Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa
División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Método de cálculo operacional para resolver ecuaciones en derivadas fraccionarias

Tesis que presenta

Leasly Alejandra Campa Raymundo

Para obtener el grado de

Maestra en ciencias matemáticas

bajo la dirección de

Luis Verde Star

Sinodales:

Presidente: Dr. Luis Verde Star

Secretario: Dr. Ernesto Pérez Chavela

Vocal: Dr. Guillermo Fernández Anaya

Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa
División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Método de cálculo operacional para resolver ecuaciones en derivadas fraccionarias

Tesis que presenta

Leasly Alejandra Campa Raymundo

Para obtener el grado de

Maestra en ciencias matemáticas

bajo la dirección de

Luis Verde Star

Luis Verde Star

Sinodales:

Presidente: Dr. Luis Verde Star

Secretario: Dr. Ernesto Pérez Chavela

Vocal: Dr. Guillermo Fernández Anaya

"A Edith, Emerson y David."

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Luis Verde, por darme su confianza y apoyarme siempre que lo necesité.

A mis sinodales, por sus brillantes observaciones para mejorar este trabajo.

A mis padres, por la vida que me dieron.

A mi hermano, porque su silencio, siempre ha creído en mí.

A mis abuelitos (Papáfen y Adelita) y mis tíos (Efrén y Lucha), por darme mucho cariño.

A Josué, por todo lo que significas, por todo lo que eres, por todo lo que me das y por hacerme cada día mejor.

A Cery, Omar, Karla, Zuly y Pato, mis siempre fieles mejores amigos.

Índice general

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

El cálculo fraccionario (cálculo de las integrales y derivadas de orden real o complejo arbitrario) ha alcanzado mucha popularidad e importancia durante los últimos años, debido principalmente a sus aplicaciones en numerosos campos de la ciencia y la ingeniería. El cálculo fraccionario proporciona varias herramientas útiles para solucionar ecuaciones diferenciales e integrales y varios otros problemas que involucran funciones especiales de la física matemática, así como sus extensiones y generalizaciones en una y más variables. Además, tiene aplicaciones en las teorías de diferenciación, ecuaciones integrales e integro-diferenciales. Se han obtenido resultados importantes en el análisis numérico y en diversas áreas de la física. Por ejemplo, en campos como la viscoelasticidad, electroquímica, procesos de difusión ([16], p.169).
La derivada fraccionaria describe con precisión los fenómenos naturales que se producen en problemas de ingeniería comunes como la trasferencia de calor y el comportamiento del electrodo ([16], p.303). Además, el cálculo fraccionario encontró muchas aplicaciones en fenómenos de escala, así como en la mecánica clásica ([16], p.113) y teoría de control ([16], p.417).

Actualmente en la literatura encontramos una gran cantidad de artículos que muestran algunas aplicaciones del cálculo fraccionario; entre los que consultamos se encuentra el trabajo *"SEMI-INTEGRALS AND SEMI-DERIVATIVES IN PARTICLE PHYSICS"* ([16], p.139), el cual hace una pequeña reseña sobre la aplicación de semi-integrales del tipo de trasformadas integrales de Abel con kernel $(t^2-x^2)^{-1/2}$ y las propiedades de esta importante trasformada integral. Se demuestra su aplicación práctica para la instrumentación en la física de aceleradores para determinar la densidad de haces de partículas en el espacio face trasversal en un sincrotón de partículas en el espacio fase trasversal en un sincrotón para el CERN sincrotón de protones de refuerzo (PSB) Bamscope. Este dispositivo permite la observación directa de la distribución de amplitud de las oscilaciones betatrón. Se trata además de una descripción del espacio como de la función de onda de las partículas de spin-media dentro de la imagen de Schrödinger, uno de los más famosos de los fenómenos no enteros en la física. Este artículo muestra que suponiendo la existencia de derivadas un medio las funciones de onda para spín-$1/2$-partículas se pueden derivar exactamente de la misma manera que para el momento angular normal. Estas funciones cumplen las ecuaciones de valores propios de espín $1/2$, así como el cambio del estado de espín aplicado a los operadores de creación y aniquilación. Estas funciones de onda muestran directamente el observado 4 Pi simetría de tales partículas. Esta descripción es complementaria a la descripción común el uso de matrices de Pauli y espinores. Los detalles se muestran en el citado artículo.

Se cree popularmente que el concepto de cálculo fraccionario surgió de una pregunta formulada en el año 1695 por el marqués de L'Hopital (1661-1704) a Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), acerca del significado de la notación de Leibniz, $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ para derivadas de orden n, entero positivo, cuando $n=\frac{1}{2}$. La respuesta que Leibniz escribió a L'Hopital (30 de septiembre de 1695) dice:
"Se trata de una aparente paradoja de la que, un día, se extraerán consecuencias útiles."

Existen diferentes definiciones de derivadas fraccionarias, algunas de las más conocidas son las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville, Caputo, Erdélyi-Kober, Hadamard, Grünwald-Letnikov y Riesz. Algunas de estas definiciones serán presentadas en los preliminares de esta tesis.

Las derivadas fraccionarias también fueron mencionadas por Euler en 1730, Lagrange en 1772, Laplace en 1812, Lacroix en 1819, Fourier en 1822, Liouville en 1832, Riemann en 1847, Greer en 1859, Holmgren en 1865, Grünwald en 1867, Letnikov en 1868, Sonin en 1869, Laurent en 1884, Nekrassov en 1888, Krug en 1890, y Weyl en 1917. En el libro de texto de 700 páginas, titulado "Traité du calcul différentiel et du calcul intégral" (Segunda edición; Courcier, París, 1819), S.F. Lacroix dedica dos páginas (pp. 409-410) al cálculo fraccionario, mostrando eventualmente que

$$\frac{d^{1/2}}{dv^{1/2}}v=\frac{2\sqrt{v}}{\sqrt{\pi}}.$$

El primer libro de texto dedicado al cálculo fraccionario es de Oldham y Spanier [7], publicado en 1974. En el artículo [11] de B. Ross se presenta la historia del cálculo fraccionario hasta 1900.

El objetivo principal de esta tesis es desarrollar métodos operacionales para resolver ecuaciones en derivadas fraccionarias utilizando la teoría general del cálculo operacional introducido por G. Bengochea y L. Verde-Star en [1]. Dicha teoría es una alternativa unificada a los métodos tradicionales basados en transformadas integrales. En el artículo [1] se presenta un ejemplo de aplicación de la teoría para resolver ecuaciones lineales con derivadas fraccionarias de Liouville, que son un caso muy particular de las derivadas de Riemann-Liouville. En esta tesis presentamos un método operacional para resolver ecuaciones en derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville. También obtenemos la representación integral de la convolución de funciones que extiende la multiplicación de las series formales asociadas con los operadores de diferenciación fraccionaria. Tal representación integral nos permite resolver una clase muy extensa de ecuaciones lineales no homogéneas en derivadas fraccionarias.

En el capítulo 2 presentamos el material preliminar, que incluye las definiciones y propiedades básicas de las funciones relevantes en nuestro desarrollo y de las derivadas fraccionarias. En el capítulo 3 presentamos la teoría algebraica de los métodos operacionales introducida en [1] y la manera en que se aplica para resolver ecuaciones diferenciales y en diferencias finitas. El método operacional para las ecuaciones en derivadas fraccionarias se presenta en el capítulo 4, donde también se obtiene la representación integral de la multiplicación de los generadores asociados con los operadores de Riemann-Liouville y se presentan algunos ejemplos.

CAPÍTULO 2

PRELIMINARES

2.1. Definiciones

2.1.1. Función Gamma

La función Gamma de Euler $\Gamma(z)$ está definida por la integral

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt, \qquad (Re(z) > 0) \tag{2.1.1}$$

para todo complejo z tal que $Re(z) > 0$.

La *fórmula de reducción*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \qquad (Re(z) > 0) \tag{2.1.2}$$

se obtiene de (2.1.1) por medio de integración por partes. Usando esta relación la función gamma de Euler se extiende al semi-plano $Re(z) \leq 0$ por

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n}, \qquad (Re(z) > -n;\ n \in \mathbb{N};\ z \notin \mathbb{Z}_0^- := \{0, -1, -2, \ldots\}). \tag{2.1.3}$$

Aquí $(z)_n$ es el *símbolo de Pochhammer*, el cual está definido para complejos z y enteros no negativos n por

$$(z)_0 = 1 \quad \text{y} \quad (z)_n = z(z+1)\dots(z+n-1) \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{2.1.4}$$

De las ecuaciones (2.1.2) y (2.1.4)obtenemos

$$\Gamma(n+1) = (1)_n = n!, \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

2.1.2. Funciones de Mittag-Leffler

2.1 Definiciones. Una función $f(z)$ es llamada **entera** si tiene una representación de la forma

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \qquad |z| < \infty.$$

El **orden** de una función entera $f(z)$ no constante está definido por:

$$\rho = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln(\ln ||f||_{\infty,B_r})}{\ln r},$$

donde B_r es el disco de radio r y $||f||_{\infty,B_r}$ denota la norma suprema de $f(z)$ en B_r.

Si $0 < \rho < \infty$, definimos el **tipo** de $f(z)$ como:

$$\sigma \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln ||f||_{\infty,B_r}}{r^{\rho}}.$$

La *función de Mittag-Leffler* $E_\alpha(z)$ definida por

$$E_\alpha(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}, \qquad (z \in \mathbb{C};\ Re(\alpha) > 0), \tag{2.1.5}$$

fue introducida por Mittag-Leffler, de ahí el nombre. Las propiedades básicas de esta función fueron estudiadas por Mittag-Leffler y por Wiman. $E_\alpha(z)$ es una función entera de z con orden $[Re(\alpha)]^{-1}$ y de tipo 1. En particular, cuando $\alpha = 1$ y $\alpha = 2$ tenemos

$$E_1(z) = e^z \quad \text{y} \quad E_2(z) = \cosh(\sqrt{z}). \tag{2.1.6}$$

La función de dos parámetros del tipo de Mittag-Leffler juega un papel muy importante en el cálculo fraccionario y fue introducida por Agarwal. Muchas propiedades de esta función fueron obtenidas por Humbert y Agarwal usando la técnica de transformada de Laplace. Esta función podría ser llamanda función de Agarwal. Sin embargo, Humbert y Agarwal mantuvieron la misma notación usada para la función de Mittag-Leffler de un parámetro, y ésta es la razón por la que ahora la función de dos parámetros es conocida como la función de Mittag-Leffler.

Una función de dos parámetros del tipo de Mittag-Leffler está definida por la expansión en serie de potencias

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \qquad (\alpha > 0,\ \beta > 0). \tag{2.1.7}$$

Se sigue de la definición (2.1.7) que

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z, \tag{2.1.8}$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)} = \frac{e^z-1}{z}, \tag{2.1.9}$$

$$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} = \frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)} = \frac{e^z-1-z}{z^2}, \tag{2.1.10}$$

y en general

$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}}\left(e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!}\right). \tag{2.1.11}$$

Además

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z), \tag{2.1.12}$$

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z}. \tag{2.1.13}$$

Las funciones hiperbólicas de orden n, las cuales son una generalización de las funciones seno y coseno hiperbólicos, también pueden ser expresadas en términos de la función de Mittag-Leffler como sigue

$$h_r(z,n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{nk+r-1}}{(nk+r-1)!} = z^{r-1}E_{n,r}(z^n), \qquad (r = 1,2,\ldots,n), \tag{2.1.14}$$

así como las funciones trigonométricas de orden n, que son una generalización de las funciones seno y coseno

$$k_r(z,n) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{nj+r-1}}{(nj+r-1)!} = z^{r-1}E_{n,r}(-z^n), \qquad (r = 1,2,\ldots,n). \tag{2.1.15}$$

Para $\beta = 1$ obtenemos la función de Mittag-Leffler de un parámetro definida en (2.1.5):

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)} = E_\alpha(z). \tag{2.1.16}$$

2.1.3. Funciones del tipo de Mittag-Leffler

En esta sección presentaremos la generalización de las funciones de Mittag-Leffler, las definiciones y propiedades básicas de algunas funciones que se expresan en términos de las funciones de Mittag-Leffler $E_{\alpha,\alpha}(z)$ y la función $z^{\alpha-1}$.

2.2 Definición. La generalización de la función de Mittag-Leffler definida para complejos; $z \in \mathbb{C}$, α, β, $\rho \in \mathbb{C}$ y $Re(\alpha) > 0$ está dada por:

$$E^{\rho}_{\alpha,\beta}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \frac{z^k}{k!} = \frac{1}{\rho} {}_1\Psi_1 \left[\begin{array}{c|c} (\rho,1) & \\ & z \\ (\beta,\alpha) & \end{array} \right], \tag{2.1.17}$$

donde $(\rho)_k$ es el símbolo de Pochhammer definido en (2.1.4). Esta función fue introducida por Prabhakar y es una función entera de z de orden $[Re(\alpha)]^{-1}$.
En particular, cuando $\rho = 1$, coincide con la función de Mittag-Leffler 2.1.7:

$$E^1_{\alpha,\beta}(z) = E_{\alpha,\beta}(z), \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Para la generalización de la función 2.1.17 se tienen las siguientes formulas:

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n \left[E^{\rho}_{\alpha,\beta}(z)\right] = (\rho)_n E^{\rho+n}_{\alpha,\beta+\alpha n}(z), \qquad n \in \mathbb{N} \tag{2.1.18}$$

y

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n \left[z^{\beta-1}E^{\rho}_{\alpha,\beta}(\lambda z^{\alpha})\right] = z^{\beta-n-1}E^{\rho}_{\alpha,\beta-n}(\lambda z^{\alpha}), \qquad \lambda \in \mathbb{C};\ n \in \mathbb{N}. \tag{2.1.19}$$

Consideramos una función definida en términos de la función de Mittag-Leffler 2.1.5 por

$$E_{\alpha}(\lambda z^{\alpha}), \qquad z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}; \quad \lambda \in \mathbb{C}; \quad Re(\alpha) > 0. \tag{2.1.20}$$

Las siguientes fórmulas de diferenciación con respecto a z son válidas para esta función

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^n [E_{\alpha}(\lambda z^{\alpha})] = z^{-n}E_{\alpha,1-n}(\lambda z^{\alpha}) \tag{2.1.21}$$

y

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^n [E_{\alpha}(\lambda z^{\alpha})] = n!z^{\alpha n}E^{n+1}_{\alpha,\alpha n+1}(\lambda z^{\alpha}). \tag{2.1.22}$$

donde $E_{\alpha}(\lambda z^{\alpha})$ es la generalización de la función de Mittag-Leffler y $n \in \mathbb{N}$.

