6+
80

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
METROPOLITANA-IZTAPALAPA

Sobre el Hamiltoniano de una clase de evoluciones cuánticas

Tesis que presenta:

Oswaldo González Gaxiola

PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

Asesor

Dr. Roberto Quezada Batalla

Diciembre de 2006.

Deseo hacer patente mi agradecimiento al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), por su apoyo a través de los proyectos de investigación No. 49510-F, 37491-E y la beca para estudios de posgrado en matemáticas No. 82859.

Agradezco al Dr. Roberto Quezada Batalla, por su dedicación, interés y paciencia para guiarme en la realización del presente trabajo.

Agradezco la hospitalidad brindada en el Departamento de Matemáticas de la UAM-I a cargo del Dr. Carlos José E. Signoret Poillon.

Agradezco al Sr. Daniel Espinoza Pérez (Flash), por su siempre acertada ayuda computacional para llevar a cabo la escritura del presente trabajo.

Índice general

Introducción

De acuerdo con resultados fundamentales de Cálculo Estocástico Cuántico, véase por ejemplo el Teorema 27.8 en [28], la solución de una Ecuación Diferencial Estocástica Cuántica (EDEC), (ecuación derecha de Hudson-Parthasarathy),

$$\begin{cases} dV(t) = \{\sum_{k,j\in J}(W_{k,j} - \delta_{k,j})d\Lambda_{k,j}(t) - \sum_{k,j\in J} L_k^* W_{k,j} dA_j(t) \\ + \sum_{k,j\in J} L_j dA_j^\dagger(t) - (iH + \frac{1}{2}\sum_{j\in J} L_j^* L_j)dt\} V(t), \\ V(0) = I, \end{cases}$$

es un único proceso adaptado, fuertemente continuo y unitario V_t, si los operadores H, L_j, $W_{k,j}$ sobre el espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$, satisfacen las condiciones:

- H, L_j, $W_{k,j} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ para cada k, $j \in J$, donde $J \subset \mathbb{N}$.
- $H = H^*$,
- $L \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \zeta \otimes \mathcal{H})$, donde $Lh = \sum_j z_j \otimes L_j h$,
- $W \in \mathcal{U}(\zeta \otimes \mathcal{H})$, donde $W = \sum_{k,j} |z_k\rangle\langle z_j| \otimes W_{k,j}$,

  donde $(z_j)_{j\in J}$ es una base ortonormal de otro espacio Hilbert separable ζ (el espacio de multiplicidad) con $\dim(\zeta) = |J|$.

Asociado de manera canónica con el proceso V_t existe un grupo uniparamétrico $U = (U_t)_{t\in\mathbb{R}}$. Para definir U_t es necesario considerar la segunda cuantización Θ_t, sobre el espacio de Fock simétrico

$$\Gamma(L^2(\mathbb{R}, \zeta)) = \Gamma(L^2(\mathbb{R}_-, \zeta)) \otimes \Gamma(L^2(\mathbb{R}_+, \zeta)),$$

del grupo unitario fuertemente continuo del operador de traslación θ_t sobre $L^2(\mathbb{R},\zeta)$; definido para cada $t \in \mathbb{R}$ por

$$\theta_t v(r) = v(r+t), \text{ para toda } v \in L^2(\mathbb{R}) \text{ continua,}$$
$$\Theta_t \psi(v) = \psi(\theta_t v), \text{ para toda } v \in L^2(\mathbb{R}),$$

donde $\psi(v)$ denota el vector exponencial asociado con v.

El operador Θ_t anterior, puede extenderse a todo el espacio $\Gamma(L^2(\mathbb{R},\zeta)) \otimes \mathcal{H}$, y se cumple la propiedad de cociclo de $V(t)$ con respecto a Θ_t, véase [2]:

$$V(s+t) = \Theta_s^* V(t) \Theta_s V(s), \; \forall s,t \geq 0.$$

Entonces podemos definir el grupo unitario fuertemente continuo U_t, ver las referencias[11], [12], [24], mediante

$$U_t = \begin{cases} \Theta_t V_t & si\,, t \geq 0 \\ V_{|t|}^* \Theta_t & si\,, t < 0 \end{cases}$$

Por el teorema de Stone, $\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ es generado por un operador autoadjunto $\mathcal{C}$, entonces para cada $t \in \mathbb{R}$, tenemos formalmente

$$U_t = e^{-it\mathcal{C}}.$$

El problema de la caracterización del operador $\mathcal{C}$, planteado por L.Accardi [1], permaneció abierto por alrededor de quince años. La dificultad principal es que $\mathcal{C}$ es un operador singular y su dominio debe describirse usando condiciones de frontera. Este problema fue abordado por primera vez por A.M. Chebotarev [6], en el caso cuando $|J| = 1$ y con operadores del sistema (o coeficientes) no acotados pero conmutativos. Chebotarev encontró una expresión analítica explícita para este operador y una condición de frontera que deben satisfacer los elementos del dominio de $\mathcal{C}$. Recientemente en [7], extendió algunos de sus resultados para el caso de operadores no acotados, no necesariamente conmutativos, pero manteniendo la restricción $|J| = 1$. El caso de coeficientes acotados y multiplicidad arbitraria $|J|$, fue completamente resuelto por M. Gregoratti en [18], [19], él demostró que en ese caso $\mathcal{C}$ resulta ser un operador esencialmente autoadjunto. Desde un punto de vista diferente W. von Waldenfels en [33] obtuvo una demostración diferente del resultado de Gregoratti y una representación diferente del operador $\mathcal{C}$.

En este trabajo consideraremos el caso de coeficiente no acotados, no necesariamente conmutativos y multiplicidad arbitraria. Esta extensión es un complemento necesario a la teoría desarrollada por los autores antes mencionados. Es importante mencionar que el problema de existencia, unicidad y unitariedad de la solución V de una EDEC con coeficientes no acotados, no necesariamente conmutativos y multiplicidad arbitraria, ha sido estudiado por F. Fagnola, véase por ejemplo [10]. Pero este trabajo tiene una motivación adicional, pues existen ejemplos como los que incluimos en el Capítulo 4, que no pueden ser tratados con los resultados de Chebotarev y Gregoratti.

Siguiendo las ideas de Chebotarev y Gregoratti, daremos condiciones suficientes para que el operador $\mathcal{C}$ sea densamente definido y simétrico sobre el subespacio lineal generado por una familia de vectores pseudo-exponenciales contenidos en su dominio, también daremos condiciones suficientes que aseguran que $-i\mathcal{C}$ es restricción de un generador de un semigrupo fuertemente continuo de isometrías. Nuestro enfoque es diferente de aquel desarrollado por Gregoratti pues, con el mismo espíritu de Chebotarev, trataremos este problema en el marco de la teoría de operadores.

Describiremos ahora el contenido del trabajo. El Capítulo 1 contiene los prerrequisitos necesarios de la teoría de semigrupos y algunos resultados preliminares. En el Capítulo 2 se caracteriza el generador infinitesimal de U_t en el caso de coeficientes acotados conmutativos y sin multiplicidad; también se dan condiciones suficientes para que un operador simétrico sea restricción de un generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo de isometrías en términos de sus índices de defecto, resultado que también se aplica en el Capítulo 3, en el caso de coeficientes no acotados, no necesariamente conmutativos y multiplicidad arbitraria. Además de tratar este último caso, en el Capítulo 3 se define una nueva clase de vectores pseudo-exponenciales que generan un subespacio denso del dominio de $\mathcal{C}$ y se demuestra que la restricción de $\mathcal{C}$ a este subespacio es simétrica. Finalmente en el Capítulo 4 se aplica la teoría desarrollada en los Capítulos anteriores a dos ejemplos que no pueden tratarse con la teoría desarrollada por Chebotarev y Gregoratti, también se indica cómo nuestro enfoque se puede aplicar para obtener el resultado de Gregoratti.

un complemento necesario a la teoría desarrollada por los autores anteriores citados. El interés [illegible] que el problema de existencia [illegible] y unicidad de la solución [illegible] de un EDPC con coeficientes [illegible], no necesariamente [illegible] y multiplicidad [illegible] por [illegible], pues, por [illegible] en este mismo [illegible] existen ejemplos [illegible] que muestran que [illegible] no pueden ser tratados con los resultados de Chebotarev y [illegible].

Siguiendo las ideas de Chebotarev y [illegible] son suficientes para que el operador [illegible] sobre el [illegible] por una familia de vectores [illegible] contenidos en su [illegible] que [illegible] de una separación de un [illegible] continuo de [illegible]. Nuestro enfoque es diferente [illegible] con el [illegible] de Chebotarev [illegible] problema en el marco de la teoría de operadores.

Describimos ahora el contenido del trabajo. El Capítulo 1 [illegible] los [illegible] sobre la teoría de [illegible] y algunos resultados [illegible]. En el Capítulo 2 se caracterizan [illegible] el caso de [illegible] constructivos y su multiplicidad [illegible] para que un operador [illegible] de [illegible] se aplica en el Capítulo 3, en el caso [illegible] y multiplicidad [illegible]. En el Capítulo 3 se define un nuevo [illegible] y se muestra que la [illegible] de [illegible]. En el Capítulo 4 se aplica [illegible] en los Capítulos [illegible] ejemplos que no pueden tratarse con [illegible] Chebotarev, también [illegible] se puede [illegible] obtener el [illegible].

Capítulo 1

Resultados preliminares

En este capítulo hacemos una brevísima revisión de los conceptos y principales resultados de la teoría de semigrupos fuertemente continuos en un espacio de Banach complejo. Después desarrollaremos los elementos necesarios de la teoría de espacios de Fock que utilizaremos posteriormente en el desarrollo de nuestro trabajo. Además se abordará el estudio de una clase de semigrupos de operadores que permiten modelar la dinámica de sistemas cuánticos que interaccionan con otro sistema.

1.1. Semigrupos fuertemente continuos

Definición 1.1.1. *Sea $\mathcal{B}$ un espacio de Banach, una familia 1-paramétrica $\{U_t\}_{t\geq 0}$, de operadores acotados en $\mathcal{B}$ es un semigrupo de operadores acotados en $\mathcal{B}$ si*
(i) $U_0 = I$, donde I es el operador identidad en $\mathcal{B}$.
(ii) $U_{s+t} = U_s \circ U_t$ para cada $s, t \geq 0$ (propiedad de semigrupo).

Definición 1.1.2. *Un semigrupo $\{U_t\}_{t\geq 0}$, de operadores acotados en $\mathcal{B}$ es fuertemente continuo si*

$$\lim_{t\to 0^+} U_t f = f \qquad \text{para cada } f \in \mathcal{B}.$$

Definición 1.1.3. *El operador lineal A definido por*

$$D(A) = \{f \in \mathcal{B} : \quad \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{U_t f - f}{t} \quad existe\}$$

y

$$Af = \lim_{t \to 0^+} \frac{U_t f - f}{t} = \frac{dU_t f}{dt}|_{t=0} \qquad para\, f \in D(A)$$

es el generador infinitesimal del semigrupo $\{U_t\}_{t \geq 0}$, $D(A)$ es el dominio de A.

Las demostraciones de los resultados que a continuación se enuncian se encuentran en [29] y [25]. Aquí sólo demostraremos algunos de ellos.

Teorema 1.1.4. *Sea $\{U_t\}_{t \geq 0}$ un semigrupo fuertemente continuo en $\mathcal{B}$. Existen constantes $\omega \geq 0$ y $M \geq 1$ tales que*

$$\|U_t\| \leq Me^{\omega t} \qquad para \quad t \geq 0.$$

Demostración. Primero mostraremos que existe una $\eta > 0$ tal que $\|U_t\|$ está acotada para $0 \leq t \leq \eta$. Si esto es falso, entonces existe una sucesión $\{t_n\}$ que satisface $t_n \geq 0$, $\lim_{n \to \infty} t_n = 0$ y $\|U_{t_n}\| \geq n$. Por el principio de acotación uniforme se sigue que para algún $f \in \mathcal{B}$, $|U_{t_n} f\|$ no está acotado, contradiciendo que $\{U_t\}_{t \geq 0}$ es fuertemente continuo. Así, $\|U_t\| \leq M$ para $0 \leq t \leq \eta$. Como $\|U_0\| = 1$, $M \geq 1$. Hagamos $\omega = \eta^{-1} \log M \geq 0$. Dado $t \geq 0$ tenemos $t = n\eta + \delta$ donde $0 \leq \delta < \eta$ y por la propiedad de semigrupo

$$\|U_t\| = \|U_\delta U_\eta^n\| \leq M^{n+1} \leq M \cdot M^{\frac{t}{\eta}} = Me^{\omega t}.$$

□

Corolario 1.1.5. *Si $\{U_t\}_{t \geq 0}$ es un semigrupo fuertemente continuo, entonces para cada $f \in \mathcal{B}$, $t \longmapsto U_t f$ es un función continua de $\mathbb{R}^+$ (el eje real no negativo) en $\mathcal{B}$.*

Teorema 1.1.6. *Sea $\{U_t\}_{t \geq 0}$ un semigrupo fuertemente continuo en $\mathcal{B}$ y sea A su generador infinitesimal. Entonces*
(a) Para cada $f \in \mathcal{B}$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} U_s f ds = U_t f.$$

(b) Para $f \in \mathcal{B}$,

$$\int_0^t U_s f ds \in D(A)$$

y

$$A(\int_0^t U_s f ds) = U_t f - f.$$

(c) Para $f \in D(A)$, $U_t f \in D(A)$ y

$$\frac{d}{dt} U_t f = A U_t f = U_t A f.$$

(d) Para $f \in D(A)$,

$$U_t f - U_s f = \int_s^t U_\tau A f d\tau = \int_s^t A U_\tau f d\tau.$$

Corolario 1.1.7. *Si A es el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo $\{U_t\}_{t \geq 0}$, entonces $D(A)$ es denso en $\mathcal{B}$ y A es un operador lineal cerrado.*

Teorema 1.1.8. *Sea A el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo $\{U_t\}_{t \geq 0}$. Si $D(A^n)$ es el dominio de A^n, entonces $\cap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ es denso en $\mathcal{B}$.*

Ejemplo (Semigrupo de Traslaciones) Sea $\mathcal{B}$ el espacio de Banach que consiste de las funciones acotadas y uniformemente continuas en $\mathbb{R}$, con la norma del supremo, $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}}\{|f(x)|\}$. Para $f \in \mathcal{B}$ definimos U_t para cada $t \geq 0$ por

$$(U_t f)(x) = f(x+t)$$

(i) Para $t = 0$ tenemos $U_0 = I$.
(ii) Para $s, t \geq 0$, y para $f \in \mathcal{B}$, $U_t((U_s f)(x)) = (U_t f)(x+s) = f(x+s+t) = (U_{s+t} f)(x)$, luego $\{U_t\}_{t \geq 0}$ es un semigrupo sobre $\mathcal{B}$.
(iii) Para $f \in \mathcal{B}$, $\lim_{t \to 0^+} U_t f = f$ pues f es continua en $\mathbb{R}$. Entonces $\{U_t\}_{t \geq 0}$ es un semigrupo fuertemente continuo.
El generador infinitesimal del semigrupo $\{U_t\}_{t \geq 0}$ está definido en

$$D(A) = \{f : \ f \in \mathcal{B}, \ f' \textit{ existe}, \ f' \in \mathcal{B}\}$$

por

$$(Af)(x) = f'(x).$$

•

1.2. El Teorema de Hille-Yosida

Sea $\{U_t\}_{t\geq 0}$ un semigrupo fuertemente continuo en $\mathcal{B}$. Por el Teorema 1.1.4 se tiene la existencia de constantes $\omega \geq 0$ y $M \geq 1$ tales que $\|U_t\| \leq Me^{\omega t}$ para $t \geq 0$. Si $\omega = 0$, $\{U_t\}_{t\geq 0}$ es llamado uniformemente acotado y si además $M = 1$ se llama semigrupo fuertemente continuo de contracciones. En esta sección se dará la caracterización del generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo de contracciones; así como condiciones sobre el comportamiento de la resolvente de un operador A, las cuales son necesarias y suficientes para que A sea el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones fuertemente continuo.

Si A es un operador lineal definido en $\mathcal{B}$ no necesariamente acotado, el conjunto resolvente $\rho(A)$ de A es el conjunto de los números complejos λ para los cuales $\lambda I - A$ es invertible, *i.e.*, $(\lambda I - A)^{-1}$ es un operador acotado sobre $\mathcal{B}$. La familia $R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$ de operadores acotados en $\mathcal{B}$ es llamada la resolvente de A.

El siguiente teorema es uno de los resultados más importantes en la teoría de semigrupos fuertemente continuos, la demostración de este teorema la podemos hallar en [29].

Teorema 1.2.1. *(Hille-Yosida) Un operador lineal no acotado A es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones fuertemente continuo $\{U_t\}_{t\geq 0}$ si y sólo si*
(a) A es cerrado y $\overline{D(A)} = \mathcal{B}$.
(b) El conjunto resolvente $\rho(A)$ de A contiene a $\mathbb{R}^+$ y para cada $\lambda \geq 0$

$$\|R_\lambda(A)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Denotaremos por $\mathcal{B}^*$ al dual del espacio de Banach $\mathcal{B}$ y para cada $x \in \mathcal{B}$ definimos el *conjunto dualidad* $F(x) \subseteq \mathcal{B}^*$ por

$$F(x) = \{x^* : x^* \in \mathcal{B}^* \text{ y } \langle x^*, x\rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}.$$

Definición 1.2.2. *Un operador A es disipativo si para cada $x \in D(A)$, existe un $x^* \in F(x)$ tal que $Re\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$.*

Tenemos el siguiente teorema, cuya demostración la podemos hallar en [29].

Teorema 1.2.3. *(Lumer-Phillips) Sea A un operador densamente definido en $\mathcal{B}$, entonces:*
(a) Si A es disipativo y existe $\lambda_0 > 0$, tal que $\mathcal{R}(\lambda_0 I - A) = \mathcal{B}$, entonces A es el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo de contracciones en $\mathcal{B}$.
(b) Si A es el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo de contracciones en $\mathcal{B}$, entonces $\mathcal{R}(\lambda I - A) = \mathcal{B}$ para cada $\lambda > 0$ y A es disipativo. Además, para cada $x \in D(A)$ y cada $x^* \in F(x)$, $Re\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$.

De aquí en adelante $\mathcal{H}$ será un espacio de Hilbert complejo separable con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ lineal en la segunda coordenada y norma $\| \cdot \|$.

Definición 1.2.4. *Sean $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ y A operadores autoadjuntos sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Diremos que $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ converge a A en la norma en el sentido de resolventes si $R_\lambda(A_n) \to R_\lambda(A)$ en la norma para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\Im m\lambda \neq 0$. Además diremos que $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ converge a A fuertemente en el sentido de resolventes si $R_\lambda(A_n) \to R_\lambda(A)$ fuertemente para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\Im m\lambda \neq 0$.*

Teorema 1.2.5. *Sean $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ y A operadores autoadjuntos y uniformemente acotados. Entonces $A_n \longrightarrow A$ en la norma en el sentido de resolventes si y sólo si $A_n \longrightarrow A$ en la norma de operadores.*

Tenemos el siguiente Teorema cuya demostración se puede hallar en [26].

Teorema 1.2.6. *Sean $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ y A operadores autoadjuntos sobre $\mathcal{H}$.*
(a) Si $A_n \to A$ en la norma en el sentido de resolventes y f es una función continua sobre $\mathbb{R}$ que se anula en ∞, entonces $\|f(A_n) - f(A)\| \to 0$.
(b) Si $A_n \to A$ fuertemente en el sentido de resolventes y f es una función continua y acotada en $\mathbb{R}$, entonces $f(A_n)\varphi \to f(A)\varphi$ para toda $\varphi \in \mathcal{H}$.

Teorema 1.2.7. *(Teorema de Stone) Sea $\{U_t\}_{t\geq 0}$ un grupo unitario fuertemente continuo de operadores sobre $\mathcal{H}$. Entonces, existe un único operador autoadjunto A sobre $\mathcal{H}$ tal que $U_t = e^{-itA}$ para cada $t \geq 0$.*

Demostración. Véase [31], página 222.

1.3. El espacio de Fock

En esta sección definiremos el espacio de Fock, el cual es un nuevo espacio de Hilbert que se construye a partir de un espacio de Hilbert dado, para ello empezaremos definiendo el producto tensorial de dos espacios de Hilbert y después, definiremos el espacio de Fock simétrico $\Gamma^s(L^2(\mathbb{R}))$, el cual resulta de gran importancia en los capítulos posteriores del presente trabajo.

Sean $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ espacios de Hilbert, para cada $\varphi_1 \in \mathcal{H}_1$ y $\varphi_2 \in \mathcal{H}_2$; $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ denota la forma bilineal que actúa sobre $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ por

$$(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(\psi_1, \psi_2) = \langle \psi_1, \varphi_1 \rangle_1 \langle \psi_2, \varphi_2 \rangle_2,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$ es el producto interno en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_i$.

Sea $\mathcal{E}$ el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas:

$$\mathcal{E} = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\varphi_{i_1} \otimes \varphi_{i_2}) : \ \forall i = 1, ..., n \quad \varphi_{i_1} \in \mathcal{H}_1, \, \varphi_{i_2} \in \mathcal{H}_2 \quad y \quad \alpha_i \in \mathbb{C}\}.$$

Definimos un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre $\mathcal{E}$ por

$$\langle \varphi \otimes \psi, \eta \otimes \mu \rangle = \langle \varphi, \eta \rangle_1 \langle \psi, \mu \rangle_2;$$

esta definición se extiende a todo $\mathcal{E}$ por bilinealidad y se puede probar que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ está bien definido y es positivo definido.

Definición 1.3.1. *Definimos el espacio $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ como la completación de $\mathcal{E}$ bajo el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ antes definido. $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ será llamado el producto tensorial de $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$; $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ es un espacio de Hilbert.*

Tenemos las dos siguientes proposiciones cuyas demostraciones se pueden hallar en [26].

Proposición 1.3.2. *Si $\{\varphi_k\}$ y $\{\psi_l\}$ son bases ortonormales de $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ respectivamente, entonces $\{\varphi_k \otimes \psi_l\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.*

Proposición 1.3.3. *Sean (M_1, μ_1) y (M_2, μ_2) espacios de medida, y consideremos los espacios $L^2(M_1, d\mu_1)$ y $L^2(M_2, d\mu_2)$. Entonces existe un único isomorfismo de $L^2(M_1, d\mu_1) \otimes L^2(M_2, d\mu_2)$ a $L^2(M_1 \times M_2, d\mu_1 \otimes d\mu_2)$ tal que $f \otimes g \mapsto f \cdot g$.*

Ejemplo Si $M_i = \mathbb{R}$ y μ_i es la medida de Lebesgue, entonces por la proposición anterior podemos decir que $L^2(\mathbb{R}^2)$ es isomorfo a $L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R})$.

Definición 1.3.4. *Si $\{\mathcal{H}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de espacios de Hilbert, definimos el espacio suma directa como el conjunto*

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} : x_n \in \mathcal{H}_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{\mathcal{H}_n}^2 < \infty\}.$$

El conjunto $\mathcal{H}$ es nuevamente un espacio de Hilbert bajo el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ dado por

$$\langle \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, y_n \rangle_{\mathcal{H}_n}.$$

Definición 1.3.5. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y denotemos por $\mathcal{H}^{\otimes^n}$ al producto tensorial de orden n, es decir, $\mathcal{H}^{\otimes^n} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}$. Sea $\mathcal{H}^0 = \mathbb{C}$ y definamos*

$$\Gamma(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{\otimes^n}.$$

$\Gamma(\mathcal{H})$ es llamado espacio de Fock sobre $\mathcal{H}$; éste será separable si $\mathcal{H}$ lo es.

Ejemplo Si $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$, entonces un elemento $\psi \in \Gamma(L^2(\mathbb{R}))$ es una sucesión de funciones

$$\psi = \{\psi_0, \psi_1, \psi_2, \cdots\}$$

donde $\psi_0 \in \mathbb{C}$, y para toda k, $\psi_k \in L^2(\mathbb{R}^k)$; de la Definición 1.3.4 se tiene que el producto interno y la norma en $\Gamma(\mathcal{H})$ son:

$$\langle \psi, \varphi \rangle_{\Gamma(\mathcal{H})} = \overline{\psi_0} \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \langle \psi_k, \varphi_k \rangle_{L^2(\mathbb{R}^k)},$$

$$\|\psi\|_{\Gamma(\mathcal{H})}^2 = |\psi_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \langle \psi_k, \psi_k \rangle_{\mathcal{H}^{\otimes k}}$$

$$= |\psi_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^k} |\psi_k(x_1, x_2, \cdots, x_k)|^2 dx_1 \cdots dx_k < \infty. \quad \bullet$$

Existe un subespacio de $\Gamma(\mathcal{H})$ que es de especial importancia, a saber, $\Gamma^s(\mathcal{H})$ el espacio de Fock simétrico el cual construiremos a continuación.

Sea P_n el conjunto de permutaciones de n elementos y $\{\varphi_k\}$ una base del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Para cada $\sigma \in P_n$ definiremos un operador (el cual también denotaremos por σ) sobre elementos básicos de $\mathcal{H}^{\otimes^n}$ por

$$\sigma(\varphi_{k_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{k_n}) = \varphi_{k_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes \varphi_{k_{\sigma(n)}}$$

y σ se extiende por linealidad a un operador acotado de norma 1 sobre $\mathcal{H}^{\otimes^n}$, de manera que podemos definir

$$S_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in P_n} \sigma.$$

Por la manera como se ha definido σ se tiene que $S_n^2 = S_n$ y $S_n^* = S_n$, así que S_n es una proyección ortogonal. El rango de S_n es llamado el producto tensorial simétrico de orden n de $\mathcal{H}$.

En el caso donde $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ y $\mathcal{H}^{\otimes^n} = L^2(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes L^2(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R}^n)$, $S_n\mathcal{H}^{\otimes^n}$ es justamente el subespacio de $L^2(\mathbb{R}^n)$ de todas las funciones invariantes bajo cualquier permutación de las variables; es decir, $f(x_1, ..., x_n) = f(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)})$ para cada $\sigma \in P_n$.

Definición 1.3.6. *Definimos el espacio de Fock simétrico sobre $\mathcal{H}$ (o espacio de Fock bosónico sobre $\mathcal{H}$) por*

$$\Gamma^s(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S_n\mathcal{H}^{\otimes^n}.$$

El espacio de Fock simétrico es un espacios de Hilbert. Los elementos de este nuevo espacio son llamados vectores de Fock.

1.4. Ecuaciones de evolución con condiciones en la frontera

En lo sucesivo $\mathbb{R}^n_*$ para cada $n \geq 1$ denotará al conjunto $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y dado un número real no nulo θ; en $\Gamma^s(L^2(\mathbb{R}_*))$ consideremos la familia de operadores acotados $\{U_t^\theta\}_{t\geq 0}$, donde para cada $t \geq 0$, $U_t^\theta : \Gamma^s(L^2(\mathbb{R}_*)) \longrightarrow \Gamma^s(L^2(\mathbb{R}_*))$ está definido para $\Psi \in \Gamma^s(L^2(\mathbb{R}_*))$, $\Psi = (\psi_0, \psi_1(x_1), \psi_2(x_1, x_2), \cdots)$ con cada ψ_n continua, mediante

$$U_t^\theta \Psi = (\psi_0, \psi_1(x_1, t), \psi_2(x_1, x_2, t), \cdots), \quad \text{donde para cada } n \geq 1,$$

$$\psi_n(x_1, \cdots, x_n, t) = \psi_n(x_1 + t, \cdots, x_n + t) \prod_{k=1}^{n} [e^{i\theta} I_{(-t,0)}(x_k) + I_{\mathbb{R}\setminus(-t,0)}(x_k)].$$

Aquí $I_{(-t,0)}(\cdot)$ denota la función indicadora del intervalo $(-t, 0)$. La definición de U_t^θ se extiende a todos los elementos de $\Gamma^s(L^2(\mathbb{R}_*))$ por densidad.

