mathbb{R}^k$ .

Q. E. D.

Tomando los resultados del teorema anterior y la proposición precedente, verificamos un hecho que debe satisfacer la matriz  $\frac{1}{d_k}(b_{k+1} \text{ } b_k)c_k^T$ , a saber:  $\det[\frac{1}{d_k}(b_{k+1} \text{ } b_k)c_k^T] = 0$ , con  $d_k \neq 0$ .

Más aún, para regiones cuyas fronteras son  $i_1, i_2, \dots, i_k$ , por el teorema anterior, la  $k$ -ésima matriz  $A_k$  en términos de la matriz  $A_1$  está dada por:

$$A_k = A_1 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{d_i}(b_{i+1} \text{ } b_i)c_i^T \quad (1.7)$$

donde, de acuerdo a la geometría del sistema lineal por partes, algunas  $c_i$  y  $d_i$  podrían repetirse.

### 1.2.1 Un contraejemplo

En algunas aplicaciones suelen emplearse sistemas lineales por partes, aun cuando no se dé énfasis en la expresión de éstos mediante una función. Ciertos textos [13]<sup>1</sup> citan un ejemplo en que se toma un sistema lineal por partes de...nido como sigue:

$$x^0 = \begin{cases} A_2 x, & x \in I \\ A_1 x, & x \in II \end{cases} \quad \begin{matrix} A_2 x, & x \in III \\ A_1 x, & x \in IV \end{matrix}$$

con  $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , y donde I; II; III; IV denotan los cuadrantes de  $\mathbb{R}^2$ .

En el sistema anterior cada una de las matrices es estable. Por otra parte se afirma que

<sup>1</sup>[http://www.cds.clatech.edu/%7Ejmg/publi/PhD\\_thesis.pdf](http://www.cds.clatech.edu/%7Ejmg/publi/PhD_thesis.pdf)

el sistema en general es no estable. El problema de considerar un sistema como ese es que no es continuo en la fronteras, que, en su caso, son los ejes cartesianos. Las trayectorias no pueden pasar de manera continua de un cuadrante a otro, lo que se verifica observando que  $\det(A_1 \text{ } A_2) = \text{ } 81 \notin 0$ . Por lo tanto la continuidad se da sólo en un punto: el origen. Sería imposible expresar tal sistema mediante una función continua.

En el apartado que sigue hablaremos, precisamente, de funciones continuas que denotan a sistemas lineales por partes continuos.

### 1.3 Funciones de partición

Dado un sistema lineal por partes cuyo campo vectorial es continuo, y establecida la partición en éste, podríamos preguntarnos si existe cierta función bien definida, continua, que pueda ser escrita como una sola expresión, que dé pie a tal partición. Al inicio de este capítulo hemos mostrado que la relación  $x \sim y$  si y sólo si  $x, y \in F_i$  para algún  $i \in I$  es de equivalencia y sus elementos forman la clase de equivalencia  $E^n = R$ . Dicho de otro modo, ¿existirá una función que codifique un sistema por partes continuo de la forma (1.2)? La pregunta es pertinente, además, porque conocemos las condiciones que deben satisfacerse para que dos campos vecinos, con una frontera en común, sean continuos. Por otro lado, contar con una función de tal tipo nos facilitaría la tarea de demostrar la unicidad de soluciones para (1.2). Primero contestaremos en parte esta cuestión, remitiéndonos al caso de dos sistemas vecinos separados por una frontera  $\Gamma_k$ . La respuesta queda asentada en el siguiente lema, uno de nuestros primeros resultados de interés:

**Lema 1.3.** El campo vectorial continuo en una frontera  $\Gamma_k$  entre los sistemas lineales  $A_k x + b_k$  y  $A_{k+1} x + b_{k+1}$  se puede representar en la forma

$$f_{\Gamma_k}(x) = A_k x + b_k + \frac{1}{2d_k}(b_{k+1} - b_k) f_j h_{c_k; x_i + d_{kj}} + h_{c_k; x_i + d_{kj}} g \quad (1.8)$$

**Demostración.** Basta considerar que en las dos regiones conexas determinadas por  $\Gamma_k$  tenemos las expresiones  $A_k x + b_k$  y  $A_{k+1} x + b_{k+1}$  y que, por uno de los teoremas anteriores,  $A_{k+1} = A_k + \frac{1}{d_k}(b_{k+1} - b_k) c_k^T$ .

Q. E. D.

Así, si hacemos  $u_k(x) = h_{c_k}; x_i$ , la función  $\otimes$  que nos auxilia para expresar la fórmula anterior es tal que  $\otimes_k(u_k) : E \rightarrow E$ , definida por

$$\otimes_k(u_k) = \frac{1}{2d_k} f_j u_k + d_{kj} + u_k + d_k g$$

Las funciones de partición, también podrían escribirse como condicionadas. Estas funciones son lineales por partes, pero globalmente no lineales. Además, son continuas, hecho que se demuestra sin gran problema a la manera de la Proposición (1.1) y del Teorema (1.2).

Ahora bien, debido a (1.7) esto se puede extender para el campo vectorial por partes  $f(x)$  (1.2), el cual, en las fronteras  $i_k$ , toma la forma  $f_{i_k}(x) = A_k x + b_k$

+  $\frac{1}{2d_k} (b_{k+1} - b_k) f_j h_{c_k}; x_i + d_{kj} + h_{c_k}; x_i + d_k g$ , para todo  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  de la siguiente manera:

$$f(x) = A_1 x + b_1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{d_k} (b_{k+1} - b_k) f_j h_{c_k}; x_i + d_{kj} + h_{c_k}; x_i + d_k g$$

Ésta es la aplicación que da pie a la partición de la que hemos hablado, ahora definida no sobre  $E$  sino sobre  $E^n$ . Debido a la linealidad en el término  $A_1 x + b_1$ , podemos considerar que la función  $f : E^n \rightarrow E^n$  a la que se debe la partición es:

$$\otimes(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{d_k} (b_{k+1} - b_k) f_j h_{c_k}; x_i + d_{kj} + h_{c_k}; x_i + d_k g \quad (1.9)$$

la cual es lineal por partes. Finalmente, resumiendo lo anterior, tenemos el teorema que sigue:

**Teorema 1.4.** El campo  $f(x)$  dado por (1.2) y lineal por partes es continuo si y sólo si está descrito como:

$$f(x) = f_{i_1} + \otimes(x) \quad (1.10)$$

**Demostración.** Inmediata, basándose en el resultado anterior y en que la suma de aplicaciones continuas (con rango en un espacio euclídeo como lo es  $E^n$ ) es continua.

Q. E. D.

Que tales funciones sean continuas no implica que sean diferenciables en todos los puntos de su dominio. De hecho no lo son en  $u_k + d_k = 0$ . Para demostrarlo prescindiremos de los subíndices para simplificar la notación y, sin pérdida de generalidad, lo probaremos para el caso

escalar. Veamos:

Lema 1.5. La función de variable real  $\phi(u) = \frac{1}{2d} fju + dj + u + dg$  es no diferenciable en  $u + d = 0$ .

Demostración. Por la Proposición (1.1) y Teorema (1.2) la función  $\phi(u)$  es continua en  $u + d = 0$ :

Para terminar la demostración basta ver que:  $\phi'_-(u) = 0$  y  $\phi'_+(u) = \frac{1}{d}$  (para  $d \neq 0$ ), de donde concluimos la no diferenciability.

Q. E. D.

Lo anterior implica directamente la veracidad del siguiente resultado:

Teorema 1.6. El campo continuo  $f_{ij}(x) + \phi(x)$  es no diferenciable en la frontera  $i_k$ .

## 1.4 Soluciones y unicidad en los sistemas lineales por partes

Ahora probaremos la unicidad de soluciones para los sistemas lineales por partes continuos. Posteriormente describiremos la forma explícita de las soluciones.

Para la existencia y unicidad de soluciones demostraremos que para el campo referido  $f(x)$  existe un número  $L > 0$  de modo que se satisface la condición de Lipschitz:

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|$$

donde  $\| \cdot \|$  es la norma euclidiana en  $E^n$  y el número  $L$  es la constante de Lipschitz.

Primero mostraremos que en  $f(x) = A_1x + b_1 + \sum_{k=1}^p \frac{1}{2d_k} (b_{k+1} - b_k) f_j h_{c_k; x_i} + d_{kj} + h_{c_k; x_i} + d_{kj}g$  los términos  $\frac{1}{d_k} f_j h_{c_k; x_i} + d_{kj} + h_{c_k; x_i} + d_{kj}g$  son Lipschitz. Con el fin de simplificar la notación, para cada  $k$  denotemos al producto interno  $h_{c_k; x_i}$  por  $\phi_k$  y a  $\frac{1}{2d_k} f_j h_{c_k; x_i} + d_{kj} + h_{c_k; x_i} + d_{kj}g$  por  $\psi_k(x) = \psi_k$  (de modo que tendremos  $f(x) = A_1x + b_1 + \sum_{k=1}^p (b_{k+1} - b_k) \psi_k$ ). Ya que  $\psi_k$  son escalares, emplearemos, en lugar de la norma, el valor absoluto.

Lema 1.7. Las funciones  $\psi_k : E \rightarrow E$  satisfacen la condición de Lipschitz.

Demostración. Sean  $\psi_k(x_1) = \psi_k(x_1)$  y  $\psi_k(x_2) = \psi_k(x_2)$ .

Caso 1) Si  $x_1, x_2 \in F_k$  (i. e.  $h_{c_k; x_1i} + d_{ki} > 0$  y  $h_{c_k; x_2i} + d_{ki} > 0$ ):

$$\begin{aligned} |\psi_k(x_1) - \psi_k(x_2)| &= \left| \frac{1}{2d_k} (h_{c_k; x_1i} + d_{ki} + h_{c_k; x_1i} + d_{ki} - h_{c_k; x_2i} - d_{ki} - h_{c_k; x_2i} - d_{ki}) \right| \\ &= \frac{1}{d_k} (h_{c_k; x_1i} - h_{c_k; x_2i}) = \frac{1}{d_k} |h_{c_k; x_1i} - h_{c_k; x_2i}| = \frac{1}{d_k} |\psi_k(x_1) - \psi_k(x_2)| \end{aligned}$$

Aquí tenemos  $L = \frac{1}{d_k}$ ,  $d_k \notin 0$ .

Caso 2) Si  $x_1 \in F_k$  y  $x_2 \in F_{k+1}$  (i. e.  $h_{C_k}; x_1 i + d_k > 0$  y  $h_{C_k}; x_2 i + d_k < 0$ ):

$$\begin{aligned} j' \left( \frac{3}{4} k_1 \right) i - \left( \frac{3}{4} k_2 \right) j &= \frac{1}{2d_k} (h_{C_k}; x_1 i + d_k + h_{C_k}; x_1 i + d_k + h_{C_k}; x_2 i + d_k - h_{C_k}; x_2 i - d_k) = \\ &= \frac{1}{d_k} (h_{C_k}; x_1 i + d_k) \cdot \frac{1}{d_k} j h_{C_k}; x_1 i + d_k j \cdot \frac{1}{d_k} j h_{C_k}; x_1 i + d_k j^2 \\ &\cdot \frac{1}{d_k} j h_{C_k}; x_1 i + h_{C_k}; x_2 i j = \frac{1}{d_k} j \frac{3}{4} k_1 i - \frac{3}{4} k_2 j. \end{aligned}$$

Similarmente  $L = \frac{1}{d_k}$ ,  $d_k \notin 0$ .

Q. E. D.

Con este lema en nuestro haber, es momento de pasar a la demostración de lo que deseamos: que la aplicación  $f(x)$  satisface la condición de Lipschitz.

Teorema 1.8. La aplicación  $f(x)$  dada por  $f_{i+1} = \Phi(x)$  es Lipschitz.

Demostración.

$$\begin{aligned} \|f(x_1) - f(x_2)\| &= \|kA_1(x_1 - x_2) + \sum_{k=1}^p (h_{C_k}(x_1) - h_{C_k}(x_2))(b_{k+1} - b_k)\| \\ &= \|kA_1(x_1 - x_2) + \sum_{k=1}^p (h_{C_k}(x_1) - h_{C_k}(x_2))(b_{k+1} - b_k)\| \\ &\leq \|kA_1(x_1 - x_2)\| + \sum_{k=1}^p \|h_{C_k}(x_1) - h_{C_k}(x_2)\| \|b_{k+1} - b_k\| \\ &\leq \|kA_1\| \|x_1 - x_2\| + \sum_{k=1}^p \|h_{C_k}(x_1) - h_{C_k}(x_2)\| \|b_{k+1} - b_k\| \end{aligned}$$

y, por consiguiente, aplicando el lema anterior al segundo sumando y simplificando se tendrá:

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \|kA_1\| \|x_1 - x_2\| + \sum_{k=1}^p \frac{1}{d_k} \|h_{C_k}; b_{k+1} - b_k\| \|x_1 - x_2\|$$

donde, para  $d_k \notin 0$ , tendremos como constante de Lipschitz a

$$L = \|kA_1\| + \sum_{k=1}^p \frac{1}{d_k} \|h_{C_k}; b_{k+1} - b_k\|$$

Q. E. D.

Esto, por lo tanto, nos garantiza la unicidad de las soluciones para los sistemas lineales por partes, dada una condición inicial  $x_0$ .

<sup>2</sup>Debido a que  $d_k < j < c_k; x_2 >$

La forma explícita de la solución para el sistema  $\dot{x} = f(x)$  que denota a (1.2) queda establecida por el siguiente teorema:

**Teorema 1.9.** Si  $x(t)$  es una solución del sistema lineal por partes  $\dot{x} = f_{i-1} + \delta(x)$  entonces, para una condición inicial  $x_0$ :

$$x(t) = e^{A_1 t} x_0 + \int_0^t e^{A_1(t-s)} b_1 ds + \sum_{k=1}^n \int_0^t e^{A_1(t-s)} \frac{1}{d_k} (b_{k+1} - b_k) f_j h_{c_k}(x(s)) + d_k j + h_{c_k}(x(s)) + d_k g ds$$

**Demostración.** Es inmediata por derivación. O dedúzcase mediante el método de variación de parámetros.

Q. E. D.

La expresión descrita por la solución del teorema anterior es derivable.

Como una observación importante, debemos aclarar que todo lo abordado hasta aquí se satisfará si las trayectorias son transversales a las fronteras  $\Gamma_i$  sin pasar por los vértices o aristas (la intersección de fronteras).

En el caso en que así ocurra, las condiciones de continuidad en los puntos de intersección  $q_i$ , que determinarán sistemas encontrados en tales vértices serán como sigue. Dado un vértice  $q_i$  en la partición, y si, digamos, opuestos por éste se encuentran los subsistemas lineales  $\dot{x} = A_m x + b_m$  y  $\dot{x} = A_n x + b_n$ , la continuidad del campo en el punto  $q_i$  se dará si:

$$\det(A_n - A_m) \neq 0.$$

## 1.5 Puntos de equilibrio

En cada región en la que el sistema es lineal, de la forma  $\dot{x} = A_i x + b_i$  podemos abordar el tema de la existencia de puntos de equilibrio  $e_i$ . En nuestro caso, como hemos mencionado, estamos considerando sistemas hiperbólicos, es decir, aquellos cuya parte linealizada (dada por su matriz jacobiana  $D$ ) en  $e_i$  no tiene eigenvalores con parte real igual a cero, lo que implica:  $\det D \neq 0$ . En cada parte, por lo tanto, las  $A_i$  son invertibles, entonces, dado que  $\dot{x} = 0$  implica

que puede haber puntos de equilibrio, entonces, los posibles candidatos en un sistema lineal por partes son:

$$e_i = -A_i^{-1}b_i.$$

Sin embargo, para que el candidato  $e_i$  sea efectivamente un punto de equilibrio requerimos que se encuentre en la región en que están definidos  $A_i$  y  $b_i$ . Esto nos da la siguiente propiedad.

**Propiedad 1.10.** Supongamos que, dado en un sistema lineal por partes, para el subsistema  $\dot{x} = A_i x + b_i$  se cumple  $\det A_i \neq 0$ . El punto  $e_i$  será un punto de equilibrio si y sólo si  $e_i \in F_i$ .

Determinar lo anterior implicará que se satisfagan sistemas de desigualdades si los hiperplanos que conforman la partición no se intersectan, o se intersectan formando conjuntos abiertos. Por otro lado, si los hiperplanos llegan a formar poliedros  $F_i$ , con vértices  $v_0, v_1, \dots, v_n$ , entonces  $e_i \in F_i$  si se cumple:

$$e_i = \sum_{i=0}^n \alpha_i v_i$$

donde  $\sum_{i=0}^n \alpha_i = 1$  y  $\alpha_i \geq 0$ . Lo anterior significa la existencia de una combinación convexa a la que debe pertenecer  $e_i$ .

Según la naturaleza estable o inestable de las matrices en cada elemento de la clase  $F$ , y el número de puntos de equilibrio, tendremos diversos tipos de dinámicas (ver, por ejemplo: [4], [5], [48], [8], [33], [34], [37], [38], [10], [25], [26], [27], [28] y [29]).

## 1.6 Casos de funciones de partición

Por todo lo demostrado hasta aquí, podemos conocer las funciones que dan una partición relativa a las fronteras determinadas por hiperplanos.

Eventualmente se podrán considerar sistemas donde la función de partición o característica para todo el sistema se determinará por partes, es decir, se escribirá de manera condicionada.

Los lineales por partes que estudiaremos en los capítulos siguientes podrán escribirse de la forma:

$$\dot{x} = f(x) = Ax + b(u(x)) \tag{1.11}$$

que es una simplificación de los sistemas (1.10), con  $u(x) : E^n \rightarrow E$  y donde las  $u_i(x) : E^n \rightarrow E$  serán las funciones características que determinarán particiones del espacio de estados.

Tendremos la ventaja de que, por otra parte, las  $\mathbb{R}(u(x))$  son escalares, pero sin dejar de tener relación con las que hemos descrito, para ello baste ver que, en los sistemas anteriores,  $b^{\mathbb{R}(u(x))} \in E^n$ .

Las funciones  $\mathbb{R}(u(x))$  en nuestro caso, serán de cuatro tipos:

$$\mathbb{R}(u) = Id(u), \quad \mathbb{R}(u) = \Phi(u), \quad \mathbb{R}(u) = \alpha(u), \quad \mathbb{R}(u) = \Upsilon(u)$$

las cuales están definidas así:

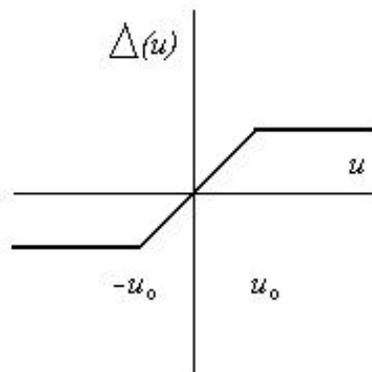
1)  $\mathbb{R}(u) = Id(u)$ . Esta es la función identidad, a la que consideraremos como la función de partición trivial o que parte al espacio en un solo elemento.

2)  $\mathbb{R}(u) = \Phi(u)$ , tal que

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} [ju + u_0j + ju - u_0j]$$

con  $u_0$  dado.  $\Phi = \Phi(u)$  denota una función no lineal acotada que se obtiene acotando una función lineal, donde  $u_0$  está en  $E$ . Es, prácticamente, una de las únicas que se han estudiado desde un punto de vista teórico.

Gráficamente, la función se representa como en la Figura 1.2, y a un lado la escribimos considerada como condicional:



$$\Phi(u) = \begin{cases} u_0 & \text{si } u \leq -u_0 \\ u & \text{si } -u_0 < u < u_0 \\ u_0 & \text{si } u \geq u_0 \end{cases} \quad (1.12)$$

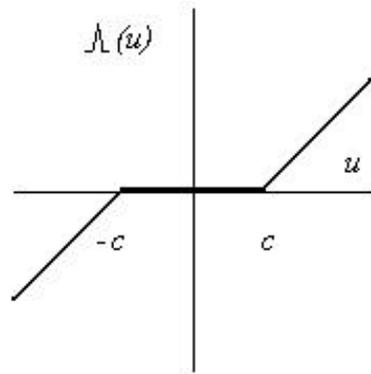
Figura 1.2 Una función lineal por partes acotada.

3)  $\alpha(u) = \alpha(u)$  tal que:

$$\alpha(u) = \frac{1}{2} f_2 u + j u \quad ; \quad c_j \quad ; \quad j u + c_j g$$

con  $c \in E$  dada.

Abajo se muestra su gráfica y su representación en forma condicional:



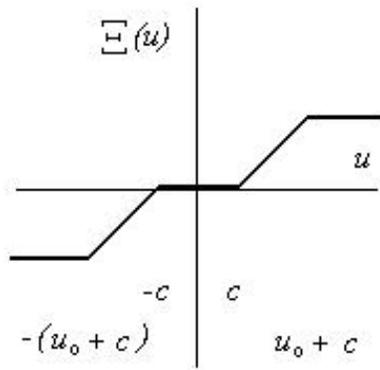
$$\alpha(u) = \begin{cases} u - c & \text{si } u > c \\ 0 & \text{si } |u| \leq c \\ u + c & \text{si } u < -c \end{cases} \quad (1.13)$$

Figura 1.3 Otro caso típico de función lineal por partes.

4)  $\alpha(u) = \alpha(u)$ , de modo tal que:

$$\alpha(u) = (\Phi \pm \alpha)(x)$$

$\alpha = \alpha(u)$  representa una función lineal acotada y con una región cuya imagen es cero, donde  $c$  y  $u_0$  están en  $E$  (véase Figura 1.4).



$$\Psi(u) = \begin{cases} u_0 & \text{si } u \leq u_0 + c \\ u - c & \text{si } c < u < u_0 + c \\ 0 & \text{si } |u| \leq c \\ u + c & \text{si } |u_0 + c| < u < |u| + c \\ |u| - u_0 & \text{si } |u| > |u_0 + c| \end{cases} \quad (1.14)$$

Figura 1.4 Función originada por una composición de funciones lineales por partes.

Todas estas funciones de partición son continuas y Lipschitz. Por lo que se demostró anteriormente, las tres últimas funciones son no diferenciables en los puntos en que cambian la linealidad del campo vectorial.

En adelante la función de valores reales  $u = u(x)$  estará definida por  $u(x) := \langle k; x \rangle = k^T x$ , con  $k \in E^n$ . A continuación detallaremos algunas cosas pertinentes respecto de las funciones anteriores.

Para la función  $Id = Id(u)$  se tiene un sólo sistema lineal y el estudio está hecho por completo, aunque, como hemos anotado, la mencionamos porque es un caso particular de las otras y se analizará su relación con ellas y los distintos tipos de bifurcación que se presentarán, así como haremos la clasificación de sus correspondientes dinámicas, regiones de atracción y naturaleza de puntos críticos.

La función  $\Phi = \Phi(u)$  es conocida como saturación y en ocasiones se denota por  $\Phi(u) = \text{sat}(u)$ . Induce una partición de  $E^n$  en tres regiones:  $S^+$ ;  $S^-$  and  $S^0$ , dadas por:

$$S^+(i) = \{x \in E^n : \Phi(u) = +(j)u_0\}, \quad S^0 = \{x \in E^n : |u(x)| < u_0\}$$

limitadas por los hiperplanos:  $\mathcal{J}_S := \{x \mid \langle k; x \rangle = \langle k; u_0 \rangle\}$ , donde el producto interior  $\langle k; x \rangle$  estará dado por  $k^T x$ .

En cada región hay un sistema lineal:

$$\dot{x} = Ax \text{ } \mathcal{J}_S \text{ } bu_0, \quad \dot{x} = (A + bk^T)x$$

éstos se disponen simétricamente. Los sistemas en los que aparece esta función (empleada a menudo en los sistemas de control lineal) son los que más han sido estudiados (aunque en la mayoría de los casos con poco rigor formal) en trabajos como [5] y [48], en los que se ha caracterizado la forma de la región de atracción del origen:  $\mathcal{A}(0)$ , la naturaleza de los puntos de equilibrio así como las distintas dinámicas y bifurcaciones posibles, aunque no con tanta frecuencia, y en nuestro estudio abordaremos un caso interesante.

Por otro lado, las funciones  $\alpha = \alpha(u)$  y  $\beta = \beta(u)$  inducen sistemas conocidos como de zona muerta y zona muerta con saturación, respectivamente. El tipo de sistemas que resultan al aplicar las dos últimas funciones características, prácticamente no han sido estudiados, o sólo se han abordado por medio de simulaciones numéricas [51], [53]. En nuestro caso nos interesa extender a las funciones  $\alpha = \alpha(u)$  y  $\beta = \beta(u)$  el estudio que se ha hecho para  $\Phi = \Phi(u)$ .

La función  $\alpha = \alpha(u)$  divide  $E^n$  en tres regiones, en las cuales se hallan sistemas lineales dispuestos simétricamente:

$$\dot{x} = (A + bk^T)x \text{ } \mathcal{J}_S \text{ } bc, \quad \dot{x} = Ax$$

cada uno de ellos en regiones delimitadas por los hiperplanos:  $\mathcal{J}_S := \{x \mid \langle k; x \rangle = \langle k; u_0 \rangle\}$ .

En el caso de la función  $\beta = \beta(u)$ , ésta induce una partición del espacio en cinco regiones,  $S^+, S_1, S_0, S_+, S_i$  determinadas por los hiperplanos:  $\mathcal{J}_S := u = \langle c + u_0 \rangle$  y  $\mathcal{J}_i := u = \langle c \rangle$ .

En cada región existe uno de los sistemas lineales

$$\dot{x} = Ax \text{ } \mathcal{J}_S \text{ } bu_0, \quad \dot{x} = (A + bk^T)x \text{ } \mathcal{J}_i \text{ } cb, \quad \dot{x} = Ax$$

también dispuestos simétricamente.

Puesto que trabajaremos con sistemas de la forma:  $\dot{x} = f_{\otimes}(x) = Ax + b^{\otimes}(u(x))$ , apare-

cerán en nuestro análisis parámetros como  $d = \det A$  y  $t = \text{tr}A$ , conocidos como parámetros fundamentales de la matriz a lazo abierto  $A$  y a  $D = \det(A + bk^T)$  y  $T = \text{tr}(A + bk^T)$  como parámetros fundamentales de la matriz a lazo cerrado  $A + bk^T$ .

Otros números que usaremos serán,  $n_u$ ,  $n_0$ ,  $n_s$ , los cuales denotarán respectivamente el número de eigenvalores con parte real positiva, cero y negativa de la matriz  $A$ .

$C^-$ ,  $C^0$ , y  $C^+$  denotan el conjunto de los números complejos con parte real negativa, cero y positiva respectivamente.

### 1.6.1 Hipótesis adicionales

Además consideraremos en adelante que la matriz  $A + bk^T$  es Hurwitz, es decir, sus eigenvalores estarán en la parte izquierda del plano complejo.

Una hipótesis más será que, en los sistemas  $\dot{x} = f(x) = Ax + b^*(u(x))$ , el par  $(A; b)$  satisfará que

$$\text{span} \{ b; Ab; \dots; A^{n-1}b \} = E^n$$

o en otras palabras que tal par es controlable. Cuando ocurre lo anterior el par  $(A; b)$  puede escribirse de la forma

$$A = \begin{matrix} \mathbf{0} & & & & \mathbf{1} \\ \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{matrix} & & & & \end{matrix}; \quad b = \begin{matrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \end{matrix}. \quad (1.15)$$

**Definición 1.11.** Adicionalmente, definiremos a los sistemas del tipo  $\dot{x} = f(x) = Ax + b^*(u(x))$  a los que nos estamos refiriendo como realimentados o retroalimentados, con función de retroalimentación dada por el elemento  $u(x) \in E$ , lo que significa que la función de partición juega ese papel.

Una definición más a la que después recurriremos es la siguiente:

**Definición 1.12.** Decimos que un sistema lineal  $\dot{x} = Ax + b$  es hiperbólico si  $\sigma(A) \cap C^0 = \emptyset$ ; . Donde  $\sigma(A)$  denota el espectro de la matriz  $A$  y  $C^0$  el subconjunto de los complejos con

parte real igual a cero, en este caso  $\det A \neq 0$ .

Nuestro estudio, en la mayoría de los casos se referirá a sistemas hiperbólicos por casos.

Otra hipótesis: las matrices de la forma  $A + bc^T$  serán Hurwitz.

### 1.6.2 Definiciones adicionales

Ya que una parte importante de la tesis estará destinada al estudio de órbitas periódicas, es conveniente que definamos con precisión qué entenderemos por un punto periódico y una órbita periódica, referentes a un flujo  $\phi_t(x)$  (dicho flujo no se restringe necesariamente a sistemas lineales por partes).

**Definición 1.13.** Un punto  $x \in E^n$  es llamado punto periódico con período  $t > 0$  si para un flujo  $\phi_t(x)$

$$\phi_t(x) = x$$

y

$$\phi_t(x) \neq x \quad \forall \tau \in (0; t)$$

**Definición 1.14.** La órbita  $O(x)$  de un punto periódico  $x$  es llamada una órbita periódica y está determinada por el conjunto:

$$O(x) = \{ \phi_t(x) : t \in \mathbb{R} \}.$$

### 1.6.3 Volviendo al caso de la función $\Phi(u(x))$

Vistos globalmente los sistemas (1.11), con  $\dot{u}(x) = \Phi(u(x))$  son no lineales y pueden presentar también múltiples puntos de equilibrio. Como mencionábamos, son casi exclusivamente los que se han estudiado a detalle.

Existen casos de ese tipo de sistemas en los que se ha demostrado rigurosamente comportamiento caótico, un buen ejemplo de esto es el sistema de Chua, véanse [11], [16]. Otros resultados para sistemas con este tipo de función característica dan condiciones suficientes para la no existencia de órbitas periódicas [30], [31] y [32], pidiendo que los campos vectoriales  $f(x)$  a los que se refieren sean de clase  $C^1$  (hecho que en nuestros casos no se satisface pues en las fronteras, los sistemas lineales por partes son no diferenciables). Sin embargo, la mayoría de los

comportamientos típicos de estos sistemas no lineales, se han mencionado en trabajos basados fundamentalmente en simulaciones, sobre todo en el caso de la función  $\Phi(x)$ . Aunque escasos, existen trabajos que han logrado caracterizar la forma de la región de atracción  $\mathcal{A}(0)$  del origen para  $\Phi(x)$ , así como la descripción de su dinámica.

Para el sistema  $\dot{x} = f_{\Phi}(x)$  se ha clasificado completamente el comportamiento geométrico de las soluciones así como la caracterización de las regiones de atracción, en esencia, los estudios han consistido en tres aspectos: Encontrar la región de atracción del sistema. Caracterizar el conjunto de elementos  $k$ , que garantizan la estabilidad global a lazo cerrado. Encontrar funciones no lineales, diferentes a  $\Phi(x)$ , de modo que el sistema a lazo cerrado sea globalmente asintóticamente estable.

Se ha determinado la dinámica y el número de puntos críticos de estos sistemas acotados.

En Suárez et al [5] podemos ver que en estos sistemas, los efectos de la acotación (o saturación) presentan comportamientos típicamente no lineales, tales como: multiplicidad de puntos de equilibrio,  $\mathcal{A}(0)$  restringidos a esferas, cilindros, etcétera; ahí se denota una descripción cualitativa de estos sistemas caracterizando sus puntos de equilibrio, sus órbitas periódicas (en el caso del plano) o la forma de la región de atracción. En un trabajo previo sobre sistemas bidimensionales [5], fue estudiado el comportamiento cualitativo de la región de atracción del origen  $\mathcal{A}(0)$  en términos de los parámetros del sistema no retroalimentado y también fue establecida la clasificación de los puntos de equilibrio de  $\dot{x} = f_{\Phi}(x)$ . Si  $\sigma(A)$  denota el espectro de la matriz  $A$ , se mostró que al ser  $\sigma(A) \cap \mathbb{C}^+ \neq \emptyset$ , el origen no es globalmente asintóticamente estable. Además, si  $\text{Tr}A > 0$ , entonces podría aparecer una órbita periódica alrededor del origen de la manera que  $\mathcal{A}(0)$  es un conjunto acotado. Además en [34] fueron descritas bifurcaciones topológicas, de  $\mathcal{A}(0)$  tales como el paso de  $\mathcal{A}(0)$  de un conjunto no acotado a un conjunto acotado a través de conexiones homo(hetero)-clínicas entre puntos de equilibrio de tipo silla.

En otro trabajo citado ya en un capítulo anterior [48], y continuando con métodos cualitativos, se dio una caracterización topológica de la región de atracción del origen para sistemas lineales con control lineal acotado. Para este fin fue esencial el estudio del comportamiento dinámico sobre la frontera de tal región. En particular, se probó que la frontera es igual a la unión de las variedades estables de los elementos críticos (puntos de equilibrio y ciclos límite) sobre la frontera. Esto significa que para estimar la región de atracción del origen se demostró

que su frontera,  $@-(0)$ , satisface  $@-(0) = \bigcup_j W^s(\sigma_j)$  donde los  $\sigma_j$  son elementos críticos en  $@-(0)$  los cuales están conectados al origen y  $W^s(\sigma_j)$  son sus correspondientes variedades estables. En ese trabajo se probó que la forma de la región de atracción del origen depende fuertemente del número  $n_u$  de valores característicos del sistema a lazo abierto con parte real positiva.

Específicamente, los resultados en [48] son los siguientes:

Para un sistema cuyos valores propios a lazo abierto tienen parte real no negativa, la región de atracción es no acotada. Para sistemas a lazo abierto estables, fue probado que todas las trayectorias eventualmente tienden hacia algún conjunto compacto de volumen cero. Para sistemas de lazo abierto antiestables ( $\mathbb{R}(A) \frac{1}{2} \mathbb{C}^+$ ) fue probado que la región de atracción del origen es acotada y homeomorfa a la bola unitaria  $n$ -dimensional. En el caso de sistemas con algunos valores propios con parte real positiva y otros con parte real negativa, se encuentra que una retroalimentación que sólo reubica los valores propios con parte real positiva, hace a  $@-(0)$  homeomorfa a el producto de las regiones de atracción asociadas a las partes estable y estabilizada. En consecuencia,  $@-(0)$  para un sistema a lazo cerrado es homeomorfa al cilindro  $E^n \times B^{n_u}$ . Para  $n_u = 1$  y manteniendo los valores propios reubicados, la estructura cilíndrica de la región atractora se mantiene bajo pequeños cambios en la ubicación de los valores propios estables a lazo abierto.

Como se ve en [48], una descripción analítica del tamaño de la región de atracción del origen no es una tarea fácil, porque en general no es posible encontrar explícitamente las soluciones del sistema  $\dot{x} = f_\Phi(x)$  y el uso de las técnicas de sistemas dinámicos para el análisis de las trayectorias que definen  $@-(0)$  es un problema muy complicado. También son apreciadas técnicas no lineales, como el Método del Primer Armónico. Tales técnicas podrían producir información adicional de naturaleza no numérica para el comportamiento cualitativo de la región atractora.

En adelante, investigaremos sistemas con las funciones de partición  $\alpha = \alpha(u)$  y  $\beta = \beta(u)$ , así como algunos tópicos no abordados anteriormente en la literatura para los referentes a la función  $\Phi = \Phi(u)$ .

## Chapter 2

# $\alpha$ -sistemas bidimensionales

Sea

$$\dot{x} = f_{\alpha}(x) = Ax + b\alpha(u) \quad (2.1)$$

con  $u = k^T x$  ( $x; k^T \in \mathbb{R}^2$ ) y la función  $\alpha(u) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida en el Capítulo 1, con  $c > 0$ . Este tipo de sistemas se llegan a conocer también como sistemas de zona muerta [53]. La función característica  $\alpha(u)$  induce una partición del espacio de estados en tres regiones, con un sistema lineal en cada una, con campos:

$$(A + bk^T)x + bc, \quad Ax, \quad (A + bk^T)x - bc.$$

Cada una de esas regiones está delimitada por las rectas:  $\dot{u} = k^T \dot{x} = \dots c$ .