Considerando ahora una función, más general que en 2.1.20, definida por

$$z^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda z^{\alpha}), \qquad z \in \mathbb{C}\backslash\{0\};\ \lambda \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(\alpha) > 0. \tag{2.1.23}$$

Las siguientes fórmulas, análogas a 2.1.21 y 2.1.22, son válidas

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^n \left[z^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda z^{\alpha})\right] = z^{\beta-n-1}E_{\alpha,\beta-n}(\lambda z^{\alpha}), \tag{2.1.24}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^n \left[z^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda z^{\alpha})\right] = n!z^{\alpha n+\beta-1}E^{n+1}_{\alpha,\alpha n+\beta}(\lambda z^{\alpha}). \tag{2.1.25}$$

Para el caso especial de la función 2.1.23 cuando $\beta = \alpha$. Esta función especial, la cual denotaremos por $e^{\lambda z}_{\alpha}$ es llamada la función α-*exponencial* y está definida por

$$e^{\lambda z}_{\alpha} := z^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda z^{\alpha}), \tag{2.1.26}$$

donde $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ y $\lambda \in \mathbb{C}$.

De acuerdo con 2.1.7, $e_\alpha^{\lambda z}$ es una serie de la forma

$$e_\alpha^{\lambda z} = z^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{z^{\alpha k}}{\Gamma[(k+1)\alpha]}, \qquad \mathrm{Re}(\alpha) > 0. \tag{2.1.27}$$

Por lo tanto $e_\alpha^{\lambda z}$ es una función analítica para $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ y

$$\lim_{z\to 0}[z^{1-\alpha} e_\alpha^{\lambda z}] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}, \quad \mathrm{Re}(\alpha) > 0. \tag{2.1.28}$$

En particular tenemos

$$\lim_{x\to a^+}[(x-a)^{1-\alpha} e_\alpha^{\lambda(x-a)}] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}, \qquad \mathrm{Re}(\alpha) > 0. \tag{2.1.29}$$

Cuando $\alpha = 1$, de acuerdo con 2.1.16 y 2.1.6, $e^{\lambda z}$ coincide con la función exponencial $e^{\lambda z}$

$$e_1^{\lambda z} = e^{\lambda z} \qquad z, \lambda \in \mathbb{C}. \tag{2.1.30}$$

Por lo tanto, la función en 2.1.26 puede ser considerada como una generalización de la función exponencial, y por eso llamamos a $e_\alpha^{\lambda z}$ la *función α-exponencial*.

2.1.4. Coeficientes binomiales

Los *coeficientes binomiales* se definen para $\alpha \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$ por medio de la fórmula

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \qquad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{2.1.31}$$

En particular, cuando $\alpha = m$, $(m \in \mathbb{N}_0)$, tenemos

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}, \qquad (m, n \in \mathbb{N}_0; m \geq n) \tag{2.1.32}$$

y

$$\binom{m}{n} = 0, \qquad (m, n \in \mathbb{N}_0; 0 \leq m < n) \tag{2.1.33}$$

Si $\alpha \notin \mathbb{Z}^- := \{-1,-2,-3,\ldots\} =: \mathbb{Z}_0^-/\{0\}$, (2.1.31) es representado mediante la función gamma por

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha-n+1)} \qquad (\alpha \in \mathbb{C}; \alpha \notin \mathbb{Z}^-; n \in \mathbb{N}_0). \tag{2.1.34}$$

Esta relación se extiende de $n \in \mathbb{N}_0$ a un complejo arbitrario β por medio de

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)\Gamma(\beta+1)} \qquad (\alpha,\beta \in \mathbb{C}; \alpha \notin \mathbb{Z}^-). \tag{2.1.35}$$

2.2. Derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville

Sea $\Omega = [a,b]$, con $(\infty < a < b < \infty)$, un intervalo finito en el eje real. Las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville $D_{a+}^{\alpha}y$ y $D_{b-}^{\alpha}y$ de orden α, donde $(Re(\alpha) > 0)$, son definidas como sigue

$$\begin{aligned} D_{a+}^{\alpha}y &:= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I_{a+}^{n-\alpha}y\right)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \end{aligned}$$

$$(n = [Re(\alpha)]+1;\ x > a) \tag{2.2.36}$$

y

$$\begin{aligned} D_{b-}^{\alpha}y &:= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I_{b-}^{n-\alpha}y\right)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{y(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} \end{aligned}$$

$$(n = [Re(\alpha)]+1;\ x < b) \tag{2.2.37}$$

respectivamente, donde $[Re(\alpha)]$ es la parte entera de $Re(\alpha)$. En particular, cuando $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$, tenemos;

$$\left(D_{a+}^{0}y\right)(x) = \left(D_{b-}^{0}y\right)(x) = y(x); \qquad \left(D_{a+}^{n}y\right)(x) = y^{(n)}(x),$$

y

$$\left(D_{b-}^{n}y\right)(x)=(-1)^{n}y^{(n)}(x), \qquad n\in\mathbb{N}, \tag{2.2.38}$$

donde $y^{(n)}(x)$ es la derivada usual de $y(x)$ de orden n. Si $0<Re(\alpha)<1$, entonces

$$\left(D_{a+}^{0}y\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_{a}^{x}\frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha-[Re(\alpha)]}}, \qquad (0<Re(\alpha)<1;\ x>a), \tag{2.2.39}$$

$$\left(D_{b-}^{0}y\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_{x}^{b}\frac{y(t)dt}{(t-x)^{\alpha-[Re(\alpha)]}}, \qquad (0<Re(\alpha)<1;\ x<b). \tag{2.2.40}$$

Cuando $\alpha\in\mathbb{R}^{+}$ las ecuaciones 2.2.36 y 2.2.37 toman las siguientes formas

$$\left(D_{a+}^{\alpha}y\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\int_{a}^{x}\frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \qquad (0<[\alpha]<1;\ x>a), \tag{2.2.41}$$

$$\left(D_{b-}^{\alpha}y\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(-\frac{d}{dx}\right)^{n}\int_{x}^{b}\frac{y(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}, \qquad (0<[\alpha]<1;\ x<b), \tag{2.2.42}$$

mientras que 2.2.39 y 2.2.40 están dadas por

$$\left(D_{a+}^{\alpha}y\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_{a}^{x}\frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}, \qquad (0<\alpha<1;\ x>a), \tag{2.2.43}$$

$$\left(D_{b-}^{\alpha}y\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_{x}^{b}\frac{y(t)dt}{(t-x)^{\alpha}}, \qquad (0<\alpha<1;\ x<b), \tag{2.2.44}$$

respectivamente.

Si $Re(\alpha)=0$ y $(\alpha\neq 0)$ entonces las ecuaciones 2.2.36 y 2.2.37 son derivadas fraccionarias de orden puramente imaginario

$$\left(D_{a+}^{i\theta}y\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-i\theta)}\frac{d}{dx}\int_{a}^{x}\frac{y(t)dt}{(x-t)^{i\theta}}, \qquad (\theta\in\mathbb{R}/\{0\};\ x>a) \tag{2.2.45}$$

$$\left(D_{b-}^{i\theta}y\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-i\theta)}\frac{d}{dx}\int_{x}^{b}\frac{y(t)dt}{(t-x)^{i\theta}}, \qquad (\theta\in\mathbb{R}/\{0\};\ x<b), \tag{2.2.46}$$

Si $Re(\alpha) \geq 0$ y $\beta \in \mathbb{C}$, con $Re(\beta) > 0$, entonces las ecuaciones 2.2.36 y 2.2.37 toman la forma

$$\left(D_{a^+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1}, \tag{2.2.47}$$

y

$$\left(D_{b^-}^{\alpha}(b-t)^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(b-x)^{\beta-\alpha-1}. \tag{2.2.48}$$

En particular, si $\beta = 1$ y $Re(\alpha) \geq 0$, entonces la derivada fraccionaria de Riemmann-Liouville de una costante, en general, no es cero.

$$\left(D_{a^+}^{\alpha}1\right)(x) = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}; \quad \left(D_{b^-}^{\alpha}1\right)(x) = \frac{(b-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}; \quad 0 < \Re(\alpha) < 1. \tag{2.2.49}$$

Por 2.2.36 y 2.2.49 tenemos que para alguna constante $C \in \mathbb{R}$;

$$\left(D_{a^+}^{\alpha}C\right)(x) = C\frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad \left(D_{b^-}^{\alpha}C\right)(x) = C\frac{(b-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. \tag{2.2.50}$$

Por otra parte, para $j = 1, 2, \ldots [Re(\alpha)] + 1$,

$$\left(D_{a^+}^{\alpha}(t-a)^{\alpha-j}\right)(x) = 0; \quad \left(D_{b^-}^{\alpha}(b-t)^{\alpha-j}\right)(x) = 0; \quad 0 < \Re(\alpha) < 1. \tag{2.2.51}$$

De 2.2.51 obtenemos los siguientes resultados.

2.3 Corolario. *Sea $Re(\alpha) > 0$ y $n = [Re(\alpha)] + 1$.*

- *La igualdad $\left(D_{a^+}^{\alpha}y\right)(x) = 0$ es válida si y solo si;*

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j (x-a)^{\alpha-j},$$

donde $c_j \in \mathbb{R}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ *son constantes arbitrarias.*
En particular, cuando $0 < Re(\alpha) \leq 1$*, la relación* $\left(D^{\alpha}_{a^+}y\right)(x) = 0$ *se cumple si y solo si*

$$y(x) = c(x-a)^{\alpha-1},$$

con algún $c \in \mathbb{R}$.

- *La igualdad* $\left(D^{\alpha}_{b^-}y\right)(x) = 0$ *es válida si y solo si;*

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} d_j(b-x)^{\alpha-j},$$

donde $d_j \in \mathbb{R}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ *son constantes arbitrarias.*
En particular, cuando $0 < Re(\alpha) \leq 1$*, la relación* $\left(D^{\alpha}_{b^-}y\right)(x) = 0$ *se cumple si y solo si*

$$y(x) = d(b-x)^{\alpha-1},$$

con algún $d \in \mathbb{R}$.

La fórmula siguiente relaciona la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville con las funciones de Mittag-Leffler

$$\left(D^{\alpha}_{a^+}(t-a)^{\beta-1}E_{\mu,\beta}[\lambda(t-a)^{\mu}]\right)(x) = (x-a)^{\beta-\alpha-1}E_{\mu,\beta-\alpha}[\lambda(x-a)^{\mu}], \quad (2.2.52)$$

con $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, $\mathrm{Re}(\beta) > 0$ y $\mathrm{Re}(\mu) \geq 0$.

En particular, cuando $\beta = \mu = \alpha$, podemos aplicar la bien conocida fórmula

$$\lim_{z \to 0} \frac{1}{\Gamma(z)} = 0, \quad (2.2.53)$$

para obtener de 2.2.52 la siguiente propiedad de la función $e^{\lambda(x-a)}_{\alpha}$ definida en 2.1.27

$$\left(D^{\alpha}_{0^+}e^{\lambda(t-a)}_{\alpha}\right)(x) = \lambda e^{\lambda(x-a)}_{\alpha}, \ \ \mathrm{Re}(\alpha) > 0, \ \lambda \in \mathbb{C}. \quad (2.2.54)$$

Cuando $\beta = 1$ y $\mu = \alpha$, entonces de 2.2.52, en concordancia con 2.1.7 y 2.1.16 se obtiene la siguiente fórmula para la función de Mittag-Leffler 2.1.5

$$\left(D^{\alpha}_{a^+}E_{\alpha}[\lambda(t-a)^{\lambda}]\right)(x) = \lambda E_{\alpha}[\lambda(x-a)^{\alpha}], \ \ \mathrm{Re}(\alpha) > 0, \ \lambda \in \mathbb{C}. \quad (2.2.55)$$

2.3. Ecuaciones diferenciales fraccionarias

En esta sección discutiremos la existencia y unicidad de las soluciones de un problema de valor inicial de una ecuación diferencial de forma general, en términos de las derivadas fraccionarias secuenciales de Miller-Ross [ver Podlubny]. Debido a las relaciones entre las derivadas fraccionarias de Miller-Ross, Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov y Caputo, los resultados siguientes pueden ser usados para dichas definiciones.

Consideremos el problema de valor inicial

$$ {}_0\mathscr{D}_t^{\sigma_n} y(t) = f(t,y), \tag{2.3.56}$$

$$ \left[{}_0\mathscr{D}_t^{\sigma_n} y(t)\right]_{t=0} = b_k, \qquad (k = 1,2,\ldots,n), \tag{2.3.57}$$

donde;

$$\begin{aligned}
{}_a\mathscr{D}_t^{\sigma_k} &= {}_aD_t^{\alpha_k}\,{}_aD_t^{\alpha_{k-1}} \cdots {}_aD_t^{\alpha_1};\\
{}_a\mathscr{D}_t^{\sigma_k - 1} &= {}_aD_t^{\alpha_k - 1}\,{}_aD_t^{\alpha_{k-1}} \cdots {}_aD_t^{\alpha_1};\\
\sigma_k &= \sum_{j=1}^{k} \alpha_j, \qquad (k = 1,2,\ldots,n);\\
0 &< \alpha_j \leq 1, \qquad (j = 1,2,\ldots,n).
\end{aligned}$$

Supongamos que $f(t,y)$ está definida en un dominio G de un plano (t,y), y definimos la región $R(h,K) \subset G$ como el conjunto de puntos $(t,y) \in G$, que satisfacen las siguientes desigualdades;

$$ 0 < t < h, \qquad \left| t^{1-\sigma_1} y(t) - \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{t^{\sigma_i - \sigma_1}}{\Gamma(\sigma_i)} \right| \leq K, \tag{2.3.58}$$

donde h y K son constantes.