Puede considerarse que la familia de funciones $\Psi_t = U_t^\theta \Psi$, $t \geq 0$, describe la evolución de un flujo de fotones moviéndose en línea recta de derecha a izquierda y que éstos interactúan en el origen con otro sistema cuántico que les transmite un corrimiento de fase $e^{i\theta}$.

Proposición 1.4.1. *La familia de operadores $\{U_t^\theta\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo fuertemente continuo de operadores unitarios en $\Gamma^s(L^2(\mathbb{R}_*))$.*

Demostración. Primero probaremos que $\{U_t^\theta\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo. Para esto, dada la manera como actúa U_t^θ para cada $t \geq 0$ es suficiente probar que cada componente de $\Psi_t = U_t^\theta \Psi$, donde Ψ tiene componentes continuas, cumple las condiciones para ser un semigrupo, es decir, probaremos que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\psi_n(x_1, \cdots, x_n, t) = \psi_n(x_1 + t, \cdots, x_n + t) \prod_{k=1}^{n} [e^{i\theta} I_{(-t,0)}(x_k) + I_{\mathbb{R}\setminus(-t,0)}(x_k)]$$

es un semigrupo en $L^2(\mathbb{R}^n_*)$.

(i) De manera natural, se tiene que

$$(U_0^\theta \psi)_n(x_1, \cdots, x_n) = \psi_n(x_1, \cdots, x_n, 0)$$

$$= \psi_n(x_1+0,\cdots,x_n+0)\prod_{k=1}^{n}[e^{i\theta}I_{(-0,0)}(x_k)+I_{\mathbb{R}\setminus(-0,0)}(x_k)]$$

$$= \psi_n(x_1,\cdots,x_n) = (I\psi)_n(x_1,\cdots,x_n);$$

es decir, $U_0^\theta = I$.

(ii) Sean $s,t\in\mathbb{R}^+$, supongamos sin pérdida de generalidad que $s\neq t$, haciendo cálculos para $n\geq 1$ fija

$$(U_t^\theta(U_s^\theta\psi))_n(x_1,\cdots,x_n) = (U_t^\theta\psi)_n(x_1,\cdots,x_n,s)$$

$$= U_t^\theta(\psi_n(x_1+s,\cdots,x_n+s)\prod_{k=1}^{n}\{e^{i\theta}I_{(-s,0)}(x_k)+I_{\mathbb{R}\setminus(-s,0)}(x_k)\})$$

$$= \psi_n(x_1+s+t,\cdots,x_n+s+t)$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\{e^{i\theta}I_{(-s,0)}(x_k+t)+I_{\mathbb{R}\setminus(-s,0)}(x_k+t)\}\times\{e^{i\theta}I_{(-t,0)}(x_k)+I_{\mathbb{R}\setminus(-t,0)}(x_k)\}.$$

Haciendo cálculos en cada factor del producto anterior, tenemos

$$\{e^{i\theta}I_{(-s,0)}(x_k+t)+I_{\mathbb{R}\setminus(-s,0)}(x_k+t)\}\cdot\{e^{i\theta}I_{(-t,0)}(x_k)+I_{\mathbb{R}\setminus(-t,0)}(x_k)\}$$

$$= e^{i\theta}I_{(-s-t,0)}(x_k)+I_{\mathbb{R}\setminus(-s-t,0)}(x_k).$$

Por lo tanto,

$$(U_t^\theta(U_s^\theta\psi))_n(x_1,\cdots,x_n) = \psi_n(x_1+s+t,\cdots,x_n+s+t)$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\{e^{i\theta}I_{(-s-t,0)}(x_k)+I_{\mathbb{R}\setminus(-s-t,0)}(x_k)\} = (U_{t+s}^\theta\psi)_n(x_1,\cdots,x_n).$$

Esto muestra que en cada coordenada $\{U_t^\theta\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo y así $\{U_t^\theta\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo en $\Gamma^s(L^2(\mathbb{R}_*))$.

Ahora probaremos que $\{U_t^\theta\}_{t\geq 0}$ es fuertemente continuo. Observemos que se cumple la igualdad

$$e^{i\theta}I_{(-t,0)}(x)+I_{\mathbb{R}\setminus(-t,0)}(x) = e^{i\theta I_{(-t,0)}(x)}.$$

Ahora sea $\Psi = (\psi_0,\psi_1,...)$ donde para cada $n\geq 1$, $\psi_n\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, es decir, $|\psi_n(x_1,\cdots,x_n)|\leq M$ sobre el compacto K = soporte de ψ_n, calculando tenemos:

$$\|(U_t^\theta\psi)_n(x_1,\cdots,x_n)-\psi_n(x_1,\cdots,x_n)\|$$

$$= \|\psi_n(x_1+t,\cdots,x_n+t)\prod_{k=1}^{n} e^{i\theta I_{(-t,0)}(x_k)} - \psi_n(x_1,\cdots,x_n)\|$$

$$= \|\psi_n(x_1+t,\cdots,x_n+t)\prod_{k=1}^{n} e^{i\theta I_{(-t,0)}(x_k)} - \psi_n(x_1,\cdots,x_n)\prod_{k=1}^{n} e^{i\theta I_{(-t,0)}(x_k)}$$

$$+\psi_n(x_1,\cdots,x_n)\prod_{k=1}^{n} e^{i\theta I_{(-t,0)}(x_k)} - \psi_n(x_1,\cdots,x_n)\|$$

$$\leq \|\prod_{k=1}^{n} e^{i\theta I_{(-t,0)}(x_k)}\| \cdot |\psi_n(x_1+t,\cdots,x_n+t) - \psi_n(x_1,\cdots,x_n)|$$

$$+|\psi_n(x_1,\cdots,x_n)| \cdot \|\prod_{k=1}^{n} e^{i\theta I_{(-t,0)}(x_k)} - I\| < \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{n}{2}+1}} + \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}\cdot M}{M\cdot 2^{\frac{n}{2}+1}} = \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}}.$$

Pues tenemos que $|\psi_n(x_1+t,\cdots,x_n+t) - \psi_n(x_1,\cdots,x_n)| < \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{n}{2}+1}}$ cuando $t \to 0$ por continuidad de ψ_n; y como la norma del operador de multiplicación por la función $e^{i\theta I_{(-t,0)}(x_k)}$ es 1, entonces

$$\|\prod_{k=1}^{n} e^{i\theta I_{(-t,0)}(x_k)}\| = \|e^{i\theta\sum_{k=1}^{n} I_{(-t,0)}(x_k)}\| = 1.$$

y así

$$\|\prod_{k=1}^{n} e^{i\theta I_{(-t,0)}(x_k)} - I\| \longrightarrow 0 \quad \text{si}\, t \longrightarrow 0^+.$$

Ahora, para $\Psi \in \bigoplus_{n=0}^{\infty} C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tenemos, (usando la estimación del párrafo anterior en cada coordenada) cuando $t \to 0$

$$\|U_t^\theta\Psi - \Psi\|^2_{\Gamma^s(L^2(\mathbb{R}))}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\|\psi_k(x_1+t,\cdots x_k+t)\prod_{j=1}^{k} e^{i\theta I_{(-t,0)}(x_j)} - \psi_k(x_1,\cdots,x_k)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^k)} \leq \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{k}{2}}})^2 \to 0.$$

Consideremos para cada k fija, $\psi_k \in L^2(\mathbb{R}^k)$, por la densidad de $C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ en $L^2(\mathbb{R}^k)$ existe $\{\psi_{n,k}\} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ tal que $\psi_{n,k} \longrightarrow \psi_k$ cuando $n \to \infty$ en $L^2(\mathbb{R}^k)$, entonces

$$\|(U_t^\theta\psi)_k - \psi_k\| \leq \|(U_t^\theta\psi)_k - (U_t^\theta\psi)_{n,k}\| + \|(U_t^\theta\psi)_{n,k} - \psi_{n,k}\| + \|\psi_{n,k} - \psi_k\|$$

$$\leq 2\|\psi_k - \psi_{n,k}\| + \|(U_t^\theta\psi)_{n,k} - \psi_{n,k}\| < 2\frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon,$$

esto si consideramos un $n_0 \gg 1$ tal que $\|\psi_k - \psi_{n_0,k}\| < \frac{\epsilon}{3}$ y $|t| \ll 1$ tal que $\|(U_t^\theta \psi)_{n_0,k} - \psi_{n_0,k}\| < \frac{\epsilon}{3}$. La continuidad fuerte de $\{U_t^\theta\}_{t\geq 0}$ se obtiene mediante un argumento similar al de arriba.

Ahora demostraremos que $\{U_t^\theta\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo de operadores unitarios. Sin pérdida de generalidad podemos tomar Ψ, $\Phi \in \Gamma^s(L^2(\mathbb{R}_*))$ con coordenadas continuas; calculando

$$
\begin{aligned}
&\langle U_t^\theta \Psi, U_t^\theta \Phi\rangle_{\Gamma^s} = \langle \Psi_t, \Phi_t\rangle_{\Gamma^s} \\
&= \langle (\psi_0, \psi_1(x_1,t), \psi_2(x_1,x_2,t), \cdots), (\phi_0, \phi_1(x_1,t), \phi_2(x_1,x_2,t), \cdots)\rangle_{\Gamma^s} \\
&= \langle (\psi_0, \cdots, \psi_n(x_1+t, \cdots, x_n+t) \prod_{k=1}^{n} [e^{i\theta I_{(-t,0)}(x_k)}], \cdots), \\
&\qquad (\phi_0, \cdots, \phi_n(x_1+t, \cdots, x_n+t) \prod_{k=1}^{n} [e^{i\theta I_{(-t,0)}(x_k)}], \cdots)\rangle_{\Gamma^s} \\
&= \psi_0\overline{\phi_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \langle \psi_k(x_1+t, \cdots, x_k+t) \cdot e^{i\theta \sum_{j=1}^{k} I_{(-t,0)}(x_j)}, \\
&\qquad \phi_k(x_1+t, \cdots, x_k+t) \cdot e^{i\theta \sum_{j=1}^{k} I_{(-t,0)}(x_j)}\rangle_{L^2(\mathbb{R}^k)} \\
&= \psi_0\overline{\phi_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^k} \overline{\psi_k(x_1+t, \cdots, x_k+t)} e^{-i\theta \sum_{j=1}^{k} I_{(-t,0)}(x_j)} \\
&\qquad \times \phi_k(x_1+t, \cdots, x_k+t) e^{i\theta \sum_{j=1}^{k} I_{(-t,0)}(x_j)} \cdot dx_1 \cdots dx_k \\
&= \psi_0\overline{\phi_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^k} \overline{\psi_k(x_1+t, \cdots, x_k+t)} \cdot \phi_k(x_1+t, \cdots, x_k+t) \cdot dx_1 \cdots dx_k \\
&= \langle \Psi, \Phi\rangle_{\Gamma^s}.
\end{aligned}
$$

Así U_t^θ preserva el producto interno, por lo tanto $\{U_t^\theta\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo de operadores unitarios. □

En los capítulos posteriores abordaremos el estudio del generador infinitesimal de semigrupos fuertemente continuos de esta clase. Para mostrar algunas de las dificultades que tiene este problema consideraremos el caso donde la evolución se realiza sólo en el espacio $L^2(\mathbb{R}_*)$. Es decir, consideraremos la familia de operadores en $L^2(\mathbb{R}_*)$ definida por

$$(U_t^\theta \psi)(x) = \psi(x+t)[e^{i\theta} I_{(-t,0)}(x) + I_{\mathbb{R}\setminus(-t,0)}(x)], \quad \theta \neq 0 \quad y \quad t \geq 0.$$

En este caso tenemos el siguiente resultado cuya demostración es similar a la de la proposición anterior.

Proposición 1.4.2. *La familia* $\{U_t^\theta\}_{t\geq 0}$ *es un semigrupo fuertemente continuo de operadores unitarios en* $L^2(\mathbb{R}_*)$.

En lo sucesivo, $\mathcal{W}_{2,1}(\mathbb{R}_*)$ denotará el espacio de Sobolev de funciones absolutamente continuas con primera derivada en $L^2(\mathbb{R}_*)$. La siguiente proposición nos caracteriza el generador infinitesimal del semigrupo $\{U_t^\theta\}_{t\geq 0}$.

Proposición 1.4.3. *El generador infinitesimal del semigrupo fuertemente continuo* $\{U_t^\theta\}_{t\geq 0}$ *en* $L^2(\mathbb{R}_*)$ *es la cerradura del operador* ∂_x^θ *con dominio*

$$D_\theta = \{\varphi \in \mathcal{W}_{2,1}(\mathbb{R}_*) : \varphi(0^-) = e^{i\theta}\varphi(0^+)\},$$

tal que $\partial_x^\theta \varphi = \varphi'$ *para* $\varphi \in D_\theta$.

Demostración. Para $\varphi \in L^2(\mathbb{R}_*)$ tenemos que

$$(U_t^\theta\varphi)(x) = \begin{cases} \varphi(x+t) & si, x \notin (-t,0) \\ e^{i\theta}\varphi(x+t) & si, x \in (-t,0). \end{cases}$$

El subespacio denso D_θ de $L^2(\mathbb{R}_*)$ queda invariante bajo la acción del semigrupo. En efecto:

(1) Para $\varphi \in D_\theta$ y $t > 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} (U_t^\theta\varphi)(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{i\theta}\varphi(x+t) = e^{i\theta}\varphi(t).$$

$$\lim_{x\to 0^+} (U_t^\theta\varphi)(x) = \lim_{x\to 0^+} \varphi(x+t) = \varphi(t).$$

De lo anterior $(U_t^\theta\varphi)(0^-) = e^{i\theta}(U_t^\theta\varphi)(0^+)$, es decir, $(U_t^\theta\varphi)$ cumple la condición de frontera en D_θ.

(2) Para $\varphi \in D_\theta$, $(U_t^\theta\varphi)'(x) \in L^2(\mathbb{R}_*)$. En efecto,

$$\frac{d}{dx}(U_t^\theta\varphi)(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(U_t^\theta\varphi)(x+h) - (U_t^\theta\varphi)(x)}{h}$$

$$= \begin{cases} \text{lím}_{h\to 0} \frac{\varphi(x+h+t)-\varphi(x+t)}{h}, & x \notin (-t,0) \\ \text{lím}_{h\to 0} \frac{e^{i\theta}[\varphi(x+h+t)-\varphi(x+t)]}{h}, & x \in (-t,0) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \varphi'(x+t) & si\,, x \notin (-t,0) \\ e^{i\theta}\varphi'(x+t) & si\,, x \in (-t,0). \end{cases}$$

Ahora $\varphi'(x+t) \in L^2(\mathbb{R}_*)$, pues $\int_{\mathbb{R}_*} |\varphi'(x+t)|^2 dx < \infty$ a causa de que $\varphi \in \mathcal{W}_{2,1}(\mathbb{R}_*)$; además $\int_{\mathbb{R}_*} |e^{i\theta}\varphi'(x+t)|^2 dx = e^{2i\theta} \int_{\mathbb{R}_*} |\varphi'(x+t)|^2 dx < \infty$. Por lo tanto, $((U_t^\theta \varphi)(x))' \in L^2(\mathbb{R}_*)$.

(3) Ahora, para demostrar completamente la invarianza de D_θ debemos ver que $(U_t^\theta \varphi)(x)$ es absolutamente continua en $\mathbb{R}_*$. Para cada $x \in (-t,0)$, $\varphi(x+t)$ es absolutamente continua pues φ lo es; ahora, como θ es constante, entonces $e^{i\theta}\varphi(x+t)$ es absolutamente continua para $x \in (-t,0)$ teniendo en cuenta que φ lo es en $(-t,0)$.

Ahora, para $\varphi \in D_\theta$ tenemos:

$$\|\frac{1}{t}([U_t^\theta - I]\varphi)(x) - \partial_x^\theta \varphi(x)\|^2 = \int_{\mathbb{R}_*} |\frac{1}{t}([U_t^\theta - I]\varphi)(x) - \partial_x^\theta \varphi(x)|^2 dx$$

$$= \int_{-\infty}^{-t} |\frac{1}{t}([U_t^\theta - I]\varphi)(x) - \partial_x^\theta \varphi(x)|^2 dx + \int_{-t}^{0} |\frac{1}{t}([U_t^\theta - I]\varphi)(x) - \partial_x^\theta \varphi(x)|^2 dx$$

$$+ \int_0^\infty |\frac{1}{t}([U_t^\theta - I]\varphi)(x) - \partial_x^\theta \varphi(x)|^2 dx = \int_{-t}^{0} |\frac{1}{t}([U_t^\theta - I]\varphi)(x) - \partial_x^\theta \varphi(x)|^2 dx \longrightarrow 0$$

cuando $t \to 0$, las integrales sobre $(-\infty, -t]$ y $[0,\infty)$ tienden a cero cuando $t \to 0$ debido a que en estos intervalos podemos usar el bien conocido hecho de que ∂_x con dominio $\mathcal{W}_{2,1}(\mathbb{R})$ es el generador infinitesimal del grupo unitario $(V_t\varphi)(x) = \varphi(x+t)$, $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$. Ver [31], pg. 225.

Así, para cada $x \in (-t,0)$

$$\|\frac{1}{t}([U_t^\theta - I]\varphi)(x) - \partial_x^\theta \varphi(x)\|^2 = \|\frac{1}{t}(e^{i\theta}\varphi(x+t) - \varphi(x)) - \varphi'(x)\|^2$$

$$= \int_{-t}^{0} |\frac{1}{t}(e^{i\theta}\varphi(x+t) - \varphi(x)) - \varphi'(x)|^2 dx \longrightarrow 0 \quad si \quad t \to 0^+.$$

Para ver que este último límite tiende a cero definiremos una nueva función $\widetilde{\varphi}(x)$ dada por

$$\widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} e^{i\theta}\varphi(x) & si\,, x > 0 \\ \varphi(x), & si\,, x < 0. \end{cases}$$

Ahora, la última integral de la igualdad anterior es igual a

$$\int_{-t}^{0} |\frac{1}{t}(e^{i\theta}\varphi(x+t) - \varphi(x)) - \varphi'(x)|^2 dx = \int_{-t}^{0} |\frac{1}{t}(\widetilde{\varphi}(x+t) - \widetilde{\varphi}(x)) - \widetilde{\varphi}'(x)|^2 dx$$

la cual tiende a cero si $t \to 0^+$, a causa de que $\widetilde{\varphi}$ es absolutamente continua en $(-t, 0)$ y $\widetilde{\varphi'}$ pertenece a $L^2(\mathbb{R}_*)$.

Lo anterior demuestra que D_θ es una esencia para ∂_x^θ, el generador infinitesimal de U_t^θ. El Teorema 1.2.1 (Hille-Yosida) nos asegura que este operador es cerrado. De aquí se sigue el resultado de la proposición.

$\square$

En el próximo capítulo extenderemos este resultado para el semigrupo U_t^θ en el espacio de Fock $\Gamma^s(L^2(\mathbb{R}_*))$.

Capítulo 2

Coeficientes acotados sin multiplicidad

2.1. Introducción

Los resultados de este capítulo se encuentran en [17].

Una Ecuación Diferencial Estocástica Cuántica (EDEC) del tipo Hudson-Parthasarathy [28] tiene la forma,

$$\begin{aligned} dV_t &= [(W-I)d\Lambda_t - L^*W dA_t + L dA_t^\dagger - (iH + \frac{1}{2}L^*L)dt]V_t, \\ V_0 &= I. \end{aligned}$$

Donde W, L y H son operadores en un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$ y $d\Lambda_t$, dA_t, $dA_t^\dagger$ son las diferenciales estocásticas básicas en el espacio de Fock simétrico $\Gamma^s(L^2(\mathbb{R}_+))$, véase la página 125 de [22]. La solución $\{V_t\}_{t\geq 0}$ de esta EDEC es un proceso adaptado de operadores en $\Gamma^s(L^2(\mathbb{R}_+)) \otimes \mathcal{H}$ que describe la evolución total del sistema cuántico junto con su medio ambiente. Existe un grupo unitario fuertemente continuo $\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ relacionado con $\{V_t\}_{t\geq 0}$. El grupo unitario U_t se construye introduciendo sobre $\Gamma^s(L^2(\mathbb{R}))$ la segunda cuantización Θ_t , véase [28], del operador de corrimiento θ_t en $L^2(\mathbb{R})$ y definiendo

$$U_t = \begin{cases} \Theta_t V_t & si\,, t \geq 0 \\ V_{|t|}^* \Theta_t & si\,, t < 0 \end{cases}$$

donde Θ_t es identificado con $\Theta_t \otimes I$ sobre $\Gamma^s(L^2(\mathbb{R})) \otimes \mathcal{H}$.

La continuidad fuerte de V_t, Θ_t y la propiedad de cociclo de V_t aseguran la continuidad fuerte de U_t en $\Gamma^s(L^2(\mathbb{R})) \otimes \mathcal{H}$, ver [3], [11], [24].

Por el teorema de Stone, $\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ es generado por un operador autoadjunto C, entonces para cada $t \in \mathbb{R}$, tenemos formalmente

$$U_t = e^{-itC}.$$

El problema de la caracterización del operador C permaneció abierto alrededor de quince años. La principal dificultad es que C es un operador singular y su dominio se describe usando condiciones de frontera; A. M. Chebotarev [6] encontró recientemente la forma explícita de dicho operador, y probó que éste se puede obtener como el límite fuerte en el sentido de resolventes de una familia de operadores autoadjuntos C^α, $\alpha > 0$. Una manera diferente de atacar este problema se puede encontrar en [18] y [19] donde se consideró el caso de multiplicidad arbitraria y un sistema de operadores acotados. En la sección 2.2 daremos una caracterización alternativa de C usando un enfoque diferente que permite fácilmente determinar un dominio esencial para él. En la sección 2.3 proporcionamos un ejemplo donde los índices de defecto del operador simétrico C se pueden calcular de manera explícita, además obtenemos una condición suficiente que asegura que iC es la restricción de un generador de un semigrupo de contracciones fuertemente continuo.

2.2. El generador infinitesimal de $\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$

Consideraremos el caso sin multiplicidad, es decir, $L = 0$, y W es un operador unitario que conmuta con el operador autoadjunto y acotado H, el Hamiltoniano del sistema. El grupo unitario asociado con la EDEC es definido para cada $t \in \mathbb{R}$ por [6],

$$U_t\Psi = (\psi_0, U_{t,1}\psi_1, U_{t,2}\psi_2, ..., U_{t,n}\psi_n, ...)$$

donde

$$\Psi = (\psi_0, \psi_1, \psi_2, ..., \psi_n, ...) \in \Gamma^s(L^2(\mathbb{R}_*)) \otimes \mathcal{H}$$

con ψ_n continua para cada $n \geq 1$, $\psi_0 \in \mathbb{C}$ y $\mathbb{R}_* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $\mathbb{R}^n_*$ es el espacio euclidiano n-dimensional sin los planos coordenados. Para cada $n \geq 1$ tenemos,

$$U_{t,n} = \begin{cases} U_{t,n} & si\,, t \geq 0 \\ U^*_{|t|,n} & si\,, t < 0 \end{cases}$$

donde

$$(U_{t,n}\psi_n)(x_1,...,x_n) = e^{-itH}\bigotimes_{j=1}^{n}\{I_{(-t,0)}(x_j)v(x_j+t)W+I_{\mathbb{R}\setminus(-t,0)}(x_j)v(x_j+t)\}\otimes h,$$

aquí e^{-itH} y W son identificados con $I\otimes e^{-itH}$ y $I\otimes W$, respectivamente, I_A denota la función indicadora del conjunto A y $\psi_n(x_1,...x_n) = v(x_1)\otimes ...\otimes v(x_n)\otimes h$, $h\in\mathcal{H}$. La definición de $U_{t,n}$ se extiende por densidad a todo $L^2(\mathbb{R}_*^n)\otimes\mathcal{H}$ para cada $n\in\mathbb{N}$.

Primero trabajaremos con el subespacio de n-partículas de $L^2(\mathbb{R}_*^n)\otimes\mathcal{H}$, para cada $n\geq 1$. Consideraremos el subespacio denso de $\Gamma^s(L^2(\mathbb{R}_*))\otimes\mathcal{H}$ dado por

$$\mathbb{F} = \{\Psi\in\Gamma^s(L^2(\mathbb{R}_*))\otimes\mathcal{H} : \exists \quad k\in\mathbb{N} \quad tal \quad que \quad \psi_n = 0 \quad \forall \quad n>k\}.$$

Lema 2.2.1. *Sea $v\in\mathcal{W}_{2,1}(\mathbb{R}_*)$, entonces los límites por la derecha y por la izquierda en cero $v(0^\pm)$ existen y además*

$$|v(0^\pm)|^2 \leq \|v\|\|v'\| \leq \|v\|_{2,1}^2,$$

donde $\|\cdot\|_{2,1}$ denota la norma en $\mathcal{W}_{2,1}(\mathbb{R}_*)$.

Demostración. Demostraremos la estimación para $|v(0^-)|$, la estimación para $|v(0^+)|$ es similar. Para $c,x\in(-\infty,0)$, $x<c$, tenemos que $\int_x^c \bar{v}(s)v'(s)ds = \frac{1}{2}(|v(c)|^2 - |v(x)|^2)$, por lo tanto $\lim_{x\to-\infty}|v(x)| = 0$ puesto que $v\in\mathcal{W}_{2,1}(\mathbb{R}_*)$. Usando la desigualdad de Schwarz obtenemos $|v(0^-)|^2 = 2\int_{-\infty}^0 \bar{v}(s)v'(s)ds \leq 2\|v\|\|v'\| \leq \|v\|_{2,1}^2$. □

Para $v_j\in\mathcal{W}_{2,1}(\mathbb{R}_*)$, $j=1,...,n$, definimos

$$A_j^\pm v_1\otimes...\otimes v_n = v_j(0^\pm)v_1\otimes...\otimes\widehat{v_j}\otimes...\otimes v_n,$$

donde el tilde $\widehat{\ }$ significa que el factor correspondiente es omitido.

Como consecuencia del lema anterior tenemos

$$\|A_j^\pm v_1\otimes...\otimes v_n\|^2 = |v_j(0^\pm)|^2\|v_1\otimes...\otimes\widehat{v_j}\otimes...\otimes v_n\|^2 \leq \|v_1\|_{2,1}^2\cdots\|v_n\|_{2,1}^2,$$

por lo tanto $A_j^\pm$ puede extenderse a operadores acotados de $\mathcal{W}_{2,1}(\mathbb{R}_*)^{\otimes^n}$ en $L^2(\mathbb{R}_*^{n-1})$ y $\|A_j^\pm\|\leq 1$.

Lema 2.2.2. *Para cada* $\phi \in \mathcal{W}_{2,1}(\mathbb{R}_*)^{\otimes^n}$ *tenemos que* $A_j^{\pm}\phi(x_1,...,\widehat{x_j},...,x_n) = \phi(x_1,...,0^{\pm},...,x_n)$ *para* $1 \leq j \leq n$.