### 2.1 Puntos de equilibrio

Es inmediato ver que el origen es un punto de equilibrio para el sistema anterior. A este punto lo denotaremos por  $e_0 = 0$ . Cuando  $\det A \neq 0$  existen otros dos candidatos a puntos de equilibrio, a saber:  $e_- = c(A + bk^T)^{-1}b$  y  $e_+ = -c(A + bk^T)^{-1}b$ :

Contamos, pues, con la siguiente proposición:

**Proposición 2.1.** Sea el sistema  $\dot{x} = f_{\alpha}(x)$ . Si  $\det A > 0$  el sistema tiene un sólo punto de equilibrio: el origen:  $e_0$ . Si  $\det A < 0$  el sistema tiene tres puntos de equilibrio:  $e_-$ ,  $e_0 = 0$  y  $e_+$ .

Demostración. Puesto que el sistema es controlable, podemos escribirlo en la forma canónica siguiente:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Haremos el análisis para el punto  $e_i$ , (la demostración para  $e_+$  será idéntica). Empleando la ecuación anterior, el punto  $e_i$  debe satisfacer:

$$k^T e_i = ck^T (A + bk^T)^{-1} b > c$$

es decir:

$$k^T \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = k^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = k^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} > 0$$

así:

$$\frac{k_1 c}{a_1 + k_1} > c.$$

Puesto que  $A + bk^T$  es Hurwitz se cumple:  $a_1 + k_1 < 0$  (además de  $a_2 + k_2 < 0$ ), por lo tanto de lo anterior tenemos:  $k_1 c < c(a_1 + k_1)$ , lo cual implica  $ca_1 > 0$  y por lo tanto  $a_1 > 0$ . Tomando en cuenta que de la forma canónica empleada  $\det A = a_1$  concluimos nuestro resultado.

Q. E. D.

Podemos formular un corolario a la proposición anterior, el cual relaciona el número de puntos de equilibrio con el de eigenvalores estables de la matriz  $A$ .

Corolario 2.2. Para el caso hiperbólico, si el número de eigenvalores estables de  $A$  es 0 o 2 (i.e.  $n_s = 0; 2$ ), existe un sólo punto de equilibrio: el origen. Si  $n_s = 1$ , entonces el número de puntos de equilibrio es 3.

Demostración. Empleando la proposición anterior y usando el hecho de que existe una matriz  $P$  de modo que  $A = P^{-1}JP$  donde  $J$  es la matriz en forma canónica de Jordan, tenemos los siguientes casos:

1)  $\det A > 0$  y  $\text{tr} A = 0$

En este caso  $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ i & 0 \end{bmatrix} A$ , con  $i > 0$ , (aquí los eigenvalores son estrictamente imagi-

narios) y el sistema sería no hiperbólico.

2)  $\det A > 0$  y  $\text{Tr}A < 0$

Aquí existen tres posibilidades para J:

a)  $J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ , con  $\alpha$  y  $\beta$  reales. Nótese que  $\det A = \det J$ , por lo tanto:  $\text{signo}(\alpha) =$

$\text{signo}(\beta)$ , i.e.  $\alpha\beta > 0$ . En este caso hay, según la proposición anterior, un sólo punto de equilibrio y fácilmente se ve que se cumple:  $n_s = 0; 2$ .

b)  $J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$  lo cual implica que ambos eigenvalores son iguales, ya sea estables o

inestables, por lo tanto hay un sólo punto de equilibrio y  $n_s = 0; 2$ .

c)  $J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ , con  $\beta > 0$ . Nótese que en efecto  $\det J = \alpha\delta - \beta\gamma > 0$ . Puesto que

ambos eigenvalores tienen la forma  $\lambda = \alpha \pm i\beta$  la parte real tiene el mismo signo en ambos casos, por lo que concluimos que también hay un punto de equilibrio y  $n_s = 0; 2$ .

3)  $\det A < 0$

La matriz en forma canónica de Jordan tiene la forma:  $J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

Puesto que  $\det A = \det J < 0$ , es evidente que  $\alpha < 0 < \beta$  o  $\beta < 0 < \alpha$ . Así que, basados nuevamente en la proposición anterior decimos que en este caso hay tres puntos de equilibrio y  $n_s = n_u = 1$ .

Q. E. D.

## 2.2 Estabilidad y trayectorias

Puesto que la matriz  $A + bk^T$  es Hurwitz podemos establecer otro importante e interesante resultado:

**Lema 2.3.** Sea el sistema  $\dot{x} = f(x)$  en el cual  $u$  es estabilizante. Entonces todas las trayectorias de dicho sistema están acotadas.

**Demostración.** Escribiendo nuestro sistema en la forma  $\dot{x} = (A + bk^T)x + b\phi(k^T x)$ , e integrando, tenemos que la solución es la siguiente:

$$x(t) = e^{(A+bk^T)t} x_0 + \int_0^t e^{(A+bk^T)(t-s)} b\phi(u(s)) ds.$$

Acotando se obtiene:

$$\|x(t)\| \leq e^{(A+bk^T)t} \|x_0\| + \int_0^t e^{(A+bk^T)(t-s)} \|k\| b \Phi(k^T x) ds.$$

Puesto que  $\Phi(u(s))$  es acotada, existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\|k\| b \Phi(k^T x) < \epsilon$ . Ahora, empleando que  $\|(A + bk^T)\| \leq C$  vemos que existen  $L$  y  $\delta$  tales que  $\|e^{(A+bk^T)t}\| \leq L e^{-\delta t}$ , para  $L, \delta > 0$ . De esto obtenemos:  $\|x(t)\| \leq L e^{-\delta t} (\|x_0\| + \frac{\epsilon}{\delta}) + \frac{\epsilon}{\delta}$ . De donde:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| \leq \frac{\epsilon}{\delta}.$$

Por lo tanto concluimos que las trayectorias son acotadas y convergen a un conjunto contenido en la bola  $B(\frac{\epsilon}{\delta})$ .

Q. E. D.

Más adelante analizaremos las formas del conjunto, veremos que en cada caso es un conjunto compacto y conoceremos su naturaleza según sean los valores de  $n_s$  y las relacionaremos con la forma de la región de atracción del origen  $-(0)$ .

## 2.3 Regiones de atracción del origen

Analizaremos la dinámica de los sistemas lineales con función característica  $\alpha(u)$  por casos. A partir de ello caracterizaremos las regiones de atracción del origen. Antes que nada daremos una definición que nos será útil.

**Definición 2.4.** Un sistema  $\dot{x} = f(x)$  es estrictamente disipativo si  $\text{div} f(x) < 0$ .

Establezcamos a continuación un lema.

**Lema 2.5.** Considérese el sistema  $\dot{x} = Ax + bu$  con  $\|A\| \leq C, u \in C^0$ . Supóngase que el sistema (2.1) es estrictamente disipativo (i.e.  $\text{div}(Ax + b\alpha(u)) < 0$ ). Entonces, para el sistema con zona muerta, (2.1), la región  $-(0)$  es no acotada.

**Demostración.** Es inmediata y similar a la dada en [5].

Q. E. D.

Ahora analizaremos por casos las formas de las regiones de atracción del origen. Nuestro estudio se hará para el caso hiperbólico, es decir, aquél en el que para el sistema a lazo abierto

(2.1)  $\frac{3}{4}(A)^T C^0 = ;$ . Debido a ello,  $\det A \neq 0$  y  $n_0 = 0$ .

### 2.3.1 Caso $n_s = 2$

En este caso, sabemos que hay un sólo punto de equilibrio y que es estable.

Podemos establecer el siguiente resultado.

**Teorema 2.6.** Considérese la matriz  $A$  con  $n_s = 2$ . Sea  $u(x)$  un estabilizador global y el sistema de lazo cerrado (2.1) estrictamente disipativo. Entonces, para tal sistema se cumple que  $\sigma(0) = E^2$ .

**Demostración.** Por el Lema 2.3 sabemos que todas las trayectorias están acotadas. Ahora bien, por el Corolario 2.2, el origen es el único punto de equilibrio del sistema (2.1). Recordemos que el Teorema de Poincaré-Bendixon implica que el conjunto  $\omega$ -límite de una trayectoria es una órbita cerrada o el origen. Pero de acuerdo con el Lema 2.5 (2.1) no puede haber órbitas cerradas. Entonces el origen es el conjunto  $\omega$ -límite de todas las trayectorias de (2.1).

Q. E. D.

### 2.3.2 Caso $n_s = 1$ .

Este caso presenta tres puntos de equilibrio, como ya hemos visto, dos estables y uno silla (el origen).

Existe una transformación lineal de coordenadas  $T : E^2 \rightarrow E^2$  tal que (2.1) toma la forma:

$$\dot{x}_1^0 = \alpha^+ x_1 + b_1 \varpi(u) \quad (2.2)$$

$$\dot{x}_2^0 = \alpha^- x_2 + b_2 \varpi(u) \quad (2.3)$$

donde  $\alpha^+ > 0$ ;  $\alpha^- < 0$ , y  $b_1; b_2 \neq 0$ . En este caso nos referimos a un sistema (2.1) transformado en el (2.2-2.3) y debido a la geometría del problema, (como hemos discutido arriba), en primer lugar desearíamos conocer las regiones de atracción de los puntos de equilibrio estables  $e_+; e_i$ .

Ya que (2.3) es estable, estudiaremos la dinámica de la ecuación unidimensional (2.2). Sea  $\dot{x}_1^0 = \alpha^+ x_1 + b_1 u$  con la hipótesis mencionada. Consideremos el caso  $b_1 > 0$  (el análisis para

$b_2 > 0$  es el mismo).

**Definición 2.7.** Una retroalimentación mínima para el sistema (2.2-2.3) es una retroalimentación en la que  $u$  es tal que  $u = u(x_1)$ . Esto es, tal retroalimentación reubica sólo el eigenvalor inestable de (2.2-2.3).

En el caso de una retroalimentación mínima, sea  $u(x_1) = kx_1$ , entonces (2.2) tiene (de acuerdo al Corolario 2.2) tres candidatos a puntos de equilibrio:

$$x_1 = 0; \quad x_1 = \mathcal{S} \frac{b_1 c}{s^+ + b_1 k x_1}$$

Nótese que los puntos  $\mathcal{S} \frac{b_1 c}{s^+ + b_1 k x_1}$  tienen dependencia de  $k$ : Tomando el punto  $j \frac{b_1 c}{s^+ + b_1 k}$  (en el otro caso el análisis es similar) vemos que cuando  $k \rightarrow 1$  estos puntos de equilibrio se acercan al origen, el cual sería entonces estable, y el sistema tendería a ser un sistema sólo con realimentación lineal.

Ahora tenemos este lema fácil de probar:

**Lema 2.8.** Considérese el sistema unidimensional inestable a lazo abierto  $x_1^0 = s^+ x_1 + b_1 u$ . Supóngase que  $u = u(x_1)$ , con  $u(0) = 0$ , es una retroalimentación globalmente estabilizable y sea  $\alpha(u(x_1))$  la función definida en el Capítulo 1. Entonces los puntos  $e_+; e_i$  son puntos de equilibrio asintóticamente estables del sistema  $x_1^0 = s^+ x_1 + b_1 \alpha(u(x_1))$  y sus correspondientes regiones de estabilidad asintótica están dadas por:

$$-M(e_+; e_i) = \begin{cases} \mathcal{S} < (j-1; 0) \mathcal{S} (0; 1) > \text{ si } b_1 > 0 \\ \mathcal{S} (0; 1) \mathcal{S} (j-1; 0) > \text{ si } b_1 < 0: \end{cases}$$

donde  $-M$  representa la región de atracción para una retroalimentación mínima.

**Observación 2.9.** Denotemos por  $W^s(x)$  y  $W^u(x)$  las variedades estable e inestable del punto de equilibrio  $x$ , respectivamente. Del Corolario 2.2 para  $n_u = 1$ , y  $n_s = 1$ , el sistema (2.1) tiene tres puntos de equilibrio:  $0$  (punto silla) y  $e_i$  y  $e_+$ . A partir del Lema 2.8 se verifica directamente que, para una retroalimentación mínima

$$W^u(0) \cap -M(e_+) \neq \emptyset; \quad W^u(0) \cap -M(e_i) \neq \emptyset;$$

i.e.  $0$  está conectado con los puntos  $e_+; e_i$ .

Más generalmente, podemos establecer el siguiente resultado, para una función  $u = u(x)$  en general.

**Teorema 2.10.** Sea la matriz  $A$  del sistema (2.1) tal que  $n_s = 1$ . Entonces existe una conexión heteroclínica entre los tres puntos de equilibrio, dos de los cuales son estables y uno silla, y no pueden haber órbitas periódicas en el sistema.

**Demostración.** Por el Lema 2.3 sabemos que todas las trayectorias son acotadas y convergen a un subconjunto de una bola  $B(L^{\prime\prime})$ , por lo tanto,  $W^u(0)$  no se va a infinito ni puede converger a ninguna otra región que no sean los puntos  $e_+$  y  $e_i$  (atractores) ya que no existen otros puntos de equilibrio, entonces  $W^u(0)$  va a esos puntos de equilibrio (conexión heteroclínica); lo anterior implica, por el Teorema de Unicidad de las Soluciones, que no existen órbitas periódicas alrededor de los puntos de equilibrio  $e_+$  y  $e_i$ . Ahora bien,  $W^s(0)$  no puede llegar al origen desde los puntos  $e_+$  y  $e_i$  ya que estos son atractores, ni desde ningún otro punto ya que no existen más puntos de equilibrio. Por otra parte, ya que el origen es un punto silla, localmente hay trayectorias que están cerca asintóticamente de  $W^s(0)$  y  $W^u(0)$ , de esto se infiere que  $W^s(0)$  no puede formar conexiones homoclínicas (dos en este caso, al considerar simetría). Entonces, se concluye que  $W^s(0)$  sólo puede llegar al origen desde el infinito. Esto último implica por lo tanto que no existe ninguna órbita periódica alrededor del origen. De esto se concluye, nuevamente por el Teorema de Unicidad de las Soluciones, que todas las trayectorias convergen a  $e_+$  y  $e_i$  (si las condiciones iniciales no pertenecen a  $W^s(0)$ ), y a  $0$ : el origen (si las condiciones iniciales están en  $W^s(0)$ ), entre los cuales existe, como se ha visto, una conexión heteroclínica (ver Figura 2.1).

Q. E. D.

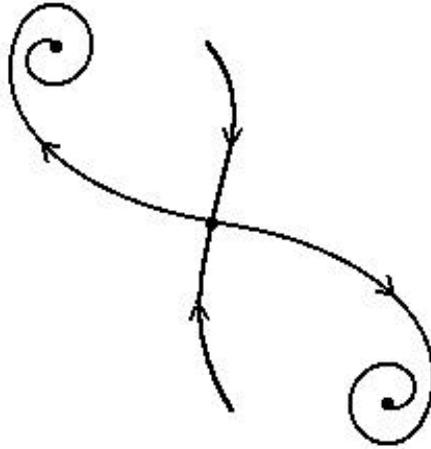


Figura 2.1 Conexión heteroclínica de tres puntos de equilibrio para el caso  $n_s = 1$ , la única posibilidad geométrica.

En base a esto podemos conocer en este caso la forma de la región de atracción del origen, que nos interesaba caracterizar y para lo cual contamos con el siguiente resultado:

Corolario 2.11. La región de atracción del origen  $- (0)$  es tal que:  $- (0) = W^s(0)$ .

Demostración. Se sigue de inmediato por el teorema anterior.

### 2.3.3 Caso $n_s = 0$ .

Para el caso  $n_s = 0$  formulamos el siguiente resultado.

Teorema 2.12. Sea la matriz  $A$  en (2.1) tal que  $n_s = 0$ . Entonces existe una órbita periódica estable alrededor del origen el cual es repulsor.

Demostración. Nuevamente por el Lema 2.3 sabemos que todas las trayectorias están acotadas y convergen a un conjunto contenido en una bola  $B(L \vec{r})$ . Por el Teorema de Poincaré-Bendixon el conjunto  $\omega$ -límite de una trayectoria es una órbita periódica o un punto de equilibrio. Pero el único punto de equilibrio, el origen, es un punto repulsor. Por lo tanto, el conjunto  $\omega$ -límite de las trayectorias es al menos un ciclo límite estable alrededor del origen.

Q. E. D.

Un ejemplo para el caso del teorema anterior, en el que el origen es inestable y en el que bajo

retroalimentación estabilizante aparece órbita periódica estable (Figura 2.2) es el del siguiente sistema:

$$\dot{x}_1 = 2x_1 + \alpha(u)$$

$$\dot{x}_2 = x_2 + \alpha(u)$$

con  $u = -10x_1 + \frac{69}{10}x_2$  y  $c = 1$ .

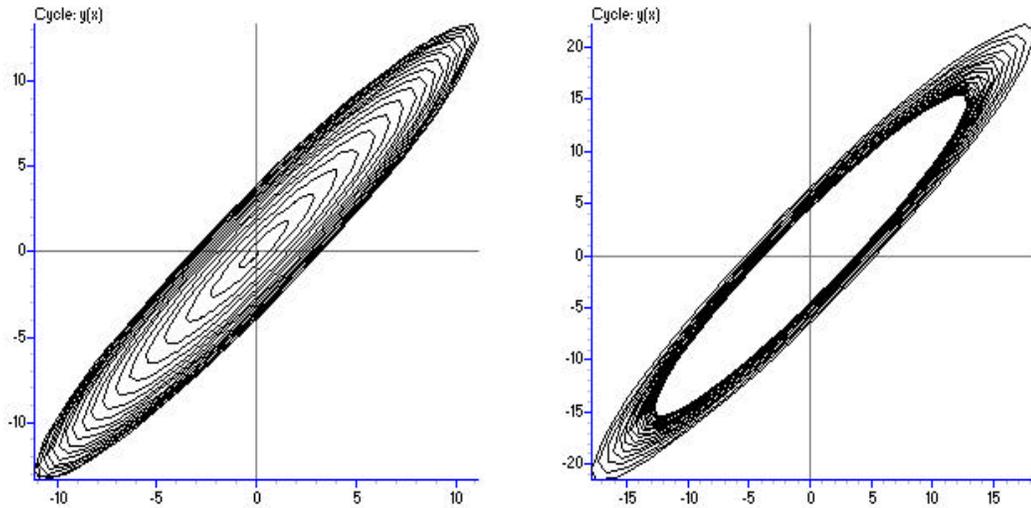


Figura 2.2 Órbita periódica estable para el caso  $n_s = 0$ , la primera trayectoria tiene condición inicial dentro de la órbita y la segunda fuera de ella. El origen es repulsor.

Es importante, además, demostrar la unicidad de esta órbita periódica estable. Para ello, antes que nada, probaremos que el sistema  $\dot{x} = f_\alpha(x) = Ax + b\alpha(u)$  se puede escribir en la forma de Liénard, como se ha hecho en [34] para la función  $\Phi(u)$  y de donde se desprende por consiguiente el resultado. Para ello, recuérdese que es posible representar el sistema anterior como  $\dot{x} = (A + bk^T)x + b\Phi(k^T x)$ . Haciendo el cambio de variables  $x = Py$  (con  $P$  no singular) tenemos:  $\dot{y} = P^{-1}(A + bk^T)Py + P^{-1}b\Phi((P^T k)^T y)$ , renombrando  $P^T k$  como  $k$  y  $P^{-1}b$  como  $b$ , y haciendo  $y = x$  llevamos el sistema a la forma:

$$\dot{x} = Jx + b\Phi(k^T x)$$

donde  $J = J(k) = P^{-1}(A + bk^T)P$  es la forma canónica de Jordan de la matriz  $A + bk^T$ .

Ahora bien, por la forma en que se ha reescrito el sistema (definiendo los parámetros fundamentales:  $d^0 = \det J$ ,  $t^0 = \text{tr} J$ ,  $D^0 = \det(J + bk^T)$  y  $T = \text{tr}(J + bk^T)$ ), podemos demostrar que el sistema  $\dot{x} = Jx + b\Phi(k^T x)$  puede llevarse a la forma de Liénard después de un cambio de variables adecuado, de lo que se desprende la proposición siguiente:

**Proposición 2.13.** Supóngase que el sistema  $\dot{x} = Jx + b\Phi(k^T x)$  tiene una órbita periódica y sean  $d^0$ ,  $t^0$ ,  $D^0$  y  $T^0$  sus parámetros fundamentales. Entonces después de un cambio de variables y de invertir el signo de la variable del tiempo, el sistema anterior puede ser reescrito en la forma de Liénard

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^0 &= x_2 + F(x_1) \\ \dot{x}_2^0 &= -g(x_1) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} F(x_1) &= t^0 x_1 + \Phi(x_1)(T^0 + t^0) \\ g(x_1) &= d^0 x_1 + \Phi(x_1)(D^0 + d^0) \end{aligned}$$

**Demostración.** Puesto que el sistema tiene órbita periódica se puede demostrar [34] que  $t^0 > 0$  por lo que hay tres casos a considerar de acuerdo a las correspondientes formas canónicas  $J$ . Analizaremos cada uno de ellos.

1

Caso 1: Cuando  $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  y  $t^0 = \lambda_1 + \lambda_2$ .

En este caso  $k_1$  y  $k_2$  son diferentes de cero puesto que, suponiendo, digamos,  $k_1 = 0$ , entonces,  $\dot{x}_2^0 = \lambda_2 x_2 + b_2^0 \Phi(k_2 x_2)$ , (con  $b_2^0 = |b_2|$ ). Por consiguiente, la recta  $x_2 = 0$  es invariante bajo el flujo del sistema. Puesto que las rectas  $\lambda_1 x_1 = c$  (véase definición) son paralelas a él, tenemos una contradicción con el hecho de que el sistema tiene una órbita periódica. Algo similar ocurre si  $k_2 = 0$ . Ahora, vemos que  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  ya que si, la matriz  $J$  es un múltiplo diagonal de la identidad todos los segmentos de rectas que pasen por el origen y estén contenidos entre las rectas  $\lambda_1 x_1 = c$ , deben ser invariantes bajo el flujo del sistema por lo que no habría una órbita y ello constituiría una contradicción.

Ahora, podemos ver que la siguiente matriz está bien definida y es no singular

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{k_1} & i\frac{1}{k_1} \end{pmatrix} \mathbf{A} \quad \text{con } M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{k_2} & i\frac{1}{k_2} \end{pmatrix} \mathbf{A}$$

Si proponemos el cambio de variables  $x = My$ ; tenemos  $y^0 = M^{-1} J M y + \Phi(k^T M y) M^{-1} b^0$ . Después de algunas operaciones, renombrando variables y cambiando el signo de la variable  $t$ , llegamos a

$$\begin{aligned} x_1^0 &= t^0 x_1 + x_2 + \Phi(x_1)(T^0 + t^0) \\ x_2^0 &= d^0 x_1 + \Phi(x_1)(D^0 + d^0) \end{aligned}$$

Caso 2. Cuando  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & -\alpha \end{pmatrix} \mathbf{A}$  con  $2\alpha = t^0 + t^- > 0$ .

Escribimos nuestro sistema en notación compleja como sigue: para  $z = x_1 + ix_2$ ,  $\alpha = \alpha + i^-$ ,  $k = k_1 + ik_2$ ,  $b = b_1 + ib_2$ , de esto obtenemos:  $z^0 = \bar{\alpha} z + b\Phi(\bar{k}z + kz)$ . Ahora consideremos el sistema complejo:

$$\begin{aligned} z^0 &= \bar{\alpha} z + b\Phi(\bar{k}z + kz) \\ \bar{z}^0 &= \alpha \bar{z} + b\Phi(k\bar{z} + \bar{k}\bar{z}) \end{aligned}$$

Nótese que el sistema consiste esencialmente de dos copias del sistema original. A partir de ese hecho, podemos seguir una consideración similar a la del Caso 1. Ya que  $k_1 + k_2 \neq 0$ , se sigue que  $k$  y en consecuencia  $\bar{k}$  son distintos del cero. Es claro que  $\alpha \neq \bar{\alpha}$ , y la siguiente matriz está bien definida y es no singular

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\bar{k}} & i\frac{1}{\bar{k}} \end{pmatrix} \mathbf{A} \quad \text{con } M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{k} & i\frac{1}{k} \end{pmatrix} \mathbf{A}$$

Procediendo como en el caso anterior, haciendo el cambio de variables,  $\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ , con la parte real de  $x_1$  distinta de cero y la parte imaginaria cero, y con  $x_2$  complejo, al tomar la parte real de las soluciones  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  e invirtiendo el signo de la variable del tiempo, se obtiene el sistema en su forma de Liénard.

Caso 3. Cuando  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A$  con  $2\omega = \tau^0$ .

En este caso  $k_2 \neq 0$ , Por otra parte el eje  $x_2$  debe ser invariante bajo el sistema, puesto que  $i_1$  y  $i_2$  son paralelos a tal eje, entonces el sistema no tendría una órbita, lo cual sería una contradicción. Ahora bien, la siguiente matriz está bien definida y es no singular

$$M = \frac{1}{k_2^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k_2 i_1 & k_1 - k_2 \end{pmatrix} A \text{ con } M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i_1 k_2 + k_1 & k_2 \end{pmatrix} A;$$

Después de cambiar variables y proceder como en los casos anteriores, obtenemos el sistema en la forma de Liénard propuesta.

Q. E. D.

La demostración anterior, por lo tanto, implica que el sistema que estamos considerando se puede ver como un sistema de Liénard. Esto nos permite establecer un Teorema de unicidad de órbita periódica.

**Teorema 2.14.** Sea el sistema  $\dot{x} = f_x(x) = Ax + b_x(u)$ , llevado a la forma de Liénard

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -g(x_1) \end{aligned}$$

definido en todo  $E^2$ . Supóngase que el sistema está definido en todo  $E^2$  y satisface:

- (i)  $F$  y  $g$  son Lipschitz en un intervalo acotado.
- (ii)  $g$  es una función impar tal que  $x_1 g(x_1) > 0$  si  $x_1 \neq 0$ .
- (iii)  $F$  es impar tal que existe  $x_0 > 0$  para el cual  $F(x_1) < 0$  si  $0 < x_1 < x_0$  y  $F(x) > 0$ , si  $x_1 > x_0$ . Entonces el sistema tiene a lo más una órbita periódica.

**Demostración.** Es idéntica a la dada en [34] reescribiendo el campo  $f_x(x)$  como  $Jx + b_x(k^T x)$ , donde  $J = J(k) = P^{-1}(A + bk^T)P$ .

Q. E. D.

## Chapter 3

# ¥-sistemas bidimensionales

Sea un sistema en la forma:

$$\dot{x} = f_{\text{¥}}(x) = Ax + b\text{¥}(u) \quad (3.1)$$

con  $u = k^T x$ ,  $x; k^T \in E^2$  y la función característica  $\text{¥}(u) : E \rightarrow E$  definida en el Capítulo 1, donde  $c; u_0 > 0$ .

**Definición 3.1** El sistema anterior es también conocido como un sistema con zona muerta y saturación. La función  $\text{¥}(u)$  divide al espacio de estados en cinco regiones con un espacio lineal en cada una:

$$Ax + bu_0, \quad (A + bk^T)x + cb, \quad Ax, \quad (A + bk^T)x + cb, \quad Ax + bu_0$$

Cada sistema está localizado en una de las regiones:  $S^+$ ;  $S_i$ ;  $S_0$ ;  $S_+$ ;  $S_i^-$  limitadas respectivamente por las cuatro rectas:  $\partial S^+ := u = c \text{¥} u_0$  y  $\partial S_i^- := u = \text{¥} c$ .

Basados en el hecho de que nuestra ecuación satisface la condición (1.15) podemos escribirla en la forma (ver Capítulo 1):

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{¥}(u) \quad (3.2)$$

Además del punto  $e_0 = 0$  (el origen), al ser  $\det A \neq 0$  existen otros cuatro candidatos a puntos de equilibrio:  $e^+ = -A^{-1}bu_0$ ,  $e_i^- = -c(A + bk^T)^{-1}b$ ,  $e_+ = -c(A + bk^T)^{-1}b$ ,  $e_i^+ = -A^{-1}bu_0$ .

Nuevamente emplearemos la hipótesis:  $\frac{3}{4}(A + bk^T) \frac{1}{2} C^i$ , i.e. que la matriz  $A + bk^T$  es Hurwitz. Bajo  $\forall(u)$  el origen no es necesariamente un atractor global, como veremos más adelante. Sea  $\mathcal{D}(0)$  la región de estabilidad asintótica del origen, y  $\partial\mathcal{D}(0)$  la frontera  $\mathcal{D}(0)$ . Nuestro propósito es describir la dinámica respecto de los puntos de equilibrio y la forma de  $\mathcal{D}(0)$  para el sistema.

Tenemos una primera proposición:

Proposición 3.2. La solución del sistema  $\dot{x} = f_{\forall}(x) = Ax + b\forall(u)$  está dada por:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}b\forall(u(s))ds.$$

Demostración. Es inmediata empleando el método de variación de parámetros.

Q. E. D.

Ahora estableceremos, un teorema que relaciona el número de eigenvalores de la matriz  $A$  con el número de puntos de equilibrio estables.

Teorema 3.3. Sea la retroalimentación no lineal  $u = u(x)$  una que estabiliza globalmente para  $\dot{x} = f_{\forall}(x) = Ax + b\forall(u)$  en el origen. Entonces para dicho sistema se cumple:

- (1) Si  $\det A = 0$ , el origen es el único punto de equilibrio.
- (2) Si  $\det A > 0$ , (en este caso  $n_s = 0$  o  $n_s = 2$ ), el origen es el único punto de equilibrio.
- (3) Si  $\det A < 0$  (en este caso  $n_s = 1$ ), existen cinco puntos de equilibrio:  $0$  (el origen- (punto silla)),  $e_+; e_i$  (asintóticamente estables), y  $e^-; e_i^-$  (puntos silla).

Demostración. Analizando por casos:

- (1)  $\det A = 0$ : En este caso ( $u(x)$  no lineal) la prueba es similar para  $u(x)$  lineal, (véase [5]).
- (2) y (3) Podemos ver que el origen está en la región contenida entre las rectas  $\lambda_i^-$  y  $\lambda_i^+$ , i.e.:  $k^T 0 = 0$  y  $\lambda_i^- < 0 < \lambda_i^+$ . Para los otros puntos de equilibrio:  $e_+$ , debe estar entre las rectas  $\lambda_i^-$  y  $\lambda_i^+$ , y  $e_i^-$  debe estar por debajo de  $\lambda_i^-$  (por simetría debe ocurrir lo mismo con los puntos de equilibrio  $e_i^-$  y  $e^+$  entre  $\lambda_i^-$ , y  $\lambda_i^+$ , y por encima de  $\lambda_i^+$ , respectivamente), en otras palabras veremos que deben satisfacerse las desigualdades siguientes:

$$\lambda_i^- (c + u_0) < \lambda_i^- ck^T(A + bk^T)b < \lambda_i^- c; \quad k^T A e_i^- b u_0 < \lambda_i^- (c + u_0)$$

Tomando el par  $(A; b)$  como en (3.2) obtenemos:

$$i(c(A + bk^T))^{-1}b = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ @ & i \frac{a_2+k_2}{a_1+k_1} & \frac{1}{a_1+k_1} & A @ \\ 1 & 0 & i c & 0 \end{matrix} A = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ @ & i \frac{c}{a_1+k_1} & & A \\ & & & 0 \end{matrix} A$$

y

$$A^{-1}bu_0 = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ @ & i \frac{a_2}{a_1} & \frac{1}{a_1} & A @ \\ 1 & 0 & u_0 & 0 \end{matrix} A = \begin{matrix} 0 & 1 \\ @ & i \frac{u_0}{a_1} \\ & & & A \\ & & & 0 \end{matrix} A$$

En consecuencia tenemos las dos desigualdades que siguen:

$$i(c + u_0) < i \frac{k_1 c}{a_1 + k_1} < i c$$

$$\frac{k_1 u_0}{a_1} < i(c + u_0)$$

Puesto que  $(A + bk^T)$  es Hurwitz entonces  $a_1 + k_1 < 0$  y  $a_2 + k_2 < 0$ . Para que la solución de las desigualdades sea no vacía es necesario que:  $\frac{k_1}{a_1+k_1} > 1$ , el hecho de que  $a_1 + k_1 < 0$  implica  $k_1 < 0$ ; ahora, usando que  $k_1 < 0$  en  $\frac{k_1 u_0}{a_1} < i(c + u_0) < 0$  vemos que  $a_1 > 0$ , para que el conjunto solución de ambas desigualdades sea distinto del vacío. Empleando el hecho de que  $\det A = i a_1 \neq 0$ , deducimos el resultado.

Q. E. D.

### 3.1 Regiones de estabilidad asintótica del origen

Para hacer una caracterización de estas regiones de estabilidad nos referiremos, como ya habíamos mencionado, a sistemas hiperbólicos en los que, por regiones se satisface que  $\Re(A_i) < -\sigma$   $\forall \sigma > 0$ :

Analicemos por casos respecto al número de eigenvalores estables.

#### 3.1.1 Caso $n_s = 2$

En este caso, el sistema de lazo abierto (3.1) es estable.

Lema 3.4. Considérese el sistema  $\dot{x} = Ax + bu$  con  $\Re(A_i) < -\sigma$   $\forall \sigma > 0$ . Supóngase que tal sistema es estrictamente disipativo. Entonces, para el sistema (3.1), la región de atracción del

origen,  $(0)$ , es no acotada.

Demostración. Es inmediata y similar a la dada en [5] y la del caso correspondiente para la función  $\varphi(x)$ .

Teorema 3.5. Sea  $u(x)$  un estabilizador global, sea el sistema de lazo cerrado  $\dot{x} = Ax + bu(x)$  estrictamente disipativo y considérese para  $A: n_s = 2$ . Entonces, para el sistema (3.1),  $(0) = E^2$ .

Demostración. Por la Proposición 3.2 la integración de (3.1) da

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}b\varphi(u(s))ds.$$

Después de tomar normas obtenemos

$$\|x(t)\| \leq \|e^{At}\| \|x_0\| + \int_0^t \|e^{A(t-s)}\| \|b\| \|\varphi(u(s))\| ds.$$

Puesto que  $\varphi(u(s))$  es acotada, existe un número positivo  $\epsilon$  tal que  $\|b\|\varphi(u(s))\| \leq \epsilon$ . Dado que  $\|e^{At}\| \leq C e^{-\lambda t}$ , se verifica la siguiente igualdad (véase [5]):  $\|e^{At}\| \leq L e^{-\lambda t}$ ,  $L, \lambda > 0$ .

Sustituyendo en las desigualdades de arriba obtenemos  $\|x(t)\| \leq L e^{-\lambda t} [\|x_0\| + \frac{\epsilon}{\lambda}] + \frac{\epsilon}{\lambda}$ . Ello conduce a que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| \leq \frac{\epsilon}{\lambda}$ . Lo cual implica que todas las trayectorias de (3.1) son acotadas. Del Teorema 3.3 el origen es el único punto de equilibrio de (3.1). Ahora bien, el Teorema de Poincaré-Bendixon implica que el  $\omega$ -límite de una trayectoria es una órbita cerrada o el origen. De acuerdo al Lema 3.4, (3.1) no tiene órbitas periódicas. Entonces concluimos que el origen es el  $\omega$ -límite de todas las trayectorias.

Q. E. D.

### 3.1.2 Caso $n_s = 1$

Existe una transformación lineal de coordenadas  $T: E^2 \rightarrow E^2$  tal que (3.1) toma la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\lambda x_1 + b_1 \varphi(u) \\ \dot{x}_2 &= -\lambda x_2 + b_2 \varphi(u) \end{aligned} \tag{3.3}$$

donde  $\mu^+ > 0$ ;  $\mu^i < 0$ , y  $b_1; b_2 \in \mathbb{R}$ . En este caso nos referimos a un sistema (3.1) transformado en el (3.3).

En este caso, y debido a la geometría del problema, en primer lugar desearíamos conocer las regiones de atracción de los puntos de equilibrio estables  $e_+; e_i$ , para en segundo lugar hacer una caracterización de la región de atracción del origen.