2.4 Teorema. *Sea $f(t,y)$ una función continua con valores reales, definida en un dominio G, que satisface la condición de Lipschitz con respecto a y, es decir;*

$$ |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq A|y_1 - y_2|, $$

tal que

$$ |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq M < \infty \quad \textit{para todo} \quad (t,y) \in G, $$

y

$$K \geq \frac{Mh^{\sigma_n - \sigma_1 + 1}}{\Gamma(1+\sigma_n)}.$$

Entonces existe en la región $R(h,k)$ una única solución continua $y(t)$ del problema (2.3.56)-(2.3.57). Ver [8] p.127.

En algunos casos, el Teorema (2.4) puede ser usado directamente como un método para la solución de ecuaciones diferenciales fraccionarias. Ilustraremos esto con dos ejemplos.

2.5 Ejemplo. Consideremos el problema de valor inicial em términos de derivadas fraccionaras secuenciales (la notación es la misma que en el Teorema (2.4)).

$${}_0D_t^{\sigma_n} y(t) = \lambda y(t) \tag{2.3.59}$$

$$\left[{}_0D_t^{\sigma_k - 1} y(t)\right]_{t=0} = b_k, \qquad (k = 1, \ldots, n). \tag{2.3.60}$$

En este caso tenemos $f(t,y) = \lambda y$. En concordancia con la demostración del Teorema (2.4) [Podlubny p.128].

Sea

$$y_0(t) = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{t^{\sigma_i - 1}}{\Gamma(\sigma_i)}, \tag{2.3.61}$$

$$\begin{aligned} y_m(t) &= y_0(t) + \frac{\lambda}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma_n - 1} y_{m-1}(\tau) d\tau \\ &= y_0(t) + \lambda {}_0D_t^{-\sigma_n} y_{m-1}(t), \qquad m = 1, 2, 3, \ldots. \end{aligned} \tag{2.3.62}$$

Usando (2.3.61) y (2.3.62), y aplicando la fórmula para la diferenciación de la función de potencia

$${}_aD_t^p((t-a)^\nu) = \frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1+\nu-p)}(t-a)^{\nu-p} \tag{2.3.63}$$

[Podlubny p.72], obtenemos

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_0(t) + \lambda_0 D_t^{-\sigma_n} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{t^{\sigma_i - 1}}{\Gamma(\sigma_i)} \right) \\ &= y_0(t) + \lambda \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{t^{\sigma_n + \sigma_i - 1}}{\Gamma(\sigma_n + \sigma_i)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2(t) &= y_0(t) + \lambda_0 D_t^{-\sigma_n} y_1(t) \\ &= y_0(t) + \lambda_0 D_t^{-\sigma_n} \left(y_0(t) + \lambda \sum_{i=1^n} b_i \frac{t^{\sigma_n + \sigma_i - 1}}{\Gamma(\sigma_n + \sigma_i)} \right) \\ &= y_0(t) + \lambda \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{t^{\sigma_n + \sigma_i - 1}}{\Gamma(\sigma_n + \sigma_i)} + \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{t^{2\sigma_n + \sigma_i - 1}}{\Gamma(2\sigma_n + \sigma_i)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{k=0}^{2} \frac{\lambda^k t^{k\sigma_n + \sigma_i - 1}}{\Gamma(k\sigma_n + \sigma_i)}, \end{aligned}$$

y se demuestra por inducción que

$$y_m(t) = \sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{k=0}^{m} \frac{\lambda^k t^{k\sigma_n + \sigma_i - 1}}{\Gamma(k\sigma_n + \sigma_i)}, \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2.3.64}$$

Tomando el límite de (2.3.64) cuando $m \to \infty$, obtenemos la solución del problema (2.3.59)-(2.3.60):

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k t^{k\sigma_n + \sigma_k - 1}}{\Gamma(k\sigma_n + \sigma_i)} = \sum_{i=1}^{n} b_i t^{\sigma_i - 1} E_{\sigma_n, \sigma_i}(\lambda t^{\sigma_n}), \tag{2.3.65}$$

donde $E_{\alpha,\beta}(z)$ es la función de Mittag-Leffler (subsección 2.1.2).

Si $n = 1$ y $\alpha_1 = 1$, entonces (2.3.59)-(2.3.60) toma la forma

$$y'(t) = \lambda y(t), \qquad y(0) = b_1 \tag{2.3.66}$$

y, tomando en cuenta la relación (2.1.8), la fórmula (2.3.65) nos da la solución clásica del problema (2.3.66):

$$y(t) = b_1 E_{1,1}(\lambda y) = e^{\lambda t}.$$

2.6 Ejemplo. Condideramos el siguiente problema de valor inicial en términos de derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville:

$$ {}_0D_t^{\alpha}y(t) = t^{\alpha}y(t), \qquad \left[{}_0D_t^{\alpha-1}y(t)\right]_{t=0} = b \tag{2.3.67}$$

donde $0 < \alpha < 1$.

En este caso $f(t,y) = t^{\alpha}y$. En concordancia con la demostración del Teorema 2.4 tomamos

$$y_0(t) = b\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \tag{2.3.68}$$

$$y_m(t) = b\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\alpha}y_{m-1}(\tau)d\tau, \qquad m = 1,2,\ldots. \tag{2.3.69}$$

Usando (2.3.61) y (2.3.62) y aplicando la fórmula de diferenciación de la función de potencia (2.3.63), podemos mostrar por inducción que

$$y_m(t) = b\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + b\sum_{k=1}^{m}\frac{\Gamma(2\alpha)\Gamma(4\alpha)\ldots\Gamma(2k\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(3\alpha)\ldots\Gamma(2k\alpha+\alpha)}t^{\alpha(2k+1)-1},$$

$m = 1,2,\ldots$, y tomando el límite cuando $m \to \infty$ dá la solución

$$y(t) = b\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + b\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{k}\Gamma(2j\alpha)}{\prod_{j=0}^{k}\Gamma(2j\alpha+\alpha)}t^{\alpha(2k+1)-1}. \tag{2.3.70}$$

CAPÍTULO 3

MÉTODO OPERACIONAL

3.1. Propiedades de algunas funciones

En esta sección mencionaremos las propiedades de algunas funciones que utilizaremos más adelante para el método operacional. Construiremos el campo $\mathscr{F}$ y daremos sus propiedades.

3.1.1. Series formales de Laurent

Sea $\{p_k\colon k\in\mathbb{Z}\}$ un grupo con multiplicación $p_k p_n = p_{k+n}$, para $n,k\in\mathbb{Z}$. Denotamos por $\mathscr{F}$ al conjunto de todas las series formales de Laurent de la forma

$$a=\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k p_k,$$

donde a_k es un número complejo para cada $k\in\mathbb{Z}$ y, o bien, todos los a_k son iguales a cero, o existe un entero $v(a)$ tal que $a_k=0$ siempre que $k<v(a)$ y $a_{v(a)}\neq 0$. Para $a=0$ y definimos $v(0)=\infty$. La suma y la multiplicación por números complejos en $\mathscr{F}$ están definidas en la forma usual.
Definimos la multiplicación en $\mathscr{F}$ extendiendo la multiplicación del grupo $\{p_k\colon k\in\mathbb{Z}\}$ como sigue.

Para $a=\sum a_k p_k$ y $b=\sum b_k p_k$ elementos de $\mathscr{F}$ definimos la multiplicación $ab=\sum c_k p_k$,

donde
$$c_k = \sum_{v(a)\leq k\leq n-v(b)} a_k b_{n-k}.$$

Notemos que $v(ab) = v(a) + v(b)$ y p_{-n} es el inverso multiplicativo de p_n para $n \in \mathbb{Z}$. Esta multiplicación en $\mathscr{F}$ es asociativa y conmutativa y p_0 es el elemento unidad. Decimos que los elementos p_n son los *generadores* de $\mathscr{F}$.

Para $n \in \mathbb{Z}$ definimos $\mathscr{F}_n = \{a \in \mathscr{F} : v(a) \geq n\}$. Es claro que $\mathscr{F}_n$ es un subanillo de $\mathscr{F}$.

Para $x \in \mathbb{C}$ se cumple que
$$(p_0 - xp_1) \sum_{n\geq 0} x^n p_n = p_0, \tag{3.1.1}$$
y
$$(p_{-k}(p_0 - xp_1)^{k+1}) \sum_{n\geq k} \binom{n}{k} x^{n-k} p_n = p_0. \tag{3.1.2}$$

Denotamos la serie $\sum_{k\geq 0} x^k p_k$ por $e_{x,0}$ que es llamada la *serie geométrica* asociada a x. Generalizando la construcción de la serie geométrica obtenemos los inversos multiplicativos de elementos no cero de $\mathscr{F}$.

3.1 Proposición. *Sea $\mathscr{F}$ como antes, entonces $\mathscr{F}$ es un campo.*

Demostración. Sea h un elemento no cero de $\mathscr{F}_1$. Entonces $v(h) \geq 1$ y así $v(h^n) = nv(h) \geq n$, para $n \geq 1$ y tenemos que
$$h^n = \sum_{k\geq n} (h^n)_k p_k.$$

Por lo tanto
$$p_0 + \sum_{n\geq 1} h^n = p_0 + \sum_{n\geq 1} \sum_{k\geq n} (h^n)_k p_k = p_0 + \sum_{k\geq 1} \sum_{1\leq n\leq k} (h^n)_k p_k$$
es un elemento bien definido de $\mathscr{F}$, y además es el inverso multiplicativo de $p_0 - h$. Esto significa que cada serie $a \in \mathscr{F}_0$ con $v(a) = 0$ es invertible, ya que es de la forma $a_0(p_0 - h)$, donde $h \in \mathscr{F}_1$ y $a_0 \neq 0$.

Sea b un elemento no cero de $\mathscr{F}$, entonces
$$b = \sum_{k\geq v(b)} b_k p_k = p_{v(b)} \sum_{k\geq v(b)} b_k p_{k-v(b)} = p_{v(b)} \sum_{j\geq 0} b_{j+v(b)} p_j.$$

Dado que $b_{\nu(b)} \neq 0$, la última suma es de la forma $b_{\nu(b)}(p_0 - h)$, con $h \in \mathscr{F}_1$ y es invertible por lo anterior. Por lo tanto b es invertible y hemos mostrado que $\mathscr{F}$ es un campo. $\square$

A cada serie no cero b le corresponde el mapeo multiplicación que manda a a ab. Este mapeo es lineal e invertible. El mapeo multiplicación que corresponde al elemento p_1 es llamado el desplazamiento a la derecha y es denotado por S. Su inversa S^{-1} es llamado el desplazamiento a la izquierda. Notemos que $\{S^k \colon k \in \mathbb{Z}\}$ es un grupo isomorfo a $\{p_k \colon k \in \mathbb{Z}\}$.
Denotamos por P_n la proyección sobre $\langle p_n \rangle$, el subespacio generado por p_n. Si $a \in \mathscr{F}$ entonces $P_n a = a_n p_n$. Es fácil verificar que

$$S^k P_n S^{-k} = P_{n+k}, \qquad k, n \in \mathbb{Z}. \tag{3.1.3}$$

Definimos el operador L en $\mathscr{F}$ como sigue. $Lp_k = S^{-1} p_k = p_{k-1}$ para $k \neq 0$ y $Lp_0 = 0$. Entonces, para a en $\mathscr{F}$ tenemos

$$La = L \sum_{k \geq \nu(a)} a_k p_k = S^{-1}(a - a_0 p_0) = S^{-1}(I - P_0)a, \tag{3.1.4}$$

donde I es el operador identidad y P_0 es la proyección en el subespacio $\langle p_0 \rangle$.

Sea $\mathscr{F}_-$ el conjunto de todos los $a \in \mathscr{F}$ tal que $a_n = 0$ para $n \geq 0$. Entonces $\mathscr{F} = \mathscr{F}_- \oplus \mathscr{F}_0$. De la definición de L es claro que los subespacios $\mathscr{F}_-$ y $\mathscr{F}_0$ son invariantes bajo L. Notemos que la restricción de L a $\mathscr{F}_-$ coincide con la restricción de S^{-1} a $\mathscr{F}_-$. Es claro que la imagen de L es el conjunto de todas las series a en $\mathscr{F}$ tal que $a_{-1} = 0$, el cual es el kernel de la proyección P_{-1}. De 3.1.4 obtenemos $L = S^{-1}(I - P_0)$, y usando 3.1.3 tenemos

$$LS = S^{-1}(I - P_0)S = I - S^{-1} P_0 S = I - P_{-1},$$

y por inducción tenemos que

$$L^k S^k = I - (P_{-1} + P_{-2} + \ldots + P_{-k}), \qquad k \geq 1. \tag{3.1.5}$$

Usando 3.1.3 de nuevo obtenemos

$$L^k = S^{-k}\left(I - S^k \sum_{j=1}^{k} P_{-j} S^{-k}\right) = S^{-k}\left(I - \sum_{j=1}^{k} P_{k-j}\right) = S^{-k}\left(I - \sum_{j=0}^{k-1} P_j\right), \qquad k \geq 1.$$

De esta identidad vemos que el kernel de L^k es igual a la imagen de $P_0 + P_1 + \ldots + P_{k-1}$, que es el subespacio $\langle p_0, p_1, \ldots p_{k-1} \rangle$, y la imagen de L^k es igual al kernel de $P_{-1} + P_{-2} +$

$\cdots + P_{-k}$.