Demostración. La conclusión claramente se cumple para cada combinación lineal finita de tensores simples. Para un elemento en general $\phi \in \mathcal{W}_{2,1}(\mathbb{R}_*)^{\otimes^n}$ existe una sucesión de combinaciones lineales finitas de tensores simples $(\phi_k)_{k\geq 1}$ que converge a ϕ en $\mathcal{W}_{2,1}(\mathbb{R}_*)^{\otimes^n}$. Tomando subsucesiones podemos asegurar que $(\phi_k)_{k\geq 1}$ converge casi en todas partes en $\mathbb{R}_*$ y que $(\partial_j\phi_k)_{k\geq 1}$ también converge casi en todas partes. La continuidad absoluta de ϕ y ϕ_k para cada $k \geq 0$, implica que para cada $x > 0$:

$$\lim_k A_j^+\phi_k(x_1,...,\widehat{x_j},...,x_n)$$

$$= \lim_k \phi_k(x_1,...,x_j,...,x_n) - \lim_k \int_0^{x_j} \partial_j\phi_k(x_1,...,t,...,x_n)dt$$

$$= \phi(x_1,...,x_j,...,x_n) - \int_0^{x_j} \partial_j\phi(x_1,...,t,...,x_n)dt = \phi(x_1,...,0^+,...,x_n),$$

casi en todas partes.
Si fuera necesario tomamos nuevamente una subsucesión y obtenemos que

$$\phi(x_1,...,0^+,...,x_n) = \lim_k A_j^+\phi_k(x_1,...,\widehat{x_j},...,x_n) = A_j^+\phi(x_1,...,\widehat{x_j},...,x_n),$$

puntualmente. Esto prueba el resultado para A_j^+. Un argumento similar se necesita para A_j^-. □

Denotamos por $\mathcal{W}_{2,1}^s$ el subconjunto de aquellos vectores en $\Gamma^s(L^2(\mathbb{R}_*))$ cuya n-ésima componente pertenece al espacio de Sobolev $\mathcal{W}_{2,1}(\mathbb{R}_*^n)$. El espacio $\mathcal{W}_{2,1}(\mathbb{R}_*)^{\otimes^n}$ está densa y continuamente inmerso en $\mathcal{W}_{2,1}(\mathbb{R}_*^n)$, por lo tanto la definición anterior puede extenderse para obtener un operador acotado $A_j^{\pm}$ de $\mathcal{W}_{2,1}(\mathbb{R}_*^n)$ sobre $L^2(\mathbb{R}_*^{n-1})$ y el resultado del Lema 2.2.2 también se tiene para cada $\phi \in \mathcal{W}_{2,1}(\mathbb{R}_*^n)$.

Usaremos en el presente trabajo la identificaciones naturales $L^2(\mathbb{R}_*^n,\mathcal{H}) = L^2(\mathbb{R}_*^n)\otimes\mathcal{H}$, $\mathcal{W}_{2,1}(\mathbb{R}_*^n,\mathcal{H}) = \mathcal{W}_{2,1}(\mathbb{R}_*^n)\otimes\mathcal{H}$ y $C_0^\infty(\mathbb{R}_*^n,\mathcal{H}) = C_0^\infty(\mathbb{R}_*^n)\otimes\mathcal{H}$.

Sea C_n, $n \in \mathbb{N}$, el operador $C_n = \sum_{k=1}^n i\partial_{x_k} + H$ con dominio

$$D_n = \{\psi_n \in \mathcal{W}_{2,1}^s(\mathbb{R}_*^n)\otimes\mathcal{H} : A_j^-\psi_n = WA_j^+\psi_n, 1 \leq j \leq n\}.$$

La condición de frontera $A_j^- \psi_n = W A_j^+ \psi_n$, $1 \leq j \leq n$, es el resultado de la interacción del sistema cuántico con su medio ambiente la cual asumiremos que está asociada con la acción del operador unitario W.

Teorema 2.2.3. *La cerradura del operador iC en $\Gamma^s(L^2(\mathbb{R}_*)) \otimes \mathcal{H}$ definido por $C\Psi = (0, C_1\psi_1, ..., C_n\psi_n, ...)$ sobre $\mathcal{D} = \{\Psi \in \mathbb{F} : \psi_j \in D_j, \quad j \in \mathbb{N}\}$ es el generador infinitesimal del grupo unitario fuertemente continuo $\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$.*

Por lo tanto $\bar{C}$ es un operador autoadjunto y $\mathcal{D}$ es un dominio esencial para él. Como lo dijimos antes, para demostrar este teorema trabajaremos con el subespacio de n-partículas.

Proposición 2.2.4. *La cerradura del operador $iC_n = -\sum_{k=1}^n \partial_{x_k} + iH$ con dominio D_n es el generador infinitesimal del grupo unitario fuertemente continuo $\{U_{t,n}\}_{t\in\mathbb{R}}$ en $L^2(\mathbb{R}_*^n)$.*

Demostración. Es suficiente demostrar que D_n es un dominio esencial para $\bar{C}_n$. Debido a un resultado bien conocido acerca de dominios esenciales de generadores infinitesimales, ver [4], Corolario 3.1.7, p. 167, es suficiente demostrar que

1. D_n es denso en $L^2(\mathbb{R}_*^n) \otimes \mathcal{H}$.

2. D_n es invariante bajo la acción $U_{t,n}$.

3. $D_n \subset D(\bar{C}_n)$, donde $D(\bar{C}_n)$ es el dominio de $\bar{C}_n$.

Como $C_0^\infty(\mathbb{R}_*^n; \mathcal{H}) \subset D_n$, por lo tanto D_n es un subespacio denso de $L^2(\mathbb{R}_*^n; \mathcal{H})$ y (1) es cierto.

Para $\psi_n \in \mathcal{W}_{2,1}(\mathbb{R}_*^n) \otimes \mathcal{H}$, la acción de $U_{t,n}$ para $t \geq 0$ esta dada por

$$U_{t,n}\psi_n(x_1, ..., x_n) = e^{-itH} W^l \psi_n(x_1 + t, ..., x_n + t),$$

donde $l = \#\mathfrak{k}$, con $\mathfrak{k} = \{k \in \{1, ..., n\} : \quad x_k \in (-t, 0)\}$. El subespacio $\mathcal{W}_{2,1}(\mathbb{R}_*^n) \otimes \mathcal{H}$ es invariante bajo la acción de $U_{t,n}$, por lo tanto para probar (2) es suficiente verificar que $\Psi_{t,n} = U_{t,n}\psi_n$ satisface las condiciones de frontera. Para $1 \leq j \leq n$ tenemos que

$$A_j^- \Psi_{t,n} = e^{-itH} W^l A_j^- \psi_n = e^{-itH} W^l W A_j^+ \psi_n = W A_j^+ \Psi_{t,n},$$

donde $A_j^\pm$ se identifica con $A_j^\pm \otimes I$ y hemos usado que e^{-itH} y W conmutan con $A_j^\pm$ pues ellos actúan sobre diferentes factores. Cálculos similares se tienen para el caso $t < 0$, por lo tanto $\Psi_{t,n}$ satisface las condiciones de frontera en D_n.

Tomando $\psi_n \in D_n$, y para $1 \leq j \leq n$, definimos $Q_j = \mathbb{R}_* \times \cdots \times \underbrace{(-t,0)}_{j} \times \cdots \times \mathbb{R}_*$, por lo tanto tenemos que

$$\|\frac{1}{t}(\{U_{t,n} - I\}\psi_n) - (iC_n\psi_n)\|^2$$

$$= \int_{\mathbb{R}_*^n} |\frac{1}{t}(\{U_{t,n} - I\}\psi_n)(x_1, ..., x_n) - (iC_n\psi_n)(x_1, ..., x_n)|^2 dx_1 \ldots dx_n$$

$$= \int_{\bigcup_{j=1}^n Q_j} |\frac{1}{t}(\{U_{t,n} - I\}\psi_n)(x_1, ..., x_n) - (iC_n\psi_n)(x_1, ..., x_n)|^2 dx_1 \ldots dx_n$$

$$+ \int_{\mathbb{R}_*^n \setminus \bigcup_{j=1}^n Q_j} |\frac{1}{t}(\{U_{t,n} - I\}\psi_n)(x_1, ..., x_n) - (iC_n\psi_n)(x_1, ..., x_n)|^2 dx_1 \ldots dx_n,$$

donde $|\cdot|$ denota la norma en $\mathcal{H}$.

La segunda integral tiende a cero cuando $t \to 0$ pues el operador $iC_n = -\sum_{k=1}^n \partial_{x_k} + iH$ con dominio $\mathcal{W}_{2,1}^s(\mathbb{R}_*^n) \otimes \mathcal{H}$ es el generador infinitesimal del grupo unitario definido por $(V_{t,n}\psi_n)(x_1, ..., x_n) = e^{-itH}\psi_n(x_1 + t, ..., x_n + t)$, para $\psi_n \in L^2(\mathbb{R}_*^n) \otimes \mathcal{H}$, continua.

Para cada $\{k_1, \cdots, k_m\} \subset \{1, \cdots, n\}$, $1 \leq m \leq n$, definimos la familia de subconjuntos ajenos

$$R_{\{k_1,\cdots,k_m\}} = \{(x_1, \cdots, x_n) : x_{k_s} \in (-t, 0), 1 \leq s \leq m,$$

$$\text{y } x_{k_r} \notin (-t, 0) \text{ para } k_r \notin \{k_1, \cdots, k_m\}\}.$$

Tenemos que $R_{\{1,\cdots,n\}} = \cap_{j=1}^n Q_j$, y $\cup_{j=1}^n Q_j = \cup_{m=1}^n \cup_{\{k_1,\cdots,k_m\}} R_{\{k_1,\cdots,k_m\}}$. Para estimar la primera integral introduciremos las funciones

$$\widetilde{\psi}_{\{k_1,\cdots,k_m\}}(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} W^m\psi_n(x_1, \ldots, x_m), & \text{si } (x_1, \cdots, x_n) \in S_{\{k_1,\cdots,k_m\}} \\ \psi_n(x_1, \cdots, x_n) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $S_{\{k_1,\cdots,k_m\}} = \{(x_1, \cdots, x_n) : x_{k_s} > 0, 1 \leq s \leq m\}$.

Por lo tanto tenemos que

$$\int_{\bigcup_{j=1}^n Q_j} |\frac{1}{t}(\{U_{t,n} - I\}\psi_n)(x_1, ..., x_n) - (iC_n\psi_n)(x_1, ..., x_n)|^2 dx_1 \ldots dx_n$$

$$=\sum_{m=1}^{n}\sum_{\{k_1,\cdots,k_m\}}\int_{R_{\{k_1,\cdots,k_m\}}}|\frac{1}{t}\{e^{-itH}W^m\psi_n(x_1+t,...,x_n+t)\cdot h-\psi_n(x_1,...,x_n)\}-$$
$$(iC_n\psi_n)(x_1,...,x_n)|^2dx_1\ldots dx_n$$
$$=\sum_{m=1}^{n}\sum_{\{k_1,\cdots,k_n\}}\int_{R\{k_1,\cdots,k_n\}}|\frac{1}{t}\{e^{-itH}\widetilde{\psi}(x_1+t,...,x_n+t)-\widetilde{\psi}(x_1,...,x_n)\}-$$
$$(iC_n\widetilde{\psi})(x_1,...,x_n)|^2dx_1\ldots dx_n,$$

donde escribimos simplemente $\widetilde{\psi}$ en lugar de $\widetilde{\psi}_{\{k_1,\cdots,k_m\}}$. La última integral tiende a cero cuando $t\to 0$ debido a que el operador iC_n con dominio $\mathcal{W}^s_{2,1}(\mathbb{R}^n_*)\otimes\mathcal{H}$ es el generador infinitesimal del grupo unitario $(V_t)_{t\in\mathbb{R}}$, en $L^2(\mathbb{R}^n_*)\otimes\mathcal{H}$ definido antes. $D_n\subset D(\bar{C}_n)$ y esto finaliza la demostración. □

Observación 2.2.5. *La familia de subconjuntos $R_{\{k_1,\ldots,k_n\}}$ es semejante a la idea de las cámaras de Fock definidas por A.M. Chebotarev en [6].*

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.2.3. Para demostrar el Teorema 2.2.3 es suficiente demostrar que,

1. $\mathcal{D}$ es denso en $\Gamma^s(L^2(\mathbb{R}_*))\otimes\mathcal{H}$.
2. $\mathcal{D}$ es invariante bajo la acción de U_t.
3. $\mathcal{D}\subset D(\bar{C})$, donde $D(\bar{C})$ es el dominio de $\bar{C}$.

Sea $\Psi=(\psi_0,\psi_1,...,\psi_n,...)\in\Gamma^s(L^2(\mathbb{R}_*))\otimes\mathcal{H}$, por lo tanto $\sum_{j=1}^{\infty}\|\psi_j\|^2_{L^2(\mathbb{R}^j_*;\mathcal{H})}<\infty$ y dado un $\epsilon>0$, $\exists k_\epsilon\in\mathbb{N}$ tal que $\sum_{j=k_\epsilon+1}^{\infty}\|\psi_j\|^2_{L^2(\mathbb{R}^j_*;\mathcal{H})}<\frac{\epsilon}{2}$. Además como D_j es denso en $L^2(\mathbb{R}^j_*,\mathcal{H})$, para cada $j\in\mathbb{N}$, $\exists\varphi_j\in D_j$ tal que se cumple $\|\varphi_j-\psi_j\|^2_{L^2(\mathbb{R}^j_*;\mathcal{H})}<\frac{\epsilon}{2(k_\epsilon+1)}$.
Sea $\Phi_\epsilon=(\varphi_0,...,\varphi_{k_\epsilon},0,...)\in\mathcal{D}$, por lo tanto,

$$\|\Phi_\epsilon-\Psi\|^2_{\Gamma^s(L^2(\mathbb{R}_*))\otimes\mathcal{H}}=\sum_{j=0}^{k_\epsilon}\|\varphi_j-\psi_j\|^2_{L^2(\mathbb{R}^j_*;\mathcal{H})}$$

$$+\sum_{j=k_\epsilon+1}^{\infty}\|\psi_j\|^2_{L^2(\mathbb{R}^j_*;\mathcal{H})}<\frac{\epsilon(k_\epsilon+1)}{2(k_\epsilon+1)}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon.$$

Así $\mathcal{D}$ es denso en $\Gamma^s(L^2(\mathbb{R}_*))\otimes\mathcal{H}$.

Para $\Psi \in \mathcal{D}$, $\Psi = (\psi_0, \psi_1, ..., \psi_n, ...)$ donde $\psi_j \in D_j$, $\quad \forall j \geq 1$, $\psi_0 \in \mathbb{C}$. Tenemos que $U_t\Psi = (\psi_0, U_{t,1}\psi_1, ..., U_{t,n}\psi_n, ...)$ y el resultado de la Proposición 2.2.4 implica que $U_{t,j}\psi_j \in D_j$ para cada $j \geq 1$, por lo tanto $U_t\Psi \in \mathcal{D}$ para cada $t \in \mathbb{R}$ y $\Psi \in \mathcal{D}$. Como $\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ deja a $\mathcal{D}$ invariante. Nos resta demostrar que $\mathcal{D} \subset D(\bar{C})$. Sea $\Psi \in \mathcal{D}$, por lo tanto $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $\Psi = (\psi_0, ..., \psi_k, 0, ...)$ con $\psi_j \in D_j$, $j = 1, 2, ..., k$. Dado $\epsilon > 0$, $\exists t_j(\epsilon) > 0$ tal que

$$\|\frac{1}{t}[U_{t,j}\psi_j - \psi_j] - iC_j\psi_j\|^2_{L^2(\mathbb{R}^j_*;\mathcal{H})} < \frac{\epsilon}{k} \qquad \text{si} \quad |t| < t_j(\epsilon).$$

Entonces si $|t| < \min\{t_j(\epsilon)\}_{j=1}^k$, se cumple

$$\|\frac{1}{t}[U_t - I]\Psi - iC\Psi\|^2_{\Gamma^s(L^2(\mathbb{R}_*))\otimes\mathcal{H}} = \sum_{j=1}^{k} \|\frac{1}{t}[U_{t,j}\psi_j - \psi_j] - iC_j\psi_j\|^2_{L^2(\mathbb{R}^j_*)\otimes\mathcal{H}}$$

$$< \sum_{j=1}^{k} \frac{\epsilon}{k} = \epsilon.$$

Por lo tanto $\Psi \in D(\bar{C})$. □

2.3. Índices de defecto de C

El problema de la autoadjunticidad de C en el caso en que H es un operador simétrico no acotado es mucho más delicado. En [7] A. M. Chebotarev estudió condiciones suficientes que aseguran la autoadjunticidad de C, la propiedad de isometría del semigrupo asociado y la conservatividad de dos semigrupos dinámicos cuánticos canonicamente asociados con C. En esta sección expondremos un ejemplo que muestra que en algunos casos el operador C no es autoadjunto y que iC puede no ser el generador de un semigrupo fuertemente continuo de isometrías. El siguiente ejemplo fue discutido en un contexto diferente en [6], también véase [14].

En el espacio de Hilbert $L^2(0, \infty)$ consideraremos operadores inducidos por la forma diferencial

$$\tau_f u = \frac{1}{2i}\left((fu)' + fu'\right),$$

donde $f \in C^\infty(0, \infty)$, $f > 0$, f' es acotada y $\int_0^\infty dx f(x)^{-1} = \infty$. Notemos que las funciones de la forma $f(x) = (1 + x)^\alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1$, satisfacen estas

condiciones. Denotaremos por $H_{1,0}$ y H_1 los operadores minimal y maximal respectivamente, inducidos por τ_f.
El operador maximal H_1 inducido por τ_f está definido por

$$\mathrm{dom} H_1 = \{u \in L^2(0,\infty) : u \text{ es absolutamente continua y } \tau_f u \in L^2(0,\infty)\}$$

y

$$H_1 u = \tau_f u, \quad u \in \mathrm{dom} H_1.$$

El operador minimal, inducido por τ_f se define por

$$\mathrm{dom} H_{1,0} = C_0^\infty(0,\infty) \quad \text{y} \quad H_{1,0} u = \tau_f u, \qquad u \in \mathrm{dom} H_{1,0}.$$

Notemos que

$$\mathrm{dom} \bar{H}_{1,0} = \{u \in \mathrm{dom} H_1 : \ u(0) = 0\},$$

véase, para esto [31], Teorema 6.31.
A continuación se demostrará que $H_{1,0}$ es un operador simétrico; por lo tanto es cerrable y su cerradura $\bar{H}_{1,0}$ es también simétrico, además $\bar{H}_{1,0}^* = H_{1,0}^* = H_1$.

Lema 2.3.1. *$k \in R(H_{1,0}) \iff k \in C_0^\infty(0,\infty)$ y $\int_0^\infty f(x)^{-\frac{1}{2}} k(x) dx = 0$.*

Demostración. Si $k = H_{1,0} u$, $u \in C_0^\infty(0,\infty)$ entonces $k \in C_0^\infty(0,\infty)$ y

$$\int_0^\infty f(x)^{-\frac{1}{2}} k(x) dx = \int_0^\infty f(x)^{-\frac{1}{2}} (\tau_f(u))(x) dx$$

$$= \frac{1}{2i} f(x)^{\frac{1}{2}} u(x) /_0^\infty + \int_0^\infty \tau_f (f^{-\frac{1}{2}})(x)^* u(x) dx = 0,$$

pues

$$\tau_f f^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2i}((f^{\frac{1}{2}})' + f(f^{-\frac{1}{2}})') = \frac{1}{2i}(\frac{1}{2} f^{-\frac{1}{2}} f' - \frac{1}{2} f f^{-\frac{3}{2}} f')$$

$$= \frac{1}{2i}(\frac{1}{2} f^{-\frac{1}{2}} f' - \frac{1}{2} f^{-\frac{1}{2}} f') = 0.$$

Inversamente, supongamos $k \in C_0^\infty(0,\infty)$ es tal que $\int_0^\infty f(x)^{-\frac{1}{2}} k(x) dx = 0$, sea $[\alpha, \beta]$ un intervalo compacto que contiene al soporte de k. Sea

$$u(x) = i f(x)^{-\frac{1}{2}} \int_0^x \frac{k(t)}{f(t)^{\frac{1}{2}}} dt.$$

Obviamente tenemos que $u \in C^\infty(0,\infty)$ y $u(x) = 0$ para cada $x \in (0,\alpha]$. Para $x \in [\beta,\infty)$ tenemos

$$u(x) = if(x)^{-\frac{1}{2}} \int_0^x \frac{k(t)}{f(t)^{\frac{1}{2}}}dt = if(x)^{-\frac{1}{2}} \int_\alpha^\beta \frac{k(t)}{f(t)^{\frac{1}{2}}}dt$$

$$= if(x)^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty \frac{k(t)}{f(t)^{\frac{1}{2}}}dt = 0.$$

Por lo tanto $u \in C_0^\infty(0,\infty)$ y $k = \tau_f u$; es decir $k \in R(H_{1,0})$. □

Proposición 2.3.2. *Para $H_{1,0}$ y H_1 los operadores maximal y minimal respectivamente, inducidos por la forma diferencial τ_f, tenemos:*
(i) $H_{1,0}$ es un operador simétrico,
(ii) $\overline{H}^*_{1,0} = H^*_{1,0} = H_1$.

Demostración. (i) Sean $u, v \in \mathrm{domH_{1,0}}$

$$\langle u, H_{1,0}v\rangle = \int_0^\infty \frac{u(x)^*}{2i}\{(fv)'(x) + f(x)v'(x)\}dx$$

$$= u(x)^* f(x)v(x)/_0^\infty - \int_0^\infty \frac{u'(x)^*}{2i} f(x)v(x)dx + \frac{1}{2i}u(x)^* f(x)v(x)/_0^\infty$$

$$-\frac{1}{2i}\int_0^\infty (fu)'(x)^* v(x)dx = \int_0^\infty \{\frac{1}{2i}[(fu)' + fu'](x)\}^* v(x)dx$$

$$= \langle \tau_f u, v\rangle = \langle H_{1,0}u, v\rangle.$$

(ii) Sean $u \in \mathrm{domH_1}$, $v \in \mathrm{domH_{1,0}}$ y $[\alpha,\beta]$ un intervalo compacto que contiene al soporte de v. Integrando por partes tenemos

$$\langle H_1 u, v\rangle = \int_0^\infty (\tau_f u)(x)^* v(x)dx = \int_\alpha^\beta (\tau_f u)(x)^* v(x)dx$$

$$= \int_0^\infty u(x)^*(\tau_f v)(x)dx = \langle u, H_{1,0}v\rangle,$$

por lo tanto H_1 y $H_{1,0}$ son adjuntos formales uno del otro. Ahora probaremos la inclusión $H^*_{1,0} \subset H_1$.
Sea $u \in H^*_{1,0}$ y ω una función absolutamente continua en $(0,\infty)$ tal que

$$\tau_f \omega = H^*_{1,0}u.$$

Tal función ω existe: como $(\tau_f\omega)(x) = \frac{1}{2i}[f'(x)\omega(x) + 2f(x)\omega'(x)]$ la igualdad de la ecuación anterior se tiene si y sólo si

$$2f(x)\omega'(x) + f'(x)\omega(x) = 2i(H_{1,0}^*u)(x),$$

o equivalentemente

$$\omega'(x) + \frac{1}{2}\frac{f'(x)}{f(x)}\omega(x) = \frac{i}{f(x)}(H_{1,0}^*u)(x).$$

Esta ecuación diferencial lineal tiene por solución

$$\omega(x) = e^{-\frac{1}{2}\int_0^x \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau}\int_0^x dt e^{\frac{1}{2}\int_0^t \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau}\frac{i}{f(t)}(H_{1,0}^*u)(t)$$

$$= (\frac{f(x)}{f(0)})^{-\frac{1}{2}}\int_0^x dt(\frac{f(t)}{f(0)})^{\frac{1}{2}}\frac{i}{f(t)}(H_{1,0}^*u)(t) = if(x)^{-\frac{1}{2}}\int_0^x \frac{(H_{1,0}^*u)(t)}{f(t)^{\frac{1}{2}}}dt,$$

y esta función es absolutamente continua.
Por integración por partes, para cada $v \in \mathrm{domH}_{1,0}$ obtenemos

$$\langle u, H_{1,0}v\rangle = \langle H_{1,0}^*u, v\rangle = \int_\alpha^\beta (H_{1,0}^*u)(x)^*v(x)dx$$

$$= \int_\alpha^\beta \omega(x)^*(\tau_f v)(x)dx = \int_0^\infty \omega(x)^*(H_{1,0}v)(x)dx.$$

Entonces para cada $k \in R(H_{1,0})$ tenemos

$$F(k) = \int_0^\infty (u(x) - \omega(x))^*k(x)dx = 0$$

por lo tanto el núcleo del funcional F

$$k \to \int_0^\infty (u(x) - \omega(x))^*k(x)dx$$

contiene a $R(H_{1,0})$. El Lema 2.3.1 implica que $R(H_{1,0}) = \mathrm{Ker}(F_0)$ donde F_0 es el funcional $F_0 : C_0^\infty(0,\infty) \to \mathbb{C}$ definido por

$$F_0(k) = \int_0^\infty \frac{k(t)}{f(t)^{-\frac{1}{2}}}dt.$$

Así por el Teorema 4.1, página 53 de [31], existe un número $c_0 \in \mathbb{C}$ tal que $F = c_0 F_0$. Por lo tanto

$$\int_0^\infty (u(x) - \omega(x) - c_0 f(x)^{-\frac{1}{2}})^* k(x) dx = 0 \qquad para\, cada\; k \in C_0^\infty(0, \infty).$$

Ahora, para cada subintervalo compacto $[\alpha, \beta]$ tenemos que

$$(u - \omega - c_0 f^{-\frac{1}{2}})|_{[\alpha,\beta]} \in L^2(\alpha, \beta) \qquad y \qquad (u - \omega - c_0 f^{-\frac{1}{2}})|_{[\alpha,\beta]} \perp C_0^\infty(\alpha, \beta),$$

luego, de esto tenemos que $(u - \omega - c_0 f^{-\frac{1}{2}})|_{[\alpha,\beta]} = 0$. Como esto se tiene para cada subintervalo compacto $[\alpha, \beta]$, de aquí se sigue que

$$u(x) = \omega(x) + c_0 f(x)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{c.t.p. en}\,(0, \infty).$$

Por lo tanto u es absolutamente continua y $\tau_f u = \tau_f \omega = H_{1,0}^* u \in L^2(0, \infty)$, como $u \in L^2(0, \infty)$, esto prueba que $u \in \mathrm{domH_1}$, así $H_{1,0}^* \subset H_1$. □

Consideremos ahora las ecuaciones

$$H_{1,0}^* u = \pm i u, \quad u \in \mathrm{dom} H_{1,0}^*.$$

Las soluciones de estas ecuaciones son respectivamente,

$$u_+(x) = c_1 f(x)^{-1/2} e^{-\int_0^x \frac{d\tau}{f(\tau)}}$$

y

$$u_-(x) = c_2 f(x)^{-1/2} e^{+\int_0^x \frac{d\tau}{f(\tau)}}, \qquad c_1, c_2 \;\text{no nulas}.$$

Notemos que

$$\|u_+\|^2 = c_1^2 \int_0^\infty dx f(x)^{-1} e^{-2\int_0^x \frac{d\tau}{f(\tau)}} < \infty,$$

pues $\int_0^\infty \frac{d\tau}{f(\tau)} = \infty$, por lo tanto $u_+ \in L^2(0, \infty)$. De manera similar podemos demostrar que $u_- \notin L_2(0, \infty)$. Esto demuestra que los índices de defecto del operador simétrico $\bar{H}_{1,0}$ son $n_+(\bar{H}_{1,0}) = 1$ y $n_-(\bar{H}_{1,0}) = 0$.