Ya que la segunda ecuación de (3.3) es estable, estudiaremos la dinámica de la primera ecuación unidimensional (3.3). Sea  $x_1^0 = \mu^+ x_1 + b_1 u$  con la hipótesis mencionada. Consideremos el caso  $b_1 > 0$  (el análisis para  $b_2 > 0$  es el mismo). Esto nos lleva al siguiente lema:

**Lema 3.6.** Considérese el sistema (3.3) y sea  $u(x)$  una retroalimentación globalmente estabilizante. Entonces para el sistema (3.1)-(3.3),

$$\text{cl}(-e_+) = \begin{cases} \mathbb{R} < [0; \pm^i] \in E \text{ si } b_1 > 0 \\ : [\pm^i; 0] \in E \text{ si } b_1 < 0 \end{cases} \quad \text{cl}(-e_i) = \begin{cases} \mathbb{R} < [\pm^+; 0] \in E \text{ si } b_1 > 0 \\ : [0; \pm^+] \in E \text{ si } b_1 < 0 \end{cases}$$

donde  $\pm^i = \frac{b_1 u_0}{\mu^+}$  y  $\pm^+ = \mu^+ \frac{b_1 u_0}{\mu^+}$ .

**Demostración.** Para el punto  $e_+$ , este resultado se obtiene tomando la primera ecuación de (3.3) y observando que para  $b_1 > 0$ , y para  $b_1 < 0$ , respectivamente:

$$\text{sgn}(x_1^0) = \begin{cases} \mathbb{R} < < 0 \text{ si } x_1 < 0 \\ : > 0 \text{ si } x_1 > \pm^i \end{cases} \quad \text{sgn}(x_1^0) = \begin{cases} \mathbb{R} < > 0 \text{ si } x_1 > 0 \\ : < 0 \text{ si } x_1 < \pm^+ \end{cases}$$

La demostración para el punto  $e_i$  es idéntica.

Q. E. D.

El lema siguiente nos da el comportamiento de la trayectoria  $\hat{A}_t(x_0)$ , dada una condición sobre la condición inicial, específicamente si  $x_0 \in \text{cl}(-e_+) \cup \text{cl}(-e_i)$ :

**Lema 3.7.** Para el sistema (3.3), sea  $x_0 \in \text{cl}(-e_+) \cup \text{cl}(-e_i)$ . Entonces la trayectoria  $\hat{A}_t(x_0)$  es acotada para  $t > 0$ .

**Demostración.** Por el lema anterior, si  $x_0 \in \text{cl}(-e_+) \cup \text{cl}(-e_i)$  la primera coordenada de  $\hat{A}_t(x_0)$  es acotada para toda  $t > 0$ .

Integrando (3.3), y como en el Teorema 3.5, tenemos que  $x_2(t)$  ( $t > 0$ ) es acotada. Esto

implica:

$$jx_2(t)j \cdot Le^{-i t} [jx_0j i \frac{''}{s} ] + L \frac{''}{s} \quad (L; \tau > 0).$$

Así,  $A_t(x_0)$  es acotada para toda  $t > 0$ .

Q. E. D.

Ahora nos preguntamos qué ocurre en este caso para una función de retroalimentación mínima, como las que definimos en el capítulo anterior.

En el caso de una retroalimentación mínima sea  $u(x_1) = kx_1$ , entonces la primera ecuación del sistema (3.3) tiene (de acuerdo al Teorema 3.3) cinco candidatos a puntos de equilibrio:

$$x_1 = \frac{b_1 u_0}{s^+ + b_1 k} \quad x_1 = 0 \quad x_1 = S \frac{b_1 c}{s^+ + b_1 k}$$

donde  $s^+ + b_1 k \neq 0$ . Nótese que los puntos  $\frac{b_1 u_0}{s^+}$  son independientes de  $k$ , y los puntos  $S \frac{b_1 c}{s^+ + b_1 k}$  tienen dependencia de  $k$ : Tomando los puntos  $\frac{b_1 u_0}{s^+}$  y  $i \frac{b_1 c}{s^+ + b_1 k}$  (en los otros casos el análisis es similar), vemos que existen valores de  $k$  tales que  $i \frac{b_1 c}{s^+ + b_1 k} < \frac{b_1 u_0}{s^+}$ , y  $i \frac{b_1 c}{s^+ + b_1 k} > \frac{b_1 u_0}{s^+}$ . El caso  $k = i \frac{b_1 c}{b_1 (c/u_0 + 1)}$ , implica la igualdad. Recordando que el origen 0 es un punto de equilibrio, y usando los mismos argumentos algebraicos de la Introducción, podemos ver que si el sistema de desigualdades

$$\begin{aligned} & \frac{kb_1 u_0}{s^+} < i (c + u_0) \\ & i (c + u_0) < \frac{kb_1 c}{s^+ + b_1 k} < i c \end{aligned}$$

tiene un conjunto solución diferente del vacío, existen cinco puntos de equilibrio.

Después de algunas operaciones algebraicas vemos que para valores de  $k$  tales que  $k < i \frac{b_1 c}{b_1 (c/u_0 + 1)}$ , existen cinco puntos de equilibrio, dos estables y tres inestables tipo silla. Para valores de  $k > i \frac{b_1 c}{b_1 (c/u_0 + 1)}$  existe sólo un punto de equilibrio: el origen, el cual es inestable. Por argumentos de continuidad si  $k = i \frac{b_1 c}{b_1 (c/u_0 + 1)}$ , entonces el origen es un punto de equilibrio (inestable) y existen dos puntos silla nodo justo antes que ocurra una bifurcación. Más aún, los puntos estables  $S \frac{b_1 c}{s^+ + b_1 k}$  satisfacen:  $\lim_{k \rightarrow i} (S \frac{b_1 c}{s^+ + b_1 k}) = 0$ . Basados en este hecho, si  $k \neq 1$  el sistema tiene un punto de equilibrio estable y dos puntos inestables, justo como en el caso sin zona muerta, el cual es un estado acotado o saturado y ya se ha estudiado en [5], [48].

Ahora contamos con un lema, cuya demostración es inmediata:

Lema 3.8. Considérese el sistema unidimensional inestable a lazo abierto  $x_1^0 = s^+ x_1 + b_1 u$ .

Supóngase que  $u = u(x_1)$ , con  $u(0) = 0$ , es una retroalimentación globalmente estabilizante y consideremos dada la función  $\forall(u(x_1))$ . Entonces los puntos  $e_+; e_i$  son puntos de equilibrio asintóticamente estables del sistema  $x_1^0 = s^+ x_1 + b_1 \forall(u(x_1))$ , y sus correspondientes regiones de estabilidad asintótica están dadas por

$$-M(fe_+; e_i g) = \begin{cases} \mathbf{8} < ((\pm^+; 0) \mathbf{S} (0; \pm^i)) & \text{si } b_1 > 0 \\ : ((\pm^i; 0) \mathbf{S} (0; \pm^+)) & \text{si } b_1 < 0: \end{cases}$$

donde  $\pm^i = \frac{b_1 u_0}{s^+}$  y  $\pm^+ = i \frac{b_1 u_0}{s^+}$ .

Lema 3.9. Para el sistema (3.3), sea  $u = u(x)$  una retralimentación mínima. Entonces su región de estabilidad asintótica asociada está dada por

$$-M(fe_+; e_i g) = \begin{cases} \mathbf{8} < ((\pm^+; 0) \mathbf{S} (0; \pm^i)) \in E & \text{si } b_1 > 0 \\ : ((\pm^i; 0) \mathbf{S} (0; \pm^+)) \in E & \text{si } b_1 < 0: \end{cases}$$

Demostración. El sistema de lazo cerrado, acotado y con zona muerta está dado por

$$\begin{aligned} x_1^0 &= s^+ x_1 + b_1 \forall(u(x_1)) \\ x_2^0 &= s^i x_2 + b_2 \forall(u(x_1)). \end{aligned}$$

Puesto que este sistema es un sistema con trayectorias acotadas (Lema 3.7),  $-(fe_+; e_i g) = -_1(fe_+; e_i g) \in -_2(fe_+; e_i g)$  (véase [5]), donde  $-_1(fe_+; e_i g)$  es la región de estabilidad asintótica de la primera ecuación unidimensional de (3.3) y  $-_2(fe_+; e_i g)$  la región de estabilidad asintótica del sistema unidimensional  $x_2^0 = s^i x_2$ . De ahí  $s^i < 0$   $-_2(fe_+; e_i g) = E$ . Ahora, del Lema 3.8  $-_1(fe_+; e_i g) = ((\pm^+; 0) \mathbf{S} (0; \pm^i))$  (similarmente  $((\pm^i; 0) \mathbf{S} (0; \pm^+))$ ) y nuestro lema queda demostrado.

Q. E. D.

Observación 3.10. Denotemos por  $W^s(x)$  y  $W^u(x)$  las variedades estable e inestable del punto de equilibrio  $x$ , respectivamente. Del Teorema (3.3) para  $n_u = 1$ , y  $n_s = 1$ , el sistema (3.1) tiene cinco puntos de equilibrio, a saber: 0 (punto silla),  $e_+; e_i$  (atractores) y  $e^+; e^i$  (también puntos silla). A partir del Lema 3.8 se verifica directamente que, para una

retroalimentación mínima

$$W^u(e^+) \overset{T}{-}_{MEC(e_i)} \notin ; \quad W^u(0) \overset{T}{-}_{MEC(e_i)} \notin ;$$

$$W^u(0) \overset{T}{-}_{MEC(e_+)} \notin ; \quad W^u(e_i) \overset{T}{-}_{MEC(e_+)} \notin ;$$

i.e.  $e^+; e_i$  y 0 están conectados con los puntos  $e_+; e_i$  ; y

$$W^s(e^+) \overset{L}{-}_{MEC(e_+)} \overset{L}{-}_{MEC(e_i)} W^s(e_i) = @_{-MEC(e_+)} \overset{L}{-}_{MEC(e_i)} .$$

El siguiente teorema establece un resultado importante: La más grande región de estabilidad asintótica es obtenida cuando  $\forall(u(x))$  está de...nida para una sola variable  $x_1$ .

**Teorema 3.11.** Sea  $u(x)$  una retroalimentación estabilizante (lineal o no lineal) y  $-(e_+) \overset{S}{-}_{MEC(e_i)}$  su correspondiente región de estabilidad asintótica. Entonces  $-(e_+) \overset{S}{-}_{MEC(e_i)}$   $\mu_{-M(e_+)} \overset{S}{-}_{MEC(e_i)}$ :

**Demostración.** La propiedad  $-(e_+) \overset{S}{-}_{MEC(e_i)} \mu_{-M(e_+)} \overset{S}{-}_{MEC(e_i)}$  es una consecuencia directa de los Lemas 3.6 y 3.9.

Q. E. D.

De manera más general el siguiente teorema caracteriza, para  $n_s = 1$ , el comportamiento dinámico de (3.1).

**Teorema 3.12.** Supóngase que  $\forall(u)$  es una retroalimentación estabilizante acotada con zona muerta. Entonces

(i) Si  $W^u(e^+) \overset{T}{-}_{MEC(e_i)} \notin ; ; W^u(0) \overset{T}{-}_{MEC(e_i)} \notin ; ; W^u(0) \overset{T}{-}_{MEC(e_+)} \notin ;$  y  $W^u(e_i) \overset{T}{-}_{MEC(e_+)} \notin$  ; (nótese la simetría), entonces  $@_{-MEC(e_+)} \overset{S}{-}_{MEC(e_i)} = W^s(e^+) \overset{S}{-}_{MEC(e_+)} W^s(0) \overset{S}{-}_{MEC(e_i)}$  y  $-(e_+) \overset{S}{-}_{MEC(e_i)}$  es no acotada.

(ii) Si  $W^u(e^+) \overset{T}{-}_{MEC(e_i)} = ; ; W^u(0) \overset{T}{-}_{MEC(e_i)} = ; ; W^u(0) \overset{T}{-}_{MEC(e_+)} = ;$  y  $W^u(e_i) \overset{T}{-}_{MEC(e_+)} = ;$  ; (una vez más tómesese en cuenta la simetría), entonces  $-(e_+) \overset{S}{-}_{MEC(e_i)}$  es o un conjunto de dos órbitas periódicas (una alrededor de cada punto  $e_+$  y  $e_i$ ) o un grafo de conexiones heteroclínicas entre  $e^+; e_i$  y 0 (debida a la simetría), y  $-(e_+) \overset{S}{-}_{MEC(e_i)}$  es acotada.

**Demostración.**

(i) Si  $W^u(e^+) \overset{T}{-}_{MEC(e_i)} \notin ; ; W^u(0) \overset{T}{-}_{MEC(e_i)} \notin ; ; W^u(0) \overset{T}{-}_{MEC(e_+)} \notin ;$  y  $W^u(e_i) \overset{T}{-}_{MEC(e_+)} \notin$

; , de [[9], Teorema 3.7] se sigue que:  $W^u(e^+) \cap W^s(0) \neq \emptyset$ ; y  $W^u(0) \cap W^s(e_i) \neq \emptyset$ ; implica  $W^s(e^+) \cap W^s(0) \neq \emptyset$ , por otra parte (considerando la simetría)  $W^u(0) \cap W^s(e_+) \neq \emptyset$ ; y  $W^u(e_i) \cap W^s(0) \neq \emptyset$ ; implican  $W^s(0) \cap W^s(e_i) \neq \emptyset$ . Entonces  $W^s(e^+) \cap W^s(0) \cap W^s(e_i) \neq \emptyset$ . El que las trayectorias en  $W^s(e^+) \cap W^s(0) \cap W^s(e_i)$  (el cual es un conjunto unidimensional) estén acotadas implica que, para un  $z \in W^s(e^+) \cap W^s(0) \cap W^s(e_i)$ ,  $\gamma(z)$  es o una órbita cerrada (en los casos:  $z \in W^s(e^+)$  o  $z \in W^s(0)$ ) o un punto de equilibrio. Si una órbita cerrada  $\gamma$  pertenece a  $W^s(e^+)$  o  $W^s(0)$ , entonces  $W^s(e^+) = \gamma$  o  $W^s(0) = \gamma$ . Ya que  $e^+; 0; e_i \in W^s(e^+) \cap W^s(0) \cap W^s(e_i)$ ,  $W^s(e^+) \cap W^s(0) \cap W^s(e_i)$  no puede ser tampoco una órbita cerrada,  $W^s(e^+) \cap W^s(0) \cap W^s(e_i)$ , de donde  $\gamma = f_0g$  o  $\gamma = fe^+g$ . En consecuencia  $W^s(e^+) \cap W^s(0) \cap W^s(e_i) \neq \emptyset$ :

(ii) Tenemos dos casos:

a)  $e^+; 0; e_i \in W^s(e^+) \cap W^s(0) \cap W^s(e_i)$ . Del Lema 3.7, todas las trayectorias en  $W^s(e^+) \cap W^s(0) \cap W^s(e_i)$  están acotadas. De ahí que  $W^s(e^+) \cap W^s(0) \cap W^s(e_i)$  son órbitas cerradas (idénticas)  $\gamma_1; \gamma_2$ , una alrededor de cada punto de equilibrio estable.

b)  $e^+; 0; e_i \in W^s(e^+) \cap W^s(0) \cap W^s(e_i)$  (unión incluyente). Aquí  $W^s(e^+) \cap W^s(0) \cap W^s(e_i)$  no son órbitas cerradas y ocurre:  $W^s(e^+) \cap W^s(0) \cap W^s(e_i) \neq \emptyset$ ; . Existe una conexión heteroclínica entre  $e^+$  y  $0$  'alrededor' de  $e_i$ ; y una conexión heteroclínica entre  $0$  y  $e_i$  'alrededor' de  $e_+$ , con ello probaremos que  $e^+; 0; e_i$  están conectados heteroclínicamente. Probemos que existe una conexión heteroclínica entre  $e^+$  y  $0$  (la prueba para el caso  $0$  y  $e_i$  es idéntica, considerando por otra parte la simetría del sistema y el hecho de que  $W^s(0) \cap W^s(e_+) \neq \emptyset$ ;). Sea  $z \in W^s(e^+) \cap W^s(0) \cap W^s(e_i)$  y  $N(z)$  una sección transversal en  $z$ . Entonces  $N(z) \cap W^s(e_i) \neq \emptyset$ ; . Por el  $\lambda$ -lemma (véase [39]), existe  $T > 0$  tal que para  $t > T$ ,  $\hat{A}_t(N(z))$  está  $C^1$ -cercana a  $W^u(e^+)$  lo cual implica que  $W^u(e^+) \cap N(z) \neq \emptyset$ ; . Ya que por hipótesis hemos supuesto que  $W^u(e^+) \cap W^s(0) = \emptyset$ ; entonces  $W^u(e^+) \cap N(z) \neq \emptyset$ ; . Ahora, sea  $y \in W^u(e^+) \cap N(z)$ . Del Lema 3.7 (empleando un razonamiento similar al de (i))  $\gamma(y)$  no es una órbita periódica, entonces  $\gamma(y)$  es  $f_0g$  o  $fe^+g$ . Puesto que  $e^+; 0 \in W^s(e^+) \cap W^s(0)$  entonces  $\gamma(y) = f_0g$  (existe una 'semiconexión' entre  $e^+$  y  $0$ ). Nótese que  $e^+; 0; e_i \in W^s(e^+) \cap W^s(0) \cap W^s(e_i)$ , implica también  $W^s(0) \cap W^s(e_i) \neq \emptyset$ ; (para el caso de conexión entre  $0$  y  $e_i$  emplearemos por otra parte que  $W^s(e_i) \cap W^s(e_+) \neq \emptyset$ ;), entonces tomando  $y \in W^s(0) \cap W^s(e_i)$  y siguiendo el mismo procedimiento, obtenemos, usando el hecho de que  $e^+; 0 \in W^s(e^+) \cap W^s(0)$ , lo siguiente:  $\gamma(y) = fe^+g$  (la otra semiconexión), entonces existe una conexión heteroclínica entre  $e^+$  y  $0$ . Considerando la otra conexión entre  $0$  y  $e_i$  (para cuya prueba los

pasos son idénticos), concluimos que entre  $e^+; 0; e_i$  existe una conexión heteroclínica.

Q. E. D.

Uno de nuestros propósitos principales era conseguir la caracterización del conjunto  $-(0)$  en este caso. El siguiente corolario al teorema anterior nos da el resultado que buscábamos.

Corolario 3.13. La región de estabilidad asintótica del origen  $-(0)$  está determinada por:

(i) Si  $W^u(e^+) \cap W^s(0) \neq \emptyset$ ;  $W^u(0) \cap W^s(e_i) \neq \emptyset$ ;  $W^u(0) \cap W^s(e_+) \neq \emptyset$ ; y  $W^u(e_i) \cap W^s(e_+) \neq \emptyset$ ; entonces

$$-(0) = W^s(0)$$

la cual es no acotada (ver Figura 3.1).

(ii) Si  $W^u(e^+) \cap W^s(e_i) = \emptyset$ ;  $W^u(0) \cap W^s(e_i) = \emptyset$ ;  $W^u(0) \cap W^s(e_+) = \emptyset$ ; y  $W^u(e_i) \cap W^s(e_+) = \emptyset$ ; entonces:

(a) Para  $e^+; 0; e_i \in W^s(e_+)$   $\cup$   $W^s(e_i)$ :

$$-(0) = W^s(0) \text{ tal que } W^s = W^u(\circ_1) \cup W^u(\circ_2)$$

i.e.  $-(0)$  es la unión de dos espirales encontradas (ver Figura 3.2).

(b) Para  $e^+; 0; e_i \in W^s(e_+) \cup W^s(e_i)$ :

$$-(0) = W^s(0)$$

la cual es acotada y forma parte de una conexión heteroclínica entre  $e^+; 0; e_i$  (ver Figura 3.3).

Demostración. Se deduce de inmediato empleando el teorema anterior.

Q. E. D.

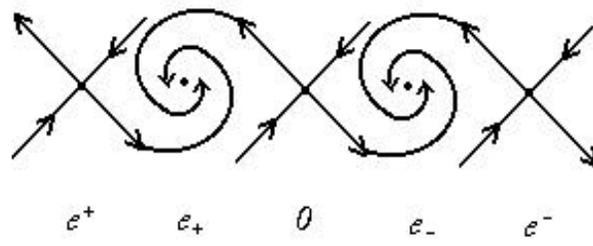


Figura 3.1 Diagrama de fases para el caso (i).

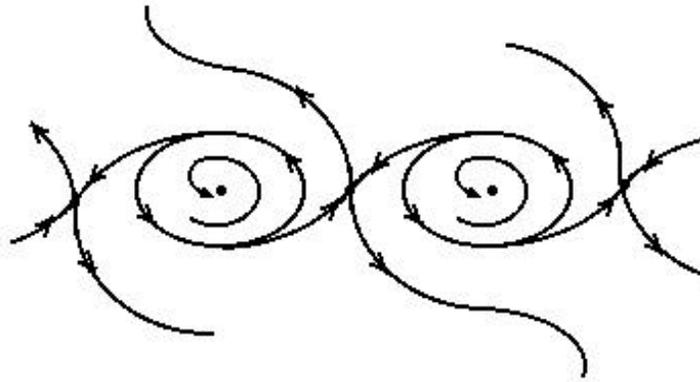


Figura 3.2 Diagrama de fases para el caso (ii) inciso (a).

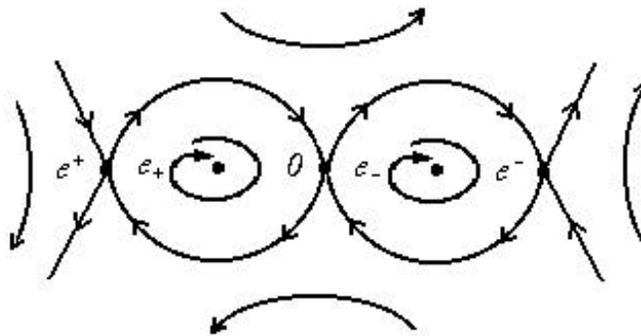


Figura 3.3 Conexión heteroclínica del caso (ii) inciso (b).

Observación 3.14. Nótese que la curva que describe la conexión heteroclínica entre  $e^+; 0; e^-$ , es una curva de bifurcación, i.e. el retrato de fase del sistema (3.3) pasa por ella cuando cambian los parámetros  $k_1$  y  $k_2$ .

Para obtener más información de esta curva de bifurcación, consideremos los puntos en los cuales las rectas  $i^+; i^-; i^+; i^-$  la intersectan, es decir, entran en contacto con las variedades  $W^s(e^+); W^s(0); W^s(e^-); W^u(e^+); W^u(0)$  y  $W^u(e^-)$ . Empleando el procedimiento de [50] para la función  $\Phi = \Phi(u)$ , calculamos los puntos de contacto del flujo con las rectas anteriores. Considerando el caso en el cual  $W^s(e^+); W^u(e^+)$  y  $W^s(0); W^u(0)$  'cruzan' las rectas  $i^+$  y  $i^-$  (el otro se considera similarmente): obtenemos que los puntos de contacto del flujo con  $i^+$  y  $i^-$  (i.e. los puntos donde  $\dot{A}_t(x) \frac{k}{kk} = 0$ ) satisfacen el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \int \frac{k_1}{kk} x_2 + \frac{k_2}{kk} (a_1 x_1 + a_2 x_2) &= 0 & \int \frac{k_1}{kk} x_2 + \frac{k_2}{kk} (a_1 x_1 + a_2 x_2 + u_0) &= 0 \\ \int k_1 x_1 + k_2 x_2 &= c & \int k_1 x_1 + k_2 x_2 &= c + u_0 \end{aligned}$$

donde hemos tomado normas sobre los elementos del sistema en la forma (3.3) con  $a_1, a_2$  tales que para el sistema se cumple que  $n_s = 1$ , con eigenvalores  $\lambda^+ > 0; \lambda^- < 0$  como arriba.

Resolviendo el sistema obtenemos:

$$p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} p_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} i \frac{(k_1 + a_2 k k k) c}{k_2^2 a_1 i \quad k_1^2 + k_1 a_2 k k k} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} i \frac{k_2 a_1 c}{k_2^2 a_1 i \quad k_1^2 + k_1 a_2 k k k}$$

y

$$p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} p_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} i \frac{(k_1 + (a_2 + u_0) k k k) c}{k_2^2 a_1 i \quad k_1^2 + k_1 (a_2 + u_0) k k k} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p_{22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} i \frac{k_2 a_1 c}{k_2^2 a_1 i \quad k_1^2 + k_1 (a_2 + u_0) k k k}$$

donde  $p_1 \in i^-$  y  $p_2 \in i^+$ . Para las intersecciones de  $W^s(0)$  y  $W^u(0)$  con  $i^-$ , y las de  $W^s(e^+)$  y  $W^u(e^+)$  con  $i^+$ , recurriendo a la teoría expuesta en [50], obtenemos los siguientes puntos:

$$q_i^s = p_1 i^- \frac{1}{s} Ax \quad q_+^s = p_2 i^+ \frac{1}{s} (Ax + u_0 b)$$

$$q_i^u = p_1 i^- \frac{1}{s} Ax \quad q_+^u = p_2 i^+ \frac{1}{s} (Ax + u_0 b)$$

donde, por la hipótesis de controlabilidad,  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}$  y  $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Cuando la curva de bifurcación existe, entonces la aplicación de Poincaré

$$P : ((A + bk^T)x_1 \text{ cb}) : i^- \rightarrow i^+$$

satisface:

$$P(q_i^s) = q_+^u$$

Si existe una  $t > 0$  tal que para  $q_i^s \in i^-$ ,  $P(q_i^s) \in i^+$  y existe  $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} A$  tal que el sistema anterior se satisface, entonces decimos que la curva de bifurcación referida existe.



Cuando ocurre que  $c \neq 0$  las funciones de partición  $\Psi(u)$  y  $\Phi(u)$  se acercan entre sí tanto como queramos, por lo que nuestro sistema  $\dot{x} = f_{\Psi}(x) = Ax + b\Psi(u)$  puede ser escrito en este caso particular de la siguiente manera:

$$\dot{x} = f_{\Phi}(x) + p(x) = f_{\Phi}(x) + p(u(x))$$

donde la función  $p(u(x))$  puede ser vista como una perturbación pequeña. A tal función podemos proponerla como

$$p(u(x)) = \Phi(u(x)) - \Psi(u(x))$$

De acuerdo al modo en que están definidas  $\Phi(u(x))$  y  $\Psi(u(x))$  podemos encontrar  $p(u(x)) = \Phi(u(x)) - \Psi(u(x))$ , función que es continua y varía según sea  $c < u_0$ ,  $c = u_0$ , o  $c > u_0$  (ver Apéndice).

Antes que nada nos hacemos la siguiente pregunta al estar  $x$  en un conjunto compacto y dado un  $u_0$ :

¿Se cumplirá que si  $c \neq 0$  entonces  $\|p(u(x))\| \neq 0$ ?

Es fácil verificar que en efecto, si  $c = u_0$  entonces  $\|p(u(x))\| \neq 0$  si  $c \neq 0$  (ver Apéndice).

Ahora bien, en [5] se ha demostrado que, en el plano, el sistema  $\dot{x} = f_{\Phi}(x)$  posee una única órbita periódica, cuando  $n_s = 0$ . Por otra parte, ya que estamos considerando a  $p(u(x))$  como una perturbación pequeña, emplearemos un resultado de Seibert y Florio [3] que es el siguiente, en una versión más débil:

**Teorema 3.16.** Supóngase que se tiene un conjunto  $U \subset X = \mathbb{R}^n$ , que  $A$  en  $X$  es tal que  $A$  se encuentra en un entorno generado por vecindades esféricas de  $U : F_U$  y que  $U$  absorbe  $A$  en tiempo  $t$  para  $\epsilon = \epsilon_0$ . Entonces para un  $\delta > 0$  existe una vecindad  $N$  en  $F_{\epsilon_0}$  (el entorno de vecindades del punto  $\epsilon_0$ ) tal que  $B^{\delta}(U)$  absorbe  $A$  en el mismo tiempo  $t$  para un  $\epsilon \geq 2N$ .

Por absorber se entiende que, si  $U$  y  $A$  están en  $E^n$  y  $\epsilon$  en un espacio de parámetros, entonces existe  $t$  tal que  $f_{\Phi}(A) \subset U$ .

El teorema anterior, aplicado a nuestro contexto implica que, puesto que como para el sistema  $\dot{x} = f_{\Phi}(x)$  existe una región compacta en la cual las trayectorias se van al origen (que en ese caso es estable) al aplicarse una pequeña perturbación  $p(x)$ , aunque el origen deja de ser atractor, existe una región para la cual  $f_{\Phi}(A) \subset U$ , es decir, en una vecindad sigue habiendo

una región invariante que permanece estable. Ello nos permite establecer el siguiente resultado:

**Teorema 3.17.** Para el sistema  $\dot{x} = f_\epsilon(x)$ , cuando  $\epsilon \neq 0$  y  $n_s = 0$ , existen al menos dos órbitas periódicas, una estable y una inestable, en un conjunto compacto alrededor del origen.

**Demostración.** Tomemos  $\dot{x} = f_\epsilon(x) + p(x)$ . Sea el conjunto  $V_\epsilon = \{x : V(x) = \epsilon\}$ , donde  $V(x)$  es una función de Lyapunov, la cual, ya que está definida sobre un conjunto compacto, alcanza un máximo en su recorrido. Para el caso  $\dot{x} = f_\epsilon(x)$  tenemos  $\frac{dV}{dt} = \nabla V \cdot f_\epsilon(x) < -\epsilon < 0$ . Ahora, para el sistema con la pequeña perturbación:  $\frac{dV}{dt} = \nabla V \cdot f_\epsilon(x) + \nabla V \cdot p(x)$ , y como  $\|p(x)\| \ll \epsilon$  (lo que implica que  $\nabla V \cdot p(x) \ll \epsilon$ ) cuando  $\epsilon \neq 0$ , entonces, debido al teorema anterior, existe una región que permanece estable donde se cumple:  $\frac{dV}{dt} = \nabla V \cdot f_\epsilon(x) + \nabla V \cdot p(x) < 0$ . Puesto que el origen es inestable, existen trayectorias que permanecen en esa región estable, por lo que, por el Teorema de Poincaré-Bendixon, debe existir al menos una órbita periódica estable ahí. Basándonos en la Proposición 3.15, sabemos que fuera de una cierta región compacta, las trayectorias escapan a infinito, nuevamente por el Teorema de Poincaré-Bendixon, concluimos que hay, al menos, una órbita inestable ahí, la cual contiene a la órbita estable.

Q. E. D.

Lo anterior se ha confirmado con simulaciones numéricas y el siguiente es un ejemplo:

Sea el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -5x_1 + x_2 + \epsilon \sin(x_1) \end{aligned}$$

con  $u_0 = 1$  y  $\epsilon = 0.01$ . El sistema a lazo abierto tiene eigenvalores inestables  $\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{19}$  y  $\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{19}$ . La matriz a lazo cerrado es estable. Tal sistema presenta dos órbitas periódicas alrededor del origen, una estable, y otra inestable conteniendo a la estable, como se muestra en las Figuras 3.4 y 3.5.

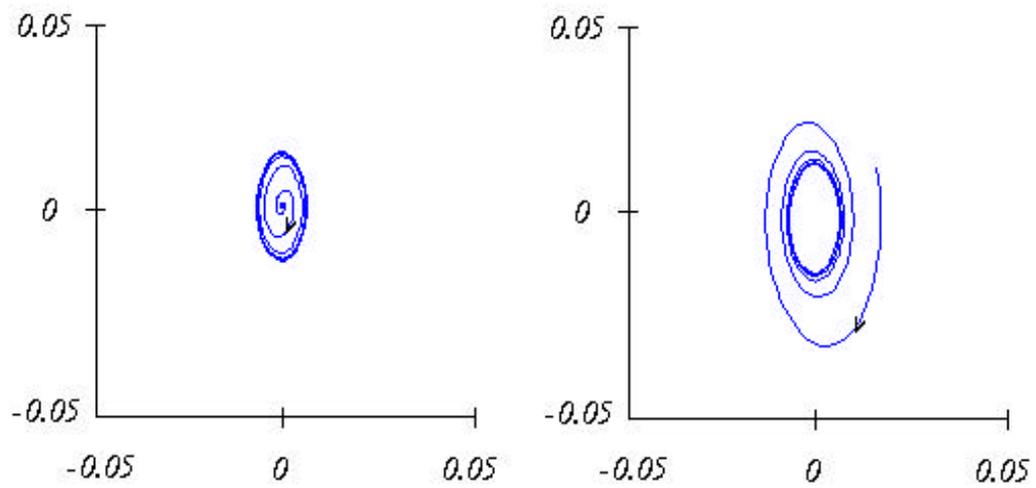


Figura 3.4 Órbita estable donde el origen es repulsor.

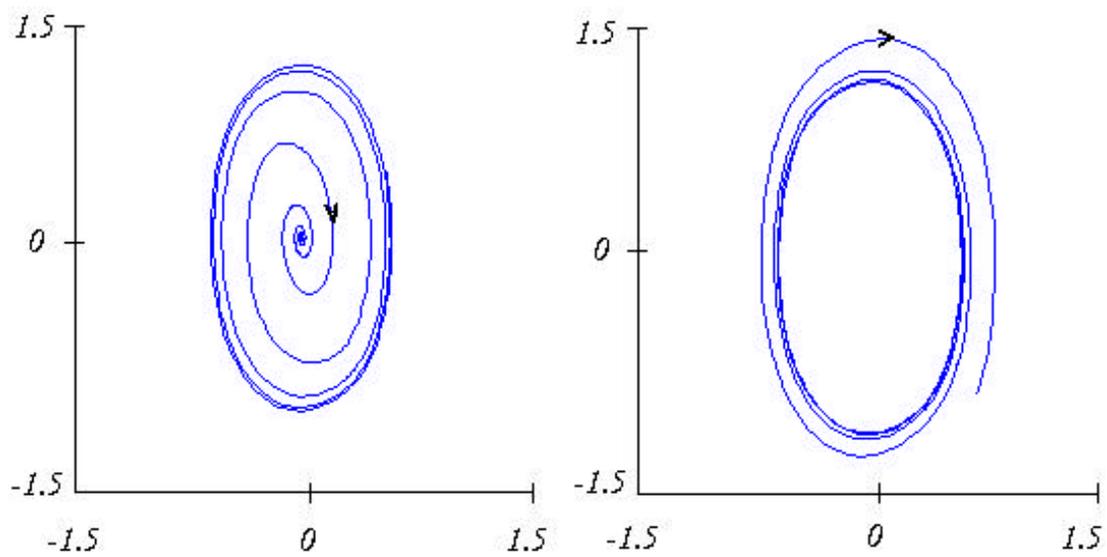


Figura 3.5 Órbita inestable que contiene a la órbita estable (nótense las dimensiones), por dentro de ella las trayectorias convergen a la órbita estable, por fuera escapan a in...nito.

## Chapter 4

# Clasi...cación de bifurcaciones

En este breve capítulo, haremos una relación de los tipos de bifurcaciones en el plano dadas entre las funciones  $\Phi(u(x))$ ;  $\Psi(u(x))$ ;  $\alpha(u(x))$  (las dos últimas tomadas de los capítulos precedentes) de acuerdo a los parámetros de los que dependen, tomando también en consideración la función identidad  $Id(u(x))$ .

$\Phi(u(x))$  tiene dependencia de un parámetro  $u_0$ . Por su parte  $\alpha(u(x))$  depende de un parámetro  $c$ . Finalmente  $\Psi(u(x))$  depende de parámetros, tanto  $c$  como  $u_0$ .  $Id(u(x))$  es independiente de parámetros, pero es interesante notar que, para distintos valores de los parámetros, las cuatro funciones anteriores se relacionan. Veámoslo para cada caso:

Puesto que la no linealidad  $\Phi(u(x))$  depende de  $c$ ; si  $c \neq 1$  tal linealidad tiende a la función  $g(u(x)) = 0$ . Ahora bien, a medida que  $c \rightarrow 0$ ,  $\Phi(u(x))$  y  $Id(u(x))$  se aproximan; y si  $c = 0$ , la no linealidad  $\Phi(u(x))$  pasa a ser la función  $Id(u(x))$ . La ilustración de la Figura 4.1 nos lo muestra.