Una importante propiedad de L, que se obtiene de 3.1.1 identificando S^{-k} con la multiplicación por p_{-k} e I con la multiplicación por p_0, es que

$$L^k = p_{-k}(p_0 - P_0 - P_1 - \ldots - P_{k-1}), \tag{3.1.6}$$

Sea g un elemento de la imagen de L^k. Por 3.1.5 tenemos que $L^k S^k g = (I - (P_{-1} + P_{-2} + \ldots + P_{-k}))g = g$, pues g está en la imagen de L^k, la cual es igual al kernel de $P_{-1} + P_{-2} + \cdots + P_{-k}$. Por lo tanto $S^k g$ es una solución particular de $L^k f = g$ y por lo tanto tenemos

$$\{f \in \mathscr{F} : L^k f = g\} = \{p_k g + h : h \in \langle p_0, p_1, \ldots, p_{k-1}\rangle\}.$$

Ahora vamos a determinar cómo actúa el operador L sobre la multiplicación de $\mathscr{F}$. Sean a y b elementos de $\mathscr{F}$. Dado que $La = S^{-1}(a - P_0 a)$ tenemos

$$\begin{aligned}
bLa &= S^{-1}(ab - a_0 b) \\
&= S^{-1}(ab - P_0(ab) + P_0(ab) - a_0 b) \\
&= L(ab) - S^{-1}(a_0 b - P_0(ab)) \\
&= L(ab) - S^{-1}(a_0 b - a_0 b_0 p_0 + a_0 b_0 p_0 - P_0(ab)) \\
&= L(ab) - a_0 Lb + S^{-1}(P_0(ab) - a_0 b_0 p_0).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$L(ab) = bLa + a_0 Lb - S^{-1}(P_0(ab) - a_0 b_0 p_0). \tag{3.1.7}$$

De 3.1.7 obtenemos

$$(a - a_0 p_0)Lb = (b - b_0 p_0)La.$$

Si $P_0(ab) = P_0(a)P_0(b)$ entonces 3.1.7 se convierte en $L(ab) = bLa + a_0 Lb$. En particular, este es el caso si a y b están en $\mathscr{F}_0$. Si a y ab están en el kernel de P_0 entonces tenemos $L(ab) = (La)b$.

Ahora consideremos algunos polinomios simples en L. Sea x un número complejo no cero. Entonces

$$L - xI = S^{-1}(I - P_0) - xI = S^{-1}(I - xS - P_0). \tag{3.1.8}$$

Por lo tanto $a \in \mathscr{F}$ está en el kernel de $L - xI$ si y solo si $(I - xS)a = P_0 a = a_0 p_0$. Entonces $(p_0 - xp_1)a = a_0 p_0$, y despejando a tenemos

$$a = a_0(p_0 - xp_1)^{-1} = a_0 e_{x,0} = a_0 \sum_{k \geq 0} x^k p_k.$$

Por lo tanto el kernel de $L-xI$ es el subespacio generado por la serie geométrica $e_{x,0}$, el cual es denotado por $\langle e_{x,0}\rangle$.

Ahora daremos una caracterización de la imagen de $L-xI$. Sean $f\in\mathscr{F}$ y $g=(L-xI)f$, entonces

$$g=S^{-1}((I-xS)f-P_0f)=p_{-1}((p_0-xp_1)f-f_0p_0),$$

y entonces

$$p_1e_{x,0}g=f-f_0e_{x,0}.$$

Por lo tanto $P_0(p_1e_{x,0}g)=0$, pues $P_0e_{x,0}=p_0$.
Denotaremos el kernel de la proyección P_0 por $\mathscr{F}_{[0]}$. Entonces hemos demostrado que la imagen de $L-xI$ está contenida en el conjunto $\{g\in\mathscr{F}:\ p_1e_{x,0}g\in\mathscr{F}_{[0]}\}$.

3.2 Proposición. *La imagen de $L-xI$ es igual al conjunto $\{g\in\mathscr{F}:\ p_1e_{x,0}g\in\mathscr{F}_{[0]}\}$.*

Demostración. De 3.1.8 vemos que la restricción de $L-xI$ a $\mathscr{F}_{[0]}$ coincide con la restricción de $S^{-1}(I-xS)$ a $\mathscr{F}_{[0]}$. Sea $g\in\mathscr{F}$ tal que $p_1e_{x,0}g\in\mathscr{F}_{[0]}$. Entonces

$$(L-xI)(p_1e_{x,0}g)=S^{-1}(I-xS)(p_1e_{x,0}g)=g.$$

Por lo tanto g está en la imagen de $L-xI$ y entonces

$$Im(L-xI)=\{g\in\mathscr{F}:\ p_1e_{x,0}g\in\mathscr{F}_{[0]}\}.$$

$\square$

Si $g=\sum_{k\geq v(g)}g_kp_k$, donde $v(g)<0$, entonces la condición $p_1e_{x,0}g\in\mathscr{F}_{[0]}$ es equivalente a $P_{-1}(e_{x,0}g)=0$, y esto es

$$g_{-1}+g_{-2}x+g_{-3}x^2+\ldots+g_{v(g)}x^{-v(g)-1}=0.$$

Notemos que el subespacio $\mathscr{F}_0$ está contenido en la imagen de $L-xI$.

Hemos pobado el siguiente teorema.

3.3 Teorema. *Sea x un número complejo no cero. Entonces si g está en la imagen de $L-xI$ tenemos $(L-xI)(p_1e_{x,0}g)=g$ y por lo tanto*

$$\{f\in\mathscr{F}:\ (L-xI)f=g\}=\{p_1e_{x,0}g+\alpha e_{x,0}:\ \alpha\in\mathbb{C}\}.$$

Sea x un número complejo no cero y sea f un elemento de $Ker((L-xI)^2)$. Entonces $(L-xI)f$ está en el kernel de $L-xI$ y $(L-xI)f = \alpha e_{x,0}$ para algún número complejo α. Esto significa que $p_{-1}((p_0-xp_1)f - f_0p_0) = \alpha e_{x,0}$. Resolviendo para f tenemos que $f = \alpha p_1(e_{x,0})^2 + f_0 e_{x,0}$. Por lo tanto f está en el subespacio $\langle e_{x,0}, p_1(e_{x,0})^2\rangle$. Procediendo inductivamente es fácil ver que

$$Ker((L-xI)^{m+1}) = \langle e_{x,0}, p_1(e_{x,0})^2, p_2(e_{x,0})^3, \ldots, p_m(e_{x,0})^{m+1}\rangle, \qquad m \geq 0. \quad (3.1.9)$$

Para $k \geq 0$ definimos $e_{x,k} = p_k(e_{x,0})^{k+1}$. Usando inducción en k y la recurrencia para los coeficientes binomiales es fácil ver que

$$e_{x,k} = \sum_{n\geq k} \binom{n}{k} x^{n-k} p_n, \qquad k \geq 0.$$

Notemos que $v(e_{x,k}) = k$ y entonces $e_{x,k} \in \mathscr{F}_k$. Notemos que $e_{0,k} = p_k$ para $k \geq 0$. Usando la notación introducida, 3.1.9 se convierte en

$$Ker((L-xI)^{m+1}) = \langle e_{x,0}, e_{x,1}, \ldots, e_{x,m}\rangle, \qquad m \geq 0.$$

Con un simple cálculo se obtiene

$$(L-xI)e_{x,k} = \begin{cases} 0, & si \quad k = 0, \\ e_{x,k-1} & si \quad k \geq 1. \end{cases} \quad (3.1.10)$$

Para $k \geq 0$ definimos $\mathscr{F}_{[0,k]} = Ker(P_0 + P_1 + \cdots + P_k)$. Si $k = 0$ escribimos $\mathscr{F}_{[0]}$ en lugar de $\mathscr{F}_{[0,0]}$.

3.4 Lema. *Sea $m \geq 0$ y sea x un número complejo no cero. Entonces*

$$(L-xI)^{m+1} = S^{-m-1}\left((I-xS)^{m+1}\left(I - \sum_{j=0}^{m} P_j\right) + \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{j} \binom{m+1}{k}(-xS)^{m+1-k}P_j\right),$$

y por lo tanto, para todo f en el subespacio $\mathscr{F}_{[0,m]}$ tenemos

$$(L-xI)^{m+1}f = S^{-m-1}(I-xS)^{m+1}f = p_{-m-1}(p_0 - xp_1)^{m+1}f.$$

Demostración. Usando la fórmula binomial y 3.1.1 obtenemos que

$$\begin{aligned}(L-xI)^{m+1} &= \sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}(-x)^{m+1-k}L^k \\ &= (-xI)^{m+1}+\sum_{k=1}^{m+1}\binom{m+1}{k}(-x)^{m+1-k}S^{-k}\left(I-\sum_{j=0}^{k-1}P_j\right).\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}S^{m+1}(L-xI)^{m+1} &= (-xS)^{m+1}+\sum_{k=1}^{m+1}\binom{m+1}{k}(-xS)^{m+1-k}\left(I-\sum_{j=0}^{k-1}P_j\right) \\ &= (I-xS)^{m+1}-\sum_{k=1}^{m+1}\binom{m+1}{k}(-xS)^{m+1-k}\sum_{j=0}^{k-1}P_j \\ &= (I-xS)^{m+1}-\sum_{k=0}^{m}\sum_{k=j+1}^{m+1}\binom{m+1}{k}(-xS)^{m+1-k}P_j \\ &= (I-xS)^{m+1}-\sum_{j=0}^{m}\left((I-xS)^{m+1}-\sum_{k=0}^{j}\binom{m+1}{k}(-xS)^{m+1-k}\right)P_j.\end{aligned}$$

Si $f\in\mathscr{F}_{[0,m]}$ entonces $P_jf=0$, para $0\leq j\leq m$, y entonces $(L-xI)^{m+1}f=S^{-m-1}(I-xS)^{m+1}f$.

□

3.5 Teorema. *Sea $m\geq 0$ y sea x un número complejo no cero. Entonces una serie $g\in\mathscr{F}$ está en la imagen del operador $(L-xI)^{m+1}$ si y solo si $p_1e_{x,m}g\in\mathscr{F}_{[0,m]}$. Mas aún, para todo g en la imagen de $(L-xI)^{m+1}$ tenemos que*

$$(L-xI)^{m+1}(p_1)e_{x,m}g=g.$$

Demostración. Sea $g=(L-xI)^{m+1}f$ para algún $f\in\mathscr{F}$. Por el Lema 3.4 tenemos

$$g=p_{-m-1}\left((p_0-xp_1)^{m+1}\left(f-\sum_{j=0}^{m}f_jp_j\right)+\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{j}\binom{m+1}{k}(-x)^{m+1-k}p_{m+1-k}f_jp_j\right).$$

Entonces

$$p_{m+1}(e_{x,0})^{m+1}g=f-\sum_{j=0}^{m}f_jp_j+(e_{x,0})^{m+1}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{j}\binom{m+1}{k}(-x)^{m+1-k}p_{m+1-k}f_jp_j.$$

Notemos que el último sumando está en $\mathscr{F}_{m+1}$. Por lo tanto $p_{m+1}(e_{x,0})^{m+1}g = p_1 e_{x,m} g$ es un elemento de $\mathscr{F}_{[0,m]}$. Ahora sea $g \in \mathscr{F}$ tal que $p_1 e_{x,m} g$ está en $\mathscr{F}_{[o,m]}$. Por el Lema 3.4 tenemos

$$(L - xI)^{m+1}(p_1 e_{x,m} g) = p_{-m-1}(p_0 - xp_1)^{m+1} p_{m+1}(e_{x,0})^{m+1} g = g, \qquad (3.1.11)$$

y esto muestra que g está en la imagen de $(L - xI)^{m+1}$. □

3.6 Teorema. *Sea $m \geq 0$ y sea x un número complejo no cero. Sea g un elemento de la imagen de $(L - xI)^{m+1}$. Entonces tenemos*

$$\{f \in \mathscr{F} : (L - xI)^{m+1} f = g\} = \{p_1 e_{x,m} g + h : h \in \langle e_{x,0}, e_{x,1}, \ldots, e_{x,m} \rangle\}.$$

Demostración. De 3.1.11 vemos que $p_1 e_{x,m} g$ es una solución particular de la ecuación lineal $(L - xI)^{m+1} f = g$. Por lo tanto, toda solución de esta ecuación es de la forma $p_1 e_{x,m} g + h$, donde h está en el kernel de $(L - xI)^{m+1}$, que es igual a $\langle e_{x,0}, e_{x,1}, \ldots, e_{x,m} \rangle$, como hemos demostrado anteriormente. □

3.1.2. Ecuación lineal $w(L)f = g$

En esta sección consideramos ecuaciones de la forma $w(L)f = g$, donde w es un polinomio, g es una elemento dado en la imagen de $w(L)$ y f es un elemento no conocido de $\mathscr{F}$. El caso $w(L) = (L - xI)^{m+1}$ fue estudiado en la sección anterior, donde encontramos que las series $e_{x,k}$ juegan un papel muy importante en la descripción del kernel y la imagen del operador $w(L)$. Obtenemos primero las siguientes propiedades básicas de las series $e_{x,k}$ que serán usadas en el estudio de la ecuación $w(L)f = g$.
Recordemos que $e_{x,0} = \sum_{n \geq 0} x^n p_n$ es el recíproco de $p_0 - xp_1$ y

$$e_{x,k} = \frac{p_k}{(p_0 - xp_1)^{k+1}} = p_k (e_{x,0})^{k+1} = \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} x^{n-k} p_n, \qquad k \geq 0.$$

Escribimos D_x para denotar al operador de diferenciación con respecto a x. Dado que $\left(\frac{D_x^k}{k!}\right) x^n = \binom{n}{k} x^{n-k}$, entonces

$$\frac{D_x^k}{k!} e_{x,0} = e_{x,k}, \qquad k \geq 0. \qquad (3.1.12)$$

Dado que $e_{x,0} = \frac{p_0}{p_0 - xp_1}$, para $x \neq y$ tenemos

$$e_{x,0} - e_{y,0} = \frac{p_0}{p_0 - xp_1} - \frac{p_0}{p_0 - yp_1} = \frac{(x-y)p_1}{(p_0 - xp_1)(p_0 - yp_1)},$$

y entonces

$$p_1 e_{x,0} e_{y,0} = \frac{e_{x,0} - e_{y,0}}{x - y}, \qquad x \neq y. \tag{3.1.13}$$

Notemos que $p_1 e_{x,0} e_{x,0} = e_{x,1}$.