Siendo $\bar{H}_{1,0}$ un operador simétrico maximal, entonces $i\bar{H}_{1,0}^* = iH_1$ es el generador de un semigrupo fuertemente continuo de contracciones. A continuación daremos una demostración.

Teorema 2.3.3. *El operador $i\bar{H}_{1,0}^* = iH_1$ satisface las hipótesis del Teorema de Lumer-Phillips 1.2.3, entonces genera un semigrupo fuertemente continuo de contracciones $\{U_t\}_{t\geq 0}$.*

Demostración. Por el Teorema de von Neumann tenemos que

$$\mathrm{dom}H_1 = \mathrm{dom}\bar{H}_{1,0} \oplus N_+ \oplus N_-$$

y

$$H_1(\omega + v_+ + v_-) = \bar{H}_{1,0}\omega + iv_+ - iv_-,\ \omega \in \mathrm{dom}\bar{H}_{1,0},\ v_+ \in N_+, v_- \in N_-$$

donde

$$N_+ = \mathcal{N}(i - H_1) = \mathcal{R}(-i - \bar{H}_{1,0})^\perp \text{ y } \mathcal{N}_- = N(-i - H_1) = \mathcal{R}(i - \bar{H}_{1,0})^\perp$$

son los subespacios de defecto de $\bar{H}_{1,0}$.

Pero ya hemos demostrado que $N_- = \{0\}$, por lo tanto

$$\mathrm{dom}H_1 = \mathrm{dom}\bar{H}_{1,0} \oplus N_+$$

y

$$H_1(\omega + v_+) = \bar{H}_{1,0}\omega + iv_+,\ \omega \in \mathrm{dom}\bar{H}_{1,0},\ v_+ \in N_+.$$

Entonces para $u \in \mathrm{dom}H_1$, $u = \omega + v_+$, $\omega \in \mathrm{dom}\bar{H}_{1,0}$, $v_+ \in N_+$ tenemos que

$$\langle iH_1u, u\rangle = -i\langle \bar{H}_{1,0}\omega, \omega\rangle + 2i\mathrm{Im}\langle \omega, v_+\rangle - \|v_+\|^2,$$

por lo tanto

$$Re\langle iH_1u, u\rangle = -\|v_+\|^2 \leq 0.$$

Esto prueba que iH_1 es disipativo.

Sea $\Theta(iH_1) = \{\langle iH_1u, u\rangle : u \in \mathrm{dom}H_1,\ \|u\| = 1\}$ el rango numérico de iH_1, entonces tenemos para $\lambda_0 > 0$

$$\delta = \mathrm{dist.}\big(\lambda_0, \overline{\Theta(iH_1)}\big) > 0,$$

pues $Re\langle iH_1u, u\rangle \leq 0, u \in \mathrm{dom}H_1$. De esto

$$\begin{aligned}\delta &\leq \big|\langle iH_1u, u\rangle - \lambda_0\big| = \big|\langle (iH_1 - \lambda_0 I)u, u\rangle\big| \leq \\ &\leq \ \|(iH_1 - \lambda_0 I)u\|,\end{aligned}$$

para cada $u \in \mathrm{dom} H_1$, $\|u\| = 1$. Por lo tanto el operador $(iH_1 - \lambda_0 I)^{-1}$ existe, es acotado y cerrado sobre $\mathcal{R}(iH_1 - \lambda_0 I)$, pues $(iH_1 - \lambda_0 I)$ es cerrado. Entonces $\mathcal{R}(iH_1 - \lambda_0)$ es cerrado y por lo tanto

$$\mathcal{R}(iH_1 - \lambda_0 I) = \mathcal{H},$$

pues $\mathcal{R}(iH_1 - \lambda_0 I)^{\perp} \subset \mathcal{R}(i\bar{H}_{1,0} - \lambda_0 I)^{\perp} = \{0\}$ para cada $\lambda_0 > 0$. □

Ahora por el Corolario 10.6 en [29], pg. 41. tenemos que el adjunto $-iH_1^* = -i\bar{H}_{1,0}$ es el generador del semigrupo adjunto U_t^*. Pero, como se probará enseguida, el operador $i\bar{H}_{1,0}$ no satisface las condiciones necesarias y suficientes del Teorema de Lumer-Phillips 1.2.3 [23], [29] y por lo tanto no es el generador de un semigrupo fuertemente continuo de contracciones.

Corolario 2.3.4. *El rango $R(I - i\bar{H}_{1,0})$ no es denso en $L^2(0,\infty)$. Por lo tanto $i\bar{H}_{1,0}$ no es el generador de un semigrupo fuertemente continuo de contracciones.*

Demostración. Es suficiente observar que

$$R(I - i\bar{H}_{1,0})^{\perp} = R(-i - \bar{H}_{1,0})^{\perp} = \mathcal{N}(i - H_1) = N_+ = span\{u_+\}. \square$$

Se sigue del Corolario 10.6 en [29] que tampoco $-i\bar{H}_{1,0}^* = -iH_1$ genera un semigrupo fuertemente continuo de contracciones.

Ahora usaremos el siguiente teorema probado en [6], Proposición 12.2.2, pg. 254.

Teorema 2.3.5. *Supongamos que $H = I \otimes H_0$, donde H_0 es un operador cerrado, simétrico y densamente definido que actúa en $\mathcal{H}$ y conmuta con el operador unitario W. Entonces los índices de defecto de*

$$C_n\psi_n = (i\sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k} + H)\psi_n \qquad \psi_n \in D_n \otimes domH_0, \qquad n \geq 0$$

coinciden con los índices de defecto de H_0.

Como una consecuencia tenemos que el operador $C = i\partial_x \otimes I + I \otimes \bar{H}_{1,0}$ con dominio $D \otimes \mathrm{domH_0}$, es un operador simétrico con índices de defecto iguales a los de $\bar{H}_{1,0}$, i.e., $n_- = 0$ and $n_+ = 1$, por lo tanto este no tiene extensiones autoadjuntas. De manera similar como en el Corolario 2.3.4 anterior, podemos probar que $i\bar{C}$ no satisface las hipótesis del Teorema de Lumer-Phillips 1.2.3, por lo tanto éste no es el generador de un semigrupo fuertemente continuo de contracciones.

2.4. Condición suficiente para que $i\bar{C}$ sea generador

Dado un operador simétrico y cerrado $\bar{C}$ surge de manera natural la pregunta de cuándo es $i\bar{C}$ la restricción de un generador de un semigrupo fuertemente continuo de isometrías. En esta sección damos una respuesta a esta pregunta usando los índices de defecto de $\bar{C}$.

Proposición 2.4.1. *Sea $\bar{C}$ un operador simétrico y cerrado en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ con índices de defecto finitos (n_+, n_-).*

(i) Si $n_+ \leq n_-$ entonces el operador $i\bar{C}$ es la restricción de un generador de un semigrupo fuertemente continuo de isometrías en $\mathcal{H}$.
(ii) Si $n_+ > n_-$ entonces $i\bar{C}$ no es la restricción de un generador de un semigrupo fuertemente continuo de isometrías en $\mathcal{H}$.

Demostración. (i) Si $0 = n_+ \leq n_-$, entonces $\bar{C}$ es simétrico maximal, o autoadjunto si $n_- = 0$, para la referencia ver [31], Teorema 8.14. Por lo tanto los argumentos en el Teorema 2.3.3 prueban que $-i\bar{C}^*$ genera un semigrupo fuertemente continuo de contracciones en $\mathcal{H}$. El semigrupo adjunto $(U_t = W_t^*)_{t\geq 0}$ es generado por $i\bar{C}$; como $n_+ = 0$ este semigrupo $(U_t)_{t\geq 0}$ es de isometrías. Si $\bar{C}$ es autoadjunto, $i\bar{C}$ genera un grupo unitario.

Si $0 < n_+ \leq n_-$, entonces el subespacio de defecto N_+ de $\bar{C}$ es isometricamente isomorfo con un subespacio F_- de N_-, denotaremos por V la isometría $V : N_+ \to F_-$. Por el Teorema de von Neumann, existe asociada con V una extensión cerrada y simétrica $\bar{C}_V$ de $\bar{C}$ definida como

$$\mathrm{dom}\bar{C}_V = \mathrm{dom}\bar{C} + \{v + Vv : \ v \in N_+\}$$

y

$$\bar{C}_V(u + v + Vv) = \bar{C}u + iv - iVv = \bar{C}(u + v + Vv)$$

para $u \in \mathrm{dom}\bar{C}$ y $v \in N_+$. Como

$$\mathcal{R}(-i - \bar{C}_V) = \mathcal{R}(-i - \bar{C}) \oplus N_+ = \mathcal{R}(-i - \bar{C}) \oplus \mathcal{R}(-i - \bar{C})^\perp = \mathcal{H}$$

tenemos que $n_+(\bar{C}_V) = 0$, por lo tanto estamos en el caso $0 = n_+(\bar{C}_V) \leq n_-(\bar{C}_V)$. Así podemos proceder como antes para probar que $i\bar{C}_V$ genera un semigrupo fuertemente continuo de isometrías en $\mathcal{H}$, y por lo tanto $i\bar{C}$ es la restricción de un generador de un semigrupo fuertemente continuo de isometrías en $\mathcal{H}$.

(ii) Si $n_+ > n_-$, entonces existe una isometría V' del subespacio de defecto N_- de $\bar{C}$ sobre un subespacio propio de N_+, y asociado con V' existe una extensión simétrica maximal $\bar{C}_{V'}$ de $\bar{C}$. El semigrupo de contracciones generado por el operador disipativo $\imath\bar{C}^*_{V'}$ no es un semigrupo de isometrías puesto que $n_+(\bar{C}_{V'}) > 0$, ver Ejemplo 4.2 en [16] y Corolario 4.1 en [14]. □

Capítulo 3

Coeficientes no acotados y multiplicidad arbitraria

3.1. Introducción

El estudio del generador infinitesimal de la solución de una Ecuación Diferencial Estocástica Cuántica fue iniciado por A.M. Chebotarev [6] en el caso de multiplicidad uno y con coeficientes no acotados pero conmutativos. En su trabajo A.M. Chebotarev obtuvo la expresión diferencial formal que define a este generador y la condición de frontera que deben satisfacer los elementos de su dominio. Posteriormente M. Gregoratti [19] abordó el problema demostrando que este operador es esencialmente autoadjunto, en el caso en que la multiplicidad es arbitraria pero los coeficientes de la ecuación son operadores acotados no necesariamente conmutativos. Más recientemente A. M. Chebotarev [7] extendió algunos de sus resultados eliminando la restrición de que los coeficientes de la ecuación conmuten entre sí, pero manteniendo la condición de multiplicidad uno.

En este capítulo seguiremos las ideas de estos dos autores para tratar el caso de coeficientes no acotados no necesariamente conmutativos y multiplicidad arbitraria.

3.2. Resultados preliminares

En lo que sigue cada espacio de Hilbert será un espacio complejo y separable. Dados dos espacios de Hilbert $\mathcal{H}$, ζ y una base ortonormal $\{z_j\}_{j\in J}$ de ζ, consideraremos el espacio de Fock simétrico

$$\Gamma_{\mathcal{H}} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L^2(\mathbb{R}^n_*, \zeta^{\otimes^n_s} \otimes \mathcal{H}),$$

donde $\zeta^{\otimes^n_s}$ denota el producto tensorial simétrico de ζ consigo mismo y $L^2(\mathbb{R}^n_*, \zeta^{\otimes^n_s} \otimes \mathcal{H})$ denota el espacio de funciones simétricas. De manera análoga, el símbolo $\mathcal{W}_{2,1}(\mathbb{R}^n_*, \zeta^{\otimes^n_s} \otimes \mathcal{H})$, denotará el espacio de Sobolev de funciones simétricas.

Llamaremos a ζ *espacio de multiplicidad* y su dimensión $1 \leq |J| \leq \infty$ será la multiplicidad.

El producto interno para Φ y Ψ en $\Gamma_{\mathcal{H}}$ se define mediante la relación

$$\langle \Phi, \Psi \rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}} = \langle \phi_0, \varphi_0 \rangle_{\mathcal{H}} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n_*} \langle \phi_n(\vec{r}), \varphi_n(\vec{r}) \rangle_{\zeta^{\otimes^n_s} \otimes \mathcal{H}} d\vec{r},$$

consecuentemente

$$||\Psi||^2_{\Gamma_{\mathcal{H}}} = \sum_{n=0}^{\infty} ||\psi_n||^2_{L^2(\mathbb{R}^n_*, \zeta^{\otimes^n_s} \otimes \mathcal{H})} = \|\psi_0\|^2_{\mathcal{H}} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n_*} \langle \psi_n(\vec{r}), \psi_n(\vec{r}) \rangle_{\zeta^{\otimes^n_s} \otimes \mathcal{H}} d\vec{r}.$$

La siguiente hipótesis será crucial en el desarrollo del presente capítulo.

Hipótesis H-1: Existe un espacio de Hilbert $\mathcal{K}$ densa y continuamente inmerso en $\mathcal{H}$; $\mathcal{K}$ se puede tomar como $\mathcal{K} = dom\Lambda^{\frac{1}{2}}$, donde $\Lambda \geq I$ es un operador autoadjunto y tenemos que

$$\forall \Phi,\ \Psi \in \mathcal{K}, \quad \langle \Phi, \Psi \rangle_{\mathcal{K}} = \langle \Lambda^{\frac{1}{2}} \Phi, \Lambda^{\frac{1}{2}} \Psi \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Entonces para cada $k \in \mathcal{K}$,

$$\|k\|_{\mathcal{H}} = \langle k, k \rangle^{\frac{1}{2}} \leq \langle \Lambda^{\frac{1}{2}} k, \Lambda^{\frac{1}{2}} k \rangle^{\frac{1}{2}} = \|\Lambda^{\frac{1}{2}} k\| = \|k\|_{\mathcal{K}},$$

pues $\Lambda \geq I$.

En este capítulo también consideraremos al espacio de Fock simétrico $\Gamma_{\mathcal{K}}$ construido con $\mathcal{K}$ en lugar de $\mathcal{H}$. Los siguientes resultados son consecuencia inmediata de la Hipótesis H-1.

Proposición 3.2.1. *(i) $\zeta \otimes \mathcal{K}$ está densa y continuamente inmerso en $\zeta \otimes \mathcal{H}$.*

(ii) Entre los siguientes espacios de operadores acotados se tiene la contención

$$\mathcal{B}(\mathcal{K}, \zeta \otimes \mathcal{K}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{K}, \zeta \otimes \mathcal{H})$$

y para cada $F \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \zeta \otimes \mathcal{K})$ se cumple que $\|F\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K},\zeta\otimes\mathcal{H})} \leq \|F\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K},\zeta\otimes\mathcal{K})}$, en particular, la inclusión es continua.

(iii) Para cada $n \geq 1$, se tiene que

$$L^2(\mathbb{R}^n, \zeta^{\otimes_s^n} \otimes \mathcal{K}) \subset L^2(\mathbb{R}^n, \zeta^{\otimes_s^n} \otimes \mathcal{H}),$$

y la inclusión es continua.

(iv) Se tiene que $\Gamma_{\mathcal{K}} \subset \Gamma_{\mathcal{H}}$ y la inclusión es continua.

Demostración.

(i) Para tensores simples tenemos que

$$\|z \otimes k\|_{\zeta\otimes\mathcal{H}} = \|z\|_{\zeta}\|k\|_{\mathcal{H}} \leq \|z\|_{\zeta}\|k\|_{\mathcal{K}} = \|z \otimes k\|_{\zeta\otimes\mathcal{K}}.$$

Esta desigualdad se extiende por linealidad y continuidad a todo elemento en $\zeta \otimes \mathcal{K}$. La densidad de $\zeta \otimes \mathcal{K}$ en $\zeta \otimes \mathcal{H}$ se sigue de la densidad de $\mathcal{K}$ en $\mathcal{H}$.

(ii) Para cada $F \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \zeta \otimes \mathcal{K})$ y $k \in \mathcal{K}$ tenemos que

$$\|Fk\|_{\zeta\otimes\mathcal{H}} \leq \|Fk\|_{\zeta\otimes\mathcal{K}} < \infty,$$

de manera que $Fk \in \zeta \otimes \mathcal{H}$ y

$$\|F\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K},\zeta\otimes\mathcal{H})} \leq \|F\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K},\zeta\otimes\mathcal{K})}.$$

(iii) Los incisos anteriores implican que para cada $n \geq 0$, y $t \in \mathbb{R}$ se tiene que $u(t) \in \zeta^{\otimes_s^n} \otimes \mathcal{K} \subset \zeta^{\otimes_s^n} \otimes \mathcal{H}$ y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|u(t)\|^2_{\zeta^{\otimes_s^n}\otimes\mathcal{H}} dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} \|u(t)\|^2_{\zeta^{\otimes_s^n}\otimes\mathcal{K}} dt = \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}_*,\zeta^{\otimes_s^n}\otimes\mathcal{K})}.$$

Esto demuestra (iii).

(iv) Es consecuencia inmediata de (iii) y la definición de $\Gamma_{\mathcal{H}}$.

$\square$

En este capítulo consideraremos la Ecuación Diferencial Estocástica Cuántica (Hudson-Parthasarathy)

$$\begin{cases} dV(t) = \{\sum_{k,j\in J}(W_{k,j} - \delta_{k,j})d\Lambda_{k,j}(t) - \sum_{k,j\in J} L_k^* W_{k,j} dA_j(t) \\ +\sum_{k,j\in J} L_j dA_j^\dagger(t) - (iH + \frac{1}{2}\sum_{j\in J} L_j^* L_j)dt\}V(t), \\ V(0) = I, \end{cases}$$

donde $d\Lambda_{k,j}(t)$, $dA_j(t)$, $dA_j^\dagger(t)$ son las diferenciales estocásticas básicas en el espacio de Fock simétrico $\Gamma_{\mathcal{H}}$. H, L_j, $W_{k,j}$ son operadores en $\mathcal{H}$, llamados operadores del sistema y satisfacen la siguiente hipótesis:

Hipótesis H-2:

- L_j, $L_j^* \in \mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})$ para cada $j \in J$. También supondremos que $L_j\mathcal{K} \subset domL_j^*$ para cada $j \geq 1$ y que $\sum_j L_j^* L_j \in \mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})$.
- $W_{k,j} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ para cada $k, j \in J$, y $W = \sum_{k,j} |z_k\rangle\langle z_j| \otimes W_{k,j} \in \mathcal{U}(\zeta \otimes \mathcal{H})$.
- $H : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ es un operador acotado como operador de $\mathcal{K}$ en $\mathcal{H}$ y autoadjunto como operador en $\mathcal{H}$.

De acuerdo con resultados generales del Cálculo Estocástico Cuántico, ver por ejemplo el Teorema 27.8 en [28], la solución $V(t)$ de esta ecuación es un proceso adaptado fuertemente continuo y unitario si los operadores del sistema son acotados y satisfacen las condiciones en la Hipótesis H-2. Este proceso tiene asociado un grupo unitario $\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ que se define de la misma manera que en el capítulo anterior.

Nuestro propósito principal en este capítulo es estudiar al generador infinitesimal $-i\mathcal{C}$ del grupo unitario $\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, en el caso cuando los operadores del sistema son no acotados, no necesariamente conmutativos y la multiplicidad es arbitraria. Para esto partiremos de la expresión y la condición de frontera obtenidas por A. M. Chebotarev en [6], [7]. El estudio de la solución de una EDEC con coeficientes no acotados ha sido realizado por ejemplo por F. Fagnola en el contexto del Cálculo Estocástico Cuántico, véase [10]. Nuestro enfoque para el estudio del operador $\mathcal{C}$ es diferente, se puede considerar dentro del contexto de la teoría de operadores.

Las Hipótesis H-1 y H-2, junto con algunas otras hipótesis, se usaron en [15] y [13] para estudiar condiciones suficientes para la conservatividad del semigrupo minimal construido a partir de un generador de Lindblad con parte completamente positiva dada por la sucesión de operadores $(L_j)_{j\geq 1}$.

3.3. Vectores pseudo-exponenciales

Siguiendo las ideas de A.M. Chebotarev [6], [7] y M. Gregoratti [19], en esta sección construiremos una nueva clase de vectores pseudo-exponenciales en $\Gamma_{\mathcal{H}}$.

Definición 3.3.1. *Las coordenadas de nuestros vectores pseudo-exponenciales se definen de la siguiente manera: para cada $F \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, L^2(\mathbb{R}_*, \zeta \otimes \mathcal{K}))$, $h \in \mathcal{K}$ y $\rho = (r_1, \cdots, r_n) \in \mathbb{R}_*^n$ tales que $r_n > \cdots > r_1$, defínase*

$$(\Psi_n(F)h)(\rho) = \begin{cases} h & si, \quad n = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{n!}}(S_n \otimes I)(I^{\otimes^{n-1}} \otimes F(r_n)) \ldots (I \otimes F(r_2))F(r_1)h & si, \; n \geq 1, \end{cases}$$

donde S_n es la proyección ortogonal sobre el producto tensorial simétrico $\zeta^{\otimes_s^n}$.

En el caso en que las entradas de la $n-$ada $(r_1, \cdots, r_n) \in \mathbb{R}_*^n$ no cumplan con el orden anterior se define

$$(\Psi_n(F)h)(r_1, \cdots, r_n) = (\Psi_n(F)h)(r_{\sigma(1)}, \cdots, r_{\sigma(n)})$$

donde σ es la única permutación de $\{1, \cdots, n\}$ tal que $r_{\sigma(n)} > \cdots > r_{\sigma(1)}$.

En esta definición:

$$(I^{\otimes^k} \otimes F(r))(z_1 \otimes \cdots \otimes z_k \otimes h) := z_1 \otimes \cdots \otimes z_k \otimes F(r)h \in \zeta^{\otimes^{(k+1)}} \otimes \mathcal{K}.$$

Y para $\varphi \in \zeta^{\otimes^k} \otimes \mathcal{K}$, $k \geq 1$, se define

$$(I^{\otimes^k} \otimes F(r))\varphi = \lim_n (I^{\otimes^k} \otimes F(r))\varphi_n,$$

con $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de combinaciones lineales finitas de tensores simples que converge a φ.

Lema 3.3.2. *El espacio de Hilbert* $\zeta \otimes L^2(\mathbb{R}_*, \zeta^{\otimes^{(n-1)}} \otimes \mathcal{K})$ *es isometricamente isomorfo con el espacio de Hilbert* $L^2(\mathbb{R}_*, \zeta^{\otimes^n} \otimes \mathcal{K})$.

Demostración. Para cada $\varphi \in \zeta \otimes L^2(\mathbb{R}_*, \zeta^{\otimes^{(n-1)}} \otimes \mathcal{K})$, la función $\tilde{\varphi}$ definida mediante la aplicación $t \to \tilde{\varphi}(t)$ es medible de $\mathbb{R}_*$ en $\zeta^{\otimes^n} \otimes \mathcal{K}$.

Si $\varphi = z \otimes \psi$ entonces tenemos que

$$\|\varphi\|^2_{\zeta \otimes L^2(\mathbb{R}_*, \zeta^{\otimes^{(n-1)}} \otimes \mathcal{K})} = \|z\|^2_\zeta \|\psi\|^2_{L^2(\mathbb{R}_*, \zeta^{\otimes^{(n-1)}} \otimes \mathcal{K})}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \|z \otimes \psi(t)\|^2_{\zeta^{\otimes^n} \otimes \mathcal{K}} dt = \|\tilde{\varphi}\|^2_{L^2(\mathbb{R}_*, \zeta^{\otimes^n} \otimes \mathcal{K})}.$$

Si $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión de combinaciones lineales finitas de tensores simples y $\varphi_n \to \varphi$ en $\zeta \otimes L^2(\mathbb{R}_*, \zeta^{\otimes^{(n-1)}} \otimes \mathcal{K})$, entonces $\tilde{\varphi}_n \to \tilde{\varphi}$ en $L^2(\mathbb{R}_*, \zeta^{\otimes^n} \otimes \mathcal{K})$ y se tiene que

$$\|\varphi\|_{\zeta \otimes L^2(\mathbb{R}_*, \zeta^{\otimes^{(n-1)}} \otimes \mathcal{K})} = \lim_n \|\varphi_n\|_{\zeta \otimes L^2(\mathbb{R}_*, \zeta^{\otimes^{(n-1)}} \otimes \mathcal{K})}$$

$$= \lim_n \|\tilde{\varphi}_n\|_{L^2(\mathbb{R}_*, \zeta^{\otimes^n} \otimes \mathcal{K})} = \|\tilde{\varphi}\|_{L^2(\mathbb{R}_*, \zeta^{\otimes^n} \otimes \mathcal{K})}$$

Esto demuestra el lema. □

Proposición 3.3.3. *Sea* F *como en la definición anterior, entonces tenemos que* $\Psi_n(F) \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, L^2(\mathbb{R}^n_*, \zeta^{\otimes^n} \otimes \mathcal{K}))$ *para cada* $n \geq 0$. *Consecuentemente para cada* $h \in \mathcal{K}$, $\Psi(F)h := \{\Psi_n(F)h\}_{n=0}^{\infty}$ *es un vector en el espacio de Fock* $\Gamma^s_{\mathcal{K}}$.