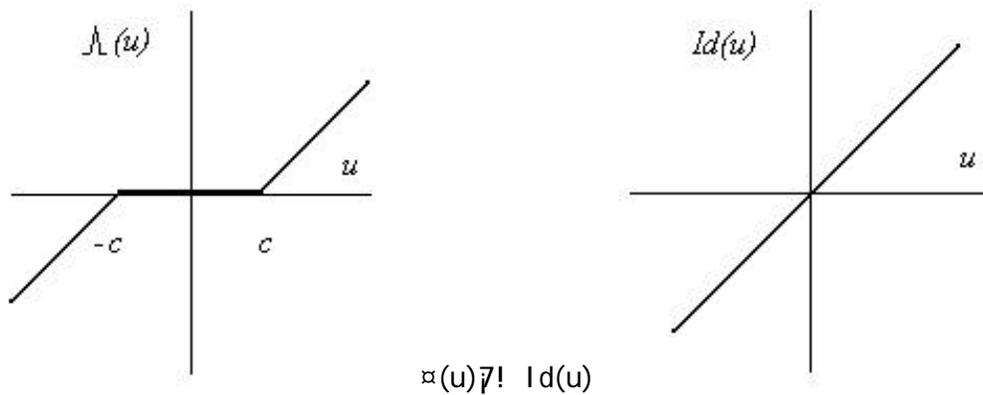


Figura 4.1 Comportamiento de funciones bajo un parámetro  $c$ .

En el mismo caso de la función  $\varpi(u(x))$ , si  $c = 0$  ocurre una bifurcación, teniendo entonces el sistema el comportamiento correspondiente al de un sistema lineal.

Ahora bien, la no linealidad  $\varphi(u(x))$  que depende de  $u_0$  y  $c$ , cuando  $c \neq 1$  es equivalente a la función  $g(u(x)) = 0$ . Cuando  $c \neq 0$ ,  $\varphi(u(x))$  se aproxima a  $\Phi(u(x))$ ; y si hacemos  $c = 0$ , la no linealidad  $\varphi(u(x))$  pasa a ser la no linealidad  $\Phi(u(x))$ . La Figura 4.2 nos lo ilustra.

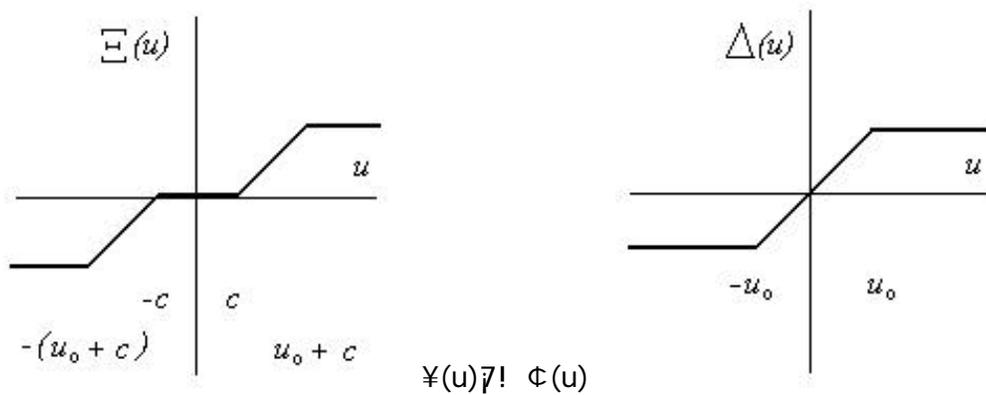


Figura 4.2 Comportamiento de funciones bajo un parámetro  $c$ .

Por lo tanto también ocurrirá bifurcación para  $c = 0$  en  $\forall(u(x))$ .

Notemos que en el mismo caso de  $\forall(u(x))$  existe dependencia también en  $u_0$ . Así, si  $u_0 = 0$ ,  $\forall(u(x))$  pasa a ser la función  $g(u(x)) = 0$ . Si  $u_0 \neq 0$  entonces la no linealidad  $\forall(u(x))$  se aproxima a la no linealidad  $\alpha(u(x))$ , ver la Figura 4.3.

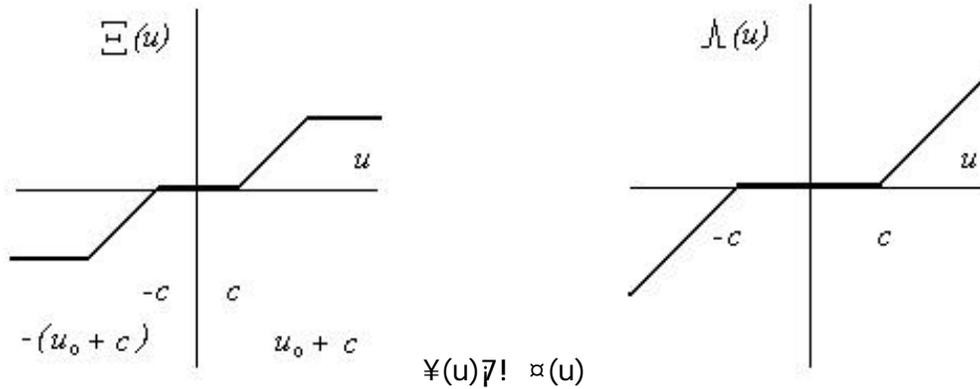


Figura 4.3 Comportamiento de funciones bajo un parámetro  $u_0$ .

La situación anterior implica también bifurcación si  $u_0 = 0$ , aunque ésta de menos interés, ya que nos remite un sistema de lazo cerrado a uno de lazo abierto sin retroalimentación.

Ahora, basados en los resultados de los capítulos anteriores, veremos de qué bifurcaciones estamos hablando y las clasificaremos, considerando el parámetro  $c$ , que es el de más importancia y el que representa verdaderos casos de bifurcación.

#### 4.1 Caso $\alpha(u)$ , en el que $c = 0$ implica $\alpha(u) = Id(u)$

Distinguiremos nuestra clasificación auxiliándonos del número  $n_s$  (el número de eigenvalores estables de la matriz  $A$ )

$n_s$	Bifurcación	Tipo de bifurcación
2	No	_____
1	Sí	De conexión heteroclínica entre 3 puntos de equilibrio a punto estable
0	Sí	De órbita periódica estable a punto de equilibrio estable

En el caso  $n_s = 2$  no hay bifurcación, tenemos un punto de equilibrio estable que sigue estable aun cuando  $c = 0$ .

Para  $n_s = 1$  la bifurcación referida involucra tres puntos de equilibrio en conexión heteroclínica, dos de ellos estables y uno silla, que se bifurcan en un punto estable. Al observar la Proposición 2.1, el Corolario 2.2 y revisando el Lema 2.3 podemos ver que, a medida que  $c \neq 0$  los puntos de equilibrio estables se acercan entre ellos, es decir, la variedad inestable del punto silla se contrae (preservándose la estable) hasta que ocurre la bifurcación en un punto de equilibrio estable.

Para el último de los casos,  $n_s = 0$ , revisando con detalle el Lema 2.3 y su demostración, es posible concluir que, a medida que  $c \neq 0$ , el radio de la órbita periódica estable se va haciendo más pequeño, hasta que la órbita se bifurca en un punto de equilibrio estable.

#### 4.2 Caso $\forall(u)$ , en el que $c = 0$ y $u_0 \neq 0$ implica $\forall(u) = \Phi(u)$

Igualmente, distinguiremos nuestros casos de acuerdo al número  $n_s$

$n_s$	Bifurcación	Tipo de bifurcación
2	No	————
1	Ver casos:	Ver casos
i	Sí	De conexión entre 5 puntos a conexión de variedades
ii (a)	Sí	De conexión entre 3 sillas y 2 órbitas a una entre 2 sillas y una órbita
ii (b)	Sí	De conexión heteroclínica entre 5 puntos a una conexión entre 3
0	Sí	2 órbitas periódicas, una inestable y otra estable, en un ciclo inestable

Similarmente a la función  $\alpha(u)$ , en el caso  $n_s = 2$  no existe bifurcación, pues tenemos un punto de equilibrio estable que lo sigue siendo cuando el parámetro  $c$  asume el valor 0.

El caso  $n_s = 1$  es muy rico e interesante:

En i (ver el análisis en el capítulo correspondiente a la función  $\forall(u(x))$ ) hay cinco puntos de equilibrio y tenemos que la región de atracción del origen,  $-(0)$ , que es  $W^s(0)$ , es decir, la variedad estable de dicho punto, se bifurca en una que es la unión de las variedades estables de los puntos  $e^+$  y  $e^i$ :  $W^s(e^+) \cup W^s(e^i)$ . Al producirse la bifurcación, de cinco puntos de

equilibrio (tres silla y dos estables), pasamos a tener tres puntos: dos silla y uno estable.

En ii (a) la región de atracción del origen,  $- (0)$ , pasa de ser una conexión heteroclínica entre tres puntos silla y dos órbitas periódicas inestables, a una conexión heteroclínica entre dos puntos silla y una órbita periódica inestable. Similarmente, al darse la bifurcación, de cinco punto de equilibrio se pasa a tres.

En ii (b) de una conexión heteroclínica entre cinco puntos de equilibrio (tres silla y dos estables) se pasa a una conexión heteroclínica entre dos puntos silla y uno estable.

Finalmente, en el caso  $n_s = 0$ , al darse la bifurcación pasamos de tener dos órbitas periódicas, una inestable que tiene en su interior a una estable, a una órbita periódica inestable. A medida que  $c \neq 0$ , la órbita estable se contrae, hasta que en la bifurcación, se convierte en un punto de equilibrio estable.

El propósito de este capítulo, además de una clasificación de bifurcaciones entre las no linealidades con que se ha trabajado (incluyendo la linealidad identidad), ha sido el de mostrar la riqueza dinámica y multiplicidad de comportamientos que ofrecen los sistemas lineales por partes.

Recalquemos que este estudio implica sistemas hiperbólicos, donde además pedimos que las matrices  $A_{k+1} = A_k + \frac{1}{\Delta k} (b_{k+1} \text{ } b_k) c_k^T$ , en el caso más general, sean Hurwitz. Por el lado de los sistemas hiperbólicos en los que estas matrices no son estables y se consideran además puntos de equilibrio repulsivos, la naturaleza de los sistemas suele implicar, si es que adicionalmente se demuestra que las trayectorias son acotadas, casos de caos y existencia de atractores extraños (véase de nuevo [10]).

## Chapter 5

# El caso n-dimensional

En este capítulo extenderemos algunos resultados de los capítulos anteriores, en particular el referente a la función  $\alpha = \alpha(u(x))$  al caso  $n \geq 3$ . Aclaremos que se dio énfasis especial al caso bidimensional ya que existen teoría y herramientas propias para aquél, que nos han permitido obtener resultados más específicos, hecho que no se puede conseguir para dimensiones mayores.

Empezaremos con los resultados de la función  $\alpha = \alpha(u)$  que, en consecuencia, induce el sistema:

$$x^0 = f_\alpha(x) = Ax + b_\alpha(u) \tag{5.1}$$

Puesto que también consideraremos que el par  $(A; b)$  es controlable, podemos escribir tal par de modo que  $A$  y  $b$  quedan dados por (1.15). Nótese que en (1.15)

$$\det A = \begin{cases} a_1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ a_1^2 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

y, si  $a_1 \neq 0$

$$A^{-1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & & & & & & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} & \begin{matrix} i & \frac{a_2}{a_1} & i & \frac{a_3}{a_1} & i & \frac{a_4}{a_1} & \cdots & i & \frac{a_n}{a_1} & \frac{1}{a_1} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{matrix} \end{matrix}$$

Como principio se considerará la naturaleza de los puntos de equilibrio.

**Proposición 5.1.** Sea el sistema (5.1), tal que  $\det A \neq 0$ , entonces:

(i) Si  $\det A > 0$  y  $n$  es par el sistema tiene un sólo punto de equilibrio: el origen:  $e_0$ . En el caso  $n$  impar, el sistema tiene tres puntos de equilibrio  $e_i$ ,  $e_0$  y  $e_+$ .

(ii) Si  $\det A < 0$  y  $n$  es par el sistema tiene tres puntos de equilibrio,  $e_i$ ,  $e_0$  y  $e_+$ . En el caso  $n$  impar, el sistema tiene un sólo punto de equilibrio: el origen:  $e_0$ .

**Demostración.** Similarmente al caso de  $E^2$  una de las desigualdades que se debe cumplir es

$$k^T e_i = ck^T (A + bk^T)^{-1} b > c$$

(para la otra, por simetría, el análisis es idéntico). Entonces:

$$k^T \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a_2+k_2}{a_1+k_1} & \frac{a_3+k_3}{a_1+k_1} & \frac{a_4+k_4}{a_1+k_1} & \cdots & \frac{a_n+k_n}{a_1+k_1} & \frac{1}{a_1+k_1} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c \end{pmatrix} > c$$

lo cual implica

$$k^T \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{c}{a_1+k_1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{k_1 c}{a_1 + k_1} > c$$

en donde, como anteriormente se ha considerado,  $c > 0$ . Puesto que  $\frac{1}{2} c^T (A + bk^T)^{-1} c > c$  entonces, de las condiciones de Hurwitz de estabilidad  $a_i + k_i < 0$ , entonces de  $k_1 c < (a_1 + k_1) c$  concluye que  $a_1 > 0$ . Ahora, empleando que  $\det A = \begin{cases} < a_1 & \text{para } n \text{ impar} \\ \vdots & \\ > a_1 & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$  obtenemos el resultado.

Q. E. D.

Deseamos expresar, basados en esta proposición, un resultado que relacione lo anterior con el número de eigenvalores estables  $n_s$  de la matriz  $A$ . Ello se consigue en el teorema siguiente:

**Teorema 5.2.** Sea el sistema (5.1), en el cual  $\det A \neq 0$ , entonces:

(i) Si  $n_s$  es par y  $n$  es par existe un sólo punto de equilibrio: el origen  $e_0$ . En el caso  $n$  impar hay tres puntos de equilibrio  $e_i$ ,  $e_0$  y  $e_+$ .

(ii) Si  $n_s$  es impar y  $n$  es par existen tres puntos de equilibrio:  $e_i$ ,  $e_0$  y  $e_+$ . En el caso  $n$  par hay un punto de equilibrio: el origen  $e_0$ .

Demostración. Las representaciones canónicas de  $A$  en general, son:

(a)  $J = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_k \end{pmatrix}$  donde las  $C_i$  son  $\lambda_i$ -bloques de Jordan expresados en la

siguiente forma:  $C_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}$  con las  $\lambda_i$  reales.

(b)  $J = \begin{pmatrix} C & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C \end{pmatrix}$ , donde  $C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \dots & 1 \\ -\beta & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ , en el caso en

el que se tienen eigenvalores complejos.

Para el caso (a), sabemos que  $\det J = \prod_{i=1}^k \det C_i$  y  $\text{sgn}(\det J) = (\lambda_i - 1)^{n_s}$ . De aquí vemos que si  $n_s$  es par  $\det J > 0$ , y si es impar  $\det J < 0$ ; empleando la proposición anterior se obtiene el resultado para (i) y (ii).

Para el caso (b)  $\det J = \det^k C$ . Notese que  $\det C > 0$  y por tanto  $\det J > 0$ , de hecho es inmediato ver que esto ocurre cuanto  $n_s$  es par porque los eigenvalores complejos dados por pares conjugados, tienen la misma parte real estable o inestable. Nuevamente, recurriendo a la proposición anterior, tenemos lo que se deseaba demostrar, para (i) y (ii).

Q. E. D.

## 5.1 Regiones de atracción

El problema de estudiar regiones de atracción para sistemas lineales por partes del tipo  $\alpha$ , en el caso  $n$ -dimensional es el que motivará esta sección, tal como se hizo en el caso de los sistemas bidimensionales. Antes que nada nos hacemos la pregunta: ¿Bajo qué condiciones estarán acotadas las trayectorias para estos sistemas? Recordemos que en los capítulos precedentes, para el plano, la respuesta fue afirmativa en algunos casos, y que tal información se encontraba en los eigenvalores.

Para responder esa pregunta de gran interés tenemos el siguiente lema, cuya demostración es inmediata, y que nos auxiliará para demostrar resultados posteriores.

**Lema 5.3.** Sea el sistema (5.1) tal que  $u$  es estabilizante. Entonces todas las trayectorias de dicho sistema están acotadas.

**Demostración.** Véase el Capítulo 3, la prueba es idéntica.

Q. E. D.

Ya que en esta sección deseamos caracterizar las configuraciones topológicas de las regiones de atracción de los sistemas con la no-linealidad  $\alpha$  o zona muerta, nos basaremos en la Teoría de los Sistemas Dinámicos Suaves (debido a la suavidad que se requerirá).

Consideraremos una función suave  $f_{\alpha}^{\epsilon}(x)$  la cual coincide con  $f_{\alpha}(x)$  en  $E^n \setminus E_{\epsilon}$ , donde

$$E_{\epsilon} = \{x : |k^T x + c| \geq \epsilon\}$$

Nótese que  $E_{\epsilon}$  satisface  $E_{\epsilon_1} \supset E_{\epsilon_2}$  y tiene también la siguiente propiedad: para un conjunto compacto  $D$ ,  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Vol}(D \cap E_{\epsilon}) = 0$ . Dado  $\epsilon > 0$ , definamos la función  $C^1$   $\alpha^{\epsilon}(r)$  como una aproximación de la función característica

$$\alpha^{\epsilon}(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } |r| \geq \epsilon \\ 0 & \text{si } |r| \leq \epsilon - \epsilon \\ r + \epsilon & \text{si } \epsilon - \epsilon < |r| < \epsilon \end{cases}$$

tal que  $\alpha^{\epsilon}(r) \leq \alpha(r)$  para todo  $r \in \mathbb{R}$  ( $\epsilon - \epsilon < |r| < \epsilon$ )  $\in (\epsilon - \epsilon; \epsilon)$  y  $0 \leq \frac{d\alpha^{\epsilon}}{dr} \leq 1$ . Entonces, la función  $f_{\alpha}^{\epsilon}(x) = Ax + b\alpha^{\epsilon}(k^T x)$  es la función  $C^1$  que coincide con  $f_{\alpha}(x)$  en  $E^n \setminus E_{\epsilon}$ .

Q. E. D.

Para demostrar lo que a continuación sigue, supondremos que la región de atracción del origen,  $\mathcal{A}^-(0)$ , está sumergida en una variedad suave de  $E^n$ , aunque de hecho, la hipótesis de suavidad será debilitada.

**Proposición 5.4.** Sea  $A$  una matriz con  $\frac{3}{4}(A) \frac{1}{2} C^i \in S^1 C^0$ . Entonces, si  $\mathcal{A}^-(0)$  es una variedad suave, la región de atracción  $\mathcal{A}^-(0)$  de  $x^0 = f_x(x)$  es no acotada.

**Demostración.** Supóngase que  $\mathcal{A}^-(0)$  es acotada.  $\frac{3}{4}(A) \frac{1}{2} C^i \in S^1 C^0$  implica que  $\text{div} f_x''(x) \cdot 0$  para toda  $x \in S^1 E^n$ , y que  $\frac{3}{4}(A + bk^T) \frac{1}{2} C^i$  implica que existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\text{div} f_x''(x) = \epsilon$  para todo  $x \in S^0 E^n$ . Por otro lado, se puede probar fácilmente la existencia de un número  $h$  tal que  $\text{Re } \lambda_j < h$  para todo  $\lambda_j \in \frac{3}{4}(A + rbk^T)$  donde  $0 < r < 1$ . Esto implica que  $\text{div} f_x''(x) < nh$  para todo  $x \in E^n$ . Entonces, si  $\mathcal{A}^-(0)$  está acotada, existen  $\epsilon$  y  $\delta > 0$  tales que

$$\int_{\mathcal{A}^-(0)} \text{div} f_x''(x) dV_n \cdot nh \text{Vol}(\mathcal{A}^-(0) \setminus E^n) + \epsilon \text{Vol}(S^0 \setminus \mathcal{A}^-(0) \cap E^n) < \delta$$

para todo  $\epsilon < \epsilon$ . De la invariancia de  $\mathcal{A}^-(0)$  se sigue que  $\int_{\mathcal{A}^-(0)} \text{div} f_x''(x); v(x) dx = 0$  para todo  $x \in \mathcal{A}^-(0)$ , donde  $v(x)$  es el campo vectorial normal unitario exterior a la frontera  $\mathcal{A}^-(0)$ . Esto, junto con la condición  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Vol}(D_\epsilon^T E^n) = 0$ , implica la existencia de un número  $L$  tal que

$$\int_{\mathcal{A}^-(0)} \text{div} f_x''(x); v(x) dx = \int_{\mathcal{A}^-(0) \cap E^n} \text{div} f_x''(x); v(x) dx \cdot L \quad (5.2)$$

Para  $\epsilon$  bastante pequeño esto es una contradicción al Teorema de la Divergencia (ver [46]). Por lo tanto  $\mathcal{A}^-(0)$  es no acotada.

Q. E. D.

A continuación enunciamos dos proposiciones que emplearemos un poco más adelante y cuya prueba y discusión se encuentran en [48].

**Proposición 5.5.** Si  $x$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable, entonces su región de atracción  $\mathcal{A}^-(x)$  es un conjunto abierto invariante homeomorfo a  $E^n$ .

**Proposición 5.6.** Si  $\mathcal{A}^-(x)$  es no densa en  $E^n$ , entonces la frontera de  $\mathcal{A}^-(x)$ ,  $\mathcal{A}^-(x)$ , es un conjunto cerrado invariante de dimensión  $n_j - 1$ . Si  $\mathcal{A}^-(x)$  es un conjunto acotado y  $\mathcal{A}^-(x)$  es una variedad suave, entonces, para  $n \leq 5$ ,  $\mathcal{A}^-(x)$  es homeomorfa a la esfera  $(n_j - 1)$  dimensional.

Ahora nos preguntamos qué ocurre cuando tenemos todos los eigenvalores en el semiplano

derecho (abierto) complejo o todos con parte real negativa. En lo que sigue, continuamos suponiendo la aproximación de  $f_\alpha(x)$  por la función suave  $f_\alpha''(x)$ .

### 5.1.1 Caso $n_s = 0$

**Teorema 5.7.** Sea  $A$  una matriz de orden par con todos sus eigenvalores en  $C^+$  y supóngase que  $u = k^T x$  es estabilizante. Entonces para el sistema (5.1) existe un conjunto compacto al cual todas las trayectorias convergen, unas desde fuera de ella y otras desde el origen. De hecho ese conjunto contiene un conjunto homeomorfo a  $S^{n-1}$ .

**Demostración.** Puesto que  $u = k^T x$  es estabilizante, para el sistema  $\dot{x} = f_\alpha(x)$  escrito en la forma  $\dot{x} = (A + bk^T)x + b\Phi(k^T x)$  (con  $b^0 = \int b$ ) vemos que  $\frac{3}{4}(A + bk^T) \in C^+$  y existe una matriz  $P$  simétrica definida positiva que satisface la ecuación  $P(A + bk^T) + (A + bk^T)^T P = -I$ . Ahora, sea función de Lyapunov  $V = x^T P x$ , de ella obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= x^T [P(A + bk^T) + (A + bk^T)^T P]x + (x^T P b^0 + b^{0T} P x)\Phi(k^T x) \\ &= -\|x\|^2 + (x^T P b^0 + b^{0T} P x)\Phi(k^T x) \cdot \|x\| \leq -\|x\|^2 + 2c\|x\| \|P\| \|b^0\| \|x\| \end{aligned}$$

(nótese que en este caso  $\Phi(k^T x)$  está acotada por  $c$ , con  $c > 0$ ). Esto implica que  $\frac{dV}{dt} < 0$  siempre que  $\|x\| > 2c\|P\|\|b^0\|$ , es decir si está fuera de una bola  $n$ -dimensional de radio a lo más  $2c\|P\|\|b^0\|$ . Puesto que  $A$  es de orden par y  $\frac{3}{4}(A) \in C^+$ , por el Teorema 5.2 sabemos que  $\dot{x} = f_\alpha(x)$  tiene un sólo punto de equilibrio el cual es inestable. Por lo tanto todas las trayectorias van a un conjunto compacto. Tomando la variable  $t$  negativa, y empleando las Proposiciones 5.5 y 5.6 concluimos la demostración.

Q. E. D.

Podríamos a continuación preguntarnos qué ocurre cuando, en el mismo caso de  $A$  con orden par, ahora todos los eigenvalores son estables.

### 5.1.2 Caso $n_s = n$

**Teorema 5.8.** Sea  $A$  una matriz de orden par con todos sus eigenvalores en  $C^-$  y supóngase que  $u = k^T x$  es estabilizante. Entonces para el sistema (5.1) las soluciones son acotadas y existe un conjunto compacto invariante de volumen cero que contiene a los conjuntos  $\omega$ -límite

! (x) de todos los puntos  $x \in E^n$ . Si  $\mathcal{O}$  es una variedad suave, entonces  $\mathcal{O}$  es no acotada.

**Demostración.** Antes que nada probaremos que todas las soluciones están acotadas. Puesto que  $u = k^T x$  es estabilizante, para el sistema  $\dot{x} = f_x(x)$  escrito en la forma  $\dot{x} = (A + bk^T)x + b\phi(k^T x)$  (con  $b^0 = \|b\|$ ) vemos que  $\frac{1}{2}(A + bk^T) \in C^1$  y existe una matriz  $P$  simétrica definida positiva que satisface la ecuación  $P(A + bk^T) + (A + bk^T)^T P = -I$ . Ahora, sea función de Lyapunov  $V = x^T P x$ , de ella obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= x^T [P(A + bk^T) + (A + bk^T)^T P]x + (x^T P b^0 + b^{0T} P x)\phi(k^T x) \\ &= -\|x\|^2 + (x^T P b^0 + b^{0T} P x)\phi(k^T x) \leq -\|x\|^2 + 2c\|x\| \|P\| \|b\| \|k\| \end{aligned}$$

(similarmente  $\phi(k^T x)$  está acotada por  $c$ , con  $c > 0$ ). Esto implica que  $\frac{dV}{dt} < 0$  siempre que  $\|x\| > 2c\|P\| \|b\| \|k\| =: r$ . Las soluciones están contenidas en  $V_r = \{x \in E^n : V(x) \leq \sup_{y \in B^n(r)} V(y)\}$  y de ello podemos concluir que están acotadas. Ahora, sea  $\alpha > 0$  una constante tal que  $\operatorname{Re}(\lambda_j) < -\alpha$  para todo  $\lambda_j \in \sigma(A + bk^T)$ . Por la fórmula de Abel-Jacobi-Liouville, tenemos

$$\det e^{At} = e^{(\operatorname{tr} A)t} \cdot e^{i\theta t}, \quad \det e^{(A+bk^T)t} = e^{\operatorname{tr}(A+bk^T)t} \cdot e^{i\theta t}.$$

Sea  $c$  un número positivo tal que  $B_r \cap D = \{x \in E^n : V(x) \leq c\}$ . Ahora, el flujo envía el conjunto compacto  $D$  en el conjunto compacto  $\hat{A}_t D$ , con  $\operatorname{Vol}(\hat{A}_t D) = (\det \hat{A}_t) \operatorname{Vol}(D) \cdot \operatorname{Vol}(D) \exp(i\theta t)$ . Ya que todas las trayectorias cruzan hacia adentro de la frontera de  $D$ , ocurrirá que  $\hat{A}_{t_1} D \cap \hat{A}_{t_2} D = \emptyset$  si  $t_1 > t_2$ . Entonces, toda trayectoria está contenida finalmente en  $D^\alpha = \bigcap_{t>0} \hat{A}_t(D)$ . Esto implica la existencia de un conjunto de volumen cero  $D^\alpha$  contenido en  $B^n(r)$ , hacia el cual tienden todas las trayectorias (ver [48]). Finalmente, que el conjunto  $\mathcal{O}$  sea no acotado, es consecuencia de la Proposición 5.4.

Q. E. D.

### 5.1.3 Caso $n = n_u + n_s$ ( $n_u$ eigenvalores con parte real positiva y $n_s$ eigenvalores con parte real negativa)

La siguiente pregunta es qué ocurrirá si se tienen  $n_u$  eigenvalores con parte real positiva y  $n_s$  eigenvalores con parte real negativa, de modo que  $n = n_u + n_s$ . Para ello estableceremos el

siguiente teorema.

**Teorema 5.9.** Sea  $A$  una matriz con  $n_u$  eigenvalores con parte real positiva y  $n_s$  eigenvalores con parte real negativa, tal que  $n = n_u + n_s$ . Sea el sistema  $\dot{x} = f(x)$  y  $x(t) = (x_1(t); x_2(t))$  su solución donde  $x_1(t)$  tiene  $n_u$  componentes y  $x_2(t)$  tiene  $n_s$  componentes. Entonces, para el sistema anterior existen dos números positivos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , y una transformación lineal de coordenadas  $T$  tal que la región  $T^{-1}(E^{n_s} \times S^{n_u-1}(\alpha_1))$  es atractora de las componentes  $x_1(t)$  de las trayectorias, es decir,  $x_1(t)$  converge a un conjunto compacto contenido en la frontera de cilindro  $T^{-1}(E^{n_s} \times S^{n_u-1}(\alpha_1))$ . Por otro lado, dada una condición inicial  $x^0$  existe un tiempo  $t^*(x^0)$  tal que la parte  $x_2(t)$  de las trayectorias está contenida en el cilindro  $T^{-1}(B^{n_s}(\alpha_2) \times E^{n_u})$  para todo  $t > t^*$ .

**Demostración.** Sabemos que existe una transformación  $T$  que envía al sistema  $\dot{x} = Ax + bu$  al sistema

$$\dot{x}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \alpha A^+ & 0 & \alpha A_x & \alpha \bar{b}_1 \\ 0 & A_i & 0 & \bar{b}_2 \end{pmatrix} x^0 + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \bar{b}_1 \\ 0 \\ \alpha \bar{b}_2 \end{pmatrix} u$$

con  $A^+$  ( $n_u \times n_u$ ) una matriz estable,  $A_i$  ( $n_s \times n_s$ ) una matriz inestable y  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ , de

este modo:  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha A^+ & 0 \\ 0 & A_i \end{pmatrix} x \in E^{n_u} \times E^{n_s}$ . Empleando lo anterior, y que  $\dot{x} = f(x)$  puede ser

escrito en la forma  $\dot{x} = (A + bk^T)x + b\phi(k^T x)$  tenemos que el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^0 &= A^+ x_1 + \bar{b}_1 \phi(u) \\ \dot{x}_2^0 &= A_i x_2 + \bar{b}_2 \phi(u) \end{aligned}$$

es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^0 &= (A^+ + \bar{b}_1 k^T) x_1 + \bar{b}_1^0 \phi(u) \\ \dot{x}_2^0 &= (A_i + \bar{b}_2 k^T) x_2 + \bar{b}_2^0 \phi(u) \end{aligned}$$

con  $\bar{b}_i^0 = \alpha_i \bar{b}_i$  y donde las matrices  $A^+ + \bar{b}_1 k^T$  y  $A_i + \bar{b}_2 k^T$  son estables. Ahora bien, tomando una matriz simétrica definida positiva  $P_1$  ( $n_u \times n_u$ ) que satisface

$$P_1(A^+ + \bar{b}_1 k^T) + (A^+ + \bar{b}_1 k^T)^T P_1 = -I$$

y tomando  $V = x_1^T P_1 x_1$  tenemos:

$$\frac{dV}{dt} = -c \|x_1\|^2 + 2c \|x_1\| \|P_1\| \|b_1\|$$

con  $c > 0$ . Entonces  $\frac{dV}{dt} < 0$  si  $\|x_1\| > 2\|P_1\| \|b_1\|$ , i. e., si existe  $\mathbb{R}_1$  tal que para un  $x^0 = (x_1^0; x_2^0)$ , con  $\|x_1^0\| \in \mathbb{R}_1$ , todas las trayectorias  $A_t(x^0)$  están acotadas y convergen a un conjunto compacto que contiene un conjunto homeomorfo a  $S^{n-1}$  (por el Teorema 5.7). Recuérdese que en este caso el origen es inestable. Ello nos permite concluir que  $x_1(t) \in T^{-1}(E^{n_s} \cap S^{n-1}(\mathbb{R}_1))$ :

Por otro lado, del Teorema 5.8 sabemos que existe  $P_2$  ( $n_s \in n_s$ ) que satisface:

$$P_2(A^i + \bar{b}_2 k^T) + (A^i + \bar{b}_2 k^T)^T P_2 = -I$$

y de la función de Lyapunov  $V = x_2^T P_2 x_2$  obtenemos:

$$\frac{dV}{dt} = -c \|x_2\|^2 + 2c \|x_2\| \|P_2\| \|b_2\|$$

con  $c > 0$ , así que  $\frac{dV}{dt} < 0$  si  $\|x_2\| \in \mathbb{R}_2$ , podemos ver que las soluciones están contenidas en  $V_{\mathbb{R}_2} = \{x \in E^n : V(x) \leq \sup_{y \in B^n(\mathbb{R}_2)} V(y)\}$ , de ello podemos concluir que están acotadas. Después, empleando los mismos razonamientos que en el Teorema 5.8, sabemos que hay una región  $B^n(\mathbb{R}_2)$  en la cual están contenidas las coordenadas  $x_2(t)$  de las trayectorias (acotadas), para todo  $t > t^a$  a partir de un  $t^a(x^0)$ , de donde concluimos que están contenidas en el cilindro

$$T^{-1}(B^{n_s}(\mathbb{R}_2) \cap E^{n_u}).$$

Q. E. D.

**Corolario 5.10.** Sea  $A$  como en el Teorema 5.9. Entonces existe un conjunto compacto  $E$  contenido en el conjunto acotado  $T^{-1}(B^{n_s}(\mathbb{R}_2) \cap S^{n-1}(\mathbb{R}_1))$ , tal que el conjunto  $\omega$ -límite converge al conjunto  $E$  y  $\omega(x^0) \cap T^{-1}(B^{n_s}(\mathbb{R}_2) \cap S^{n-1}(\mathbb{R}_1))$ , para todo  $x^0 \in E^n$ .

**Demostración.** Es consecuencia de aplicar el Teorema 5.9, considerando  $x(t) = (x_1(t); x_2(t))$  con los casos  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  como en el teorema y al conjunto  $E$  como la unión de dos conjuntos compactos.

Q. E. D.

#### 5.1.4 Relación entre regiones de atracción de puntos de equilibrio y variedades estables e inestables.

Desamos ahora conocer un poco acerca de la relación que existe entre, ya sea las regiones de atracción de los puntos de equilibrio (el origen u otros) y las variedades estables o inestables de estos.

**Definición 5.11.** Dos conjuntos compactos invariantes (heteroclínicos)  $A_1$  y  $A_2$  están conectados si existe una trayectoria cuyos conjuntos  $\omega$ -y  $\alpha$ -límite son iguales a  $A_1$  y  $A_2$ .

Establezcamos el siguiente lema que nos será de mucha utilidad:

**Lema 5.12.** Sea  $o$  un elemento crítico hiperbólico de (5.1). Si  $o$  está conectado con el origen, entonces se cumple que:  $W^s(o) \cap \omega(o) \neq \emptyset$ . Donde  $\omega(o)$  denota la región de atracción del elemento crítico  $o$ .