Si $x \neq y$ y m y n son enteros no negativos, usando 3.1.12 obtenemos

$$p_1 e_{x,m} e_{y,n} = p_1 \frac{D_x^m}{m!} e_{x,0} \frac{D_y^n}{n!} e_{y,0} = \frac{D_x^m}{m!} \frac{D_y^n}{n!} \left(\frac{e_{x,0} - e_{y,0}}{x - y} \right).$$

Usando la regla de Leibniz para la diferenciación con respecto a los parámetros x y y obtenemos

$$p_1 e_{x,m} e_{y,n} = \sum_{i=0}^{m} \frac{\binom{n+i}{i}(-1)^i e_{x,m-i}}{(x-y)^{1+n+i}} + \sum_{j=0}^{n} \frac{\binom{m+j}{j}(-1)^j e_{y,n-j}}{(y-x)^{1+m+j}} \tag{3.1.14}$$

Notemos que $p_1 e_{x,m} e_{y,n}$ es un elemento del subespacio generado por $\{e_{x,i} \colon 0 \leq i \leq m\} \cup \{e_{y,j} \colon 0 \leq j \leq n\}$.
Sea $x \in \mathbb{C}$ y $m \geq 0$. Dado que $v(e_{x,i}) = i$ para $i \geq 0$, es claro que $\{e_{x,i} \colon 0 \leq i \leq m\}$ es un subconjunto linealmente independiente de $\mathscr{F}$.

3.7 Teorema. *Sean x y y números complejos distintos y sean m y n enteros no negativos. Entonces el conjunto $\{e_{x,i} \colon 0 \leq i \leq m\} \cup \{e_{y,j} \colon 0 \leq j \leq n\}$ es linealmente independiente.*

Demostración. Supongamos que $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i e_{x,i} + \sum_{j=0}^{n} \beta_j e_{y,j} = 0$. Aplicando el operador $(L - yI)^{n+1}$ a esta combinación lineal, y usando 3.1.10, obtenemos

$$(L - yI)^{n+1} \sum_{i=0}^{m} \alpha_i e_{x,i} = 0.$$

Escribiendo $L - yI = (L - xI) + (x - y)I$ obtenemos

$$(L - yI)^{n+1} e_{x,i} = \sum_{j=0}^{r} \binom{n+1}{j} (x-y)^{n+1-j} e_{x,i-j}, \qquad 0 \leq i \leq m, \tag{3.1.15}$$

donde $r = \text{mín}\{i, n+1\}$. Entonces, $(L - yI)^{n+1}$ mapea $\langle e_{x,0}, e_{x,1}, \ldots, e_{x,m}\rangle$ en si mismo y la representación matricial es una matriz triangular superior con todas las entradas de la diagonal iguales a $(x - y)^{n+1}$. Esto significa que la restricción de $(L - yI)^{n+1}$ a $\langle e_{x,0}, e_{x,1}, \ldots, e_{x,m}\rangle$ es un isomoefismo y entonces todos los α_i deben ser iguales a cero, porque $\{e_{x,i} \colon 0 \leq i \leq m\}$ es linealmente independiente. Ahora, por la independencia lineal de $\{_{y,0}, e_{y,1}, \ldots, e_{y,n}\}$ concluimos que todos los β_i son cero, y esto completa la prueba. $\square$

La idea de la demostración del teorema anterior puede ser extendida para probar el siguiente resultado.

3.8 Corolario. *El conjunto* $\{e_{x,k} \in \mathscr{F} : x \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N}\}$ *es linealmente independiente.*

3.9 Teorema. *Sean x y y números complejos distintos y m y n enteros no negativos. Entonces*

$$Ker\left((L-yI)^{n+1}(L-xI)^{m+1}\right) = Ker\left((L-yI)^{n+1}\right) \oplus Ker\left((L-xI)^{m+1}\right). \quad (3.1.16)$$

Demostración. Dado que los operadores $(L-yI)^{n+1}$ y $(L-xI)^{m+1}$ conmutan, es claro que el conjunto en el lado derecho de 3.1.16 está contenido en el conjunto del lado izquierdo.

Para la otra contención; sea f en $Ker\left((L-yI)^{n+1}(L-xI)^{m+1}\right)$ y sea $g = (L-xI)^{m+1} f$. Entonces es claro que g está en $Ker\left((L-yI)^{n+1}\right)$ y también en la imagen de $(L-xI)^{m+1}$. Aplicando el Teorema 3.6 vemos que $f = p_1 e_{x,m} g + h$, donde $h \in Ker\left((L-xI)^{m+1}\right)$. Pero g es una combinación lineal de los $e_{y,k}$ para $0 \leq k \leq n$ y entonces, por 3.1.14 vemos que $p_1 e_{x,m} g$ está en

$$\langle e_{y,0}, e_{y,1}, \ldots, e_{y,n}\rangle \oplus \langle e_{x,0}, e_{x,1}, \ldots, e_{x,m}\rangle = Ker\left((L-yI)^{n+1}\right) \oplus Ker\left((L-xI)^{m+1}\right),$$

y por lo tanto f también está. $\square$

3.10 Teorema. *Sean x y y números complejos distintos y m y n enteros no negativos. Entonces g está en la imagen de* $(L-yI)^{n+1}(L-xI)^{m+1}$ *si y solo si*

$$p_1 e_{x,m} p_1 e_{y,n} g \in \mathscr{F}_{[0,n+m+1]}. \quad (3.1.17)$$

Además, si g satisface 3.1.17 entonces

$$(L-yI)^{n+1}(L-xI)^{m+1}(p_1 e_{x,m} p_1 e_{y,n} g) = g. \quad (3.1.18)$$

Demostración. Mostremos primero que todo g en la imagen de $(L-yI)^{n+1}(L-xI)^{m+1}$ satisface 3.1.17. Sea $f \in \mathscr{F}$ y escribimos $f = f_- + f_+$, con $f_- \in \mathscr{F}_-$ y $f_+ \in \mathscr{F}_0$. Definimos $h = (L-xI)^{m+1}f$. Dado que $\mathscr{F}_-$ y $\mathscr{F}_0$ son invariantes bajo $L-xI$ tenemos $h = h_- + h_+$ donde $h_- = (L-xI)^{m+1}f_- \in \mathscr{F}_-$ y $h_+ = (L-xI)^{m+1}f_+ \in \mathscr{F}_0$.
Dado que $f_- \in \mathscr{F}_{[0,m]}$, por el Lema 3.4 tenemos $h_- = p_{-m-1}(p_0 - xp_1)^{m+1}f_-$ y entonces $p_1 e_{x,m} h_- = f_-$.
Entonces $p_1 e_{x,m} h = f_- + p_1 e_{x,m} h_+$ y $p_1 e_{x,m} h_+$ está en $\mathscr{F}_{m+1}$ ya que $h_+ \in \mathscr{F}_0$.
Ahora sea $g = (L-yI)^{n+1}h$. Por el mismo argumento usado antes tenemos

$$p_1 e_{y,n} g = p_1 e_{y,n} g_- + p_1 e_{y,n} g_+ = f_- + p_1 e_{x,m} p_1 e_{y,n} g_+.$$

Entonces

$$p_1 e_{x,m} p_1 e_{y,n} g = p_1 e_{x,m} h_- + p_1 e_{x,m} p_1 e_{y,n} g_+ = f_- + p_1 e_{x,m} p_1 e_{y,n} g_+.$$

El término anterior está en $\mathscr{F}_{m+n+2}$, entonces tenemos $p_1 e_{x,m} p_1 e_{y,n} g \in \mathscr{F}_{[0,m+n+1]}$.

Supongamos ahora que g es una serie que satisface 3.1.17. Como $\mathscr{F}_{[0,m+n+1]} \subset \mathscr{F}_{[0,m]}$, por el Teorema 3.5 tenemos

$$(L-xI)^{m+1}(p_1 e_{x,m} p_1 e_{y,n} g) = p_1 e_{y,n} g.$$

Notemos que

$$p_1 e_{y,n} g = \left(p_{-m-1}(p_0 - xp_1)^{m+1}\right)(p_1 e_{x,m} p_1 e_{y,n} g) = p_1 e_{y,n} g),$$

y el primer factor en el lado derecho tiene la forma $\sum_{j=0}^{m+1} \alpha_i p_{-j}$. Dado que el segundo factor está en $\mathscr{F}_{[0,m+n+1]}$, el producto debe estar en $\mathscr{F}_{[0,n]}$, y por el Teorema 3.5 tenemos

$$g = (L-yI)^{n+1}(p_1 e_{y,n} g) = (L-yI)^{n+1}(L-xI)^{m+1}(p_1 e_{x,m} p_1 e_{y,n} g).$$

Esto muestra que 3.1.18 se cumple y también que g está en la imagen de $(L-yI)^{n+1}(L-xI)^{m+1}$. □

Sea

$$w(t) = \prod_{j=0}^{r} (t - x_j)^{m_j+1}, \tag{3.1.19}$$

donde $x_0, x_1, \ldots, x_r$ son números complejos distintos, $m_0, m_1, \ldots, m_r$ son enteros no negativos y establecemos $n+1 = \sum_j (m_j+1)$. Entonces definimos

$$w(L) = (L-x_0I)^{m_0+1}(L-x_1I)^{m_1+1}\cdots(L-x_rI)^{m_r+1}. \tag{3.1.20}$$

3.11 Teorema. *Sea $w(L)$ definido en 3.1.20. Definimos*

$$d_w = p_{r+1} e_{x_0,m_0} e_{x_1,m_1} \cdots e_{x_r m_r},$$

y

$$K_w = \langle e_{x_j}, i :: 0 \le j \le r,\ 0 \le i \le m_j \rangle.$$

Entonces g está en la imagen de $w(L)$ si y sólo si

$$d_w g \in \mathscr{F}_{[0,n]}, \tag{3.1.21}$$

$K_w = Ker(w(L))$, y para todo $g \in Im(w(L))$ tenemos $w(L)(d_w g) = g$ y entonces

$$\{f \in \mathscr{F} : w(L)f = g\} = \{d_w g + h \colon h \in K_w\}. \tag{3.1.22}$$

Demostración. Notemos que la prueba del Teorema 3.9 se puede extender al caso de operadores que son el producto de un número finito de factores $(L - x_i I)^{m_i+1}$ y entonces tenemos que $K_w = Ker(w(L))$. Notemos que la dimensión del $Ker(w(L))$ es igual a $n+1$.

Usando inducción en r y la idea usada en la demostración del Teorema 3.10 podemos mostrar que 3.1.21 se cumple. Entonces, aplicando el Teorema 3.5 repetidamente obtenemos $w(L)(d_w g) = g$ para todo g en la imagen de $w(L)$. Esto significa que $d_w g$ es una solución particular de $w(L)f = g$ y por lo tanto 3.1.22 se cumple. □

Notemos que $d_w \in \mathscr{F}_{n+1} \subset \mathscr{F}_{[0,n]}$. Entonces $\mathscr{F}_0$ está contenido en la imagen de $w(L)$. En particular $p_0 \in Im(w(L))$ y por lo tanto $w(L)d_w = p_0$. Usando 3.1.14 repetidamente escribimos d_w como el producto de p_1 por una combinación lineal de $e_{x_j,i}$ y entonces $p_{-1} d_w \in K_w$.
Definimos el operador $M_w : Im(w(L)) \to \mathscr{F}$ por $M_w g = d_w g$, para $g \in Im(w(L))$. De el teorema anterior se obtiene que $w(L) = M_w$ es el mapeo identidad en $Im(w(L))$, es decir; M_w es un inverso derecho para $w(L)$.

3.12 Corolario. *Dados $g \in Im(w(L))$ y números complejos $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ entonces existe un único $f \in \mathscr{F}$ tal que $w(L)f = g$ y*

$$P_k f = \beta_k p_k, \qquad 0 \le k \le n. \tag{3.1.23}$$

Demostración. Por el Teorema 3.11 la solución particular $d_w g$ está en $\mathscr{F}_{[0,n]} = Ker(P_0 + P_1 + \ldots + P_n)$. Por lo tanto, con el fin de encontrar una solución f que satisface 3.1.23 es suficiente encontrar un $h \in K_w$ tal que

$$P_k h = \beta_k p_k, \qquad 0 \leq k \leq n. \tag{3.1.24}$$

Es obvio que h debe tener la forma

$$h = \sum_{j=0}^{r} \sum_{i=0}^{m_j} \alpha_{j,i} e_{x_j,i},$$

donde los $\alpha_{j,i}$ son números complejos, y entonces

$$P_k h = \sum_{j=0}^{r} \sum_{i=0}^{m_j} \alpha_{j,i} P_k e_{x_j,i} = \sum_{j=0}^{r} \sum_{i=0}^{m_j} \alpha_{j,i} \binom{k}{i} x_j^{k-i} p_k.$$

Por lo tanto 3.1.24 es equivalente al sistema lineal de ecuaciones

$$\beta_k = \sum_{j=0}^{r} \sum_{i=0}^{m_j} \alpha_{j,i} \binom{k}{i} x_j^{k-i}, \qquad 0 \leq k \leq n. \tag{3.1.25}$$

Para cada j tal que $0 \leq j \leq r$ sea B_j la matriz $(n+1) \times (m_j + 1)$ cuya entrada (k,i) es $\binom{k}{i} x_j^{k-i}$, para $0 \leq k \leq n$ y $0 \leq i \leq m_j$.