Demostración. Nótese que para $h \in \mathcal{K}$ tenemos que

$$\|Fh\|^2_{L^2(\mathbb{R}_*, \zeta \otimes \mathcal{K})} = \int_{-\infty}^{\infty} \|F(r)h\|^2_{\zeta \otimes \mathcal{K}} dr \leq \|F\|^2_{\mathcal{B}(\mathcal{K}; L^2(\mathbb{R}_*, \zeta \otimes \mathcal{K}))} \|h\|^2_{\mathcal{K}};$$

y usando el Lema 3.3.2 obtenemos que

$$\|(I \otimes F)(z \otimes h)\|^2_{\zeta \otimes L^2(\mathbb{R}_*, \zeta \otimes \mathcal{K})} = \int_{-\infty}^{\infty} \|(I \otimes F(r))(z \otimes h)\|_{\zeta^{\otimes^2} \otimes \mathcal{K}} dr$$

$$= \|z\|^2_\zeta \|Fh\|^2_{L^2(\mathbb{R}_*, \zeta \otimes \mathcal{K})} \leq \|F\|^2_{\mathcal{B}(\mathcal{K}; L^2(\mathbb{R}_*, \zeta \otimes \mathcal{K}))} \|z \otimes h\|^2_{\zeta \otimes \mathcal{K}}.$$

De manera análoga se demuestra que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\|(I^{\otimes^{(n-1)}}\otimes F(r))(z_1\otimes\cdots\otimes z_{n-1}\otimes h)\|_{\zeta^{\otimes^n}\otimes\mathcal{K}}dr$$
$$\leq\|F\|^{2n}_{\mathcal{B}(\mathcal{K};L^2(\mathbb{R}_*,\zeta\otimes\mathcal{K}))}\|z_1\otimes\cdots\otimes z_{n-1}\otimes h\|^2_{\zeta^{\otimes^{(n-1)}}\otimes\mathcal{K}}.$$

Ahora, para una sucesión $(\varphi_m)_{m\geq1}$ de combinaciones lineales finitas de tensores simples tal que $\lim_m\varphi_m=\varphi\in\zeta^{\otimes^{(n-1)}}\otimes\mathcal{K}$, usando el Lema de Fatou obtenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\|(I^{\otimes(n-1)}\otimes F(r))\varphi\|^2_{\zeta^{\otimes^n}\otimes\mathcal{K}}dr=\int_{-\infty}^{\infty}\lim_m\|(I^{\otimes^{(n-1)}}\otimes F(r))\varphi_m\|^2_{\zeta^{\otimes^n}\otimes\mathcal{K}}dr$$
$$\leq\liminf_m\int_{-\infty}^{\infty}\|(I^{\otimes^{(n-1)}}\otimes F(r))\varphi_m\|^2_{\zeta^{\otimes^n}\otimes\mathcal{K}}dr$$
$$\leq\liminf_m\|F\|^2_{\mathcal{B}(\mathcal{K};L^2(\mathbb{R}_*,\zeta\otimes\mathcal{K}))}\|\varphi_m\|^2_{\zeta^{\otimes^{(n-1)}}\otimes\mathcal{K}}=\|F\|^2_{\mathcal{B}(\mathcal{K};L^2(\mathbb{R}_*,\zeta\otimes\mathcal{K}))}\|\varphi\|^2_{\zeta^{\otimes^{(n-1)}}\otimes\mathcal{K}}.$$

Usando esta última desigualdad obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n_*}\|(\Psi_n(F)h)(r_1,\cdots,r_n)\|^2_{\zeta^{\otimes^n}\otimes\mathcal{K}}d\vec{r}\leq\|F\|^{2n}_{\mathcal{B}(\mathcal{K},L^2(\mathbb{R}_*,\zeta\otimes\mathcal{K}))}\cdot\|h\|^2_{\mathcal{K}}.$$

Esto demuestra la proposición. □

Para cada colección $\{L_j\}_{j\in J}\subset\mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})$ y cada $h\in\mathcal{K}$ definimos

$$\tilde{L}h=\sum_{j\in J}z_j\otimes L_jh\in\zeta\otimes\mathcal{H}$$

y la acción de este operador se puede extender a $\Gamma_{\mathcal{K}}$ definiendo para $u\in\Gamma_{\mathcal{K}}$,

$$\tilde{L}u=\left((I^{\otimes^n}\otimes\tilde{L})u_n\right)_{n\geq0}.$$

De manera análoga, para cada $j\geq1$, la acción del operador L_j se puede extender a todo $\Gamma_{\mathcal{K}}$ definiendo

$$L_ju=\left((I^{\otimes^n}\otimes L_j)u_n\right)_{n\geq0}.$$

Y asociado con la familia $\{L_j\}_{j\in J}$ se puede definir el operador $\hat{L}:\Gamma_{\mathcal{K}}\to\zeta\otimes\Gamma_{\mathcal{H}}$ mediante la relación

$$\hat{L}u=\sum_j z_j\otimes L_ju.$$

La siguiente hipótesis es crucial en el desarrollo del presente trabajo:

Hipótesis H-3: Para cada colección $\{L_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})$ se tiene,

$$\sum_{j\in J} \|L_j\|^2_{\mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})} < \infty.$$

Lema 3.3.4. *Si se cumple la Hipótesis H-3, entonces para cada $u \in \Gamma_{\mathcal{K}}$ se tiene que $\tilde{L}u = \hat{L}u$.*

Demostración. El subconjunto

$$\{\Big(\frac{n!}{r_1!\cdots r_k!}\Big)^{\frac{1}{2}} S_n \otimes_{i=1}^k z_{j_i}^{\otimes r_i} : j_1 < \cdots < j_k, r_i \geq 1 \text{ para cada}$$

$$1 \leq i \leq k, r_1 + \cdots + r_n = n, k = 1, \cdots, n\},$$

es una base ortonormal de $\zeta^{\otimes_s^n}$, ver por ejemplo la Proposición 17.3 en [28]. Por comodidad, denotaremos simplemente por $z_{j_1}\otimes_s\cdots\otimes_s z_{j_n}$ a los elementos de esta base ortonormal de $\zeta^{\otimes_s^n}$.

Sea $(h_k)_{k\geq 1}$ una base ortonormal de $\mathcal{K}$ y definamos

$$u_n(r_1,\cdots,r_n) = \sum_{j_1,\cdots,j_n,k} \alpha_{j_1,\cdots,j_n,k}(r_1,\cdots,r_n) z_{j_1}\otimes_s\cdots\otimes_s z_{j_n}\otimes h_k,$$

donde $\alpha_{j_1,\cdots,j_n,k}$ son escalares; así tenemos que

$$\big(I^{\otimes^n}\otimes\tilde{L}\big)u_n = \sum_j \sum_{j_1,\cdots,j_n,k} \alpha_{j_1,\cdots,j_n,k}(r_1,\cdots,r_n) z_{j_1}\otimes_s\cdot\otimes_s z_{j_n}\otimes_s z_j\otimes L_j h_k$$

$$\sum_j z_j\otimes \sum_{j_1,\cdots,j_n,k} \alpha_{j_1,\cdots,j_n,k}(r_1,\cdots,r_n) z_{j_1}\otimes_s\cdots\otimes_s z_{j_n}\otimes L_j h_k = \sum_j z_j\otimes\big(I^{\otimes^n}\otimes L_j\big)u_n.$$

Ahora bien, tenemos la estimación

$$\|(I^{\otimes^n}\otimes L_j)z_{j_1}\otimes,\cdots,\otimes z_{j_n}\otimes h\|^2_{\zeta^{\otimes^n}\otimes\mathcal{H}} = \|z_{j_1}\otimes,\cdots,\otimes z_{j_n}\|^2_{\zeta^{\otimes^n}}\|L_j h\|^2_{\mathcal{H}}$$

$$\leq \|L_j\|^2_{\mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})}\|z_{j_1}\otimes,\cdots,\otimes z_{j_n}\otimes h\|^2_{\zeta^{\otimes^n}\otimes\mathcal{K}},$$

que se puede extender por linealidad y continuidad a todo elemento de $\zeta^{\otimes^n}\otimes\mathcal{K}$. Entonces $(I^{\otimes^n}\otimes L_j)$ es un operador acotado de $\zeta^{\otimes^n}\otimes\mathcal{K}$ en $\zeta^{\otimes^n}\otimes\mathcal{H}$.

Además calculando se obtiene que

$$\langle \sum_j z_j \otimes (I^{\otimes^n} \otimes L_j)u_n, \sum_k z_k \otimes (I^{\otimes^n} \otimes L_k)u_n \rangle_{\zeta^{\otimes(n+1)} \otimes \mathcal{H}}$$

$$= \sum_{j,k} \langle z_j, z_k \rangle_\zeta \langle L_j u_n, L_k u_n \rangle_{\zeta^{\otimes^n} \otimes \mathcal{H}} = \sum_{j,k} \delta_{jk} \langle L_j u_n, L_k u_n \rangle_{\zeta^{\otimes^n} \otimes \mathcal{H}}$$

$$\leq \sum_{j \in J} \|L_j\|^2_{\mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})} \|u_n\|^2_{\zeta^{\otimes^n} \otimes \mathcal{K}}.$$

Por lo tanto, el operador $\sum_j z_j \otimes (I^{\otimes^n} \otimes L_j)$ es acotado de $\zeta^{\otimes^n} \otimes \mathcal{K}$ en $\zeta^{\otimes(n+1)} \otimes \mathcal{H}$ si $\sum_{j\in J} \|L_j\|^2_{\mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})} < \infty$. Consecuentemente por linealidad y continuidad obtenemos que

$$\tilde{L}u = \left((I^{\otimes^n} \otimes \tilde{L})u_n\right)_{n\geq 0} = \left(\sum_j z_j \otimes (I^{\otimes^n} \otimes L_j)u_n\right)_{n\geq 0} = \hat{L}u,$$

para cada $u \in \Gamma_{\mathcal{K}}$. □

De manera similar, cada elemento de la familia de operadores adjuntos $\{L_j^*\}_{j\in J}$ se puede definir sobre $\Gamma_{\mathcal{K}}$ de la siguiente manera: para $u \in \Gamma_{\mathcal{K}}$, $L_j^* u = \left((I^{\otimes^n} \otimes L_j^*)u_n\right)_{n\geq 0}$. Y obtenemos el operador $\hat{L}^* : \zeta \otimes \Gamma_{\mathcal{H}} \to \Gamma_{\mathcal{K}}$ que para $z \in \zeta$ y $h \in \mathcal{K}$ actúa mediante la relación

$$\hat{L}^*(z \otimes u) = \sum_j \langle z_j, z \rangle_\zeta L_j^* u.$$

Nótese que para cada $u \in \Gamma_{\mathcal{K}}$ tenemos que

$$\hat{L}^* \hat{L} u = \hat{L}^*(\sum_j z_j \otimes L_j u) = \sum_{j,k} \langle z_k, z_j \rangle_\zeta L_k^* L_j u = \sum_j L_j^* L_j u.$$

Proposición 3.3.5. *Supóngase que la Hipótesis H-3 se cumple, entonces*

(a) El operador $\hat{L} : \Gamma_{\mathcal{K}} \to \zeta \otimes \Gamma_{\mathcal{H}}$ *es acotado y*

$$\|\hat{L}\| \leq \left(\sum_{j\in J} \|L_j\|^2_{\mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(b) El operador $\hat{L}^* : \zeta \otimes \Gamma_{\mathcal{H}} \to \Gamma_{\mathcal{K}}$, es acotado y

$$\|\hat{L}^*\| \leq \Big(\sum_{j\in J} \|L_j\|^2_{\mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

(c) $\hat{L}^*\hat{L}$ es un operador acotado de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ en $\Gamma_{\mathcal{K}}$.

Demostración. Por el lema anterior tenemos que $(I^{\otimes^n} \otimes L_j)$ es un operador acotado de $\zeta^{\otimes^n} \otimes \mathcal{K}$ en $\zeta^{\otimes^n} \otimes \mathcal{H}$ y además

$$\|(I^{\otimes^n} \otimes L_j)\|^2_{\mathcal{B}(\zeta^{\otimes^n}\otimes\mathcal{K},\zeta^{\otimes^n}\otimes\mathcal{H})} \leq \sum_j \|L_j\|^2_{\mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})} < \infty.$$

Ahora, calculando obtenemos que

$$\|\hat{L}u\|^2_{\zeta\otimes\Gamma_{\mathcal{H}}} = \langle \sum_j z_j \otimes L_j u, \sum_k z_k \otimes L_k u\rangle_{\zeta\otimes\Gamma_{\mathcal{H}}} = \sum_{j,k} \langle z_j, z_k\rangle_\zeta \langle L_j u, L_k u\rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}}$$

$$= \sum_j \|L_j u\|^2_{\Gamma_{\mathcal{H}}} = \sum_j \sum_n \int_{\mathbb{R}^n_*} \|(I^{\otimes^n} \otimes L_j) u_n(t_1, \cdots, t_n)\|^2_{\zeta^{\otimes^n}\otimes\mathcal{H}} d\vec{t}$$

$$\leq \sum_j \|L_j\|^2_{\mathcal{B}(\mathcal{K};\mathcal{H})} \| \sum_n \int_{\mathbb{R}^n_*} \|u_n(t_1, \cdots, t_n)\|^2_{\zeta^{\otimes^n}\otimes\mathcal{K}} d\vec{t}$$

$$\leq \sum_{j\in J} \|L_j\|^2_{\mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})} \|u\|^2_{\Gamma_{\mathcal{K}}}.$$

Esto demuestra (a).

Tenemos la estimación

$$\|\hat{L}^*(z\otimes u)\|_{\zeta\otimes\Gamma_{\mathcal{H}}} \leq \sum_j |\langle z_j, z\rangle|_\zeta \|L_j^* u\|_{\Gamma_{\mathcal{H}}}$$

$$\leq \Big(\sum_j |\langle z_j, z\rangle|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_j \|L_j^* u\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Big(\sum_j \|L_j\|^2_{\mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})}\Big)^{\frac{1}{2}} \|z\otimes u\|_{\zeta\otimes\Gamma_{\mathcal{K}}}$$

que se extiende por linealidad y continuidad a todo $\zeta \otimes \Gamma_{\mathcal{H}}$. Esto demuestra (b).

Finalmente (c) es consecuencia de (a) y (b). □

Con cada función $v \in L^2(\mathbb{R}_*, \zeta)$, podemos asociar el operador

$$V \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, L^2(\mathbb{R}_*, \zeta \otimes \mathcal{K}))$$

definido mediante la relación

$$V(r)h := v(r) \otimes h,$$

para cada $h \in \mathcal{K}$.

El correspondiente vector pseudo-exponencial $\Psi(V)h$ se obtiene de la siguiente manera. Para $r_1 < \cdots < r_n$ tenemos que ,

$$\Psi_n(V)h(r_1, \cdots, r_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}}(S_n \otimes I)(I^{\otimes^n} \otimes V(r_n)) \cdots (I \otimes V(r_2))V(r_1)h$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n!}}(S_n \otimes I)(I^{\otimes^n} \otimes V(r_n)) \cdots v(r_2) \otimes_s v(r_1) \otimes h = \frac{1}{\sqrt{n!}} v^{\otimes_s^n}(r_1, \cdots, r_n)h,$$

entonces

$$\Psi(V)h = \Psi(v) \otimes h \in \Gamma_{\mathcal{K}},$$

donde $\Psi(v) = (v^{\otimes_s^n})_{n\geq 0}$ es el vector exponencial simétrico asociado con la función v.

3.4. El operador $\mathcal{C}$

El objeto principal en este capítulo será el operador $\mathcal{C}$, considerado por primera vez por A. M. Chebotarev en el caso de multiplicidad $|J| = 1$ véase [6], [7]. La regla de correspondencia de $\mathcal{C}$ es

$$\mathcal{C}\Psi = i(\nabla + G^* - \hat{L}^* a_-)\Psi, \tag{A}$$

y los elementos de su dominio, que precisaremos más adelante, satisfacen la condición de frontera

$$(a_- - W a_+ - \hat{L})\Psi = 0.$$

El operador G está definido por $G = \frac{1}{2}\hat{L}^*\hat{L} + iH$, donde $H : \mathrm{domH} \subset \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ con $\mathcal{K} \subset \mathrm{domG}$ y $H \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$. Por lo tanto, $G^* = \frac{1}{2}\hat{L}^*\hat{L} - iH$. La acción de H se puede extender como operador acotado de $\Gamma_{\mathcal{K}}$ en $\Gamma_{\mathcal{H}}$ definiendo $Hu = \left((I^{\otimes^n} \otimes H)u_n\right)_{n\geq 0}$ para $u \in \Gamma_{\mathcal{K}}$.

Consideraremos el siguiente subespacio $\mathrm{D} \subset \mathrm{D}(\nabla)$, donde $\mathrm{D}(\nabla)$ denota el dominio máximo del operador ∇:

$$\mathrm{D} = \Big\{ u = (u_n)_{n\geq 1} \in \Gamma_{\mathcal{H}} : u_n \in \mathcal{W}_{2,1}(\mathbb{R}_*^n, \zeta^{\otimes_s^n} \otimes \mathcal{H}) \text{ y } \\ \|u\|^2_{\mathrm{D}(\nabla)} = \sum_n \|u_n\|^2_{\mathcal{W}_{2,1}(\mathbb{R}_*^n, \zeta^{\otimes_s^n} \otimes \mathcal{H})} < \infty \Big\},$$

con $\|u_n\|^2_{\mathcal{W}_{2,1}(\mathbb{R}_*^n, \zeta^{\otimes_s^n} \otimes \mathcal{H})} = \|u_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}_*, \zeta^{\otimes_s^n} \otimes \mathcal{H})} + \| \sum_{l=1}^n \partial_l u_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}_*, \zeta^{\otimes_s^n} \otimes \mathcal{H})}$.

$\mathrm{D}(\nabla)$ es el subespacio de $\Gamma_{\mathcal{H}}$ definido por

$$\mathrm{D}(\nabla) = \Big\{ u = (u_n)_{n\geq 1} \in \Gamma_{\mathcal{H}} : u_n \in H^{\Sigma}(\mathbb{R}_*^n, \zeta^{\otimes_s^n} \otimes \mathcal{H}) \text{ y } \\ \|u\|^2_{\mathrm{D}(\nabla)} = \sum_n \|u_n\|^2_{\mathcal{W}_{2,1}(\mathbb{R}_*^n, \zeta^{\otimes_s^n} \otimes \mathcal{H})} < \infty \Big\},$$

con

$$H^{\Sigma}(\mathbb{R}_*^n, \zeta^{\otimes_s^n} \otimes \mathcal{H}) = \Big\{ u \in L^2(\mathbb{R}_*^n, \zeta^{\otimes_s^n} \otimes \mathcal{H}) : \sum_{l=1}^n \partial_l u \in L^2(\mathbb{R}_*^n, \zeta^{\otimes_s^n} \otimes \mathcal{H}) \Big\}.$$

Notemos que para los elementos en este último subespacio, se pide solamente que la derivada direccional de u en la dirección de $e_1 + \cdots + e_n$, con $(e_n)_{n\geq 1}$ la base canónica en $\mathbb{R}^n$ exista y sea cuadrado integrable. Por esta razón D es un subespacio propio de $\mathrm{D}(\nabla)$.

Las componentes conexas de $\mathbb{R}_*^n$ se denotarán por Q_m, $m = 1, \cdots, 2^n$. De acuerdo con la notación de A.M. Chebotarev, cada uno de estos subconjuntos se llamará cámara de n-partículas y su frontera se denotará por ∂Q_m.

Si $v \in \mathcal{W}_{2,1}(\mathbb{R}_*^n, \zeta^{\otimes_s^n} \otimes \mathcal{H})$, su traza $A_l^r v = v\,|_{\{r_l = r\}}$ es una función en el espacio $L^2(\mathbb{R}_*^{(n-1)}, \zeta^{\otimes_s^n} \otimes \mathcal{H})$ para cada $r \in \{0^-, 0^+\}$. Este hecho no necesariamente se cumple para los elementos de $H^{\Sigma}(\mathbb{R}_*^n, \zeta^{\otimes_s^n} \otimes \mathcal{H})$, véase por ejemplo el artículo de Gregoratti [20]. Mediante el símbolo $v|_{\partial Q_m}$ denotaremos la traza de v en la frontera ∂Q_m, que puede expresarse en términos de n trazas del tipo $v|_{\{r_l = 0^{\pm}\}}$.

Para $s \in \{0^-, 0^+\}$ consideraremos los subespacios de $\Gamma_{\mathcal{H}}$ definidos por

$$N_s(\mathrm{D}) = \mathrm{D}(a(s)) \cap \mathrm{D} = \Big\{ \mathrm{u} \in \mathrm{D} : \sum_{\mathrm{n}\geq 0} \mathrm{n} \|\mathrm{u}_\mathrm{n}\,|_{\{r_{n+1} = s\}}\, \|^2_{L^2(\mathbb{R}_*^n, \zeta^{\otimes_s^{(n+1)}} \otimes \mathcal{H})} < \infty \Big\}$$

y escribiremos $N_{0^{\pm}}(\mathrm{D}) = N_{0^-}(\mathrm{D}) \cap N_{0^+}(\mathrm{D})$.

Para cada $u \in N_s(\mathrm{D})$ y $s \in \{0^-, 0^+\}$, definimos el operador $a(s)$ mediante la relación

$$\big(a(s)u\big)_{(n-1)} = \sqrt{n}A_l^s u_n \in L^2(\mathbb{R}_*^{n-1}, \zeta^{\otimes_s^n} \otimes \mathcal{H}) \simeq \zeta \otimes L^2(\mathbb{R}_*^{n-1}, \zeta^{\otimes_s^{(n-1)}} \otimes \mathcal{H}).$$

Puesto que la función u_n es simétrica, en la definición de $a(s)$ se puede tomar cualquier A_l^s, $1 \le l \le n$. Escribiremos simplemente $a_\pm$ en lugar de $a(0^\pm)$.

Nótese que los valores del operador $a(s)$ se encuentran en el espacio

$$\zeta \otimes \Gamma_{\mathcal{H}} \simeq \bigoplus_{n\ge 0} \zeta \otimes L^2(\mathbb{R}_*^n, \zeta^{\otimes_s^n} \otimes \mathcal{H}) \simeq \bigoplus_{n\ge 0} L^2(\mathbb{R}_*^n, \zeta^{\otimes_s^{(n+1)}} \otimes \mathcal{H}),$$

y $\hat{L}^* : \zeta \otimes \Gamma_{\mathcal{H}} \to \Gamma_{\mathcal{K}}$, entonces $\hat{L}^* a_-$ está bien definido en $N_{0^\pm}(\mathrm{D}) \cap \Gamma_{\mathcal{K}}$. Además, por la Hipótesis H-1, G^* está bien definido en $\Gamma_{\mathcal{K}}$, entonces la expresión formal del operador $\mathcal{C}$ está bien definida sobre $N_{0^\pm}(\mathrm{D}) \cap \Gamma_{\mathcal{K}}$. Los operadores que aparecen en la condición de frontera también están bien definidos en $N_{0^\pm}(\mathrm{D}) \cap \Gamma_{\mathcal{K}}$, pero la identidad correspondiente se cumple en $\zeta \otimes \Gamma_{\mathcal{H}}$. Nótese que el operador $W \in \mathcal{U}(\zeta \otimes \mathcal{H})$ se extiende a $\mathcal{U}(\zeta \otimes \Gamma_{\mathcal{H}})$ definiendo $Wu = \big(W(z \otimes u_n)\big)_{n \ge 0}$, para $z \otimes u_n \in \zeta \otimes L^2(\mathbb{R}_*^n, \zeta^{\otimes_s^n} \otimes \mathcal{H})$.

Desafortunadamente, como observó el mismo A. M. Chebotarev, los vectores exponenciales de la forma $\Psi(V)h = \psi(v) \otimes h$ con $h \in \mathcal{K}$ y v en un subespacio denso de $L^2(\mathbb{R}_*, \zeta)$ no satisfacen la condición de frontera y, por lo tanto no pertenecen al dominio de $\mathcal{C}$, pues en la primera componente se tiene que

$$a_-\Psi_1(V)h = v(0^-) \otimes h,$$
$$Wa_+\Psi_1(V)h = \sum_{j,k\in J} \langle z_k, v(0^+)\rangle_\zeta z_j \otimes W_{j,k}h$$

y

$$\tilde{L}h = \sum_{j\in J} z_j \otimes L_j h \quad \text{para } v \text{ continua.}$$

Entonces el vector $\Psi(0)h$ satisface la condición de frontera

$$(a_- - Wa_+ - \hat{L})\Psi(0)h = 0$$

si y sólo si $\sum_{j\in J} z_j \otimes L_j h = 0$. Esta es una condición demasiado restrictiva, pues en el caso $|J| = 1$ es equivalente con la condición $h \in \mathrm{Ker}(L)$.

Por esta razón es necesario considerar una clase más amplia de vectores pseudo-exponenciales.

Consideremos la clase de funciones de la forma

$$v_\epsilon(r) := V(r)(1-\xi(\frac{r}{\epsilon})) + \xi(\frac{r}{\epsilon})\{cI_{(-\infty,0)}(r) + I_{(0,\infty)}(r)(I\otimes e^{\frac{-\Lambda r}{\epsilon}})W^*(cI-\tilde{L})\}$$

donde $\epsilon > 0$ y para $h \in \mathcal{K}$, $V(r)h = v(r)\otimes h$; $v \in \mathcal{S} \subset \mathcal{W}_{2,1}(\mathbb{R}_*, \zeta)$, $\mathcal{S}$ denso en $L^2(\mathbb{R}_*, \zeta)$, $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\xi(0) = 1$ y $|\xi(r)| \leq 1\, \forall r \in \mathbb{R}$; para $c \in \zeta$, $ch = c\otimes h$.

En la siguiente Proposición demostraremos que $v_\epsilon \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, L^2(\mathbb{R}_*, \zeta\otimes\mathcal{K}))$, entonces por la Proposición 3.3.3 tendremos que el correspondiente vector exponencial $\Psi(v_\epsilon)h \in \Gamma_\mathcal{K}$ para cada $h \in \mathcal{K}$. Más adelante en la Proposición 3.4.2 demostraremos que

$$\Psi_n(v_\epsilon)h \in \mathcal{W}_{2,1}(\mathbb{R}_*^n, \zeta^{\otimes^n}\otimes\mathcal{H}),$$

y

$$\nabla\Psi(v_\epsilon)h = (\sum_{k=1}^n \partial_k\Psi_n(v_\epsilon)h)_{n\geq 0} \in \Gamma_\mathcal{H},$$

para cada $h \in \mathcal{K}$. Y en la Proposición 3.4.3 demostraremos que este subconjunto de vectores exponenciales es denso en $\Gamma_\mathcal{K}$.

Proposición 3.4.1. *Para cada* $\epsilon > 0$,

$$v_\epsilon \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, L^2(\mathbb{R}_*, \zeta\otimes\mathcal{K})).$$

Consecuentemente $\Psi(v_\epsilon)h \in \Gamma_\mathcal{K}$.

Demostración. Para cada $h \in \mathcal{K}$ tenemos que

$$\int_{-\infty}^\infty ||v_\epsilon(r)h||^2_{\zeta\otimes\mathcal{K}}dr \leq \int_{-\infty}^\infty |(1-\xi(\frac{r}{\epsilon})|^2||V(r)h||^2_{\zeta\otimes\mathcal{K}} + 2|(1-\xi(\frac{r}{\epsilon}))|||V(r)h||_{\zeta\otimes\mathcal{K}}$$

$$\times|\xi(\frac{r}{\epsilon})|||\{cI_{(-\infty,0)}(r) + I_{(0,\infty)}(r)(I\otimes e^{-\Lambda\frac{r}{\epsilon}})W^*(cI-\tilde{L})\}h||_{\zeta\otimes\mathcal{K}}dr$$

$$+\int_{-\infty}^\infty |\xi(\frac{r}{\epsilon})|^2||\{cI_{(-\infty,0)} + I_{(0,\infty)}(r)(I\otimes e^{-\Lambda\frac{r}{\epsilon}})W^*(cI-\tilde{L})\}h||^2_{\zeta\otimes\mathcal{K}}dr$$

$$\leq 4\int_{-\infty}^{\infty}||v(r)||_{\zeta}^{2}||h||_{\mathcal{K}}^{2}dr+4\int_{-\infty}^{\infty}||v(r)||_{\zeta}||\xi(\frac{r}{\epsilon})|||||h||_{\mathcal{K}}||c\otimes h||_{\zeta\otimes\mathcal{K}}I_{(-\infty,0)}dr$$

$$+4\int_{-\infty}^{\infty}||v(r)||_{\zeta}||h||_{\mathcal{K}}I_{(0,\infty)}|||(I\otimes e^{-\frac{\Lambda r}{\epsilon}})W^{*}(cI-\tilde{L})h||_{\zeta\otimes\mathcal{K}}dr$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}|\xi(\frac{r}{\epsilon})|^{2}\|c\|_{\zeta}^{2}\|h\|_{\mathcal{K}}^{2}dr+\int_{-\infty}^{\infty}||I_{(0,\infty)}(r)(I\otimes e^{-\Lambda\frac{r}{\epsilon}})W^{*}(cI-\tilde{L})h||_{\zeta\otimes\mathcal{K}}^{2}dr+0$$

$$\leq 4||v||_{L^{2}(\mathbf{R}_{*};\zeta)}^{2}||h||_{\mathcal{K}}^{2}+4\epsilon^{\frac{1}{2}}||c||_{\zeta}||v||_{L^{2}(\mathbf{R}_{*};\zeta)}||\xi||_{L^{2}(\mathbf{R})}||h||_{\mathcal{K}}^{2}$$

$$+4||h||_{\mathcal{K}}||v||_{L^{2}(\mathbf{R}_{*},\zeta)}||I_{(0,\infty)}(\cdot)(I\otimes e^{-\Lambda(\frac{\cdot}{\epsilon})})W^{*}(cI-\tilde{L})h||_{L^{2}(\mathbf{R}_{*},\zeta\otimes\mathcal{K})}$$

$$+\epsilon\|\xi\|_{L^{2}(\mathbf{R})}^{2}\|c\|_{\zeta}^{2}\|h\|_{\mathcal{K}}^{2}+||I_{(0,\infty)}(\cdot)(I\otimes e^{-\Lambda(\frac{\cdot}{\epsilon})})W^{*}(cI-\tilde{L})h||_{L^{2}(\mathbf{R}_{*},\zeta\otimes\mathcal{K})}^{2}.$$

Hemos aplicado la desigualdad de Schwarz y usado el hecho que $\int_{-\infty}^{\infty}|\xi(\frac{r}{\epsilon})|^{2}dr=\epsilon\|\xi\|_{L^{2}(\mathbf{R})}^{2}$.