**Demostración.** Si  $o$  está conectado con el origen entonces  $W^u(o) \cap \omega(o) \neq \emptyset$ ; (recuérdese, por lo que se ha probado antes, que en este tipo de sistemas, el que haya más elementos críticos distintos del origen implica que el origen es un punto de tipo silla o repulsor). Sea  $D \subset W^u(o) \cap \omega(o)$  un  $m$ -disco, con  $m = \dim(W^u(o))$ . Sea  $\gamma \subset W^s(o)$  arbitrario. Para un  $\epsilon > 0$ , sea  $N$  un  $m$ -disco transversal a  $W^s(o)$  con el elemento  $0$  contenido en una  $\epsilon$ -vecindad de  $\gamma$ . Por el  $\epsilon$ -lema [39], existe  $t > 0$  tal que  $\hat{A}_t(N)$  es cercano a  $D$  de modo que  $\hat{A}_t(N)$  contiene un punto  $p \in \omega(o)$ . Así:  $\hat{A}_t(p) \subset N$ . Puesto que  $\omega(o)$  es invariante, esto muestra que  $N \cap \omega(o) \neq \emptyset$ . Haciendo  $\epsilon \rightarrow 0$ , se prueba que  $\gamma \cap \omega(o) \neq \emptyset$ . Así  $W^s(o) \cap \omega(o) \neq \emptyset$ . Puesto que  $W^s(o)$  y  $\omega(o)$  son conjuntos disjuntos, se sigue que  $W^s(o) \cap \omega(o) \neq \emptyset$ .

Para probar un resultado adicional, nos basaremos en el siguiente teorema, cuya prueba se encuentra en [9]:

**Teorema 5.13.** Considérese un sistema dinámico  $\dot{x} = f(x)$  (con  $x \in E^n$ ) que satisfice condiciones para unicidad y existencia global de soluciones. Supongamos que cumple lo siguiente:

- (i) Todos los elementos críticos en la frontera de la región de atracción son hiperbólicos.
- (ii) Las variedades estable e inestable de los elementos críticos en la frontera de la región de atracción satisfacen la condición de transversalidad.
- (iii) Cada trayectoria en la frontera de la región de atracción se aproxima a uno de los elementos críticos cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Sean  $x_i, i = 1; 2; \dots; l$  los puntos de equilibrio y  $o_j, j = 1; 2; \dots; m$  las órbitas periódicas en la frontera de la región estable  $@-(0)$  de un punto de equilibrio asintóticamente estable. Entonces:

$$@-(0) = \bigcup_i W^s(x_i) \bigcup_j W^s(o_j).$$

Q. E. D.

**Teorema 5.14.** Si todos los elementos críticos de  $x^0 = f_\alpha(x), o_j (j = 1; 2; \dots)$  son hiperbólicos y están conectados con el punto 0, el origen, entonces:

$$W^s(0) = \bigcup_j @-(o_j)$$

**Demostración.** La prueba de este resultado es consecuencia del Teorema 5.13. La condición (iii) sigue del Corolario 5.10 y por el lema anterior, la condición (ii) se puede reemplazar por la condición de conectividad.

Q. E. D.

## Chapter 6

# Órbitas periódicas y estabilidad de sistemas lineales por partes

Una pregunta que parece natural hacerse respecto a los sistemas lineales por partes, y que se refiere al tema de la estabilidad, es la siguiente:

¿Que en cada subsistema de su partición, un sistema lineal por partes sea estable, ¿implicará que es globalmente asintóticamente estable?

Algo también natural sería el pensar en una respuesta afirmativa para tal cuestión. En 1996 J. Bernat y J. Llibre [8], buscando un contraejemplo para las conjeturas de Kalman y Markus-Yamabe, llevaron un problema de sistemas no lineales de clase  $C^1$  al contexto de los sistemas lineales por partes. Puesto que la conjetura garantizaba, bajo ciertas condiciones, estabilidad global, estos investigadores mostraron que existía un sistema lineal por partes que cumplía las condiciones dadas y que a su vez mostraba la existencia de una órbita periódica en su dinámica, con lo cual echaron abajo una conjetura que algunos creían cierta. Tomando lo anterior como ejemplo, la pregunta que nos habíamos planteado ofreció dos interesantes problemas:

1. Encontrar un sistema lineal por partes, dependiente de un parámetro  $\mu$ , que fuera estable en cada región y a nivel global para ciertos valores del parámetro, y que para algún valor de éste presentara una bifurcación en una órbita periódica.

2. Dado que tal sistema sólo podía estar definido en  $E^n$ , para  $n \geq 3$ , un problema adicional consistía en demostrar rigurosamente la existencia del ciclo límite referido.

De manera fortuita, mediante simulaciones numéricas, encontramos un sistema con dependencia en un parámetro  $\mu$  que parecía satisfacer las condiciones del primer problema. Esto sugería que, en caso de ser demostrada la existencia de una órbita periódica en tal sistema estable en cada región, obtendríamos automáticamente (a manera de contraejemplo) una respuesta negativa a la pregunta planteada al inicio del capítulo.

El sistema que se encontró fue del tipo:

$$\dot{x} = f_{\Phi}(x) = Ax + b\Phi(u) \quad (6.1)$$

donde  $u(x) = k^T x$  y  $\Phi(u) : E \rightarrow E$  está definida por

$$\Phi(u(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \cdot u_0 \leq -1 \\ u(x) & \text{si } |u \cdot u_0| < 1 \\ u_0 & \text{si } u \cdot u_0 \geq 1 \end{cases} \quad (6.2)$$

Esta función característica,  $\Phi(u)$  hace, como ya lo hemos mencionado, que nuestro sistema sea lineal por partes, el espacio de estados se divide en tres regiones, en cada una de las cuales tenemos un sistema lineal. No se pierde generalidad si se considera  $u_0 = 1$ . La partición de  $E^n$  está definida por las regiones:  $S^+$ ;  $S^i$  y  $S^0$ , dadas por:

$$S^{+(i)} = \{x \in E^n : \Phi(u) = \pm(i)1\}; \quad S^0 = \{x \in E^n : |u(x)| < 1\}$$

Para los objetivos de este capítulo consideramos en particular sistemas donde la matriz  $A$  es Hurwitz, i.e., todos sus eigenvalores tienen parte real negativa, respetando la hipótesis que pusimos al principio de este trabajo. En nuestro caso, según [48], existe un sólo punto de equilibrio que es el origen. Recuérdese que el sistema lineal  $(A + bk^T)x$  es también Hurwitz.

Uno de los propósitos de este capítulo es el de dar una demostración rigurosa de la existencia de una órbita periódica en sistemas como el (6.1)-(6.2), para  $n \geq 3$ , con las condiciones anteriores, cosa que no se ha hecho en otros estudios sobre el tema. Con ello mostraremos, además, lo difícil que es dar una prueba formal de la existencia de ciclos límite para sistemas tridimensionales o de orden mayor.

Lo que haremos a continuación aprovechará el hecho de que trabajaremos con un sistema

simétrico. Para sistemas más generales, trataremos el asunto más adelante.

Es usual que un sistema como el (6.1)-(6.2), sea considerado Hurwitz. Mostraremos que esto, en general, no ocurre. La función característica  $\Phi(u)$  (que, como hemos dicho, dota al sistema de propiedades de no linealidad) puede causar la existencia de órbitas periódicas y, en consecuencia, la pérdida de estabilidad en un sistema estable. Ésta es la motivación del presente capítulo.

En [5] se ha demostrado que en  $E^2$  un sistema Hurwitz a lazo abierto, bajo una retroalimentación lineal acotada (nuestra función característica), es globalmente asintóticamente estable. Por otro lado, en [1] mediante una bifurcación de Hopf, se ha demostrado la existencia de una órbita periódica (para  $n = 3$ ), pero en el caso en el que la matriz  $A$  no es Hurwitz (de hecho  $A$ , en ese caso, tiene un eigenvalor positivo y dos imaginarios).

Es bien conocido que una de las consecuencias de acotar puede ser la presencia de múltiples puntos de equilibrio, lo cual implica dinámicas complicadas o la aparición de órbitas periódicas del sistema a lazo cerrado [10]. Ya hemos mencionado que existen algunos trabajos que estudian rigurosamente las propiedades de estos sistemas, en los que se han empleado métodos cualitativos de análisis, y se ha hecho la caracterización topológica de la región de atracción o de sus bifurcaciones [48]. Existen además trabajos en los que se aborda el problema de maximizar la región de atracción del origen, para el caso bidimensional se puede consultar [20], [17], aunque su enfoque ha sido desde un punto de vista menos formal, restringido al análisis numérico.

Cuando se trata el problema de demostrar rigurosamente la existencia de órbitas periódicas en sistemas con función característica  $\Phi(u)$ , para dimensión mayor o igual que 3, se tienen dificultades, ya que no se pueden extender a esas dimensiones teoremas como el de Poincaré-Bendixon. En [30], [31] y [32] se proponen criterios muy interesantes, mediante la teoría de variedades y el álgebra exterior, para la no existencia de órbitas periódicas; en éstos se trabaja con normas matriciales especiales, matrices extendidas, y ciertos criterios de la geometría diferencial. Estos resultados son válidos, sin embargo, sólo cuando el campo vectorial  $f(x)$  es de clase  $C^1$ , hecho que no satisfacen los campos de los sistemas lineales por partes, pues hemos probado que son no diferenciables en las fronteras  $\gamma_i$  que determinan las particiones.

Para la predicción de órbitas periódicas se ha tenido cierto éxito en la aplicación del principio de balance armónico [2], [33] la desventaja de este método es que sólo se puede aplicar con

facilidad para el caso del primer armónico y calcular una órbita de segundo armónico o de armónicos superiores es demasiado complicado, además del limitante que implica que el método es un método aproximado; de hecho, es un problema abierto demostrar que es necesaria y suficiente la presencia de una órbita periódica de primer armónico para que exista una órbita periódica real.

Además de nuestro interés por encontrar una demostración formal de existencia de órbita periódica en sistemas  $n$ -dimensionales del tipo referido, con  $n \geq 3$ , responderemos la pregunta formulada al principio del capítulo, que, para nuestro caso particular, puede reformularse así: Para sistemas estables a lazo abierto, dada una retroalimentación estabilizante  $k^T x$ , ¿continuará siendo el sistema saturado de lazo cerrado globalmente asintóticamente estable?

Tal pareciera que la respuesta es afirmativa, sin embargo probaremos que aun en el caso en el que el sistema a lazo abierto es estable y el cerrado también es estable, se presentan casos de existencia de órbita periódica. La demostración de esta afirmación consistirá en encontrar un sistema en  $E^3$  que sea estable en los casos a lazo abierto y cerrado, pero que al acotar la retroalimentación se presente una órbita periódica, además de probar que efectivamente esa órbita existe. Esta demostración responderá nuestra pregunta.

Para la prueba de existencia de una órbita periódica encontraremos una aplicación de Poincaré y reduciremos el estudio de existencia de órbita al problema de encontrar un punto fijo o, en otras palabras, el cero de un cierto campo vectorial. La prueba de existencia se basará en el Teorema de Newton Kantorovich. Este planteamiento fue inicialmente propuesto por Bernat y Llibre en [8], para ofrecer un contraejemplo a la conjetura de Markus-Yamabe en dimensiones mayores o iguales que 3. La unicidad de la órbita será consecuencia del Teorema de Newton Kantorovich. La estabilidad de tal punto fijo se demostrará analizando los eigenvalores de la aplicación linealizada alrededor del punto fijo. El método para la construcción de ésta se basa en la estructura geométrica del espacio fase del sistema propuesto. Aprovecharemos el hecho de que el sistema es lineal por partes. Nótese que, aunque el sistema  $\dot{x} = f_{\alpha}(x)$  no es diferenciable, la aplicación de Poincaré sí lo es.

## 6.1 Un método para encontrar existencia de órbitas periódicas

En esta sección ofrecemos un método para verificar la existencia de órbitas periódicas en sistemas del tipo (6.1)-(6.2). Este método es una generalización al propuesto por Bernat y Llibre en [8] y que les resultó de utilidad para encontrar su contraejemplo a una conocida conjetura de Kalman y de Markus-Yamabe.

Para encontrar la aplicación de Poincaré consideremos dos hiperplanos a los que llamaremos  $\mathcal{H}_+$  y  $\mathcal{H}_-$ . Estos hiperplanos coincidirán con los que determinan la partición para el sistema (6.1)-(6.2), lo cual facilitará nuestra tarea.

Obsérvese que por la simetría del sistema referido, una órbita periódica que pasa por el punto, digamos  $x_0 := (x_1; x_2; \dots; x_n)$ , contenido en el hiperplano  $\mathcal{H}_+ := \{x \mid k^T x = u_0\}$ , lo hace también en el punto  $-x_0$  perteneciente a  $\mathcal{H}_- := \{x \mid k^T x = -u_0\}$ . Bajo esta consideración denotemos por

$$t(x_0) := \inf_{t > 0} \{t \mid k^T \phi(t; x_0) + u_0 = 0\}$$

al número para el que  $\phi(t; x)$  va hacia adelante en el tiempo de  $x_0 \in \mathcal{H}_+$  al mismo hiperplano  $\mathcal{H}_-$  (véase la Figura 6.1), donde  $\phi(t; x_0)$  es la solución a  $\dot{x} = Ax + b$  con condición inicial  $\phi(0; x_0) = x_0$ .

Si  $A$  es una matriz estable, existe un hiperplano  $(n-2)$ -dimensional  $L \subset \mathcal{H}_+$  donde el campo vectorial  $Ax + b$  es tangencial a  $\mathcal{H}_+$ , i.e.,  $k^T(Ax + b) = 0$ . El hiperplano  $L$  divide en dos regiones  $\mathcal{H}_+^+$  y  $\mathcal{H}_+^-$  al hiperplano  $\mathcal{H}_+$ , de modo tal que  $\mathcal{H}_+ = \mathcal{H}_+^+ \cup L \cup \mathcal{H}_+^-$ , donde  $\mathcal{H}_+^+ = \{x \in \mathcal{H}_+ \mid k^T(Ax + b) > 0\}$  y  $\mathcal{H}_+^- = \{x \in \mathcal{H}_+ \mid k^T(Ax + b) < 0\}$ .

Notemos que el campo vectorial se dirige de la región  $\mathcal{H}_+^+$  a la región  $\mathcal{H}_+^-$ . La solución  $\phi(t(x_0); x_0)$  define una semi aplicación de Poincaré

$$T_1 : \mathcal{H}_+^+ \rightarrow \mathcal{H}_+^-$$

dada por  $T_1(x_0) = \phi(t(x_0); x_0)$ .

Por otra parte, consideremos el hiperplano  $\mathcal{H}_-$  y sea  $s(s; x_0)$  la solución a  $\dot{x} = (A + bk^T)x$ , con condición inicial  $s(0; x_0) = x_0$ ,  $s(s; x_0) > 0$  el número para el que  $s(s; x_0)$  va hacia atrás en el tiempo de  $x_0 \in \mathcal{H}_-$  al hiperplano  $\mathcal{H}_+$ . Bajo esta definición,  $s(s; x_0)$  quedará

expresado como

$$s(j, x_0) := \inf_{s > 0} \{k^T \Phi(j, s; j, x_0) + u_0 = 0\}.$$

No es difícil ver que existe un conjunto de condiciones iniciales  $\Phi_+ \cap \mathbb{R}^n$  para el cual  $s(j, x_0)$  está bien definido ( $s(j, x_0) > 0$ ). Dado  $j, x_0 \in \Phi_+$ ; existe  $r > 0$  tal que la solución  $\Phi(j, s; j, x)$  determina una semi aplicación

$$T_2 : B_r(j, x_0) \cap \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

definida por  $T_2(j, x) = \Phi(j, s(j, x); j, x)$ .

En consecuencia, empleando el hecho de la simetría del sistema (6.1)-(6.2), observamos que la existencia de una órbita periódica que pasa por  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  implica necesariamente que se satisfaga la siguiente ecuación (ver Figura 6.1):

$$T_1(x_0) = T_2(j, x_0) \tag{6.3}$$

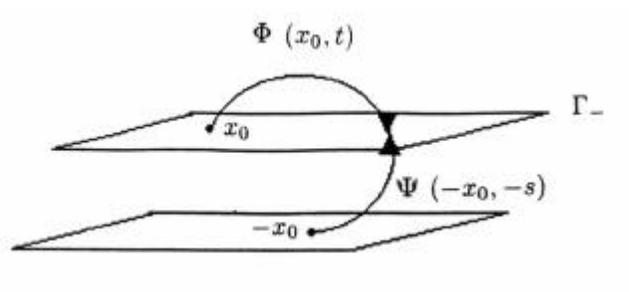


Figura 6.1 Semi aplicación de retorno para detección de una órbita periódica.

o equivalentemente:

$$\Phi(t(x_0); x_0) = \Phi(j, s(j, x_0); j, x_0) \tag{6.4}$$

De este modo, si existen números  $s, t$ , y un  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  que satisfacen las ecuaciones (6.3) y (6.4), existirá una órbita periódica, en este caso particular una órbita periódica simétrica.

Las anteriores ecuaciones equivalen a un sistema de  $n$  ecuaciones con  $n + 2$  incógnitas (las  $n$  coordenadas de  $x_0$  y  $t = t(x_0)$  y  $s = s(x_0)$ ). Así, para encontrar una órbita periódica debemos agregar dos ecuaciones más. Una de ellas se obtiene del hecho de que  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ :

$$x_n = \frac{1}{k_n} (u_0 - k_{n-1} x_{n-1} - k_1 x_1) \quad (6.5)$$

(con  $k_n \neq 0$ ). La otra puede obtenerse al recordar que  $\phi(t; x_0)$  también está contenida en  $\mathbb{R}^n$ :

$$k^T \phi(t; x_0) + u_0 = 0 \quad (6.6)$$

Resumiendo lo anterior, existe una órbita periódica simétrica para el sistema (6.1)-(6.2), la cual pasa por  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , si y sólo si  $(x_0; t; s)$  satisface las siguientes ecuaciones no lineales

$$\phi(t; x_0) = \phi(s; x_0), \quad k^T \phi(t; x_0) + u_0 = 0, \quad x_n = \frac{1}{k_n} (u_0 - k_{n-1} x_{n-1} - k_1 x_1) \quad (6.7)$$

En otras palabras, la prueba de existencia de un ciclo límite del sistema (6.1)-(6.2) es equivalente a la existencia de una solución  $(x_0; t; s)$  al sistema de ecuaciones (6.7).

Para simplificar el problema (6.7), obsérvese que por (6.5) el sistema (6.7) puede reducirse a uno de  $n + 1$  ecuaciones con  $n + 1$  incógnitas, el cual denotaremos por

$$g_i(t; s; x_1, \dots, x_{n-1}) = 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, n + 1. \quad (6.8)$$

Más que encontrar una solución exacta (lo cual es imposible pues las ecuaciones (6.8) son trascendentes), nos interesa probar que tal solución existe para el sistema anterior, lo que equivale demostrar la existencia de una órbita periódica. Para tal propósito existe un teorema, el Teorema de Newton-Kantorovich, que da condiciones de existencia de solución.

El teorema afirma lo siguiente:

**Teorema 6.1:** (Newton-Kantorovich): Dada una función  $g : C \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  y un conjunto convexo  $C_0 \subset C$ , supóngase que  $g$  es  $C^1$  en  $C_0$  y que se satisfacen las siguientes condiciones:

- (a)  $\|Dg(z)\| \leq L \|z - z^0\|$  para todo  $z; z^0 \in C_0$
- (b)  $\|Dg(z_0)^{-1} g(z_0)\| \leq \epsilon$
- (c)  $\|Dg(z_0)^{-1}\| \leq M$

para un  $z_0 \in C_0$ . Considérense  $h = \frac{1}{2}$  y  $r_{1,2} = \frac{1}{h} \sqrt{1 - 2h}$  si  $h < \frac{1}{2}$  y  $\overline{B_{r_1}(z_0)} \subset C_0$ , entonces la sucesión  $\{z_k\}$  definida por

$$z_{k+1} = z_k - Dg(z_k)^{-1}g(z_k) \text{ para } k = 0; 1; \dots$$

está contenida en  $B_{r_1}(z_0)$  (la bola abierta de radio  $r_1$  con centro en  $z_0$ ) y converge al cero único de  $g(z)$  contenido en  $C_0 \setminus B_{r_2}(z_0)$ :

Demostración. Véase [47].

Q. E. D.

## 6.2 Ejemplo

Considérese el siguiente sistema estable a lazo abierto y cerrado.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -x_1 - 3x_2 - 3x_3 + \Phi(u) \end{aligned} \tag{6.9}$$

con  $u = (1 + \mu^3)x_1 + 3(1 - \mu^2)x_2 + 3(1 + \mu)x_3$ : Los eigenvalores a lazo abierto son:  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = -1$  y a lazo cerrado son:  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$ , con  $\mu < 0$ .

Numéricamente, encontramos que para (6.9) con  $0 > \mu > -14.735$  el sistema se mantiene asintóticamente estable, es decir, la región de atracción del origen  $(0)$ , es todo  $E^3$ . Repentinamente, en las proximidades de  $\mu = -14.735$  aparece una órbita periódica. En otras palabras,  $\mu = -14.735$  es un valor de bifurcación de (6.9). La figura 6.2 muestra proyecciones sobre los planos  $xy$ ,  $yz$  y  $zx$  para una simulación numérica de tal tipo de órbita.

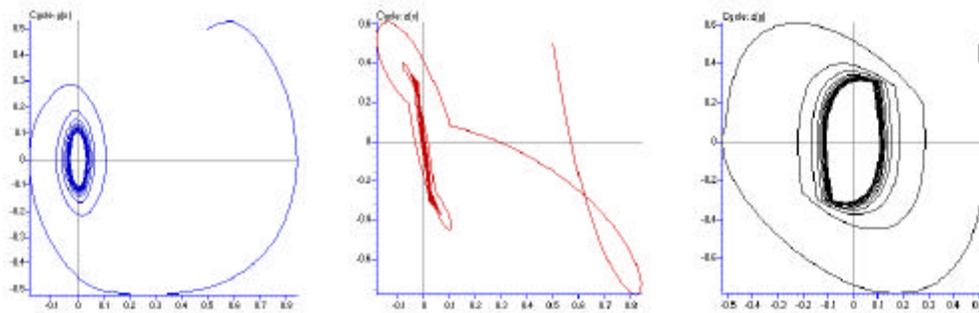


Figura 6.2 Simulación numérica de una órbita periódica dependiente de un parámetro  $\mu$ .

Esta órbita se mantiene para valores negativos de  $\mu$ ; menores al valor de bifurcación. De acuerdo a los resultados de [48] la frontera de  $\mu = 0$  es un cilindro que contiene a la órbita periódica, la cual es un atractor.

Así que el sistema anterior, con  $\mu = \pm 14.75 = \pm \frac{59}{4}$  es un buen candidato como ejemplo para probar que no todo sistema Hurwitz a lazo abierto y cerrado, después de ser acotado, es globalmente asintóticamente estable.

Para  $\mu = \pm \frac{59}{4}$  los planos de saturación están dados por:

$$\mathbb{S} := \left\{ \frac{1}{2} \frac{205315}{64} x_1 \pm \frac{10395}{16} x_2 \pm \frac{165}{4} x_3 = \pm 1 \right\} \subset \mathbb{S}^3.$$

Estos planos, como decíamos, definen una partición del espacio en tres partes, donde los sistemas lineales están definidos por (6.1).

Analizaremos el comportamiento dinámico de (6.1) considerando las semi aplicaciones de Poincaré (en [10], [49] se han hecho estudios similares con estas técnicas para la detección de comportamiento caótico y atractores extraños).

Con el fin de definir los semi aplicaciones de Poincaré debemos obtener las soluciones de (6.1) en dos de las tres correspondientes regiones.

Cuando  $u \cdot \mu > 1$ , el sistema (6.1) toma la forma

$$x^0 = Ax + b \quad (6.10)$$

donde  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ ; y  $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  y la solución está dada por:  $x(t) =$

$$e^{it} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 t^2 + t + 1 & t^2 + t & 1/2 t^2 \\ 1/2 t^2 & t^2 + t + 1 & 1/2 t^2 + t \end{pmatrix} x_0 + e^{it} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 t^2 & 1 \\ 1/2 t^2 & t \end{pmatrix}$$

Si  $i \cdot u \cdot 1$ , nótese que  $u = i \frac{205315}{64} x_1 + i \frac{10395}{16} x_2 + i \frac{165}{4} x_3$ , y (6.1) toma la forma

$$x^0 = Ax + bu = (A + bk^T)x \quad (6.11)$$

donde  $(A + bk^T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ i \frac{59^3}{2^5} & i \frac{3 \cdot 59^2}{2^4} & i \frac{3 \cdot 59}{2^2} \end{pmatrix}$ . La solución es:  $x(t) = e^{(A+bk^T)t} x_0 =$

$$e^{i \frac{59}{22} t} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 59^2/2^5 t^2 + 59/2^2 t + 1 & 59/2^2 t^2 + t & 1/2 t^2 \\ 59^4/2^9 t^2 + 59^3/2^6 t & 59^3/2^6 t^2 + 3 \cdot 59^2/2^4 t & 59^2/2^5 t^2 + 59/2 t + 1 \end{pmatrix} x_0.$$

Procedamos a demostrar la existencia de un ciclo límite. Tomaremos, pues, el caso  $\mu = i \frac{59}{4}$  en el cual una simulación numérica da un ciclo límite. Denotaremos por  $x^{\circ}(t)$  y  $x^a(t)$  las soluciones en exponentes de (6.10) y (6.11) respectivamente. Verificaremos la existencia de tal órbita periódica simétrica que pasará a través del punto  $x_0 := (x_1; x_2; x_3)$  en el plano  $i \cdot i := i \frac{205315}{64} x_1 + i \frac{10395}{16} x_2 + i \frac{165}{4} x_3 = i \cdot 1$ . Ya que  $x_0 = (x_1; x_2; x_3) \in i \cdot i$  entonces:  $x_3 = \frac{4}{165} (1 + i \frac{205315}{64} x_1 + i \frac{10395}{16} x_2)$ .

Después de manipulaciones algebraicas se llega al sistema (6.8) correspondiente a este caso, donde:

$$\begin{aligned}
g_1 = & (e^{\frac{59}{4}s} i \frac{59}{4} e^{\frac{59}{4}s} s + \frac{3355}{48} e^{\frac{59}{4}s} s^2 + e^{i t} \\
& + e^{i t} i \frac{3685}{96} e^{i t^2}) x_1 \\
& + (i e^{\frac{59}{4}s} s + \frac{55}{8} e^{\frac{59}{4}s} s^2 + e^{i t} i \frac{55}{8} e^{i t^2}) x_2 \\
& + \frac{2}{165} e^{\frac{59}{4}s} s^2 + e^{i t} + e^{i t} + \frac{169}{330} e^{i t^2} i \quad 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_2 = & (\frac{3733}{48} e^{\frac{59}{4}s} s i \frac{197945}{192} e^{\frac{59}{4}s} s^2 i \frac{3733}{48} e^{i t} \\
& + \frac{3685}{96} e^{i t^2}) x_1 \\
& + (e^{\frac{59}{4}s} + e^{\frac{59}{4}s} s i \frac{3245}{32} e^{\frac{59}{4}s} s^2 + e^{i t} i \frac{59}{4} e^{i t} \\
& + \frac{55}{8} e^{i t^2}) x_2 \\
& i \frac{4}{165} e^{\frac{59}{4}s} s i \frac{59}{330} e^{\frac{59}{4}s} s^2 + \frac{4}{165} e^{i t} i \frac{169}{330} e^{i t^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_3 = & (\frac{3709}{24} e^{i t} i \frac{3685}{96} e^{i t^2} i \frac{3733}{48} e^{i t} + \frac{175643}{192} e^{\frac{59}{4}s} s \\
& + \frac{11678755}{768} e^{\frac{59}{4}s} s^2 i \frac{3733}{48} e^{\frac{59}{4}s}) x_1 \\
& + (\frac{57}{2} e^{i t} i \frac{55}{8} e^{i t^2} + \frac{3009}{16} e^{\frac{59}{4}s} s + \frac{191455}{128} e^{\frac{59}{4}s} s^2 \\
& i \frac{63}{4} e^{\frac{59}{4}s} i \frac{63}{4} e^{i t}) x_2 \\
& + \frac{169}{330} e^{i t^2} + \frac{4}{165} e^{i t} i \frac{173}{165} e^{i t} + \frac{4}{165} e^{\frac{59}{4}s} \\
& + \frac{118}{165} e^{\frac{59}{4}s} s + \frac{3481}{1320} e^{\frac{59}{4}s} s^2
\end{aligned} \tag{6.12}$$

$$\begin{aligned}
g_4 = & (\frac{10481625}{256} e^{i t} x_1 + \frac{613091875}{6144} e^{i t^2}) x_1 \\
& + (\frac{166375}{32} e^{i t} + \frac{9150625}{512} e^{i t^2}) x_2 \\
& i \frac{205379}{64} e^{i t} i \frac{203555}{64} e^{i t} i \frac{511225}{384} e^{i t^2} + \frac{205379}{64}
\end{aligned}$$

Deseamos demostrar la existencia de un cero para el sistema  $g_i = 0$ , con  $i = 1; \dots; 4$ : Se ha encontrado una aproximación inicial de este cero calculando numéricamente una órbita periódica del sistema lineal por partes (6.1). Tenemos que un cero posible de  $g = (g_1; g_2; g_3; g_4)$  debe estar cerca del punto  $z_0 = (t; s; x_1; x_2) = (0; 950137102700428820833; 0; 004899185508245353869; i 0; 020121260286767367286; 0; 082062782042587803868)$ . Tal órbita pasa cerca del punto  $x_0$  de modo que se cumple

$$x_0 = (x_1; x_2; \frac{4}{165} (1 i \frac{205315}{64} x_1 i \frac{10395}{16} x_2)):$$

Si calculamos los valores de  $g$  en el punto  $z_0$  tenemos:

$$(g_1; g_2; g_3; g_4) = (j 7.99491 \text{ e } 10^i 21; j 1.04174 \text{ e } 10^i 20; j 4.41771 \text{ e } 10^i 20; 3.47487 \text{ e } 10^i 17).$$

Una simulación numérica para  $\mu = j \frac{59}{4}$ , con condición inicial en

$$x_0 = (j 0.020121; 0.082062; 0.296592),$$

nos da las proyecciones sobre los planos  $xy$ ,  $yz$  y  $xz$  de una órbita periódica que ha sido prácticamente 'atrapada', como muestra la Figura 6.3.

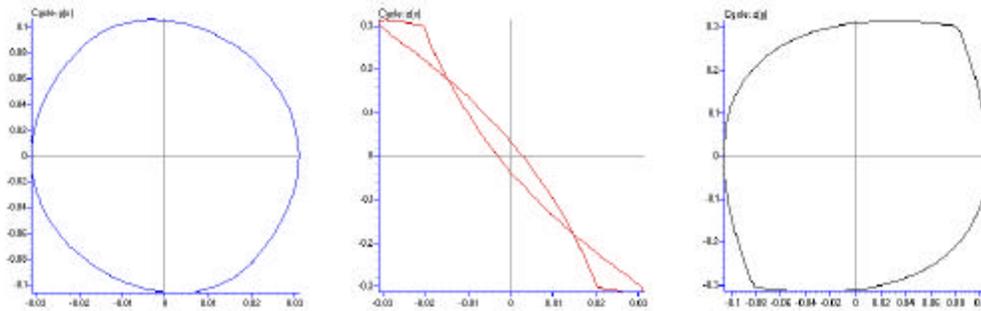


Figura 6.3 Simulación numérica del sistema (6.1) con condición inicial en  $x_0 = (j 0.020121; 0.082062; 0.296592)$ .

Empleando el Teorema de Newton-Kantorovich [47] demostraremos que existe un cero de  $g = (g_1; g_2; g_3; g_4)$  cerca del punto  $z_0$ : Para aplicar tal teorema sobre la función  $g$  definida por (6.12) tomamos  $n = 4$ ,  $C = E^4$ , y  $C_0 = [0.95; 0.96] \times [0.004; 0.005] \times [j 0.03; j 0.02] \times [0.08; 0.09]$ . En lo siguiente emplearemos la norma matricial definida por el máximo  $j \text{ e } j_1$  en  $E^4$ :  $jzj_1 = \max_i |z_i|$ , si  $z = (z_1; \dots; z_4) \in E^4$ . La norma  $j \text{ e } j_1$  de una matriz  $A = (a_{ij})$  está dada por

$$jAj_1 = \max_j \left( \sum_i |a_{ij}| \right)$$

Antes de proseguir es importante verificar que  $\mathcal{C}(x_0)$  y  $\mathcal{S}(x_0; \mathcal{D})$  están bien definidas. Nótese que existe una recta  $L$  donde el flujo es tangencial a  $\mathcal{S}$ , i. e.  $\hat{A}_t(x); \mathbf{k} = 0$ , donde  $\mathbf{k}$  es el vector normal a  $\mathcal{S}$ :  $\mathbf{k}^T x = 1$ . En este caso la recta  $L$  está dada por el conjunto de puntos:  $x_1; j \frac{63}{8}x_1 + \frac{1728}{166375}; \frac{4441}{96}x_1; \frac{69548}{499125}$ . Denotemos por  $\mathcal{S}_1^-$  y  $\mathcal{S}_1^+$  las dos regiones abiertas en las cuales  $\mathcal{S}$  es dividido por  $L$ . Aquí  $\mathcal{S}_1^+ \cap L = \mathcal{S}_1^- \cap L$ . No es difícil ver que los puntos del campo vectorial satisfacen:  $\hat{A}_t(x); \mathbf{k} > 0$  en  $\mathcal{S}_1^+$  y  $\hat{A}_t(x); \mathbf{k} < 0$  en  $\mathcal{S}_1^-$ .

(véase Figura 6.4), lo cual significa que el flujo sale en la región  $i_i^+$  y entra en la región  $i_i^-$ .

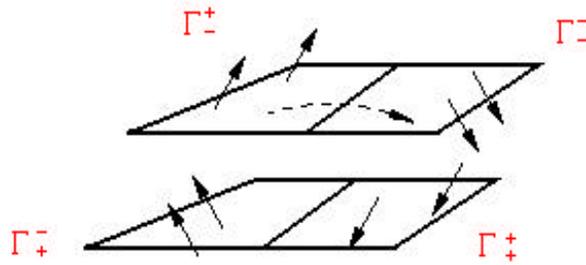


Figura 6.4 El flujo del sistema en las regiones  $i_i^+$  y  $i_i^-$  del plano  $i_i$ .

Por argumentos de estabilidad, para  $x_0 \in i_i^+$  se sigue la existencia de  $t > 0$  tal que  $t := \inf\{t > 0 \mid k^T \phi(x_0, t) + 1 = 0\}$  para el cual  $\phi(x_0, t) \in i_i^-$ , i.e.  $k^T \phi(x_0, t) \cdot i_i^-$ .

Ahora, definamos el conjunto  $i_i C_0 := \{x \mid x \in C_0\}$ . Para  $(i_i x_0; i_i s)$  podemos probar que, para todos los puntos del conjunto  $i_i C_0^T$ , existe  $s > 0$  tal que  $(i_i x_0; i_i s) \in i_i^-$ , con  $i_i x_0 \in i_i C_0^T$ : demostramos ese hecho probando primero el resultado para los cuatro vértices de  $i_i C_0^T$  (para lo cual analizamos el comportamiento de la función  $k^T \phi(i_i x_0; i_i s)$  ahí, la aplicación es decreciente de  $i_i^+$  hasta alcanzar  $i_i^-$ ). Ahora bien, el mismo resultado es válido para todo el conjunto  $i_i C_0^T$  empleando combinaciones lineales convexas. Entonces la relación  $i_i^- \cdot k^T \phi(i_i x_0; i_i s) \cdot i_i^-$  está garantizada en el conjunto  $i_i C_0^T$ .

Iniciando la aplicación del Teorema 6.1 calculamos las derivadas parciales de las funciones  $g_i$ , (véase el Apéndice).