Definimos la matriz por bloques $V_w = [B_0 \; B_1 \; \ldots B_r]$. Entonces 3.1.25 es equivalente a

$$(\beta_0, \beta_1 \ldots, \beta_n)^T = V_w(\alpha_{0,0}, \ldots, \alpha_{0,m_0}, \ldots, \alpha_{r,0}, \ldots, \alpha_{r,m_r})^T. \tag{3.1.26}$$

La matriz V_w es la matriz confluente de Vandermonde asociada con las raíces del polinomio w. Es bien conocido que V_w es invertible. Ver [15]. Por lo tanto 3.1.26 tiene una solución única y consecuentemente, existe un único $h \in K_w$ que satisface 3.1.24. Entonces $f = d_w g + h$ es la única solución que satisface 3.1.23. $\square$

Notemos que d_w es la única solución de $w(L)f = p_0$ con condiciones iniciales $P_k f = 0$ para $0 \leq k \leq n$. Llamaremos a d_w la *solución fundamental* asociada con el operador $w(L)$. Ahora presentaremos una construcción alternativa de d_w es términos de los coeficientes de w. Escribimos

$$w(t) = t^{n+1} + b_1 t^n + b_2 t^{n-1} + \ldots + b_{n+1},$$

y definimos el polinomio invertido w^* por

$$w^*(t) = 1 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_{n+1} t^{n+1}. \tag{3.1.27}$$

Sea $h(t) = h_0 + h_1 t + h_2 t^2 + \ldots$ el recíproco de $w^*(t)$, es decir; $h(t)w^*(t) = 1$. Entonces tenemos

$$\sum_{j=0}^{m} b_j h_{m-j} = \delta_{m,0}, \qquad m \geq 0. \tag{3.1.28}$$

Como $b_0 = 1$, tenemos que $h_0 = 1$ y podemos resolver para h_m en 3.1.28 para obtener la relación de recurrencia

$$h_m = -\sum_{j=1}^{m-1} b_j h_{m-j}, \qquad m \geq 1. \tag{3.1.29}$$

Definimos

$$f = \sum_{k\geq 0} h_k p_{k+n+1}. \tag{3.1.30}$$

Entonces

$$w(L)f = \sum_{k\geq 0} h_k \sum_{j=0}^{n+1} p_{k+j} = \sum_{m\geq 0} \sum_{j\geq 0} h_{m-j} b_j p_m = p_0.$$

La última igualdad se sigue de 3.1.28. Por lo tanto f satisface $w(L)f = p_0$, y dado que $P_j f = 0$ para $0 \leq j \leq n$, concluimos que $f = d_w$, la solución fundamental asociada con el operador $w(L)$.
Usando la fórmula multinomial obtenemos la siguiente expresión

$$h_m = \sum \binom{|\mathbf{j}|}{j_1, j_2, \ldots, j_{n+1}} (-1)^{|\mathbf{j}|} b_1^{j_1} b_2^{j_2} \ldots b_{n+1}^{j_{n+1}}, \tag{3.1.31}$$

donde la suma corre sobre los multi-índices $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \ldots, j_{n+1})$ con coordenadas no negativas tales que $j_1 + 2j_2 + 3j_3 + \ldots + (n+1)j_{n+1} = m$. Recordemos que $|\mathbf{j}|$ está definida por $|\mathbf{j}| = j_1 + j_2 + j_3 + \ldots + j_{n+1}$.

3.1.3. Ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes

El primer ejemplo que veremos de una realización concreta de $\mathscr{F}$ nos da un método simple y directo para la solución de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas con coeficientes constantes.

Sea t una variable compleja y definimos $p_k = \frac{t^k}{k!}$ para $k \in \mathbb{Z}$, donde $k!$ está definido para k negativo por

$$k! = \frac{(-1)^{-k-1}}{(-k-1)!}, \qquad k < 0. \tag{3.1.32}$$

Con esta elección para los generadores p_k el desplazamiento modificado a la izquierda L se convierte en diferenciación con respecto a t, el cual denotaremos por D. La serie geométrica $e_{x,0}$ se convierte en la función exponencial e^{xt} y

$$e_{x,m} = \frac{D_x^m}{m!} e^{xt} = \sum_{j \geq m} \binom{j}{m} x^{j-m} \frac{t^j}{j!} = \frac{t^m}{m!} e^{xt}, \qquad x \in \mathbb{C},\ m \geq 0. \tag{3.1.33}$$

Estas funciones generan el espacio vectorial $\mathscr{E}$ de cuasi-polinomios, o polinomios exponenciales.
Denotamos por $*$ la multiplicación en la realización concreta del campo $\mathscr{F}$. De esta manera evitamos confusión con la multiplicación "natural" de series consideradas como funciones de t. Llamaremos a $*$ el *producto convolución*.

Entonces tenemos

$$\frac{t^n}{n!} * \frac{t^k}{k!} = \frac{t^{n+k}}{(n+k)!}, \qquad n, k \in \mathbb{Z}. \tag{3.1.34}$$

De 3.1.13 obtenemos

$$e^{xt} * e^{yt} = t^{-1} * \left(\frac{e^{xt} - e^{yt}}{x - y} \right), \qquad x \neq y. \tag{3.1.35}$$

Ahora veremos un ejemplo simple que ilustra como se usa el Teorema 3.11 para resolver ecuaciones diferenciales. Sea $w(z) = (z-x)(z-y) = z^2 + b_1 z + b_2$, donde x y y son números complejos distintos. Entonces $w(L) = w(D) = D^2 + b_1 D + b_2 I$, su kernel es $\langle e_{x,0}, e_{y,0} \rangle = \langle e^{xt}, e^{yt} \rangle$, y $d_w = p_2 e_{x,0} e_{y,0} = \left(t^2/2!\right) * e^{xt} * e^{yt}$.
Sea

$$g = \frac{2!}{t^3} + b_1 \frac{-1}{t^2} + b_2 \frac{1}{t} + e^{ut},$$

y supongamos que $u \neq x$ y $u \neq y$. Entonces

$$g = p_{-3} + b_1 p_{-2} + b_2 p_{-1} + e_{u,0} = p_{-3}(p_0 - xp_1)(p_0 - yp_1) + e_{u,0}.$$

Con un simple cálculo obtenemos

$$d_w g = p_{-1} + p_2 e_{x,0} e_{y,0} e_{u,0} = t^{-1} + \left(\frac{t^2}{2!}\right) * e^{xt} * e^{yt} * e^{ut}.$$

Dado que $d_w g$ está en $\mathscr{F}_{[0,1]}$ vemos que g está en la imagen de $w(D)$ y por el Teorema 3.11 la solución general de $w(D)g = f$ es de la forma $d_w g + h$, donde $h \in K_w = \langle e^{xt}, e^{yt} \rangle$. Usando 3.1.13 obtenemos

$$\begin{aligned}
p_2 e_{x,0} e_{y,0} e_{u,0} &= p_1 e_{u,0} \left(\frac{e_{x,0} - e_{y,0}}{x - y} \right) \\
&= \frac{1}{x - y} \left(\frac{e_{u,0} - e_{x,0}}{u - x} - \frac{e_{u,0} - e_{y,0}}{u - y} \right) \\
&= \frac{e_{x,0}}{(x-y)(x-u)} + \frac{e_{y,0}}{(y-x)(y-u)} + \frac{e_{u,0}}{(u-x)(u-y)}.
\end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$d_w g = t^{-1} + \frac{e^{xt}}{(x-y)(x-u)} + \frac{e^{yt}}{(y-x)(y-u)} + \frac{e^{ut}}{(u-x)(u-y)}.$$

Notemos que no aparecen productos de convolución en el lado derecho de esta útima ecuación.
En caso de que $u = x$ usamos $p_1 e_{x,0} e_{x,0} = e_{x,1}$, lo que nos da $t * e^{xt} * e^{xt} = te^{xt}$.
Notemos que, una vez que tengamos $g = p_{-3} + b_1 p_{-2} + b_2 p_{-1} + e_{u,0}$ podemos resolver la ecuación $w(L)f = g$ usando solamente la notación asociada con $\mathscr{F}$, es decir, usando elementos tales como p_k y $e_{x,0}$ y la multiplicación en $\mathscr{F}$, y solamente al final escribimos la solución en términos de funciones de t.

Podemos encontrar una solución que satisface algunas condiciones iniciales usando el Corolario 3.12 para encontrar un elemento de K_w con las condiciones iniciales dadas. Esto es lo mismo que resolver el sistema 3.1.25, que depende solo de las raíces de w y de los datos iniciales dados, pero no de la naturaleza de los generadores p_k.
Si g es una función de t que se puede expresar como una serie de Laurent y w es un polinomio entonces podemos determinar si g está en $Im(w(D))$ o no, y si está, entonces podemos resolver la ecuación $w(D)f = g$, con cualquier condición inicial dada.

En esta realización concreta del espacio $\mathscr{F}$ el producto convolución de los generadores tiene la representación integral siguiente.

$$\frac{t^k}{k!} * \frac{t^m}{m!} = D_t \int_0^t \frac{u^k}{k!} \frac{(t-u)^m}{m!} du = \frac{t^{k+m}}{(k+m)!}.$$

Es fácil comprobar que tal representación integral es válida también para el producto convolución de funciones de la forma $(t^m/m!)e^{xt}$, que corresponden a las series geométricas $e_{x,m}$ en $\mathscr{F}$.

Usando la representación integral del producto convolución podemos definir

$$\frac{t^m}{m!} e^{xt} * g(t) = D_t \int_0^t \frac{u^m}{m!} e^{xu} g(t-u) du,$$

para cualquier función $g(t)$ tal que la integral esté bien definida. Por ejemplo, g puede ser una función continua por trozos, definida en la recta real.

Notemos que los elementos que denotamos por d_w, son un producto de convolución de series de la forma $(t^m/m!)e^{xt}$ y por lo tanto son combinaciones lineales de tales funciones, es decir, son polinomios exponenciales. Por lo tanto, si g es una función tal que su producto de convolución con un polinomio exponencial cualquiera está bien definido, entonces $d_w * g$ es una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea $w(D)f = g$. Así es que la representación integral nos permite extender el método operacional para resolver ecuaciones $w(D)f = g$, donde la función g no es necesariamente un elemento del campo $\mathscr{F}$.

3.1.4. Ecuaciones diferenciales con coeficientes variables

Sea t una variable compleja y consideremos el operador tD, donde D denota diferenciación con respecto a t. Sea $\log t$ la rama principal del la función logaritmo, con parte imaginaria en $[0, 2\pi)$. Por la regla de la cadena tenemos

$$tD \frac{(\log t)^k}{k!} = \frac{(\log t)^{k-1}}{(k-1)!}, \qquad k \neq 0, \tag{3.1.36}$$

y esto es válido para todos los valores enteros no cero si usamos la definición 3.1.32 para el factorial de enteros negativos. Por lo tanto, tomando $p_k = \frac{(\log t)^k}{k!}$ el desplazamiento a la derecha modificado de $\mathscr{F}$ se convierte en $L = tD$. La serie geométrica $e_{x,0}$ se convierte en $e^{x \log t} = t^k$, y

$$e_{x,m} = \frac{D_x^m}{m!} t^x = \frac{(\log t)^m}{m!} e^{x \log t}, \qquad x \in \mathbb{C},\ m \geq 0. \tag{3.1.37}$$

Estas funciones generan un espacio vectorial que denotaremos por $\mathscr{M}$.
En este caso los operadores $w(L)$ son ciertos operadores diferenciales con coeficientes variables. Por ejemplo, la ecuación de Euler $(t^2D^2+4tD+2I)f=e^{-t}$ puede escribirse como $w(L)f=g$, donde $g=e^{-t}$, $L=tD$ y $w(L)=(L+I)(L+2I)$. Entonces tenemos que $K_w=\langle e_{-1,0},e_{-2,0}\rangle=\langle t^{-1},t^{-2}\rangle$ y usando 3.1.13 obtenemos $d_w=p_2e_{-1,0}e_{-2,0}=p_1(e_{-1,0}-e_{-2,0})$. Ya que $t^k=e_{k,0}$ podemos escribir

$$g=e^{-t}=\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{k!}e_{k,0},$$

y entonces

$$d_wg=p_1(e_{-1,0}-e_{-2,0})g=\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{k!}p_1(e_{-1,0}-e_{-2,0})e_{k,0}.$$

Por 3.1.13 tenemos

$$p_1(e_{-1,0}-e_{-2,0})e_{k,0}=\frac{e_{k,0}-e_{-1,0}}{k+1}-\frac{e_{k,0}-e_{-2,0}}{k+2}=\frac{e_{k,0}}{(k+1)(k+2)}-\frac{e_{-1,0}}{k+1}+\frac{e_{-2,0}}{k+2}.$$

Sustituyendo esta ecuación en la ecuación anterior, escribiendo $e_{k,0},e_{-1,0},e_{-2,0}$ en términos de t, obtenemos

$$d_wg=\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^kt^k}{(k+2)!}-t^{-1}\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{(k+1)!}+t^{-2}\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{k!(k+2)}.$$

Observemos que $d_wg=t^{-2}e^{-t}+\alpha t^{-1}+\beta t^{-2}$, donde α y β son constantes. Notemos también que $t^{-2}e^{-t}$ es una solución particular de $w(L)f=g$.

Este ejemplo aparece en [6], donde es resuelto por el método de transformadas de Mellin, que en este caso requiere el uso de la función Gamma.