De acuerdo con nuestras hipótesis, el lado derecho de la última desigualdad será finito si $||I_{(0,\infty)}(\cdot)(I\otimes e^{-\Lambda(\frac{\cdot}{\epsilon})})W^{*}(cI-\tilde{L})h||_{L^{2}(\mathbf{R}_{*},\zeta\otimes\mathcal{K})}<\infty$. Estimemos esta norma:

$$||I_{(0,\infty)}(\cdot)(I\otimes e^{-\Lambda(\frac{\cdot}{\epsilon})})W^{*}(cI-\tilde{L})h||_{L^{2}(\mathbf{R}_{*},\zeta\otimes\mathcal{K})}^{2}=\int_{0}^{\infty}\|e^{-\frac{r}{\epsilon}(I\otimes\Lambda)}W^{*}(cI-,\tilde{L})h\|_{\zeta\otimes\mathcal{K}}^{2}dr$$

$$=\int_{0}^{\infty}\langle W^{*}(cI-\tilde{L})h,(I\otimes\Lambda)e^{-\frac{2r}{\epsilon}(I\otimes\Lambda)}W^{*}(cI-\tilde{L})h\rangle_{\zeta\otimes\mathcal{H}}dr$$

$$=\int_{0}^{\infty}dr\int_{1}^{\infty}\mu(dx)xe^{-\frac{2r}{\epsilon}x}.$$

Donde $\mu(dx)$ es la medida espectral del operador autoadjunto $I\otimes\Lambda$ asociada con el vector $W^{*}(cI-\tilde{L})h\in\zeta\otimes\mathcal{H}$. Calculando esta última integral obtenemos que

$$\int_{0}^{\infty}dr\int_{1}^{\infty}\mu(dx)xe^{-\frac{2r}{\epsilon}x}=\frac{\epsilon}{2}\int_{1}^{\infty}\mu(dx)=\frac{\epsilon}{2}\|W^{*}(cI-\tilde{L})h\|_{\zeta\otimes\mathcal{H}}^{2}<\infty$$

pues como consecuencia de nuestra Hipótesis H-3, $\tilde{L} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \zeta \otimes \mathcal{H})$.

De lo anterior obtenemos que

$$\|v_\epsilon\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K};L^2(\mathbb{R}_*;\zeta\otimes\mathcal{K}))} \leq \alpha(\epsilon),$$

donde

$$\alpha(\epsilon) = 4\|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}_*;\zeta)} + 4\epsilon^{\frac{1}{2}}\|c\|_\zeta \|v\|_{L^2(\mathbb{R}_*;\zeta)}\|\xi\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$+4\|v\|_{L^2(\mathbb{R}_*,\zeta)}\frac{\epsilon}{2}\|W^*(cI-\tilde{L})\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K},\zeta\otimes\mathcal{K})}+\epsilon\|\xi\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\|c\|^2_\zeta+\frac{\epsilon^2}{4}\|W^*(cI-\tilde{L})\|^2_{\mathcal{B}(\mathcal{K},\zeta\otimes\mathcal{K})}.$$

Esto termina la demostración. □

Hipótesis H-4: $(I \otimes \Lambda)^{\frac{1}{2}} W^*(cI - \tilde{L}) \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \zeta \otimes \mathcal{H})$.

Proposición 3.4.2. *Si se cumple la Hipótesis H-4, entonces para cada* $\epsilon > 0$

(i) $\Psi_n(v_\epsilon)h \in \mathcal{W}_{2,1}(\mathbb{R}^n_*, \mathcal{B}(\mathcal{K}, \zeta^{\otimes^n} \otimes \mathcal{H}))$,

(ii) $\psi_n(v_\epsilon)h \in \mathcal{W}_{2,1}(\mathbb{R}^n_*, \zeta^{\otimes^n_s} \otimes \mathcal{H})$ *para cada* $n \geq 0$ *y además* $\nabla\Psi(v_\epsilon)h := (\sum_{k=1}^n \partial_k \Psi_n(v_\epsilon)h)_{n\geq 0} \in \Gamma_{\mathcal{H}}$.

Consecuentemente, $\Psi(v_\epsilon)h \in D$.

Demostración. (i) Para $h \in \mathcal{K}$; sabemos por el cálculo funcional que $(I \otimes \Lambda)e^{-t(I\otimes\Lambda)} = I \otimes \Lambda e^{-t\Lambda}$; luego

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|(I \otimes \Lambda e^{-t\Lambda})I_{(0,\infty)}(t)W^*(cI - \tilde{L})h\|^2_{\zeta\otimes\mathcal{H}}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \langle (I\otimes\Lambda e^{-t\Lambda})I_{(0,\infty)}(t)W^*(cI-\tilde{L})h, (I\otimes\Lambda e^{-t\Lambda})I_{(0,\infty)}(t)W^*(cI-\tilde{L})h\rangle_{\zeta\otimes\mathcal{H}}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_1^\infty \mu(dx)x^2e^{-2tx}I_{(0,\infty)}(t) = \int_1^\infty \mu(dx)x^2 \int_{-\infty}^\infty e^{-2tx}I_{(0,\infty)}(t)dt$$

$$= \int_1^\infty \mu(dx)x^2 \int_0^\infty e^{-2tx}dt = \int_1^\infty \mu(dx)x^2(\frac{1}{2x}) = \frac{1}{2}\int_1^\infty x\mu(dx),$$

donde $\mu(dx)$ es la medida espectral del operador autoadjunto $I \otimes \Lambda$ asociada al vector $W^*(cI - \tilde{L})h \in \zeta \otimes \mathcal{H}$. Ahora,

$$\frac{1}{2}\int_1^\infty x\mu(dx) = \frac{1}{2}\langle W^*(cI - \tilde{L})h, (I \otimes \Lambda)W^*(cI - \tilde{L})h\rangle_{\zeta\otimes\mathcal{K}}$$

$$= \frac{1}{2}\|(I \otimes \Lambda)^{\frac{1}{2}} W^*(cI - \tilde{L})h\| \leq \|(I \otimes \Lambda)^{\frac{1}{2}} W^*(cI - \tilde{L})\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K}, \zeta\otimes\mathcal{H})}\|h\|_{\mathcal{K}} < \infty,$$

pues por hipótesis se tiene que $(I \otimes \Lambda)^{\frac{1}{2}} W^*(cI - \tilde{L}) \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \zeta \otimes \mathcal{H})$.

De manera similar se obtiene la estimación

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|I_{(0,\infty)}(r)(I \otimes e^{-\frac{r}{\epsilon}\Lambda})W^*(cI - \tilde{L})h\|^2_{\zeta\otimes\mathcal{H}} dr$$

$$= \int_0^{\infty} \langle W^*(cI - \tilde{L})h, e^{-\frac{r}{\epsilon}(I\otimes\Lambda)} W^*(cI - \tilde{L})h\rangle_{\zeta\otimes\mathcal{H}} dr = \int_0^{\infty} dr \int_1^{\infty} \mu(dx) e^{-\frac{2r}{\epsilon}x}$$

$$= \int_1^{\infty} \mu(dx) \frac{\epsilon}{2x} = \frac{\epsilon}{2}\|(I\otimes\Lambda)^{\frac{1}{2}} W^*(cI - \tilde{L})h\|_{\zeta\otimes\mathcal{H}} \leq \frac{\epsilon}{2}\|W^*(cI - \tilde{L})\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K},\zeta\otimes\mathcal{H})}\|h\|_{\mathcal{K}}.$$

Calculando se tiene que

$$v'_\epsilon(r) = V'(r)(1 - \xi(\frac{r}{\epsilon})) - \frac{\Lambda}{\epsilon}\xi(\frac{r}{\epsilon}) I_{(0,\infty)}(r)(I \otimes e^{\frac{-r\Lambda}{\epsilon}})W^*(cI - \tilde{L})$$

$$+\frac{1}{\epsilon}\xi'(\frac{r}{\epsilon})\{cI_{(-\infty,0)}(r) + I_{(0,\infty)}(r)(I \otimes e^{\frac{-\Lambda r}{\epsilon}})W^*(cI - \tilde{L}) - V(r)\},$$

entonces para $h \in \mathcal{K}$ tenemos que

$$\|v'_\epsilon(r)h\|_{\zeta\otimes\mathcal{H}} \leq (2\|v'(r)\otimes h\|_{\zeta\otimes\mathcal{H}} + \epsilon^{-1}|\xi(\frac{r}{\epsilon})|\|I_{(0,\infty)}(r)(I\otimes\Lambda e^{-\frac{r}{\epsilon}\Lambda})W^*(cI - \tilde{L})h\|_{\zeta\otimes\mathcal{H}}$$

$$+\epsilon^{-1}|\xi'(\frac{r}{\epsilon})|I_{(0,\infty)}(r)\|c\otimes h\|_{\zeta\otimes\mathcal{H}} + I_{(0,\infty)}(r)\|(I\otimes e^{-\frac{r}{\epsilon}\Lambda})W^*(cI - \tilde{L})h - V(r)h\|_{\zeta\otimes\mathcal{H}})^2.$$

Elevando al cuadrado, aplicando la desigualdad de Schwarz en varios sumandos y usando la desigualdad $\|h\|_{\mathcal{H}} \leq \|h\|_{\mathcal{K}}$, obtenemos la estimación

$$\|v'_\epsilon(\cdot)h\|_{L^2(\mathbb{R}_*,\zeta\otimes\mathcal{H})} \leq \lambda(\epsilon)^2\|h\|_{\mathcal{K}},$$

donde

$$\lambda(\epsilon)^2 = 4\|v'\|_{L^2(\mathbb{R}_*,\zeta)} + \epsilon^{-2}\|(I\otimes\Lambda)^{\frac{1}{2}}W^*(cI-\tilde{L})\|^2_{\mathcal{B}(\mathcal{K},\zeta\otimes\mathcal{H})} + \epsilon^{-1}\|c\|^2_\zeta\|\xi'\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$+\frac{\epsilon^{-1}}{2}\|W^*(cI-\tilde{L})\|^2_{\mathcal{B}(\mathcal{K},\zeta\otimes\mathcal{H})} + \epsilon^{-2}\|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}_*,\zeta)}$$

$$+4\epsilon^{-1}\|v'\|_{L^2(\mathbb{R}_*,\zeta)}\|(I\otimes\Lambda)^{\frac{1}{2}}W^*(cI-\tilde{L})\|^2_{\mathcal{B}(\mathcal{K},\zeta\otimes\mathcal{H})} + 2\epsilon^{\frac{1}{2}}\|c\|_\zeta\|v'\|_{L^2(\mathbb{R}_*,\zeta)}\|\xi'\|_{L^2(\mathbb{R}_*)}$$

$$+\|v'\|_{L^2(\mathbb{R}_*,\zeta)}\|W^*(cI-\tilde{L})\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K},\zeta\otimes\mathcal{H})} + \|v'\|_{L^2(\mathbb{R}_*,\zeta)}\|v\|_{L^2(\mathbb{R}_*,\zeta)}$$

$$+\|W^*(cI-\tilde{L})\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K},\zeta\otimes\mathcal{H})}\|(I\otimes\Lambda)^{\frac{1}{2}}W^*(cI-\tilde{L})\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K},\zeta\otimes\mathcal{H})}$$

$$+\epsilon^{-2}\|v\|_{L^2(\mathbb{R}_*,\zeta)}\|(I\otimes\Lambda)^{\frac{1}{2}}W^*(cI-\tilde{L})\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K},\zeta\otimes\mathcal{H})}$$

$$+\epsilon^{-2}\|c\|_\zeta\Big(\int_{-\infty}^{\infty}|\xi'(\frac{r}{\epsilon})|^4dr\Big)^{\frac{1}{2}}\|v\|_{L^2(\mathbb{R}_*,\zeta)} + \frac{1}{2}\epsilon^{-\frac{3}{2}}\|v\|_{L^2(\mathbb{R}_*,\zeta)}\|W^*(cI-\tilde{L})\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K},\zeta\otimes\mathcal{H})}.$$

Esto demuestra que $v'_\epsilon \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, L^2(\mathbb{R}_*,\zeta\otimes\mathcal{H}))$ y además la estimación

$$\|v'_\epsilon\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K},L^2(\mathbb{R}_*,\zeta\otimes\mathcal{H}))} \leq \lambda(\epsilon).$$

Ahora, para $h\in\mathcal{K}$, tenemos que

$$\partial_j\psi_n(v_\epsilon)h(r_1,\cdots,r_n) = (n!)^{-\frac{1}{2}}(I^{\otimes(n-1)}\otimes V_\epsilon(r_n))\cdots(I^{\otimes(j-1)}\otimes V'_\epsilon(r_j))\cdots V_\epsilon(r_1),$$

consecuentemente para $n\geq 1$ tenemos la desigualdad

$$\int_{\mathbb{R}^n_*}\|\nabla\psi_n(v_\epsilon)h(r_1,\cdots r_n)\|^2_{\zeta^{\otimes n}\otimes\mathcal{H}}d\overrightarrow{r}$$

$$\leq \sum_{j=1}^n (n!)^{-1}\int_{\mathbb{R}^n_*}\|(I^{\otimes(n-1)}\otimes V_\epsilon(r_n))\cdots(I^{\otimes(j-1)}\otimes V'_\epsilon(r_j))\cdots V_\epsilon(r_1)\|^2_{\zeta^{\otimes n}\otimes\mathcal{H}}d\overrightarrow{r}$$

$$\leq n(n!)^{-1}\|v_\epsilon\|^2_{\mathcal{B}(\mathcal{K},L^2(\mathbb{R}_*,\zeta\otimes\mathcal{H}))}\|v'_\epsilon\|^2_{\mathcal{B}(\mathcal{K},L^2(\mathbb{R}_*,\zeta\otimes\mathcal{H}))}\|h\|^2_{\mathcal{K}}$$

$$\leq \frac{1}{(n-1)!}\lambda(\epsilon)^2\alpha(\epsilon)^{2(n-1)}\|h\|^2_{\mathcal{K}}.$$

De aquí se obtiene que para cada $\epsilon > 0$, $\psi_n(v_\epsilon)h \in \mathcal{W}_{2,1}(\mathbb{R}^n_*, \zeta^{\otimes_s n} \otimes \mathcal{H})$ para cada $n \geq 0$ y

$$\|\nabla\psi(v_\epsilon)h\|^2_{\Gamma_\mathcal{K}} \leq \|h\|^2_\mathcal{K} + \lambda(\epsilon)\|h\|^2_\mathcal{K} \sum_{n\geq 1} \frac{\alpha(\epsilon)^{2(n-1)}}{(n-1)!} < \infty.$$

Esto demuestra la proposición. □

Proposición 3.4.3. *(a) El subespacio $\boldsymbol{D}_0$ generado el conjunto*

$$\{\Psi(v_\epsilon)h : v, \xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_*, \zeta),\ h \in \mathcal{K}\ y\ \epsilon > 0\},$$

es denso en $\Gamma_\mathcal{K}$ y, por lo tanto, en $\Gamma_\mathcal{H}$.

(b) Los elementos de $\boldsymbol{D}_0$ pertenecen al subespacio $N_{0^\pm}(D)$ y satisfacen la condición de frontera $(a_- - Wa_+ - \hat{L})\Psi(v_\epsilon)h = 0$.

Consecuentemente, $\boldsymbol{D}_0 \subset N_{0^\pm} \cap \Gamma_\mathcal{K} \subset dom(C)$ y el operador C está densamente definido en $\Gamma_\mathcal{H}$.

Demostración.

Para cada función $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}_*, \zeta)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}_*} \|(v_\epsilon - v)(r)h\|^2_{\zeta\otimes\mathcal{K}} dr \leq \epsilon\|\xi\|^2_{L^2(\mathbb{R}_*)}\|c\|^2_\zeta\|h\|^2_\mathcal{K} \\
&+ \int_{\mathbb{R}_*} \|I_{(0,\infty)}(r)(I\otimes e^{\frac{r\Lambda}{\epsilon}})W^*(cI-\tilde{L})h\|^2_{\zeta\otimes\mathcal{K}} dr + \int_{\mathbb{R}_*} |\xi(\tfrac{r}{\epsilon})|^2\|v(r)\otimes h\|^2_{\zeta\otimes\mathcal{K}} dr \\
&+2\int_{\mathbb{R}_*} |\xi(\tfrac{r}{\epsilon})|^2\|c\otimes h\|_{\zeta\otimes\mathcal{K}}\|I_{(0,\infty)}(r)(I\otimes e^{\frac{r\Lambda}{\epsilon}})W^*(cI-\tilde{L})h\|_{\zeta\otimes\mathcal{K}} dr \\
&+2\int_{\mathbb{R}_*} |\xi(\tfrac{r}{\epsilon})|^2\|c\otimes h\|_{\zeta\otimes\mathcal{K}}\|v(r)\|_\zeta\|h\|_\mathcal{K} dr \\
&+2\int_{\mathbb{R}_*} |\xi(\tfrac{r}{\epsilon})|^2\|v(r)\otimes h\|_{\zeta\otimes\mathcal{K}}\|I_{(0,\infty)}(r)(I\otimes e^{\frac{r\Lambda}{\epsilon}})W^*(cI-\tilde{L})h\|_{\zeta\otimes\mathcal{K}} dr \\
&\leq \epsilon\|\xi\|^2_{L^2(\mathbb{R}_*)}\|c\|^2_\zeta\|h\|^2_\mathcal{K} + \frac{\epsilon}{2}\|W^*(cI-\tilde{L})\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K},\zeta\otimes\mathcal{H})}\|h\|^2_\mathcal{K} \\
&+\epsilon(\sup_r\|v(r)\|^2_\zeta)\|\xi\|^2_{L^2(\mathbb{R}_*)}\|h\|_\mathcal{K} + (2\epsilon)^{\frac{1}{2}}\|c\|_\zeta\|W^*(cI-\tilde{L})\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K},\zeta\otimes\mathcal{K})}\|h\|^2_\mathcal{K} \\
&+2\epsilon(\sup_r\|v(r)\|_\zeta)\|\xi\|^2_{L^2(\mathbb{R}_*)}\|c\|_\zeta\|h\|^2_\mathcal{K} + (2\epsilon)^{\frac{1}{2}}\|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}_*,\zeta\otimes\mathcal{K})}\|W^*(cI-\tilde{L})\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K},\zeta\otimes\mathcal{K})}\|h\|^2_\mathcal{K} \\
&= \sigma(\epsilon)\|h\|_\mathcal{K}.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\|v_\epsilon - v\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K},L^2(\mathbb{R}_*,\zeta\otimes\mathcal{K}))} = \sigma(\epsilon)^{\frac{1}{2}} \to 0, \text{ cuando } \epsilon \to 0.$$

Con el mismo tipo de estimaciones que en la Proposición 3.3.3 obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}_*^n} \|(\Psi_n(v_\epsilon) - \Psi_n(V))h(r_1,\cdots,r_n)\|^2_{\zeta^{\otimes n}\otimes\mathcal{K}} dr_1\cdots dr_n$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}_*} \|\Pi_{l=n}^{k+1}(I^{\otimes(l-1)}\otimes v_\epsilon(r))(I^{\otimes(k-1)}\otimes(v_\epsilon - v)(r_k))\Pi_{j=k-1}^{1}(I^{\otimes(j-1)}\otimes v(r_j))h\|^2_{\zeta^{\otimes n}\otimes\mathcal{K}} dr$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \|v_\epsilon\|^{2(n-k)}_{\mathcal{B}(\mathcal{K},L^2(\mathbb{R}_*,\zeta\otimes\mathcal{K}))} \|v_\epsilon - v\|^2_{\mathcal{B}(\mathcal{K},L^2(\mathbb{R}_*,\zeta\otimes\mathcal{K}))} \|v\|^{2(k-1)}_{\mathcal{B}(\mathcal{K},L^2(\mathbb{R}_*,\zeta\otimes\mathcal{K}))} \|h\|_{\mathcal{K}}$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \alpha(\epsilon)^{2(n-k)} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}_*,\zeta)} \sigma(\epsilon) \|h\|_{\mathcal{K}}.$$

Nótese que la identidad

$$\int_{\mathbb{R}_*} \|v(r)h\|^2_{\zeta\otimes\mathcal{K}} dr = \|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}_*,\zeta)} \|h\|^2_{\mathcal{K}},$$

implica que

$$\|v\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K},L^2(\mathbb{R}_*,\zeta\otimes\mathcal{K}))} = \|v\|_{L^2(\mathbb{R}_*,\zeta)}.$$

Como $\sigma(\epsilon) \to 0$, la densidad de $\mathbf{D}_0$ se obtiene del hecho que los vectores pseudo-exponenciales de la forma $\Psi(V)h$ con $h \in \mathcal{K}$ y $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}_*, \zeta)$ forman un conjunto denso en $\Gamma_{\mathcal{K}}$, que también usamos en la demostración de la Proposición 3.3.5.

Para demostrar la segunda parte de la proposición obsérvese que de acuerdo con la definición de a_-, para cada $n \geq 1$ se tiene que

$$\Big(a_-\Psi(v_\epsilon)h\Big)_{(n-1)}(r_1,\cdots,r_{n-1}) = \sqrt{n}A_n^-\Psi_n(v_\epsilon)h(r_1,\cdots,r_{n-1})$$

$$= \sqrt{n}\frac{1}{\sqrt{n!}}(S_n\otimes I)(I^{\otimes(n-1)}\otimes v_\epsilon(0^-))(I^{\otimes(n-2)}\otimes v_\epsilon(r_{n-1}))\cdots v_\epsilon(r_1)h$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(n-1)!}}(S_n\otimes I)(I^{\otimes(n-1)}\otimes c)(I^{\otimes(n-2)}\otimes v_\epsilon(r_{n-1}))\cdots v_\epsilon(r_1)h$$

$$= (I^{\otimes^{(n-1)}} \otimes c)\Psi_{n-1}(v_\epsilon)h(r_1, \cdots, r_{n-1}). \qquad (1)$$

En lo anterior hemos usado que $v_\epsilon(0^-) = c$ y que los operadores A_n^s y $(S_n \otimes I)$ conmutan, pues actúan en diferentes factores. Entonces,

$$\|a_-\Psi(v_\epsilon)h\|^2_{\zeta\otimes\Gamma_\mathcal{H}} = \sum_{n\geq 0}\int_{\mathbb{R}^{(n-1)}} \|(I^{\otimes(n-1)}\otimes c)\Psi_{n-1}(v_\epsilon)h(r_1,\cdots,r_{n-1})\|^2_{\zeta\otimes_s^n\otimes\mathcal{H}} d\overrightarrow{r}$$

$$\leq \sum_{n\geq 0}\|c\|^2_\zeta \int_{\mathbb{R}^{(n-1)}} \|\Psi_{n-1}(v_\epsilon)h(r_1,\cdots,r_{n-1})\|^2_{\zeta\otimes_s^n\otimes\mathcal{H}} d\overrightarrow{r} = \|c\|^2_\zeta \|\Psi(v_\epsilon)h\|^2_{\Gamma_\mathcal{H}} < \infty,$$

donde usamos que $\|I^{\otimes_s^n} \otimes c\|_{\mathcal{B}(\zeta^{\otimes(n-1)}\otimes\mathcal{H},\zeta^{\otimes^n}\otimes\mathcal{H})} = \|c\|_\zeta$. Esto demuestra que $\Psi(v_\epsilon)h \in N_{0^-}(\mathrm{D})$ y de manera análoga se demuestra que $\Psi(v_\epsilon)h \in N_{0^+}(\mathrm{D})$

Ahora, usando (1) y tomando en cuenta que $v_\epsilon(0^+) = W^*(cI - \tilde{L})$ tenemos que,

$$\left(a_-\Psi(v_\epsilon)h\right)_{(n-1)}(r_1,\cdots,r_{n-1}) = (I^{\otimes^{(n-1)}} \otimes c)\Psi_{n-1}(v_\epsilon)h(r_1,\cdots,r_{n-1})$$

$$= (I^{\otimes^{(n-1)}} \otimes (Wv_\epsilon(0^+) + \tilde{L}))\Psi_{n-1}(v_\epsilon)h(r_1,\cdots,r_{n-1})$$
$$= \left((Wa_+ + \hat{L})\Psi(v_\epsilon)h\right)_{n-1}(r_1,\cdots,r_{n-1}).$$

Esto demuestra que

$$(a_- - Wa_+ - \hat{L})\Psi(v_\epsilon)h = 0.$$

El resultado se sigue por linealidad. □

De ahora en adelante denotaremos por $\mathcal{C}_0$ a la restricción de $\mathcal{C}$ a $\mathbf{D}_0$.

3.5. Simetría del operador $\mathcal{C}_0$

La fórmula de integración por partes o fórmula de Green, ver por ejemplo [8] página 2, se cumple sobre cada cámara Q_m. De manera que si η_m es el vector normal exterior a ∂Q_m. Entonces para $u, v \in \mathcal{W}_{2,1}(\mathbb{R}^n_*, \zeta^{\otimes^n_s} \otimes \mathcal{K})$, tenemos

$$\int_{Q_m} \langle u, \sum_{l=1}^{n} \partial_l v\rangle_{\zeta^{\otimes^n_s}\otimes\mathcal{K}} = -\int_{Q_m} \langle \sum_{l=1}^{n} \partial_l u, v\rangle_{\zeta^{\otimes^n_s}\otimes\mathcal{K}}$$
$$+\sum_{l=1}^{n} \int_{\partial Q_m} \langle \eta_m, e_l\rangle \langle u\mid_{\partial Q_m}, v\mid_{\partial Q_m}\rangle_{\zeta^{\otimes^n_s}\otimes\mathcal{K}}.$$

Obsérvese que $\langle \eta_m, e_l\rangle$ es diferente de cero solamente sobre $\partial Q_m \cap \{r_l = 0\}$ de manera que $\sum_{l=1}^{n} \langle \eta_m, e_l\rangle$ puede tomar solamente los valores ± 1.