Para encontrar las constantes  $\mu$ ,  $\nu$  y  $\rho$  para las cuales se cumplen las desigualdades (a), (b) y (c) del teorema respecto de la función  $g$  empleamos algunos resultados, consecuencia del Teorema del Valor Medio: Sean  $z = (t; s; x_1; x_2)$ , y  $C_0 \subset \mathbb{R}^4$  un paralelepípedo compacto. Si  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  es  $C^1$  y  $z, z^0 \in C_0$ , entonces

$$\|f(z) - f(z^0)\| \leq \max \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right|, \left| \frac{\partial f}{\partial s} \right|, \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|, \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \right\} \|z - z^0\|$$

(véase [8]), donde  $\left| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right|$  con  $y \in \mathbb{R}^4$  denota el máximo de  $\|j_y^{\partial f}\|$  en  $C_0$ . Por consiguiente

para  $g = (g_1; g_2; g_3; g_4)$  con  $z = (z_1; \dots; z_4) = (t; s; x_1; x_2)$  obtenemos

$$\begin{aligned}
 |Dg(z)|_1 &= \max_{1 \leq i \leq 4} \left| \frac{\partial g_i}{\partial z_j}(z) \right| \\
 &= \max_{1 \leq i \leq 4} \left| \frac{\partial g_i}{\partial z_j}(z) \right| \\
 &= \max_{1 \leq i \leq 4} \left| \frac{\partial g_i}{\partial z_j}(z) \right| \\
 &= \max_{1 \leq i, j, h \leq 4} \left| \frac{\partial^2 g_i}{\partial z_j \partial z_h}(z) \right|
 \end{aligned}$$

Calculando las segundas derivadas parciales de las funciones  $g_i$ , acotándolas y empleando el siguiente hecho: las cotas superiores obtenidas son funciones crecientes en las variables  $s; x_1; x_2$  y decrecientes en  $t$ , acotamos las variables  $s; x_1; x_2$  por su máximo en  $C_0$  y  $t$  por su mínimo en  $C_0$  para obtener precandidatos para valores de  $\rho$  que aparece en el Teorema 6.1:

Para el primer caso de segunda derivada de  $g_1$  tenemos:  $\frac{\partial^2 g_1}{\partial t^2} = (i \frac{3733}{48} e^{it} + \frac{3709}{24} e^{it} t + \frac{3685}{96} e^{it} t^2) x_1 + (i \frac{63}{4} e^{it} + \frac{57}{2} e^{it} t + \frac{55}{8} e^{it} t^2) x_2 + \frac{4}{165} e^{it} + \frac{173}{165} e^{it} t + \frac{169}{330} e^{it} t^2$ .

Ahora, nótese que al proceder como se menciona arriba se obtiene:  $\frac{\partial^2 g_1}{\partial t^2} = (\frac{3733}{48} e^{it} + \frac{3709}{24} e^{it} t + \frac{3685}{96} e^{it} t^2) j_{x_1} + (\frac{63}{4} e^{it} + \frac{57}{2} e^{it} t + \frac{55}{8} e^{it} t^2) j_{x_2} + \frac{4}{165} e^{it} + \frac{173}{165} e^{it} t + \frac{169}{330} e^{it} t^2$ .

Haciendo lo mismo en todos los otros casos (i.e., todas las segundas derivadas parciales  $\frac{\partial^2 g_i}{\partial z_j \partial z_h}$  para  $i; j; h = 1; 2; 3; 4$ , y  $(z_1; \dots; z_4) = (t; s; x_1; x_2)$ ), obtenemos una lista de precandidatos para  $\rho$  (ver Apéndice). De ésta, una cota para todas las derivadas parciales es 107553, es decir el mayor de los números obtenidos. Entonces, de

$$|Dg(z)|_1 \leq 16 \max_{1 \leq i, j, h \leq 4} \left| \frac{\partial^2 g_i}{\partial z_j \partial z_h}(z) \right|$$

si tomamos  $\rho = 107553 \cdot 16 = 1720848$ , tenemos que  $\rho$  satisface la condición (a) del Teorema 6.1.

Reemplazando  $z_0$  en las expresiones de:  $\frac{\partial g_i}{\partial z_j}$  obtenemos  $Dg(z_0)$ . Si  $C$  es una aproximación de  $|Dg(z_0)|_1^{-1}$ , entonces se puede ver que  $|jC|_1 > 134$ . Considerando cuidadosamente los errores en los cálculos (véase la sección de cálculo de errores en el apéndice) de  $|Dg(z_0)|_1^{-1}$  y utilizando resultados de [47] tenemos que  $|jDg(z_0)|_1^{-1} < 135$ .

Subsecuentemente

$$g(z_0) = (i 7.99491 \cdot 10^{21}; i 1.04174 \cdot 10^{20}; i 4.41771 \cdot 10^{20}; 3.47487 \cdot 10^{17})$$

entonces

$$jDg(z_0)^{-1}g(z_0)j_1 \cdot jDg(z_0)^{-1}j_1 jg(z_0)j_1 \cdot 4.7 \cdot 10^{15}$$

Así, tomando

$$\epsilon = 4.7 \cdot 10^{15}, \gamma = 135,$$

las suposiciones (b) y (c) del Teorema 6.1 se satisfacen. Entonces  $h = 1.091878 \cdot 10^6$ ,  $r_1 = 8.60902 \cdot 10^9$ ,  $r_2 = 4.700002566 \cdot 10^{15}$ , de esto sigue que  $h \cdot \frac{1}{2}$  y recordando que hemos considerado una  $\epsilon = 0.05$  en una vecindad de  $z_0$  es fácil concluir que  $B_{r_1}(z_0) \cap C_0$ . Por lo tanto, basados en el teorema anterior probamos que la función  $g(z)$  tiene un cero  $\bar{z}_0$  en  $C_0 \setminus B_{r_2}(z_0)$ . En consecuencia, el sistema de control lineal por partes tiene una órbita periódica  $\phi(t)$  tal que  $\phi(0) = \bar{z}_0$ .

Con ello podemos establecer la siguiente proposición:

**Proposición 6.2.** Existen órbitas periódicas creadas cuando se acotan las retroalimentaciones estabilizantes para sistemas estables a lazo abierto, es decir, en sistemas del tipo:

$$\dot{x} = f_\epsilon(x)$$

lo que implica que éstos no son globalmente asintóticamente estables.

**Demostración.** Puesto que  $h = 1.091878 \cdot 10^6$ ,  $r_1 = 8.60902 \cdot 10^9$ , y empleando que  $\epsilon = 0.05$  en una vecindad de  $z_0$ , se sigue que las condiciones  $h \cdot \frac{1}{2}$  y  $B_{r_1}(z_0) \cap C_0$  se satisfacen. Por otro lado, del Teorema 5.1, la función  $g(z)$  tiene un cero  $\bar{z}_0$  en  $C_0 \setminus B_{r_2}(z_0)$  (nótese que  $r_2 = 4.700002566 \cdot 10^{15}$ ). Finalmente, hemos probado que el sistema (6.9) tiene una órbita periódica única  $\phi(t)$  con condición inicial  $\phi(0) = \bar{z}_0$ :

Q. E. D.

Puede además probarse, como se hace también en el apéndice, la siguiente proposición.

**Proposición 6.3.** La órbita periódica de la Proposición 6.2 es asintóticamente estable.

### 6.3 El ejemplo anterior como contraejemplo

Las proposiciones precedentes han dado pie al siguiente teorema global, ahora recorriéndonos a los sistemas lineales por partes en general, y a su estabilidad:

**Teorema 6.4.** Para un sistema lineal por partes, la estabilidad sobre cada subsistema de su partición no implica estabilidad asintótica global.

El Teorema 6.4 contesta ...nalmente a la pregunta que nos hicimos al inicio de este capítulo, empleando los resultados de la sección anterior como un contraejemplo para dar una respuesta negativa. Por un lado nos permite zanjar la cuestión planteada, y por otro nos muestra que la intuición puede ser en demasía engañosa, como ocurre en otros aspectos de la Matemática.

En el capítulo siguiente, trataremos el problema de la órbita periódica desde el punto de vista más general posible, para sistemas lineales por partes arbitrarios (no necesariamente simétricos) que son continuos.

## Chapter 7

# Órbitas periódicas para sistemas lineales por partes en general

### 7.1 La existencia de órbita periódica

En los capítulos anteriores hemos llegado a poner énfasis en todos los casos en que aparecen órbitas periódicas. En los casos bidimensionales en que apareció se trató el tema con atención. En el capítulo anterior se demostró de manera formal la existencia de una de ellas en dimensión tres para el caso de la función de partición  $\Phi(x)$  y se evidenció la dificultad que tal prueba implica. Ahora trataremos de hacer un enfoque lo más general posible, sin restricción de la dimensión o del número de elementos que se den en nuestra partición del espacio de estados. La única condición a la que invocamos es que nuestros sistemas lineales por partes sean continuos.

En este capítulo abordaremos el problema desde una óptica geométrica y topológica para la obtención de resultados que, desde la sola geometría nos conducirán al ámbito del álgebra lineal. En [37] hemos propuesto una visión algebraica del tema de las órbitas periódicas, la cual ha dado resultados de enorme interés.

En lo que sigue, nos atenderemos a lo que hemos convenido en llamar punto periódico y órbita periódica, mencionado en las definiciones 1.13 y 1.14.

Partiendo del caso de un sistema lineal por partes del tipo:

$$x^0 = \begin{cases} A_1 x + b_1; & x \in F_1 \\ A_2 x + b_2; & x \in F_2 \\ \vdots \\ A_n x + b_n; & x \in F_n \end{cases} \quad (7.1)$$

en donde  $A_i \in M_{n \times n}(E^n)$ , y  $b_i \in E^n$  con  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , y la clase  $F$  determina una partición. Como se consideró en el Capítulo 1, comenzaremos nuestro estudio de órbitas periódicas re...riéndonos a que las particiones del espacio de estados están dadas por los hiperplanos de dimensión  $n-1$ :

$$H_i := \{x \in E^n \mid c_i^T x + d_i = 0\}; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7.2)$$

que ya se habían mencionado, con  $c_i$  y  $d_i$  elementos de  $E^n$ ; estos hiperplanos dan la partición referida.

Supongamos que tenemos una partición dada por  $n$  hiperplanos de modo que el flujo sea continuo en todas partes.

Si existe una órbita periódica  $x^0(t)$ , que pasa por  $k$  hiperplanos, para una condición inicial tomada en uno de ellos, digamos el  $H_{i_1} = H_{i_{k+1}}$ , entonces tendremos una situación como la planteada por la Figura 7.1:

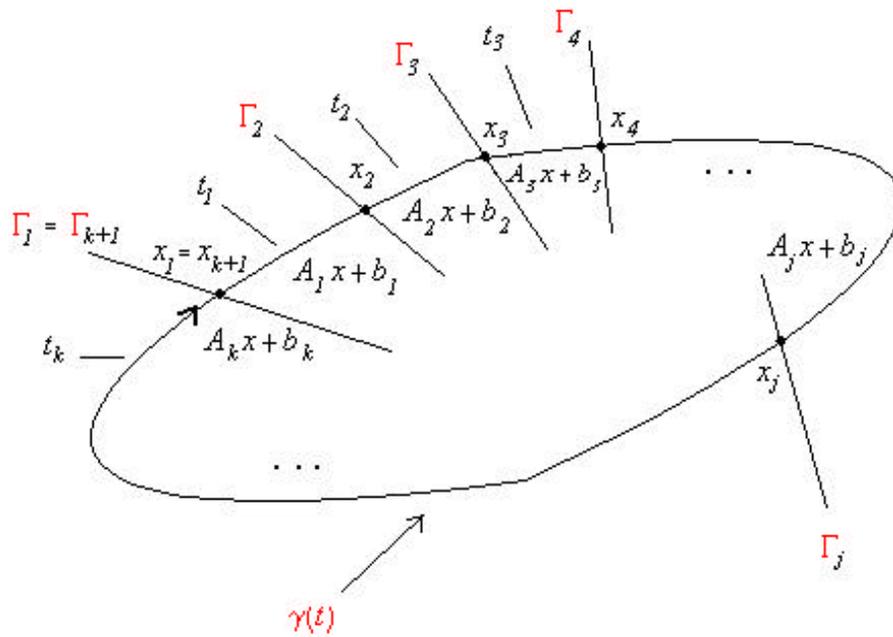


Figura 7.1 Órbita periódica que pasa por k hiperplanos.

En lo anterior las trayectorias nos pueden de...nir una aplicación de Poincaré, donde los  $t_i$  simbolizan los tiempos de arribo (los llamaremos así en lugar de de retorno, en caso de existir éstos) de la trayectoria del hiperplano  $i-1$  al plano  $i$ . Los  $x_i$  denotan los sitios por los que pasa la trayectoria en cada hiperplano. A la condición inicial la denotaremos por  $x_1$  por conveniencia en la notación. Nótese que al haber k hiperplanos, en el conteo de los hiperplanos por los que pasa la órbita, al regresar esta al primer hiperplano éste se contará como el  $(k+1)$ -ésimo:  $i-1 = i_{k+1}$ , y la trayectoria, al llegar a este mismo, nos denotaría un punto numerado como  $x_{k+1}$ .

En el caso hiperbólico, que es el nuestro, cada matriz  $A_i$  satisface:  $\det A_i \neq 0$ , entonces cada sistema  $\dot{x}^0 = A_i x + b_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  puede reescribirse en la forma:

$$\dot{x}^0 = A_i (x + A_i^{-1} b_i)$$

Integrando (en este caso la integración es directa) se tiene:

$$x(t) = e^{A_i t} (x_0 + A_i^{-1} b_i) - A_i^{-1} b_i$$

con  $x_0$  denotando una condición inicial cualquiera (aunque anteriormente a una condición inicial  $x_0$  la denotábamos en negrita, de aquí en adelante, debido a la notación que desarrollaremos, lo evitaremos para no generar confusión). Si hacemos  $x_0 = x_1$   $2 \leq i \leq k$ , y suponiendo que existen los  $t_i$  de arriba entonces:

$$x_{i+1} = e^{A_i t_i} (x_i + A_i^{-1} b_i) - A_i^{-1} b_i \quad i = 1; 2; \dots; k \quad (7.3)$$

Haciendo  $E_i = e^{A_i t_i}$  y  $p_i = A_i^{-1} b_i$  y encontrando iterativamente los  $x_i$ , a partir de  $x_1$  tenemos:

$$x_1 = x_1$$

$$x_2 = E_1 x_1 + (E_1 - I) p_1$$

$$x_3 = E_2 E_1 x_1 + E_2 (E_1 - I) p_1 + (E_2 - I) p_2$$

$$x_4 = E_3 E_2 E_1 x_1 + E_3 E_2 (E_1 - I) p_1 + E_3 (E_2 - I) p_2 + (E_3 - I) p_3$$

⋮

$$x_{k+1} = E_k \dots E_1 x_1 + \sum_{i=1}^k E_k \dots E_{i+1} (E_i - I) p_i + (E_k - I) p_k \quad (7.4)$$

Nótese que si existe una órbita periódica, con periodo  $t = t_1 + \dots + t_k$ , se cumple que:  $x_{k+1} = x_1$ , y por lo tanto:

$$(I - E_k \dots E_1) x_1 = \sum_{i=1}^k E_k \dots E_{i+1} (E_i - I) p_i + (E_k - I) p_k \quad (7.5)$$

De aquí en adelante diremos que un punto periódico  $x_1 = x_{k+1}$  (o la órbita que pasa por éste) es transversal a la frontera  $J_k$  si dada la solución  $'$  del sistema lineal por partes correspondiente, existe un número  $t_k$ , tal que  $'(x_1; t_k) \in J_k$  y para  $t \notin t_k$ , más propiamente (ver Figura 7.1):  $t \in (t_{k-1}; t_k) \cup (t_k; t_1)$ , se cumple que  $'(x_1; t) \notin J_k$ .

El anterior es un sistema de  $n$  ecuaciones, con  $n + k$  incógnitas,  $n$  correspondientes a las coordenadas de  $x_1$  y  $k$  correspondientes a los elementos  $t_1; \dots; t_k$ . Requerimos  $k$  ecuaciones más. Reescribamos a las  $n$  términos de (7.5) del siguiente modo

$$\begin{aligned} & \# \\ & \sum_{i=1}^n E_k \dots E_{i+1} (E_{i-1} I) p_i + (E_k I) p_k - (I - E_k \dots E_1) x_1 := g_i(x_1; x_2; \dots; x_n; t_1; t_2; \dots; t_k) \end{aligned} \quad (7.6)$$

con  $i = 1; 2; \dots; n$ .

Revisando las ecuaciones (7.4), las cuales son satisfechas por las  $x_i$ , y ya que estas últimas, para  $i \geq 1$  dependen de  $x_1$ , podemos determinar un sistema que gobierna a la órbita periódica. Definamos antes las  $k$  ecuaciones adicionales:

$$c_i^T x_i + d_i := g_i(x_1; x_2; \dots; x_n; t_1; t_2; \dots; t_k) \quad (7.7)$$

con  $i = n + 1; n + 2; \dots; n + k$ .

Obsérvese que las  $g_i(t_1; t_2; \dots; t_n)$  son funciones reales continuas. Así, si existen  $x_1; x_2; \dots; x_n; t_1; \dots; t_n$ , tal que satisfacen el sistema constituido por las  $n + k$  ecuaciones:

$$\begin{aligned} g_1(x_1; x_2; \dots; x_n; t_1; t_2; \dots; t_k) &= 0 \\ &\vdots \\ g_{n+k}(x_1; x_2; \dots; x_n; t_1; t_2; \dots; t_k) &= 0 \end{aligned} \quad (7.8)$$

existe una órbita periódica,  $\phi(t)$  con período  $t = t_1 + \dots + t_k$ , la cual es obtenida con la condición inicial  $x_1 \in E^n$  que cumple (7.5). Todo lo anterior puede ser resumido en la siguiente proposición

**Proposición 7.3:** Sea el sistema continuo (7.1). Considérense las funciones  $g_i$  definidas en (7.8) y asociadas al sistema referido. Entonces, existe una solución periódica  $\phi(t)$  con período  $t = t_1 + \dots + t_k > 0$  y condición inicial  $x_1$  si y sólo si existe una solución para el sistema

$$g_i(x_{1_1}; x_{1_2}; \dots; x_{1_n}; t_1; t_2; \dots; t_k) = 0.$$

Es importante que observemos que entre ninguno de los  $t_i$  debe cumplirse que el flujo del sistema (7.1) satisfaga la igualdad  $'_t(x)_i = 0$  de acuerdo a la Definición 1.

Construir el sistema de ecuaciones (7.8) mediante el mecanismo anterior es algo muy sencillo y tiene una ventaja esencial sobre el método propuesto por Bernat y Llibre en [8] (y nuestra generalización al mismo [38]) ya que, en su caso, aquél sólo es válido para sistemas simétricos especiales, como los simétricos, y el del nuestro no tiene ninguna restricción al respecto.

Una pregunta que podríamos hacernos es:

En el sistema lineal (7.5) ¿podrá encontrarse la condición inicial  $x_1$  de la forma siguiente?:

$$x_1 = (I_j - E_k \dots E_1)^{i-1} \sum_{i=1}^n E_k \dots E_{i+1} (E_i - I) p_i + (E_k - I) p_k \quad (7.9)$$

La respuesta parece afirmativa y es la que se da en [13] para un caso muy particular para el plano. Más adelante, haciendo un estudio a mayor detalle, veremos que la respuesta es en realidad negativa, es decir: no existen  $t_1; \dots; t_k$  mayores que cero, tal que la matriz  $(I_j - E_k \dots E_1)$  es invertible.

También, por otra parte, podríamos preguntarnos cuándo el sistema de ecuaciones

$$g_i(x_{1_1}; x_{1_2}; \dots; x_{1_n}; t_1; t_2; \dots; t_k) = 0 \text{ de la Proposición 7.3 tiene solución:}$$

Para abordar el problema reescribamos la aplicación que aparece en el sistema anterior así:

$$g_i(x_{1_1}; x_{1_2}; \dots; x_{1_n}; t_1; t_2; \dots; t_k) = g_i(y_1; y_2; \dots; y_n; y_{n+1}; y_{n+2}; \dots; y_{n+k}).$$

Definamos las aplicaciones continuas:

$$h_i(y_1; y_2; \dots; y_{n+k}) = g_i(y_1; y_2; \dots; y_{n+k}) + y_i.$$

Y para todo  $\mathfrak{p} = (y_1; y_2; \dots; y_{n+k})$  tomemos la aplicación continua

$$h(\mathfrak{p}) = (h_1(\mathfrak{p}); \dots; h_{n+k}(\mathfrak{p}))$$

del  $n + k$ -espacio euclídeo real en sí mismo.

**Teorema 7.4:** El sistema de ecuaciones (7.8) (con  $i = 1; \dots; n + k$ ), donde las funciones reales continuas  $g_i$  van del  $n + k$ -espacio euclídeo real en sí mismo, tiene solución si existe un conjunto  $T$  homeomorfo a la bola unitaria en el  $n + k$ -espacio euclídeo, tal que, para las funciones  $h_i(y_1; \dots; y_{n+k})$ , y para la aplicación continua  $h$

$$h(T) \supset T :$$

**Demostración.** La existencia del conjunto  $T$  definido, de modo que  $h(T) \supset T$ , implica, por el Teorema de Punto Fijo de Brouwer, que  $h$  tiene un punto fijo.

Ahora bien, siguiendo los planteamientos en [36] para el tópico de punto fijo, supongamos  $p$  un punto fijo para  $h$ . Así:  $h(p) = (h_1(p); \dots; h_{n+k}(p)) = p$ . Por lo que  $(g_1(p) + y_1; \dots; g_{n+k}(p) + y_{n+k}) = p$  y se cumple:  $g_i(p) + y_i = y_i$  y finalmente:

$$g_i(p) = 0$$

por lo tanto la existencia de un punto fijo para  $h$  implica la existencia de una solución para el sistema  $g_i(y_1; y_2; \dots; y_{n+k}) = 0$ .

Q. E. D.

Ahora bien, en otra instancia, podemos hacer un planteamiento más directo para encontrar la aplicación completa de Poincaré correspondiente a sistemas lineales por partes continuos que nos lleve a otros resultados. Partamos de lo siguiente:

Sean  $\mathcal{P}_i(x_i) \supset \mathcal{I}_i$  vecindades de los  $x_i \in \mathcal{I}_i$ . Para la solución local  $'(x_i; t)$  de un sistema lineal por partes. Definamos los números  $t_i : \mathcal{I}_i \rightarrow \mathbb{R}^+$  como

$$t_i = \inf \{ t > 0 \mid '(x_i; t) \in \mathcal{I}_{i+1} \}$$

Si existen  $t_1; t_2; \dots; t_n$  dados como arriba definiremos las aplicaciones parciales de Poincaré así:

$$T_i x = E_i x + E_i p_i \quad p_i$$

Al haber una órbita periódica, las aplicaciones parciales podrán ser representadas por el

diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 T_1 & & T_2 & & T_{k_i-1} & & T_k \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 j_1 & \rightarrow & j_2 & \rightarrow & \dots & \rightarrow & j_k = j_{k+1}
 \end{array}$$

Ahora, por razones de simplicidad que veremos más adelante, denominamos el hiperplano  $j_{1;p_1}$  dado por

$$j_{1;p_1} := f x_1 + p_1 j x_2 \dots j_k g$$

**Proposición 7.5:** Supóngase que existen  $t_1; t_2; \dots; t_n$ , con  $t_i \in j_{1;p_1}$ . Definidos como arriba. Entonces, existe una aplicación completa de Poincaré  $T = T_k \circ \dots \circ T_2 \circ T_1 : j_{1;p_1} \rightarrow j_{1;p_1}$  dada por:

$$T x = A_1^{-1} E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A_1 x$$

**Demostración.** En cada hiperplano  $j_i$ , por continuidad, se satisface lo siguiente:  $A_i x + b_i = A_{i+1} x + b_{i+1}$ , o bien,  $A_i(x + p_i) = A_{i+1}(x + p_{i+1})$ : De (7.3) tenemos la igualdad:  $x_{k+1} + p_k = e^{A_k t_k}(x_k + p_k)$ . Nótese que en  $j_1 = j_k$  ocurre lo siguiente:  $A_1(x + p_1) = A_k(x + p_k)$ . Por lo tanto, para  $x_{k+1} \in j_k$  tenemos (ver figura de arriba):  $A_1(x_{k+1} + p_1) = A_k(x_{k+1} + p_k)$ . Así:

$$\begin{aligned}
 x_{k+1} + p_1 &= A_1^{-1} A_k(x_{k+1} + p_k) = A_1^{-1} A_k e^{A_k t_k}(x_k + p_k) \\
 &= A_1^{-1} e^{A_k t_k} A_k(x_k + p_k) = A_1^{-1} e^{A_k t_k} A_{k-1}(x_k + p_{k-1}) \\
 &= A_1^{-1} e^{A_k t_k} A_{k-1} e^{A_{k-1} t_{k-1}}(x_{k-1} + p_{k-1}) = A_1^{-1} e^{A_k t_k} e^{A_{k-1} t_{k-1}} A_{k-1}(x_{k-1} + p_{k-1}) \\
 &= A_1^{-1} e^{A_k t_k} e^{A_{k-1} t_{k-1}} A_{k-2}(x_{k-1} + p_{k-2}) = A_1^{-1} e^{A_k t_k} e^{A_{k-1} t_{k-1}} A_{k-2}(x_{k-2} + p_{k-2}) \\
 &\vdots \\
 &= A_1^{-1} e^{A_k t_k} e^{A_{k-1} t_{k-1}} \dots e^{A_2 t_2} e^{A_1 t_1} A_1(x_1 + p_1)
 \end{aligned}$$

donde  $x_1$  y  $x_{k+1}$  pertenecen a  $j_k = j_1$ ; y  $x_1 + p_1$  y  $x_{k+1} + p_1$  viven en  $j_{1;p_1}$ .

Q. E. D.

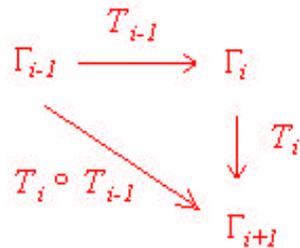
Ahora bien, existe una órbita periódica  $\phi(t)$  si y sólo si  $x_1 = x_{k+1}$  y por lo tanto:

$$A_1^{-1} E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A_1(x_1 + p_1) = x_1 + p_1 \tag{7.10}$$

Reinterpretando lo anterior,  $x_1 + p_1$  es un punto fijo de una aplicación completa de Poincaré de  $j_{1;p_1}$  en sí mismo.

La ecuación (7.10) implica que un punto ...jo  $x_1$  en  $\Gamma_{i-1}$  (es decir, para una aplicación afín), es equivalente a que haya un punto ...jo  $x_1 + p_1$  en  $\Gamma_{i,p_1}$ , o sea, para una aplicación lineal. Lo anterior signi...ca que conocer condiciones necesarias y su...cientes de existencia de órbita periódica en  $\Gamma_{i,p_1}$  nos da la pauta para conocer las correspondientes en  $\Gamma_{i-1}$ .

En lo anterior, nótese que el teorema implica que el siguiente diagrama es conmutativo:



para todo  $i \in \{1, 2, \dots, k+1\}$ , donde  $k+1 = 1$  (lo que implica  $\Gamma_{k+1} = \Gamma_1$ ) y  $T_{i+1} = T_i \pm T_{i-1}$ .

Ahora bien, si en las ecuaciones (7.10) hacemos  $x_1 + p_1 := x$ , éstas pueden escribirse así:

$$E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A_1 x = A_1 x$$

Esto último puede verse como un problema de eigenvalores y eigenvectores, es decir: para el eigenvalor  $\lambda = 1$  tenemos que  $A_1 x$  es eigenvector asociado. Para simpli...car la notación, y ya que  $A_1$  tiene coordenadas constantes, hagamos  $A_1 x := y$ . Nótese que el problema se relaciona nuevamente con uno de punto ...jo, es decir:

$$E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 y = y \tag{7.11}$$

justamente en un espacio euclídeo de dimensión  $n+k$ , problema para el que el Teorema 7.4 nos pide la existencia de un conjunto  $T$  homeomorfo a un  $n+k$  espacio euclídeo que satisfaga la relación  $h(T) \cap T = \emptyset$ :

### 7.1.1 Simpli...cando el problema de existencia de órbita periódica

Otra manera de conocer condiciones necesarias de existencia de órbita para el último sistema es la que propondremos a continuación.

El sistema (7.11) equivale a :  $(E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 - I)y = 0$ . Si en tal sistema existen  $t_1; \dots; t_k$  tales que la matriz  $E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 - I$  es invertible, esto implica que la solución del eigensistema o sistema propio es única y es la trivial: el origen, hecho que no nos aporta nada.

Observación 7.6: Nótese que el que la matriz  $E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 - I$  sea invertible es equivalente a que exista la matriz  $(I - E_k \dots E_1)^{-1}$  del sistema (7.9), y hemos concluido que eso no es posible. Por lo tanto la respuesta a la pregunta hecha con referencia a (7.9) es negativa, no ocurre como se afirma en [13].

Entonces, ya que el hecho de que el sistema  $(E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 - I)y = 0$  tenga solución única se descarta, buscamos la posibilidad de que tenga infinitas soluciones. Para ello pedimos la existencia de números  $t_1; \dots; t_k$  tales que

$$\det(E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 - I) = 0 \tag{7.12}$$

Lo último podría, sin embargo, implicar que la solución del sistema fuese el conjunto vacío, así que analicemos el caso con más detalle: Cada solución  $y_i$  del sistema tiene la forma:  $y_i = \frac{\Phi_i}{\Phi}$ , donde los  $\Phi_i$  son determinantes asociados y  $\Phi$  el determinante principal del sistema. Se puede probar que si  $\Phi_i = 0, \forall i \in \{1; \dots; k\}$ , entonces el sistema referido tiene infinitas soluciones. Para un sistema homogéneo como el nuestro, esto se satisface pues los  $\Phi_i$  son todos cero, ya que, en cada caso, una de sus columnas será el vector 0:

Por otra parte, como el eigenspacio  $W_1$  de la matriz  $E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1$ , para el eigenvalor  $\lambda = 1$ , puede tener dimensiones que van desde 1 hasta  $k$  (dependiendo de la multiplicidad de los eigenvalores  $\lambda = 1$  y de la forma canónica de la matriz  $E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 - I$ ). La intersección de este espacio con el hiperplano  $\sum x_j = 0$  puede ser un conjunto  $j$ -dimensional ( $j \in \{1; \dots; k\}$ ), la localización de  $x_0$  desde el punto de vista geométrico debe ser más cuidadosa (ver ejemplo más abajo). A pesar de ello, contamos con algunos criterios útiles que llenan algunos vacíos en la teoría y que fortalecen en gran medida el enfoque limitado que se ofreció en el Capítulo 6.

Todo lo anterior demuestra el siguiente teorema:

**Teorema 7.7.** Si existen  $t_i > 0$ , para todo  $i \in \{1; \dots; k\}$ , tales que la matriz  $E_k E_{k-1} \dots E_1$  tiene un eigenvalor  $\lambda = 1$ , entonces existe una órbita periódica  $\phi(t)$  para el sistema lineal por partes (7.1), con periodo  $t = t_1 + \dots + t_k$ .

### 7.1.2 Ejemplo al teorema anterior

Para el sistema (6.9) del Capítulo 6, en el cual probamos la existencia de una órbita periódica, podemos recurrir al resultado del Teorema 7.7. En tal caso, en la matriz  $E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 j I$ , por simetría,  $t_3 = t_1$  y  $t_4 = t_2$ , y ésta se reduce a una con dos parámetros:

$$[E_2 E_1]^2 j I = [e^{A_2 t_2} e^{A_1 t_1}]^2 j I$$

donde  $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ i & i & i \end{pmatrix}$  y  $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ i \frac{205379}{64} & i \frac{10443}{16} & i \frac{177}{4} \end{pmatrix}$ .

En este caso existen en efecto números reales  $t_1$  y  $t_2$  que satisfacen  $\det([E_1 E_2]^2 j I) = 0$  y éstos son:  $t_1 = 0.950137102700428820833\dots$  y  $t_2 = 0.004899185508245353869\dots$ , justamente los que encontramos anteriormente, con la ventaja de que para demostrar existencia no requerimos conocer el elemento  $x \in E^3$  en uno de los planos de la partición del sistema. Por otro lado, el sistema de este ejemplo podría ser no simétrico y aun así la aplicación del Teorema 7.7 no presentaría problemas.

El teorema nos da condiciones necesarias de existencia, aun cuando no nos diga en qué elemento  $x_0$  (perteneciente al eigenespacio del sistema), tomado como condición inicial sobre el hiperplano  $j_0 = j_k$ , se encuentra ésta.

## 7.2 La aplicación tangente

Desearíamos más condiciones, ahora para conocer, por ejemplo, requisitos de estabilidad de órbitas periódicas o bifurcaciones de éstas, en caso de existir. Para ello nos será de interés la aplicación tangente a la aplicación completa de Poincaré  $T$ .

Consideremos de nuevo el campo vectorial (7.1) definido sobre una partición dada por hiperplanos  $j_i$  como los referidos anteriormente. Para abreviar, al campo  $A_i x_i + b_i = A_i(x_i + p_i)$  (con  $x_i \in j_i$ ), que existe en la región  $F_i$  de la partición, podemos representarlo por  $f_{F_i} := A_i(x_i + p_i)$ . De este modo tenemos la siguiente proposición, que nos a...rma cómo es la aplicación tangente a cada aplicación completa de Poincaré.

**Proposición 7.8.** Supongamos un ciclo límite transversal a los hiperplanos  $\pi_i$  en los puntos  $x_i \in \pi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  respectivamente. Entonces, para una condición inicial  $x_1$ , la aplicación tangente (o jacobiana) a la aplicación completa de Poincaré,  $DT$  (que es el producto matricial  $DT = DT_k DT_{k-1} \dots DT_2 DT_1$ ), tiene la forma:

$$DT = \prod_{i=1}^k \frac{f_{F_i} c_i^T}{c_i^T f_{F_i}} E_k E_{k-1} \dots E_1$$

donde cada una de las matrices  $DT_i$  es de la forma:  $DT_i = \prod_{j=1}^i \frac{f_{F_{j+1}} c_{j+1}^T}{c_{j+1}^T f_{F_{j+1}}} E_i$ .

**Demostración.** Sea  $x_i \in \pi_i$ , en general, y supóngase que existe  $t_i > 0$  tal que

$x_{i+1} = E_i(x_i + p_i) \in \pi_{i+1}$  y  $c_{i+1}^T (E_{i+1}(x_i + p_{i+1}) \in \pi_{i+1}) + d_{i+1} = c_{i+1}^T x_{i+1} + d_{i+1} \neq 0$ , para todo  $t \in (t_{i-1}, t_i)$ .

Definamos la siguiente función

$$G(x; t) = c_{i+1}^T e^{A_i t} (x + p_i) \in \pi_{i+1} + d_{i+1}$$

Puesto que  $G(x_i; t_i) = c_{i+1}^T x_{i+1} + d_{i+1} = 0$  y

$$\frac{\partial G}{\partial t}(x_i; t_i) = c_{i+1}^T A_i e^{A_i t_i} (x_i + p_i) = c_{i+1}^T A_i (x_{i+1} + p_i) \neq 0$$

para todo  $t \in (t_{i-1}, t_i)$  existe una vecindad  $\delta_i(x_i)$  de  $x_i$  en  $\pi_i$  y una función,  $t : \delta_i(x_i) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $G(x; t(x)) = 0$  y  $t(x_i) = t_i$ . Entonces

$$\begin{aligned} Dt(x_i) &= \frac{\partial G}{\partial t}(x_i; t_i) + \frac{\partial G}{\partial x}(x_i; t_i) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} c_{i+1}^T A_i e^{A_i t_i} (x_i + p_i) + c_{i+1}^T e^{A_i t_i} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} c_{i+1}^T A_i (x_{i+1} + p_i) + c_{i+1}^T e^{A_i t_i}. \end{aligned} \tag{7.13}$$

Definamos una aplicación  $T_i : \delta_i(x_i) \rightarrow \pi_{i+1}$  como  $T_i(x) = E_i(x + p_i) \in \pi_{i+1}$ . De (7.13) tenemos:

$$\begin{aligned} DT_i(x_i) &= A_i e^{A_i t_i} (x_i + p_i) Dt(x_i) + e^{A_i t_i} \\ &= A_i (x_{i+1} + p_i) Dt(x_i) + e^{A_i t_i} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} c_{i+1}^T A_i (x_{i+1} + p_i) + c_{i+1}^T e^{A_i t_i} + e^{A_i t_i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_i \frac{A_i(x_{i+1} + p_i)c_{i+1}^T}{c_{i+1}^T A_i(x_{i+1} + p_i)} e^{A_i t_i} \\
&= \prod_i \frac{A_{i+1}(x_{i+1} + p_{i+1})c_{i+1}^T}{c_{i+1}^T A_{i+1}(x_{i+1} + p_{i+1})} e^{A_i t_i} = \prod_i \frac{f_{F_{i+1}}c_{i+1}^T}{c_{i+1}^T f_{F_{i+1}}} E_i.
\end{aligned}$$

Por otro lado, veamos cómo es la composición de dos de ellas  $D(T_{i+1} \pm T_i)(x_i)$ :

$$\begin{aligned}
D(T_{i+1} \pm T_i)(x_i) &= D T_{i+1}(x_{i+1}) D T_i(x_i) \\
&= \prod_i \frac{f_{F_{i+2}}c_{i+2}^T}{c_{i+2}^T f_{F_{i+2}}} E_{i+1} \prod_i \frac{f_{F_{i+1}}c_{i+1}^T}{c_{i+1}^T f_{F_{i+1}}} E_i
\end{aligned}$$

Después de cierta álgebra esto se reduce a  $\prod_i \frac{f_{F_{i+2}}c_{i+2}^T}{c_{i+2}^T f_{F_{i+2}}} E_{i+1} E_i$ .