Podemos generalizar la construcción previa como sigue. Consideremos el operador diferencial $\alpha(t)D+\beta(t)I$, donde α y β son funciones definidas en algún dominio abierto $\mathscr{U}\subseteq\mathbb{C}$, y tales que existen funciones u y v tales que $\alpha Du=\beta$ y $\alpha Dv=1$ en el dominio de $\mathscr{U}$. Definimos

$$p_k=e^{-u(t)}\frac{v^k(t)}{k!},\qquad k\in\mathbb{Z}.\tag{3.1.38}$$

Esta construcción es bastante general y nos permite resolver un gran número de ecuaciones diferenciales con coeficientes variables. Incluso cuando $\beta=0$ el operador $L=$

$\alpha(t)D$, para un adecuado $\alpha(t)$, produce una extensa familia de ecuaciones $w(L)f = g$ que son importantes en numerosas aplicaciones. Podemos resolver ecuaciones como las siguientes:

$$y'' + (2\alpha + \beta)y' + \alpha t(\alpha t + \beta)y = 0,$$

$$ty'' + (t^2 - 1)y' + t^3 y = 0,$$

$$y'' + \frac{t^2 - 1}{t}y' + t^2 y = t^2,$$

$$y'' + (\cos t)y' - \frac{1}{4}(\operatorname{sen} t)(\operatorname{sen} t + 2)y = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (ct)^k D^{n-k} y = 0.$$

3.1.5. Ecuaciones en diferencias

Consideremos ahora el análogo discreto de la construcción presentada en la Sección 3.1.3, donde el desplazamiento a la izquierda modificado era la diferenciación con respecto a la variable t. Denotamos por Δ al operador de diferencia hacia adelante que actúa en función de valores complejos de la variable entera k y está definido por $\Delta f(k) = f(k+1) - f(k)$ para $k \in \mathbb{Z}$.
Para $n \geq 0$ el coeficiente binomial $\binom{k}{n}$ es un polinomio en k de grado n. La relación básica de recurrencia para los coeficientes binomiales nos da

$$\Delta \binom{k}{n} = \binom{k}{n-1}, \quad n \geq 1. \tag{3.1.39}$$

Es claro que $\Delta\binom{k}{0} = 0$. Definimos el coeficiente binomial para valores negativos de n por

$$\binom{k}{n} = \frac{(-1)^{-n-1}(-n-1)!}{(k+1)(k+2)\dots(k-n)}, \quad n < 0, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{3.1.40}$$

Notemos que esta función es el recíproco de un polinomio en k de grado $-n$, que tiene sus raíces en $-1, -2, \dots, n$. Usando la definición 3.1.40 es fácil verificar que 3.1.39 vale para n negativo. Por lo tanto, si los generadores de $\mathscr{F}$ están definidos por

$$p_n = \binom{k}{n}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{3.1.41}$$

entonces el operador de diferencia Δ se convierte en el desplazamiento modificado a la izquierda L. El producto de convolución es

$$\binom{k}{n} * \binom{k}{m} = \binom{k}{n+m}, \quad n,m \in \mathbb{Z}. \tag{3.1.42}$$

Las series geométricas $e_{x,0}$ son en este caso las sucesiones

$$e_{x,0} = \sum_{n\geq 0} x^n \binom{k}{n} = (1+x)^k, \quad x \in \mathbb{C}, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{3.1.43}$$

y

$$e_{x,m} = \frac{D_x^m}{m!} e_{x,0} = \binom{k}{m} (1+x)^{k-m}, \quad x \in \mathbb{C}, \quad m \in \mathbb{N}, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{3.1.44}$$

Estas sucesiones generan el espacio vectorial $\mathscr{S}$ de sucesiones lineales recurrentes.

El producto de convolución de la ecuación 3.1.42 está bien definido para cualquier par de sucesiones $f(k)$ y $g(k)$ por

$$(f*g)(k) = \sum_{j=0}^{k} f(j) g(k-j).$$

La ecuación 3.1.42 es la conocida fórmula de convolución de Vandermonde.

CAPÍTULO 4

ECUACIONES DIFERENCIALES FRACCIONARIAS

En este capítulo presentamos la construcción de una realización concreta del cálculo operacional general que sirve para resolver ecuaciones lineales con derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville. También construimos una representación integral de la multiplicación de los generadores que permite extender la clase de ecuaciones que se pueden resolver por el método operacional.

4.1. Ecuaciones diferenciales fraccionarias

La ecuación 2.2.54, que describe la manera en que la diferenciación fraccionaria de Riemann-Liouville actúa sobre la función α-exponencial, sugiere la siguiente construcción de una definición algebraica de la diferenciación fraccionaria. Sea α un número complejo no cero. Definimos primeramente que el operador de diferenciación fraccionaria D_t^α de orden α respecto a t actúa sobre las funciones α-exponenciales como sigue

$$D_t^\alpha e_\alpha^{\lambda(t-a)} = \lambda e_\alpha^{\lambda(t-a)} \tag{4.1.1}$$

Recordemos que la función α-exponencial se definió en 2.1.27. Podemos reescribirla como

$$e_\alpha^{\lambda t} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma((k+1)\alpha)}. \tag{4.1.2}$$

Vamos a construir una realización concreta de $\mathscr{F}$ en la cual $L = D_t^\alpha$. Para que se cumpla que $(L - xI)e_{x,0} = 0$, definimos

$$e_{x,0} = e_\alpha^{xt} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \frac{t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma((k+1)\alpha))}.$$

Dado que $e_{x,0} = \sum_{k\geq 0} x^k p_k$, entonces debemos definir los generadores

$$p_k = h_k(t) = \frac{t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma((k+1)\alpha)}, \tag{4.1.3}$$

y por lo tanto definimos

$$D_t^\alpha \left(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) = 0, \tag{4.1.4}$$

y

$$D_t^\alpha \left(\frac{t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma((k+1)\alpha)} \right) = \frac{t^{k\alpha-1}}{\Gamma(k\alpha)}, \qquad k \neq 0. \tag{4.1.5}$$

Para $\beta \neq \alpha - 1$ definimos

$$D_t^\alpha \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)} = \frac{t^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}.$$

Estas definiciones son consistentes con las propiedades de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville presentadas en el Capítulo 2.

Notemos que si $\alpha = 1$ entonces los generadores $h_k(t)$ se convierten en $t^k/k!$, y éstos son los generadores en el caso en que L es la derivada ordinaria D_t, como vimos en 3.1.3.

Las series geométricas $e_{x,m}$ están dadas por

$$e_{x,m} = \frac{D_x^m}{m!} e_{x,0} = \sum_{k=m}^{\infty} \binom{k}{m} x^{k-m} \frac{t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma((k+1)\alpha)}. \tag{4.1.6}$$

Dado que $L = D_t^\alpha$, si w es un polinomio de grado $n+1$ podemos escribir

$$w(L) = \sum_{k=0}^{n+1} c_k (D_t^\alpha)^k, \tag{4.1.7}$$

donde los c_k son coeficientes complejos. Por lo tanto, en esta realización concreta del campo $\mathscr{F}$ podemos resolver ecuaciones diferenciales fraccionarias de la forma $w(L)f = g$, donde g es un elemento dado de $\mathscr{F}$. Como veremos más adelante, la multiplicación en $\mathscr{F}$ tiene una representación integral que nos permite considerar ecuaciones en las que la función g no necesariamente pertenece a $\mathscr{F}$.

4.1.1. Ejemplos

4.1 Ejemplo. Mostraremos la manera en la que el método operacional nos permite resolver la ecuación en derivadas fraccionarias

$$\left(D^{2\alpha} - 4D^{\alpha} + 4I\right) v(t) = s(t),$$

donde $s(t)$ es una combinación lineal finita de los generadores $p_j = h_j(t)$ definidos en 4.1.3. Sea $s(t) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_j h_j(t)$ y consideremos las condiciones iniciales $P_0 v = c_0 h_0(t)$ y $P_1 v = c_1 h_1(t)$, donde c_0 y c_1 son números dados. La ecuación se puede escribir en la forma

$$(D^{\alpha} - 2I)^2 v(t) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j h_j(t),$$

la cual se traduce en

$$(L - 2I)^2 v = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j p_j,$$

en términos de L y los generadores p_j. Ahora, por 3.1.6 tenemos que $L^2 = p_{-2}(p_0 - P_0 - P_1)$ y $L = p_{-1}(p_0 - P_0)$.
Si $v = \sum_{j=w(v)}^{\infty} v_j p_j$ entonces $L^2 v = p_{-2}(v - v_0 p_0 - v_1 p_1)$ y $Lv = p_{-1}(v - v_0 p_0)$, y por lo tanto tenemos

$$(p_{-2} - 4p_{-1} + 4p_0)v = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j p_j + v_0 p_{-2} + v_1 p_{-1} - 4v_0 p_{-1}.$$

Como $P_0 v = c_0 p_0$ y $P_1 v = c_1 p_1$ obtenemos

$$(p_{-2} - 4p_{-1} + 4p_0)v = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j p_j + c_0 p_{-2} + (c_1 - 4c_0) p_{-1}. \tag{4.1.8}$$

Multiplicando por p_2 ambos lados de 4.1.8 obtenemos

$$(p_0 - 4p_1 + 4p_2)v = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j p_{j+2} + c_0 p_0 + (c_1 - 4c_0)p_1. \tag{4.1.9}$$

Observamos que $p_0 - 4p_1 + 4p_2 = (p_0 - 2p_1)^2$ y su inverso multiplicativo es $(e_{2,0})^2 = p_{-1}e_{2,1}$, por lo tanto

$$v = \left(\sum_{j=0}^{n} \lambda_j p_{j+1} + c_0 p_{-1} + (c_1 - 4c_0)p_0 \right) e_{2,1}.$$

En términos de funciones de t la solución es

$$v(t) = \left(\sum_{j=0}^{n} \lambda_j \frac{t^{(j+2)\alpha-1}}{\Gamma((j+2)\alpha)} + c_0 t^{-1} + (c_1 - 4c_0)\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) \sum_{k=1}^{\infty} k2^{k-1} \frac{t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma((k+1)\alpha)}.$$

4.2 Ejemplo. Consideremos la ecuación

$$D_t^{\alpha} v(t) = e_{\alpha}^{\lambda t},$$

Donde $e_{\alpha}^{\lambda t}$ es la función α-exponencial definida anteriormente. Supongamos que $P_0 v = cp_0$ donde c es un número dado. Entonces

$$\begin{aligned} D_t^{\alpha} v(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{t^{\alpha(k+1)-1}}{\Gamma(\alpha(k+1))} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k p_k. \end{aligned}$$

Luego

$$Lv = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k p_k,$$

por 3.1.6 $L = p_{-1}(p_0 - P_0)$, entonces

$$p_{-1}(p_0 - P_0)v = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k p_k.$$

Como $P_0 v = v_0 p_0 = cp_0$, tenemos

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k p_{k+1} + cp_0.$$

Entonces

$$v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{t^{(k+2)\alpha-1}}{\Gamma((k+2)\alpha)} + c\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

4.2. Convolución

Recordemos que los generadores p_k del campo $\mathscr{F}$ son en este caso las funciones de t definidas por

$$h_k(t) = \frac{t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma((k+1)\alpha)}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

4.3 Proposición. *Sean p_k y p_m generadores de $\mathscr{F}$, entonces la convolución $p_k * p_m$ de estos elementos es*

$$p_{k+m} = h_{k+m}(z) = (h_k * h_m)(z) = D_z^\alpha \int_0^z h_k(t)h_m(z-t)\,dt. \tag{4.2.10}$$

Demostración:

Primero demostraremos que 4.2.10 se cumple para $\alpha = 1,2,3,\ldots$

Primero veremos que se cumple para $\alpha = 1$.

$$\begin{aligned}
\int_0^z \frac{t^k}{\Gamma(k+1)}\frac{(z-t)^m}{\Gamma(m+1)}dt &= \frac{1}{k!m!}\int_0^z t^k \sum_{j=0}^m \binom{m}{j}(-1)^j t^j z^{m-j}dt \\
&= \frac{1}{k!m!}\int_0^z \sum_{j=0}^m \binom{m}{j}(-1)^j t^{k+j} z^{m-j}dt \\
&= \frac{1}{k!m!}\sum_{j=0}^m \binom{m}{j} z^{m-j}(-1)^j \int_0^z t^{k+j}dt \\
&= \frac{1}{k!m!}\sum_{j=0}^m \binom{m}{j} z^{m-j}(-1)^j \frac{z^{k+j+1}}{k+j+1} \\
&= \frac{z^{m+k+1}}{m!k!}\sum_{j=0}^m \binom{m}{j}(-1)^j \frac{1}{k+j+1}.
\end{aligned}$$

Usando la identidad

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j}(-1)^j \frac{1}{r+j} = \frac{n!(r-1)!}{(n+r)!}, \tag{4.2.11}$$

haciendo $n = m$ y $r = k+1$ obtenemos;

$$\begin{aligned}
D_z \int_0^z h_k(t) h_m(z-t)dt &= D_z \left\{ \frac{z^{m+k+1}}{m!k!} \frac{m!k!}{(m+k+1)!} \right\} \\
&= D_z \left\{ \frac{z^{m+k+1}}{(m+k+1)!} \right\} \\
&= \frac{z^{m+k}}{(m+k)!} = \frac{z^{m+k}}{\Gamma(m+k+1)} = h_{k+m}(z).
\end{aligned}$$

Ahora demostraremos que se cumple para $\alpha = n$. Para simplificar la notación definimos

$$C := \frac{1}{\Gamma(n(k+1))\Gamma(n(m+1))} = \frac{1}{(nk+n-1)!(nm+n-1)!}$$

y

$$M_j := \binom{n(m+1)-1}{j}$$

Luego tenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^z \frac{t^{n(k+1)-1}}{\Gamma(n(k+1))} \frac{(z-t)^{n(m+1)-1}}{\Gamma(n(m+1))} dt &= C \int_0^z t^{n(k+1)-1} \sum_{j=0}^{n(m+1)-1} M_j (-1)^j t^j z^{n(m+1)-1-j} dt \\
&= C \sum_{j=0}^{n(m+1)-1} M_j (-1)^j z^{n(m+1)-1-j} \int_0^z t^{n(k+1)-1+j} dt \\
&= C \sum_{j=0}^{n(m+1)-1} M_j (-1)^j z^{n(m+1)-1-j} \frac{z^{n(k+1)+j}}{n(k+1)+j} \\
&= C \sum_{j=0}^{n(m+1)-1} M_j (-1)^j \frac{1}{n(k+1)+j} z^{n(m+k+2)-1} \\
&= C \frac{(n(k+1)-1)!(n(m+1)-1)!}{(n(m+1)-1+n(k+1))!} z^{n(m+k+2)-1} \\
&= \frac{z^{n(m+k+2)-1}}{(n(m+k+2)-1)!}.
\end{aligned}$$

Aplicando D_z^n a ambos lados de la ecuación obtenemos

$$D_z^n \left\{ \int_0^z \frac{t^{n(k+1)-1}}{\Gamma(n(k+1))} \frac{(z-t)^{n(m+1)-1}}{\Gamma(n(m+1))} dt \right\} = \frac{z^{n(m+k+1)-1}}{(n(m+k+1)-1)!} = h_{m+k}(z).$$

Nos falta demostrar que la fórmula integral de la convolución es válida para cualquier α; para esto vamos a demostrar que la identidad 4.2.11 se extiende reemplazando n por $\alpha(m+1)-1$ y r por $\alpha(k+1)$ y nos da

$$\sum_{j=0}^{\infty}\binom{\alpha(m+1)-1}{j}(-1)^j\frac{1}{j+\alpha(k+1)}=\frac{\Gamma(\alpha(m+1))\Gamma(\alpha(k+1))}{\Gamma(\alpha(m(k+2))}. \qquad (4.2.12)$$

Si α es un entero positivo esta ecuación es la identidad 4.2.11. Como ambos lados de la igualdad son funciones analíticas de α en el semiplano $Re(\alpha)>0$ y como ya hemos demostrado, coinciden en la sucesión $1,2,3,\ldots$, que tiene al infinito como punto de acumulación, entonces coinciden en todo su dominio, el cual se puede extender al dominio de la función Γ usando las propiedades de ésta.