Ahora, para $u, v \in \mathcal{W}^s_{2,1}(\mathbb{R}^n_*, \zeta^{\otimes^n_s} \otimes \mathcal{K})$ sumando sobre las 2^n cámaras de n partículas $Q_m \subset \mathbb{R}^n_*$ tenemos en particular la fórmula de integración por partes

$$\langle u, \sum_{l=1}^{n} \partial_l v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n_*, \zeta^{\otimes^n_s}\otimes\mathcal{K})} = -\langle \sum_{l=1}^{n} \partial_l u, v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n_*, \zeta^{\otimes^n_s}\otimes\mathcal{K})}$$
$$+\sum_{m=1}^{2^n} \sum_{l=1}^{n} \int_{\partial Q_m} \langle \eta_m, e_l\rangle \langle u\mid_{\partial Q_m}, v\mid_{\partial Q_m}\rangle_{L^2(\mathbb{R}^{n-1}, \zeta^{\otimes^n_s}\otimes\mathcal{K})}$$
$$= -\langle \sum_{l=1}^{n} \partial_l u, v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n_*, \zeta^{\otimes^n_s}\otimes\mathcal{K})} + n\langle u\mid_{\{r_n=0^-\}}, v\mid_{\{r_n=0^-\}}\rangle_{L^2(\mathbb{R}^{n-1}, \zeta^{\otimes^n_s}\otimes\mathcal{K})}$$
$$-n\langle u\mid_{\{r_n=0^+\}}, v\mid_{\{r_n=0^+\}}\rangle_{L^2(\mathbb{R}^{n-1}, \zeta^{\otimes^n_s}\otimes\mathcal{K})}.$$

Lema 3.5.1. *Para cada $s \in \{0^-, 0^+\}$ existe una familia de operadores $\big(a_j(s)\big)_{j\in J}$, $a_j(s) : N_{0^\pm}(\mathrm{D}) \to \Gamma_{\mathcal{H}}$ tales que para cada $u, v \in N_{0^\pm}(\mathrm{D})$,*

(i) $a(s)u = \sum_j z_j \otimes a_j(s)u$,

(ii) $\langle a(s)u, a(s)v\rangle_{\zeta\otimes\Gamma_{\mathcal{H}}} = \sum_j \langle a_j(s)u, a_j(s)v\rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}}$,

(iii) $\sum_j \langle L_j u, a_j(0^-)v\rangle_{\zeta\otimes\Gamma_{\mathcal{H}}} = \sum_j \langle u, L_j^* a_j(0^-)v\rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}} = \langle u, \hat{L}^* a_- v\rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}}$.

Demostración. Sea $(z_{j_1} \otimes_s \cdots \otimes_s z_{j_n})$ una base ortonormal de $\zeta^{\otimes_s^n}$ y $(h_k)_{k\geq 1}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$; entonces

$$\Big(a(s)u\Big)_n(t_1,\cdots,t_n) = \sum_{j,j_1,\cdots,j_n,k} \alpha_{j,j_1,\cdots,j_n,k}(t_1,\cdots,t_n) z_j \otimes_s z_{j_1} \otimes_s \cdots \otimes_s z_{j_n} \otimes h_k$$

$$= \sum_j z_j \otimes \sum_{j_1,\cdots,j_n,k} \alpha_{j,j_1,\cdots,j_n,k}(t_1,\cdots,t_n) z_{j_1} \otimes_s \cdots \otimes_s z_{j_n} \otimes h_k.$$

Entonces podemos definir

$$\Big(a_j(s)u\Big)_n = \sum_{j_1,\cdots,j_n,k} \alpha_{j,j_1,\cdots,j_n,k}(t_1,\cdots,t_n) z_{j_1} \otimes_s \cdots \otimes_s z_{j_n} \otimes h_k,$$

y $a_j(s)u = \Big(\big(a_j(s)u\big)_n\Big)$.

Calculando se obtiene que

$$\infty > \|\Big(a(s)\Big)_n u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_*,\zeta^{\otimes_s^{(n+1)}}\otimes\mathcal{H})} = \int_{\mathbb{R}^n_*} \|\Big(a(s)u\Big)_n(t_1,\cdots,t_n)\|^2_{\zeta^{\otimes_s^{(n+1)}}\otimes\mathcal{H}} dt_1,\cdots dt_n$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n_*} \|\sum_j z_j \otimes \Big(a(s)u\Big)_n(t_1,\cdots,t_n)\|^2_{\zeta^{\otimes_s^n}\otimes\mathcal{H}} dt_1,\cdots dt_n$$

$$= \sum_j \|z_j\|^2 \int_{\mathbb{R}^n_*} \|\Big(a(s)u\Big)_n(t_1,\cdots,t_n)\|^2_{\zeta^{\otimes_s^n}\otimes\mathcal{H}} dt_1,\cdots dt_n$$

$$= \sum_j \|\Big(a_j(s)u\Big)_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_*,\zeta^{\otimes_s^n}\otimes\mathcal{H})} = \|\sum_j z_j \otimes \Big(a_j(s)u\Big)_n\|^2_{\zeta\otimes L^2(\mathbb{R}^n,\zeta^{\otimes_s^n}\otimes\mathcal{H})}. \tag{1}$$

Es decir, la serie en el lado derecho es convergente.

Ahora bien, usando (1) se obtiene que

$$\|a(s)u\|^2_{\zeta\otimes\Gamma_{\mathcal{H}}} = \sum_{n\geq 0} \|\Big(a(s)u\Big)_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{(n-1)}_*,\zeta^{\otimes_s^n}\otimes\mathcal{H})}$$

$$= \sum_{n\geq 0}\sum_j \|\Big(a_j(s)u\Big)_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{(n-1)}_*,\zeta^{\otimes_s^{(n-1)}}\otimes\mathcal{H})} = \sum_j \|a_j(s)u\|^2_{\Gamma_{\mathcal{H}}}.$$

Y (ii) se obtiene de lo anterior usando la identidad de polarización.

Para demostrar (*iii*) obsérvese que

$$\langle u, \hat{L}^* a_- v\rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}} = \langle u, \hat{L}^* \sum_j z_j \otimes a_j(0^-)v\rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}} = \sum_{j,k} \langle z_k, z_j\rangle_\zeta \langle u, L_k^* a_j(0^-)v\rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}}$$

$$= \sum_j \langle L_j u, a_j(0^-)v\rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}}.$$

□

De acuerdo con la parte (*ii*) del lema anterior, la fórmula de integración por partes vale para $u, v \in N_{0^\pm}(\mathrm{D})$ y tiene la forma

$$\langle u, \nabla v\rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}} = -\langle \nabla u, v\rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}} + \langle a_- u, a_- v\rangle_{\zeta\otimes\Gamma_{\mathcal{H}}} - \langle a_+ u, a_+ v\rangle_{\zeta\otimes\Gamma_{\mathcal{H}}}$$

$$= -\langle \nabla u, v\rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}} + \sum_j \langle a_j(0^-)u, a_j(0^-)v\rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}} - \sum_j \langle a_j(0^+)u, a_j(0^+)v\rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}} \quad (2).$$

Teorema 3.5.2. *El operador $\mathcal{C}_0$ es simétrico.*

Demostración Sean $v = \Psi(v_\epsilon)h$ y $u = \Psi(u_\epsilon)h$ dos elementos de $\mathbf{D}_0$, entonces la condición de frontera implica que $W a_+ u = a_- u - \tilde{L}u$, o equivalentemente,

$$W \sum_j z_j \otimes a_j(0^+)u = \sum_j z_j \big(a_j(0^-) - L_j\big)u.$$

Consecuentemente,

$$\sum_j \langle a_j(0^+)u, a_j(0^+)v\rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}} = \sum_{j,j'} \langle z_j, z_{j'}\rangle_\zeta \langle a_j(0^+)u, a_j(0^+)v\rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}}$$

$$= \langle W\Big(\sum_j z_j \otimes a_j(0^+)u\Big), W\Big(\sum_{j'} z_{j'} \otimes a_{j'}(0^+)u\Big)\rangle_{\zeta\otimes\Gamma_{\mathcal{H}}}$$

$$= \langle \sum_j z_j \otimes \big(a_j(0^-) - L_j\big)u, \sum_{j'} z_{j'} \otimes \big(a_{j'}(0^-) - L_{j'}\big)v\rangle_{\zeta\otimes\Gamma_{\mathcal{H}}} =$$

$$\sum_{j,j'} \langle z_j, z_{j'}\rangle_\zeta \langle \big(a_j(0^-) - L_j\big)u, \big(a_{j'}(0^-) - L_{j'}\big)u\rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}}$$

$$= \sum_j \langle \big(a_j(0^-) - L_j\big)u, \big(a_j(0^-) - L_j\big)u\rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}}.$$

Usando esta condición y la fórmula de integración por partes (2) después de algunos cálculos obtenemos que,

$$\langle u, \mathcal{C}_0 v\rangle = i\langle u, (\nabla + G^* - L^* a_-)v\rangle$$
$$= -\langle \nabla u, v\rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}} + i\sum_j \langle a_j(0^-)u, a_j(0^-)v\rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}} - i\sum_j \langle a_j(0^+)u, a_j(0^+)v\rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}}$$
$$+i\langle u, G^* v\rangle - i\langle u, L^* a_- v\rangle = -i\langle \nabla u, v\rangle + i\sum_j \langle a_j(0^-)u, a_j(0^-)v\rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}}$$
$$-i\sum_j \langle \big(a_j(0^-) - L_j\big)u, \big(a_j(0^-) - L_j\big)u\rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}} + i\langle u, G^* v\rangle - i\langle u, L^* a_- v\rangle$$
$$= -i\langle \nabla u, v\rangle - i\sum_j \langle L_j u, L_j v\rangle + i\sum_j \langle a_j(0^-)u, L_j v\rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}} + i\sum_j \langle L_j u, a_j(0^-)v\rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}}$$
$$+i\langle u, G^* v\rangle - i\langle u, L^* a_- v\rangle = -i\langle \nabla u, v\rangle + i\sum_j \langle L_j^* a_j(0^-)u, v\rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}}$$
$$-i\langle (G^* + G)u, v\rangle + i\langle u, G^* v\rangle_{\Gamma_{\mathcal{H}}} = \langle i(\nabla - L^* a_- + G^*)u, v\rangle = \langle \mathcal{C}_0 u, v\rangle.$$

También hemos usado la igualdad $G + G^* = \sum_j L_j^* L_j$. □

Una vez demostrado que $\mathcal{C}_0$ es simétrico, mediante una aplicación de la Proposición 2.4.1 obtenemos condiciones suficientes para que el operador $-i\mathcal{C}_0$ sea restricción del generador infinitesimal de un semigrupo de isometrías. En particular, esto se tiene si $\mathcal{C}_0$ es esenciamente autoadjunto.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

También tenemos, usando la igualdad [illegible] $\sum_j L_j^* L_j$.

Una vez demostrado que C_0 es simétrico, mediante una aplicación de la Proposición 2.4.1 obtenemos condiciones suficientes para que el operador $-C_0$ sea restricción del generador infinitesimal de un semigrupo de isometrías [illegible]. En particular, esto lo tenemos si C_0 es esencialmente autoadjunto.

Capítulo 4

Aplicaciones

4.1. Introducción

En este capítulo ilustraremos la teoría desarrollada en el capítulo anterior aplicándola a dos ejemplos. La Hipótesis H-4 no se cumple en estos ejemplos, por esta razón empezaremos estableciendo una nueva hipótesis, la cual resulta alternativa a la hipótesis H-4; además daremos una extensión de la Proposición 3.4.2 la cual resulta como consecuencia del cumplimiento de nuestra nueva suposición. En la última sección del presente capítulo discutiremos cómo nuestro enfoque se relaciona con el resultado de M. Gregoratti [19], en el caso de coeficientes acotados.

La siguiente hipótesis alternativa a la hipótesis H-4, resulta parte medular para el desarrollo del presente capítulo.

Hipótesis H-4': $(I \otimes \Lambda)^{\frac{1}{2}} W^*(cI - \tilde{L})\Lambda^{-\frac{1}{2}} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \zeta \otimes \mathcal{H})$.

Proposición 4.1.1. *Si se cumple la Hipótesis H-4', entonces para cada* $\epsilon > 0$ *y* $h \in dom(\Lambda)$*:*

(i) $\int_{\mathbb{R}_*} \|v'_\epsilon(r)h\|^2_{\zeta\otimes\mathcal{H}} dr \leq \tilde{\lambda}(\epsilon)^2 \|\Lambda^{\frac{1}{2}} h\|^2_{\mathcal{K}}$, *donde* $\tilde{\lambda}(\epsilon)$ *es una constante.*

(ii) $\nabla\Psi(v_\epsilon)h := (\sum_{k=1}^n \partial_k \Psi_n(v_\epsilon)h)_{n\geq 0} \in \Gamma_{\mathcal{H}}$.

Demostración. Sea $h \in \mathrm{dom}(\Lambda)$, como en la demostración de la Proposición 3.4.2 tenemos que, si $\mu(dx)$ es la medida espectral del operador autoadjunto $I \otimes \Lambda$ asociada con el $W^*(cI - \tilde{L})h \in \zeta \otimes \mathcal{H}$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty}\|(I\otimes\Lambda e^{-t\Lambda})I_{(0,\infty)}(t)W^*(cI-\tilde{L})h\|^2_{\zeta\otimes\mathcal{H}}dt=\frac{1}{2}\int_1^{\infty}x\mu(dx)$$

$$=\frac{1}{2}\langle W^*(cI-\tilde{L})h,(I\otimes\Lambda)W^*(cI-\tilde{L})h\rangle_{\zeta\otimes\mathcal{H}}$$

$$=\|(I\otimes\Lambda)^{\frac{1}{2}}W^*(cI-\tilde{L})\Lambda^{-\frac{1}{2}}\Lambda^{\frac{1}{2}}h\|_{\zeta\otimes\mathcal{H}}$$

$$\leq\|(I\otimes\Lambda)^{\frac{1}{2}}W^*(cI-\tilde{L})\Lambda^{-\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K},\zeta\otimes\mathcal{H})}\|\Lambda^{\frac{1}{2}}h\|_{\mathcal{K}}.$$

De manera similar se obtiene la estimación

$$\int_{-\infty}^{\infty}\|I_{(0,\infty)}(r)(I\otimes e^{-\frac{r}{\epsilon}\Lambda})W^*(cI-\tilde{L})h\|^2_{\zeta\otimes\mathcal{H}}dr$$

$$\leq\frac{\epsilon}{2}\|W^*(cI-\tilde{L})\Lambda^{-\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K},\zeta\otimes\mathcal{H})}\|\Lambda^{\frac{1}{2}}h\|_{\mathcal{K}}.$$

Entonces, de manera análoga a la demostración de la Proposición 3.4.2 y observando que $\|h\|_{\mathcal{H}}\leq\|\Lambda^{\frac{1}{2}}h\|_{\mathcal{H}}\leq\|\Lambda^{\frac{1}{2}}h\|_{\mathcal{K}}$, se obtiene que

$$\int_{\mathbb{R}_*}\|v'_\epsilon(r)h\|_{L^2(\mathbb{R}_*,\zeta\otimes\mathcal{H})}dr\leq\tilde{\lambda}(\epsilon)^2\|\Lambda^{\frac{1}{2}}h\|_{\mathcal{K}},$$

donde

$$\tilde{\lambda}(\epsilon)^2=4\|v'\|_{L^2(\mathbb{R}_*,\zeta)}+\epsilon^{-2}\|(I\otimes\Lambda)^{\frac{1}{2}}W^*(cI-\tilde{L})\Lambda^{-\frac{1}{2}}\|^2_{\mathcal{B}(\mathcal{K},\zeta\otimes\mathcal{H})}$$

$$+\epsilon^{-1}\|c\|^2_\zeta\|\xi'\|^2_{L^2(\mathbb{R})}+\frac{\epsilon^{-1}}{2}\|W^*(cI-\tilde{L})\Lambda^{-\frac{1}{2}}\|^2_{\mathcal{B}(\mathcal{K},\zeta\otimes\mathcal{H})}+\epsilon^{-2}\|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}_*,\zeta)}$$

$$+4\epsilon^{-1}\|v'\|_{L^2(\mathbb{R}_*,\zeta)}\|(I\otimes\Lambda)^{\frac{1}{2}}W^*(cI-\tilde{L})\Lambda^{-\frac{1}{2}}\|^2_{\mathcal{B}(\mathcal{K},\zeta\otimes\mathcal{H})}+2\epsilon^{\frac{1}{2}}\|c\|_\zeta\|v'\|_{L^2(\mathbb{R}_*,\zeta)}\|\xi'\|_{L^2(\mathbb{R}_*)}$$

$$+\|v'\|_{L^2(\mathbb{R}_*,\zeta)}\|W^*(cI-\tilde{L})\Lambda^{-\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K},\zeta\otimes\mathcal{H})}+\|v'\|_{L^2(\mathbb{R}_*,\zeta)}\|v\|_{L^2(\mathbb{R}_*,\zeta)}$$

$$+\|W^*(cI-\tilde{L})\Lambda^{-\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K},\zeta\otimes\mathcal{H})}\|(I\otimes\Lambda)^{\frac{1}{2}}W^*(cI-\tilde{L})\Lambda^{-\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K},\zeta\otimes\mathcal{H})}$$

$$+\epsilon^{-2}\|v\|_{L^2(\mathbb{R}_*,\zeta)}\|(I\otimes\Lambda)^{\frac{1}{2}}W^*(cI-\tilde{L})\Lambda^{-\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K},\zeta\otimes\mathcal{H})}$$

$$+\epsilon^{-2}\|c\|_\zeta\Big(\int_{-\infty}^{\infty}|\xi'(\frac{r}{\epsilon})|^4dr\Big)^{\frac{1}{2}}\|v\|_{L^2(\mathbb{R}_*,\zeta)}+\frac{1}{2}\epsilon^{-\frac{3}{2}}\|v\|_{L^2(\mathbb{R}_*,\zeta)}\|W^*(cI-\tilde{L})\Lambda^{-\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K},\zeta\otimes\mathcal{H})}.$$

Esto demuestra el primer inciso.

Para demostrar la segunda parte obsérvese que para $\varphi \in \zeta^{\otimes(j-1)} \otimes \mathcal{H}$, tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}_*} \|(I^{\otimes(j-1)} \otimes v_\epsilon'(r))\varphi\|^2_{\zeta^{\otimes j}\otimes\mathcal{H}} dr \leq \tilde{\lambda}(\epsilon)^2 \|(I^{\otimes(j-1)} \otimes \Lambda^{\frac{1}{2}})\varphi\|^2_{\zeta^{\otimes(j-1)}\otimes\mathcal{H}}.$$

Esto se demuestra primero para tensores simples y después para elementos generales en $\zeta^{\otimes(j-1)} \otimes \mathcal{H}$ aproximando con tensores simples.

Para $h \in \mathrm{dom}(\Lambda)$ tenemos que

$$\partial_j \psi_n(v_\epsilon)h(r_1, \cdots, r_n) = (n!)^{-\frac{1}{2}}(S_n \otimes I)(I^{\otimes(n-1)} \otimes v_\epsilon(r_n)) \cdots (I^{\otimes(j-1)} \otimes v_\epsilon'(r_j)) \cdots v_\epsilon(r_1),$$

consecuentemente para $n \geq 1$ tenemos las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}_*^n} \|\nabla \psi_n(v_\epsilon)h(r_1, \cdots r_n)h\|^2_{\zeta^{\otimes n}\otimes\mathcal{H}} d\overrightarrow{r} \\
\leq &\sum_{j=1}^n (n!)^{-1} \int_{\mathbb{R}_*^n} \|(I^{\otimes(n-1)} \otimes v_\epsilon(r_n)) \cdots (I^{\otimes(j-1)} \otimes v_\epsilon'(r_j)) \cdots v_\epsilon(r_1)\|^2_{\zeta^{\otimes n}\otimes\mathcal{H}} d\overrightarrow{r} \\
&\leq n(n!)^{-1} \|v_\epsilon\|^{2(n-j)}_{\mathcal{B}(\mathcal{K}, L^2(\mathbb{R}_*, \zeta\otimes\mathcal{H}))} \tilde{\lambda}(\epsilon)^2 \|v_\epsilon\|^{2(j-1)}_{\mathcal{B}(\mathcal{K}, L^2(\mathbb{R}_*, \zeta\otimes\mathcal{K}))} \|\Lambda^{\frac{1}{2}} h\|^2_{\mathcal{K}} \\
&\leq \frac{1}{(n-1)!} \tilde{\lambda}(\epsilon)^2 \alpha(\epsilon)^{2(n-1)} \|\Lambda^{\frac{1}{2}} h\|^2_{\mathcal{K}}.
\end{aligned}$$

Hemos usado que $\|v_\epsilon\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K}, L^2(\mathbb{R}_*, \zeta\otimes\mathcal{H}))}$ y $\|v_\epsilon\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K}, L^2(\mathbb{R}_*, \zeta\otimes\mathcal{K}))}$ son ambas menores que la constante $\alpha(\epsilon)$ en la demostración de la Proposición 3.4.1.

De aquí se obtiene que para cada $\epsilon > 0$,

$$\|\nabla \psi(v_\epsilon)h\|^2_{\Gamma_\mathcal{K}} \leq \|h\|^2_\mathcal{K} + \tilde{\lambda}(\epsilon)^2 \|\Lambda^{\frac{1}{2}} h\|^2_\mathcal{K} \sum_{n\geq 1} \frac{\alpha(\epsilon)^{2(n-1)}}{(n-1)!} < \infty.$$

Esto demuestra la proposición. □

Los resultados de la Proposición 3.4.3 siguen siendo ciertos si se reemplaza $\mathbf{D}_0$ por el subconjunto denso

$$\tilde{\mathbf{D}}_0 = \{\Psi(v_\epsilon)h : v, \xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_*, \zeta), h \in \mathrm{dom}(\Lambda) \text{ y } \epsilon > 0\}.$$

4.2. El proceso de absorción y emisión simultánea de dos fotones

El fenómeno de absorción y emisión simultánea de dos fotones es uno de los mecanismos fundamentales de interacción entre la materia y la energía. Fue descubierto teóricamente por Maria Göppert-Mayer [27] en 1931, laureada con el premio nobel, y observado por primera vez en 1961, ver [32]. Desde entonces este fenómeno ha sido estudiando de manera intensa. En un trabajo reciente [9], F. Fagnola y R. Quezada estudiaron los estados invariantes del semigrupo cuántico de Markov asociado con este proceso en el caso $\lambda_1 \leq \lambda_0$. Se sabe que el semigrupo dinámico cuántico minimal construido a partir del correspondiente generador de Lindblad y Gorini-Kossakowski-Sudarshan es explosivo si $\lambda_1 > \lambda_0$, véase [16]

Nuestro propósito principal en esta sección es aplicar la teoría desarrollada en el capítulo anterior y así obtener que el Hamiltoniano $\mathcal{C}_0$ asociado con este proceso es un operador simétrico. Para esto utilizaremos el modelo matemático para describir este fenómeno que fue deducido en [9] usando la técnica del límite estocástico, [2].

En este caso, $|J| = 2$, $\mathcal{H} = l^2(\mathbb{N})$ y $\zeta = \mathbb{C}^2$; entonces podemos tomar $J = \{0, 1\}$ y tomaremos $W_{j,k} = \delta_{j,k} I$, $j, k \in J$. Los operadores $\{L_j\}_{j \in J}$ se definen mediante las relaciones $L_0 = \lambda_0 a_0^2$, $L_1 = \lambda_1 a_1^2$ donde $a_1 = a^\dagger$, $a_0 = a$ son los operadores de creación y aniquilación, respectivamente, $\lambda_0 > 0$, $\lambda_1 \geq 0$ y $\lambda_1 \leq \lambda_0$.

Recuérdese que estos operadores actúan de acuerdo con la regla

$$a^\dagger e_{n-1} = a_1 e_{n-1} = \sqrt{n} e_n, \qquad a e_n = a_0 e_n = \sqrt{n} e_{n-1};$$

donde e_k es el k-ésimo elemento de la base canónica de $\mathcal{H} = l^2$; además estos cumplen con la relación de conmutación $[a, a^\dagger] = 1$. En este caso, para $\omega \in \mathbb{R}$, el operador autoadjunto H está definido por $H : \mathrm{dom}(N^2) \to l^2$ y $H = \omega a_1^2 a_0^2 = \omega N(N-1)$, donde N es el operador de número $N = a^\dagger a = a_1 a_0$ densamente definido en

$$\mathrm{dom}(N) = \{x = (x_n)_{n=1}^\infty \in l^2 : \sum_{n=1}^\infty n^2 |x_n|^2 < \infty\}.$$

Como los operadores L_0, L_1 y H no son acotados, este ejemplo no se puede tratar con la teoría desarrollada por M. Gregoratti [18], [19]. Y como la multiplicidad es 2, entonces los resultados de Chebotarev en [7] tampoco se aplican a este ejemplo.

Usaremos la notación: $\{z_j\}_{j=0,1}$ como la base de $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$, es decir $z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$, $z_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle$.

Se puede probar que se tiene la cadena de contenciones $\mathrm{dom}(L_j) = \mathrm{dom}(N) \supseteq \mathrm{dom}(N^2) \supseteq \mathrm{dom}(N^3) \supseteq \cdots$

Para aplicar nuestra teoría tomaremos

$$\mathcal{K} = \mathrm{dom}(N^2) = \{x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in l^2 : \sum_{n=1}^{\infty} n^4 |x_n|^2 < \infty\}.$$

Con la norma $||x||_{\mathcal{K}} = ||N^2 x||_{\mathcal{H}}$; es decir, $\Lambda = N^4$. Este $\mathcal{K}$ satisface nuestra Hipótesis H-1.

El operador $\widetilde{L} : \mathcal{K} \to \mathbb{C}^2 \otimes l^2$ está dado por $\widetilde{L} = \sum_{j=0}^{1} |j\rangle \otimes L_j$, es decir, para $h \in \mathcal{K}$ tenemos

$$\widetilde{L}h = \sum_{j=0}^{1} |j\rangle \otimes L_j h = \lambda_0 |0\rangle \otimes a_0^2 h + \lambda_1 |1\rangle \otimes a_1^2 h.$$

Proposición 4.2.1. *(i)* $L_j \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ *para cada* $j \in J$.

(ii) $L_j^* L_j \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$, *para cada* j *y por lo tanto* $\sum_j L_j^* L_j \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$.

(iii) $H \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$.

Demostración.(i) Para $x \in \mathcal{K}$, $x = \sum_{n\geq 1} x_n e_n$, con $(e_n)_{n\geq 1}$ la base canónica de l^2; tenemos que $L_0 x = \lambda_0 \sum_{n=1}^{\infty} x_n \sqrt{n(n-1)} e_{n-2}$, así

$$||L_0 x||_{l^2}^2 = \langle \lambda_0 \sum_{n=1}^{\infty} x_n \sqrt{n(n-1)} e_{n-2}, \lambda_0 \sum_{n=1}^{\infty} x_n \sqrt{n(n-1)} e_{n-2} \rangle_{l^2}$$

$$= \lambda_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)|x_n|^2 \leq \lambda_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^4 |x_n|^2 = \lambda_0^2 ||N^2 x||_{l^2}^2 = \lambda_0^2 \langle N^2 x, N^2 x \rangle_{l^2}$$

$$= \lambda_0^2 \langle x, x \rangle_{\mathcal{K}} = \lambda_0^2 ||x||_{\mathcal{K}}^2.$$

Por lo tanto tenemos $||L_0 x||_{l^2}^2 \leq \lambda_0^2 ||x||_{\mathcal{K}}^2$; así, $L_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$, de hecho $||L_0||_{\mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})} \leq \lambda_0$. De manera análoga $L_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ y $||L_1||_{\mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})} \leq \lambda_1$. Esto demuestra (i).