Así, para el caso de la aplicación completa de Poincaré, desde la condición inicial  $x_0$  y realizando este procedimiento de manera iterativa, tenemos

$$DT = \prod_k \frac{f_{F_{k+1}}c_{k+1}^T}{c_{k+1}^T f_{F_{k+1}}} E_k E_{k-1} \dots E_1$$

y aplicando que  $f_{F_{k+1}} = f_{F_1}$  y  $c_{k+1}^T = c_1^T$  (ver la primera figura de este capítulo) concluimos lo que deseamos.

Q. E. D.

El teorema siguiente para la matriz jacobiana de una órbita periódica es conocido. En este caso especial  $DT$  tomará la forma que acabamos de deducir.

**Teorema 7.9.** Si el espectro de  $DT$ ,  $\sigma(DT)$ , está contenido en el disco unitario, la órbita periódica  $\phi(t)$ , en caso de existir, es localmente estable.

En otros casos, la presencia de bifurcaciones depende del cambio de eigenvalores, justo cuando  $\lambda = j_{\text{re}} + i_{\text{im}}j$  deja de ser igual a 1.

Mostraremos que, de manera cómoda, tal como en nuestras consideraciones anteriores, en nuestro estudio seguiremos empleando propiedades de la matriz  $E_k E_{k-1} \dots E_1$  aun cuando trabajemos con la matriz  $\prod_k \frac{f_{F_{k+1}}c_{k+1}^T}{c_{k+1}^T f_{F_{k+1}}} E_k E_{k-1} \dots E_1$ .

### 7.3 Bifurcaciones locales

Para campos vectoriales suaves, es posible que se presenten algunos tipos de bifurcación.

Sea  $x_1 = x_{k+1}$  un punto periódico transversal con una sucesión de arribos  $t_1; \dots; t_n$ . Consideremos la aplicación tangente a la aplicación completa de Poincaré

$$DT = I + \begin{bmatrix} f_{F_{k+1}} c_{k+1}^T \\ c_{k+1}^T f_{F_{k+1}} \end{bmatrix} E_k E_{k-1} \dots E_1$$

Adicionalmente sea la matriz  $M = E_k E_{k-1} \dots E_1$  de orden  $n \in n$ . Una matriz  $M^0$  será linealmente conjugada a la matriz anterior, si existe una matriz no singular  $P$  tal que  $M^0 = P M P^{-1}$ . Podemos ver que si  $M^0 = E_1 E_k E_{k-1} \dots E_2$  y tomando  $P = E_i$  se satisface lo anterior y en consecuencia podemos escribir la matriz  $M$  así:

$$M = E_i^{-1} M^0 E_i$$

De hecho, empleando la matriz  $M^0$  podemos ver que la matriz

$$DT = I + \begin{bmatrix} f_{F_2} c_2^T \\ c_2^T f_{F_2} \end{bmatrix} M^0 = I + \begin{bmatrix} f_{F_2} c_2^T \\ c_2^T f_{F_2} \end{bmatrix} E_1 E_k E_{k-1} \dots E_2$$

es la jacobiana correspondiente, al empezar nosotros su determinación en el sistema con una condición inicial  $x_2$ .

A continuación, definiremos algunos tipos de bifurcaciones conocidas, que pueden encontrarse en la literatura ([15], [40]).

**Definición 7.10.**

(i) Bifurcación silla nodo: Ésta ocurre en el punto periódico  $x_{k+1}$  si la aplicación  $DT(x_k)$  tiene un eigenvalor igual a 1.

(ii) Bifurcación de doblamiento de periodo: Este tipo de bifurcación ocurre en el punto periódico  $x_{k+1}$  si la aplicación tangente  $DT(x_k)$  tiene un eigenvalor igual a  $-1$ .

(iii) Bifurcación de Hopf: Una bifurcación de Hopf ocurre en el punto periódico  $x_{k+1}$  si la aplicación tangente  $DT(x_k)$  tiene un par de eigenvalores conjugados complejos cuyos valores absolutos son iguales a 1.

La bifurcación silla-nodo crea/destruye puntos fijos cuando un parámetro cambia de manera continua. En este caso, una órbita periódica atractora y una de tipo silla se aproximan, colisionan y desaparecen cuando un parámetro cambia continuamente y, en este caso, la órbita tiene un eigenvalor igual a 1.

En la bifurcación de doblamiento de periodo, una órbita atractora, con periodo  $t$  cambia a una de tipo silla y, simultáneamente en otra atractora, con período  $2t$ . Cuando esto ocurre, la órbita original con periodo  $t$  tiene un eigenvalor igual a  $-1$ . Este tipo de bifurcaciones se da, por ejemplo, en la aplicación (o mapeo) conocida como rutas al caos. La bifurcación cambia la estabilidad de un punto fijo y se genera una nueva solución con el doble del período de la anterior

Finalmente, la bifurcación de Hopf se da cuando una órbita atractora cambia en una repulsora, y simultáneamente aparece una región invariante atractora homeomorfa al toro.

Con esto en mente formularemos el siguiente teorema, que nos da condiciones de bifurcación para puntos periódicos.

**Teorema 7.11.** Sea  $x_{k+1} = f(x_k)$  un punto periódico transversal, con una sucesión de tiempos de arribo  $t_1, t_2, \dots, t_k, t_{k+1}$ . Sea  $S_k$  la suma de los menores principales de orden  $k$  de la matriz  $M = E_k E_{k-1} \dots E_1$ . Entonces:

(i) Aparece una bifurcación del tipo silla-nodo en el punto periódico  $x_{k+1}$  si y sólo si

$$(1 - S_1) + (1 - S_2)S_1 + (1 - S_3)S_2 + \dots + (1 - S_n)S_{n-1} = 0$$

(ii) Aparece una bifurcación de doblamiento de periodo en el punto periódico  $x_{k+1}$  si y sólo si

$$\begin{aligned} S_1 + S_3 + \dots + S_n &= 0 && \text{cuando } n \text{ es impar} \\ 1 + S_2 + S_4 + \dots + S_n &= 0 && \text{cuando } n \text{ es par:} \end{aligned}$$

(iii) Aparece una bifurcación de Hopf en el punto periódico  $x_{k+1}$  si y sólo si, para algún  $\mu \in [0, 2\pi]$  y  $e_k = e^{S_k \mu}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) se cumple

$$e_{n-1} + (1 - S_1)e_{n-2} + (1 - S_1 - S_2)e_{n-3} + \dots + (1 - S_n)S_{n-1} = 0$$

Demostración. Sea  $M^0 = E_1 E_k E_{k-1} \dots E_2$ , entonces, al existir órbita periódica, la matriz  $M^0$  tiene un eigenvector  $A_1 x$  (recuérdese que se definió:  $x_1 + p_1 = x$ ) correspondiente al eigenvalor 1. Por las propiedades que ya hemos visto que satisfacen los campos  $A_i(x_i + p_i)$ , y que se cumplen de manera iterada, no es difícil probar que, en efecto

$$M^0 A_1 x = E_1 E_{k-1} \dots E_2 A_1 x$$

después de operaciones iterativas, se reduce a

$$M A_1 x = A_1 x$$

Ahora bien, la matriz  $L = \begin{bmatrix} h & \\ & I \\ & & \frac{f_{F_1} c_1^T}{c_1^T f_{F_1}} \end{bmatrix}$  es un proyector de  $E^n$  a un cierto conjunto - a lo largo del vector  $A_1 x$ . De lo anterior se desprende que si la matriz  $M^0$  tiene eigenvalores  $f_1; \dots; f_n$  y eigenvectores correspondientes  $f A_1 x; v_2; \dots; v_n$ , la matriz  $LM^0$  tiene eigenvalores  $f_0; \dots; f_n$  y eigenvectores correspondientes  $f A_1 x; u_2; \dots; u_n$ , donde  $u_j = L v_j$  ( $j = 2; 3; \dots; n$ ).

Puesto que  $M$  y  $M^0$  son linealmente conjugadas, i. e.,

$$M = E_1^{-1} M^0 E_1$$

tenemos que, empleando que existe órbita periódica, es decir, uno de los eigenvalores de nuestra matriz es igual a 1 se cumple:

$$\det(M - \lambda I) = \det(M^0 - \lambda I) = (\lambda - 1) \left[ \lambda^{n-1} + (1 - S_1) \lambda^{n-2} + (1 - S_1 - S_2) \lambda^{n-3} + (1 - S_1 - S_2 - S_3) \lambda^{n-4} + \dots + (1 - S_n) \right]$$

Denominemos  $q(\lambda)$  al polinomio

$$\lambda^{n-1} + (1 - S_1) \lambda^{n-2} + (1 - S_1 - S_2) \lambda^{n-3} + (1 - S_1 - S_2 - S_3) \lambda^{n-4} + \dots + (1 - S_n)$$

Cuando la matriz  $LM^0$  tiene un eigenvalor 1, es decir,  $q(1) = 0$ , se satisface (i). Si  $LM^0$  tiene un eigenvalor  $\lambda \neq 1$ , es decir,  $q(\lambda) = 0$ , se cumple lo indicado en (ii). Finalmente, con las

condiciones pedidas en la parte ...nal del teorema, se satisfará (iii).

Q. E. D.

### 7.3.1 Ejemplo

Como caso particular del teorema anterior, en dimensión 3, tenemos que:

- Existe una bifurcación del tipo silla-nodo en el punto  $x_{k+1}$  si y sólo si  $\det M_j - \text{tr}M + 2 = 0$ .
- Existe una bifurcación de doblamiento de periodo si y sólo si  $\det M + \text{tr}M = 0$ .
- Y ...nalmente, existe una bifurcación de Hopf en el punto  $x_{k+1}$  si y sólo si  $\det M_j - 1 = 0$  y  $j - 1 < \text{Tr}M < 3$ .

### 7.3.2 Un resultado más concerniente a órbita periódica

Podemos hablar de un polinomio de bifurcación

$$q(\lambda) = 0$$

el cual existe, si y sólo si, el polinomio característico de  $E_k E_{k-1} \dots E_1$  es divisible por  $1 - \lambda$ . Que lo anterior ocurra implicará la veracidad de la siguiente afirmación, desprendida del Teorema 7.11:

**Corolario 7.12.** Dada una sucesión de tiempos de arribo  $t_1, \dots, t_k$  para una aplicación completa de Poincaré, existe una órbita periódica si y sólo si, para la matriz  $M = E_k E_{k-1} \dots E_1$ , se satisface lo siguiente:

$$1 - S_1 + S_2 - \dots + (-1)^{n-1} S_{n-1} = (-1)^n \det M$$

donde los  $S_k$  son la suma de los menores principales de orden  $k$  de  $M$  y  $n$  es la dimensión de la matriz  $M$ .

Un problema interesante que podemos proponer siguiendo los planteamientos de Banks [7] es el de la determinación de grupos de homología simplicial que caractericen órbitas periódicas, asignadas particiones simpliciales coherentes con las particiones de un sistema lineal por partes cualquiera.

## 7.4 Un caso particular de aplicación de los resultados anteriores

En este capítulo hemos mostrado resultados que facilitan conocer información acerca de la existencia de órbitas periódicas para sistemas lineales por partes en general. Podríamos ver, en casos especiales, dónde y cómo localizar los puntos periódicos en caso de existir.

Partamos del caso de no linealidad  $\Phi(u)$  en  $n$  dimensiones. Recordemos que ésta de...ne al sistema:  $\dot{x} = Ax + b\Phi(u(x))$ , es decir, uno lineal por partes, con los subsistemas lineales correspondientes:  $\dot{x} = Ax \text{ } \mathbb{S} \text{ } b$  y  $\dot{x} = Bx$ , con  $B = A + bk^T$ . Supongamos  $A$  y  $B$  invertibles.

Lo que haremos a continuación será escribirlos en términos del elemento  $p = A^{-1}b$ :

De este modo tenemos, por casos:

$$\dot{x} = \begin{cases} Ax + p & \text{en } \mathbb{R}^n \\ Bx & \text{en } \mathbb{R}^n \\ Ax + p & \text{en } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Las soluciones son, respectivamente:

$$x(t) = \begin{cases} e^{At}(x_0 + p) + p & \text{en } \mathbb{R}^n \\ e^{Bt}x_0 & \text{en } \mathbb{R}^n \\ e^{At}(x_0 + p) + p & \text{en } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

En el sitio en que los hiperplanos  $\mathbb{H}_i := k^T x = 1$  dividen al espacio de fases, y en  $\mathbb{H}_i$  y  $\mathbb{H}_{i+1}$  se cumple respectivamente:

$$A(x + p) = Bx, \quad A(x - p) = Bx \tag{7.14}$$

Encontremos la aplicación completa de Poincaré  $T = T_4 \pm T_3 \pm T_2 \pm T_1 : B_r(z) \setminus \mathbb{H}_i \rightarrow \mathbb{H}_i$ . De modo que partiendo de  $z \in \mathbb{H}_i$  se llega mediante la aplicación completa a  $y \in \mathbb{H}_i$ .

Asumamos que existen  $t; t^0; s$  y  $s^0$ , ver Figura 7.2.

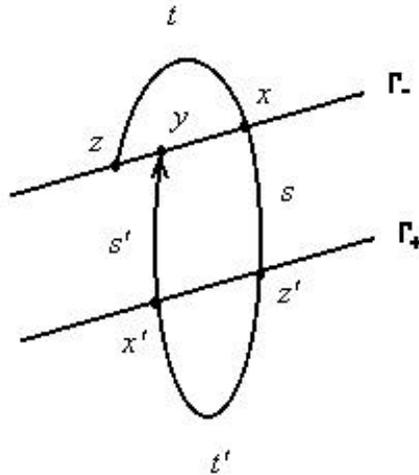


Figura 7.2 Aplicación completa de Poincaré sobre los hiperplanos  $\Gamma_i$  y  $\Gamma_{i+1}$ .

Procediendo como en la teoría de este capítulo, y si hacemos  $y^a = y_i p$  y  $z^a = z_i p$ , tenemos la igualdad siguiente:  $y^a = A_i^{-1} e^{Bs^0} e^{At^0} e^{Bs_e At} A z^a$ .

Si existe una órbita periódica debe cumplirse la relación  $y^a = z^a$  y por simetría del sistema se tiene:

$$A_i^{-1} e^{Bs_e At} e^{Bs_e At} A z^a = z^a \quad (7.15)$$

Buscamos un punto ...jo no trivial de la ecuación (7.15). Denotemos a la matriz  $e^{Bs_e At} e^{Bs_e At} = [e^{Bs_e At}]^2$  como  $M = M(t; s)$ . Así:  $A_i^{-1} M A z^a = z^a$ .

Obsérvese que esto implica la existencia de un eigenvalor  $\lambda = 1$  de la matriz  $A_i^{-1} M A$ .

La ecuación anterior equivale a:

$$(M - I) A z^a = 0 \quad (7.16)$$

Si la matriz  $(M - I) A$  es no singular, el sistema tendría una única solución, la trivial, la cual no nos interesa. Por otro lado, si  $\det[(M - I) A] = \det(M - I) \det A = 0$ , partiendo de la

hipótesis de que  $A$  es invertible tenemos:

$$\det(M - I) = 0 \quad (7.17)$$

lo que significa que habrá infinitud de soluciones. En el conjunto solución de (7.16) se encuentran las  $z^n$  correspondientes, las cuales viven en el eigenspacio generado por el eigenvector asociado a  $\lambda = 1$ . Podría existir multiplicidad de eigenvalores  $\lambda = 1$  y, de acuerdo a las características de la matriz  $M$ , p. e., que sea diagonalizable o no, su eigenspacio  $E$  satisface:  $\dim E = n$ .

Por ser el conjunto  $E$  un subespacio vectorial contiene al origen, por lo tanto es una variedad homeomorfa a un espacio euclídeo de la dimensión de  $E$ . De este modo, si existe una órbita periódica del sistema que estamos estudiando,  $z^n$  ( $z^n \neq 0$ ) satisface las ecuaciones:  $(M - I)Az^n = 0$  y  $k^T(z^n + p) = 1$ .

Supongamos que tenemos el caso particular de que  $\dim E = 1$ . Empleando que  $z^n$  determina  $z$ , el eigenspacio  $E$  intersecta los hiperplanos  $\Gamma_i$  y  $\Gamma_{i+}$  en los puntos  $z$  y  $-z$ , en caso de existir la órbita periódica simétrica. Esto significa que el ciclo límite pasa por los puntos  $z$  y  $-z$ , hecho que, en caso simples como éste, nos puede permitir encontrar su ubicación precisa (véase la Figura 7.3).

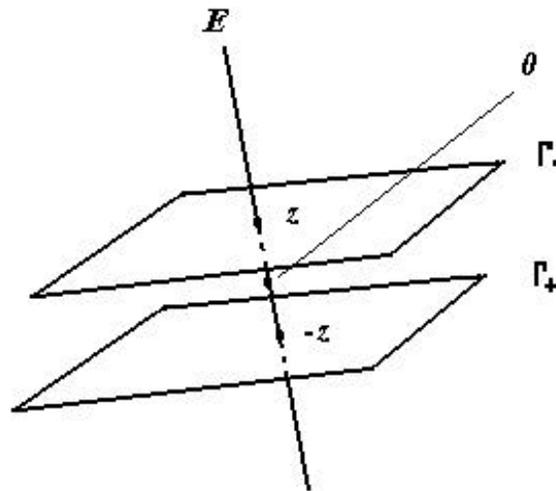


Figura 7.3 El eigenspacio  $E$  intersectando los hiperplanos  $\Gamma_i$  y  $\Gamma_{i+}$  en  $z$  y  $-z$ .

Por otra parte, a partir de las condiciones geométricas, y después de un poco de álgebra, la ecuación (7.17) se reduce a la siguiente condición simple de existencia de órbita periódica:

$$\det(e^{At} + e^{iBs}) = 0$$

## Chapter 8

# Conclusiones y perspectivas

### 8.1 Conclusiones

El capítulo uno presentó, como mencionábamos en la introducción, resultados que se requerían para formalizar algunos aspectos del estudio de los sistemas lineales por partes. En éste se procuró introducir una teoría general de estos sistemas, y motivar a su estudio, desde un punto de vista absolutamente formal.

Es importante que mencionemos que, referente al capítulo cinco, en [48] se ha realizado un análisis similar en ciertos sentidos para el caso de la dinámica inducida por la función  $\Phi(x)$  en  $n$  dimensiones. Sin embargo, en este capítulo aportamos algunos descubrimientos, como el de que el número  $n$ , es decir el orden de la dimensión, y su paridad, son relevantes en el tipo de dinámica que puede haber. También hemos propuesto otro enfoque para la determinación del número de puntos de equilibrio, según sea el número  $n_s$ , dado que, curiosamente, no fue posible la aplicación de la Teoría del Índice en este caso, hecho que da pie a una investigación más detallada al respecto para futuros trabajos. Es posible, de manera semejante, hacer un análisis de la dinámica para el caso de la función  $\Psi(x)$  y así extender los resultados de dimensión dos a dimensiones superiores. Las herramientas utilizadas serían prácticamente las mismas y los resultados se asemejarían en el mismo grado en que los de la función  $\alpha(x)$  de dimensión  $n$  se relacionan con los de dimensión dos, pero escribir lo anterior sería un problema demasiado engorroso debido a la notación. Tomemos en cuenta que la función  $\Psi(x)$  se puede contemplar

como una composición entre la función  $\alpha(x)$  y  $\Phi(x)$ :

$$\Psi(x) = (\Phi \circ \alpha)(x) = (\Phi(\alpha(x)))$$

El sistema (6.9) del capítulo seis es estable en cada elemento de una partición bien definida, pero no es globalmente asintóticamente estable, lo que constituye un contraejemplo a la posible suposición de que estabilidad por partes implica estabilidad global. Recalquemos el hecho de que, aunque se recurrió hasta cierto grado a la aplicación de herramientas propias del análisis numérico (idem en el apéndice), éstas sirvieron sólo para, de ahí, saltar a una demostración rigurosa de la prueba de que hay ciclo límite en el caso referido. ¡En ningún instante se tomaron aproximaciones numéricas como una evidencia de existencia de órbitas periódicas!

Los del capítulo siete son resultados originales, inspirados en lo investigado por Komuro en [28] para un caso particular. En nuestra búsqueda de una teoría general de los sistemas lineales por partes, entre otras cosas, hemos ligado el problema de la existencia de órbita periódica en tales sistemas con el Teorema de Punto Fijo de Brower, mediante razonamientos muy semejantes a los que se emplean en la topología algebraica. Finalmente, al dirigir nuestra atención al tema de bifurcación de órbitas periódicas, hemos encontrado lo expuesto en el Teorema 7.11, el que podría considerarse como el más elegante de la tesis.

## 8.2 Perspectivas de investigación

He aquí una lista somera de temas que, como consecuencia de esta investigación, han quedado como interesantes perspectivas para desarrollarse a futuro:

1. Siguiendo los planteamientos de Banks, expuestos en el capítulo uno, determinar grupos de homología simplicial que caractericen órbitas periódicas, asignadas particiones simpliciales coherentes con las particiones de un sistema lineal por partes cualquiera. Por otro lado, es posible que el Teorema de Lefschetz de punto fijo, o similares, puedan ser aplicados en este contexto.

2. Estudiar el problema de existencia de órbitas periódicas y regiones atractoras desde el punto de vista de la Teoría de las homologías cúbicas, misma que, a la fecha, ha generado un amplio interés.

3. Revisar la aplicación de la Teoría del Índice para sistemas Lineales por Partes de manera general. Podríamos intentar responder al hecho de por qué no pudo aplicarse ésta a lo expuesto en el capítulo cinco.

4. Estudiar los casos en que no se considera a la hiperbolicidad entre las hipótesis de partida en el capítulo uno.

5. Analizar formalmente dinámicas de sistemas lineales por partes en los que las matrices  $A + bc^T$  no son estables y se presentan múltiples puntos de equilibrio (en tal caso se esperaría la aparición de atractores extraños si las soluciones permanecen dentro de un conjunto compacto).

6. Encontrar resultados que permitan extender, hasta el mayor grado posible, la Teoría de los Sistemas Lineales por Partes aquí expuesta a Sistemas No Lineales, empleando herramientas como la topología de la convergencia uniforme.

7. Relacionar estos resultados con la teoría de fractales que involucran Funciones Lineales por Partes, según el planteamiento de Barnley.

# Chapter 9

## Apéndice

### 9.1 La función $p(u(x))$ del capítulo 3 (3.1.3)

La función  $p(u(x)) = \Phi(u(x)) \cdot \Psi(u(x))$ , a la que nos referimos en el capítulo tres, y auxiliar en nuestra demostración de existencia de órbitas periódicas, es la siguiente, según la relación entre  $c$  y  $u_0$ :

a) Si  $c < u_0$

$$p(u(x)) = \Phi(u(x)) \cdot \Psi(u(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \leq u_0 + c \\ u + (c + u_0) & \text{si } u_0 < u < u_0 + c \\ c & \text{si } c < u < u_0 \\ u & \text{si } |u - u_0| > c \\ u - c & \text{si } |u - u_0| < c \\ u - (c + u_0) & \text{si } |u - u_0| < u < u_0 \\ 0 & \text{si } u < u_0 - c \end{cases}$$

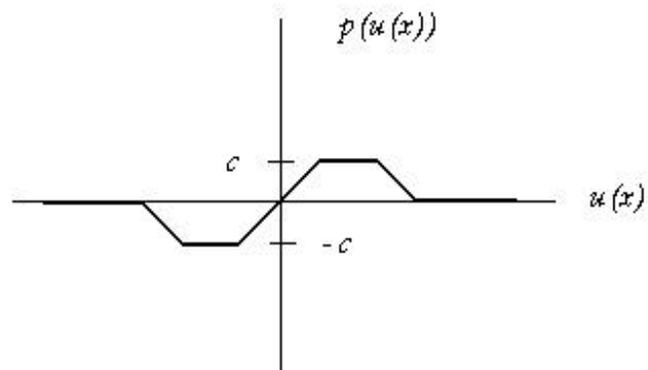


Figura A.1

b) Si  $c = u_0$

$$p(u(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } u > u_0 + c \\ u + (c + u_0) & \text{si } c < u < u_0 + c \\ u & \text{si } |u| \leq c \\ u - (c + u_0) & \text{si } -(u_0 + c) < u < -c \\ 0 & \text{si } u < -(u_0 + c) \end{cases}$$

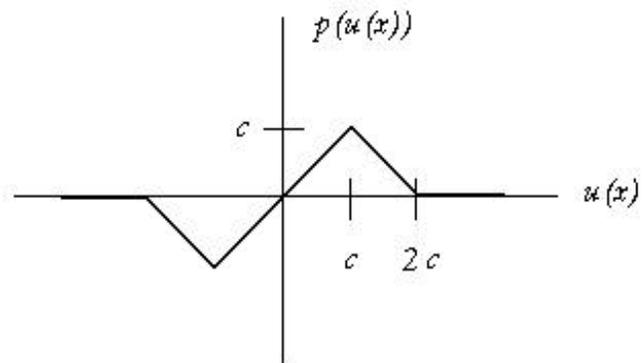


Figura A.2

c) Si  $c > u_0$

$$p(u(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < -c + u_0 \\ u + (c + u_0) & \text{si } -c + u_0 < u < 0 \\ u_0 & \text{si } 0 < u < c - u_0 \\ u & \text{si } c - u_0 < u < c \\ u - (c + u_0) & \text{si } c < u < c + u_0 \\ 0 & \text{si } u > c + u_0 \end{cases}$$

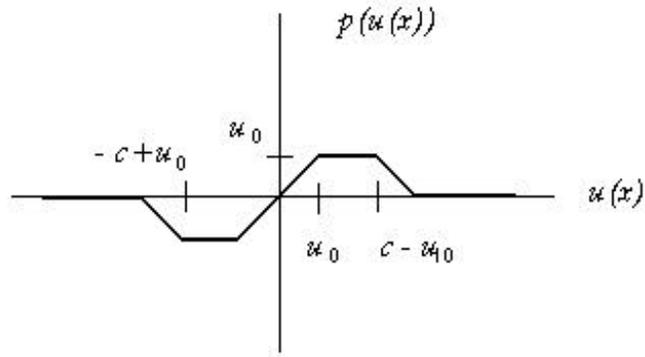


Figura A.3

## 9.2 Precandidatos para $\phi$ del capítulo 6 (6.2)

Los precandidatos para  $\phi$ , obtenidos y ordenados según las segundas derivadas parciales  $\frac{\partial^2 g_i}{\partial z_j \partial z_h}$ , para  $i, j, h = 1; 2; 3; 4$ , son los números:

6:12621	11:8652	19:7006	13155:1
0:00000	0:00000	0:00000	0:00000
41:0985	100:809	191:733	107553
8:06787	19:0961	35:7146	19176:5
21:0810	357:340	11545:4	0:00000
16:6465	391:818	7485:20	0:00000
3:06493	68:9127	963:500	0:00000

## 9.3 Las matrices $Dg(z_0)$ y $C$ del capítulo 6 (6.2)

Las matrices referidas son:

$$Dg(z_0) = \begin{matrix} \text{O} & & & & \text{1} \\ \begin{matrix} | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \end{matrix} & \begin{matrix} i & 0:08059 & i & 0:08059 & i & 11:64668 & i & 2:03765 \\ i & 0:30227 & i & 0:30227 & i & 14:79071 & i & 1:55500 \\ 0:12807 & & 0:12806 & & i & 65:08207 & i & 13:92050 \\ 449:64137 & & 0 & & 49877:38239 & & 8149:21396 & \end{matrix} & \begin{matrix} | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \end{matrix} \end{matrix}$$

$$C = \begin{matrix} \text{O} & & & & \text{1} \\ \begin{matrix} | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \end{matrix} & \begin{matrix} i & 92:7143 & & 29:6194 & & 11:5646 & & 0:00222399 \\ i & 6:35507 & & i & 1:69133 & & i & 0:182777 & & i & 0:00222399 \\ 4:17026 & & i & 1:30858 & & i & 0:464257 & & i & 3:25261 \text{ E } 10^i 19 \\ i & 20:4085 & & 6:37489 & & 2:2034 & & i & 1:30104 \text{ E } 10^i 18 \end{matrix} & \begin{matrix} | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \end{matrix} \end{matrix}$$

(los cálculos han sido efectuados con una precisión de  $10^i 20$ , pero solamente hemos escrito los números redondeados a cuatro decimales).

## 9.4 Estabilidad de la órbita periódica del capítulo 6 (6.2)

En esta sección probaremos que la órbita periódica  $\gamma(t)$  que hemos encontrado es asintóticamente estable. La aplicación de Poincaré, definida en una vecindad de la órbita periódica  $\gamma(t)$  es la composición de cuatro mapeos. Sea  $z_1$  el primer punto de la órbita periódica en  $\Gamma_+$  después que la órbita pasa a través del punto  $z_0 \in \Gamma_+$ . Para  $r > 0$  lo suficientemente pequeña, el flujo asociado a la solución de (6.9) define cuatro aplicaciones (ver Figura A.1):

$$\begin{aligned} T_1 &: B_r(z_0) \rightarrow B_r(z_1) \\ T_2 &: B_r(z_1) \rightarrow B_r(-z_1) \\ T_3 &: B_r(-z_1) \rightarrow B_r(-z_0) \\ T_4 &: B_r(-z_0) \rightarrow B_r(z_0) \end{aligned}$$

Por simetría de las soluciones del sistema (2.1) con respecto al origen se cumple que  $T_3(z) = -T_1(z)$  y  $T_4(z) = -T_2(z)$ . (Si  $S(z) = -z$ , entonces  $T_3 = S \circ T_1 \circ S$  y  $T_4 = S \circ T_2 \circ S$ ).

La aplicación de Poincaré  $T$  en una vecindad de  $\gamma(t)$  puede ser definida como (véase Figura de abajo):

$$T = T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1 : B_r(z_0) \rightarrow B_r(z_0)$$

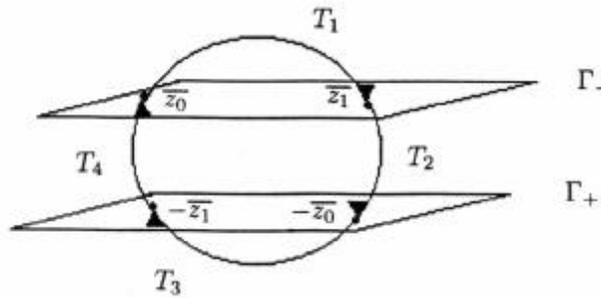


Figura A.4 La aplicación de Poincaré  $T$  en una vecindad de la órbita periódica  $\gamma(t)$ .

Puesto que los sistemas de ecuaciones diferenciales para los que se definen las aplicaciones de Poincaré  $T_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) son lineales, es sabido que las  $T_i$ 's son analíticas (véase [8]), entonces  $T$  es analítica. Para probar que  $\phi(t)$  es localmente estable, es suficiente demostrar que el radio espectral de  $DT(\bar{z}_0)$  es menor que 1:

Ya que  $T$  es la composición de cuatro aplicaciones, calcularemos su diferencial en  $\bar{z}_0$ ,  $DT(\bar{z}_0)$  mediante la regla de la cadena. Empecemos calculando  $DT_1(\bar{z}_0)$ : Sea  $\phi_i(t; z)$  la solución del sistema (6.9), la cual pasa por el punto  $z \in B_r(\bar{z}_0) \setminus \{z_0\}$  cuando  $t = 0$ , y sea  $\bar{t} > 0$  el tiempo más pequeño tal que  $\phi_i(\bar{t}; z) \in \{z_0\}$ . Entonces, la derivada de  $T_1(z) = \phi_i(\bar{t}; z)$ ; está dada por

$$DT_1(\bar{z}_0) = \left( \frac{\partial \phi_i(\bar{t}; z)}{\partial z_j} \right)_{j=1,2} \quad i=1,2; \quad \text{donde} \quad \frac{\partial \phi_i(\bar{t}; z)}{\partial z_j} = \frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{t}} \frac{\partial \bar{t}}{\partial z_j} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z_j}.$$

Las primeras derivadas parciales de  $\phi_i$  con respecto a  $\bar{t}$  y  $z_j$  se pueden calcular directamente. Por otra parte, la derivada  $\frac{\partial \bar{t}}{\partial z_j}$  puede ser calculada recordando que  $\phi_i(\bar{t}; z)$  satisface

$$k^T \phi_i(\bar{t}; z) = 1; \quad (9.1)$$

Denotemos por  $\phi_3(\bar{t}; z)$  a la expresión  $k^T \phi_i(\bar{t}; z)$ : Ahora, derivando ambos lados de la ecuación (9.1) se obtiene  $\frac{\partial \phi_3(\bar{t}; z)}{\partial z_j} = \frac{\partial \phi_3}{\partial \bar{t}} \frac{\partial \bar{t}}{\partial z_j} + \frac{\partial \phi_3}{\partial z_j} = 0$ ; de donde  $\frac{\partial \bar{t}}{\partial z_j} = - \frac{\partial \phi_3}{\partial z_j} / \frac{\partial \phi_3}{\partial \bar{t}}$  para  $j = 1, 2$ .

Recuérdese que el punto  $\bar{z}_0$  y el tiempo  $\bar{t}_0$  no se conocen pero, por el Teorema de Newton-Kantorovich, se sigue que  $(\bar{t}; \bar{s}; \bar{z}_0) \in C_0 \times B_{r_2}(t; s; z_0)$  y, el punto  $z_0$  es tal que  $j(t_0; s_0; z_0) \in (\bar{t}_0; \bar{s}_0; \bar{z}_0)_{j=1,2} < 4.8 \cdot 10^{-15}$ : Así, realizaremos los cálculos en el punto  $z_0 = (j_0: 0.020121260286767367286; 0.082062782042587803868)$  y  $t_0 = 0.950137102700428820833$  en lugar de  $\bar{z}_0$  y  $\bar{t}_0$  (el cálculo del error aparece en la sección al final de este capítulo.)