Definimos

$$G:=\frac{1}{\Gamma(\alpha(k+1))\Gamma(\alpha(m+1))}.$$

Vamos a demostrar ahora que la fórmula integral de la convolución es válida para cualquier α.

$$\begin{aligned}
\int_0^z \frac{t^{\alpha(k+1)-1}}{\Gamma(\alpha(k+1))}\frac{(z-t)^{\alpha(m+1)-1}}{\Gamma(\alpha(m+1))}\,dt = &\\
&= G\int_0^z t^{\alpha(k+1)-1}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{\alpha(m+1)-1}{j}(-1)^j t^j z^{\alpha(m+1)-1-j}dt\\
&= G\sum_{j=0}^{\infty}\binom{\alpha(m+1)-1}{j}z^{\alpha(m+1)-1-j}(-1)^j\int_0^z t^{\alpha(k+1)-1+j}dt\\
&= G\sum_{j=0}^{\infty}\binom{\alpha(m+1)-1}{j}(-1)^j\frac{z^{\alpha(k+1)+\alpha(m+1)-1}}{\alpha(k+1)+j}\\
&= z^{\alpha(k+m+2)-1}G\sum_{j=0}^{\infty}\binom{\alpha(m+1)-1}{j}(-1)^j\frac{1}{\alpha(k+1)+j}\\
&= z^{\alpha(k+m+2)-1}G\frac{\Gamma(\alpha(m+1))\Gamma(\alpha(k+1))}{\Gamma(\alpha(m+k+2))}.
\end{aligned}$$

Aquí hemos utilizado la serie binomial y la identidad 4.2.12. Notemos que el intercambio de la integral con la serie está justificado porque la función que se está integrando es analítica. Aplicando D^α con respecto a z obtenemos

$$\begin{aligned} D^\alpha \left\{ \int_0^z \frac{t^{\alpha(k+1)-1}}{\Gamma(\alpha(k+1))} \frac{(z-t)^{\alpha(m+1)-1}}{\Gamma(\alpha(m+1))} dt \right\} &= \frac{z^{\alpha(k+1)+\alpha(m+1)-1}}{\Gamma(\alpha(m+k+2))} \\ &= \frac{z^{\alpha(k+m+1)-1}}{\Gamma(\alpha(k+m+1))} = h_{k+m}(z). \end{aligned}$$

Con esto completamos la demostración de 4.2.10.

La representación integral de la convolución nos permite definir el producto de convolución de un elemento f del campo $\mathscr{F}$ por una función $g(t)$ por medio de

$$(f * g)(z) = D^\alpha \int_0^z g(z-t) f(t)\, dt$$

si la integral es una función bien definida de z. Por ejemplo, g puede ser una función acotada y continua por secciones. Para encontrar una solución particular de la ecuación $w(D^\alpha) f = g$ es suficiente que el producto de convolución de g con las series $e_{x,m}$ esté bien definido. La expresión explícita para la serie $e_{x,m}$ está dada en 4.1.6.

4.4 Ejemplo. Sea c una constante, entonces

$$\begin{aligned} (c * h_k)(z) = D_z^\alpha \int_0^z c\, h_k(t) dt &= c D_z^\alpha \int_0^z \frac{t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma((k+1)\alpha)} dt \\ &= c D_z^\alpha \frac{z^{(k+1)\alpha}}{(k+1)\alpha\Gamma((k+1)\alpha)} \\ &= c D_z^\alpha \frac{z^{(k+1)\alpha}}{\Gamma((k+1)\alpha+1)} \\ &= \frac{c\, z^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} \end{aligned}$$

4.5 Ejemplo. Sea x_k una sucesión estrictamente creciente de números reales con $x_0 = 0$. Consideremos ahora la función escalonada $f(t)$ definida por $f(t) = 0$ si $t < 0$ y $f(t) = c_{k+1}$ si $x_k \leq t < x_{k+1}$, para $k \leq 0$, donde las c_k son constantes dadas. Entonces, si $x_n \leq z < x_{n+1}$

tenemos

$$\begin{aligned}
(h_k * g)(z) &= D_z^{\alpha}\left(\sum_{j=0}^{n-1} c_{j+1}\int_{x_j}^{x_{j+1}} h_k(t)dt\right)\\
&= D_z^{\alpha}\sum_{j=0}^{n-1} c_{j+1}\frac{x_{j+1}^{(k+1)\alpha}-x_j^{(k+1)\alpha}}{\Gamma((k+1)\alpha+1)} + D_z^{\alpha}\int_{x_{n-1}}^{z} c_n h_k(t)dt\\
&= \frac{z^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{j=0}^{n-1} c_{j+1}\frac{x_{j+1}^{(k+1)\alpha}-x_j^{(k+1)\alpha}}{\Gamma((k+1)\alpha+1)} + c_n D_z^{\alpha}\left(\frac{z^{(k+1)\alpha}-x_{n-1}^{(k+1)\alpha}}{\Gamma((k+1)\alpha+1)}\right)\\
&= \frac{z^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\sum_{j=0}^{n-1} c_{j+1}\frac{x_{j+1}^{(k+1)\alpha}-x_j^{(k+1)\alpha}}{\Gamma((k+1)\alpha+1)} - \frac{c_n x_{n-1}^{(k+1)\alpha}}{\Gamma((k+1)\alpha+1)}\right) + \frac{c_n z^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

Para calcular el producto de convolución de $h_k(t)$ con funciones como, por ejemplo, $g(t)=\cos(t)$ se puede utilizar la transformada de Laplace para encontrar la integral

$$\int_0^z h_k(t)g(z-t)dt.$$

En [5] se presentan varios ejemplos de ese procedimiento.

CAPÍTULO 5

Conclusiones y perspectivas

5.1. Conclusiones

En este trabajo presentamos la teoría básica de las derivadas de orden fraccionario y las funciones asociadas a ellas, como son las potencias complejas de una variable compleja t, las funciones de Mittag-Leffler y las α-exponenciales. Para la construcción de las derivadas fraccionarias utilizamos las integrales de Riemann-Liouville, porque es la construcción usada más frecuentemente en los libros y artículos sobre el tema, aunque existen diversas definiciones de derivadas fraccionarias que son útiles en la modelación matemática de diversos fenómenos físicos.

En el capítulo 3 presentamos los fundamentos del cálculo operacional en un espacio abstracto de series formales de Laurent que nos da un método general para resolver ecuaciones funcionales. Para cada especificación particular de los objetos y operadores en la teoría abstracta obtenemos lo que llamamos una realización concreta del cálculo operacional. Nuestro principal objetivo en esta tesis es la construcción de una realización concreta que sirva para resolver ecuaciones con derivadas fraccionarias. Tal construcción se presenta en el capítulo 4. Debemos mencionar que esa construcción no solamente corresponde a las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville, tambén se aplica a cualquier operador D^{α} que satisfaga las ecuaciones (4.1.4) y (4.1.5), independientemente de la manera en que se haya definido.

Una contribución importante es la construcción de la representación integral del producto de convolución, pues esto permite extender considerablemente la clase de ecuaciones en derivadas fraccionarias que se pueden resolver con el método operacional.

Cabe mencionar que la teoría que obtuvimos es una extensión natural de la teoría clásica de las derivadas ordinarias de orden entero. Tomando límites cuando α tiende a 1, los resultados sobre derivadas fraccionarias y la convolución se convierten en los correspondientes para derivadas ordinarias y la convolución usual.

5.2. Perspectivas

Debemos mencionar que las representaciones integrales del producto de convolución son muy importantes porque permiten utilizar el método operacional general para resolver ecuaciones en las que la función de excitación no pertenece a la realización concreta del campo abstracto $\mathscr{F}$. Por eso es importante encontrar tales representaciones integrales para otras realizaciones concretas asociadas con diversos tipos de derivadas fraccionarias, como las de Caputo, Weyl, Liouville, Grünwald y Ortigueira. Intentamos el caso de Liouville, que corresponde a la derivada de Riemann-Liouville con integración de menos infinito a x, pero resultó ser un problema difícil, en el que seguiremos trabajando.

También intentaremos construir realizaciones concretas para los diversos tipos de derivadas fraccionarias que no satisfacen las ecuaciones (4.1.4) y (4.1.5). Esto solamente requiere encontrar los generadores p_k adecuados en cada caso.

Otro tema de investigación es la extensión de los métodos operacionales para resolver también ecuaciones no lineales. Se puede hacer usando expansiones de Adomian, como lo ha hecho G. Bengochea para varias realizaciones concretas del Cálculo Operacional en artículos recientes.

La extensión de los métodos operacionales al caso de sistemas de ecuaciones lineales en derivadas fraccionarias es otro tema importante de investigación, así como también en ecuaciones en diferencias.

Dado el gran interés y el uso cada vez más generalizado de las derivadas fraccionarias en diversas áreas de la matemática aplicada, consideramos importante estudiar las maneras de aplicar nuestros métodos a problemas concretos que han surgido de las diversas aplicaciones.

La relación de los productos de convolución y sus representaciones integrales con las transformadas integrales es otro tema importante que debemos considerar.

Bibliografía

[1] G. Bengochea, L. Verde-Star, LINEAR ALGEBRAIC FOUNDATIONS OF THE OPERATIONAL CALCULI, Advances in Applied Mathematics, 47 (2), (2011) 330–351.

[2] G. Bengochea, OPERATIONAL SOLUTION OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS, Applied Mathematics Letters 32, (2014) 48–52.

[3] D. Elizarraraz, L. Verde-Star, FRACTIONAL DIVIDED DIFFERENCES AND THE SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FRACTIONAL ORDER, Adv. in Appl. Math. 24 (2000) 260–283.

[4] J. Sabatier, O.P. Agrawal, J. A. Tenreiro Machado, Editors, ADVANCES IN FRACTIONAL CALCULUS, Springer, Dordrecht, 2007.

[5] S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev,FRACTIONAL INTEGRALS AND DERIVATIVES: THEORY AND APPLICATIONS, Gordon and Breach, New York, 1993.

[6] H.-J. Glaeske, A.P. Prudnikov, K.A. Skórnik, OPERATIONAL CALCULUS AND RELATED TOPICS, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006.

[7] K.B. Oldham, J. Spanier, THE FRACTIONAL CALCULUS, Academic Press, New York, 1974.

[8] I. Podlubny, FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 198. Academic Press, San Diego, pp. 16–37, 1999.

[9] K.S. Miller, B. Ross, AN INTRODUCTION TO THE FRACTIONAL CALCULUS AND FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS, Wiley, New York, 1993.

[10] B.M. Vinagre, Y. Chen, LECTURE NOTES ON FRACTIONAL CALCULUS APPLICATIONS IN AUTOMATIC CONTROL AND ROBOTICS. In the 41st IEEE CDC2002 Tutorial Workshop N. 2, B.M. Vinagre and Y. Chen, eds., pp. 1310, (2002).

[11] B. Ross, THE DEVELOPMENT OF FRACTIONAL CALCULUS. 1695–1900, Hist. Math.4:75–89, (1977).

[12] I. Hilfer, APPLICATIONS OF FRACTIONAL CALCULUS IN PHYSICS. World Scientific, New Jersey, 2000.

[13] R. Gorenflo, F. Mainardi, FRACTIONAL CALCULUS, INTEGRAL AND DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FRACTIONAL ORDER. In: Carpinteri A, Mainardi F (eds.), Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics. CISM courses and lectures 378. Springer, New York, pp. 223–276, (1997).

[14] M. Duarte Ortigueira, FRACTIONAL CALCULUS FOR SCIENTISTS AND ENGINEERS, Lecture Notes in Electrical Engineering Volume 84, Springer, NY, 2011.

[15] L.Verde-Star, INVERSE OF GENERALIZED VANDERMONDE MATRICES, J. Math. Anal. Appl. 131 (1988) 341–353.

[16] ADVANCES IN FRACTIONAL CALCULUS. THEORETICAL DEVELOPMENTS AND APPLICATIONS IN PHYSICS AND ENGINEERING, Springer, 2007 .