(ii) Para $x \in \mathcal{K}$, tenemos que $L_0 x \in \mathrm{dom}L_0^* = \mathrm{dom}N$, $L_1 x \in \mathrm{dom}L_1^* = \mathrm{dom}N$ y $L_0^* L_0 x = \lambda_0^2 a_1^2 a_0^2 x = \lambda_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) x_n e_n$, $L_1^* L_1 x = \lambda_1^2 a_0^2 a_1^2 x = \lambda_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(n+2) x_n e_n$, luego

$$\begin{aligned} ||L_0^* L_0 x||_{\mathcal{H}}^2 &= \lambda_0^4 \sum_{n=1}^{\infty} n^2(n-1)^2 |x_n|^2 \leq \lambda_0^4 \sum_{n=1}^{\infty} n^4 |x_n|^2 = \lambda_0^4 ||N^2 x||_{\mathcal{H}}^2 \\ &= \lambda_0^4 \langle N^2 x, N^2 x \rangle_{\mathcal{H}} = \lambda_0^4 \langle x, x \rangle_{\mathcal{K}} = \lambda_0^4 ||x||_{\mathcal{K}}^2. \end{aligned}$$

De manera análoga,

$$\begin{aligned} ||L_1^* L_1 x||_{\mathcal{H}}^2 &= \lambda_1^4 \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 (n+2)^2 |x_n|^2 \leq \lambda_1^4 \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)^4 |x_n|^2 < 81 \lambda_1^4 \sum_{n=1}^{\infty} n^4 |x_n|^2 \\ &= 81 \lambda_1^4 ||N^2 x||_{\mathcal{H}}^2 = 81 \lambda_1^4 ||x||_{\mathcal{K}}^2. \end{aligned}$$

Así tenemos que $\sum_j L_j^* L_j \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$.
(iii) La prueba de que $H \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ es análoga a la de (ii). □

Como consecuencia inmediata de la Proposición 4.2.1 se tiene que las Hipótesis H-2 y H-3 se cumplen.

En este ejemplo los operadores base para los vectores pseudo-exponenciales son los siguientes.
Sea $v \in \mathcal{W}_{2,1}(\mathbb{R}_*, \mathbb{C}^2)$, $v(t) = v_0(t)|0\rangle + v_1(t)|1\rangle$, donde $v_j : \mathbb{R}_* \to \mathbb{C}$ son funciones absolutamente continuas y $v_j' \in L^2(\mathbb{R}_*, \mathbb{C})$. $V(t) : \mathcal{K} \to \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{K}$, es tal que $V(t)h = v(t) \otimes h$, $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ con $\xi(0) = 1$, $|\xi(t)| \leq 1$ $\forall t \in \mathbb{R}$. En este ejemplo, la base de los vectores pseudo-exponenciales son los operadores $v_\epsilon \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, L^2(\mathbb{R}_*, \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{K}))$ que en este caso tienen la forma,

$$v_\epsilon(t) := V(t)(1 - \xi(\frac{t}{\epsilon})) + \xi(\frac{t}{\epsilon})\{cI_{(-\infty,0)}(t) + I_{(0,\infty)}(t)(I \otimes e^{\frac{-t}{\epsilon}N^4})(cI - \widetilde{L})\},$$

teniendo en cuenta las notaciones anteriores y que para $c \in \mathbb{C}^2$, $c = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$, $ch = c \otimes h = c_0|0\rangle \otimes h + c_1|1\rangle \otimes h$, $c_j \in \mathbb{C}$.

Para $h \in \mathcal{K}$ tenemos,

$$\begin{aligned} v_\epsilon(t)h = \sum_{j \in J} \{ &(1 - \xi(\frac{t}{\epsilon})) v_j(t)|j\rangle \otimes h + \xi(\frac{t}{\epsilon}) I_{(-\infty,0)}(t) c_j |j\rangle \otimes h \\ &+ I_{(0,\infty)}(t)|j\rangle \otimes e^{-\frac{t}{\epsilon}N^4}(c_j - \lambda_j a_j^2)h \}. \end{aligned}$$

En el presente ejemplo se cumple con la Hipótesis H-4'.

Proposición 4.2.2. *El operador* $(I \otimes \Lambda)^{\frac{1}{2}} W^*(cI - \tilde{L})\Lambda^{-\frac{1}{2}} : \mathcal{K} \to \mathbb{C}^2 \otimes l^2$ *está bien definido y es acotado.*

Demostración. Recuérdese que $W^* = I$, $\Lambda = N^4$ y $\mathcal{K} = \mathrm{dom}(N^2)$. Sea $x_1 \in \mathcal{K}$ y $x = N^{-2}x_1 \in \mathrm{dom}(N^4)$, entonces

$$(I \otimes N^2)(cI - \tilde{L})N^{-2}x_1 = (I \otimes N^2)(cI - \tilde{L})x = (I \otimes N^2)(\sum_{j\in J}\{c_j|j\rangle \otimes x - \lambda_j|j\rangle \otimes a_j^2 x\})$$

$$= \sum_{j\in J}\{c_j|j\rangle \otimes N^2 x - \lambda_j|j\rangle \otimes N^2 a_j^2 x\}$$

el operador está bien definido, pues $x \in \mathrm{dom}(N^4)$.

Ahora, veremos que el operador $(I \otimes N^2)(cI - \tilde{L})N^{-2} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathbb{C}^2 \otimes l^2)$, sea $x_1 \in \mathcal{K}$, entonces $N^{-2}x_1 = x \in \mathrm{dom}(N^4) \subset \mathcal{K}$, calculando tenemos

$$(I \otimes N^2)(cI - \tilde{L})N^{-2}x_1 = \sum_{j\in J}\{c_j|j\rangle \otimes N^2 x - \lambda_j|j\rangle \otimes N^2 a_j^2 x\},$$

así que

$$||(I \otimes N^2)(cI - \tilde{L})N^{-2}x_1||_{\mathbb{C}^2\otimes\mathcal{H}} = ||\sum_{j\in J}\{c_j|j\rangle \otimes N^2 x - \lambda_j|j\rangle \otimes N^2 a_j^2 x\}||_{\mathbb{C}^2\otimes\mathcal{H}}$$

$$\leq \sum_{j\in J}\{||c_j|j\rangle \otimes N^2 x||_{\mathbb{C}^2\otimes\mathcal{H}} + ||\lambda_j|j\rangle \otimes N^2 a_j^2 x||_{\mathbb{C}^2\otimes\mathcal{H}}\}$$

$$= \sum_{j\in J}\{|c_j|||N^2 x||_{\mathcal{H}} + \lambda_j||N^2 a_j^2 x||_{\mathcal{H}}\}.$$

Ahora, teniendo en cuenta la relación de conmutación $[a_0, a_1] = 1$, se prueba que $N^2 a_0^2 = a_0^2(N-2)^2$, entonces tomando $x_1 \in \mathcal{K}$ y considerando que a_0^2 es acotado en $\mathcal{K}$ y que $||a_0||_{\mathcal{B}(\mathcal{K};\mathcal{H})} \leq 1$, tenemos:

$$||N^2 a_0^2 x||_{l^2} = ||a_0^2(N-2)^2 x||_{l^2} \leq ||(N-2)^2 N^{-2}x_1||_{\mathcal{K}} = ||(I - 4N^{-1} + 4N^{-2})x_1||_{\mathcal{K}}$$

$$\leq ||x_1||_{\mathcal{K}} + 4||N^{-1}x_1||_{\mathcal{K}} + 4||N^{-2}x_1||_{\mathcal{K}} = ||x_1||_{\mathcal{K}} + 4||Nx_1||_{l^2} + 4||x_1||_{l^2}$$

$$\leq ||x_1||_{\mathcal{K}} + 4||N^2 x_1||_{l^2} + 4||x_1||_{\mathcal{K}} = ||x_1||_{\mathcal{K}} + 4||x_1||_{\mathcal{K}} + 4||x_1||_{\mathcal{K}} = 9||x_1||_{\mathcal{K}}.$$

De esto resulta que

$$||N^2 a_0^2 x||_{l^2} \leq ||(N-2)^2 N^{-2}x_1||_{\mathcal{K}} \leq 9||x_1||_{\mathcal{K}}.$$

También, teniendo en cuenta la relación de conmutación y que a_1^2 es acotado en $\mathcal{K}$ se prueba de manera análoga que

$$||N^2 a_1^2 x||_{l^2} \leq ||(N+2)^2 N^{-2} x_1||_{\mathcal{K}} \leq 9||x_1||_{\mathcal{K}}.$$

Esto demuestra que $(I \otimes N^2)(cI - \tilde{L})N^{-2} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathbb{C}^2 \otimes l^2)$. □

4.3. El proceso cuántico de nacimiento y muerte

Este es un ejemplo similar al anterior. y por esta razón omitiremos algunos cálculos. Este proceso ha sido estudiado por varios autores, se conoce por ejemplo que tiene un sólo estado invariante si $\lambda_1 \leq \lambda_0$ y se ha estimado la velocidad de convergencia hacia el estado invariante, ver [5]. También se sabe que el semigrupo dinámico minimal construido con el correspondiente generador de Lindblad y Gorini-Kossakowski-Sudarshan, es explosivo si $\lambda_0 < \lambda_1$, [16].

Aquí, $|J| = 2$, $\mathcal{H} = l^2(\mathbb{N})$ y $\zeta = \mathbb{C}^2$; podemos tomar $J = \{0, 1\}$ y tomaremos $W_{j,k} = \delta_{j,k} I$, $j, k \in J$. Los operadores $\{L_j\}_{j \in J}$ se definen mediante las relaciones $L_0 = \lambda_0 a_0$, $L_1 = \lambda_1 a_1$ donde $a_1 = a^\dagger$, $a_0 = a$ son los operadores de creación y aniquilación, respectivamente, $\lambda_0 > 0$, $\lambda_1 \geq 0$ y $\lambda_1 \leq \lambda_0$. En este caso $H = 0$.

Se puede probar que se tiene la cadena de contenciones $\mathrm{dom}(L_j) = \mathrm{dom}(N^{\frac{1}{2}}) \supseteq \mathrm{dom}(N) \supseteq \mathrm{dom}(N^2) \supseteq \mathrm{dom}(N^3) \supseteq \cdots$

En el presente ejemplo tomaremos $\mathcal{K} = \mathrm{dom}(N)$, es decir, $\Lambda = N^2$.

El operador $\tilde{L} : \mathcal{K} \to \mathbb{C}^2 \otimes l^2$ está dado por $\tilde{L} = \sum_{j=0}^{1} |j\rangle \otimes L_j$, es decir, para $h \in \mathrm{dom}(N)$ tenemos

$$\tilde{L}h = \sum_{j=0}^{1} |j\rangle \otimes L_j h = \lambda_0 |0\rangle \otimes a_0 h + \lambda_1 |1\rangle \otimes a_1 h,$$

Proposición 4.3.1. *(i)* $L_j \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ *para cada* $j \in J$,

(ii) $L_j^* L_j \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ *para cada* j *y consecuentemente* $\sum_j L_j^* L_j \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$.

Demostración. La demostración es análoga a la correspondiente Proposición 4.2.1. □

Como consecuencia inmediata de la Proposición 4.3.1 se obtiene que la Hipótesis H-2 se cumple y $\sum_j \|L_j^* L_j\|^2_{\mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})} < \infty$, es decir, la Hipótesis H-3 también se cumple.

En este ejemplo los operadores base para los vectores pseudo-exponenciales se obtienen de la siguiente manera:

sea $v \in \mathcal{W}_{2,1}(\mathbb{R}_*, \mathbb{C}^2)$, $v(t) = v_0(t)|0\rangle + v_1(t)|1\rangle$, donde $v_j : \mathbb{R}_* \to \mathbb{C}$ son funciones absolutamente continuas; sean además $V(t) : \mathcal{K} \to \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{K}$, tal que $V(t)h = v(t) \otimes h$, $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\xi(0) = 1$, $|\xi(t)| \leq 1\ \forall t \in \mathbb{R}$.

La base de los vectores pseudo-exponenciales son los operadores $v_\epsilon \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, L^2(\mathbb{R}_*, \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{K}))$ que en particular aquí los definiremos como

$$v_\epsilon(t) := V(t)(1 - \xi(\frac{t}{\epsilon})) + \xi(\frac{t}{\epsilon})\{cI_{(-\infty,0)}(t) + I_{(0,\infty)}(t)(I \otimes e^{\frac{-t}{\epsilon}N^2})(cI - \widetilde{L})\}$$

teniendo en cuenta las notaciones anteriores y que aquí $c \in \mathbb{C}^2$, $c = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$, $ch = c \otimes h = c_0|0\rangle \otimes h + c_1|1\rangle \otimes h$, $c_j \in \mathbb{C}$.

Para $h \in \mathcal{K}$ tenemos,

$$\begin{aligned} v_\epsilon(t)h = \sum_{j\in J}\{(1 - \xi(\frac{t}{\epsilon}))v_j(t)|j\rangle \otimes h + \xi(\frac{t}{\epsilon})I_{(-\infty,0)}(t)c_j|j\rangle \otimes h \\ + I_{(0,\infty)}(t)|j\rangle \otimes e^{-\frac{t}{\epsilon}N^2}(c_j - \lambda_j a_j^2)h\}. \end{aligned}$$

En el presente ejemplo se cumple la Hipótesis H-4'.

Proposición 4.3.2. *El operador* $(I \otimes \Lambda)^{\frac{1}{2}} W^*(cI - \widetilde{L})\Lambda^{-\frac{1}{2}} : \mathcal{K} \to \mathbb{C}^2 \otimes l^2$ *está bien definido y es acotado.*

Demostración. Recuérdese que $W^* = I$, $\Lambda = N^2$ y $\mathcal{K} = \mathrm{dom}(N)$.

Sea $x_1 \in \mathcal{K}$, luego $x = N^{-1}x_1 \in \mathrm{dom}(N^2) \subset \mathcal{K}$, entonces

$$(I\otimes N)(cI - \widetilde{L})N^{-1}x_1 = (I\otimes N)(cI - \widetilde{L})x = (I\otimes N)(\sum_{j\in J}\{c_j|j\rangle\otimes x - \lambda_j|j\rangle\otimes a_j x\})$$

$$= \sum_{j\in J}\{c_j|j\rangle \otimes Nx - \lambda_j|j\rangle \otimes Na_j x\}$$

el operador está bien definido, pues $x \in \mathrm{dom}(N^2) \subset \mathcal{K}$, entonces $Na_0x = (\sqrt{n}(n-1)x_{n-1})_{n=2}^\infty$ y calculando, tenemos

$$\sum_{n=2}^\infty (\sqrt{n}(n-1))^2|x_n|^2 = \sum_{n=2}^\infty n(n-1)^2|x_n|^2 < \sum_{n=1}^\infty n^4|x_n|^2 < \infty;$$

por lo tanto, $Na_0x \in l^2$, de manera análoga se puede ver que $Na_1x \in l^2$.

Ahora veremos que el operador $(I \otimes N)(cI - \tilde{L})N^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathbb{C}^2 \otimes l^2)$. Sea $x_1 \in \mathcal{K}$, y $x = N^{-1}x_1 \in \mathrm{dom}(N^2) \subset \mathcal{K}$, calculando tenemos

$$(I \otimes N)(cI - \tilde{L})N^{-1}x_1 = (I \otimes N)(cI - \tilde{L})x = \sum_{j\in J}\{c_j|j\rangle \otimes Nx - \lambda_j|j\rangle \otimes Na_jx\},$$

entonces

$$||(I \otimes N)(cI - \tilde{L})N^{-1}x_1||_{\mathbb{C}^2\otimes l^2} = ||\sum_{j\in J}\{c_j|j\rangle \otimes Nx - \lambda_j|j\rangle \otimes Na_jx\}||_{\mathbb{C}^2\otimes l^2}$$

$$\leq \sum_{j\in J}\{||c_j|j\rangle\otimes Nx||_{\mathbb{C}^2\otimes l^2} + ||\lambda_j|j\rangle\otimes Na_jx||_{\mathbb{C}^2\otimes l^2}\} = \sum_{j=0}^{1}\{|c_j|||Nx||_{l^2} + \lambda_j||Na_jx||_{l^2}\}.$$

Ahora, teniendo en cuenta la relación de conmutación $[a_0, a_1] = 1$ se prueba que $Na_0 = a_0(N-1)$, entonces tomando $x_1 \in \mathcal{K}$ y considerando que a_0 es acotado en $\mathcal{K}$ y que $||a_0||_{\mathcal{B}(\mathcal{K};\mathcal{H})} \leq 1$, tenemos, para $x_1 \in \mathcal{K}$ y $x = N^{-1}x_1 \in \mathrm{dom}(N^2) \subset \mathcal{K}$:

$$\begin{aligned} ||Na_0x||_{l^2} &= ||a_0(N-1)x||_{l^2} \leq ||(N-1)N^{-1}x_1||_{\mathcal{K}} \\ &\leq ||x_1||_{\mathcal{K}} + ||N^{-1}x_1||_{\mathcal{K}} = ||x_1||_{\mathcal{K}} + ||x_1||_{l^2} \leq 2||x_1||_{\mathcal{K}}. \end{aligned}$$

También, teniendo en cuenta la relación de conmutación y que a_1 es acotado en $\mathcal{K}$ se prueba de manera análoga que

$$||Na_1x||_{l^2} \leq ||(N-1)N^{-1}x_1||_{\mathcal{K}} \leq 2||x_1||_{\mathcal{K}}.$$

Esto demuestra que $(I \otimes N)(cI - \tilde{L})N^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathbb{C}^2 \otimes l^2)$. □

4.4. El caso de coeficientes acotados y multiplicidad arbitraria

En esta sección discutiremos cómo nuestro enfoque se relaciona con el resultado de M. Gregoratti [19], en el caso de coeficientes acotados. Para iniciar consideraremos algunas propiedades del adjunto del operador C_0.

Sea

$$N_s = \left\{u \in \mathrm{D}(\nabla) : \sum_{n\geq 0} n\|u_n|_{\{r_n=s\}}\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^{(n-1)},\varsigma^{\otimes n}_s\otimes\mathbb{R})} < \infty\right\}$$

y denotemos por $\mathcal{C}_1$ la restricción de the $\mathcal{C}$ al subespacio

$$\mathrm{dom}(\mathcal{C}) \cap N_{0\pm} = \{u \in N_{0\pm} : (a_- - Wa_+ - \hat{L})u = 0\}.$$

M. Gregoratti demostró en [19] que $\mathcal{C}_1$ es un operador simétrico, de hecho esto se puede verificar directamente como en el Teorema 3.5.2 aplicando la condición de frontera y la fórmula de integración por partes generalizada, demostrada por el mismo Gregoratti en [20].

Claramente se tiene que $\mathbf{D}_0 \subset \mathrm{D}(\mathcal{C}) \cap \mathrm{N}_{0\pm}$ y, por lo tanto, $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}_1$. Consecuentemente $\mathcal{C}_1^* \subset \mathcal{C}_0^*$ y $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_1^*$, pues $\mathcal{C}_1$ es simétrico. Entonces tenemos que $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_0^*$.

Usando nuevamente que $\mathcal{C}_0$ y $\mathcal{C}_1$ son simétricos y, por lo tanto, cerrables, obtenemos que

$$\bar{\mathcal{C}}_0 = \mathcal{C}_0^{**} \subset \mathcal{C}_1^{**} = \bar{\mathcal{C}}_1. \tag{1}$$

Sospechamos que

(A) $\mathcal{C}_0^* \subset \mathcal{C}_1$, pero hasta ahora no tenemos una demostración de esto.

Veamos algunas consecuencias de esta conjetura. La primera consecuencia de **(A)** es que se tendría $\mathcal{C}_1^* \subset \mathcal{C}_0^{**} = \bar{\mathcal{C}}_0$. Entonces, usando (1) y la parte (c) del Teorema 5.3 en [31] obtenemos que $\bar{\mathcal{C}}_1^* = \mathcal{C}_1^* \subset \bar{\mathcal{C}}_1$. Además, usando que $\bar{\mathcal{C}}_1$ también es simétrico vemos que $\bar{\mathcal{C}}_1 \subset \bar{\mathcal{C}}_1^*$. Por lo tanto, $\bar{\mathcal{C}}_1 = \bar{\mathcal{C}}_1^*$, i.e., $\mathcal{C}_1$ es esencialmente autoadjunto. Este es el resultado obtenido por Gregoratti en [19].

Otra consecuencia de **(A)** es la siguiente: tendríamos que $\mathcal{C}_0^* \subset \bar{\mathcal{C}}_1$, por lo tanto, $\bar{\mathcal{C}}_1 = \bar{\mathcal{C}}_1^* \subset \bar{\mathcal{C}}_0$. Esto junto con (1) implican que $\bar{\mathcal{C}}_1 = \bar{\mathcal{C}}_0$, i.e., $\mathcal{C}_0$ también es esencialmente autoadjunto.

Conclusiones y perspectivas

En este trabajo hemos obtenido condiciones suficientes para que $\mathcal{C}$ sea un operador densamente definido y simétrico en el caso de coeficientes no acotados, no necesariamente conmutativos y multiplicidad arbitraria, lo cual constituye una extensión necesaria de la teoría desarrolladas hasta ahora por A.M. Chebotarev y M. Gregoratti. También hemos dado condiciones suficientes para que $-i\mathcal{C}$ sea restricción del generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo de isometrías, en términos de los índices de defecto de $\mathcal{C}$. Hemos aplicado nuestra teoría a dos ejemplos que no pueden tratarse con los resultados de los autores antes mencionados. También indicamos cómo nuestra teoría se aplica para obtener el resultado de Gregoratti [19].

El estudio del operador $\mathcal{C}$ se podría continuar a lo largo de las siguientes vertientes:

1.- Caracterizar el adjunto $\mathcal{C}_0^*$ de $\mathcal{C}_0$.

2.- Calcular los índices de defecto de $\mathcal{C}_0$ en ejemplos importantes.

3.- Dar condiciones suficientes para la autoadjunticidad de $\mathcal{C}$.

4.- Dar condiciones suficientes para que los índices de defecto de $\mathcal{C}_0$ satisfagan la condición de la Proposición 2.4.1.

5.- En su caso, estudiar extensiones autoadjuntas de $\mathcal{C}_0$.

6.- Aplicar la teoría a nuevos ejemplos provenientes de modelos interesantes de la física cuántica.

7.- Estudiar la relación de $\mathcal{C}$ con el correspondiente generador infinitesimal de Lindblad y Gorini-Kossakowski-Sudarshan, especialmente relacionar las condiciones suficientes para markovianidad del semigrupo minimal y la autoadjunticidad de $\mathcal{C}$.

8.- Estudiar la dinámica del sistema acoplado con su medio ambiente, mediante el operador $\mathcal{C}$.

Bibliografía

[1] Accardi L. *Noise and Dissipation in Quantum Theory,*. Rev. Math. Phys. 2, 127-176, (1990).

[2] Accardi L. Y.G. Lu, I. Volovich, *Quantum theory and its stochastic limit.* Springer-Verlag, Berlin, (2002).

[3] Arveson, W. *Ten Lectures on Operator Algebras*; Conference Board of the Mathematical Sciences AMS 55: Providence R.I., 1983.

[4] Bratteli, O; Robinson, D.W. *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*; Springer-Verlag: New York, 1981.

[5] Carbone R. *Exponential ergodicity of some quantum Markov semigroups*, Ph.D. Thesis, Universitá degli Studi di Milano; 2000, 1-93.

[6] Chebotarev, A.M. *Lectures on Quantum Probability*; SMM Aportaciones Matemáticas (Textos nivel avanzado) 14: México, 2000.

[7] Chebotarev, A.M. *What is a quantum stochastic differential equation from the point of view of functional analysis?* Math. Notes 2002, 71, 408-427.

[8] Emmanuele DiBenedetto; *Partial differential equations*; Birkhäuser: Basel, 1995.

[9] Fagnola F. and R. Quezada; *Two photon absorption and emision process*, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and related Topics 8, 573-591, 2005.

[10] Fagnola, F. *Quantum Markov semigroups and quantum Markov flows*, Proyecciones (Rev. Mat.) 18, 1999, 1-144.

[11] Frigerio, A. *Covariant Markov dilations of quantum dynamical semigroups.* Publ. RIMS Kyoto Univ. 1985, 21, 657-675.

[12] Frigerio, A. *Construction of stationary quantum Markov processess through quantum stochastic calculus.* In *Quantum Probability and applications II*, Lect. Notes in Math. 1136, Berlin: Springer-Verlag, 207-222, 1985.

[13] García J.C. *Una clase de transformaciones completamente positivas no acotadas y conservatividad de la solución minimal de la ecuación maestra.* Tesis de Doctorado, UAM-I, México, 1998.

[14] García J.C.; Quezada R. *Hille-Yosida estimate and nonconservativity criteria for quantum dynamical semigroups.* Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. 2004, 7, 383-394.

[15] García J.C.; Quezada R. *A priori estimates for a class of quantum dynamical semigroups*, in Proc. IV Simposio de Probabilidad Procesos Estocásticos, Aport. Mat. 12 SMM, 1998, 215-231.

[16] García J.C.; Quezada R. *Conditions for nonconservativity in quantum dynamical semigroups.* Contemporary Mathematics, vol 336, 2003, 161-169.

[17] González-Gaxiola O.; Quezada R. *On the infinitesimal generator of a Quantum Stochastic Differential Equation*, Stochastic Models. 2006, 22, 561-572.

[18] Gregoratti, M. *On the Hamiltonian Operator Associated to Some Quantum Stochastic Differential Equations.* Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. 2000, 3, 483-503.

[19] Gregoratti, M. *The Hamiltonian Operator Associated with Some Quantum Stochastic Evolutions.* Comm. Math. Phys. 2001, 222, 181-200.

[20] Gregoratti, M. *Traces of Sobolev functions with one square integrable directional derivative.* Math. Meth. Appl. Sci. 2006, 29, 157-171.

[21] Gilles L. and P.L. Knight; *Two-photon and nonclassical states of light*, *Phys. Rev. A*, 48, no. 2, (1993) 1582–1593.

[22] Holevo Alexander S. *Statistical Structure of Quantum Theory*; Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2001.

[23] Klaus-Jochen E. Rainer Nagel; *One-parameter semigroups for linear evolution equations*; Springer, New York, 1999.

[24] Maassen, H. *Quantum Markov processes on Fock space described by integral kernels*. In *Quantum Probability and applications II*, Lect. Notes Math. 1136, Springer-Verlag: Berlin, 1985; 361-374.

[25] Mc Bride A. C. *Semigroup of Linear Operator: An Introduction*; Longman Scientific and Technical, New York, 1987.

[26] M. Reed and Barry Simon, W. *Methods of Modern Mathematical Physics*; Vol I, Academic Press, New York, 1970.

[27] M. Göppert-Mayer; *Über Elementarakte mit zwei Quantensprüngen*, *Ann. Physics*, **9**, (1931) 273–294.

[28] Parthasarathy, K.R. *An Introduction to Quantum Stochastic Calculus*; Birkhäuser: Basel, 1992.

[29] Pazy, A. *Semigroups of Linear Operator and Applications to Partial Differential Equations*; Springer-Verlag: New York, 1983.

[30] V. P. Belavkin, V. N. Kolokol'tsov; *Stochastic evolution as a quasiclassical limit of a boundary value problem for Schrödinger equations*. Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. 2002, vol 5, 61-91.

[31] Weidmann, J. *Linear operators in Hilbert spaces*; Graduate texts in mathematics **68**, Springer-Verlag: New York, 1980.

[32] W. Kaiser and C.G.B. Garret; *Two-photon Exitation in* $CaF_2{:}Eu^{2+}$, *Phys. Rev. Lett.*, 7, (1961) 229–231.

[33] W. von Waldenfels; *Symmetric differentiation and Hamiltonian of quantum stochastic process*. Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. 2005, vol 8, 73-116.