Denótese  $w = (t; z_0; z_0)$ , entonces, evaluando  $\frac{\partial \phi_i}{\partial w_j}$  en  $w$  tenemos:

$$\mu \frac{\partial \phi_i}{\partial w_j} \Big|_{(t_0; z_0)} = \begin{matrix} \mathbf{0} & & & & \mathbf{1} \\ i & 0.0806 & i & 12.6457 & i & 2.0326 \\ i & 0.3023 & i & 15.1737 & i & 2.6326 \\ & 449.6414 & & 49877.3824 & & 8149.2140 \end{matrix} \mathbf{A}$$

De donde se obtiene

$$DT_1(z_0) = \begin{matrix} \mathbf{0} & & & & \mathbf{1} \\ i & 3.7059 & i & 0.5719 & \\ & 18.3564 & & 2.8457 & \end{matrix} \mathbf{A}$$

De manera similar se calcula  $DT_2(z_1)$ ; donde

$z_1 = T_1(z_0) = (0:0205197092213362427; \pm 0:0805918152325252957)$ . Ahora, la solución en esta región está dada por  $^a(t; z)$  de donde se tiene  $T_2(z) = ^a(\bar{s}; z)$ : Nótese que la solución pasa por el punto  $z \in B_r(z_1)$  cuando  $t = 0$ : Aquí  $s_0 = 0:004899185508245353869$ . Denotemos  $w = (s; z_{11}; z_{12})$ , y  $^a_3 = k^T ^a$ . El cálculo de las primeras derivadas parciales da

$$\frac{\partial ^a}{\partial w_j} j_{(s_0; z_1)} = \begin{matrix} \mathbf{0} & & & \mathbf{1} \\ \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} & \begin{matrix} 0:0821 & 0:9991 & 0:0047 \\ 0:2966 & 0:3775 & 0:9235 \\ 368:6794 & 182:5503 & 23:2971 \end{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{matrix} \end{matrix}$$

con  $1 \cdot i; j \cdot 3$ . De donde, puesto que  $^a(\bar{s}; z)$  satisface  $k^T ^a(\bar{s}; z) = \pm 1$ , obtenemos

$$DT_2(z_1) = \begin{matrix} \mathbf{0} & & \mathbf{1} \\ \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} & \begin{matrix} 1:0397 & 0:0099 \\ 0:2306 & 0:9422 \end{matrix} & \mathbf{A} \end{matrix}$$

Obsérvese que, debido a la simetría de las soluciones del sistema (6.9) con respecto al origen, se satisface  $T_3(z) = \pm T_1(z)$  y  $T_4(z) = \pm T_2(z)$ . Si  $S(z) = \pm z$  entonces  $T_3 = S \pm T_1 \pm S$  y  $T_4 = S \pm T_2 \pm S$ . Ya que  $T_3 = S \pm T_1 \pm S$  se sigue que  $DT_3(j z_0) = DT_1(z_0)$ , y análogamente  $DT_4(j z_1) = DT_2(z_1)$ : Entonces, de  $DT(z_0) = DT_4(j z_1) \pm DT_3(j z_0) \pm DT_2(z_1) \pm DT_1(z_0)$ , se obtiene ...nalmente

$$DT(z_0) = \begin{matrix} \mathbf{0} & & \mathbf{1} \\ \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} & \begin{matrix} 3:19756 & 0:48618 \\ 15:57749 & 2:36786 \end{matrix} & \mathbf{A} \end{matrix} \quad (9.2)$$

Los eigenvalores de  $DT(z_0)$  son  $0:827088$  y  $0:00262006$ , ambos menores que uno (hemos escrito sólo cinco decimales, sin embargo la precisión  $10^{20}$  se ha mantenido). Finalmente, puesto que el error  $\epsilon$  en el cálculo de los eigenvalores de  $DT(z_0)$  (véase el ...nal de este capítulo) satisface  $\epsilon \cdot 8:7 \in 10^3$ , los eigenvalores están contenidos en los intervalos  $(0:818388; 0:835788)$  y  $(\pm 0:00607994; 0:01132006)$  respectivamente, de donde concluimos que la órbita periódica es estable.

## 9.5 Cálculo de errores en el capítulo 6 (6.2)

Realicemos el cálculo de los errores como sigue a continuación:

### 9.5.1 Cálculo de una cota para la norma de la matriz $Dg(z_0)^{-1}$ .

En esta sección obtendremos una cota a la norma de  $Dg(z_0)^{-1}$  basándonos en el siguiente lema [47]:

**Lema A1.** Sea  $A$  una matriz real  $n \times n$  y  $C$  una aproximación numérica de  $A^{-1}$ . Entonces

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{\|C\|}{1 - \|A^{-1} - C\|}$$

En primer lugar calculamos directamente las derivadas parciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial t} &= (i \frac{3733}{48} e^{it} + \frac{3685}{96} e^{it^2})x_1 \\ &\quad + (e^{it} i \frac{59}{4} e^{it} + \frac{55}{8} e^{it^2})x_2 \\ &\quad + \frac{4}{165} e^{it} i \frac{169}{330} e^{it^2} \\ \frac{\partial g_1}{\partial s} &= (i \frac{3733}{48} e^{\frac{59}{4}s} + \frac{197945}{192} e^{\frac{59}{4}s^2})x_1 \\ &\quad + (i e^{\frac{59}{4}s} + e^{\frac{59}{4}s} + \frac{3245}{32} e^{\frac{59}{4}s^2})x_2 \\ &\quad + \frac{4}{165} e^{\frac{59}{4}s} + \frac{59}{330} e^{\frac{59}{4}s^2} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1} &= e^{\frac{59}{4}s} i \frac{59}{4} e^{\frac{59}{4}s} + \frac{3355}{48} e^{\frac{59}{4}s^2} \\ &\quad + e^{it} + e^{it} i \frac{3685}{96} e^{it^2} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_2} &= i e^{\frac{59}{4}s} + \frac{55}{8} e^{\frac{59}{4}s^2} + e^{it} i \frac{55}{8} e^{it^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_2}{\partial t} &= (i \frac{3733}{48} e^{it} + \frac{3709}{24} e^{it} i \frac{3685}{96} e^{it^2})x_1 \\ &\quad + (i \frac{63}{4} e^{it} + \frac{57}{2} e^{it} i \frac{55}{8} e^{it^2})x_2 \\ &\quad + \frac{4}{165} e^{it} i \frac{173}{165} e^{it} + \frac{169}{330} e^{it^2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial s} &= (\frac{3733}{48} e^{\frac{59}{4}s} i \frac{175643}{192} e^{\frac{59}{4}s} + \frac{11678755}{768} e^{\frac{59}{4}s^2})x_1 \\ &\quad + (\frac{63}{4} e^{\frac{59}{4}s} i \frac{3009}{16} e^{\frac{59}{4}s} + \frac{191455}{128} e^{\frac{59}{4}s^2})x_2 \\ &\quad + i \frac{4}{165} e^{\frac{59}{4}s} + \frac{118}{165} e^{\frac{59}{4}s} + \frac{3481}{1320} e^{\frac{59}{4}s^2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} &= \frac{3733}{48} e^{\frac{59}{4}s} + \frac{197945}{192} e^{\frac{59}{4}s^2} + i \frac{3733}{48} e^{it} + \frac{3685}{96} e^{it^2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_2} &= e^{\frac{59}{4}s} + \frac{3245}{32} e^{\frac{59}{4}s^2} + 32e^{it} + 472e^{it} + 220e^{it^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_3}{\partial t} &= \left( \frac{3717}{16} e^{i t} + \frac{3701}{16} e^{i t t} + \frac{3685}{96} e^{i t t^2} \right) x_1 \\ &+ \left( \frac{177}{4} e^{i t} + \frac{169}{4} e^{i t t} + \frac{55}{8} e^{i t t^2} \right) x_2 \\ &+ \frac{59}{55} e^{i t} + \frac{114}{55} e^{i t t} + \frac{169}{330} e^{i t t^2} \\ \frac{\partial g_3}{\partial s} &= \left( \frac{689046545}{3072} e^{\frac{59}{4} s} s^2 + \frac{11240149}{256} e^{\frac{59}{4} s} s + \frac{3717}{16} e^{\frac{59}{4} s} \right) x_1 \\ &+ \left( \frac{177}{4} e^{\frac{59}{4} s} + \frac{184493}{32} e^{\frac{59}{4} s} s + \frac{11295845}{512} e^{\frac{59}{4} s} s^2 \right) x_2 \\ &+ \frac{59}{55} e^{\frac{59}{4} s} + \frac{3481}{220} e^{\frac{59}{4} s} s + \frac{205379}{5280} e^{\frac{59}{4} s} s^2 \\ \frac{\partial g_3}{\partial x_1} &= i \frac{3733}{48} e^{\frac{59}{4} s} + \frac{175643}{192} e^{\frac{59}{4} s} s + \frac{11678755}{768} e^{\frac{59}{4} s} s^2 \\ &+ i \frac{3733}{48} e^{i t} + \frac{3709}{24} e^{i t t} + \frac{3685}{96} e^{i t t^2} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x_2} &= i \frac{63}{4} e^{\frac{59}{4} s} + \frac{3009}{16} e^{\frac{59}{4} s} s + \frac{191455}{128} e^{\frac{59}{4} s} s^2 \\ &+ i \frac{63}{4} e^{i t} + \frac{57}{2} e^{i t t} + \frac{55}{8} e^{i t t^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_4}{\partial t} &= \left( \frac{10481625}{256} e^{i t} + \frac{487312375}{3072} e^{i t t} + \frac{613091875}{6144} e^{i t t^2} \right) x_1 \\ &+ \left( \frac{166375}{32} e^{i t} + \frac{7819625}{256} e^{i t t} \right. \\ &\left. + \frac{9150625}{512} e^{i t t^2} \right) x_2 + \frac{57}{2} e^{i t} + \frac{6215}{12} e^{i t t} + \frac{511225}{384} e^{i t t^2} \\ \frac{\partial q_4}{\partial s} &= 0 \\ \frac{\partial q_4}{\partial x_1} &= \frac{10481625}{256} e^{i t t} + \frac{613091875}{6144} e^{i t t^2} \\ \frac{\partial q_4}{\partial x_2} &= \frac{166375}{32} e^{i t t} + \frac{9150625}{512} e^{i t t^2} \end{aligned}$$

Evaluando las derivadas en  $z_0$  obtenemos

$$Dg(z_0) =$$

0				1
⌋	i 0:08059	i 0:08059	i 11:64668	i 2:03765
⌋	i 0:30227	i 0:30227	i 14:79071	i 1:55500
⌋	0:12807	0:12806	i 65:08207	i 13:92050
⌋	449:64137	0	49877:38239	8149:21396
				⌋

los cálculos han sido realizados con una precisión de  $10^i 20$ , aunque los números en  $Dg(z_0)$  se han redondeado a 5 decimales.

Sea  $C$  una aproximación a  $Dg(z_0)^{-1}$  obtenida numéricamente

$$C = \begin{pmatrix} 92:7143 & 29:6194 & 11:5646 & 0:00222399 \\ 6:35507 & 1:69133 & 0:182777 & 0:00222399 \\ 4:17026 & 1:30858 & 0:464257 & 3:25261 \times 10^{19} \\ 20:4085 & 6:37489 & 2:2034 & 1:30104 \times 10^{18} \end{pmatrix}$$

Entonces vemos que  $\|C\| < 134$ :

Finalmente, por el Lema A1 se sigue que  $\|Dg(z_0)^{-1}\| < 135$ ; puesto que  $\|C\| < 134$  y  $\|I - Dg(z_0)C\| < 4 \cdot 1 \times 10^{11}$ .

### 9.5.2 El error en el cálculo de los eigenvalores de $DT(z_0)$

Calculemos ahora el error en el cálculo de los eigenvalores de  $DT(z_0)$ . Los eigenvalores de  $DT(z_0)$  serán aproximados por los eigenvalores de  $DT(z_0)$  y, la diferencia será acotada empleando el siguiente resultado ([47]):

**Proposición A2.** Si  $B$  es una matriz diagonalizable  $n \times n$ ,  $B = PDP^{-1}$ , y  $A$  es una matriz arbitraria  $n \times n$ , entonces para cada eigenvalor  $\lambda_j(A)$  de la matriz  $A$  existe un eigenvalor  $\lambda_j(B)$  de la matriz  $B$  tal que

$$|\lambda_j(A) - \lambda_j(B)| \leq \|P\| \|P^{-1}\| \|A - B\|_j$$

Empecemos controlando el error en el cálculo de las primeras derivadas parciales,  $\frac{\partial \lambda_i}{\partial w_j}$ , en  $w_0 = (t_0; z_0)$ ,  $t_0 = t(z_0)$  en lugar de  $\bar{w}_0 = (\bar{t}_0; \bar{z}_0)$ ,  $\bar{t}_0 = \bar{t}(\bar{z}_0)$ .

$$\left| \frac{\partial \lambda_i}{\partial w_j}(w_0) - \frac{\partial \lambda_i}{\partial w_j}(\bar{w}_0) \right| \leq \max_{1 \leq i, j \leq 3} \max_{k=1}^3 \frac{\partial^2 \lambda_i}{\partial w_j \partial w_k} \|h\|$$

donde  $\|h\|$  denota el máximo de la función  $h$  en  $\overline{B_{r_2}(w_0)}$ ; la bola de radio  $r_2$  centrada en  $w_0$ .

Puesto que las funciones  $\lambda_i$  definidas en el Capítulo 6 son lineales en las variables  $w_i = x_{i-1}$ ,  $i = 2, 3$  (recuérdese que  $w = (t; z_{01}; z_{02}) = (t; x_1; x_2)$ ), se sigue que  $\max_{1 \leq i, j \leq 3} \max_{k=1}^3 \frac{\partial^2 \lambda_i}{\partial w_j \partial w_k} \leq \max_{1 \leq i \leq 3} \max_{k=1}^3 \frac{\partial^2 \lambda_i}{\partial t \partial w_k}$ . Por otra parte, las cotas superiores para las segundas derivadas parciales son las fun-

ciones

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial^2 \mathcal{L}_1}{\partial t^2} \cdot \left( \frac{3733}{48} e^{it} + \frac{3709}{24} e^{it} + \frac{3685}{96} e^{it^2} \right) jx_{1j} \\
 & \quad + \left( \frac{63}{4} e^{it} + \frac{57}{2} e^{it} + \frac{55}{8} e^{it^2} \right) jx_{2j} \\
 & \quad + \frac{4}{165} e^{it} + \frac{173}{165} e^{it} + \frac{169}{330} e^{it^2} \\
 & -\frac{\partial^2 \mathcal{L}_1}{\partial t \partial x_1} \cdot \frac{3733}{48} e^{it} + \frac{3685}{96} e^{it^2} \\
 & -\frac{\partial^2 \mathcal{L}_1}{\partial t \partial x_2} \cdot e^{it} + \frac{59}{4} e^{it} + \frac{55}{8} e^{it^2} \\
 & -\frac{\partial^2 \mathcal{L}_2}{\partial t^2} \cdot \left( \frac{122661}{58} e^{it} + \frac{122133}{58} e^{it} + \frac{40535}{116} e^{it^2} \right) jx_{1j} \\
 & \quad + \left( \frac{11682}{29} e^{it} + \frac{11154}{29} e^{it} + \frac{1815}{29} e^{it^2} \right) jx_{2j} \\
 & \quad + \frac{1416}{145} e^{it} + \frac{2736}{145} e^{it} + \frac{676}{145} e^{it^2} \\
 & -\frac{\partial^2 \mathcal{L}_2}{\partial t \partial x_1} \cdot \frac{3733}{48} e^{it} + \frac{3709}{24} e^{it} + \frac{3685}{96} e^{it^2} \\
 & -\frac{\partial^2 \mathcal{L}_2}{\partial t \partial x_2} \cdot \frac{63}{4} e^{it} + \frac{57}{2} e^{it} + \frac{55}{8} e^{it^2} \\
 & -\frac{\partial^2 \mathcal{L}_3}{\partial t^2} \cdot \left( \frac{361532875}{3072} e^{it} + \frac{550202125}{1536} e^{it} + \frac{613091875}{6144} e^{it^2} \right) jx_{1j} \\
 & \quad + \left( \frac{6488625}{256} e^{it} + \frac{8485125}{128} e^{it} + \frac{9150625}{512} e^{it^2} \right) jx_{2j} \\
 & \quad + \frac{5873}{12} e^{it} + \frac{411785}{192} e^{it} + \frac{511225}{384} e^{it^2} \\
 & -\frac{\partial^2 \mathcal{L}_3}{\partial t \partial x_1} \cdot \frac{10481625}{256} e^{it} + \frac{529238875}{2048} e^{it} \\
 & -\frac{\partial^2 \mathcal{L}_3}{\partial t \partial x_2} \cdot \frac{166375}{32} e^{it} + \frac{7819625}{256} e^{it} + \frac{9150625}{512} e^{it^2}
 \end{aligned}$$

Puesto que estas funciones que acotan superiormente a las derivadas son crecientes con respecto a  $w_i = x_{i-1}$ ,  $i = 2, 3$  y decrecientes con respecto a  $w_1 = t$ , es suficiente tomar los valores de la función en el máximo de  $x_i$  y en el mínimo de  $t$  en  $\overline{B_{r_2}(w_0)}$ . De este modo, para  $t = 0.9501$ ,  $x_1 = 0.0202$  y  $x_2 = 0.0821$  obtenemos que  $\frac{\partial^2 \mathcal{L}_i}{\partial t \partial w_h} \cdot 1_{i,h}$ , donde las  $1_{i,h}$  están dadas por la siguiente tabla de valores

4:15500	41:9730	8:20600
8:03400	100:253	18:9620
9039:81	108948	19471:8

Entonces,  $\max_{1 \leq i \leq 3} \left| \frac{\partial^2 \mathcal{C}_i}{\partial t \partial w_h} \right| \cdot 137459:7$ , y en consecuencia

$$\left| \frac{\partial \mathcal{C}_i}{\partial w_j}(w_0) \right| \cdot \left| \frac{\partial \mathcal{C}_i}{\partial w_j}(w_0) \right| \cdot \max_{1 \leq i, j \leq 3} \left| \frac{\partial^2 \mathcal{C}_i}{\partial w_j \partial w_k} \right| \cdot |w_0| \cdot |w_0|_1 \cdot 6:6 \in 10^i \cdot 10$$

Ahora, empleando los números  $\frac{\partial \mathcal{C}_i}{\partial w_j}(t_0; z_0)$ ; para calcular

$$\frac{\partial \mathcal{C}_i}{\partial z_j}(t_0; z_0) = m(a_1; a_2; a_3; a_4) = a_4 \cdot \frac{a_1 a_2}{a_3} \quad (9.3)$$

donde  $a_1 = \frac{\partial \mathcal{C}_1}{\partial t}$ ;  $a_2 = \frac{\partial \mathcal{C}_3}{\partial z_1}$ ;  $a_3 = \frac{\partial \mathcal{C}_3}{\partial t}$  y  $a_4 = \frac{\partial \mathcal{C}_1}{\partial z_1}$ . De este modo tenemos que

$$|m(a)| \cdot |m(\bar{a})| \cdot \left( 1 + \frac{a_1}{a_3} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_1 a_2}{a_3^2} \right) \cdot |a| \cdot |\bar{a}|_1$$

$|a| \cdot |\bar{a}|_1 \cdot 6:6 \in 10^i \cdot 10$  en  $\overline{B_{r_2}(w_0)}$ , y

$$\frac{a_1}{a_3} \cdot \frac{0:31}{449}; \frac{a_2}{a_3} \cdot \frac{49877:4}{449}; \frac{a_1 a_2}{a_3^2} \cdot \frac{0:31 \in 49877:4}{449^2}$$

de esto se sigue que

$$|m(a)| \cdot |m(\bar{a})|_1 \cdot 7:4 \in 10^i \cdot 8$$

Entonces, se tiene que las diferencias entre los elementos de la matriz  $DT_1(z_0)$  y sus correspondientes elementos de la matriz  $DT_1(\bar{z}_0)$  son menores que  $7:4 \in 10^i \cdot 8$ . Así, el error satisface

$$|DT_1(\bar{z}_0) - DT_1(z_0)|_1 \cdot 2:3 \in 10^i \cdot 7 \quad (9.4)$$

De manera similar deseamos estimar el error en el cálculo de  $DT_2(z_1)$  con respecto de  $DT_2(\bar{z}_1)$ . Ya que  $z_1 = T_1(z_0)$  y  $\bar{z}_1 = T_1(\bar{z}_0)$ , tenemos que  $|z_1 - \bar{z}_1|_1 = |T_1(z_0) - T_1(\bar{z}_0)|_1$ . Repitiendo algunos de los argumentos anteriores llegamos a

$$|jz_1 - \bar{z}_1 j_1| = |jT_1(z_0) - T_1(\bar{z}_0)j_1| \leq 4 \max_{1 \leq i, j \leq 2} \frac{\partial^2}{\partial z_j^2} (t(z); z) |jz_0 - z_0 j_1|$$

Puesto que el error en los elementos de  $DT_1(z)$ , cambiando  $z$  en  $\overline{B_{r_2}(w_0)}$  es a lo más  $2.3 \times 10^{-7}$ ; de la matriz  $DT_1(z_0)$  obtenemos que  $\max_{1 \leq i, j \leq 2} \frac{\partial^2}{\partial z_j^2} (t(z); z) \leq 18.4$ . Así:

$$|jz_1 - \bar{z}_1 j_1| \leq 4 \times 18.4 \times 4.8 \times 10^{15} \times 3.533 \times 10^{13}.$$

Ahora, si hacemos  $a_3 := k^T a$  y procedemos como arriba, se sigue que

$$\left| \frac{\partial^a}{\partial w_j} (w_1) - \frac{\partial^a}{\partial w_j} (w_1) \right| \leq \max_{1 \leq i, j \leq 3} \frac{\partial^{2a}}{\partial s \partial w_k} |jw_1 - w_1 j_1|$$

donde  $w_1 = (s(z_1); z_1)$ ,  $\bar{w}_1 = (s(\bar{z}_1); \bar{z}_1)$  y  $[h]$  como se ha definido en la bola cerrada de radio  $r = 3.533 \times 10^{13}$  centrada en  $z_1$ . Nótese que  $|jw_1 - w_1 j_1| = \max\{|js - s j_1|; |jz_1 - z_1 j_1|\} = \max\{4.8 \times 10^{15}; 3.533 \times 10^{13}\} = 3.533 \times 10^{13}$ . Repitiendo el mismo razonamiento, con  $s = 0.0048$ ;  $T_1(z_0) = (0.0206; 0.0806)$  tenemos la siguiente tabla de valores para  $\rho_{i; k}$  tal que  $\frac{\partial^{2a}}{\partial s \partial w_k} \rho_{i; k}$ :

2:86200	0:37000	0:93830
15:1130	76:8720	15:5470
47637:9	42528:6	5352:29

Por consiguiente  $\max_{1 \leq i, j \leq 3} \frac{\partial^{2a}}{\partial s \partial w_k} \rho_{i; k} \leq 9518.8$  y

$$\left| \frac{\partial^a}{\partial w_j} (w_1) - \frac{\partial^a}{\partial w_j} (w_1) \right| \leq 9518.8 \times 3.533 \times 10^{13} \times 3.4 \times 10^8.$$

En este caso  $m(a)$  está definida de modo similar:  $\frac{\partial^a}{\partial z_j} (s(z_1); z_1) = m(a_1; a_2; a_3; a_4) = a_4 + \frac{a_1 a_2}{a_3}$ . Entonces:

$$\frac{a_1}{a_3} \cdot \frac{0:30}{368:6}, \frac{a_2}{a_3} \cdot \frac{182:6}{368:6}, \frac{a_1 a_2}{a_3^2} \cdot \frac{0:30 \text{ E } 182:6}{368:6^2}$$

y

$$jm(a) \text{ i } m(\bar{a})j_1 \cdot 1:50 \text{ E } 3:4 \text{ E } 10^i \text{ }^8 \cdot 5:1 \text{ E } 10^i \text{ }^8:$$

De ahí, cada elemento de la matriz  $DT_2(z_1)$ , respecto de los correspondientes de la matriz  $DT_2(\bar{z}_1)$ , tiene un error menor que  $5:1 \text{ E } 10^i \text{ }^8$ . Por tanto.

$$jDT_2(\bar{z}_1) \text{ i } DT_2(z_1)j_1 \cdot 1:6 \text{ E } 10^i \text{ }^7:$$

Consideremos la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} & jDT_2(z_1)DT_1(z_0) \text{ i } DT_2(\bar{z}_1)DT_1(\bar{z}_0)j_1 \\ & \cdot jDT_2(z_1)j_1 jDT_1(z_0) \text{ i } DT_1(\bar{z}_0)j_1 \\ & + jDT_2(z_1) \text{ i } DT_2(\bar{z}_1)j_1 (jDT_1(z_0)j_1 \\ & + jDT_1(z_0) \text{ i } DT_1(\bar{z}_0)j_1) \\ & \cdot 3:7 \text{ E } 10^i \text{ }^6 \end{aligned} \tag{9.5}$$

Si  $F := DT_2(z_1)DT_1(z_0)$  y  $H := DT_2(\bar{z}_1)DT_1(\bar{z}_0)$ , entonces

$$\begin{aligned} jDT(z_0) \text{ i } DT(\bar{z}_0)j_1 & = \bar{F}^2 \text{ i } H^2 \bar{1} \\ & \cdot jF \text{ i } Hj_1 jF + Hj_1 \\ & \cdot jF \text{ i } Hj_1 (jFj_1 + jHj_1) \\ & \cdot jF \text{ i } Hj_1 (2jFj_1 + jF \text{ i } Hj_1) \end{aligned}$$

Ya que  $jFj_1 = jDT_2(z_1)j_1 jDT_1(z_0)j_1 \cdot 25:03$ , tenemos que

$$jDT(z_0) \text{ i } DT(\bar{z}_0)j_1 \cdot 1:9 \text{ E } 10^i \text{ }^4$$

y por la Proposición A2, dada

$$P = \begin{matrix} \mathbf{O} & & \mathbf{1} & & \mathbf{O} & & \mathbf{1} \\ @ & i & 0:150441 & i & 0:200918 & \mathbf{A} & y & P & i & ^1 = @ & 19:111492 & 3:919768 & \mathbf{A}; \\ & & 0:988619 & & 0:979608 & & & & & & i & 19:287286 & i & 2:935007 \end{matrix}$$

se sigue que

$$j_s(DT(z_0)) - j_s(DT(\bar{z}_0)) \leq 8.7 \cdot 10^3$$

en otras palabras, el error satisface

$$\leq 8.7 \cdot 10^3$$

# Bibliography

- [1] B. Aguirre, J. Alvarez-Ramírez and R. Suárez, Estimation of the region of attraction of the origin of closed-loop linear systems with saturated linear controllers: a first harmonic approach, *Bol. Soc. Mat. Mexicana* (3) Vol 6, (2000), 111-150.
- [2] B. Aguirre, J. Alvarez, J. Fernández, R. Suárez, First harmonic analysis of linear control systems with high-gain saturated feedback, *Int. J. Bifur. Chaos*, 7, (11) (1997), 2501-2510.
- [3] L. Aguirre and P. Seibert, Types of change of stability and corresponding types of bifurcations, *Discrete and continuous dynamical Systems*, 5, No. 4, (1999), 741-752.
- [4] J. Alvarez, R. Suarez and J. Alvarez, On the equilibrium sets of linear systems with saturating feedback control, *IEEE, Proceedings of the 31st Conference on Decision and Control*, Tucson Arizona, 1992.
- [5] J. Alvarez, R. Suárez and J. Alvarez, Planar linear systems with single saturated feedback, *Systems and Control Letters*, 20, (1993), 319-326.
- [6] M. F. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Academic Press Profesional, New York, 1993.
- [7] S. P. Banks and S. A. Khathur, Structure and control of piecewise-linear systems, *Int. J. Control*, 50 (2), 1989, 667-686.
- [8] J. Bernat and J. Llibre, Counterexample to Kalman and Markus-Yamabe conjectures in dimension larger than 3, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, 2, (1996), 337-379.
- [9] H. D. Chiang, M. W. Hirsch and F. F. Wu, Stability regions of nonlinear autonomous dynamical systems, *IEEE, Trans. Automat. Control* Ac-33, (1988), 16-29.

- [10] L. O. Chua, M Komuro, and, T. Matsumoto, The double scroll family. Part I and Part. II. IEEE. Trans. Circuits and Systems, 33 (1986), 1073-1118.
- [11] E. Boe, S.-Hong Hwang and H Chia Chang, Gain Space Stability Analysis of Nonlinear Systems under PI control, WA8-11.30, Department of Chemical Engineering, University of Houston.
- [12] J. M. Gonçalves, Surface Lyapunov functions in global stability analysis of saturation systems, Technical report LIDS-P-2477, MIT, August 2000.
- [13] J. M. Gonçalves, Constructive Global Analysis of Hybrid Systems, MIT, Tesis doctoral, [http://www.cds.caltech.edu/%7Ejmg/publi/PdD\\_thesis.pdf](http://www.cds.caltech.edu/%7Ejmg/publi/PdD_thesis.pdf)
- [14] J. M. Gonçalves, A. Megretski and M. A. Dahleh, Global stability of relay feedback systems, Accepted for publication in IEEE Transactions on Automatic Control, 2000.
- [15] J. Hale and H. Koçac, Dynamics and Bifurcations, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [16] L.-Heng and H.-Chia Chang, Global effects of controller saturation on closed-loop dynamics, Chemical Engineering Science, Vol. 40, No. 12, (1985), 2191-2205.
- [17] T. Hu, Z. Lin, On enlarging the basin of attraction for linear systems under saturated feedback, Systems and Control Letters, 40, (2000), 59-69.
- [18] C. Imaz y Z. Vorel, Ecuaciones diferenciales ordinarias, Editorial Limusa, México, 1975.
- [19] G. Iooss, D. D. Joseph, Elementary Stability and Bifurcation Theory, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [20] A. T. Fuller, In the large stability of relay and saturating control systems linear controllers, Int. J. Control, 10 (4), (1989), 457-480.
- [21] J. J. Gray, The Hilbert Challenge, Oxford University Press, New York, 2000.
- [22] P. J. Hilton and S. Wylie, Homology Theory, Cambridge University Press, 1990.
- [23] C. Kahlert and O. Rösler, Analytical Properties of Poincaré Halfmaps in a Class of Piecewise-Linear Dynamical Systems, Z. Naturforsch, 40a, (1985), 1011-1025.

- [24] C. Kahlert and O. Rösler, The Separating Mechanisms in Poincaré Halfmaps, *Z. Naturforsch.*, 41a, (1986), 1369-1380.
- [25] M. Komuro, Normal forms of continuous piecewise linear vector fields and chaotic attractors, Part. *Japan J. Appl. Math.*, 5 (1988), 157-304.
- [26] M. Komuro, Normal forms of continuous piecewise linear vector fields and chaotic attractors, Part. *Japan J. Appl. Math.*, 5 (1988), 503-559.
- [27] M. Komuro, Bifurcations Equations of Continuous Piecewise-Linear Vector Fields, *Japan J. Appl. Math.*, 9, No. 2, (1992), 269-912.
- [28] M. Komuro, Towards the Harnessing of Chaos, A Collection of Contributions Based on Lectures Presented at the Seventh TOYOTA Conference, Mikkabi, Shizuoka, Japan, October 31 to November 3, (1993), 257-271.
- [29] M. Komuro, Homoclinic bifurcation equations of continuous piecewise linear vector fields, Finite and Infinite Dimensional Dynamics, *Lecture Notes in Num. Appl. Anal.* 15, (1996), 83-113.
- [30] M. Y. Li and J. S. Muldowney, Phase Asymptotic Semiflows, Poincaré's Condition, and the Existence of Stable Limit Cycles, *Journal of Differential Equations* 124 (1996), 425-448.
- [31] M. Y. Li and J. S. Muldowney, On the Bendixon's Criterion, *Journal of Differential equations* 106 (1993), 27-39.
- [32] M. Y. Li and J. S. Muldowney, On R. A. Smith's autonomous convergence theorem, *Rocky Mountain Journal of Mathematics* 25 No. 1 (1995), 365-379.
- [33] J. Llibre and E. Ponce, Global first harmonic bifurcation diagram for nonlinear control systems, *Dynamics & Stability of Systems*, 11, (1996), 49-88
- [34] J. Llibre and J. Sotomayor, Phase Portraits of Planar Control Systems, *Nonlinear Anal. Theory Meth. and Appl.*, 10 (1996), 1177-1197.
- [35] E. N. Lorenz. Deterministic non-periodic flow. *J. Atmos. Sci.*, 20 (1963), 130-141.

- [36] A. A. Maunder. Algebraic Topology. Dover. N. Y. 1996.
- [37] I. Moreno, Órbitas Periódicas en sistemas lineales por partes, 2nd Mexican Meeting on Mathematical and Experimental Physics (Memorias de las Jornadas del Posgrado Divisional en Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma Metropolitana), 1 (2004), 31-33.
- [38] I. Moreno and R. Suarez, Existence of periodic orbits of stable saturated systems, Systems & Control Letters, No. 51 (2004), 293-309.
- [39] J. Palis and W. de Melo, Geometric Theory of Dynamical Systems: And Introduction, Springer, New York, 1982.
- [40] L. Perko, Differential Equations and Dynamical Systems, 2nd. edition, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [41] O. E. Rössler. Continuous chaos-four prototype equations. Bifurcation Theory and Applications in Scientific Disciplines (eds. O. Gurel and O. E. Rösler), Proc. N. Y. Acad Sci., 316, 1978, 376-394.
- [42] O. E. Rössler. The gluing-together principle and chaos. Nonlinear Problems of Analysis in Geometry and Mechanics (eds. M. Attaia, D. Bancel and I. Gumowski), Pitman, Boston-London, 1981, 50-56.
- [43] W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill, 1976.
- [44] E. H. Spanier, Algebraic Topology, McGraw-Hill, N. Y., 1985.
- [45] M. Spivak, Calculus, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1988.
- [46] M. Spivak, A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Perish Ed., Boston, 1970.
- [47] J. Stoer and R. Burlisch, Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, New York, 1980.

- [48] R. Suárez. J. Alvarez and J. Alvarez, Regions of Attraction of Closed-Loop Linear Systems with Saturated Linear Feedback, *Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control*, 5, No. 4, (1996), 1-22.
- [49] H. J. Sussman, On the stabilizability of multiple integrators by means of bounded feedback controls, *IEEE, Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control*, Brighton, England, 1991.
- [50] A. E. Teruel Aguilar, *Clasificación de los retratos de fases de los sistemas lineales a trozos en el plano*, Universidad Autónoma de Barcelona, Tesis doctoral, 1997.
- [51] Y. Ueda. Steady motions exhibited by DuΦng's equation: a picture book of regular and chaotic motions. *Approaches to Nonlinear Problems in Dynamics* (ed. P. J. Holmes), SIAM: Philadelphia, 311-322.
- [52] M. Vidyasagar, *Nonlinear Systems Analysis*, Prentice Hall, N. J., 1993.
- [53] X. Wang, Ch. Su. and H. Hong, Robust Adaptive Control of a Class of Nonlinear Systems with Unknown Dead-zone, *Proceedings of the 40th IEEE, Conference on Decision and Control*, Orlando Florida U. S. A., december 2001, 1627-1632.



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

# ACTA DE DISERTACIÓN PÚBLICA

No. 00015

DINAMICA DE SISTEMAS  
LINEALES POR PARTES.

En México, D.F., se presentaron a las 10:00 horas del día 27 del mes de enero del año 2006 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. ERNESTO ALEJANDRO LACOMBA ZAMORA

DR. JOAQUIN DELGADO FERNANDEZ

DRA. EVA NAVARRO LOPEZ

DR. MARIO SZNAIER

DR. JOSE DE JESUS ALVAREZ RAMIREZ

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron a la presentación de la disertación Pública cuya denominación aparece al margen, a la obtención del grado de:

DOCTOR EN CIENCIAS

DE: ISAI MORENO ROQUE

y de acuerdo con el artículo 78 fracción IV del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

*Aprobar*

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.



ISAI MORENO ROQUE  
FIRMA DEL ALUMNO

REVISÓ

*Carmen Llorens Fabregat*  
LIC. CARMEN LLORENS FABREGAT  
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISION DE CBI

*Tomás Viveros García*  
DR. TOMAS VIVEROS GARCIA

PRESIDENTE

*Ernesto Lacomba Zamora*  
DR. ERNESTO ALEJANDRO LACOMBA  
ZAMORA

VOCAL

*Joaquín Delgado Fernández*  
DR. JOAQUIN DELGADO FERNANDEZ

VOCAL

*Eva Navarro López*  
DRA. EVA NAVARRO LOPEZ

VOCAL

*Mario Sznaier*  
DR. MARIO SZNAIER

SECRETARIO

*José de Jesús Álvarez Ramírez*  
DR. JOSE DE JESUS ALVAREZ  
RAMIREZ